



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

**EFFECTOS CAÓTICOS CLÁSICOS Y
ELECTROMAGNÉTICOS EN
ESTRUCTURAS QUE CONTIENEN
INCLUSIONES DE DISTINTOS
MATERIALES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

PRESENTA:

LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
L.C.F.M. Karla Ivonne Serrano Arévalo

ASESOR:

DOCTOR EN CIENCIAS EN ÓPTICA
HÉCTOR I. PÉREZ AGUILAR

CO-ASESOR:

MAESTRO EN CIENCIAS
GABRIEL ARROYO CORREA



MORELIA, MICH.

FEBRERO 2022

“Conserva celosamente tu derecho a a reflexionar, porque incluso el hecho de pensar erróneamente es mejor que no pensar en absoluto”.

Hipatia de Alejandría.

A mis padres... porque ustedes me inculcaron el arte de reflexionar.

Con amor infinito, Karla.

Dedicatoria

Mi dedicación en especial es al apoyo incondicional de mi familia. A mis padres Martha Areválo y Raúl Serrano por estar siempre presentes, por todo el amor, por todos los consejos, por inculcarme desde siempre sus buenos valores y sus hermosos principios, por siempre llenarme de su sabiduría.

A mis hermanos Tania Serrano y Kevin Serrano, por apoyarme siempre en cada momento de la vida, por alegrarme los días y por estar siempre de manera incondicional.

A mi pequeña sobrina Issis Serrano por alegrarme los días, por darme paz y por ser una luz en mi vida.

Sinceramente:

Karla Ivonne Serano Arévalo

Agradecimientos

De manera especial agradezco al Dr. Héctor I. Pérez Aguilar y al M.C. Gabriel Arroyo Correa por todo el apoyo brindado para llevar a cabo este proyecto de investigación.

Gracias Dr. Héctor por toda su paciencia, por su ayuda, por estar siempre pendiente y por las horas dedicadas. Gracias M.C. Gabriel por continuar apoyándome en todo momento, por compartir conmigo sus conocimientos, por el tiempo y la paciencia también. Me es grato decir que no podría haber elegido mejores asesores de tesis que ustedes, con toda esa calidad humana para transmitir sus conocimientos. Por toda la atención y la preocupación por mí, por su amabilidad, por los consejos escolares y por los consejos de vida, por abrirme las puertas una vez más, por siempre GRACIAS.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante mis estudios de posgrado.

Agradezco a los miembros que forman parte de mi comité tutorial: al Dr. Joaquín Estévez, la Dra. Yesenia Arredondo y al Dr. Francisco Dominguez quienes cordialmente aceptaron colaborar para la revisión de este trabajo. Por sus consejos y sugerencias durante la elaboración del mismo, muchas gracias también a ustedes.

Al Dr. Hugo Enrique Alva y a mi compañero Alejandro Bucio por su apoyo, orientación y ayuda en las dudas surgidas.

De igual forma deseo agradecer con mucho afecto y especial cariño a mi familia, padres, hermanos, tíos, primos, abuelos, padrinos y todos esos amigos quienes me dieron una palabra de aliento y me motivaron a seguir con mucho empeño en mis estudios. Para ellos, de corazón mi eterno agradecimiento.

A las personas que están y que estuvieron, a cada una de las personas que me acompañaron en el camino. A quienes guardo y siempre llevo en mi corazón, mi más sincero agradecimiento.

Resumen

En el presente trabajo hemos realizado un estudio teórico y numérico sobre el comportamiento del fenómeno del caos clásico para el sistema de billares de Sinai, así como de los efectos caóticos en guías de ondas de cristal fotónico (PCW) de tamaño infinito y finito con inclusiones cilíndricas de distintos materiales.

El sistema de billares de Sinai consiste en representar el movimiento de una partícula libre rebotando dentro de una región acotada del espacio. El sistema consiste en una partícula que se mueve en el plano dentro de un cuadrado y en cuyo centro se coloca una inclusión circular. Entre las colisiones que experimenta la partícula con las paredes del cuadrado y el perímetro del obstáculo, la partícula se mueve de manera libre y siguiendo una trayectoria rectilínea. Para realizar el estudio numérico del comportamiento de dicho sistema utilizamos el programa desarrollado por Lansel y Porter para poder simular la dinámica de billares clásicos. Una vez analizada la dinámica en los billares, se estudiaron también los mapas de Lorenz para observar los comportamientos caóticos del sistema clásico. Las guías de ondas de cristal fotónico están compuestas por superficies planas paralelas con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares de conductor real y de materiales izquierdos dispersivos. Para abordar estos problemas, hicimos uso de una técnica numérica conocida como el Método de la Ecuación Integral (IEM), que nos permitió obtener un sistema de ecuaciones integrales acopladas que involucran como incógnitas el campo y su derivada normal evaluados en las superficies involucradas. Se calcularon algunas propiedades estadísticas de las intensidades obtenidas; en particular, la función de autocorrelación (ACF) y la longitud de correlación, que nos permitieron identificar el fenómeno de caos electromagnético. Se analizó el caso clásico correspondiente por medio de los mapas de Poincaré y se realizó un comparativo equivalente con el caso electromagnético (patrones de la intensidad del campo desordenados). Una de las posibles aplicaciones de los resultados obtenidos es que se pueden aplicar, como ocurre en los esquemas tradicionales de sincronización de caos y diseñar configuraciones específicas para encriptar información.

Palabras clave: Billar de Sinai, mapas de Poincaré, mapas de Lorenz, guía de ondas de cristal fotónico, materiales izquierdos dispersivos, método de la ecuación integral.

Abstract

In the present work we have carried out a theoretical and numerical study on the behavior of the classical chaos phenomenon for the Sinai billiard system, as well as chaotic effects in photonic crystal waveguides (PCW) of infinite and finite size with cylindrical inclusions of different materials.

The Sinai billiard system consists of representing the motion of a free particle bouncing within a bounded region of space. The system consists of a particle moving in the plane within a square and a circular inclusion is placed in the center of the square. Between the collisions of the particle with the walls of the square and the perimeter of the obstacle, the particle moves freely and follows a rectilinear trajectory. In order to carry out the numerical study of the behavior of this system, we used the program developed by Lansel and Porter to simulate the dynamics of classical billiards. Once the dynamics of the billiards were analyzed, Lorentz maps were also studied to observe the chaotic behavior of the classical system. By parallel planar surfaces with a periodic arrangement of circular cylindrical inclusions of real conductor and dispersive left-handed materials. To address these problems, we made use of a numerical technique known as the Integral Equation Method (IEM), which allowed us to obtain a system of coupled integral equations that involve as unknowns the field and its evaluated on the surfaces involved. Some statistical properties of the intensities obtained were calculated; in particular, the autocorrelation function (ACF) and the correlation length, which allowed us to identify the electromagnetic chaos phenomenon. The corresponding classical case was analyzed by means of Poincaré maps and an equivalent comparison was made with the electromagnetic case (disordered field strength patterns). One of the possible applications of the obtained results is that they can be applied, as in traditional chaos synchronization schemes, to design specific configurations for encrypting information.

Key words: Sinai billiards, Poincaré maps, Lorenz maps, photonic crystal waveguide, dispersive left-handed materials, integral equation method.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Estructura de la tesis	6
2. Estudio del fenómeno del caos clásico para el sistema de billares de Sinai	8
2.1. Dinámica no lineal y caos	9
2.2. Cuantificación del caos	11
2.2.1. Exponentes de Lyapunov	11
2.2.2. Mapas de Poincaré	12
2.2.3. Mapas de Lorenz	14
2.2.4. Función de Autocorrelación	16
2.3. Entropía e intensidad media de la imagen	17
2.4. Sistemas de billares	18
2.5. Desarrollo del algoritmo para el estudio numérico	20
2.5.1. Mapeo del billar	24
3. Estudio del fenómeno electromagnético en una guía de ondas de cristal fotónico	27
3.1. Estudio de los materiales	28
3.2. Propagación de la luz a través de la materia	32
3.2.1. Campos macroscópicos y ecuaciones de Maxwell	32
3.2.2. Modelo de Drude	34
3.3. El Método de la Ecuación Integral	38
3.3.1. Descripción del Método Integral	39

4. Resultados	56
4.1. Fenómeno del caos clásico para el sistema del billar de Sinai	56
4.2. Estudio del fenómeno del caos electromagnético en una guía de ondas de cristal fotónico	67
4.2.1. Respuesta óptica de la PCW que contiene un arreglo de inclusiones cilíndricas de conductor real	68
4.2.2. Respuesta óptica de la PCW que contiene un arreglo de inclusiones cilíndricas de metamaterial dispersivo	71
5. Conclusiones	75
Bibliografía	77

Índice de figuras

1.1. Mapa de Lorenz	3
2.1. Sección de Poincaré	13
2.2. Atractor extraño de Lorenz	14
2.3. Mapa de Lorenz.	15
2.4. Intensidad media de la imagen	18
2.5. Movimiento de fotones en un billar periódico	19
2.6. Billar de Sinai	21
2.7. Partícula rebotando en la esquina del billar	23
3.1. Ejemplos de una estructura fotónica	29
3.2. Cristales fotónicos en la naturaleza	30
3.3. Detalles distinguibles dependiendo de la longitud de onda	31
3.4. Diagrama de una guía de ondas infinita con inclusiones cilíndricas.	40
3.5. Diagrama de una guía de ondas finita con inclusiones cilíndricas.	49
4.1. Consideraciones geométricas para el billar de Sinai	57
4.2. Configuración de salida de un rayo para un radio mediano	57
4.3. Espacio de configuración del billar de Sinai con una inclusión circular de radio pequeño y radio grande	59
4.4. Gráficos comparativos de I_m e E_i para una inclusión de radio pequeño .	60
4.5. Gráficos comparativos de I_m e E_i para una inclusión de radio mediano	60
4.6. Gráficos comparativos de I_m e E_i para una inclusión de radio grande .	60
4.7. Histogramas representativos para un sistema sin inclusión	61
4.8. Histogramas representativos para un sistema con una inclusión de radio muy pequeño	62
4.9. Espacio de configuración para la distancia R y mapas de Lorenz para un sistema sin inclusión y con inclusión muy pequeña.	63
4.10. Comparativo de los mapas de Lorenz para los casos sin inclusión y con inclusión pequeña	64
4.11. Comparativo de las entropías de imagen para TN y TC	65
4.12. Trayectorias sin inclusión (TN) y con inclusión (TC), para los casos G_1 , G_3 y G_6	66
4.13. Series para las trayectorias sin inclusión (TN) y con inclusión (TC), para los casos G_1 , G_3 y G_6	66

4.14. Gráficas comparativas de los mapas de Lorenz para G_1 , G_2 y G_3	67
4.15. Patrones de intensidad electromagnética en una celda unitaria de la PCW infinita con inclusiones cilíndricas de plata y sus representativas funciones de autocorrelación.	69
4.16. Patrones de intensidad electromagnética en una PCW finita con 3 inclusiones cilíndricas de plata y sus representativas funciones de autocorrelación.	71
4.17. Permitividad eléctrica y permeabilidad magnética de un LHM dispersivo	72
4.18. Patrones de intensidad electromagnética en una celda unitaria de la PCW infinita con inclusiones cilíndricas de LHM y sus representativas funciones de autocorrelación.	74

Índice de tablas

4.1. Tabla de nomenclatura	58
4.2. Tabla de geometrías para el análisis de trayectorias.	65

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

A mediados del siglo XVII, cuando Newton inventó las ecuaciones diferenciales, descubrió sus leyes del movimiento y la gravitación universal, y las combinó para explicar las leyes del movimiento planetario de Kepler. Específicamente, Newton resolvió el problema de los dos cuerpos: el problema de calcular el movimiento de la tierra alrededor del sol. Las generaciones posteriores de matemáticos y físicos intentaron extender los métodos analíticos de Newton al problema de los tres cuerpos (por ejemplo, el sol, la tierra y la luna) pero, curiosamente, este problema resultó ser mucho más difícil de resolver. Después de décadas de esfuerzo, finalmente se dio cuenta de que el problema de los tres cuerpos era esencialmente imposible de resolver, en el sentido de obtener fórmulas explícitas para los movimientos de los tres cuerpos. En este punto, la situación parecía desesperada.

El gran avance se produjo con el trabajo de Poincaré a fines del siglo XIX. Introdujo un nuevo punto de vista que enfatizaba las cuestiones cualitativas en lugar de las cuantitativas. Por ejemplo, en lugar de preguntar las posiciones exactas de los planetas en todo momento, preguntó: “¿Es el sistema solar estable para siempre, o algunos planetas eventualmente volarán hasta el infinito?” Poincaré desarrolló un poderoso enfoque geométrico para analizar tales preguntas. Ese enfoque ha florecido en el tema moderno

de la dinámica, con aplicaciones que van mucho más allá de la mecánica celeste. Poincaré también fue la primera persona en vislumbrar la posibilidad del caos, en el que un sistema determinista exhibe un comportamiento aperiódico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales, lo que hace imposible la predicción a largo plazo [1].

Pero el caos quedó en un segundo plano en la primera mitad del siglo XX; en cambio, la dinámica se ocupaba en gran medida de los osciladores no lineales y sus aplicaciones en física e ingeniería. Los osciladores no lineales desempeñaron un papel fundamental en el desarrollo de tecnologías como la radio, el radar, los bucles de enganche de fase y los láseres. En el lado teórico, los osciladores no lineales también estimularon la invención de nuevas técnicas matemáticas cuyos pioneros en esta área incluyen a van der Pol, Andronov, Littlewood, Cartwright, Levinson y Smaleb [2, 3]. Mientras tanto, en un desarrollo separado, los métodos geométricos de Poincaré se estaban ampliando para producir una comprensión mucho más profunda de la mecánica clásica, gracias al trabajo de Birkhoff y más tarde de Kolmogorov, Arnol'd y Moser [4] .

La invención de la computadora de alta velocidad en la década de 1950 fue un punto de inflexión en la historia de la dinámica. La computadora permitió experimentar con ecuaciones de una manera que antes era imposible y, por lo tanto, desarrollar cierta intuición sobre los sistemas no lineales. Tales experimentos llevaron al descubrimiento de Lorenz en 1963 del movimiento caótico en un atractor extraño [5]. Estudió un modelo simplificado de rolos de convección en la atmósfera para comprender mejor la notoria imprevisibilidad del clima. Lorenz descubrió que las soluciones de sus ecuaciones nunca se establecieron en equilibrio o en un estado periódico, sino que continuaron oscilando de manera irregular y aperiódica. Además, comenzó sus simulaciones a partir de dos condiciones iniciales ligeramente diferentes, cuyos comportamientos resultantes pronto se volverían totalmente diferentes. La implicación era que el sistema era intrínsecamente impredecible: pequeños errores al medir el estado actual de la atmósfera (o cualquier otro sistema caótico) se amplificarían rápidamente, lo que eventualmente conduciría a

pronósticos vergonzosos. Pero Lorenz también demostró que había una estructura en el caos: cuando se representaba en tres dimensiones, las soluciones de sus ecuaciones caían en un conjunto de puntos con forma de mariposa (Fig 1.1) [1].

El trabajo de Lorenz tuvo poco impacto hasta la década de 1970, los años de auge

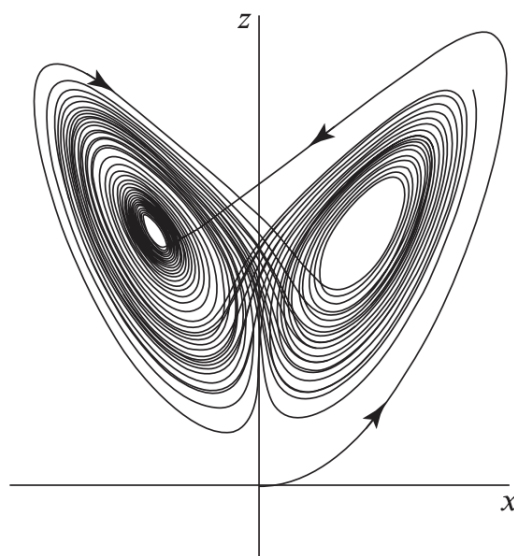


Figura 1.1: El mapa de Lorenz es un sistema que aparentemente tiene un comportamiento irregular y que es sensible a pequeños cambios en sus condiciones iniciales. La imagen fue tomada de la Ref. [1]

del caos. Estos son algunos de los principales acontecimientos de esa gloriosa década. En 1971, Ruelle y Takens propusieron una nueva teoría para el inicio de la turbulencia en los fluidos, basada en consideraciones abstractas sobre atractores extraños [6] [7]. Unos años más tarde, May encontró ejemplos de caos en mapeos iterativos que surgían en biología de poblaciones y escribió un influyente artículo de revisión que enfatizaba la importancia pedagógica de estudiar sistemas no lineales simples, para contrarrestar la intuición lineal a menudo engañosa fomentada por la educación tradicional [8]-[10]. Luego vino el descubrimiento más sorprendente de todos, debido al físico Feigenbaum. Descubrió que existen ciertas leyes universales que gobiernan la transición del comportamiento regular al caótico [11]-[13]. En términos generales, los sistemas completamente diferentes pueden volverse caóticos de la misma manera. Su trabajo estableció un víncu-

lo entre el caos y las transiciones de fase y atrajo a una generación de físicos al estudio de la dinámica. Finalmente, experimentadores como Gollub, Libchaber, Swinney, Lindsay, Moon y Westervelt probaron las nuevas ideas sobre el caos en experimentos con fluidos, químicas reacciones, circuitos electrónicos, osciladores mecánicos, y semiconductores [14, 17].

En específico en la actualidad existen muchos trabajos acerca del caos en sistemas dinámicos no lineales que utilizan circuitos eléctricos. Un ejemplo clásico es el sistema de Chua debido a su robustez, bajo costo en su construcción y gran variedad de regímenes dinámicos que presenta [18, 19]. Este sistema es de los pocos en que el comportamiento caótico tiene comprobación teórica, experimental y numérica; por ser simple de construir, lo que permite manipular fácilmente algunos de sus parámetros y mostrar una amplia gama de fenómenos relacionados con el comportamiento caótico [20]. A medida que ha aumentado el interés científico hacia el estudio de los fenómenos caóticos, el circuito electrónico de Chua ha ido obteniendo una gran importancia como objeto experimental, para analizar los más variados fenómenos, tales como: control y sincronización del caos, análisis de bifurcaciones y atractores; en aplicaciones como las comunicaciones seguras, biología, química, sonido y música, etc. [20].

Por otro lado el estudio de sistemas en los que hay una propagación y esparcimiento de ondas clásicas y cuánticas es un tema de gran interés actual desde un punto de vista científico y aplicado [21]. Esto no es de sorprenderse puesto que las ondas al interactuar con la materia exhiben comportamientos peculiares, cuyo estudio ha sido resultado en grandes avances de la comunicación, detección y medición [22, 23]. Este panorama presenta problemáticas actuales que se vuelven cada vez más difíciles de abordar, englobando con ello, una gran cantidad de fenómenos electromagnéticos, ópticos, acústicos, cuánticos, etc. Así, entre los sistemas que presentan el fenómeno de

caos podemos destacar las guías de ondas de cristal fotónico (PCWs¹) o cuánticas; las cuales, bajo ciertas circunstancias, presentan el fenómeno de caos [24, 25]. Algunos de estos sistemas pueden ser comparados con sistemas clásicos de geometrías análogas que presentan el fenómeno de caos [26]-[29]. Claro esto no sólo es cuestión de un análisis teórico, también se han obtenido resultados experimentales sobre el comportamiento caótico, en particular, en fibras ópticas con sección transversal no circulares donde los rayos de luz exhiben una dinámica caótica [30]. Esta dinámica en sistemas de guías de ondas, puede ser modelada a través de la intensidad del campo al interactuar en la guía, mostrando bajo ciertas condiciones patrones irregulares.

Estos patrones irregulares se describen mejor mediante métodos de teoría de probabilidad y estadísticas. Para explicar estos patrones irregulares, en algunos trabajos se ha considerado que la geometría de las guías de onda infinitas tienen una analogía a sistemas clásicos conocidos como billares de Sinai. Esto permite estudiar sus propiedades de transporte cuánticas y clásicas [24]. Además es bien sabido que una guía de ondas de cristal fotónico infinita tiene asociada una estructura de bandas [31], lo cual es de vital importancia en el estudio de propiedades estadísticas en este tipo de sistemas. Es importante recalcar que para frecuencias altas se tiene el límite de la óptica geométrica, de donde se obtiene una analogía con sistemas clásicos que presentan el fenómeno de caos electromagnético [24]. Un entendimiento pleno del caos en este tipo de sistemas podría dar lugar a grandes aportes en áreas como la criptografía y en circuitos ópticos integrados.

El interés de este trabajo es estudiar el fenómeno del caos clásico mediante un análisis numérico para el sistema de billares de Sinai así como el estudio del fenómeno del caos electromagnético en PCWs con superficies planas con un arreglo periódico de inclu-

¹Pos sus siglas en inglés, *Photonic Crystal Waveguides*.

siones cilíndricas, tanto de metal como de “Metamateriales” o “Materiales Izquierdos” (LHMs²). Cabe señalar que la guía de ondas tiene un tamaño finito; sin embargo, se puede modelar para un tamaño infinito. Para estudiar el comportamiento de la luz en este tipo de sistemas se requiere dominar no sólo los aspectos teóricos si no también los modelos numéricos. Así, el estudio de la propagación de la luz en PCWs se basa en métodos numéricos que ha desarrollado el grupo de cristales fotónicos de la FCFM de la UMSNH, para el estudio de estructuras de bandas en caso de tratarse de una guía de tamaño infinito y de la respuesta óptica para tamaño finito.

