



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Instituto de Física y Matemáticas



Estabilidad de los halos galácticos de materia oscura formados por un Condensado de Bose-Einstein

Tesis
que para obtener el grado de

Maestro en ciencias en el área de la Física

presenta

José Juan González Avilés

Agosto 2013

Director de tesis:
Dr. en ciencias en el área de Física
Francisco S. Guzmán Murillo

Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH.

*A mis padres, José y María Rosa,
A mis hermanos Mauricio, Rosa Leticia,
por su apoyo incondicional y amor.*

En memoria de mis abuelos paternos y maternos.

Agradecimientos

La elaboración de esta tesis, si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación, no hubiese sido posible su finalización sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que han sido soporte muy fuerte en momentos de angustia y desesperación. Por ello, es para mí un verdadero placer utilizar este espacio para ser justo y consecuente con ellas, expresándoles mis agradecimientos.

Debo agradecer de manera especial y sincera al Dr. Francisco Siddhartha Guzmán Murillo. Su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas ha sido un aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también en mi formación académica durante la maestría. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios necesarios para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de esta tesis.

Le agradezco también al Dr. José Antonio González Cervera, y al Dr. Ulises Nucamendi Gómez, por su disposición para revisar esta tesis, haciendo observaciones y correcciones de manera oportuna.

Quiero agradecer hoy y siempre a mi familia que siempre ha procurado de mi bienestar en todos los aspectos de mi vida, y es claro que si no fuese por el esfuerzo realizado por ellos, mi desarrollo académico no hubiese podido continuar de manera integral. En especial agradezco a mis padres José y María Rosa, quienes siempre están presentes en cada momento y me han inculcado su honestidad, humildad y dedicación para conseguir mis objetivos. A mis hermanos Mauricio y Rosa Leticia, porque han sido mi ejemplo a seguir tanto en aspectos humanos como académicos. Agradezco también a toda mi familia en general que ha sabido estar cuando los necesito.

A mi novia Ana Isabel, que forma parte de mi vida y comparte su tiempo a mi lado, dándome felicidad y apoyándome para seguir adelante en los objetivos que me he trazado.

A mis compañeros con los que ingrese a la maestría Luis Fernando, Luis y Javier. A mis amigos desde la facultad, Juan Salvador, Khépani, Saúl, Manuel, Carlos, Geovani. En el grupo de Relatividad Numérica agradezco a Fabio por todas las observaciones que me ayudaron a mejorar este trabajo. Además agradezco a Miguel, Juan Pablo, Francisco, Alejandro y Alan, por su aportación y ayuda en el desarrollo de este trabajo.

Al Instituto de Física y Matemáticas de la UMSNH por haber sido el lugar en donde pude seguir mi formación académica a nivel posgrado y por las facilidades y atenciones

prestadas durante este tiempo. Agradezco también de manera especial a todos los profesores que me impartieron cursos en el trayecto de estos dos años, los cuales me transmitieron sus valiosos conocimientos que me ayudaron a obtener una madurez académica. Finalmente agradezco a CONACYT por la asignación de beca de maestría.

Índice general

1. Introducción	9
2. Materia Oscura Galáctica	15
2.1. Curvas de rotación galácticas	16
2.2. Perfiles de densidad para halos de materia oscura	16
2.2.1. Perfil de densidad Pseudo-Isotérmico	16
2.2.2. Perfil de densidad de Navarro-Frenk-White	17
2.2.3. Perfil de Materia Oscura de un Condensado de Bose-Einstein (BEC)	17
3. Dinámica de los Condensados de Bose auto-gravitantes	19
3.1. La ecuación de Gross-Pitaevskii	19
3.2. El sistema Gross-Pitaevskii-Poisson como un problema de eigenvalores	25
3.3. Transformación de Madelung	26
4. Estudio de la estabilidad de los halos de materia oscura formados por un BEC	29
4.1. Caso 1: Estabilidad de las soluciones del estado base (Guzmán-Ureña)	29
4.2. Perfil de materia oscura de Böhmer-Harko	30
4.2.1. Prueba de estabilidad del perfil de densidad BEC	33
4.2.2. Evolución de los halos galácticos con el modelo Böhmer-Harko	34
5. Conclusiones	39
A. Métodos Numéricos	43
A.0.3. Diferencias Finitas	43
A.0.4. La evolución	45
A.0.5. Condiciones de frontera	48
A.1. Convergencia	48

Capítulo 1

Introducción

En las últimas décadas se ha vivido una revolución en la física teórica debido a la aparición de dos nuevos problemas fundamentales en la cosmología moderna, ambos relacionados con la formación de estructura en el universo. El primero se refiere a una componente necesaria para la formación de estructura, es decir, para la formación de galaxias, cúmulos de galaxias, etc. De acuerdo al modelo estándar de la cosmología de constante cosmológica y materia oscura fría (Λ CDM) [Hinshaw 2009, Dundley 2009, Komatsu 2011], el primer ingrediente constituye al menos el 26.8 % de la materia del cosmos y es llamada **materia oscura** (MO). La segunda componente es la que acelera la expansión del universo, y se le conoce como **energía oscura** que corresponde al 68.3 % de los componentes del universo. Además, se tiene una tercera componente que tan sólo representa el 4.9 % [Ade et al. 2013], esta es la **materia bariónica** y de naturaleza conocida, que constituye a los elementos conocidos del universo.

En este trabajo, la atención se centra específicamente en la MO vista primeramente desde el punto de Λ CDM, y después desde el punto de vista del modelo del Condensado de Bose-Einstein (BEC). Antes de comenzar con una descripción de las propiedades y problemas que tiene la MO, primeramente se debe saber cuales son las restricciones cosmológicas que indican que no toda la materia existente en el universo es bariónica, y por lo tanto sugieren la existencia de MO. Dichas restricciones son: la Nucleosíntesis del Big Bang (BBN) y la Radiación Cómica de Fondo (CMB). La BBN se describe como la época en la cual los protones se fusionan con los neutrones para producir deuterio, helio, litio y algunos otros elementos ligeros. Dentro de las estrellas se puede producir deuterio, pero este se destruye casi de inmediato por la formación de helio, así, el deuterio que se encuentra hoy puede ser considerado como la cantidad que fue producida en la BBN. Se ha observado y estimado la razón de abundancias de deuterio e hidrógeno en regiones donde el universo no ha cambiado demasiado desde el Big Bang, y resulta que esta razón es altamente dependiente de la cantidad de bariones en el universo. Cuando se calcula dicha razón teóricamente, ésta concuerda con las abundancias experimentales, R. H. Cyburt calculó el valor de la densidad de bariones respecto a la densidad crítica, Ω_b , y encontró que Ω_b representa sólo un 4.9 %

de la densidad total del universo, lo cual es un indicio de que la materia que existe en el universo no solamente es bariónica.

La segunda restricción cosmológica importante es la que impone el CMB, que fue descubierto por Penzias y Wilson en 1964, y se describe como la radiación electromagnética que llena el universo por completo. Se dice que es el eco que proviene de un estado de equilibrio que ocurrió en el universo temprano interpretado como la etapa en que la radiación y la materia se desacoplaron. Dos cosas muy importantes que se destacan del CMB son: la radiación emitida se modela perfectamente como la radiación de un cuerpo negro con temperatura de aproximadamente 2.7 K , y aunque la temperatura es extraordinariamente uniforme presenta anisotropías. La clave es que las últimas observaciones del CMB indican que el universo es espacialmente plano salvo pequeños errores, lo cual significa que el recuento de energía-materia del universo corresponde a la densidad crítica, es decir, materia conocida, más materia oscura, más energía oscura deben sumar el 100 % del contenido energético del universo. La pregunta importante es si la materia oscura podría estar hecha de bariones, y resulta que no por la siguiente razón: las fluctuaciones del CMB son del orden de $\delta T/T \sim 10^{-5}$ y si se supusiera que la materia oscura fuera bariónica, es decir $\sim 31\%$ del universo fueran bariones, las fluctuaciones serían dos ordenes de magnitud mayores. De hecho, esta estimación implica que algunos candidatos a MO como los Objetos Astrofísicos Masivos de Halo Compacto (MACHOs), compuestos de enanas café y planetas gigantes tipo Júpiter quedarían descartados.

Distinta a las dos restricciones anteriores sobre la posible existencia de MO, hay otra restricción que indica la existencia de energía oscura, y esta proviene de las observaciones de supernovas, el “Supernova Cosmology Project” y el “High-z Supernova Search Team” han encontrado evidencia de que el universo se está expandiendo aceleradamente. Esto es un efecto a gran escala que no afecta en escalas subgalácticas, la cuestión es que a gran escala la fuerza dominante es la gravedad, pero para obtener la aceleración del universo es necesario que la componente tenga un origen repulsivo, como la gravedad originada de la materia bariónica y oscura (energía) no tiene este comportamiento, entonces es necesaria una componente que se comporte repulsivamente a gran escala, esta componente es la llamada energía oscura, asociada a la constante cosmológica en el modelo Λ CDM.