1.2. Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis está estructurado de la siguiente manera:

- En el capítulo II se presentan algunos aspectos generales en cuanto a la dinámica no lineal y el caos, así como los métodos de cuantificación del mismo. Además de dos parámetros muy importantes para nuestro estudio; la entropía e intensidad media de la imagen. Por último mostramos los sistemas de billares y el desarrollo del algoritmo para el estudio numérico de nuestro sistema.
- En el capítulo III analizamos el estudio de los materiales y la propagación de la luz a través de la materia. También se da una descripción del método numérico, conocido como el Método de la Ecuación Integral. El cual, se utiliza para obtener patrones de modos electromagnéticos de una guía de ondas de tamaño infinito y finito con superficies planas y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas que contienen algún material en la celda unitaria.
- En el capítulo IV se muestran los resultados obtenidos al analizar el caso clásico mediante los mapas de Lorenz y Poincaré. Así como los resultados obtenidos para

²Por sus siglas en inglés, Left Handed Material.

el análisis del caso electromagnético para los sistemas finito e infinito considerados en este trabajo. Ambos sistemas están formados por placas paralelas que envuelven un arreglo de inclusiones cilíndricas circulares de metal y de LHM. Para observar el grado de desorden en el sistema se utilizó la función de autocorrelación y la longitud de correlación.

- Finalmente, en el capítulo V se dan las conclusiones principales después de analizar los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Estudio del fenómeno del caos clásico para el sistema de billares de Sinai

La palabra caos y el adjetivo caótico se usan para describir un sistema que aparentemente tiene un comportamiento aleatorio. Un claro ejemplo de esto es el llamado “efecto mariposa”, que es tal vez la analogía más divulgada para dar a entender que en sistemas dinámicos las pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden conducir a resultados inesperados. Muchos ejemplos interesantes de sistemas dinámicos de problemas dentro de la mecánica clásica, cuántica, estadística, acústica y óptica (especialmente aquellos en que la interacción entre partículas involucra colisiones elásticas) pueden ser reducidos a sistemas de billares. En este capítulo explicaremos algunos de los términos básicos que tenemos que considerar de suma importancia para nuestro estudio del fenómeno clásico.

2.1. Dinámica no lineal y caos

La noción de dinámica ha evolucionado con el tiempo. Ahora cuando hablamos de dinámica, no sólo entendemos el movimiento de los cuerpos celestes y los sistemas mecánicos sólidos, sino cualquier cambio con respecto al tiempo de una o varias variables. Desde ese punto de vista podemos encontrar dinámica por todas partes, en cualquier campo de la ciencia [33].

La dinámica no lineal es la disciplina que tiene por objeto el estudio de los sistemas dinámicos no lineales, que son aquellos sistemas definidos por una o más variables y que evolucionan con el tiempo en los cuales la respuesta no es proporcional al estímulo. El caos es uno de las tres clases de movimiento, además de los movimientos periódico y cuasi periódico. Como es natural, existen tantos sistemas dinámicos como variables que tienen una evolución temporal, lo que nos da idea de la naturaleza interdisciplinar y del alcance de la dinámica no lineal [34]. Como se ha comentado anteriormente, la dinámica es la ciencia que estudia la variación en el tiempo de diferentes magnitudes, es decir su movimiento. Básicamente existen tres tipos de movimientos: los estacionarios y de equilibrio; los periódicos y cuasi periódicos; y por último, los caóticos. Considerando en sentido amplio la noción de movimiento, es fácil de comprender que podamos encontrar sistemas dinámicos en cualquier disciplina científica. Es por ello por lo que se acostumbra a decir que una de las características de la dinámica no lineal sea su interdisciplinariedad, ya que con sus métodos podemos abordar el estudio de muchos fenómenos diferentes que evolucionan con el tiempo.

La palabra caos y el adjetivo caótico se usan para describir un sistema que aparentemente tiene un comportamiento irregular y que es sensible a pequeños cambios en sus condiciones iniciales. Un claro ejemplo de esto es el llamado efecto mariposa, que es tal vez la analogía más divulgada para dar a entender que en sistemas dinámicos caóti-

cos las pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden conducir a resultados inesperados [1].

En la naturaleza, los sistemas de ecuaciones lineales idealizados son poco comunes. Esto se debe a que el comportamiento de las soluciones suele ser impredecibles, complejas y no cumplen el principio de superposición; es decir, son no lineales y muchas veces son caóticos. Los sistemas caóticos regularmente no tienen una solución exacta y en estos casos se recurre a métodos numéricos con lo que se puede hacer una aproximación a, sin perder las soluciones propias del sistema. En cualquier caso en un sistema que presente caos estarán presentes también las siguientes características globales:

- **Determinismo.** Las ecuaciones que describen los sistemas donde aparece el caos clásico no deben tener elementos aleatorios.
- **No linealidad.** Los sistemas que presentan caos son no lineales, al menos débilmente.
- **Dependencia sensible a las condiciones iniciales.** Esta característica se revela cuando analizamos el comportamiento de las trayectorias dentro de un atractor, ya que si observamos el atractor como un todo, en última instancia todas las órbitas que pasan por la cuenca de atracción caen en él.
- **Aperiodicidad.** Las órbitas de los sistemas caóticos son aperiódicas, aunque en el sistema pueden existir (y de hecho por lo general existen) órbitas periódicas, que son muy importantes para calcular algunos parámetros del sistema.
- **Estabilidad global.** Aunque el movimiento de los puntos en el espacio es localmente inestable, los sistemas físicos que se estudian deben tener determinada estabilidad durante un tiempo dado para poder ser estudiados.

2.2. Cuantificación del caos

En la naturaleza, los sistemas de ecuaciones lineales idealizados son poco comunes, esto se debe a que el comportamiento de las soluciones suelen ser impredecibles, complejas y no cumplen el principio de superposición; es decir, son no lineales y muchas veces son caóticos. Sin embargo, distinguir si el sistema tiene comportamiento caótico o hay “ruido” ocasionado por factores externos en el sistema no es tarea fácil. Para ello se debe hacer una identificación cuantitativa calculando parámetros que determinan si el sistema presenta caos. Los sistemas caóticos regularmente no tienen una solución exacta y en estos casos se recurre a métodos numéricos con lo que se puede hacer una aproximación, sin perder las soluciones propias del sistema. A continuación algunos de los parámetros más conocidos se describen brevemente.

2.2.1. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov miden la tasa de separación exponencial de dos trayectorias inicialmente próximas en el espacio fase. Tómese por ejemplo el caso del espacio fase de una dimensión y el sistema dado por

$$f(x) = \frac{dx}{dt}. \quad (2.1)$$

Sean $x_0(t)$ y $x(t)$ un par de trayectorias que surgen de un par de puntos iniciales cercanos del espacio fase x_0 y x , respectivamente. Entonces la distancia $s(t) = x(t) - x_0(t)$ crece o se contrae exponencialmente en el tiempo. Además, expandiendo hasta el primer orden de su serie de Taylor la función $f(x)$ en la Ec. (2.1), se tiene que el cambio en la distancia con la evolución del tiempo está dado por

$$\dot{s}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_0 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0). \quad (2.2)$$

Como esperamos que s cambie exponencialmente en el tiempo, introducimos el exponente λ de Lyapunov como la cantidad que satisface

$$s(t) = s(t=0)e^{\lambda t}. \quad (2.3)$$

Al comparar las Ecs. (2.2) y (2.3) es sencillo notar que el exponente de Lyapunov está dado por la expresión

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0}. \quad (2.4)$$

Similarmente se puede hallar que para un sistema discreto del caso unidimensional, el exponente de Lyapunov está dado por [1]

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_i} \right\}, \quad (2.5)$$

donde n es el número de iteraciones. En ambos casos ya sea un sistema dinámico continuo o discreto, el exponente de Lyapunov es negativo para un atractor de punto fijo, cero para un ciclo límite o un atractor toroidal y positivo para un atractor extraño [1, 35]. La forma de calcular los exponentes de Lyapunov dados en las Ecs. (2.4) y (2.5) y nos permite conocer el valor mayor de los diferentes exponentes de un sistema, ya que hay tantos exponentes de Lyapunov como la dimensión del sistema. Si la dimensión es mayor a uno se puede entender que los exponentes de Lyapunov como la tasa de expansión o contracción de trayectorias para cada una de las direcciones en el espacio fase. Es decir, cada exponente mide el grado de divergencia del atractor en una dirección diferente.

2.2.2. Mapas de Poincaré

Poincaré inventó una técnica matemática muy útil que permite reducir el problema de obtener información sobre la naturaleza de las soluciones de sistemas dinámicos a

uno más simple con menos dimensiones. Se trata de cortar el atractor m -dimensional de un sistema, con una “superficie” $(m-1)$ -dimensional. Esta geometría simplificada, sin embargo, contiene la información “esencial” sobre la periodicidad, la cuasiperiodicidad, bifurcaciones y caos de la dinámica del sistema. La Fig. 2.1 muestra la superficie $(m-1)$ -dimensional denotada por S . Se requiere que S sea transversal al flujo; es decir, todas las trayectorias que comienzan en S fluyen a través de ella, no paralelas a ella.

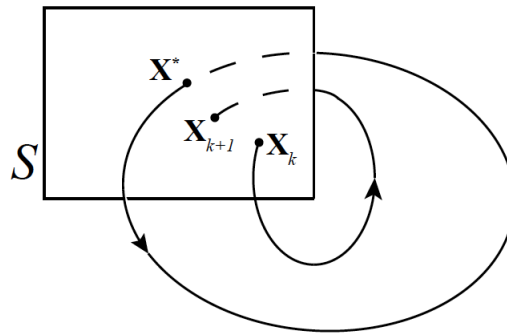


Figura 2.1: Sección de Poincaré para trayectorias en un espacio fase m -dimensional.

El determinismo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema implican la existencia de una función que relacione un punto de intersección \mathbf{x}_i de trayectoria con el siguiente punto de intersección \mathbf{x}_{i+1} . La representación de estos puntos constituye lo que se ha denominado como mapa de Poincaré. El mapa de Poincaré P es un mapeo de S a sí mismo, el cual se obtiene siguiendo trayectorias de una intersección con S con la siguiente. En general, el mapa de Poincaré es descrito por

$$\mathbf{x}_{i+1} = P(\mathbf{x}_i). \quad (2.6)$$

La función P no depende sólo de las ecuaciones originales que describen el sistema, sino también de la elección de la sección de Poincaré. Una forma directa de evaluar el resultado de una sección de Poincaré es evaluando el aspecto de ésta; es decir, si es complejo es indicativo de que puede ser caos. Suponiendo que \mathbf{x}^* es un punto fijo de la Ec. (2.6), esto es, se cumple que $\mathbf{x}^* = P(\mathbf{x}^*)$. Entonces, una trayectoria que empieza

en \mathbf{x}^* vuelve a \mathbf{x}^* después de algún tiempo t , y por lo tanto es una órbita cerrada para el sistema original. Además, al observar el comportamiento de P cerca de este punto fijo, podemos determinar la estabilidad de la órbita cerrada. Así, el mapa de Poincaré convierte los problemas de las órbitas cerradas en problemas de los puntos fijos de un mapeo, aunque no siempre es posible encontrar una fórmula para P .

2.2.3. Mapas de Lorenz

Lorenz (1963) encontró una hermosa manera de analizar la dinámica de su atractor extraño (Fig. 2.2(a)), en donde concluyó:

“La trayectoria aparentemente deja una espiral sólo después de exceder cierta distancia crítica desde el centro. Además, la medida en que se supera esta distancia parece determinar el punto en el que se entra en la siguiente espiral; esto a su vez parece determinar el número de circuitos a ejecutar antes de volver a cambiar de espiral. Por lo tanto, parece que alguna característica única de un circuito dado debería predecir la misma característica del siguiente circuito.”

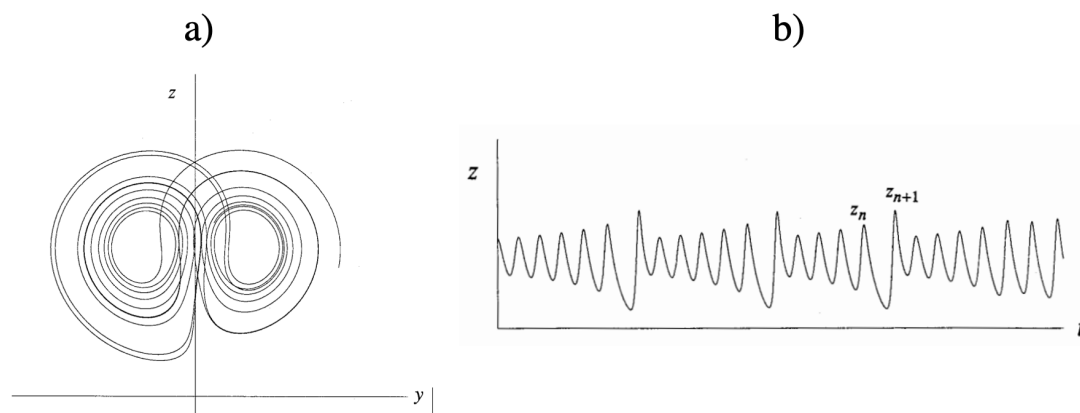


Figura 2.2: (a) Atractor extraño de Lorenz (b) Gráfica de z_{n+1} vs. z_n . Tomados de la Ref. [1].

La “característica única” en la que se enfoca es z_n , el n -ésimo máximo local de $z(t)$ (Fig. 2.2(b)) [1].

La idea de Lorenz es que z_n , debería predecir z_{n+1} . Para verificar esto, integró numéricamente las ecuaciones durante mucho tiempo, luego midió los máximos locales de $z(t)$ y finalmente trazó z_{n+1} vs. z_n . Como se muestra en la Fig. 2.3, *los datos de la serie caótica de tiempo parecen caer perfectamente en una curva*.

Mediante este ingenioso truco, Lorenz pudo extraer orden del caos. La función $z_{n+1} = f(z_n)$ tal como se muestra en la Fig. 2.3 ahora se llama el mapa de Lorenz. Nos dice mucho sobre la dinámica en el atractor: dado z_0 , podemos predecir z_1 , por $z_1 = f(z_0)$, y luego usar esa información para predecir $z_2 = f(z_1)$, y así sucesivamente, arrancando nuestro camino a seguir en el tiempo por iteración.

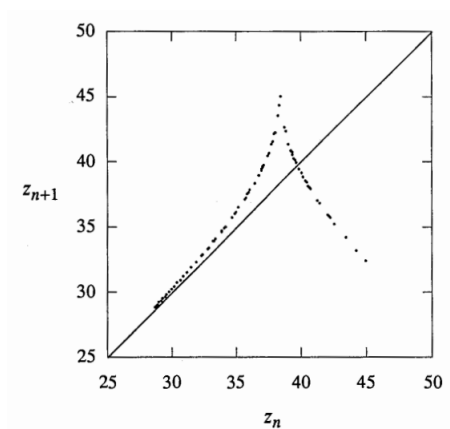


Figura 2.3: Mapa de Lorenz.

El análisis de este mapa iterado nos va a llevar a una conclusión llamativa, pero primero debemos hacer algunas aclaraciones. Primero, el gráfico de la Fig. 2.3 no es en realidad una curva, ya que tiene algo de grosor. Hablando estrictamente, $f(z)$ no es una función bien definida, porque puede haber más de una salida z_{n+1} para una entrada dada z_n . Por otro lado, el grosor es tan pequeño y hay tanto que ganar tratando el gráfico como una curva, que simplemente hará esta aproximación, teniendo en cuenta que el análisis posterior es plausible pero no riguroso. En segundo lugar, el mapa de Lorenz nos puede recordar un mapa de Poincaré. En ambos casos estamos tratando de simplificar el análisis de una ecuación diferencial reduciéndola a un mapa iterado

de algún tipo. Los mapas de Lorenz caracterizan la trayectoria por un sólo número, en cambio los mapas de Poincaré lo hacen por dos. Este enfoque más simple funciona sólo si el atractor es muy “plano”; es decir, casi bidimensional como lo es el atractor de Lorenz.

Así tenemos que las distancias entre el punto de emisión S_0 y los puntos de colisión S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) son los parámetros que definen una serie como función del número de colisión de la siguiente manera:

$$R_n = \overline{S_0 S_n}. \quad (2.7)$$

Los mapas de Lorenz son construidos para las series R_n de la Ec. (2.7).

2.2.4. Función de Autocorrelación

La **correlación** se denota por C_m , donde m es un valor proporcional al tiempo de predicción o estudio del comportamiento de una función. La función de correlación analiza la posible relación de los valores de una función o una serie temporal respecto de los anteriores de esa misma serie, con m intervalos de tiempo antes. Cuando se pretende usar la función en el análisis del comportamiento de un sistema del que se conocen series temporales de datos se procede a representar C_m para valores de $m = 1, 2, \dots, n$, siendo:

$$C_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-m} (x_j - \bar{x})(x_{j+m} - \bar{x}), \quad (2.8)$$

donde, n es el número de datos que se manejan, \bar{x} es el promedio de los datos y x_j es el dato j -ésimo. Estudios como los de Sugihara and May (1990), sugieren que una función de correlación que decrece deprisa con los intervalos de tiempo m indica caos, mientras que una que no lo hace o lo hace y vuelve a aumentar, indica regularidad [36]. La función de autocorrelación o ACF¹ se deriva de la Ec. (2.8) y responde a la pregunta

¹Por sus siglas en inglés, *Autocorrelation Function*.

de qué similitud hay entre el comportamiento de una serie de tiempo en cierto momento y su comportamiento en cualquier momento posterior. Ésta se calcula mediante

$$A_m(t) = \frac{C_m}{C_0}, \quad (2.9)$$

siendo C_m y C_0 la correlación descrita por la Ec. (2.8) y el coeficiente de correlación es la **desviación estándar** σ de la función de autocorrelación y refleja el nivel de caos de una serie temporal, ya que es una medida que se usa para cuantificar la dispersión de un conjunto de datos numéricos. Así mientras la desviación estándar sea más cercana a cero, los datos se encuentran menos dispersos. Es decir, la mayor parte de los datos de una muestra tienden a estar agrupados cerca de su media; mientras que un coeficiente de autocorrelación alto indica que los datos se extienden sobre un rango de valores más amplio [30, 37].

2.3. Entropía e intensidad media de la imagen

Para nuestro problema es de suma importancia conocer dos parámetros importantes, los cuales son la entropía de la imagen (E_i) y la intensidad media de la imagen (I_m) de nuestros sistemas. Para realizar el cálculo de estos dos parámetros hacemos uso del software Wolfram Mathematica, versión 12.

La entropía es una medida estadística de aleatoriedad que se puede utilizar para caracterizar la textura de la imagen de entrada. Para realizar el cálculo de esta medida, este software pone nuestra imagen en píxeles y la convierte en tonos de grises. A cada píxel le asigna un valor referente al tono de gris (siendo 0 si el píxel es completamente negro y 1 si es completamente blanco). A esta asignación de valor se le llama valor de probabilidad. El total de píxeles que conforman nuestra imagen es equivalente al número de datos que tenemos. En general lo que hace el programa es aplicar la definición de

entropía siguiente:

$$E_i = - \sum_k p_k \log_2(p_k), \quad (2.10)$$

en donde p_k es el valor de probabilidad asociada al nivel en la escala de grises.

De igual manera para la intensidad media de la imagen, lo que hace el software es tomar uno por uno cada píxel de la misma y analiza como está conformado. Una vez visto que el píxel está conformado por varios tonos de grises toma un promedio y se le asigna un valor numérico al píxel. Lo mismo para todos los de más y así obtener un promedio general para toda la imagen, por lo que los valores para la intensidad media están dados entre 0 y 1.

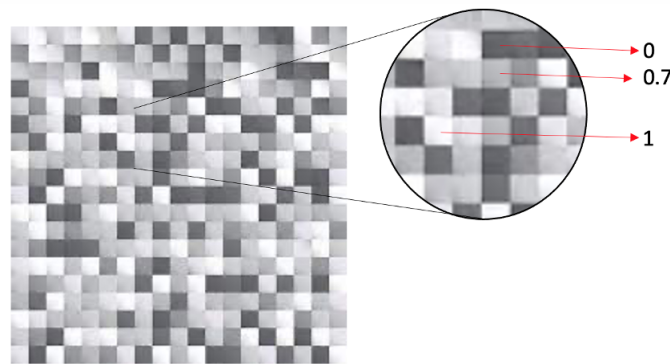


Figura 2.4: Asignación de la intensidad media de la imagen.

Usaremos las técnicas anteriores en el análisis para nuestros casos de estudio.

2.4. Sistemas de billares

En la física clásica un gas en un recipiente cerrado puede considerarse como muchísimas moléculas que se mueven y chocan entre sí. Si no hay intercambio de energía con el exterior esta situación puede modelarse como un sistema conservativo. Sin embargo, el diagrama de fases, que incluye las posiciones y velocidades de todas las moléculas, dista mucho de ser simple. El hablar de sistemas de billares significará hablar de partículas puntuales moviéndose sobre alguna región (la “mesa de billar”) que puede o no conte-

ner obstáculos convexos suaves y sufriendo colisiones elásticas contra ellos. Centramos nuestra atención en los billares periódicos, los cuales tienen la característica de que, las partículas al colisionar con el límite de la mesa desaparecen para reaparecer en el lado opuesto. Además, algunas clases de billares presentan un destacable comportamiento caótico. Con esto en consideración, realza la importancia del estudio de sistemas de billares en el que los fotones son las partículas en interacción. Describir trayectorias de las partículas requiere un análisis matemático más profundo, como el que puede ser consultado en el trabajo de Fraczek and Ulcigrai [59].

El sistema clásico análogo al presentado en este proyecto de tesis consta de un sistema de billar periódico con un obstáculo circular en el medio como se muestra en la Fig. 2.5. Si consideramos fotones como las partículas emitidas por un láser ideal que incide sobre el billar periódico de la Fig. 2.5, descartamos el concepto de elasticidad para choques elásticos, por una reflexión que tiene lugar sin pérdidas de energía. También se asume que las paredes reflectantes son conductores perfectos continuos en el sentido de la teoría electromagnética clásica [32].

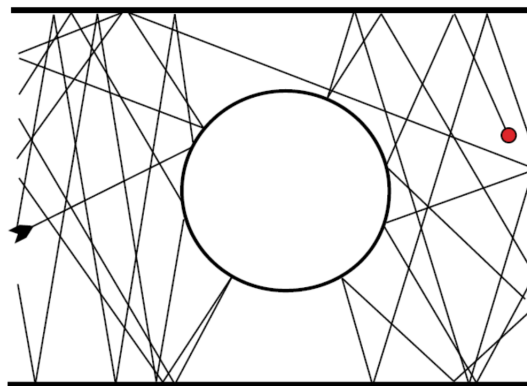


Figura 2.5: Diagrama de movimiento de fotones en un billar periódico con un obstáculo convexo.

En este sentido las trayectorias de los fotones pueden moverse de manera similar a bolas de billar en una mesa de billar con características similares a las planteadas en el sistema de la Fig. 2.5. Puesto que este tipo de sistemas es tema de interés, nuestro

trabajo de investigación toma este arreglo del sistema para estudio y será desarrollado para un conductor real que es por ejemplo el metal y un metamaterial.

2.5. Desarrollo del algoritmo para el estudio numérico

En los últimos años la investigación de sistemas caóticos ha sido de gran importancia en diferentes áreas de la ciencia y de la técnica [38]. En el caso de la física, los sistemas mecánicos (clásicos y cuánticos) de pocos grados de libertad han sido objeto de estudio, observándose en ellos propiedades y comportamientos dinámicos inesperados [39].

Al sistema dinámico que representa el movimiento de una partícula libre dentro de una región acotada del espacio, con reflexiones elásticas en las fronteras, se le conoce como un billar [40]. Las propiedades dinámicas de los billares están determinadas por la forma de la frontera y pueden variar desde los comportamientos totalmente regulares hasta los totalmente desordenados o caóticos, similares en muchos aspectos al de los sistemas de evolución aleatoria [41]. Los ejemplos mejor estudiados de esta última clase de sistemas son los billares de Sinai [42] y Bunimovich [43]. Particularmente, el billar de Sinai consiste en una partícula rebotando dentro de un cuadrado reflector con un dispersor circular central, igualmente reflector.

En este trabajo estudiamos, a la luz de la mecánica clásica, el billar de Sinai el cual es un sistema relativamente simple que presenta un comportamiento fuertemente caótico. El sistema consiste en una partícula que se mueve en el plano dentro de un cuadrado (arista L), en cuyo centro se coloca una inclusión circular (radio R), tal como se muestra en la Fig. 2.6. Se supone que la partícula (masa m) obedece las leyes de la mecánica clásica y sólo experimenta colisiones elásticas contra las paredes del cuadrado

y contra el perímetro del obstáculo circular. Esto es, entre colisiones la partícula se mueve de manera libre siguiendo una trayectoria rectilínea.

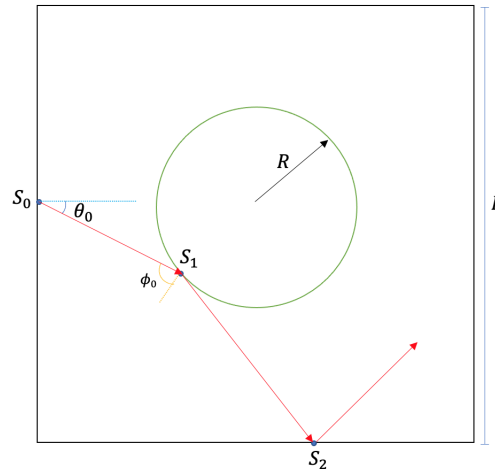


Figura 2.6: El biliard de Sinai está conformado por un cuadrado y una inclusión circular en su centro. La partícula se mueve clásicamente experimentando sólo colisiones elásticas.

Las colisiones de la partícula contra las paredes del cuadrado las enumeramos de manera consecutiva mediante el índice n que toma valores enteros, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. En cada colisión (digamos, la n) se especifican dos variables, a saber: la posición del punto donde tiene lugar la colisión (variable S_n) y el ángulo, la dirección del movimiento forma con la pared inmediatamente después de la colisión (ángulo θ_n). La posición S , la identificamos con la distancia a lo largo del perímetro medida a partir de la esquina inferior derecha del cuadrado.

En el instante de tiempo inicial la partícula está en el estado (S_0, θ_0) , esto es, la partícula experimenta una colisión con la pared derecha en el punto S_0 y emerge de la colisión formando un ángulo θ_0 , tal como se muestra en la Fig. 2.6. Conociendo (S_0, θ_0) queremos predecir el estado (S_1, θ_1) que corresponde a la siguiente colisión de la partícula contra una pared del cuadrado o posiblemente contra el objeto circular, la existencia de una colisión entre la partícula y el disco central depende de los valores

(S_0, θ_0) y del radio R del disco. Una vez determinado (S_1, θ_1) queremos en la siguiente etapa predecir el estado (S_2, θ_2) y así sucesivamente [44].

Para realizar este análisis hicimos uso del programa desarrollado por Lansel y Porter [45] para simular la dinámica de billares clásicos. La ventaja de este programa, escrito en Matlab, es que presenta una interfaz gráfica sumamente flexible para el análisis y postprocesamiento de los datos. Este módulo está destinado para ser utilizado como herramienta de investigación. En la actualidad, el programa simula de manera eficiente tablas que se construyen completamente a partir de segmentos de línea y arcos elípticos. El programa se ejecuta iterativamente en su simulación de billar clásico. Dada la posición y la dirección de la colisión anterior, el programa calcula la posición y dirección de la partícula puntual después de su posterior colisión con el límite. Para encontrar la ubicación de la próxima colisión, el programa busca una intersección entre la línea que describe la ruta de la partícula puntual y cada una de colisiones contra las paredes del cuadrado. Dadas todas estas intersecciones, el punto con la distancia mínima recorrida es el siguiente punto de intersección. Para encontrar la dirección en la que viaja la partícula puntual después de la colisión, el ángulo normal al límite se calcula a partir de la derivadas de las ecuaciones de la tabla en el punto de intersección. La suma y resta de ángulos se usa para calcular el ángulo de salida del ángulo normal y el ángulo de entrada:

$$\theta_n = 2 \arctan \left(\frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} \right) \Big|_{t_n} - \theta_{n-1}, \quad (2.11)$$

$$\phi_n = \arctan \left(\frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} \right) \Big|_{t_n} - \theta_{n-1} + \pi/2, \quad (2.12)$$

donde θ_n representa el ángulo con respecto a la horizontal de la n -ésima iteración, ϕ_n representa el ángulo incidente de la n -ésima iteración, $y(t)$ y $x(t)$ son las ecuaciones paramétricas de la frontera del billar, y t_n es el valor de t que da la ubicación de la

n -ésima intersección con la frontera.

Las distancias entre el punto de emisión S_0 y los puntos de colisión S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) son los parámetros que definen una serie como función del número de colisión de la siguiente manera:

$$R_n = S_0 \bar{S}_n. \quad (2.13)$$

Se debe tener especial consideración si la partícula puntual choca con una esquina de la mesa de billar, ya que tales puntos corresponden a puntos singulares del mapa de billar (Poincaré) obtenido al examinar sólo las colisiones (y no las trayectorias rectas entre ellas) del campo vectorial que describe el sistema de billar. Esto ocurre cuando la trayectoria de la partícula puntual alcanza un punto donde dos piezas de la mesa se unen abruptamente (con la primera derivada discontinua con respecto a la longitud del arco). Para calcular numéricamente el ángulo con el que la partícula puntual sale de la colisión, se promedian los ángulos tangenciales de las dos piezas de la mesa. Posteriormente, la partícula puntual rebota de la frontera del billar, orientada con este ángulo, como si la colisión fuera normal tal como se muestra en la Fig. 2.7. Al estudiar sistemas de billar usando este programa, uno debe tener cuidado si una trayectoria colisiona demasiado cerca de una esquina como se muestra en la Fig. 2.7(c).

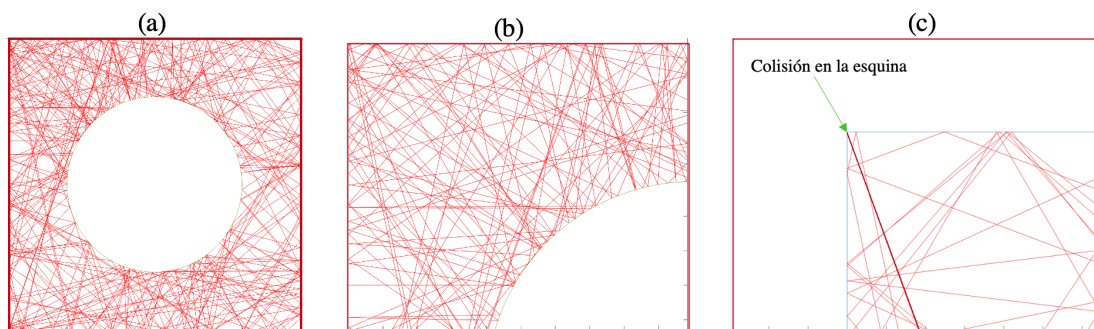


Figura 2.7: Secuencia de acercamiento a una esquina de la mesa de billar. (a) Mesa de billar con 381 iteraciones. (b) Acercamiento a la esquina superior derecha. (c) Rebote de la partícula entre las dos piezas de la mesa.

2.5.1. Mapeo del billar

Entre impactos con B , la partícula se mueve en línea recta. Por lo tanto, una órbita puede especificarse completamente dando la secuencia de sus posiciones y direcciones inmediatamente después de cada impacto.

La dirección de la órbita después del impacto estará marcada por el momento tangencial p definido por

$$p = \sin(\theta). \quad (2.14)$$

Una órbita, entonces, consiste en la sucesión de pares de números $\{S_n, p_n\}$ correspondientes al n -ésimo rebote, y se genera especificando un estado inicial (S_0, p_0) . Esta dinámica discreta es un mapeo M del “espacio fase” con coordenadas S, p y está simbolizado por

$$\begin{pmatrix} S_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} S_n \\ p_n \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

(El “mapeo de rebote” generalmente no es lineal y, por lo tanto, M generalmente no se puede representar mediante una matriz de 2×2). Si l es la longitud de B , el espacio de fase se puede restringir al rectángulo $-1 \leq p \leq +1, 0 \leq S < l$, pero como S es una coordenada periódica ($S + l$ es equivalente a S) su verdadera topología es la de una cinta circular. M conserva el área (en términos de las variables S, p), es decir

$$\frac{\partial(S_1, p_1)}{\partial(S_0, p_0)} = \det \begin{pmatrix} \partial S_1 / \partial S_0 & \partial S_1 / \partial p_0 \\ \partial p_1 / \partial S_0 & \partial p_1 / \partial p_0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Hay tres formas en las que la órbita generada por un número infinito de iteraciones de M puede explorarse en el espacio fase.

(i) Un conjunto finito de N puntos $S_0, p_0; S_1, p_1; \dots; S_{N-1}, p_{N-1}$ se pueden encontrar repetidamente, lo que corresponde a órbitas que se cierran después de N rebotes.

Simbólicamente, tal órbita cerrada satisface

$$\begin{pmatrix} S_{n+N} \\ p_{n+N} \end{pmatrix} = M^N \begin{pmatrix} S_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n \\ p_n \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

de manera que cada uno de sus N puntos es un punto fijo del mapeo M^N [58].

(ii) Las iteraciones de S_0, p_0 puede llenar una curva suave en el espacio de fase, llamada curva invariante porque toda la curva se mapea sobre sí misma bajo M (aunque sus puntos individuales no se mapean sobre sí mismos). Este comportamiento ocurre, por ejemplo, si la dinámica es integrable en el sentido de que existe una constante de movimiento en forma de función $F(S, p)$ que satisface

$$F(S_1, p_1) = F(S_0, p_0), \quad (2.18)$$

en cuyo caso las curvas invariantes son los contornos de $F(s, p)$.

(iii) Las iteraciones de S_0, p_0 pueden llenar un área en el espacio de fase. Esto sucede cuando la órbita, no restringida por la existencia de ninguna cantidad conservada, evoluciona de manera caótica cuyo detalle depende sensiblemente de los valores de S_0 y p_0 . En términos de los ángulos ϕ, θ , las ecuaciones de mapeo son de la siguiente manera. La pendiente del segmento de la trayectoria que comienza en ϕ_0, θ_0 está dada por el cociente de los incrementos de x y y alrededor de la curva entre ϕ_0 y ϕ_1 . Estos incrementos se pueden encontrar usando

$$dx/dS = \cos\phi \quad dy/dS = \sin\phi, \quad (2.19)$$

para relacionar los parámetros S y ϕ , B se puede definir dando su radio de curvatura

R en función de ϕ . Entonces

$$R(\phi) = \frac{dS}{d\phi} \quad i.e. \quad S(\phi) = \int_{\pi/2}^{\phi} d\phi' R(\phi'), \quad (2.20)$$

de donde

$$x(\phi_1) - x(\phi_0) = \int \cos\phi dS = \int \cos\phi \frac{dS}{d\phi} d\phi = \int_{\phi_0}^{\phi_1} R(\phi) \cos\phi d\phi, \quad (2.21)$$

$$y(\phi_1) - y(\phi_0) = \int_{\phi_0}^{\phi_1} R(\phi) \sin\phi d\phi. \quad (2.22)$$

Por lo tanto, la pendiente es

$$\left(\int_{\phi_0}^{\phi_1} R(\phi) \sin\phi d\phi \right) \left(\int_{\phi_0}^{\phi_1} R(\phi) \cos\phi d\phi \right)^{-1} = \tan(\phi_0 + \theta_0), \quad (2.23)$$

y esta ecuación determina ϕ_1 (y por lo tanto S_1) dado ϕ_0 (o S_0) y θ_0 (o p_0). θ_1 (y por lo tanto p_1) ahora está determinada por otra relación de pendiente, a saber

$$\phi_1 - \theta_1 = \phi_0 - \theta_0 \quad i.e. \quad \theta_1 = \phi_1 - \phi_0 + \theta_0. \quad (2.24)$$

Estas dos ecuaciones de mapeo se adaptan bien a la iteración rápida por computadora.

Capítulo 3

Estudio del fenómeno electromagnético en una guía de ondas de cristal fotónico

En este capítulo se da una breve reseña respecto al estudio de los materiales así como la propagación de la luz a través de la materia. Así como también se describe una técnica numérica que puede ser usada para modelar la interacción de la luz con un sistema de cuerpos bidimensionales que forman una guía de onda con un arreglo de inclusiones cilíndricas circulares y puede considerarse de longitud infinita y finita. La técnica en cuestión se conoce como el Método de la Ecuación Integral. En el presente trabajo se presenta un planteamiento teórico de este método aplicado a los problemas en cuestión, en los cuales es necesario calcular el campo cercano mediante los patrones de intensidades de los modos electromagnéticos correspondientes para el sistema infinito y finito, respectivamente.

3.1. Estudio de los materiales

El estudio del comportamiento de la luz revela características y efectos al interactuar con la materia, que permite desarrollar algunas teorías sobre su naturaleza. En los últimos años se han hecho diversos estudios teóricos acerca de cómo controlar las propiedades electromagnéticas de los materiales y el comportamiento de la luz a través de estos. Es decir, el estudio de los materiales y su respuesta ante la incidencia de luz ha revolucionado la tecnología y generado muchos aportes al conocimiento. Por ello, se tiene interés en diseñar materiales que sean capaces de controlar la propagación de ondas electromagnéticas con una longitud de onda específica, que controle las direcciones de propagación de ondas en el espacio; o bien, que permitan atrapar o localizar dichas ondas en una determinada región del espacio. Es por esto, que la tecnología nanofotónica se plantea como una candidata seria para resolver los problemas mencionados [46], ya que es un campo de investigación muy interesante para la comunidad científica debido a sus numerosas aplicaciones, como son: la espectroscopía, sensado y bio-sensado o el desarrollo de un chip todo óptico, entre otras. Con el descubrimiento de las numerosas aplicaciones de la nanofotónica, aparecen retos como la mejora de la eficiencia en el guiado de la luz sobre una guía de silicio o la radiación de ésta mediante el uso de nano-antenas [47]. Por consiguiente, la comunidad científica ha incursionado en la tarea de desarrollar nuevas e innovadoras tecnologías basadas en este enfoque particular, en un intento por consolidar con éxito una aplicación de desarrollo esencialmente fotónico.

Los dispositivos fotónicos ofrecen ciertas ventajas frente a los electrónicos. Principalmente, mayor velocidad de operación, derivada de la naturaleza intrínseca de los portadores (fotones frente a los electrones) y de los procesos involucrados en su funcionamiento (respuesta óptica frente a la electrónica de los materiales) que conllevan a una menor disipación. Es por ello, que se tiene interés en saber que tipo de materiales

nos permiten la manipulación de las propiedades ópticas; por lo que se darán las características de algunos materiales cuyas propiedades ópticas como electromagnéticas podamos controlar. Dentro de este tipo de materiales, tenemos a los cristales que se caracterizan por poseer una periodicidad perfecta en su estructura atómica y debido a ésta, presentan un potencial periódico para la propagación de electrones a través de estos. Por esta característica también se determina la mayor parte de las propiedades conductivas de dichos materiales [48].

Debido al reciente avance nanotecnológico, la aplicación práctica de los llamados cristales fotónicos (CFs) [49] ha tenido un gran interés científico en lo concerniente a la capacidad y la velocidad de la información que puede ser procesada en un determinado lapso de tiempo. Los CFs son arreglos periódicos de una, dos o tres dimensiones de diferentes materiales con una celda unitaria de la dimensión del orden de la longitud de onda como se aprecia en la Fig. 3.1. Los cuales son materiales en los que existe una modulación periódica y ordenada de la constante dieléctrica (o índice de refracción) y presentan bajas pérdidas por absorción.

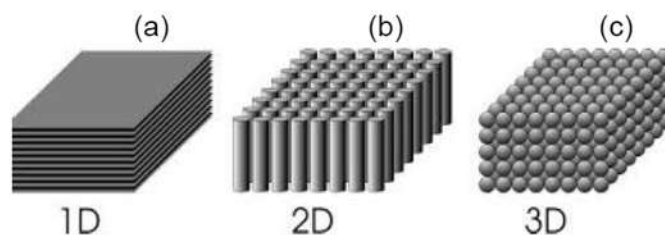


Figura 3.1: Ejemplos de una estructura fotónica (a) unidimensional, (b) bidimensional y (c) tridimensional.

Esta característica les confiere interesantes propiedades en regiones concretas del espectro electromagnético delimitadas por la periodicidad de la estructura y origina la existencia de gaps (es decir, bandas prohibidas) en determinadas zonas del espectro en las cuales se prohíbe la propagación de ondas con determinada frecuencia, definiendo

así sus propiedades para la propagación de la luz [50]. Debido a que presentan estas características, recientemente han sido objeto de investigación los CFs, ya que tienen el potencial de desarrollar una nueva tecnología de circuitos ópticos integrados [51].

Cabe mencionar que en la naturaleza podemos apreciar cristales fotónicos naturales, como es en los escarabajos, en las alas de las mariposas, en las plumas de los pavos reales, en el ópalo de un brazalete, entre otros (ver Fig. 3.2).

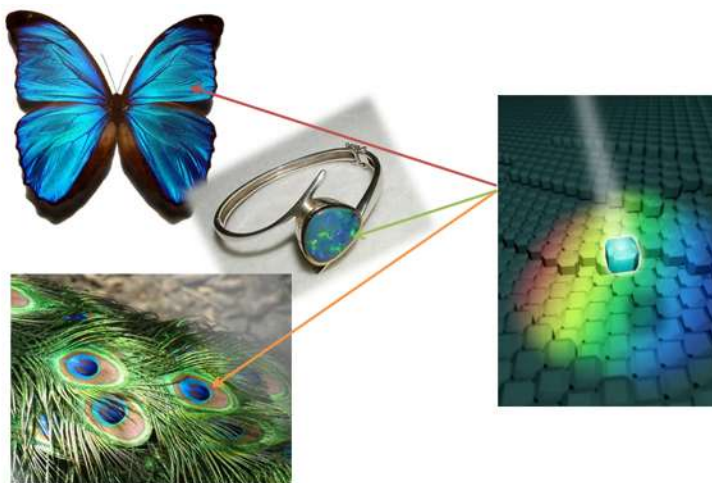


Figura 3.2: Las alas de la mariposa, el ópalo del brazalete o las plumas del pavo real contienen una microestructura periódica natural responsable del color iridiscente.

En los últimos años las investigaciones han demostrado que la adición de nuevos materiales especiales con los CFs ha dado nuevas propiedades en estos sistemas que fueron originalmente concebidos como la composición de materiales puramente dieléctricos. Este otro tipo de materiales estructurados son los llamados Metamateriales (LHM) o Materiales Izquierdos, los cuales presentan propiedades interesantes en el comportamiento de la luz al interactuar con estos [52]. Los LHMs deben su nombre al hecho de que los vectores de campo eléctrico \mathbf{E} , del campo magnético \mathbf{H} y del vector de onda \mathbf{k} forman un sistema de vectores ortogonales con una orientación izquierda para una onda que se propaga a través de estos medios. Tales materiales artificiales poseen un índice de refracción negativo $n = -\sqrt{\epsilon\mu}$ debido a que tienen funciones de permitividad

eléctrica ε y permeabilidad magnética μ simultáneamente negativas dentro de algún rango dado del espectro electromagnético. Estos materiales no existen en la naturaleza; sin embargo, son fabricados artificialmente y pueden ser diseñados para tener casi cualquier propiedad óptica que deseemos. Para esto se necesita que la unidad de estructura sea mucho más pequeña que el tamaño de la longitud de onda del modo, tal que al propagarse la luz no distinga los detalles de la estructura y vea un medio continuo como se muestra en la Fig. 3.3. Algunos de los fenómenos ópticos que los hacen potencialmente útiles para nuevas aplicaciones tecnológicas son por ejemplo: la refracción negativa, la invisibilidad y la transmisión de información, entre otros [53].

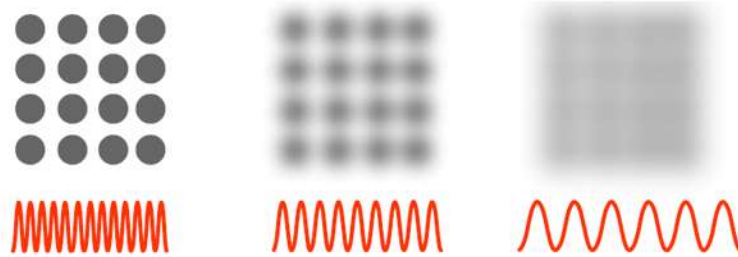


Figura 3.3: Detalles que distinguen una onda dependiendo de su longitud de onda. Si la estructura es mucho más pequeña que la longitud de onda, el medio se puede aproximar como continuo.