Después de haber descrito las restricciones a nivel cosmológico que implican la existencia de materia adicional a la bariónica, se debe mencionar que en este trabajo se estudiará a la MO a nivel local, es decir, a nivel de cúmulos galácticos y galaxias, es por eso que es importante mencionar cuales fueron las primeras observaciones y estudios que indicaron la existencia de materia extra aparte de la materia bariónica en las galaxias. Tales observaciones se basan en el estudio de las curvas de rotación. Uno de los primeros trabajos fue el hecho por J.H. Oort en 1932, quien se basó en el estudio de los movimientos de las estrellas cerca del plano galáctico de la Vía Láctea, y encontró que las estrellas deberían estar moviéndose lo suficientemente rápido para escapar del potencial gravitacional generado por la materia luminosa de la galaxia. Por lo tanto, Oort postuló que debía haber más materia presente para mantener a las estrellas en las órbitas observadas. Sin embargo, por

esa época fue descubierto el neutrón por James Chadwick por lo cual era impensable que la masa faltante no fuera bariónica. En 1933 el astrónomo suizo F. Zwicky estudió las galaxias del cúmulo de Coma y utilizando el teorema del virial encontró que la masa promedio de las galaxias del cúmulo era 160 veces más grande que la esperada utilizando solamente su luminosidad, encontró que las velocidades orbitales eran casi un factor de diez veces mayor que las esperadas usando la masa de las galaxias del cúmulo; así pues, concluyó que para mantener a las galaxias juntas en el cúmulo, éste debía contener una gran cantidad de materia no visible. Aunque en ese momento no había observaciones de los rayos X, hoy se sabe que en los sistemas virializados grandes como el de Coma, la composición es de alrededor de 85 % de MO, 14 % de gas interestelar caliente y 1 de % estrellas. En 1970, Ford y Vera Rubin midieron curvas de rotación de galaxias y encontraron que dichas curvas no decaen con la distancia de la fuente del campo gravitacional como se observa en el sistema solar, es decir, las velocidades del gas neutro continúan incrementándose con la distancia respecto al centro galáctico como si el campo gravitacional debido a la fuente no estuviera contenido en la región luminosa. Esto va en contra de lo que se esperaría asumiendo órbitas circulares y usando un tratamiento Newtoniano para modelarlas, lo que se esperaría es que las velocidades de rotación disminuyeran como $1/\sqrt{r}$, esto es lo que se le conoce como el comportamiento Kepleriano observado en los planetas. Una explicación simple del comportamiento observado en las galaxias es que contengan más materia de la que se puede explicar con los objetos luminosos en ellas. De hecho, puesto que la densidad de materia luminosa disminuye exponencialmente más allá del bulbo de las galaxias, la materia faltante debe ser no luminosa y estar distribuida de manera no exponencial. Concluyó Rubin: “la materia, al contrario de la luminosidad, no está concentrada cerca del centro de las galaxias espirales. Por lo tanto la distribución de luz en una galaxia no es totalmente una guía de la distribución de la masa.”

Todas las observaciones descritas anteriormente indican la presencia de MO tanto a escala cosmológica, como local (cúmulos y galaxias). Sin embargo, para explicar el caso específico de las curvas de rotación sin la necesidad de la existencia de MO y modificando las leyes de la física conocidas, se encuentra que el modelo de un potencial gravitacional modificado de la forma $\phi = -GM[1 + \alpha \exp(-r/r_0)]/(1 + \alpha)r$, con $\alpha = -0,9$ y $r_0 \approx 30\text{kpc}$ puede explicar las curvas de rotación para galaxias espirales que sean cercanamente planas de 10 a 100 kpc [Sanders 1984]. Otro modelo es la Dinámica Newtoniana Modificada (MOND), fue propuesto por Milgrom [Milgrom 1983], en este modelo la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ es reemplazada por una ecuación de la forma $\nabla \cdot [\mu(x)(|\nabla\phi|/a_0)\nabla\phi] = 4\pi G\rho$, donde $x = a/a_0$, con a_0 como constante fija y $\mu(x)$ una función que satisface las condiciones $\mu(x) = x$ para $x \ll 1$ y $\mu(x) = 1$ para $x \gg 1$. La ley de fuerza, dada la aceleración a de una partícula de prueba llega a ser $a = a_N$ para $a_N \gg a_0$ y $a = \sqrt{a_N a_0}$ para $a_N \ll a_0$, donde a_N es la aceleración usual Newtoniana. Este modelo predice curvas de rotación planas, y se pueden calcular una vez que se conoce la distribución de materia bariónica.

El enfoque de este trabajo es distinto al de proponer la modificación de las leyes de la física conocidas, más bien se basa en el estudio de los modelos que proponen la existencia de MO. Para entrar más a fondo en los modelos de MO, primero se deben conocer sus propiedades más importantes, así como las propiedades que no tiene. La MO se interpreta como una materia hipotética que no emite suficiente radiación electromagnética para ser detectada con los medios técnicos actuales, pero cuya existencia se puede deducir a partir de los efectos gravitacionales que causa en la materia visible, tales como el movimiento de las estrellas o las galaxias. La MO también desempeña un papel central en la formación de estructuras y en la evolución de galaxias. El modelo Λ CDM sugiere que la formación de estructuras ocurrió de manera jerárquica, es decir que las estructuras más pequeñas fueron uniéndose hasta formar galaxias y después cúmulos de galaxias. En este modelo la MO actúa como el responsable de formar los pozos de potencial en los que posteriormente se acumularía la materia luminosa.

Entre los candidatos que podrían constituir la MO se encuentran los WIMPs (“Weakly Interactive Massive Particles”), tales partículas son la base para el modelo de la **materia oscura fría** (CDM). Una de las características más importante de tal modelo se basa en la idea de que la MO estaría formada por partículas lentas que serían capaces de formar pequeñas estructuras virializadas, es decir galaxias. Otro de los modelos de la MO es el de **materia oscura tibia** (WDM), tal modelo propone que la MO estaría formada por partículas que tienen velocidades intermedias entre relativistas y ultrarelativistas. Entre los candidatos de WDM están los neutrinos. Otro modelo de MO es el de **materia oscura caliente** (HDM), este propone que la MO estaría formada de partículas ultrarelativistas (calientes) que sólo podrían virializar estructuras grandes. Uno de los candidatos más probables para este tipo de materia oscura es el neutrino.

La razón más importante por la que CDM se prefiere a las otras dos posibilidades es que se trataría de un tipo de materia que condensaría a altas temperaturas, y que formaría galaxias tempranas, porque se observan galaxias formadas en épocas localizadas hace 10^9 años.

A pesar de que el modelo Λ CDM, es el más exitoso, dicho modelo presenta inconsistencias, tanto a escala cosmológica como a escala local (cúmulos y galaxias). Las inconsistencias son principalmente dos:

- 1) El problema de la sobreabundancia de galaxias satélites se refiere a lo siguiente. La cantidad predicha en el modelo Λ CDM de subhalos de MO de baja masa en los halos galácticos mediante las simulaciones numéricas de formación de estructura, es mayor que la cantidad de estructuras pequeñas observadas [Klypin A. et al. 1999, Moore 1999]. A esta discrepancia se le conoce como el problema de sobreabundancia de galaxias satélites o “missing satellite problem”. De hecho, los análisis de fluctuaciones en el modelo CDM predicen una sobreabundancia de modos altos que corresponden a estructuras pequeñas.

- 2) El problema del “cusp-core”, surge al comparar las observaciones con las simulaciones de N -cuerpos que utilizan CDM no colisionante como en Λ CDM. Lo que sucede es que en las simulaciones hechas a gran escala con solamente MO, las partes internas de los halos no presentan este núcleo (core), es decir, no muestran que la densidad de MO en la parte central de la galaxia se mantenga aproximadamente constante ($\rho \sim r^0$); sino más bien presentan una densidad de masa que aumenta rápidamente al reducir su distancia al centro galáctico. Se encontró empíricamente un perfil que ajusta a las distribuciones obtenidas en dichas simulaciones, y se observó que la descripción en esta región favorece la de una ley de potencia $\rho \sim r^\alpha$ con $\alpha = -1$, esta alta acumulación de materia oscura en el centro galáctico es lo que se le conoce como cúspide o “cusp”. Esta discrepancia en la distribución central de la MO, obtenida de las simulaciones con sólo MO, y la observada en las galaxias de disco, usualmente las galaxias enanas y de bajo brillo superficial, es lo que se conoce como el problema del “cusp-core”.

En vista de estos problemas que presenta el modelo estándar, se considera que un buen modelo de materia oscura debe tener las siguientes propiedades a escala galáctica:

- No debe presentar el problema de sobreabundancia de estructuras pequeñas.
- No debe tener el problema del cusp-core.
- La materia oscura galáctica debe explicar las curvas de rotación.
- Los perfiles de densidad galácticos deben ser estables y preferiblemente ser el resultado de un proceso de relajación dinámico, con comportamiento atractor en el tiempo.

El modelo CDM a pesar de ser el mejor modelo, tiene problemas en los puntos uno y dos, y definitivamente es muy exitoso en los puntos tres y cuatro.

Es por este tipo de problemas que se han propuesto alternativas al modelo CDM. Una de ellas es la que se estudia en este trabajo- propone que la MO son bosones de espín cero en un estado coherente que interactúan repulsivamente (o atractivamente) entre ellos. Primeramente, dicho modelo es una solución al problema de la sobreabundancia de estructuras pequeñas al costo de que la masa del bosón sea ultraligera, es decir $m \sim 10^{-22}$ eV. Tal modelo no presenta conflicto con las restricciones cosmológicas del CMB y BBN. Considerando tal hipótesis del bosón de $m < 10^{-22}$ eV se piensa en la posibilidad de que un gas de bosones de esta naturaleza condense cuando alcance una temperatura crítica $T_c \sim \text{TeV}$ [Matos & Ureña-López 2001], es decir, el condensado se daría muy temprano. Una diferencia importante con CDM es que no implicaría una formación jerárquica de las estructuras. A escala cosmológica el modelo no tiene problemas.

A escala local, el condensado estaría descrito por la autogravedad del condensado y por la descripción cuántica de éste. Para ello suele describirse el condensado atrapado en una trampa gravitacional a través del sistema de ecuaciones de Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP), que describen la dinámica del gas condensado en la aproximación de campo medio para un gas diluido, sometido al campo gravitacional debido a su propia densidad de partículas. Con el análisis en el marco del sistema GPP se espera que las galaxias y otras estructuras correspondan a estados finales, incluso posiblemente atractores de fluctuaciones iniciales o regiones condensadas. Entonces tales configuraciones deberían explicar las curvas de rotación galácticas y de cúmulos, y además deberían resolver el problema del “cusp-core”.

En este trabajo se estudia el caso de un Condensado de Bose-Einstein (BEC) auto-gravitante con auto-interacción repulsiva entre los bosones descrito por el sistema GPP, se enfoca en el problema de las curvas de rotación galácticas y la estabilidad de dichos objetos.

El contenido de este trabajo queda ordenado de la siguiente manera. En el capítulo 2, se describe la materia oscura galáctica. En el capítulo 3 se describe la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP) y el sistema Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP), como el sistema de ecuaciones que gobiernan un BEC auto-gravitante. En el capítulo 4 se presenta una prueba de estabilidad para el perfil de densidad de materia oscura descrita por el perfil de densidad BEC de Böhmer-Harko. Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Materia Oscura Galáctica

En este capítulo se hablará en términos generales sobre la materia oscura a escala galáctica, es decir a nivel de cúmulos y grupos. Además se introduce el problema de las curvas de rotación galáctica. Finalmente se hablará de algunos de los modelos fenomenológicos que se usan para describir la distribución de materia oscura en las galaxias.

La materia oscura galáctica comprende el estudio de cúmulos, grupos y galaxias, una de las primeras discrepancias de la masa en un cúmulo fue encontrada por Fritz Zwicky (1933). Él midió el corrimiento al rojo asociado al movimiento de las galaxias en el cúmulo de Coma y encontró que las velocidades individuales de las galaxias con respecto a la velocidad media del cúmulo son mucho mayores a las esperadas de la estimación a partir de la masa total del cúmulo, calculadas a partir de las masas individuales de las galaxias. La única forma de sostener al cúmulo de la expansión rápida es asumir que el cúmulo contiene grandes cantidades de alguna materia oscura invisible. De acuerdo a la estimación de Zwicky la cantidad de MO en el cúmulo de Coma supera a la masa total del cúmulo de galaxias al menos diez veces, o probablemente más. Esta observación fue confirmada por Smith (1936), él cual midió las velocidades de 30 galaxias en el cúmulo de Virgo.

En lo que respecta a los grupos de galaxias las primeras discrepancias en sus masas fueron detectadas por Holmberg (1997), Page (1952,1959,1960). Estas determinaciones producen valores para el cociente masa-luminosidad (en el azul) de $M/L_B = 1, \dots, 20$ para pares de galaxias espirales, y $M/L_B = 5, \dots, 90$ para pares de galaxias elípticas. Estos cocientes son mayores a los encontrados mediante indicadores de masas locales de galaxias. Sin embargo, no fue claro lo importante que era la discrepancia entre las masas encontrada usando indicadores globales o locales.

Una estimación distinta a las anteriores en el estudio de las masas de los sistemas galácticos fue aplicada por Kanh y Woltjer (1959). Ellos se concentraron en el hecho de que la mayoría de las galaxias tienen corrimientos al rojo positivos como resultado de la expansión del universo; sólo la galaxia de Andromeda (M31) tiene un corrimiento al rojo negativo el cual es de aproximadamente 120 km/s dirigida hacia nuestra galaxia. Este hecho puede ser explicado, si ambas galaxias, M31 y nuestra galaxia, forman un grupo de

galaxias.

Vale la pena destacar que la existencia de la materia oscura galáctica se determina observacionalmente, y no depende del modelo cosmológico, porque se trata de observaciones locales de partículas de prueba. Sin embargo, el modelo cosmológico es importante al imponer condiciones que deben cumplir los candidatos que se proponen para la materia oscura.

2.1. Curvas de rotación galácticas

Para calcular las curvas de rotación se supone que las partículas de prueba siguen trayectorias circulares, entonces la fuerza de gravedad debida a la materia (luminosa + oscura) debe compensar la fuerza centrífuga y por ello se debe cumplir la relación $G \frac{M(r)m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$, donde m es la masa de la partícula de prueba, v es la velocidad de la partícula, r es la distancia radial y $M(r)$ es la masa integrada hasta la posición r de la partícula. Notar que en este caso se considera simetría esférica. De acuerdo a lo anterior la velocidad de rotación satisface $v^2 = GM(r)/r$, de donde a partir de las observaciones se infiere la distribución de masa $M(r)$ y de ahí la densidad. Como primer ejemplo, si $M(r)$ es constante a partir de cierto valor del radio, el decaimiento de v será Kepleriano, que corresponde al caso que se observaría si solamente contribuyera al potencial gravitacional la materia luminosa. Como segundo ejemplo, si la curva de rotación es plana ($v = \text{constante}$) se infiere que $\rho \sim 1/r^2$, que corresponde a uno de los modelos estándar de halo galáctico llamado halo isotérmico.

De las observaciones se infiere que el cociente masa-luminosidad de la galaxia es aproximadamente 5 veces más grande que el estimado considerando solamente la región luminosa interior. La conexión importante es que la materia oscura descrita a nivel cosmológico se identifica con la materia oscura galáctica que produce estos efectos, y a las distribuciones de MO galáctica se les conoce como halos galácticos.

2.2. Perfiles de densidad para halos de materia oscura

Se han propuesto varios modelos fenomenológicos para describir la distribución de materia oscura en los halos galácticos. Entre los modelos más conocidos de halos galácticos están los siguientes:

2.2.1. Perfil de densidad Pseudo-Isotérmico

El perfil de densidad pseudo-isotérmico (PI) está dado por [Begeman et al. 1991]:

$$\rho_{PI} = \frac{\rho_0^{PI}}{1 + (r/R_c)^2}, \quad (2.1)$$

aquí R_c es el radio al cual la densidad es la mitad de la densidad central, llamado radio de escala, y ρ_0^{PI} es la densidad central. La curva de rotación en este perfil es

$$v(r)_{PI} = \sqrt{4\pi G \rho_0^{PI} R_c^2 \left(1 - \frac{R_c}{r} \arctan\left(\frac{r}{R_c}\right)\right)}. \quad (2.2)$$

Dicho modelo se basa en el hecho de que se modela el halo de materia oscura como una esfera isotérmica sin singularidad en el origen, esto para tener una densidad suave en el origen y evitar el problema del cusp-core. Este perfil ajusta bien con las curvas de rotación, sin embargo se trata de un modelo fenomenológico independiente del candidato de materia oscura y se desconoce si es un perfil atractor.