A pesar de que no se tiene una definición general, se menciona la definición que propone Vladimir Shalaev, uno de los pioneros de esta nueva rama de la física [62]:

“Un Metamaterial es un material estructurado artificialmente, que puede ser periódico o no periódico, que obtiene sus propiedades, no directamente de los materiales que lo constituyen (por ejemplo, la composición química del material), sino a partir de una unidad de estructura. Un Metamaterial tiene una escala mucho más pequeña que la longitud de onda de interés y su respuesta electromagnética se expresa en términos de parámetros de los materiales como por ejemplo: la permitividad eléctrica, la permeabilidad magnética y el índice de refracción”

3.2. Propagación de la luz a través de la materia

El estudio de la propagación de la luz a través de la materia, particularmente en estado sólido, comprende una de las ramas más importantes e interesantes de la óptica. Los fenómenos ópticos exhibidos por sólidos incluyen la absorción selectiva, la dispersión, la doble refracción, los efectos de polarización y los efectos electro-ópticos y magneto-ópticos. Muchas de las propiedades ópticas de los sólidos se puede entender sobre la base de la teoría electromagnética clásica. En la presente sección se aplica la teoría de Maxwell macroscópica a la propagación de la luz a través de sólidos, en especial para metales.

3.2.1. Campos macroscópicos y ecuaciones de Maxwell

Todos los problemas sobre electromagnetismo, siempre que nos mantengamos en una situación macroscópica como es el caso de la propagación de la luz a través de sólidos, pueden tratarse a través de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (3.4)$$

Por otro lado, la respuesta de los electrones de conducción al campo eléctrico está dada por $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (Ley de Ohm) siendo σ la conductividad. Además, las relaciones constitutivas reescritas como

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (3.5)$$

describen la respuesta total de las cargas ligadas al campo electromagnético.

En nuestro estudio de la propagación de la luz a través de la materia nos ocuparemos únicamente en los medios no magnéticos y eléctricamente neutros. Por tanto, \mathbf{M} y ρ se toman igual a cero. Así, las ecuaciones de Maxwell, expresadas por las Ecs. (3.1) a (3.4), se reducen a:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.9)$$

Tomando el rotacional de la Ec. (3.6) y la derivada respecto al tiempo de la Ec. (3.7) para eliminar \mathbf{H} , obtenemos la ecuación de onda para el campo eléctrico,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Los términos del lado derecho de la ecuación anterior se llaman términos fuente. Se derivan de la presencia de las cargas de polarización y de conducción, respectivamente, dentro del medio. La manera en la que la propagación de la luz se ve afectada por los términos fuentes está incluida. En caso de tratarse de medios no conductores el término $-\mu_0 \partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2$ es de importancia, ya que conduce a una explicación de muchos efectos ópticos como: la dispersión, la doble refracción, por mencionar algunos. En el caso de los metales, el término de conducción $-\mu_0 \partial \mathbf{J} / \partial t$ es el importante. Las soluciones resultantes de la ecuación de onda explican la gran opacidad y alta reflectancia de los metales. Es por esto que consideraremos el caso de interacción de la luz con los medios conductores metálicos utilizando el Modelo de Drude.

3.2.2. Modelo de Drude

Las características esenciales de los metales se pueden describir teóricamente con el Modelo de Drude [54]. En este modelo, existe una frecuencia crítica llamada frecuencia de plasma, por debajo de la cual la permitividad eléctrica es negativa y en consecuencia la propagación de ondas electromagnéticas está prohibida. Por este motivo, metales como el oro y la plata a frecuencias ópticas e infrarrojas, los campos sólo pueden penetrar una pequeña distancia. Por encima de la frecuencia de plasma la permitividad es positiva, el medio es transparente y permite la propagación de ondas electromagnéticas.

Para analizar los efectos del comportamiento de la luz a través de medios metálicos, nos interesa el término de conducción en la ecuación de onda sin el término de polarización. Debido a la inercia de los electrones de conducción, no podemos simplemente hacer uso de $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (Ley de Ohm) para la densidad de corriente donde σ es la conductividad estática. Se debe considerar el movimiento real de los electrones bajo la acción del campo eléctrico alterno de la onda luminosa.

Puesto que los electrones de conducción no están ligados, no existe una fuerza restauradora. Por consiguiente, la ecuación diferencial del movimiento del electrón es de la forma:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\tau^{-1}\mathbf{v} = -e\mathbf{E}, \quad (3.11)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad del electrón, $\tau = 1/\gamma \approx 10^{-4}$ es el tiempo de relajación y m es la masa del electrón. Dado que la densidad de corriente es

$$\mathbf{J} = -N e \mathbf{v}, \quad (3.12)$$

siendo N el número de electrones de conducción por unidad de volumen o densidad

electrónica. Entonces la Ec. (3.11) se puede expresar en términos de \mathbf{J} como

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \gamma\mathbf{J} = \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E}. \quad (3.13)$$

Suponiendo que el campo eléctrico aplicado y la densidad de corriente de conducción están dadas por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0e^{-i\omega t} \quad \text{y} \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0e^{-i\omega t}, \quad (3.14)$$

que sustituyendo en la ecuación de movimiento Ec. (3.13) se obtiene

$$\frac{d(\mathbf{J}_0e^{-i\omega t})}{dt} + \gamma\mathbf{J}_0e^{-i\omega t} = -i\omega\mathbf{J}_0e^{-i\omega t} + \gamma\mathbf{J}_0e^{-i\omega t} = \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}, \quad (3.15)$$

y multiplicando por $e^{i\omega t}$ tenemos

$$(-i\omega + \gamma)\mathbf{J} = \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E}. \quad (3.16)$$

Para el caso de campos estáticos, $\omega = 0$, se tiene que

$$\mathbf{J} = \frac{Ne^2}{m\gamma}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}, \quad (3.17)$$

por lo que,

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m\gamma}, \quad (3.18)$$

que es la conductividad estática.

Ahora, para el caso general de un campo oscilante aplicado

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\sigma}{1 - \frac{i\omega}{\gamma}} \right] \mathbf{E} = \sigma_\omega\mathbf{E}, \quad (3.19)$$

obtenemos

$$\sigma_\omega = \frac{\sigma}{1 - \frac{i\omega}{\gamma}}, \quad (3.20)$$

que es la conductividad dinámica.

A frecuencias muy bajas ($\omega/\gamma \ll 1$), la conductividad dinámica es puramente real y los electrones siguen el campo eléctrico. Conforme el campo aplicado va incrementando, la inercia de electrones introduce un retardo de fase en la respuesta de electrones en el campo y la conductividad dinámica es compleja.

Para frecuencias muy altas ($\omega/\gamma \gg 1$), $\mathbf{J} \approx i\sigma\mathbf{E} = (e^{i\frac{\pi}{2}})\sigma\mathbf{E}$ y la conductividad dinámica σ_ω es puramente imaginaria y las oscilaciones de los electrones tienen un desfase de $\pi/2$ con el campo aplicado.

Ahora abordemos, la propagación de ondas electromagnéticas en medios metálicos. Haciendo uso de la expresión dada en la Ec. (3.19) y que $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ en la Ec.(3.10) se encuentra la ecuación de onda para metales,

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\sigma}{1 - \frac{i\omega}{\gamma}} \right] \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Para resolver la ecuación anterior, se propone un campo eléctrico oscilante, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, que representa una onda dirigida por el vector de onda \mathbf{k} . Sustituyendo directamente la Ec. (3.21) se puede mostrar que ésta es una solución, siempre que

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i \left[\frac{\omega\mu_0\sigma}{1 - \frac{i\omega}{\gamma}} \right], \quad (3.22)$$

donde $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$. Además por la forma de la ecuación anterior se puede considerar a $k = k(\omega)$ como una función de la frecuencia ω . Así k se puede expresar en términos de la parte real e imaginaria como $k(\omega) = k_R(\omega) + ik_I(\omega)$. Esto es equivalente a introducir un índice de refracción complejo $n(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$, en términos de la relación de

dispersión:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega). \quad (3.23)$$

Índice de refracción en un metal

Considerando nuevamente el caso general descrito por la Ec. (3.22), obtenemos

$$n^2 = \frac{c^2}{\omega^2}k^2 = 1 + i \left[\frac{c^2\mu_0\sigma}{\omega \left(1 - i\frac{\omega}{\gamma}\right)} \right] = 1 + i\frac{i\gamma}{i\gamma} \left[\frac{c^2\mu_0\sigma}{\omega \left(1 - i\frac{\omega}{\gamma}\right)} \right], \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow n^2 = 1 - \frac{c^2\mu_0\sigma\gamma}{\omega^2 + i\omega\gamma}, \quad (3.25)$$

de donde se define la “frecuencia de plasma” como:

$$\omega_p^2 = c^2\mu_0\sigma\gamma = \gamma \left(\frac{Ne^2}{m\gamma} \right) c^2\mu_0 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}. \quad (3.26)$$

Así, el índice de refracción del medio conductor está dado por

$$n^2 = 1 - \left[\frac{\omega_p}{\omega^2 + i\omega\gamma} \right], \quad (3.27)$$

donde $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$ es la frecuencia de plasma.

Si los electrones en un plasma son desplazados de un fondo uniforme de iones, los campos eléctricos serán contruidos en una dirección para restaurar la neutralidad del plasma regresando de vuelta a los electrones a sus posiciones originales. Debido a su inercia, los electrones sobrepasan la oscilación alrededor de sus posiciones de equilibrio con una frecuencia característica conocida por la frecuencia de plasma. Además, existe una longitud de onda llamada crítica λ_c (o longitud de onda de oscilación de plasma) y es aquella en la que por debajo de ella los metales alcalinos se vuelven transparentes, y por encima de la cual son opacos y altamente reflectantes. Esta longitud de onda está

dada por

$$\lambda_c = \lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}. \quad (3.28)$$

Analizando la expresión del índice de refracción para frecuencias altas ($\omega \gg \gamma$), se tiene que

$$n^2 \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (3.29)$$

donde hemos despreciado el término de γ .

Función dieléctrica de los metales

Considerando que $\varepsilon(\omega) = n(\omega)^2$ y haciendo uso de la Ec. (3.25), tenemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega) = n(\omega)^2 \\ &= (n_R + in_I)^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \\ &= (n_R^2 + in_I^2) + i2n_Rn_I \\ &= \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right) + i\left(\frac{\omega_p^2\gamma}{\omega^3 + \omega\gamma^2}\right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

es la *función dieléctrica* para materiales metálicos. Observamos que ya no es constante ya que depende de la frecuencia de la radiación que se utilice para iluminar el material.

3.3. El Método de la Ecuación Integral

En este capítulo se describe una técnica numérica que puede ser usada para modelar la interacción de la luz con un sistema de cuerpos bidimensionales que forman una guía de onda con obstáculos cilíndricos y puede considerarse de longitud infinita y finita. La técnica en cuestión se conoce como el Método de la Ecuación Integral. En el presente trabajo se presenta un planteamiento teórico de este método aplicado a los problemas

en cuestión, en los cuales es necesario calcular los modos electromagnéticos para el sistema infinito y obtener la respuesta óptica (reflectancia y transmitancia) para el sistema finito.

3.3.1. Descripción del Método Integral

Aplicaremos el método numérico de la ecuación integral para calcular los modos electromagnéticos correspondiente a una PCW infinita con inclusiones cilíndricas circulares y para una PCW finita análoga mediante el cálculo de la reflectancia para identificar los modos electromagnéticos propagantes. Una vez que han sido identificados se representarán mediante patrones de las intensidades del campo. Consideraremos que la guía de ondas está compuesta por superficies planas paralelas de cristal fotónico con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares de distintos materiales. El método parte del segundo teorema integral de Green en la ecuación de Helmholtz permitiendo obtener un sistema de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el campo y su derivada normal evaluados en las superficies involucradas. Posteriormente se procede a la discretización del sistema de las ecuaciones integrales, que resulta en un conjunto de ecuaciones lineales bajo condiciones de frontera que pueden ser mejor representadas en una sola ecuación matricial homogénea para el sistema infinito, e inhomogénea para el sistema finito, cuya solución determina las funciones fuente, con las que se puede calcular los modos electromagnéticos o la reflectancia según sea el caso. Es importante mencionar que, sólo se toma en cuenta un número finito de puntos de muestreo a lo largo de los contornos que definen la superficie del sistema bajo estudio, lo que permite ahorrar recursos computacionales. Enseguida daremos la descripción del método correspondiente a la PCW infinita y finita.

Guía de ondas cristal fotónico infinita

Como uno de los objetivos de esta tesis es estudiar la guía de ondas de cristal fotónico (PCW), compuesta por superficies planas paralelas con un arreglo periódico de inclusiones con geometrías arbitrarias de distintos materiales, vamos a describir el método bajo esta consideración. Debido a que el sistema bajo estudio es unidimensionalmente periódico; es decir, sólo tiene periodicidad en una dirección del espacio, podemos considerar solamente una celda unitaria. En la Fig. 3.4, se muestra una guía de ondas con superficies planas y un arreglo periódico de inclusiones con geometría arbitraria. P es el periodo del sistema en la dirección x , b es la distancia entre las superficies planas, r representa el radio de las inclusiones cilíndricas circulares (el cual puede estar en términos de la fracción de llenado f) y la región encerrada por las curvas $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ y Γ_5 se puede considerar como la celda unitaria del sistema. El conjunto de un número infinito de celdas unitarias constituye una guía de ondas de longitud infinita.

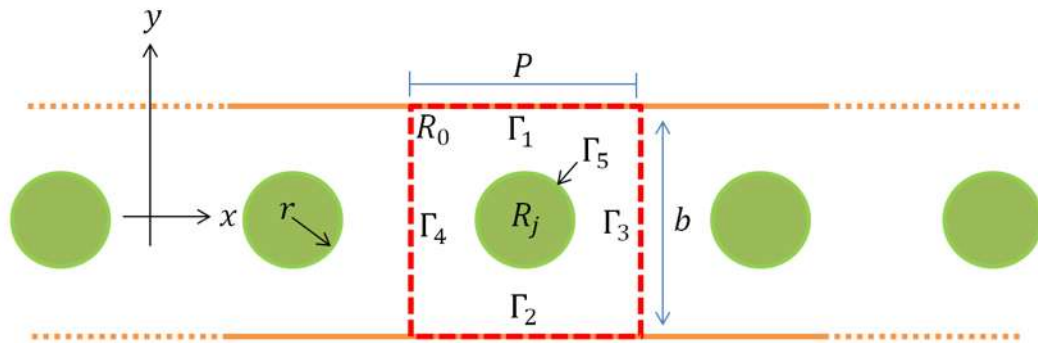


Figura 3.4: Diagrama de una guía de ondas infinita con inclusiones cilíndricas. Las líneas punteadas en rojo delimitan la región de la celda unitaria.

Para iniciar con el método integral vamos a obtener la ecuación de onda para nuestro sistema propuesto. Consideremos medios sin cargas ni corrientes ($\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$), cuyas propiedades del material dadas por la permitividad eléctrica $\varepsilon(\omega)$ y permeabilidad magnética $\mu(\omega)$ dependerán de la frecuencia ω . Asumiremos además, que la amplitud de los campos es lo suficientemente baja como para no exceder el régimen lineal.

Así, de las ecuaciones de Maxwell (Ecs. (3.1) a (3.4)), tenemos que las ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético respectivamente son:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu(\omega)\varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.31)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu(\omega)\varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.32)$$

siendo el $\mu(\omega)\varepsilon(\omega) = 1/(v(\omega))^2$, donde $v(\omega)$ es la velocidad de la onda en el medio que depende de la frecuencia ω .

Como las ecuaciones de Maxwell son lineales, podemos separar la dependencia temporal de la dependencia espacial de los campos electromagnéticos, considerándolas independientes. Para esto, supondremos que los campos tienen una dependencia armónica del tiempo, por lo que los campos los podemos expresar como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = [0, \Psi, 0]e^{-i\omega t}. \quad (3.33)$$

En esta expresión $\mathbf{r} = (x, y)$ es el vector de posición del punto de observación en el plano XY y $\Psi(\mathbf{r})$ una función escalar que representa a $E_z(x, y)$ (la tercer componente del campo eléctrico) para el caso de la polarización s o Transversal Eléctrica (TE), en la que el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia y a $H_z(x, y)$ (la tercer componente del campo magnético) para el caso de la polarización p o Transversal Magnética (TM), en la que el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia. Esto permite transformar a las ecuaciones de onda de los campos eléctrico y magnético como la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \Psi_j(\mathbf{r}) + k^2 \Psi_j(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.34)$$

donde j indica el j -ésimo medio, \mathbf{r} es el vector de posición del punto de observación

y $\Psi_j(\mathbf{r})$ representa el campo eléctrico o magnético. La magnitud del vector es $k_j = n_j(\omega) \frac{\omega}{c}$. La región 0 caracterizada por el índice de refracción real $n_0(\omega) = \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$ y la región de la inclusión por $n_j(\omega) = \pm\sqrt{\mu_j(\omega)\varepsilon_j(\omega)}$ el índice de refracción que involucra las propiedades de los materiales que se dan en términos de la permeabilidad magnética $\mu(\omega)$ y de la permitividad eléctrica $\varepsilon(\omega)$. El signo que aparece en la expresión del índice de refracción debe ser tomado como negativo cuando se considere un LHM y positivo para un medio dieléctrico o conductor real.

Función de Green para la ecuación de Helmholtz

Para resolver la Ec. (3.68) consideramos una función de Green $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ como la solución de la ecuación

$$\nabla^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_j^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.35)$$

donde $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el propagador del campo debido a una fuente de luz puntual que emite a la frecuencia ω en la posición \mathbf{r}' y correspondiente a cada medio. La $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la delta de Dirac. Una función de Green que es solución de la Ec. (3.35) está dada por

$$G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (3.36)$$

siendo $H_0^{(1)}(z)$ la función de Hankel de primera clase y de orden cero. Esta función de Green para el vacío satisface una condición de radiación, mientras que para el interior del j -ésimo cuerpo satisface una condición de absorción.

Forma Integral de la Ecuación de Helmholtz

Aplicando el segundo teorema integral de Green [55], que establece que

$$\int_V d^3x (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) = \int_S d^2x \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right), \quad (3.37)$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son campos escalares arbitrarios definidos en un volumen V rodeado por una superficie cerrada S , y $\partial/\partial n$ es la derivada a lo largo de la normal a la superficie dirigida hacia afuera del volumen V . Así, haciendo uso de la Ec. (3.37) para las funciones Ψ_j y $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en cada región correspondiente al j -ésimo medio. Además multiplicando la Ec. (3.68) por $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y la Ec. (3.35) por $-\psi_j$ y sumando ambas ecuaciones que al integrarlas sobre una superficie cerrada S_j que está limitada por un contorno cerrado C_j , se obtiene:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{C_j} [G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \Psi_j(\mathbf{r}) - \Psi_j(\mathbf{r}) \nabla G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \oint_{S_j} \Psi_j(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') da, \quad (3.38)$$

siendo ds el diferencial de la longitud de arco y da el diferencial de área. Como la derivada normal está dada como $\partial/\partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u$, para la función u que es diferenciable, entonces la Ec. (3.38) toma la forma

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{C_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds = \Psi_j(\mathbf{r}') \theta(\mathbf{r}'), \quad (3.39)$$

donde $\theta(\mathbf{r}')$ es la función escalón,

$$\theta(\mathbf{r}') = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r}' \in S_j, \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}' \notin S_j, \end{cases} \quad (3.40)$$

siendo S_j una superficie cerrada que está limitada por el contorno cerrado Γ_j correspondiente. Intercambiando \mathbf{r} y \mathbf{r}' para conservar la convención de que \mathbf{r} representa la

posición del observador (donde se mide el campo), y que \mathbf{r}' los puntos de integración o de contorno, se obtiene la siguiente ecuación integral

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right] ds' = \Psi_j(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{r}). \quad (3.41)$$

Discretización de la ecuación integral

Como el objetivo es calcular los modos electromagnéticos de bandas para una estructura fotónica infinita que tiene un arreglo periódico de inclusiones de algún material dispersivo, consideramos una celda unitaria cuadrada y una inclusión con geometría arbitraria como se muestra en la Fig. 3.4. La celda está formada por la región 0 que está limitada por los contornos $C_1 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5$ y por la región interior de la inclusión. Los vectores normales correspondientes a los contornos Γ_j son $\hat{\mathbf{n}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}_2$, $\hat{\mathbf{n}}_3$, $\hat{\mathbf{n}}_4$ y $\hat{\mathbf{n}}_5$ hacia afuera de cada región, respectivamente.

De la Ec. (3.41) vamos a llamar

$$I_G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_j} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \quad (3.42)$$

$$I_\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_j} \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds'. \quad (3.43)$$

Correspondientemente a cada una de las regiones de la celda unitaria, dividimos los contornos en pequeños segmentos de longitud de arco Δs suficientemente pequeños para poder realizar un muestreo fino. Dicho sistema está formado por dos superficies planas infinitas y un arreglo periódicamente perfecto de inclusiones cilíndricas circulares, cuyo eje de simetría va a lo largo del eje z , como se muestra en la Fig. 3.4.