2.2.2. Perfil de densidad de Navarro-Frenk-White

El perfil de Navarro-Frenk-White (NFW) surge de las simulaciones numéricas de formación de estructura que se usaron para CDM y se basan en el modelo Λ CDM [Dubinski et al. 1991, Navarro et al.1996]. El perfil de densidad de NFW [Navarro et al. 1997] esta dado por

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_i}{(r/R_s)(1 + r/R_s)^2}, \quad (2.3)$$

donde ρ_i está relacionada con la densidad del universo al momento en que el halo colapso y R_s es un radio característico. La velocidad para este perfil es

$$v_{NFW}(r) = \sqrt{4\pi G \rho_i R_s^3} \sqrt{\frac{1}{r} \left[\ln\left(1 + \frac{r}{R_s}\right) - \frac{r/R_s}{1 + r/R_s} \right]}. \quad (2.4)$$

Este modelo fenomenológico tiene buenas curvas de rotación y es atractor en el tiempo porque es el perfil que adquieren las estructuras tras analizar estadísticamente las simulaciones de formación de estructura, sin embargo presenta el problema del “cusp-core”.

2.2.3. Perfil de Materia Oscura de un Condensado de Bose-Einstein (BEC)

En el caso en que la materia oscura es un condensado de Bose-Einstein estático y el número de partículas de materia oscura en el estado base es muy grande fue considerado por [Böhmer & Harko 2007]. Asumiendo simetría esférica y denotando a R como el radio al cual la presión y la densidad son cero, el perfil de densidad toma la siguiente forma [Böhmer & Harko 2007]

$$\rho_B(r) = \rho_0^B \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad (2.5)$$

donde $k = \sqrt{Gm^3/\hbar^2 a} = \pi/R$ y $\rho_0^B = \rho_B(0)$ es la densidad central del BEC, m es la masa del bosón, a es la longitud de dispersión de los bosones y R es el radio en el cual la densidad (2.5) es cero. La velocidad tangencial v_B de una partícula de prueba a una distancia r es:

$$v_B^2(r) = \frac{4\pi G\rho_0^B}{k^2} \left(\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) \right). \quad (2.6)$$

Las curvas de rotación se ajustan con los parámetros R y ρ_0^B . Este modelo parece tener buenas curvas de rotación, de igual forma es una alternativa de solución al problema del “cusp-core” [Harko 2011], sin embargo, como se muestra más adelante en este trabajo, el modelo tiene varios problemas, en especial la inestabilidad.

En el capítulo siguiente se estudiará el sistema GPP que dicta la dinámica de los condensados de Bose-Einstein autogravitantes, además de que se presentarán las unidades físicas de dicho sistema, así como su forma adimensional para su tratamiento numérico. Se hablará sobre la idea de tratar al sistema GPP como un problema de eigenvalores. Finalmente se estudiará la transformación de Madelung que sirve para la formulación tipo hidrodinámica del sistema GPP.

Capítulo 3

Dinámica de los Condensados de Bose auto-gravitantes

En este capítulo se obtendrá la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP), así como el sistema Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP), que sirve para estudiar la dinámica de un Condensado de Bose-Einstein (BEC) autogravitante, además se presentará en forma general la idea de tratar al sistema GPP como un problema de Sturm-Liouville. Finalmente se introduce el enfoque de la transformación de Madelung para el tratamiento tipo hidrodinámico del sistema GPP.

3.1. La ecuación de Gross-Pitaevskii

En el límite no relativista la descripción de un gas diluido de N bosones condensados en un volumen V que interactúan entre ellos y donde la mayoría están en el estado base se describe por un operador Hamiltoniano de la forma

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}'), \quad (3.1)$$

donde $\hat{\Psi}(\vec{r})$ y $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})$ son los operadores de aniquilación y creación respectivamente, $V(\vec{r} - \vec{r}')$ es el potencial de interacción de dos cuerpos (en el caso de un gas diluido se desprecian interacciones de orden mayor), y m es la masa del bosón. El potencial V_{ext} corresponde al potencial de una trampa para el gas atómico de laboratorio. Aquí el operador ∇^2 es el operador laplaciano que depende en general de \vec{r} .

Debido a que el número de bosones en este sistema es muy grande, encontrar las propiedades termodinámicas del sistema usando el Hamiltoniano anterior se hace impráctico. Sin embargo, como interesan las propiedades microscópicas del sistema, hay una forma

sencilla de estudiarlo usando la aproximación del campo medio. Esta aproximación consiste en separar el operador de creación $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ en una parte que corresponde a la contribución del campo condensado $\psi(\vec{r}, t)$, más la parte de las excitaciones denotadas por $\hat{\phi}(\vec{r}, t)$, esto es:

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) + \hat{\phi}(\vec{r}, t), \quad (3.2)$$

donde $\psi(\vec{r}, t)$ es llamada la función de onda del condensado, la cual está definida como el valor de expectación del operador de campo en el estado base $\psi(\vec{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \rangle$. Debido a que en la aproximación se considera $N \gg 1$ y que las excitaciones son una perturbación pequeña, es decir, se considera que la densidad del número de bosones en el estado base es muy grande, $n_0 \approx N/V$, entonces esto permite aproximar el estado base como un estado coherente. Al hablar de un estado coherente es equivalente a decir que muchas de las partículas, en este caso los bosones están en el mismo estado cuántico. Para que sea posible que los bosones puedan estar en un estado coherente la densidad de partículas debe ser muy grande o la temperatura muy pequeña, condiciones que se tiene cuando se forma el condensado de Bose-Einstein. De acuerdo a la definición de la función de onda del condensado, está es un campo clásico porque se define como el valor de expectación del operador de campo $\hat{\Psi}$ en el estado base, entonces por todo lo anterior se sigue que su modulo al cuadrado nos da la densidad de partículas $\rho(\vec{r}, t)$, definida como

$$\rho(\vec{r}, t) \equiv |\hat{\Psi}(\vec{r}, t)|^2. \quad (3.3)$$

Por otra parte la condición de normalización está dada por $N = \int \rho(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$, donde N es el número total de partículas del condensado. La ecuación de movimiento para la función de onda está dada por la ecuación de Heisenberg correspondiente al Hamiltoniano (3.1),

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = [\hat{\Psi}, \hat{H}] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + \int d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}', t) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}, t). \quad (3.4)$$

En la aproximación del campo medio es posible tomar en cuenta solamente la aproximación a orden cero de la ecuación de Heisenberg, para esto se reemplaza $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ por la función de onda del condensado $\psi(\vec{r}, t)$, con lo que se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + \int d\vec{r}' \psi^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r} - \vec{r}') \psi(\vec{r}', t) \right] \psi(\vec{r}, t). \quad (3.5)$$

Al considerar al condensado como un gas diluido, a bajas energías, sólo las colisiones binarias son relevantes, estas colisiones se pueden caracterizar por un sólo parámetro, por ejemplo la longitud de dispersión de la onda s denotada por a , la cual se define como el

límite de energía cero de una amplitud de dispersión f , y puede relacionarse con la sección eficaz de dispersión σ por la relación $\sigma = 4\pi a^2$ [Pitaevskii & Stringari 2003]. Esta longitud de dispersión a es independiente de las características del potencial entre bosones. Además se toma en cuenta que las interacciones de corto alcance entre los bosones son repulsivas. Así pues, es posible aproximar las interacciones a corto alcance con un potencial efectivo $V(\vec{r} - \vec{r}') = \lambda\delta(\vec{r} - \vec{r}')$, donde $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ es la distribución delta de Dirac y la constante de acoplamiento λ se relaciona con la longitud de dispersión ($a > 0$) mediante [Pitaevskii et al. 1999]

$$\lambda = \frac{4\pi a\hbar^2}{m}. \quad (3.6)$$

Al sustituir el potencial $V(\vec{r} - \vec{r}') = \lambda\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ en la Ec. (3.5) se obtiene lo siguiente [Pitaevskii 1959]:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}, t) + \lambda|\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t). \quad (3.7)$$

A esta ecuación se le conoce con el nombre de ecuación de **Gross-Pitaevskii** (GP) dependiente del tiempo (ó ecuación de Landau-Ginzburg). Esta ecuación describe los fenómenos asociados al BEC, que se estudian en este trabajo. Para tener una descripción más completa de la ecuación de GP se supone un término no lineal que en general es una función de ρ [Chavanis 2011]. Dicho término no lineal es una función $g(|\psi(\vec{r}, t)|^2)$, entonces la ecuación de GP se expresa de la forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}, t) + g'(|\psi(\vec{r}, t)|^2) \right] \psi(\vec{r}, t), \quad (3.8)$$

donde se denota a $g' = dg/d\rho'$. La densidad de masa se obtiene de manera natural como

$$\rho(\vec{r}, t) \equiv \rho'(\vec{r}, t)m, \quad (3.9)$$

donde m es la masa del bosón.

Es importante notar que en la Ec. (3.7) aparece el potencial externo $V_{ext}(\vec{r}, t)$, que representa el potencial gravitacional de confinamiento del BEC, y se calcula mediante la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V_{ext}(\vec{r}, t) = 4\pi G\rho(\vec{r}, t), \quad (3.10)$$

donde $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$ es la densidad de masa del condensado, y representa la fuente del potencial $V_{ext}(\vec{r}, t)$.

Las ecuaciones (3.7) y (3.10) son un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, que se le llama sistema de ecuaciones de Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP), convención que se toma en este trabajo.

Las ecuaciones (3.7) y (3.10) son ecuaciones que dependen en general de \vec{r} , sin embargo

en este trabajo se usa simetría esférica y coordenadas esféricas por lo que tales ecuaciones se reducen a

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r, t) + \lambda |\psi(r, t)|^2 \right] \psi(r, t), \quad (3.11)$$

$$\nabla^2 V(r, t) = 4\pi G \rho(r, t), \quad (3.12)$$

en donde la función del condensado $\psi(r, t)$ y $V(r, t)$ dependen solamente de la coordenada radial r y del tiempo t .

Para especificar mejor, en este trabajo se escribe la Ec. (3.11) con $\lambda/2m$ en términos de la longitud de dispersión a , esto es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r, t) + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^2} |\psi(r, t)|^2 \right] \psi(r, t). \quad (3.13)$$

El término $\lambda/2m$ se usa para ser consistente con las unidades de a , que deben ser de longitud.

Entonces, el sistema GPP con el que se trabajará durante el desarrollo de este trabajo es:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r, t) + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^2} |\psi(r, t)|^2 \right] \psi(r, t), \quad (3.14)$$

$$\nabla^2 V(r, t) = 4\pi G |\psi(r, t)|^2, \quad (3.15)$$

en donde $\rho = |\psi(r, t)|^2$ y el operador laplaciano en coordenadas esféricas y simetría esférica $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.

Debido a que el sistema GPP (3.14) y (3.15) será resuelto numéricamente se quiere tener un sistema adimensional de modo que se tengan variables físicas del mismo orden, para lo cual se hace el siguiente análisis:

1. Para obtener el sistema GPP adimensional se hacen los siguientes cambios de variable:

$$\hat{r} = \frac{mc}{\hbar} r, \quad (3.16)$$

$$\hat{t} = \frac{mc^2}{\hbar} t, \quad (3.17)$$

$$\hat{V} = \frac{V}{mc^2}, \quad (3.18)$$

$$\hat{\psi} = \frac{\sqrt{4\pi G \hbar}}{mc^2} \psi, \quad (3.19)$$

$$\hat{a} = \frac{c^2}{2Gm} a, \quad (3.20)$$

donde las variables con gorro son adimensionales, \hbar es la constante reducida de Planck, m la masa del bosón, G la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz.

Las unidades físicas de las variables V , r , t , ψ , ψ^2 y a son las siguientes:

$$r \rightarrow [L], \quad (3.21)$$

$$t \rightarrow [T], \quad (3.22)$$

$$V \rightarrow [E], \quad (3.23)$$

$$\psi \rightarrow \left[\frac{M}{(E * L)^{1/2} * T} \right], \quad (3.24)$$

$$\psi^2 \rightarrow \left[\frac{M^2}{E * L * T^2} \right] \rightarrow \left[\frac{M}{L^3} \right], \quad (3.25)$$

$$a \rightarrow [L], [?] \quad (3.26)$$

en donde $[L] = longitud$, $[T] = tiempo$, $[E] = energía$, y $[M] = masa$.

Sustituyendo las variables adimensionales gorro en (3.14) y (3.15) se obtiene el sistema GPP adimensional:

$$i \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{t}} = -\frac{1}{2} \hat{V}^2 \hat{\psi} + \hat{V} \hat{\psi} + \hat{a} |\hat{\psi}|^2 \hat{\psi}, \quad (3.27)$$

$$\hat{V}^2 \hat{V} = |\hat{\psi}|^2. \quad (3.28)$$

2. Ya que se tiene un sistema GPP adimensional ahora se puede demostrar que es invariante bajo una transformación del tipo [Guzmán & Ureña 2006]:

$$\{\hat{t}, \hat{r}, \hat{V}, \hat{\psi}, \hat{\lambda}\} \rightarrow \{\alpha^{-2} \tilde{t}, \alpha^{-1} \tilde{r}, \alpha^2 \tilde{V}, \alpha^2 \tilde{\psi}, \alpha^{-2} \tilde{\lambda}\} \quad (3.29)$$

donde α es un parámetro real arbitrario que se elige dependiendo de las condiciones físicas del problema que se analiza. Las variables con tilde son adimensionales y constituyen los valores computacionales usados en la evolución del sistema GPP. Para la transformación de $\hat{a} \rightarrow \tilde{a}$ se usa la relación $\hat{\lambda} = \alpha^{-2} \tilde{\lambda}$; además, teniendo en cuenta que a es proporcional a λ , se obtiene

$$\hat{a} = \alpha^{-2} \tilde{a}. \quad (3.30)$$

Como se quieren obtener la mayoría de las cantidades físicas de interés en el estudio dinámico del sistema GPP, se puede ver que dichas cantidades son invariantes ante la siguiente transformación [Guzmán & Ureña 2006]:

$$\{\hat{\rho}, \hat{N}, \hat{K}, \hat{W}, \hat{I}\} \rightarrow \{\alpha^4 \tilde{\rho}, \alpha \tilde{N}, \alpha^3 \tilde{K}, \alpha^3 \tilde{W}, \alpha^3 \tilde{I}\}, \quad (3.31)$$

donde $\hat{\rho}$ es la densidad de masa, \hat{N} es la masa total, \hat{K} y \hat{W} son los valores de expectación de la energía cinética y gravitacional respectivamente, e \hat{I} es el valor de expectación de la energía de auto-interacción.

Debido a que el sistema GPP se define en términos de una función de onda clásica del condensado, es decir en donde la función es el valor de expectación de un operador de campo más general, es posible definir las cantidades físicas mencionadas anteriormente como valores de expectación. De esta manera se definen $\langle \tilde{N} \rangle$, $\langle \tilde{K} \rangle$, $\langle \tilde{W} \rangle$ e $\langle \tilde{I} \rangle$ en unidades computacionales, de la siguiente forma

$$\langle \tilde{N} \rangle = \int |\tilde{\psi}|^2 d^3 \tilde{r}, \quad (3.32)$$

$$\langle \tilde{K} \rangle = -\frac{1}{2} \int \tilde{\psi}^* \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi} d^3 \tilde{r}, \quad (3.33)$$

$$\langle \tilde{W} \rangle = \frac{1}{2} \int \tilde{\psi}^* \tilde{V} \tilde{\psi} d^3 \tilde{r}, \quad (3.34)$$

$$\langle \tilde{I} \rangle = \int \tilde{\alpha} |\tilde{\psi}|^4 d^3 \tilde{r}. \quad (3.35)$$

Entonces en términos de lo anterior se obtiene los valores de expectación de la energía total $\langle \tilde{E} \rangle = \langle \tilde{K} \rangle + \langle \tilde{W} \rangle + \langle \tilde{I} \rangle$ y el teorema del virial $2\langle \tilde{K} \rangle + \langle \tilde{W} \rangle + 3\langle \tilde{I} \rangle = 0$, el cual determina si un sistema está en equilibrio dinámico o no. Las unidades físicas de los valores de expectación de las energías con las variables tilde, se recuperan multiplicando por un factor de $c^3 \hbar / 4\pi G m$ para tener unidades de Joules (J).

Ya que se han definido todas las transformaciones para las variables físicas de interés, ahora se puede verificar que las ecuaciones (3.27) y (3.28) son invariantes ante el escalamiento dado por las transformaciones (3.29) y (3.30), esto es:

$$i\alpha^4 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{2} \alpha^4 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi} + \alpha^4 \tilde{V} \tilde{\psi} + \alpha^4 \tilde{\alpha} |\tilde{\psi}|^2 \tilde{\psi}, \quad (3.36)$$

$$\alpha^4 \tilde{\nabla}^2 \tilde{V} = \alpha^4 |\tilde{\psi}|^2, \quad (3.37)$$

lo que claramente implica:

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi} + \tilde{V} \tilde{\psi} + \tilde{\alpha} |\tilde{\psi}|^2 \tilde{\psi}, \quad (3.38)$$

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{V} = |\tilde{\psi}|^2. \quad (3.39)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones de GPP adimensional es invariante ante el escalamiento con el factor α , este sistema es el que se evolucionó utilizando los métodos numéricos que se muestran en el Apéndice A.