Así, podemos considerar que el campo y su derivada normal son aproximadamente

constantes y los podemos sacar de la integral de la siguiente manera

$$I_G(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^j \oint_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds', \quad (3.44)$$

$$I_\Psi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^j \oint_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds'. \quad (3.45)$$

En las Ecs. (3.44) y (3.45) hemos definido las funciones

$$\Phi_n^j = \left. \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}, \quad (3.46)$$

$$\Psi_n^j = \Psi_j(\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}. \quad (3.47)$$

Evaluando las integrales de las Ecs. (3.44) y (3.45) en el punto de observación $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m$, podemos definir los elementos de matriz como:

$$L_{mn} = \frac{1}{4\pi} \oint_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} G_j(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') ds', \quad (3.48)$$

$$N_{mn} = \frac{1}{4\pi} \oint_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} \frac{\partial G_j(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \quad (3.49)$$

donde el subíndice m indica el punto de observación y el subíndice n el punto de integración. Estos elementos de matriz (para más detalles de su deducción ver la Ref. [63]), están dados por las expresiones:

$$L_{mn}^{(j)} = \frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)}(k_j R_{mn}) (1 - \delta_{mn}) + \left[\frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left(k_j \frac{\Delta s}{2e} \right) \right] \delta_{mn}, \quad (3.50)$$

$$N_{mn}^{(j)} = \frac{i\Delta s}{4} k_j H_1^{(1)}(k_j R_{mn}) \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} (1 - \delta_{mn}) + \left[\frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n \right] \delta_{mn}, \quad (3.51)$$

siendo

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \mathbf{R}_{mn} = -y'(s)(x_m - x_n) + x'(s)(y_m - y_n),$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s),$$

$$R_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}.$$

Así, haciendo uso de las Ecs. (3.79) y (3.80) podemos reescribir las Ecs. (3.44) y (3.45) como:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^j \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G_j(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') ds' \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{mn}^j \Phi_n^j, \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^j \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G_j(r_m, r')}{\partial n'} ds' \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_{mn}^j \Psi_n^j. \quad (3.53)$$

Sustituyendo las Ecs. (3.52) y (3.84) en las Ecs. (3.44) y (3.45) tenemos que

$$I_{G(r)} \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{mn}^j \Phi_n^j, \quad (3.54)$$

$$I_{\Psi(r)} \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_{mn}^j \Psi_n^j, \quad (3.55)$$

y sustituyendo estas expresiones en la Ec. (3.41) para ambos contornos (C_1 y C_2) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^1 \Phi_{n(1)}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1)}^1 \Psi_{n(1)}^{(1)} \right] + \left[\sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^1 \Phi_{n(2)}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_2} N_{mn(2)}^1 \Psi_{n(2)}^{(1)} \right] \\ & + \left[\sum_{n=1}^{N_3} L_{mn(3)}^1 \Phi_{n(3)}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_3} N_{mn(3)}^1 \Psi_{n(3)}^{(1)} \right] + \left[\sum_{n=1}^{N_4} L_{mn(4)}^1 \Phi_{n(4)}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_4} N_{mn(4)}^1 \Psi_{n(4)}^{(1)} \right] \end{aligned}$$

$$+ \left[\sum_{n=1}^{N_5} L_{mn(5)}^1 \Phi_{n(5)}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_5} N_{mn(5)}^1 \Psi_{n(5)}^{(1)} \right] = 0, \quad (3.56)$$

$$\left[\sum_{n=1}^{N_5} L_{mn(5)}^2 \Phi_{n(5)}^{(2)} - \sum_{n=1}^{N_5} N_{mn(5)}^2 \Psi_{n(5)}^{(2)} \right] = 0. \quad (3.57)$$

Además, la periodicidad que tiene el sistema en la dirección horizontal es una condición de simetría que es especialmente considerada. Debido a esta propiedad y a la forma de la Ec. (3.68), el teorema de Bloch, establece una condición de periodicidad $\Psi(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \Psi(\mathbf{r})$, que se puede aplicar. Es decir, $\Psi(x - P, y) = \exp(-iK_x P) \Psi(x, y)$ por lo que las condiciones de periodicidad del campo en los contornos Γ_3 y Γ_4 son

$$\Psi_n^4 = \exp(iK_x P) \Psi_n^3 \quad \text{y} \quad \Phi_n^4 = -\exp(iK_x P) \Phi_n^3. \quad (3.58)$$

Además P y K son el periodo del sistema y la componente en x del vector de Bloch, respectivamente. Por otro lado, tenemos que las condiciones de frontera para los contornos Γ_1 y Γ_2 son:

$$\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} \quad \text{y} \quad \Phi^{(1)} = \frac{f_1}{f_2} \Phi^{(2)}, \quad (3.59)$$

donde

$$f_j = \begin{cases} \mu_j(\omega) & \text{para pol. TE,} \\ \epsilon_j(\omega) & \text{para pol. TM,} \end{cases} \quad (3.60)$$

que en caso de tratarse de medios dieléctricos o metálicos $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$, pero de tratarse de un metamaterial la condición anterior no se cumple, es decir, $\mu_1 \neq \mu_2$.

Para cuerpos perfectamente conductores el problema se simplifica considerablemente, debido a que una de las condiciones de frontera es cero. Es decir, para la polarización s la función $\Psi_n(s) = 0$ y para la polarización p la función $\partial \Psi_n(s) / \partial n = 0$.

Ahora aplicando las Ecs. (3.58), (3.59) y (3.60) en las Ecs. (3.56) y (63.57), obtenemos

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^1 \Phi_{n(1)} - \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1)}^1 \Psi_{n(1)} \right] + \left[\sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^1 \Phi_{n(2)} - \sum_{n=1}^{N_2} N_{mn(2)}^1 \Psi_{n(2)} \right] \\ & + \left[\sum_{n=1}^{N_3} [L_{mn(3)}^1 + e^{-iKP} L_{mn(4)}^1] \Phi_{n(3)} - \sum_{n=1}^{N_3} [N_{mn(3)}^1 - e^{-iKP} N_{mn(4)}^1] \Psi_{n(3)} \right] \\ & + \left[\sum_{n=1}^{N_5} L_{mn(5)}^1 \Phi_{n(5)} - \sum_{n=1}^{N_5} N_{mn(5)}^1 \Psi_{n(5)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\left[\sum_{n=1}^{N_5} \frac{f_1}{f_2} L_{mn(5)}^2 \Phi_{n(5)} - \sum_{n=1}^{N_5} N_{mn(5)}^2 \Psi_{n(5)} \right] = 0, \quad (3.62)$$

para $m = 1, 2, \dots, N - N_5$ en la Ec. (3.61) y $m = N - N_5 + 1, \dots, N$ en la Ec. (3.62). Los subíndices $n(j)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ denotan el n -ésimo punto a lo largo del contorno C_j , y las expresiones $f_{1,2}$ están dadas por las condiciones de frontera (3.59) y (3.60), dependiendo de la polarización y de los medios f_1 y f_2 .

Con estas consideraciones encontramos un sistema lineal $M(\omega)F(\omega) = 0$ que tiene una matriz representativa M , que depende de la frecuencia ω y el vector de Bloch K , el cual modelará nuestro sistema de estudio. Dado que el sistema es homogéneo, una solución no trivial puede obtenerse si el determinante de tal matriz es cero. Para determinar la frecuencia ω , definimos la función

$$D(K, \omega) = \ln |\det(M)|, \quad (3.63)$$

que numéricamente presenta puntos mínimos locales que nos darán la relación de dispersión numérica $\omega = \omega(K)$ con la cual identificaremos el modo electromagnético propagante.

Guía de ondas finita

El método desarrollado anteriormente puede calcular la estructura de bandas asociada a una estructura fotónica infinita. Sin embargo, en la realidad, una estructura fotónica tiene un tamaño finito (ver Fig. 3.5), por lo que vamos a estudiar la respuesta óptica del sistema mediante este método integral.

Para esto consideraremos el problema de una estructura fotónica finita que se ilumina con un campo incidente que puede ser una onda plana o un haz Gaussiano. El sistema formado se considera como un sistema de M cuerpos como se ve en la Fig. 3.5.

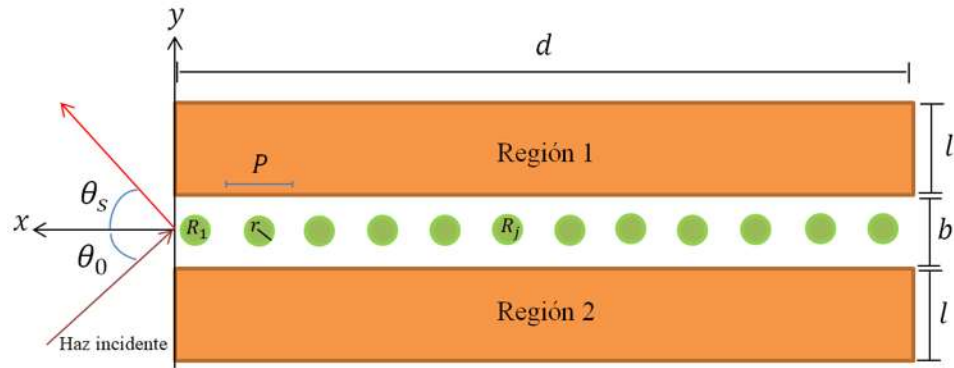


Figura 3.5: Diagrama de una guía de ondas finita con inclusiones cilíndricas de conductor real o de LHM.

La región 0 se caracteriza por un índice de refracción $n_0(\omega) = \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$ y las regiones desde 1 a M están definidas por las curvas C_j y se caracterizan por los correspondientes índices de refracción $n_j(\omega) = \pm\sqrt{\mu_j(\omega)\varepsilon_j(\omega)}$ que involucran las propiedades de los materiales. De manera análoga al caso de una estructura fotónica infinita, se obtienen ecuaciones integrales acopladas inhomogéneas debido al campo incidente con que se ilumina la PCW de longitud finita.

El campo incidente

Se considera un sistema formado por una película de espesor d entre dos medios, iluminado con un haz Gaussiano el cual debe cumplir que la intersección con el plano de la interfaz sea el semiancho de g . Este parámetro debe ser menor que la longitud de la interfaz L para evitar efectos de borde, ya que el sistema debe ser finito (ver Fig. 3.5). Para mayor detalle ver la Ref. [56].

Para describir un haz de este tipo, se propone una forma funcional del campo incidente en términos de su espectro angular $A(q, k_1)$ de la siguiente manera:

$$f(x, y) = \int_{-n_1(\frac{\omega}{c})}^{n_1(\frac{\omega}{c})} \frac{1}{2\pi} A(q, k_1) e^{iqx - i\alpha_0(q)(y)} dq, \quad (3.64)$$

donde $\alpha_0(q) = \left[\left(n_0 \left(\frac{\omega}{c} \right) \right)^2 - q^2 \right]^{1/2}$, con $\text{Re} \{ \alpha_0(q) \} > 0$ e $\text{Im} \{ \alpha_0(q) \} < 0$. Por consiguiente, el campo incidente puede ser escrito como

$$\Psi_i(x, y) = \Psi_0 f(x, y), \quad (3.65)$$

donde Ψ_0 es una constante con las unidades apropiadas. En este caso, para un haz Gaussiano se propone la función

$$A(q, k_1) = \sqrt{\pi} g e^{-\frac{g^2(q-k_1)^2}{4} + i\alpha_0(q)d}. \quad (3.66)$$

Sustituyendo la Ec. (3.66) en la Ec. (3.64) y evaluando en $y = d$,

$$\Psi_i(x, d) = \Psi_0 \int_{-n_1(\frac{\omega}{c})}^{n_1(\frac{\omega}{c})} \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} g e^{-\frac{g^2(q-k_1)^2}{4}} e^{iqx} dq, \quad (3.67)$$

se obtiene el campo incidente sobre dicho plano, es decir,

$$\Psi_i(x, d) = \Psi_0 e^{ik_1 x} e^{-x^2/g^2}. \quad (3.68)$$

El parámetro $k_1 = n_1 \left(\frac{\omega}{c}\right) \sin(\theta_i)$, donde θ_i representa el ángulo de incidencia. Esto muestra que sobre el plano $y = d$ el campo incidente tiene una modulación Gaussiana y una fase que es la de una onda plana con un ángulo de incidencia θ_i .

Potencia incidente

Para calcular el coeficiente de reflexión diferencial, el cual representa la fracción de energía incidente sobre una superficie que es esparcida por unidad de ángulo, se necesita calcular el flujo incidente total y el flujo esparcido total. Lo cual se obtiene del vector de Poynting.

Para el caso de la polarización s, del vector de Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ se tiene que la componente del vector de Poynting a lo largo del eje y está dada por

$$S_y = \frac{1}{2} \text{Re} \{ E_z H_x^* \}, \quad (3.69)$$

o bien, en términos del campo eléctrico,

$$S_y = \frac{1}{2\omega\mu} \text{Re} \left\{ -E_z \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)^* \right\}. \quad (3.70)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el caso de la polarización p, la componente del vector de Poynting es

$$S_y = \frac{1}{2\omega\varepsilon} \text{Re} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial y} H_x^* \right\}. \quad (3.71)$$

Ahora, de la ecuación de campo incidente, dada por

$$\Psi_i(x, y) = \Psi_0 \int_{-n_0(\frac{\omega}{c})}^{n_0(\frac{\omega}{c})} \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} g e^{-\frac{g^2(q-k_1)^2}{4}} e^{iqx+i\alpha_0(q)(d-y)} dq, \quad (3.72)$$

se tiene la derivada del campo incidente

$$\frac{\partial \Psi_i(x, y)}{\partial y} = -i\alpha_0(k_1)\Psi_i(x, y). \quad (3.73)$$

En este punto, se ha puesto que la exponencial en el integrando es relativamente angosta y que está centrada en $q = k_1$, de manera que se puede considerar que $\alpha_0(k_1)$ es una constante sobre el rango en el cual el integrando posee un valor significativo. Al evaluar la derivada del campo incidente en $y = d$, obtenemos la siguiente expresión

$$\left. \frac{\partial \Psi_i(x, y)}{\partial y} \right|_{y=d} = -i\alpha_0(k_1)\Psi_i(x, y). \quad (3.74)$$

donde tenemos $\Psi_i(x, d)$ de la Ec. (3.68).

Así, para la polarización s se tiene que

$$|S_y|_{y=d} = \frac{1}{2\omega\mu_1} \alpha_0(k_1) |\Psi_i(x, d)|^2, \quad (3.75)$$

y para la polarización p

$$|S_y|_{y=d} = \frac{1}{2\omega\varepsilon_1} \alpha_0(k_1) |\Psi_i(x, d)|^2. \quad (3.76)$$

De esta manera, en general se puede escribir la componente y del vector de Poynting

como

$$|S_y|_{y=d} = \frac{1}{2\omega\rho} \alpha_0(k_1) |\Psi_i(x, d)|^2, \quad (3.77)$$

donde $\rho = \varepsilon_1$ para la polarización p, y $\rho = \mu_1$ para la polarización s.

Para obtener el resultado buscado, es necesario integrar sobre un área específica. El haz está confinado a lo largo de x , con límites de integración desde $-L/2$ hasta $L/2$. Entonces, la potencia incidente en un área particular $L_x L_z$ es

$$\begin{aligned} P_i &= \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} |S_y|_{y=d} dz dx, \\ &= \frac{1}{2\omega\rho} \alpha_0(k_1) L_z \int_{-L_x/2}^{L_x/2} |\Psi_i(x, d)|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.78)$$

y usando la expresión de $\Psi_i(x, d)$ (Ec. (3.68)) reducimos la expresión a

$$P_i(k_1) = \frac{1}{2\omega\rho} \alpha_0(k_1) L_z |\Psi_0|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} g, \quad (3.79)$$

que es la potencia incidente al sistema de la Fig. 3.5.

Dado que $k_1 = n_1 \left(\frac{\omega}{c}\right) \sin(\theta_i)$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_0(k_1) &= [(k_1)^2 - (k_1 \sin(\theta_i))^2]^{1/2}, \\ &= k_1 [1 - \sin^2(\theta_i)], \\ &= k_1 \cos \theta_i, \end{aligned} \quad (3.80)$$

donde si consideramos la Ec. (3.80) y $|\Psi_0|^2 = 1$, entonces la Ec. (3.79) se transforma en

$$P_i(k_1) = \frac{1}{2\omega\rho} k_1 \cos(\theta_i) L_z \sqrt{\frac{\pi}{2}} g. \quad (3.81)$$

Así, para polarización s tenemos que:

$$\begin{aligned} P_i^s &= \frac{n_1 \left(\frac{\omega}{c}\right) \cos(\theta_i)}{2\omega\mu_1} L_z \sqrt{\frac{\pi}{2}} g, \\ &= \frac{n_1 \cos(\theta_i)}{4c\mu_1} L_z \sqrt{2\pi g}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

y para polarización p,

$$P_i^p = \frac{n_1 \cos(\theta_i)}{4c\varepsilon_1} L_z \sqrt{2\pi g}. \quad (3.83)$$

Potencia esparcida

Se puede obtener el diferencial de la reflectancia asociada (ver Ref. [64]) para polarización s, la cual está dada por

$$\begin{aligned} dR(\theta_s) &\equiv \frac{P_R}{P_i^s} = \frac{\frac{n_1 L_z}{16\pi k_1 \mu_1 c} |\sigma_R(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s}{\frac{n_1 \cos(\theta_i)}{4\mu_1 c} L_z \sqrt{2\pi g}}, \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} g k_1 \cos(\theta_i)} |\sigma_R(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s, \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde P_R denota la potencia esparcida de reflexión y $\sigma_R(\theta_s)$ es la sección eficaz de esparcimiento para R definida como

$$\sigma_R(\theta_s) = \Delta s \sum_{n=1}^N [ik_1 (y'_n \sin(\theta_s) - x'_n \cos(\theta_s)) \Psi_n^1 - \Phi_n^1] e^{-ik_1(x_n \sin(\theta_s) - y_n \cos(\theta_s))}. \quad (3.85)$$

Al integrar la Ec. (3.84) en el intervalo de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se tiene que la reflectancia es

$$R(\theta_s) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} g k_1 \cos(\theta_i)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sigma_R(\theta_s)|^2 d\theta_s. \quad (3.86)$$

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo mostraremos los resultados más sobresalientes para nuestros casos de estudio. Primeramente mostraremos los resultados del caso clásico para el sistema de billares de Sinai y posteriormente mostraremos la respuesta óptica de la PCW que contiene un arreglo de inclusiones circulares, tanto de metal como de metamaterial dispersivo.

4.1. Fenómeno del caos clásico para el sistema del billar de Sinai

Se realizó un estudio para el caso clásico del billar de Sinai a partir de consideraciones geométricas, como lo son la variación de nuestra posición de salida del rayo incidente (RI), el radio de la inclusión circular (R) y la variación de la posición central de la inclusión.

Para el análisis en general se considera el plano dentro del cuadrado unitario ($L = 1$). En nuestro estudio numérico consideramos principalmente tres radios para la inclusión, un radio mínimo (o pequeño $RP = 0.1$), un radio medio ($RM = 0.3$) y un radio máximo (o grande $RG = 0.45$), tal como se puede observar en la Fig. 4.1(a). Se analizó así

mismo distintos casos para la posición de la inclusión; es decir, se estudiaron los casos en donde la inclusión presenta desplazamientos grandes ($DG = 0.1$) y desplazamientos pequeños (una décima parte del desplazamiento grande $DP = 0.01$) hacia arriba, abajo, derecha e izquierda. También se estudiaron los escenarios en donde la inclusión presenta desplazamientos sobre una línea diagonal respecto al origen (Fig. 4.1(b)).

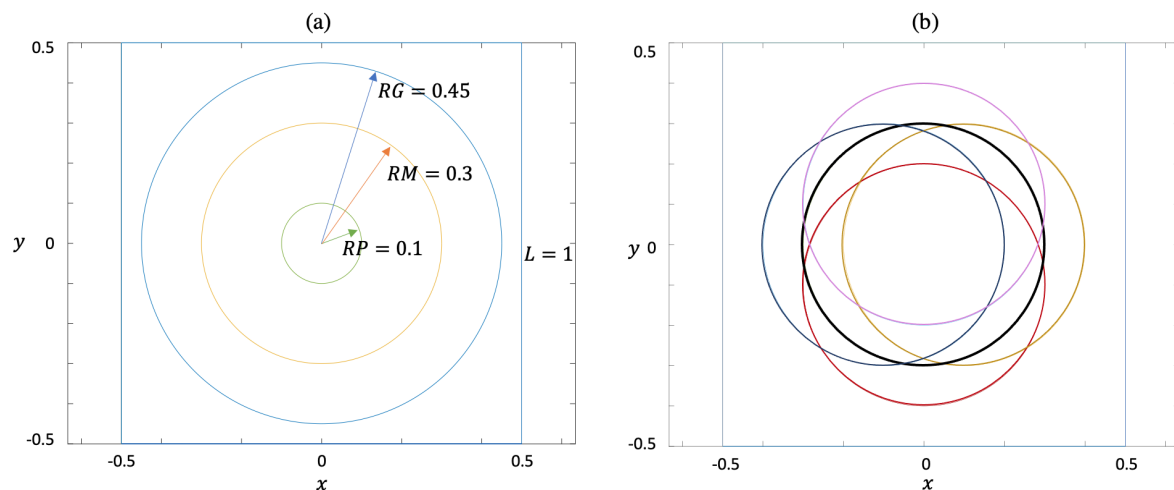


Figura 4.1: (a) Espacio de configuración para los radios RP , RM y RG de la inclusión circular. (b) Desplazamientos grandes para RM .

Por otro lado, para cada caso consideramos tres rayos incidentes como se puede observar en la Fig. 4.2.

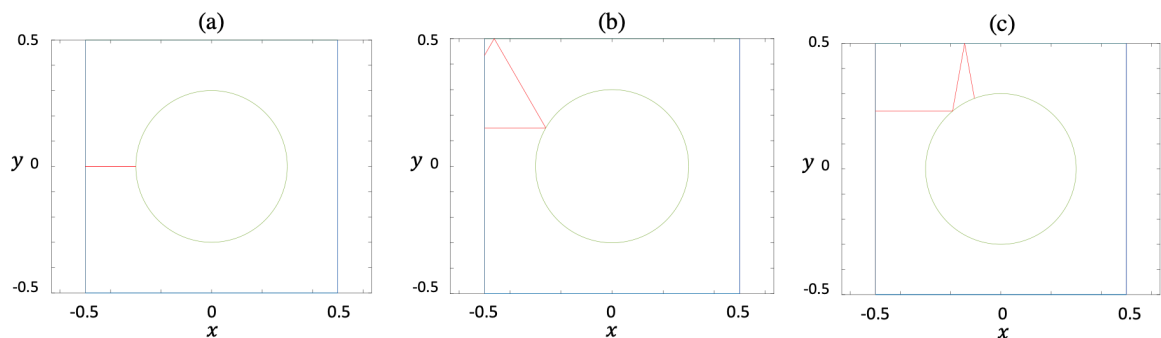


Figura 4.2: Espacio de configuración para RM con 2 iteraciones para: (a) $RI1$, (b) $RI2$ y (c) $RI3$.

Esto para que cada uno de nuestros rayos colisionen contra la inclusión circular (en una primera iteración) dentro del segundo cuadrante del plano en una parte baja ($RI1$), en una parte media ($RI2$) y en una parte alta ($RI3$) de la misma (Fig. 4.2).

Para nuestro análisis se hizo una combinación con los radios de la inclusión (RP , RM y RG) y con cada uno de los rayos $RI2$ y $RI3$, ya que se observó que $RI1$ no representa un caso importante de estudio para nuestro problema. Para nuestro estudio numérico se consideraron dos mil iteraciones en para cada caso. A su vez en cada caso se estudiaron también los desplazamientos DG y DP en todas las direcciones como se muestra en la Tabla ??.

Número	Desplazamiento	Nomenclatura	Centro de la inclusión
1	DP - Arriba	DPA	(0,0.01)
2	DG - Arriba	DGA	(0,0.1)
3	DP - Abajo	DPB	(0,-0.01)
4	DG - Abajo	DGB	(0,-0.1)
5	Origen	C	(0,0)
6	DP - Derecha	DPD	(0.01,0)
7	DG - Derecha	DGD	(0.1,0)
8	DP - Izquierda	DPI	(-0.01,0)
9	DG - Izquierda	DGI	(-0.1,0)
10	DP - Diagonal (Cuadrante 1)	DPDC1	(0.01,0.01)
11	DG - Diagonal (Cuadrante 1)	DGDC1	(0.1,0.1)
12	DP - Diagonal (Cuadrante 3)	DPDC3	(-0.01,-0.01)
13	DG - Diagonal (Cuadrante 3)	DGDC3	(-0.1,-0.1)

Tabla 4.1: Tabla de nomenclatura para consideraciones geométricas del billar de Sinai

En la Fig. 4.3 se muestran dos de nuestros 78 casos analizados. En la Fig. 4.3 se muestra: (a) la configuración para el sistema de billares con inclusión circular RP y rayo de incidencia $RI2$ y desplazamiento DGA , en (b) se muestra la configuración para el sistema de billares con inclusión circular RG y rayo de incidencia $RI3$ y desplazamiento sobre la diagonal en el tercer cuadrante $DPDC3$.

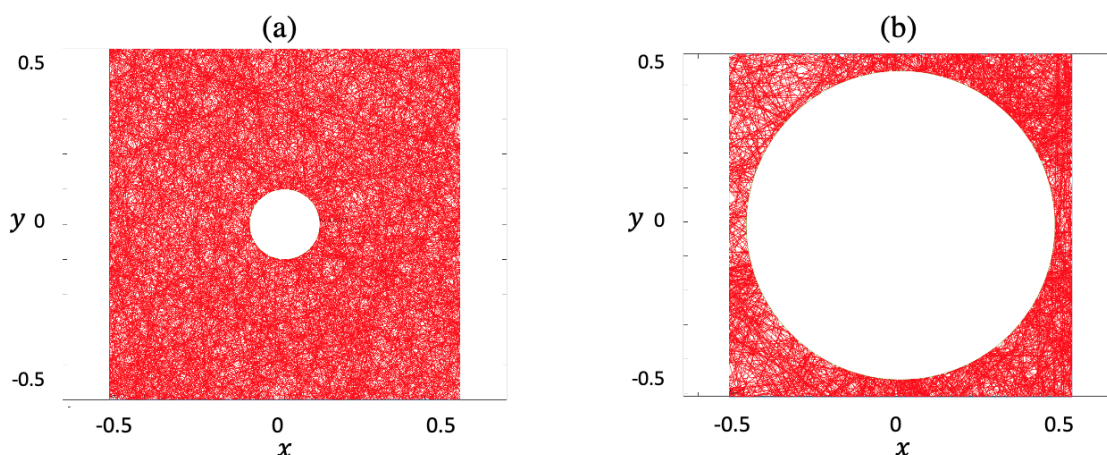


Figura 4.3: Espacio de configuración para: (a) RP con $RI2-DGA$ y (b) RG con $RI3-DPDC3$.

Para nuestro problema es de suma importancia conocer dos parámetros importantes, los cuales son la entropía de la imagen (E_i) y la intensidad media de la imagen (I_m) de cada uno de nuestros sistemas. Para realizar el cálculo de estos dos parámetros hacemos uso del software Wolfram Mathematica, versión 12. La imagen que se toma es la trayectoria en el espacio de configuración que resulta después de 2000 iteraciones.

Una vez calculados los parámetros E_i e I_m se realizó el siguiente análisis. Para cada uno de los radios se hizo un comparativo para $RI2$ y $RI3$ con los datos obtenidos para E_i e I_m y los resultados fueron los siguientes:

- Para la E_i encontramos un mayor número de diferencias que para I_m con una serie de oscilaciones.
- Entre más pequeño es el radio se presenta un comportamiento más irregular respecto a E_m .
- Los casos que presentan mayor entropía son los casos más caóticos. Los casos más caóticos se presentan en RP para $RI2-DPB$ (Fig. 4.4), en RM para $RI3-DPA$ (Fig. 4.5) y en RG para $RI2-DGI$ (Fig. 4.6).

- Mientras que los casos menos caóticos se presentan en RP para $RI2$ - $DPDC3$, en RM para $RI3$ - $DGDC1$ y en RG para $RI2$ - C .

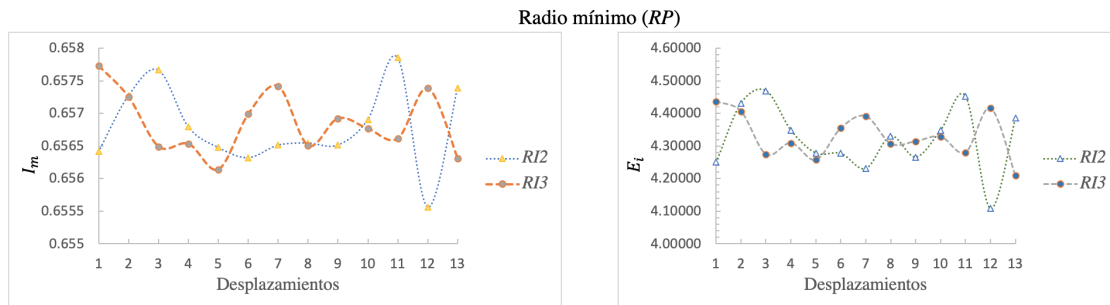


Figura 4.4: Gráficos comparativos de RP para I_m e E_i con $RI2$ y $RI3$.

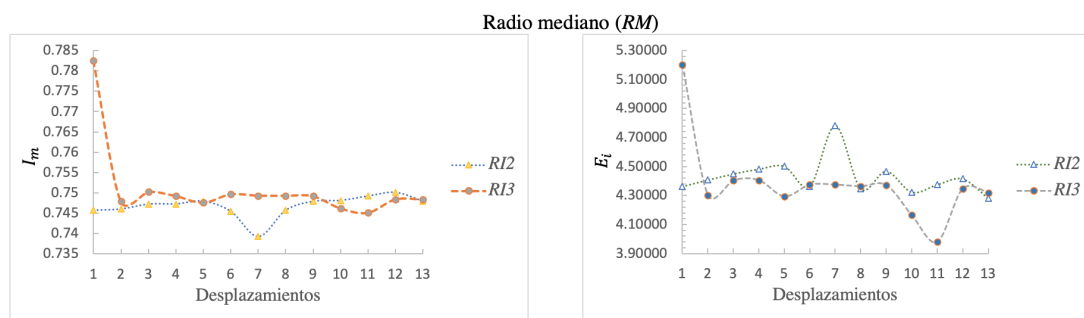


Figura 4.5: Gráficos comparativos de RM para I_m e E_i con $RI2$ y $RI3$.

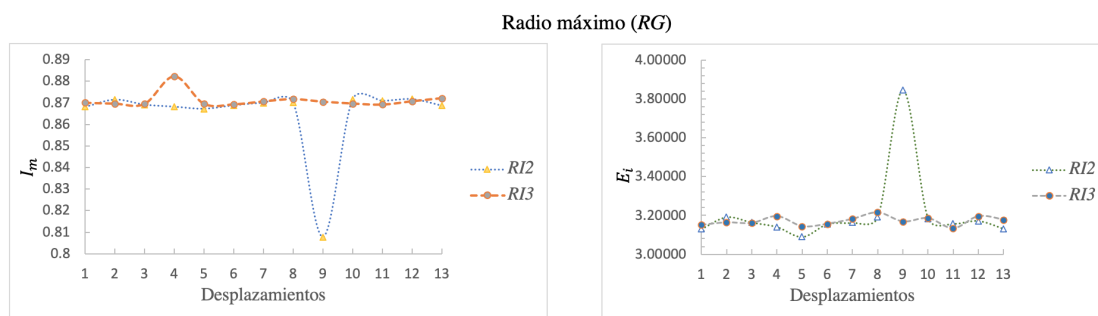


Figura 4.6: Gráficos comparativos de RG para I_m e E_i con $RI2$ y $RI3$.

Estos resultados son de suma importancia para nuestro trabajo de investigación, de aquí partimos al objetivo final de estudio que será tratar de investigar cuál es el tipo de caos que podemos esperar. Es decir, podremos realizar un análisis para ver el caos

en estos sistemas como aproximación en un mapa. A partir de esto podremos también realizar un análisis del espacio fase para nuestros sistemas así como un estudio de la entropía de Shannon.

Para nuestros estudios posteriores podemos considerar también histogramas para observar el fenómeno del caos en nuestros sistemas, como se puede observar en las Figs. 4.7 (que no presenta caos) y 4.8 (con un alto nivel de caos). En la Fig. 4.7 hacemos el análisis con 2000 iteraciones para un sistema sin inclusión con $RI1$ y un ángulo para el rayo de incidencia de 15° , En la Fig. 4.7(a) podemos ver el espacio de configuración, en el cual se nota como se cicla la partícula colisionando continuamente las paredes. De igual manera, en la Fig. 4.7(b) podemos observar el espacio fase para el ángulo incidente y nuestro ángulo horizontal y en Fig. 4.7(c) se presenta un histograma del número de veces que se golpea cada pieza (pared) para las condiciones iniciales dadas.

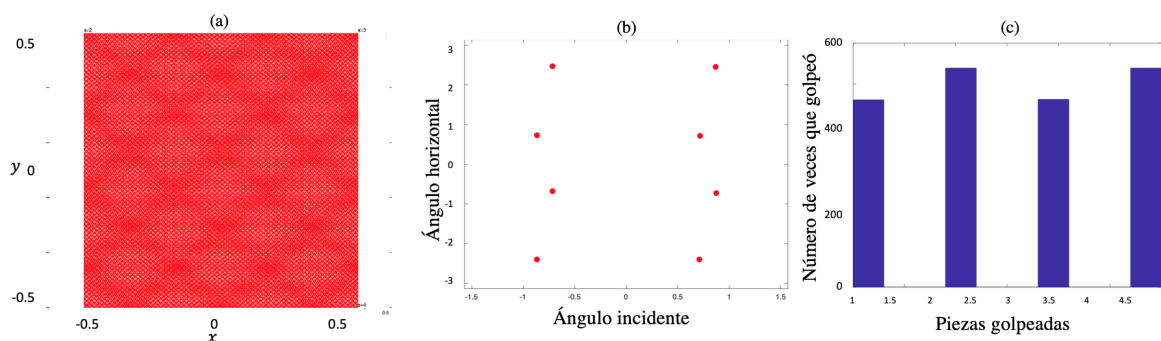


Figura 4.7: Análisis para un sistema sin inclusión. (a) Espacio de configuración del sistema. (b) Espacio fase. (c) Histograma de frecuencias de impacto en las paredes.

Así mismo en la Fig. 4.8 hacemos el análisis para un sistema con una inclusión muy pequeña de radio $R = 0,01$ con $RI1$ y un ángulo para el rayo de incidencia de 15° , con 2000 iteraciones deteniéndose el proceso en 1955 iteraciones debido al rebote del rayo en una esquina del billar. En la Fig. 4.8(a) podemos ver el espacio de configuración, el cual presenta un visible desorden. Por otro lado, en la Fig. 4.8(b) podemos observar el

espacio fase para el ángulo incidente y nuestro ángulo horizontal y en la Fig. 4.8(c) se presenta un histograma del número de veces que se golpea cada pieza (pared) para las condiciones iniciales dadas, en el cual se puede observar una barra extra a diferencia de la Fig. 4.7(c) esto debido a la inclusión.

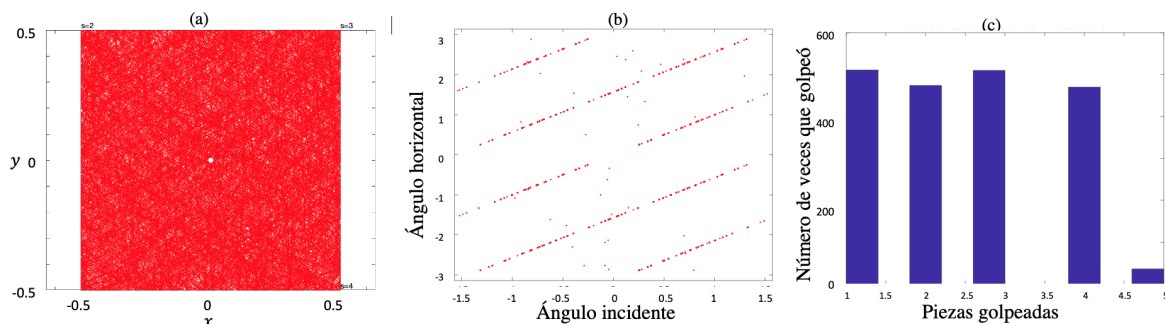


Figura 4.8: Análisis para un sistema con inclusión muy pequeña. (a) Espacio de configuración del sistema. (b) Espacio fase. (c) Histograma de frecuencias de impacto en las paredes.

Tanto para el sistema sin inclusión (Fig. 4.7) como para el sistema con inclusión pequeña (Fig. 4.8), estudiamos también la serie que describe la distancia que hay desde el punto de salida del RI hasta donde se presenta un choque con alguna de las paredes como se muestra en la Figs. 4.9(a) y (c). También se estudiaron los mapas de Lorenz representativos para cada caso. Para nuestro estudio podemos entender que los mapas de Lorenz se basan en monitorear los máximos consecutivos de la serie. Estos mapas de Lorenz nos muestran información dispersa sobre el comportamiento cuasiperiódico irregular de nuestros sistemas. Esta sería una manera de ,medir cuantitativamente el grado de caoticidad de nuestros sistemas.

En la Fig. 4.9(b) y (d) se ilustran los mapas de Lorenz correspondientes al sistema sin inclusión y al sistema con inclusión pequeña.

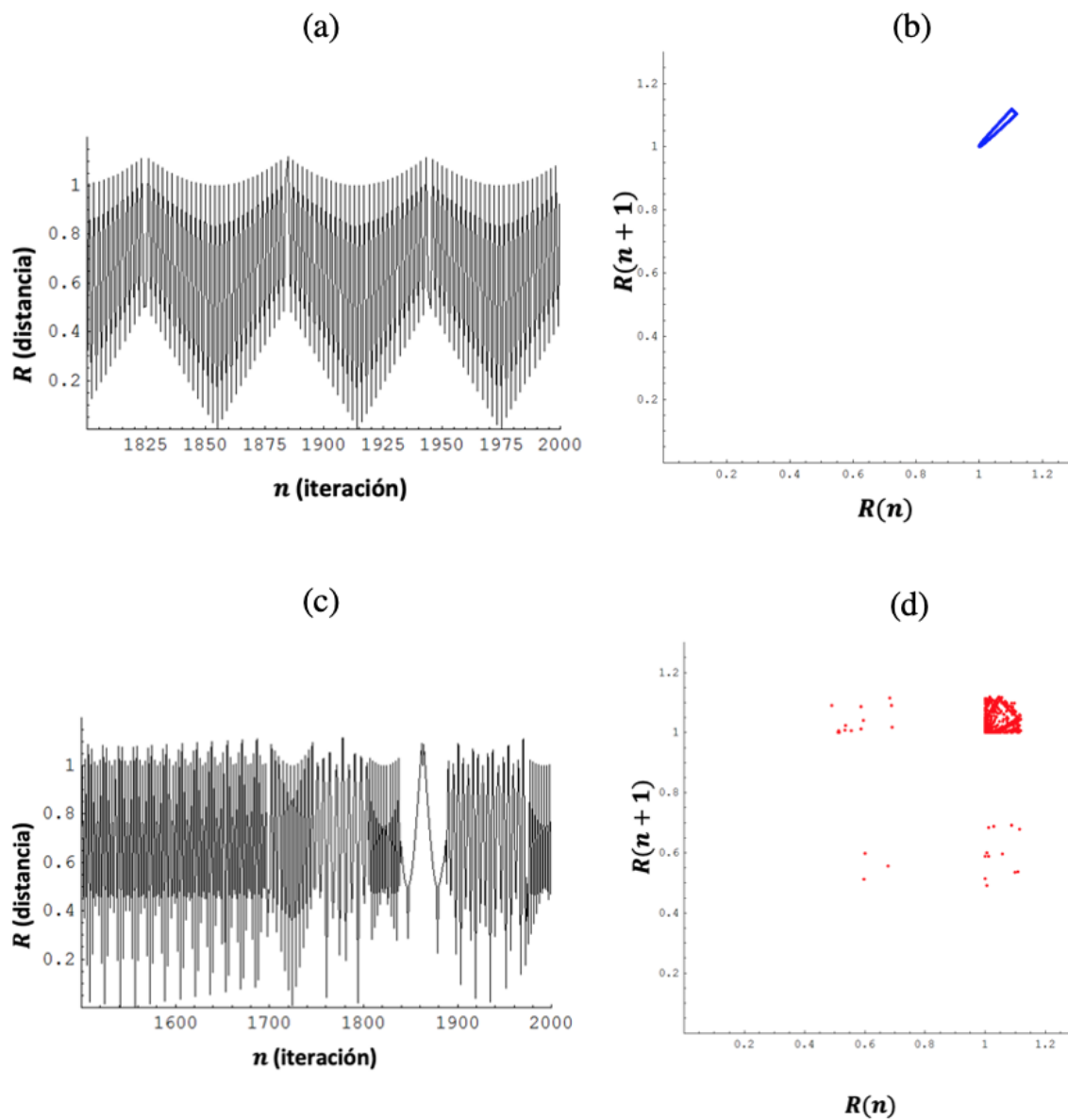


Figura 4.9: Análisis para un sistema sin inclusión y con inclusión muy pequeña. (a) y (c) Espacio de configuración para la distancia R . (b) y (d) Mapa de Lorenz.

En la Fig. 4.10 podemos observar un comparativo respecto a los mapas de Lorenz de nuestro sistemas. Para nuestro sistema sin inclusión observamos una órbita cuasi-periódica, mientras que para el sistema con inclusión, en comparación con el anterior, observamos una órbita caótica.

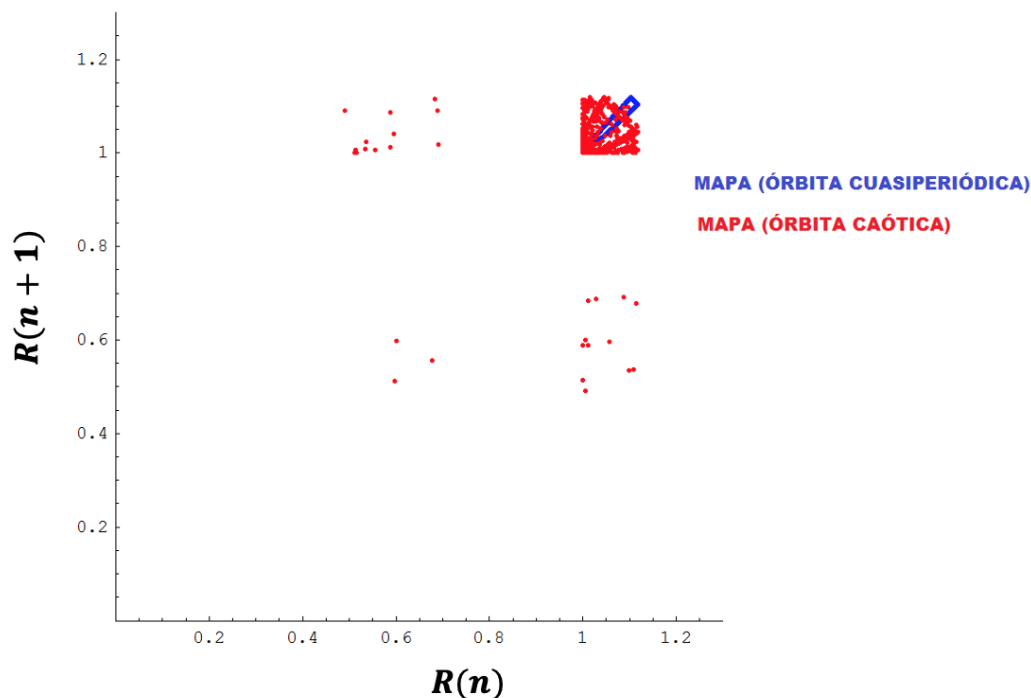


Figura 4.10: Comparativo de los mapas de Lorenz para los casos sin inclusión (puntos azules) y con inclusión pequeña (puntos rojos.)

Con este comparativo podemos observar de una manera más evidente la presencia del caos en nuestro sistema con una inclusión. El objetivo de este estudio es poder observar cómo se modifica el mapa de Lorenz en función de las características del billar. Para ello realizamos el siguiente análisis.