El parámetro α se utiliza para asociar a las cantidades físicas correspondientes con un problema computacional manejable, como un ejemplo de esto último para un dominio físico de $r = 50$ kpc el cual es del orden de magnitud del tamaño de una galaxia, tendríamos un dominio computacional $\hat{r} = \frac{mc}{\hbar} r = \frac{10^{-22}(eV/c^2)*c}{1,4 \times 10^{-14} eV*s} * 50kpc = 781319$, lo que implica que si se usa \hat{r} como el dominio computacional sería muy grande y más difícil de manejar en los cálculos numéricos, es aquí en donde se aprovecha que la variable \hat{r} sea invariante ante el escalamiento dado por $\hat{r} = \alpha^{-1} \tilde{r}$, entonces usando como dominio computacional \tilde{r} , díganos para $\tilde{r} = 10$, se fija un α mediante $\alpha = \frac{10}{781319} = 12,8 \times 10^{-6}$, tal valor afecta en las demás variables físicas que serán recuperadas en términos de las variables tilde, pero en este caso de $r = 50kpc$ me fija un dominio computacional $\tilde{r} = 10$ mucho más manejable.

3.2. El sistema Gross-Pitaevskii-Poisson como un problema de eigenvalores

Otro enfoque en el cual se puede estudiar el sistema GPP formado por las ecuaciones (3.38) y (3.39) es el que permite calcular configuraciones de equilibrio, en dicho enfoque se asume que la función de onda del condensado es de la forma $\tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{r}) = e^{i w \tilde{t}} \tilde{\phi}(\tilde{r})$, donde w es un parámetro libre. Esta suposición implica que la densidad de masa $\tilde{\rho}$ y el potencial gravitacional \tilde{V} son independientes del tiempo, por lo tanto la función de onda evoluciona armónicamente en el tiempo. Entonces el sistema de ecuaciones (3.38) y (3.39) en coordenadas esféricas y simetría esférica se convierte en

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{r}} = 2\tilde{\phi}(\tilde{V} + w) + 2\tilde{a}|\tilde{\phi}|^2 \tilde{\phi}, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{r}} = |\tilde{\phi}|^2. \quad (3.41)$$

Este sistema se resuelve bajo la condición de regularidad en el origen $\tilde{\phi}(0) = \tilde{\phi}'(0) = 0$, y $\tilde{\phi}(\tilde{r} \rightarrow \infty) = 0$; también se demanda que $\tilde{V}(\infty) = 0$. Estas condiciones de frontera determinan de manera única los valores de $\tilde{V}(0)$ y w , de forma que el sistema de ecuaciones (3.40) y (3.41), junto con estas condiciones, define un problema de eigenvalores, llamado también de Sturm-Liouville.

Este problema ha sido resuelto con detalle en [Guzmán & Ureña 2004]. En dicho trabajo las soluciones son usadas como halos de materia oscura. También se ha demostrado numéricamente que las soluciones con estados excitados decaen en soluciones del estado base, y por lo tanto son útiles como halos de materia oscura. Por otra parte, se ha demostrado que las soluciones del estado base son estables ante perturbaciones radiales [Guzmán & Ureña 2006] y no radiales [Bernal & Guzmán 2006], además de que tienen propiedades de ser atractoras en el tiempo tal y como se encontró en [Guzmán & Ureña 2006].

3.3. Transformación de Madelung

Existe otro enfoque para estudiar el sistema GPP que se basa en obtener una versión hidrodinámica del mismo, esto mediante el uso de la representación de Madelung de la función de onda del condensado. Para estudiar este enfoque se considera el sistema GPP de la forma [Chavanis 2011]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + m(V + h(\rho))\psi, \quad (3.42)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho = 4\pi GNm|\psi|^2, \quad (3.43)$$

en donde V es el potencial gravitacional y $h(\rho) = g\rho = gNm|\psi|^2$ es un potencial efectivo en general, que para este caso modela la interacción de corto alcance. El sistema anterior se reduce al sistema GPP que se usa en este trabajo cuando $h(\rho) = \lambda|\psi|^2$, $V = V/m$ y $\rho = |\psi|^2$.

El sistema GPP anterior se puede tratar usando el enfoque de la transformación de Madelung para la función de onda ψ del condensado [Pitaevskii 1959, Pethick & Smith 2008], con la cual la Ec. (3.42) se convierte en un sistema de ecuaciones tipo hidrodinámicas. Dicha representación consiste en definir ψ de la forma

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t)e^{iS(\vec{r}, t)/\hbar}, \quad (3.44)$$

donde $A(\vec{r}, t)$ y $S(\vec{r}, t)$ son funciones reales, con las cuales para este trabajo se definen los campos de velocidad y densidad como

$$\rho = |\psi|^2 = A^2, \quad (3.45)$$

$$\vec{u} = \frac{1}{m} \nabla S. \quad (3.46)$$

Se nota entonces que si se define el flujo de esta manera, éste es irrotacional, ya que $\nabla \times \vec{u} = 0$. Sustituyendo la Ec. (3.44) en Ec. (3.42) y usando las ecuaciones (3.45) y (3.46), además de separar parte real e imaginaria, se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V + \lambda|\psi|^2 + Q = 0, \quad (3.48)$$

donde

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = -\frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} \right], \quad (3.49)$$

es una cantidad llamada potencial cuántico. La Ec. (3.47) es similar a la ecuación de continuidad en hidrodinámica. La Ec. (3.48) tiene una forma similar a la ecuación de Hamilton-

Jacobi clásica con un término cuántico adicional. Dicha ecuación también se puede interpretar como una ecuación de Bernoulli generalizada para un flujo potencial. Tomando el gradiente de la Ec. (3.48) y usando la identidad vectorial $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla(\vec{u}^2/2) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})$, la cual para un fluido irrotacional se reduce a $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla(\vec{u}^2/2)$, entonces se puede obtener una ecuación similar a la ecuación de Euler con un potencial cuántico adicional

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\lambda \nabla |\psi|^2 - \nabla V - \frac{1}{m} \nabla Q. \quad (3.50)$$

Esta ecuación muestra que el potencial efectivo $\lambda |\psi|^2$ puede ser interpretado como una entalpía en las ecuaciones hidrodinámicas.

En conclusión, el sistema GPP formado por las ecuaciones (3.42) y (3.43) es equivalente a las ecuaciones “hidrodinámicas” (3.47), (3.50), y donde la ecuación de Poisson Ec. (3.43) queda de la misma forma. A estas ecuaciones se les refiere como ecuaciones de Euler cuánticas barotrópicas. En el caso $\hbar \rightarrow 0$, el potencial cuántico desaparece y se recuperan las ecuaciones de Euler barotrópicas ordinarias [Binney & Tremaine 1987]. Para un potencial de la forma $h(\rho) = |\psi|^2$, la ecuación de estado es

$$p = \frac{4\pi a \hbar^2}{m^3} \rho^2. \quad (3.51)$$

Esta ecuación es equivalente a una ecuación de estado barotrópica

$$p = K \rho^\gamma, \quad (3.52)$$

donde $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ y la constante politrópica $K = 4\pi a \hbar^2 / m^3$. En este caso el índice politrópico $n = 1$ (o sea $\gamma = 2$).

Como una observación, la interpretación del potencial cuántico que aparece en la Ec. (3.49) se desarrolló por primera vez en el trabajo de Madelung [Madelung 1927] y fue redescubierto por Bohm [Bohm 1952] (por lo cual a veces se lo conoce como potencial de Bohm). Notando la identidad

$$-\frac{1}{m} \nabla Q \equiv -\frac{1}{\rho} \partial_j P_{ij}, \quad (3.53)$$

donde P_{ij} es un tensor de esfuerzos

$$P_{ij} = -\frac{\hbar^2}{4m^2} \rho \partial_i \partial_j \ln \rho, \quad (3.54)$$

o

$$P_{ij} = \frac{\hbar^2}{4m^2} \left(\frac{1}{\rho} \partial_i \rho \partial_j \rho - \delta_{ij} \nabla^2 \rho \right), \quad (3.55)$$

esto muestra que el potencial cuántico es equivalente a una presión anisótropa análoga a la que se construye en mecánica de fluidos.