En la siguiente tabla se muestran las trayectorias analizadas G_n , en donde se tomaron 2000 iteraciones en cada caso. Las características de los rayos luminosos, posición inicial S_0 y ángulo inicial θ_0 , así como las entropías de imagen E_i , tanto para las trayectorias con ausencia (TN) y presencia (TC) de inclusión circular, se muestran en la Tabla 4.2:

G_n	S_0	θ_0	$E_i(TN)$	$E_i(TC)$
G_1	(-0, 5, 0,374)	$\arctan(1)$	1.47511	5.17524
G_2	(-0, 5, 0)	$\arctan(3,5)$	4.06182	5.0533
G_3	(-0, 5, 0)	$\arctan(13,5)$	5.78356	5.0464
G_4	(-0, 5, 0)	$\arctan(32)$	5.02251	5.13676
G_5	(-0, 5, 0)	$\arctan(\sqrt{2}/2)$	5.03952	4.98736
G_6	(-0, 5, 0)	$\arctan(\sqrt{7}/2)$	2.00555	5.1196

Tabla 4.2: Tabla de geometrías para el análisis de trayectorias.

La Fig. 4.11 muestra el comportamiento entrópico para nuestras trayectorias sin inclusión (TN) mostrada con línea discontinua azul y con una inclusión (TC) con línea discontinua roja.

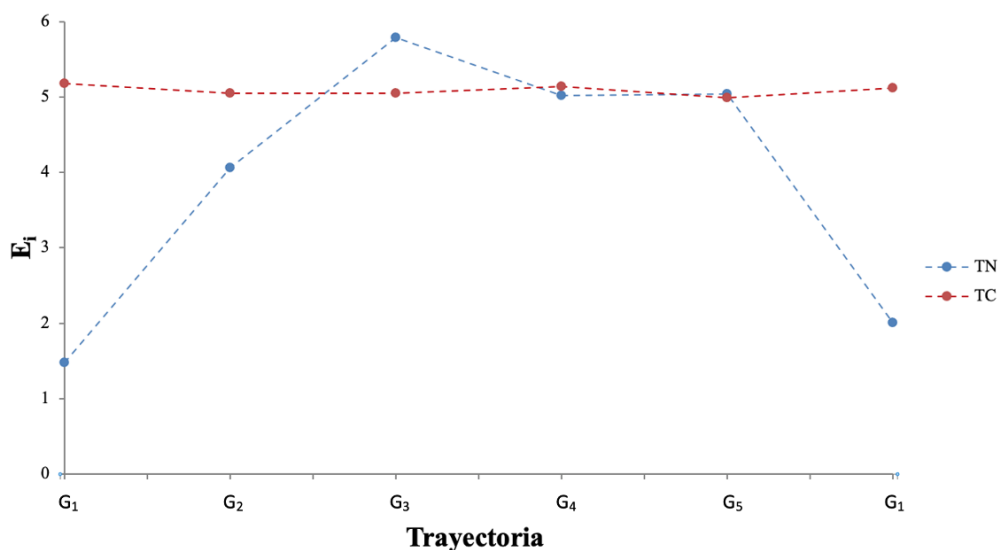


Figura 4.11: Entropías de imagen para TN y TC.

En la Fig. 4.12 se muestran las trayectorias TN y TC para una inclusión circular de $R = 0.2$ para algunos de los casos de la Tabla 4.2 (G_1 , G_3 y G_6). La Fig. 4.13 presenta las series asociadas a las distancias entre el punto de emisión del rayo y los puntos de colisión como función del número de la colisión. La Fig. 4.14 muestra los mapas de Lorenz para las trayectorias TN y TC, algunos de los casos de la Tabla 4.2.

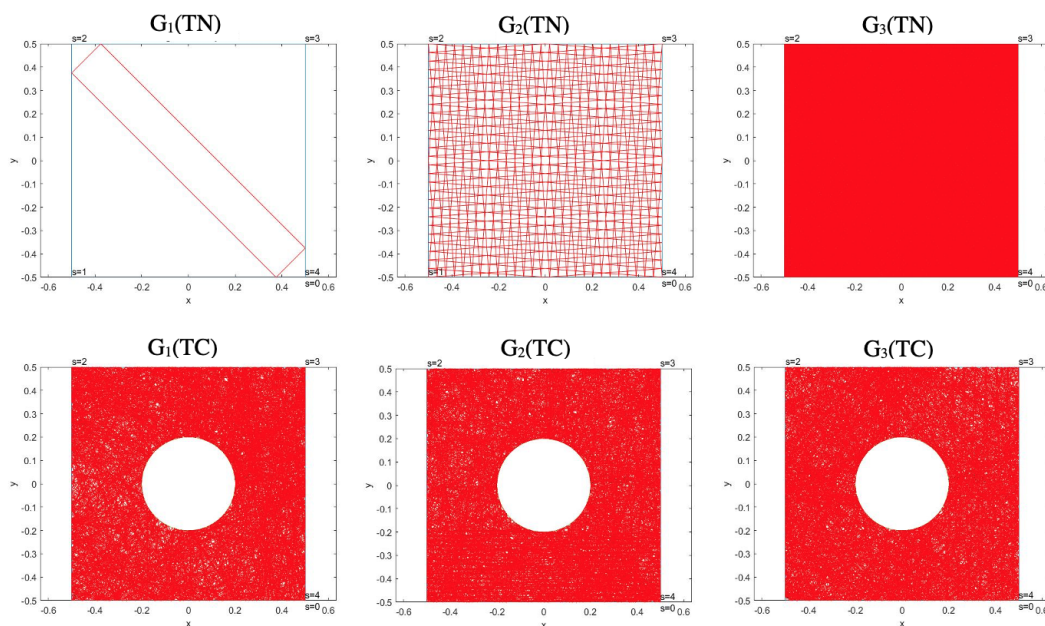


Figura 4.12: Trayectorias sin inclusión (TN) y con inclusión (TC), para algunos de los casos de la Tabla 1.

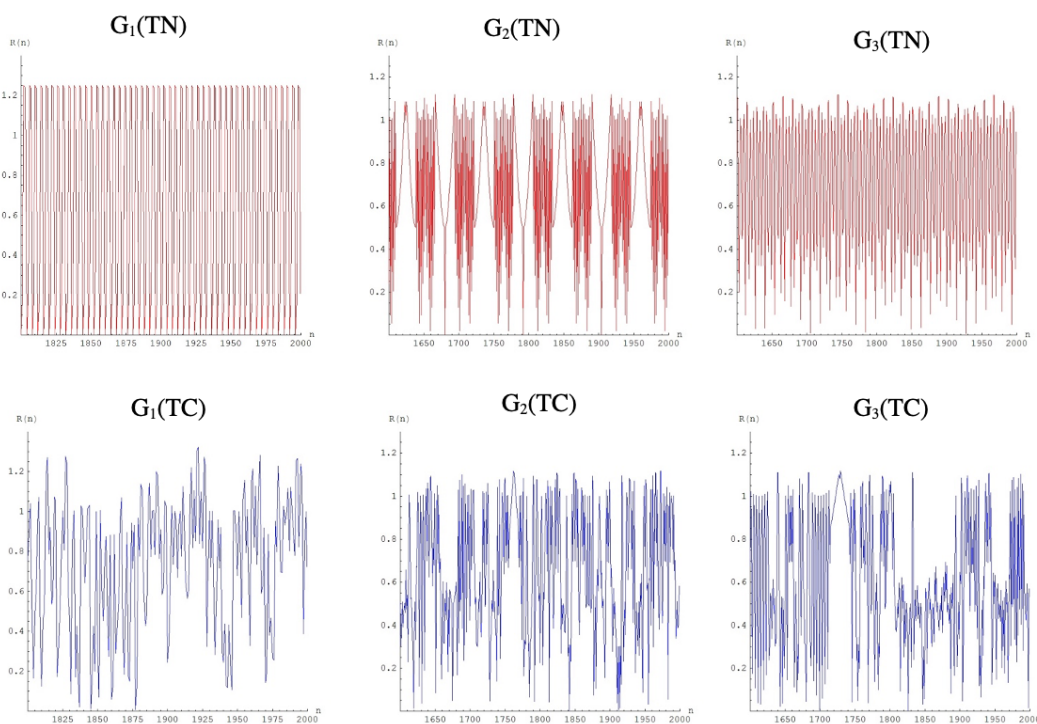


Figura 4.13: Series para las trayectorias sin inclusión (TN) y con inclusión (TC), para los casos G_1 , G_3 y G_6 .

Se estudió la dinámica de la propagación de un rayo de luz en el billar de Sinai para las trayectorias TN y TC. El cálculo de las entropías de imagen E_i y la construcción de los mapas de Lorenz permitieron identificar características propias de la dinámica para las trayectorias TN y TC.

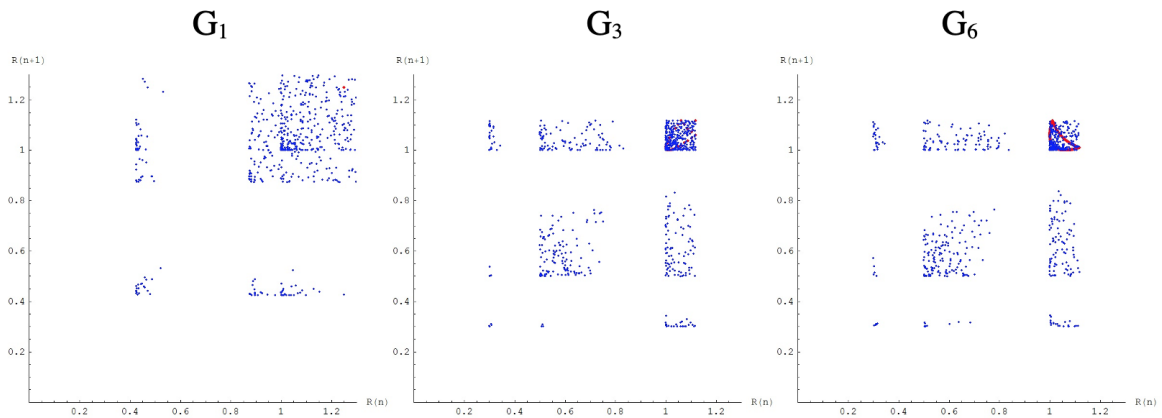


Figura 4.14: Gráficas comparativas de los mapas de Lorenz para G_1 , G_2 y G_3 .

En particular, los mapas de Lorenz mostraron gráficamente regiones en donde la naturaleza cuasi-periódica y caótica de las trayectorias TN y TC se pueden reconocer con facilidad. Los resultados de este trabajo se podrían aplicar en el diseño y construcción de trampas de luz bidimensionales.

4.2. Estudio del fenómeno del caos electromagnético en una guía de ondas de cristal fotónico

Para nuestro trabajo de investigación también realizamos un estudio numérico para una PCW con las inclusiones cilíndricas de dos distintos materiales. Para nuestro primer caso realizamos el arreglo considerando dichas inclusiones de conductor real; en particular, utilizamos como metal la plata y para el segundo caso lo hicimos con un metamaterial.

4.2.1. Respuesta óptica de la PCW que contiene un arreglo de inclusiones cilíndricas de conductor real

Caso infinito

En esta sección se muestran los resultados del campo electromagnético obtenido para un sistema de una PCW infinita con periodicidad $P = 2\pi \mu\text{m}$ formada con un arreglo de inclusiones cilíndricas circulares de radio $a = 0.3 \mu\text{m}$, y una separación entre las placas $b = 1.5 \mu\text{m}$ (ver Fig. 3.5). Se usaron las unidades reducidas de la frecuencia dada por $\omega_r = \omega D/2\pi c$ y el vector de onda de Bloch $k_r = kD/2\pi$, donde c representa la velocidad de la luz y D es una constante de normalización que elegimos para ser la dimensión del lado de una celda unitaria cuadrada. Las intensidades del campo para dos frecuencias reducidas $\omega_r = 1,1429$ y $\omega_r = 70,0676$ son mostradas en las Figs. 4.15(a) y (c), respectivamente; las cuales serán comparadas con nuestros resultados del caso finito. Para ambos casos, se calcularon las correspondientes funciones de autocorrelación (ACFs) (Figs. 4.15(b) y (d)) y sus longitudes de correlación definidas como la desviación estándar de la función de autocorrelación (ver sección 2.3.4). Para la PCW infinita, por simplicidad se consideró el vector de Bloch reducido $K_r = 0$ bajo la polarización TE. Para la obtención de resultados confiables en el caso de frecuencias bajas y altas, es necesario utilizar intervalos de discretización pequeños. Para los cálculos del sistema infinito se utilizó $\Delta s = (P/\omega_{nMax})/20$ para bajas frecuencias y $\Delta s = (P/\omega_{nMax})/10$ para frecuencias altas en la guía de ondas con inclusiones cilíndricas circulares de plata ($n + ik = 0.051585 + i3.9046$).

Una herramienta matemática importante para la interpretación del fenómeno de caos en sistemas electromagnéticos es la función de autocorrelación [30, 60]. La autocorrelación se calculó utilizando puntos localizados en la sección superior de la celda unitaria como se muestra con el rectángulo rojo en las Figs. 4.15(a) y (c). Una canti-

dad que podría ser aún más importante es la longitud de correlación l_c , pues bien para sistemas donde se presenta el fenómeno de caos la longitud de correlación tiende a cero [61].

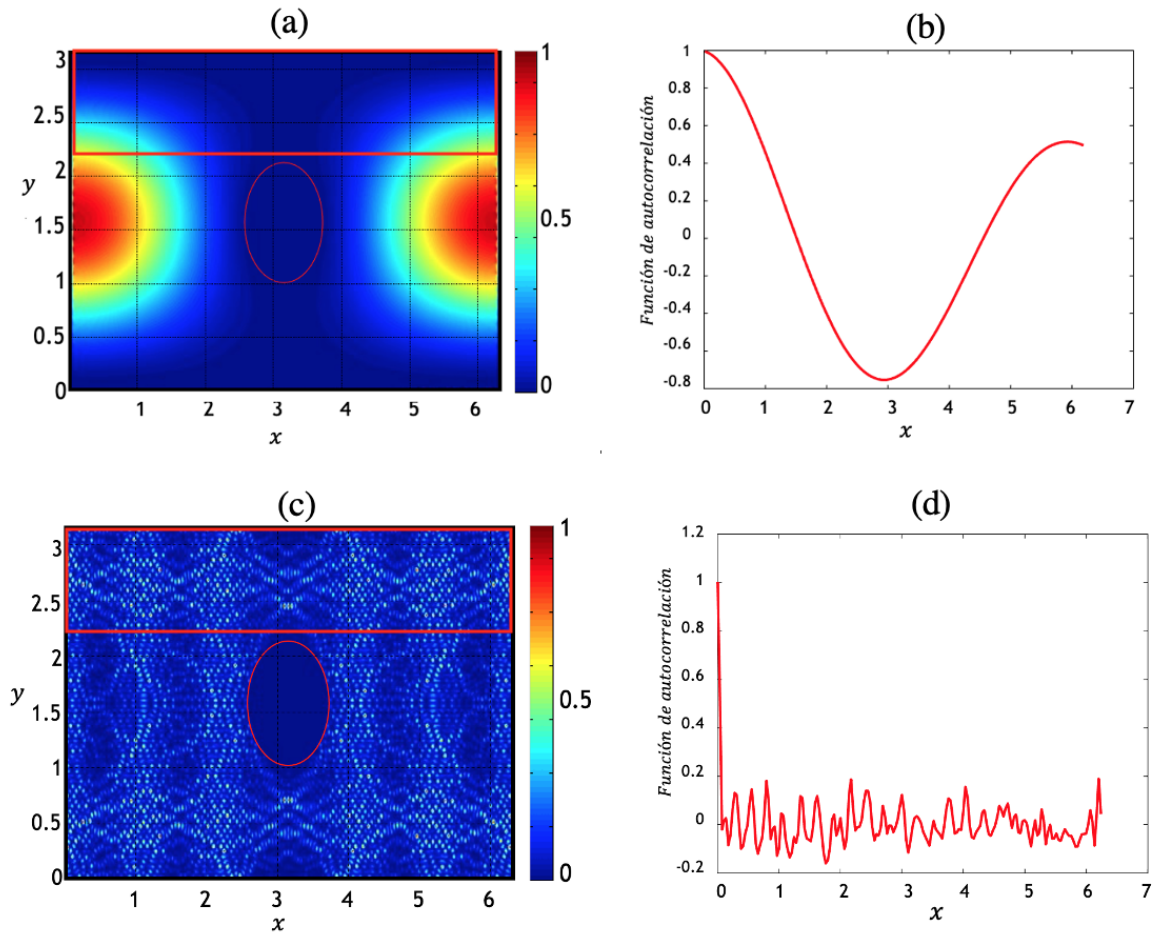


Figura 4.15: Patrones de intensidad electromagnética en una celda unitaria de la PCW infinita con inclusiones cilíndricas de plata para las frecuencias reducidas (a) $\omega_r=1.1419$ y (c) $\omega_r = 70,0676$. La curva circular sólida representa la inclusión y el rectángulo la región considerada para el cálculo de la ACF. Las funciones de autocorrelación correspondientes se muestran en (b) y (d) con longitudes de correlación $l_c = 0.54624$ y $l_c = 0.10879$ respectivamente.

Para la frecuencia más baja, la longitud de correlación obtenida es $l_c = 0,54624$ y para la frecuencia más alta se obtiene una menor de $l_c = 0,10879$. En especial para la frecuencia más alta se puede apreciar en la Fig. 4.15(c) que muestra una distribución de los patrones del campo con mayor desorden. Además por el criterio que se tiene cuando la

longitud de correlación tiende a cero da indicios del fenómeno de caos electromagnético.

Caso finito

En los resultados anteriores, asumimos una PCW de longitud infinita; sin embargo, las guías de ondas que podemos analizar experimentalmente son de longitud finita. Por consiguiente, vamos a ver si el patrón del campo desordenado de la PCW ideal (longitud infinita) aparece en el caso de una PCW de longitud finita. Para ello, vamos a considerar una PCW con 3 inclusiones cilíndricas circulares iluminadas con un haz Gaussiano con polarización TE a incidencia normal. El sistema está formado por dos bloques de conductor real que forman la guía de ondas con separación entre las placas de $b = \pi \mu\text{m}$, espesor $l = 13.42 \mu\text{m}$ y longitud $d = 6\pi \mu\text{m}$, con inclusiones cilíndricas de radio $a = 0.56 \mu\text{m}$ (ver Fig. 3.5). Como ejemplo para las frecuencias reducidas $\omega_r = 2.9246$ y $\omega_r = 3.1212$, las intensidades de campo obtenidas se muestran en las Figs. 4.16(a) y (c). Las curvas de las ACFs de las Figs. 4.16(b) y (d) fueron obtenidas con la región superior de la celda debido a la simetría de la PCW como se ilustran con los rectángulos rojos. Además, las longitudes de autocorrelación fueron $l_c = 0.4485$ para la frecuencia menor y para la frecuencia mayor de $l_c = 0.42539$. Para este caso se puede observar que no se logró un patrón de intensidades del campo desordenado, ya que el número de inclusiones y el valor de la frecuencia reducida no fueron suficientes por la limitación de la memoria interna de las librerías IMSL utilizadas con el compilador de FORTRAN. No obstante, son interesantes estos resultados ya que tienen posibles aplicaciones en criptografía.

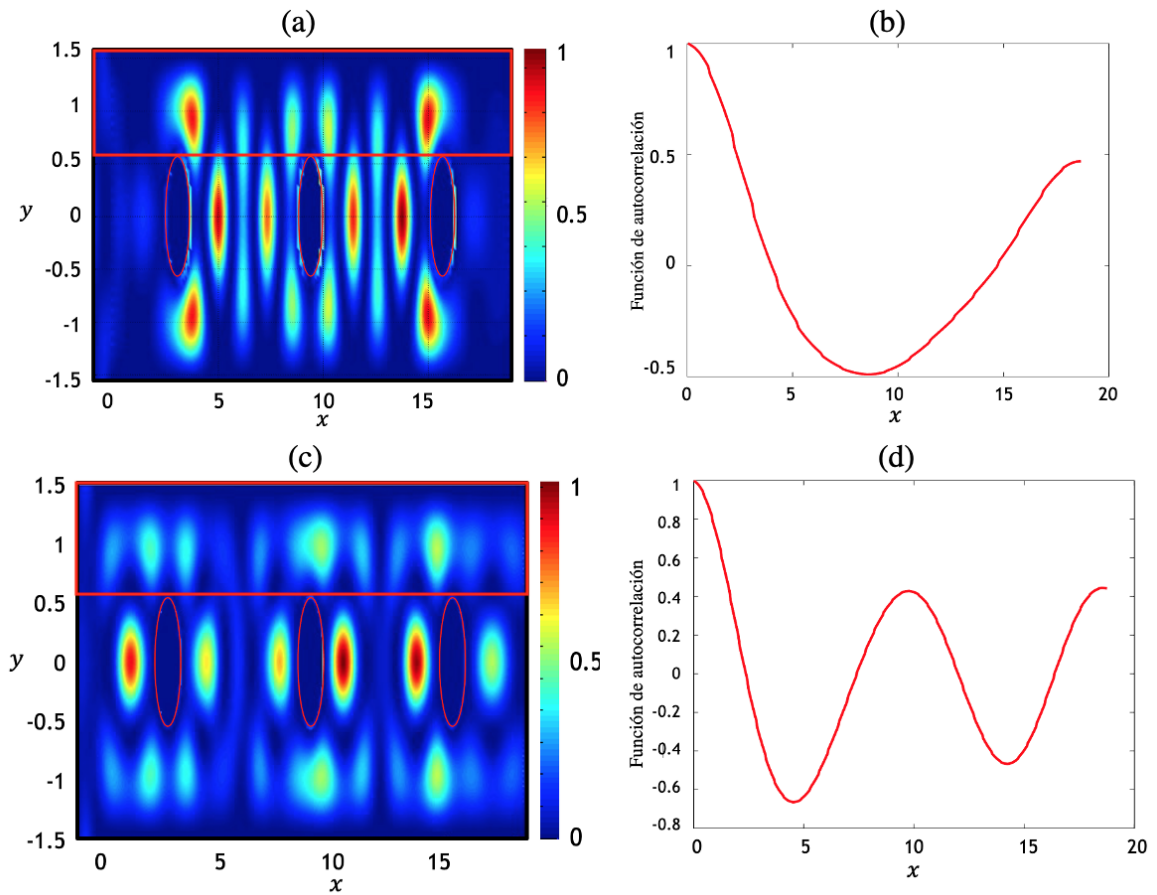


Figura 4.16: Patrones de intensidad electromagnética en una PCW finita con 3 inclusiones cilíndricas de plata para las frecuencias reducidas (a) $\omega_r = 2.9246$ y (c) $\omega_r = 3.1212$. Las curvas circulares sólidas representan las inclusiones y el rectángulo la región considerada para el cálculo de la ACF. Las funciones de autocorrelación correspondientes se muestran en (b) y (d) con longitudes de correlación $l_c = 0.4485$ y $l_c = 0.42539$ respectivamente.