En este trabajo no serán resueltas las ecuaciones hidrodinámicas (3.47) y (3.50) como tales, sin embargo se usaran aproximaciones basadas en el equilibrio hidrostático, simetría esférica y la aproximación de Thomas-Fermi para dichas ecuaciones, como se verá en el capítulo 4 donde se estudia más a fondo el perfil de densidad de Böhmer-Harko [Böhmer & Harko 2007].

En el siguiente capítulo se hablará sobre las soluciones de equilibrio cuando se trata al sistema GPP como un problema de eigenvalores. Se presentará el resultado de este trabajo en donde se mostrará la inestabilidad del perfil de densidad de MO de Böhmer-Harko para un bosón ultraligero de $m \sim 10^{-23} eV/c^2$.

Capítulo 4

Estudio de la estabilidad de los halos de materia oscura formados por un BEC

En este capítulo se demuestra que los halos de materia oscura esféricamente simétricos formados por un BEC, con el perfil de densidad del tipo $\sin r/r$, que ajusta muy bien las curvas de rotación galácticas y representa una solución potencial al problema del cusp-core son inestables.

4.1. Caso 1: Estabilidad de las soluciones del estado base (Guzmán-Ureña)

La estabilidad de las soluciones del estado base del sistema GPP ya ha sido analizada en el marco de las configuraciones de equilibrio. Cuando se asume que la función de onda tiene dependencia armónica en el tiempo y simetría esférica $\psi(r, t) = e^{iEt/\hbar} \phi(r)$, el sistema GPP se reduce a un problema de Sturm-Liouville, como se vió en el capítulo 3, es decir en un problema de eigenvalores para $\phi(r)$ y E , siempre y cuando se proporcionen condiciones de frontera sobre la función de onda y sobre el potencial gravitacional. Estas soluciones ya se han construido numéricamente en [Ruffini & Bonazolla 1969], y de hecho han sido usadas como halos de materia oscura [Sin 1994, Guzmán & Ureña 2004].

También se ha demostrado que las soluciones del estado base son estables ante perturbaciones radiales [Guzmán & Ureña 2006] y no radiales [Bernal & Guzmán 2006], además de que tienen propiedades de ser atractoras en el tiempo como se encontró en el trabajo [Guzmán & Ureña 2006]. Por otra parte, se ha demostrado que las configuraciones de las soluciones del estado base se virializan porque satisfacen la condición $2K + W + 3I = 0$, donde K, W, I , son los valores de expectación de la energía cinética, potencial y de auto-interacción respectivamente en términos de la solución del sistema GPP, para valores arbitrarios de la longitud de dispersión a . Estas configuraciones del estado base muestran propiedades de estabilidad interesantes, por ejemplo, son estables ante perturbaciones de

distintos tipos y además son soluciones atractoras y aparentemente estados finales de la evolución de fluctuaciones de perfiles iniciales bastante arbitrarios [Guzmán & Ureña 2006]. Sin embargo la distribución de materia de estas soluciones es muy compacta, y si bien las estructuras no tienen el problema del cusp-core y son muy estables y atractoras, no pueden explicar las curvas de rotación galácticas, pues éstas son Keplerianas a distancias ya muy pequeñas. Esto es, si se desea explicar el núcleo de los halos no se pueden explicar las curvas de rotación y viceversa.

Un intento por resolver este problema incluyó la construcción de las soluciones de estados excitados, que en efecto presentan curvas de rotación más satisfactorias a escalas galácticas, pero desafortunadamente tales configuraciones son inestables y decaen en una configuración de esta base [Sin 1994, Guzmán & Ureña 2006].

Un intento interesante para rescatar este modelo consiste en asumir que los halos galácticos son una combinación de estados base con excitados. Las configuraciones resultantes presentan curvas de rotación aceptables y conforman configuraciones estables que eventualmente podrían ser la solución al problema de las curvas de rotación galácticas [Bernal & Ureña 2010].

Aunque esta última propuesta no está exenta de problemas, ya que un problema en este modelo es suponer que una buena parte de los bosones se encuentran en estados excitados, porque se asume que la temperatura crítica de condensación es del orden de TeVs y esperaríamos que a las temperaturas actuales del universo la proporción de bosones en estados excitados fuera insignificante.

Debido a que este tema ha sido ya estudiado extensamente no es el objetivo de esta tesis, sino el estudio del siguiente tipo de de halos galácticos hechos con un BEC.

4.2. Perfil de materia oscura de Böhmer-Harko

Una alternativa y una aproximación totalmente diferente para los halos de materia oscura es la que propone que están formados por un BEC, esta alternativa fue presentada en [Böhmer & Harko 2007] por Böhmer y Harko, en donde los autores aplican la representación de Madelung para la función de onda y construyen una versión hidrodinámica del sistema GPP. Lo anterior bajo la suposición de equilibrio hidrostático e ignorando el potencial cuántico resultante cuando se aplica la aproximación de Thomas-Fermi, los autores llegan a una ecuación tipo Lane-Emden, la cual se resuelve usando una ecuación de estado barotrópica para el índice politrópico $n = 1$. Tales consideraciones llevadas a cabo se explican a continuación.

Si se quiere calcular el estado estacionario en la ecuación cuántica barotrópica de Euler (3.50), entonces se debe considerar que todas las variables termodinámicas no dependan

del tiempo y $\vec{u} = 0$, lo que hace que la ecuación se transforme en la siguiente

$$\nabla p + \rho \nabla V - \frac{\hbar^2 \rho}{2m^2} \nabla \left(\frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = 0. \quad (4.1)$$

Esta ecuación generaliza la condición usual de equilibrio hidrostático con la contribución de un potencial cuántico. La Ec. (4.1) describe el balance entre la atracción gravitacional, la repulsión debida al potencial cuántico y la repulsión (para $a > 0$) o la atracción (para $a < 0$) debidas a las interacciones de corto alcance dadas por la dispersión de los bosones. Aplicando la divergencia a la Ec. (4.1) y usando la ecuación de Poisson (3.43), se obtiene la ecuación del equilibrio hidrostático para un sistema cuántico

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) + \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla^2 \left(\frac{\nabla^2(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}} \right) = 4\pi G\rho. \quad (4.2)$$

Para una ecuación de estado de la forma (3.51), la ecuación anterior se convierte en

$$-\frac{4\pi a \hbar^2}{m^3} \nabla^2 p + \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla^2 \left(\frac{\nabla^2(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}} \right) = 4\pi G\rho. \quad (4.3)$$

Uno de los límites de la ecuación anterior es la aproximación de Thomas-Fermi que equivale a despreciar el potencial cuántico. Tal situación se toma en cuenta en el trabajo de [Böhmer & Harko 2007], en relación con los halos de materia oscura con auto-interacción repulsiva ($a > 0$). Esta aproximación corresponde también al límite clásico de la teoría (esto corresponde a despreciar todos los términos con potencias de \hbar) o como el régimen de interacciones repulsivas fuertes entre partículas. Desde un punto de vista matemático la aproximación de Thomas-Fermi corresponde a despreciar todos los términos que contienen $\nabla\rho$ y ∇S en la ecuación de movimiento. En esta aproximación se desprecia el término cinético en la ecuación anterior en el límite $a \rightarrow \infty$, es decir, cuando el término dominante es el de autointeracción. Entonces en esta aproximación, la Ec. (4.1) se reduce a la condición usual del equilibrio hidrostático

$$\nabla p + \rho \nabla V = 0. \quad (4.4)$$

Esta ecuación describe el balance entre la atracción gravitacional y la repulsión debida a la interacción de corto alcance. Entonces si se toma la divergencia de la ecuación anterior y combinando con la ecuación de Poisson (3.43), se obtiene la ecuación del equilibrio hidrostático

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = 4\pi G\rho. \quad (4.5)$$

Si se usa una ecuación de estado de la forma (3.51), la ecuación anterior puede ser reescrita

como

$$\nabla^2 \rho + \frac{Gm^3}{a\hbar^2} \rho = 0. \quad (4.6)$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación de Lane-Emden para un índice politrópico $n = 1$, la cual puede ser resuelta analíticamente [Chandrasekhar 1957]. En este caso la solución de la ecuación de Lane-Emden con simetría esférica es [Chandrasekhar 1957]

$$\theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (4.7)$$

Donde $\xi = \frac{r}{\left[(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}/4\pi G \right]^{1/2}}$, es la coordenada adimensional. Para el caso de un condensado de Bose, $K = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^3}$ y $n = 1$. Además se define ξ_1 , en donde la presión y la densidad con cero por medio de la condición $\theta(\xi_1) = 0$, esto se cumple cuando $\xi_1 = \pi$. Lo anterior implica que el radio R de la configuración autogravitante de BEC está dado por

$$R = \pi \sqrt{\frac{\hbar^2 a}{Gm^3}}. \quad (4.8)$$

Entonces si se toma en cuenta la solución analítica de la ecuación de Lane-Emden dada por la Ec. (4.6), además de la definición $\rho = \rho_c \theta^n$, con el índice politrópico $n = 1$, se obtiene el perfil de densidad de Böhmer-Harko (BH) de los halos de materia oscura descritos por un BEC [Böhmer & Harko 2007]

$$\rho(r) = \rho_c \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad (4.9)$$

donde $k = \sqrt{\frac{Gm^3}{\hbar^2 a}} = \pi/R$ y $\rho_c = \rho(0)$ es la densidad central del condensado, m es la masa de un bosón y a es la longitud de dispersión. Con el perfil de densidad dado por la Ec. (4.9) se puede calcular la masa encerrada en el radio r , la cual está dada por

$$m(r) = \frac{4\pi\rho_c}{k^2} r \left(\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) \right), \quad (4.10)$$

y llendo más lejos, se puede calcular la velocidad tangencial v_B de una partícula de prueba a una distancia r que describe una trayectoria circular

$$v_B^2(r) = \frac{4\pi G\rho_c}{k^2} \left(\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) \right). \quad (4.11)$$

Este perfil de velocidades es el que se compara con los datos de las curvas de rotación galácticas.