4.2.2. Respuesta óptica de la PCW que contiene un arreglo de inclusiones cilíndricas de metamaterial dispersivo

Se presentan las características de las funciones de permitividad eléctrica (ε) y permeabilidad magnética (μ), las cuales son usadas para modelar numéricamente las propiedades ópticas de los LHMs.

El estudio teórico-numérico de el comportamiento de los efectos caóticos en las PCW de tamaño infinito y finito que contienen medios de LHM, se llevó a cabo mediante la

aplicación de un método numérico conocido como el Método de la Ecuación Integral, el cual, su desarrollo fue presentado en el protocolo y avance de tesis I. Por esta razón en este reporte no se hará el desarrollo del mismo. Sin embargo, lo que se presentará en esta sección son los desarrollos empleados en el presente semestre. Como nuestros sistemas de PCW involucran medios de LHM, a continuación se presentan las funciones de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, usadas para modelar numéricamente las propiedades ópticas de los LHMs. Las propiedades ópticas de un LHM están dadas por la función de permitividad eléctrica [65]

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (4.1)$$

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (4.2)$$

Estas funciones permiten determinar la región donde el LHM presenta un índice de refracción negativo, el cual está dentro del rango de frecuencias $\omega_0 < \omega < \omega_{LM}$ con $\omega_{LM} = \omega_0/\sqrt{1-F} \approx 0.96$. Las funciones dadas por las Ecs. (4.1) y (4.2) están mostradas en la Fig. 4.17 con la frecuencias de plasma $\omega_p = 10c/D$, la frecuencia de resonancia $\omega_0 = 4c/D$, y el factor $F = 0.56$ [65].

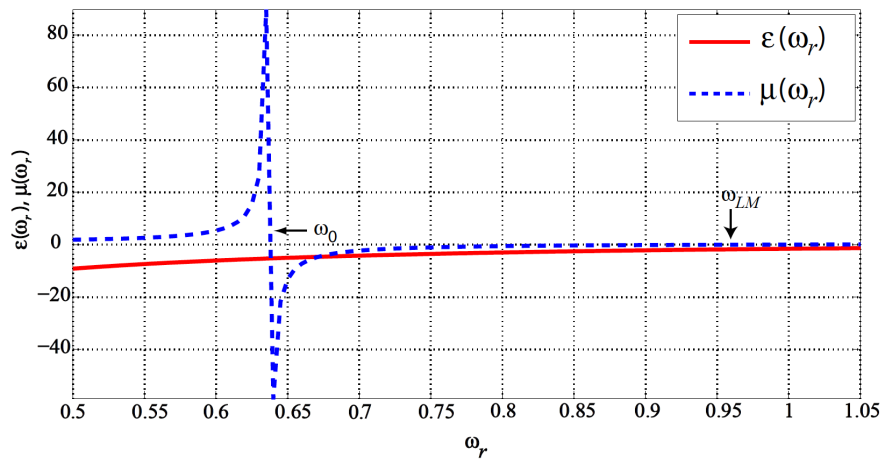


Figura 4.17: Función de la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética de un LHM dispersivo como función de la frecuencia reducida [64].

En la Fig. 4.17 se usaron las unidades reducidas de la frecuencia dada por $\omega_r = \omega D/2\pi c$. En estas expresiones c representa la velocidad de la luz y D es una constante de normalización que elegimos para ser la dimensión del lado de una celda unitaria cuadrada. En unidades reducidas, las frecuencias de plasma y de resonancia son $\omega_p = 1.592$ y $\omega_0 = 0.637$ [65], respectivamente.

Caso infinito

A continuación se muestran los resultados del campo obtenido para un sistema de una PCW infinita con periodicidad $P = 2\pi$ formada con un arreglo de inclusiones cilíndricas circulares de radio $r = 0.1b$, $b = 4\pi$ y fracción de llenado $f = 0.56$ (ver Fig. 4.18). Estas intensidades del campo para cuatro frecuencias reducidas $\omega_r = 0.6488$, $\omega_r = 7.7721$, $\omega_r = 27.0352$ y $\omega_r = 87.1359$ (cada una con su respectiva frecuencia natural $\omega_0 = 4/2\pi$, $\omega_0 = 10(4/2\pi)$, $\omega_0 = 30(4/2\pi)$ y $\omega_0 = 50(4/2\pi)$) son mostradas en las Figs. 4.18(a), (c), (e) y (g) respectivamente. Para estos casos, se calcularon las correspondientes funciones de autocorrelación (ACFs) (Figs. 4.18(b), (d), (f) y (h)) y sus longitudes de correlación definidas como la desviación estándar de la función de autocorrelación. Esta función de autocorrelación es de suma importancia, ya que para sistemas donde se presenta el fenómeno de caos la longitud de correlación tiende a cero. Para la primer frecuencia (más baja), la longitud de correlación obtenida es $l_c = 0.20072$, para la segunda frecuencia $l_c = 0.18978$, para la tercer frecuencia $l_c = 0.14036$ y para la cuarta frecuencia (más alta) se obtiene la menor $l_c = 0.0584$. Observamos que la longitud de correlación disminuye a medida que el patrón de campo es más desordenado conforme aumenta el valor de la frecuencia. Además, creemos que esto es una manifestación del caos de ondas electromagnéticas, ya que en este régimen nos llevó a pensar que la intensidad del modo propio es una variable aleatoria no correlacionada en función de un punto (x, y) en la celda unitaria.

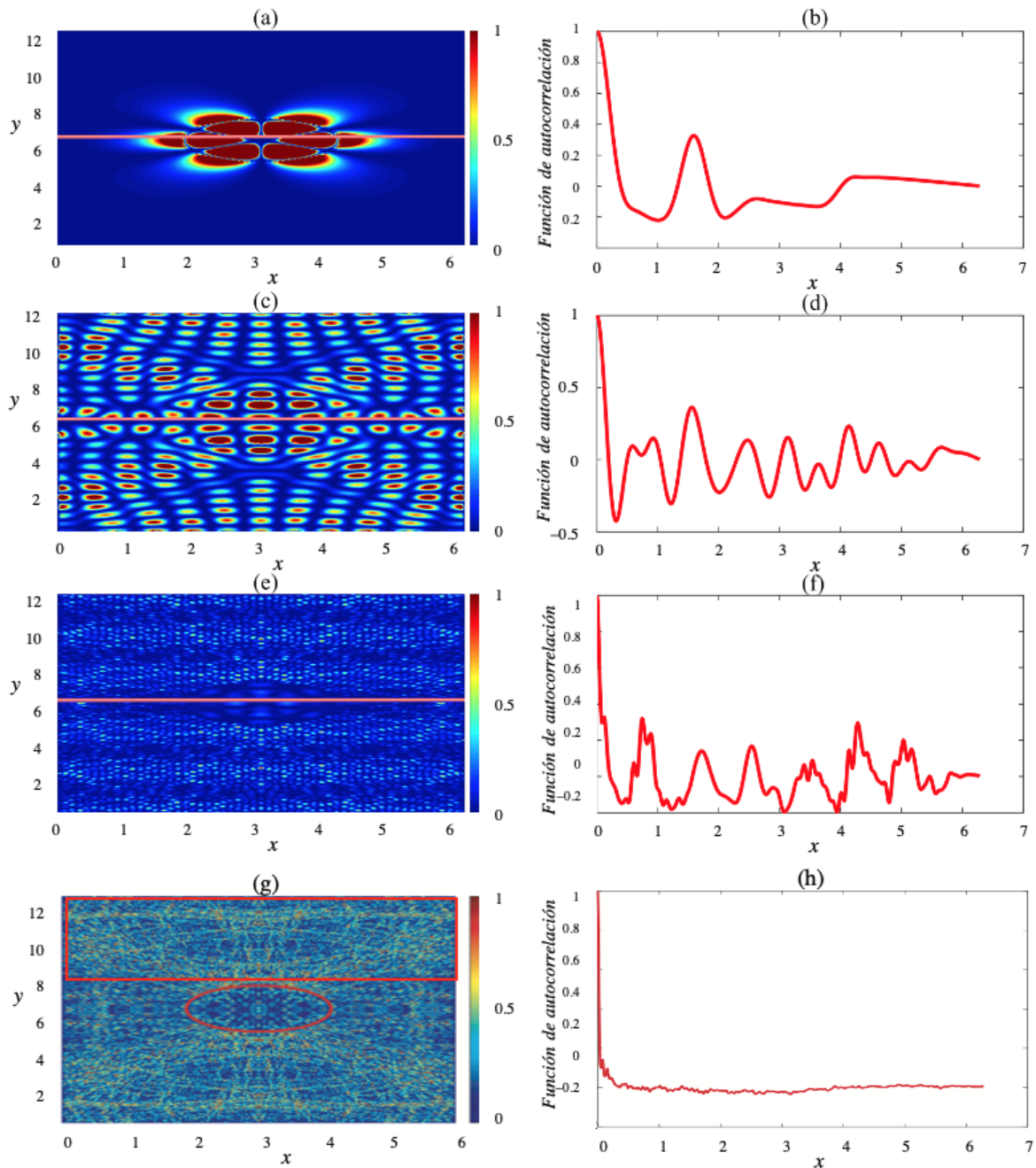


Figura 4.18: Patrones de intensidad electromagnética en una PCW infinita con inclusiones cilíndricas de LHM para la frecuencia reducida (a) $\omega_r = 0.6488$, (c) $\omega_r = 27.0352$ y (e) $\omega_r = 87.1359$. Las curvas circulares sólidas representan las inclusiones y el rectángulo la región considerada para el cálculo de la ACF. Las funciones de autocorrelación correspondientes se muestran en (b), (d), (f) y (h) con longitudes de correlación $l_c = 0.20072$, $l_c = 0.18978$, $l_c = 0.14036$ y $l_c = 0.0584$ respectivamente.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo mencionamos un breve resumen y en base a los resultados obtenidos enunciamos las conclusiones más importantes del trabajo.

En el presente trabajo hemos mostrado un estudio teórico y numérico para; el fenómeno del caos clásico en el sistema del billar de Sinai y para el estudio del fenómeno del caos electromagnético en una guía de ondas de cristal fotónico con inclusiones de distintos materiales.

Para el caso del fenómeno del caos clásico realizamos un estudio a partir de consideraciones geométricas para nuestro billar, realizando variaciones tanto en nuestra posición de salida del rayo incidente, el radio de la inclusión circular y la variación de la posición central de la inclusión. Para realizar este análisis hicimos uso del programa desarrollado por Lansel y Porter. Una vez realizado este análisis se calculó la entropía así como la intensidad media de la imagen. Mediante estos cálculos realizamos un comparativo para nuestros casos de estudio y con ello pudimos observar los casos que presentan un comportamiento caótico mayor. Consideramos también histogramas y mapas de Lorenz para poder entender de manera gráfica el fenómeno del caos clásico

en nuestros sistemas.

Para el caso del fenómeno del caos electromagnético en una guía de ondas de cristal fotónico hemos mostrado un estudio teórico y numérico de los modos electromagnéticos calculados, la función determinante (caso infinito) y de la reflectancia (caso finito) de una PCW formada por dos placas conductoras planas que contienen un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas, de conductor real o de metamaterial dispersivo. Para el caso ideal en el que el tamaño de la PCW metálica es de longitud infinita, se modeló por medio de una celda unitaria cuadrada conteniendo la inclusión cilíndrica. Para corroborar algunas propiedades obtenidas para la PCW infinita que son físicamente admisibles, también se estudió la correspondiente versión finita de este sistema. Así, para el caso de una PCW real se consideró una guía de ondas de longitud finita con las inclusiones cilíndricas de conductor real. Es por ello que se puso especial énfasis en las correlaciones espaciales del campo cercano utilizando la información contenida en el patrón de la intensidad del campo lejano mediante el cálculo de la reflectancia del propio sistema. Esto permitió comparar el comportamiento del sistema ideal con el real por medio de los patrones desordenados del campo electromagnético.

Bibliografía

- [1] Strogatz, S. H. (2001). *Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Chaos-Westview Press, USA., primera edición.
- [2] Cartwright, M. L. (1952). *Van der Pol's equation for relaxation oscillations*. Contributions to Nonlinear Oscillations, Vol. 2, Princeton, 3.
- [3] Smale, S. (1967). *Differentiable dynamical systems*. Bull. Am. Math. Soc. **73**, 747.
- [4] Arnold, V. I. (1978). *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, New York).
- [5] Lorenz, E. N. (1963). *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmos. Sci. **20**, 130
- [6] Ruelle, D., and Takens, F. (1971). *On the nature of turbulence*. Commun. Math. Phys. **20**, 167.
- [7] Takens, F. (1981). *Detecting strange attractors in turbulence*. Lect. Notes in Math. **898**, 366.
- [8] May, R. M. (1972). *Limit cycles in predator-prey communities*. Science **177**, 900.
- [9] May, R. M. (1976). *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature **261**, 459.
- [10] May, R. M. (1981). *Theoretical Ecology: Principles and Applications, 2nd ed.* (Blackwell, Oxford, England).

-
- [11] Feigenbaum, M. J. (1978). *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*. J. Stat. Phys. **19**, 25.
- [12] Feigenbaum, M. J. (1979). *The universal metric properties of nonlinear transformations*. J. Stat. Phys. **21**, 69.
- [13] Feigenbaum, M. J. (1980). *Universal behavior in nonlinear systems*. Los Alamos Sci. **1**, 4.
- [14] Libchaber, A., Laroche, C., and Fauve, S. (1982). *Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement*. J. Physique Lett. **43**, L211.
- [15] Linsay, P. (1981). *Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator*. Phys. Rev. Lett. **47**, 1349.
- [16] Moon, F. C. (1992). *Chaotic and Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers* (Wiley, New York).
- [17] Moon, F. C., and Holmes, P. J. (1979). *A magnetoelastic strange attractor*. J. Sound. Vib. **65**, 275.
- [18] Sprott, J. C. (2014). *Elegant chaos: Algebraically simple chaotic flows*. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. pp. 41-47.
- [19] Sprott, J. C. (2014). *Elegant chaos: Algebraically simple chaotic flows*. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. pp. 109-112.
- [20] Fortuna, L. (2009). *Chua's Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow*. World Scientific, Singapore . pp. 1-74.
- [21] Torrent, D. and Sánchez-Dehesa, J. (2009). *Radial wave crystals: Radially periodic structures from anisotropic metamaterials for engineering acoustic or electromagnetic waves*. Phys. Rev. Lett., 103: 064301.

-
- [22] Shinohara, N. (2018). *Recent Wireless Power Transfer Technologies via Radio Waves*. River Publishers, primera edición.
- [23] Giordani, M. and Zorzi, M. (2020). *Satellite communication at millimeter waves: a key enabler of the 6g era*. En 2020 International Conference on Computing, Networking and Communications (ICNC), páginas 383388.
- [24] Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., and Herrera-González, I. F. (2013a). *Disordered field patterns in a waveguide with periodic surfaces*. Progress In Electromagnetics Research B, 48: 329346.
- [25] Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., and Herrera-González, I. F. (2013b). *Chaotic behavior of a quantum waveguide*. Physica B, 411: 9398.
- [26] Herrera-Gonzalez, I., Arroyo-Correa, G., Mendoza-Suárez, A., and Tututi, E. S. (2011). *Study of the resistivity in a channel with dephased ripples*. Int.J. Mod. Phys. B., 25(5): 683698.
- [27] Alonso, D., Ruiz, A., and de Vega, I. (2002). *Polygonal billiards and transport: Diffusion and heat conduction*. Physucak Review E, 66: 066131.
- [28] Castaldi, G., Galdi, V., and Pinto, I. M. (2008). *A study of ray-chaotic cylindrical scatterers*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 56(8): 26382648.
- [29] Berry, M. V. (1997). *Regular and irregular semiclassical wave functions*. Phys. A. Math. Gen., 10(12): 20832091.
- [30] Doya, V., Legrand, O., and Mortessagne, F. (2002). *Light scarring in an optical fiber*. Physical Review Letters, 88(1).
- [31] Mendoza-Suárez, A., Pérez-Aguilar, H. I., and Villa-Villa, F. (2011). *Optical response of a perfect conductor waveguide that behaves a photonic crystal*. Progress In Electromagnetics Research, 121: 433452.

- [32] Bucio Gutiérrez, A. (2021). *Efecto de caos electromagnético en guía de ondas de cristal fotónico de inclusiones cilíndricas*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH.
- [33] Fernández-Sanjuán, M. A. (2016). *Dinámica no lineal, teoría del caos y sistemas complejos: una perspectiva histórica*. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (Esp), 109(1): 107126.
- [34] Manuel de León; Miguel A.F. Sanjuán (2010). *Las Matemáticas y la Física del Caos*. Madrid. Los libros de la Catarata y CSIC.
- [35] Hilborn, R. C. (2004). *Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, USA., segunda edición.
- [36] Sugihara, G. and May, R. M. (1990). *Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series*. Nature, 344(6268): 734.
- [37] Montenegro-García, A. (1989). *La función de autocorrelación y su empleo en el análisis de series de tiempo*. Rev. Desarrollo y Sociedad, (23): 117132.
- [38] Mullin, Tom (1995). *The Nature of Chaos*. Oxford: Clarendon Press.
- [39] Blümel, R. y Reinhardt, W.P. (1995). *Chaos in Atomic Physics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [40] Birkoff, G. (1927). *On the periodic motions of dynamics*. Acta Math, 50, 359-379.
- [41] Mikoss, Imre y García, P. (2010). *Una Aproximación Geométrica a la Caracterización del Billar de Sinai*. Rev. Fac. Ing. UCV., vol.25, N^o 1, pp. 105-111. ISSN 0798-4065.
- [42] Sinai, Y. G. (1969). *Dynamical Systems with Elastic Reflections*. Russ. Math. Surv. 25, 137-189.

- [43] Bunimovich, L. A. (1979). *On the Ergodic Properties of Nowhere Dispersing Billiards*. Commun Math Phys, 65, 279-312.
- [44] Triana, S. A. y Campos, D. (1999). *El Billar de Sinai Clásico*. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 23(86):61-71.
- [45] Lansel, S. y Porter, M. A. (2004). *Graphical User Interface to Simulate Classical Billiard Systems*. School of Mathematics and Center for Nonlinear Science, School of Physics. <https://arxiv.org/pdf/nlin/0405003.pdf>
- [46] Bravo-Abad, J. (2006). *Transmisión resonante de luz a través de láminas metálicas nanoestructuradas*. Tesis de doctorado. Departamento de Física Teórica de la Materia Condensada de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España. 170 págs.
- [47] Cortijo-Munuera, M. (2015). *Resonancias Fano en nanopartículas metálicas sobre guía de silicio*. Tesis de licenciatura, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España. 70 págs.
- [48] Kittel, C. (1996). *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, Inc., Madrid, España, seventh edition. Pp. 804.
- [49] Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., Winn, J. N., and Meade, R. D. (2008). *Photonic crystals: molding the flow of light*. Princeton University Press, New York, second edition. Pp. 286.
- [50] Hernández-Juárez, B. (2005). *Síntesis de materiales de interés en el desarrollo de cristales fotónicos autoensamblados*. Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Madrid, Departamento de Física de Materiales.
- [51] Teo, S. H. G., Liu, A. Q., Yu, M. B., y Singh, J. (2006). *Fabrication and demons-*

- tration of square lattice two-dimensional rodtype photonic band gap crystal optical intersections.* Photonics Nanostruct. Fundam. Appl., 4: 103-115.
- [52] Vaselago, V. (1968). *The electrostatics of substances with simultaneously negative values.* Sov. Phys. Usp., 10(4).
- [53] Cui, T. J., Smith, D. R., y Liu, R. (2010). *Metamaterials Theory, Design and Applications.* Springer, USA, 1st edition.
- [54] Fowles, G. R. (1968). *Introduction to modern optics.* 2nd.
- [55] Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics.* John Wiley and Sons, New York, 3th.
- [56] Pérez, H. I., Valencia, C. I., Méndez, E. R., and Sánchez-Gil, J. A. (2009). *On the transmission of diffuse light through thick slits.* J. Opt. Soc. Am. A, 26(4): 909–918.
- [57] Puente Díaz, L. E. (2017). *Respuesta óptica de Cristales Fotónicos en 2D con Superficies Rugosas que Contienen Metamaterial Dispersivo.* Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Págs. 43-76.
- [58] Berry, M. V., *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular, "billiard".* Eur. J. Phys. **2**(1981) 91-102.
- [59] Fraczek, K. and Ulcigrai, C. (2014). *Ergodic directions for billiards in a strip with periodically located obstacles.* Commun. Math. Phys., 327: 643663.
- [60] Luna-Acosta, G. A., Na, K., Reichl, L. E., and Krokhin, A. (1996). *Band structure and quantum poincaré sections of a classically chaotic quantum rippled channel.* Physical Review E, 53(4): 3271.
- [61] Alva Medrano, H. and Mendoza-Suárez, A. (2016). *Plasmones en sistemas que incluyen metamateriales dispersivos.* Tesis de Maestría, UMSNH, páginas 31-36.

-
- [62] Shalaev, V. y Cai., W. (2010). *Optical Metamaterials*. Springer, USA.
- [63] Centeno, T. P. (2014). *Estructuras de bandas de cristales fotónicos en 2D con superficies rugosas usando un método integral*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH.
- [64] Puente Díaz, L.E. (2017). *Respuesta óptica de cristales fotónicos en 2D con superficies rugosas que contienen metamaterial dispersivo*. Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Física, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH.
- [65] Bria, D., Djafari-Rouhani, B., Akjouj, A., Dobrzynski, L., Vigneron, J. P., El-Boudoti, E. H., y Nougaoui, A. (2004). *Band structure and omnidirectional photonic band gap in lamellar structures with left-handed materials*. Phys. Rev. Lett., 69: 066613.