4.2.1. Prueba de estabilidad del perfil de densidad BEC

En el trabajo de [Böhmer & Harko 2007] se usa el perfil dado por la Ec. (4.9), el cual describe el perfil de densidad de materia oscura formado por un BEC que modela a los halos galácticos. Si se usan tales consideraciones el perfil de densidad de un BEC queda de la siguiente forma:

$$\rho_{BEC}(r) = \rho_{BEC}^c \frac{\sin(\pi r/R)}{\pi r/R}, \quad (4.12)$$

donde R es el radio al cual $\rho_{BEC}(r) = 0$, definido como el tamaño de la galaxia, y ρ_{BEC}^c es la densidad central de materia oscura. Estas dos cantidades son parámetros de ajuste de curvas de rotación cuando se hacen comparaciones con las observaciones. Además como se calculó anteriormente $R = \pi \sqrt{\frac{\hbar^2 a}{Gm^3}}$, [Chavanis & Harko 2012]. Esta aproximación funciona bien para un condensado arbitrario, en particular en [Böhmer & Harko 2007] los autores fijan el valor de $a \sim 5,77 \times 10^{-7}$ cm, motivado por el valor observado en el laboratorio para el ^{87}Rb y mediante los ajustes de las curvas de rotación con los parámetros libres ρ_{BEC}^c, R , se infiere a través de la expresión anterior para R una masa del bosón $m \sim 1,44\text{eV}$.

Usando este mismo modelo, pero considerando la masa del bosón $m \sim 10^{-23}\text{eV}$, que es un candidato para la MO, se han llevado a cabo varios estudios. Un ejemplo se presenta en [Matos & Robles 2013], los autores usan el perfil de densidad (4.12) para ajustar curvas de rotación para una cantidad de galaxias enanas y de bajo brillo superficial (LSB), y al mismo tiempo encontraron que el modelo podría ser una solución del problema del cusp-core [Gross 1958, Harko 2011, Matos & Robles 2013].

Cabe enfatizar que las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones GPP original, con sus configuraciones de equilibrio, así como sus ventajas y desventajas, son totalmente diferentes de las soluciones de equilibrio construidas por Böhmer y Harko. Una evidencia clara es que los perfiles de densidad para configuraciones de equilibrio del sistema GPP decaen exponencialmente en el espacio y son diferentes que el perfil (4.12). Por supuesto, esto implica diferentes perfiles para las curvas de rotación y entre los dos enfoques, el perfil de Böhmer-Harko parece ser el que ajusta mucho mejor las curvas de rotación y el problema de la cúspide en los núcleos [Matos & Robles 2012, Matos & Robles 2013].

Sin embargo, a pesar de las ventajas que tiene el perfil de Böhmer-Harko, en este trabajo se demuestra que es inestable. De hecho, esto se esperaría, debido a que en [Guzmán & Ureña 2006], se demostró que las soluciones del sistema GPP son soluciones atractoras y entonces el perfil (4.12) sería inestable y debería decaer en una de las soluciones del estado base de los construidos como soluciones estacionarias del sistema GPP, sin la aproximación de Thomas-Fermi en la versión de Madelung.

Si se habla de la estabilidad de las soluciones del sistema GPP en el problema de eigenvalores, como se vió en la primera parte de este capítulo, tales soluciones se construyen bajo la suposición de una dependencia temporal armónica de la función de onda, la cual implica inmediatamente que la densidad de probabilidad es independiente del tiempo y por

lo tanto el potencial gravitacional también lo es. Estas implicaciones sobre la independencia temporal no garantizan que las soluciones sean estables, de hecho soluciones excitadas construidas bajo las mismas suposiciones de equilibrio son inestables, como se muestra en [Guzmán & Ureña 2006]. Lleno más lejos, en [Guzmán & Ureña 2006] se demostró que para a negativas hay ramas estables e inestables, incluso para soluciones en el estado base. Entonces se enfatiza que las configuraciones en el estado base para una $a > 0$ arbitraria son estables y se ha demostrado mediante la evolución de configuraciones perturbadas con cáscaras esféricas y no esféricas aplicadas a la función de onda, o simplemente con los errores inducidos por los métodos numéricos usados.

Por otra parte, en la aproximación de Böhmer-Harko, como se vió anteriormente las suposiciones sobre la independencia del tiempo son aplicadas en el marco de Madelung, con lo que se obtiene el perfil (4.12). Sin embargo nunca se ha mostrado su estabilidad. Para probar las propiedades de estabilidad se pueden plantear dos opciones simples. La primera se basa en el análisis perturbativo de la solución y la segunda consiste en la evolución de la solución. En este trabajo se elige la segunda opción. De esta forma, lo que se hace es estudiar la evolución del perfil (4.12) en el sistema original completo GPP dependiente del tiempo en coordenadas esféricas y simetría esférica.

4.2.2. Evolución de los halos galácticos con el modelo Böhmer-Harko

Para evolucionar los halos galácticos tipo Böhmer-Harko con la densidad (4.12) se sustituye la función de onda que le corresponde en (3.38) y (3.39)

Específicamente, como dato inicial se comienza la evolución del sistema GPP con una función de onda consistente con (4.12), es decir, $\psi(r, t) = \sqrt{\rho(r, t)} \exp^{iS(r, t)/\hbar}$, donde S es una fase con unidades de acción, la cual bajo suposiciones del equilibrio hidrostático demanda $\nabla S = 0$ y asumiendo una dependencia armónica de ψ en el tiempo la fase S se puede escribir como $S = -Et$, donde E es la eigenenergía del sistema [Chavanis 2011]. Entonces el perfil (4.12) proporciona una receta simple para construir la función de onda del halo de materia oscura.

El tamaño de la galaxia es R , definida por la condición $\rho_{BEC}(R) = 0$, el primer cero de la densidad. Se hacen los cálculos en un dominio extendido $r \in [0, r_{max}]$ con $r_{max} \sim 4R > R$, lo que permite monitorear el movimiento de la densidad de probabilidad en regiones con $r > R$. Así, la función de onda inicial es de la siguiente forma

$$\psi(r, t = 0) = \begin{cases} \sqrt{\rho_{BEC}(r)} & r < R, \\ 0 & R \leq r \leq r_{max} \end{cases} \quad (4.13)$$

donde $\rho_{BEC}(r)$ está dada por (4.12).

Para las unidades se usa el reescalamiento de las variables descrito en el capítulo 3, es decir, $\psi \rightarrow \frac{\sqrt{4\pi G \hbar}}{mc^2} \hat{\psi}$, $r \rightarrow \frac{mc}{\hbar} \hat{r}$, $V \rightarrow \frac{\hat{V}}{mc^2}$, $a \rightarrow \frac{c^2}{2Gm} \hat{a}$, entonces las constantes numéricas \hbar , \hbar^2/m , $2\pi\hbar^2/m^2$, $4\pi G$ no aparecen en las ecuaciones (3.14) y (3.15). Adicionalmente, se

usan las unidades de código (variables tilde) que permiten un mejor manejo de los cálculos, para eso se aprovecha la propiedad de invarianza del sistema de ecuaciones (3.38) y (3.39) bajo la transformación $\hat{t} \rightarrow \tilde{t}/\alpha^2, \hat{r} \rightarrow \tilde{r}/\alpha, \hat{\psi} \rightarrow \alpha^2 \tilde{\psi}, \hat{V} \rightarrow \alpha^2 \tilde{V}, \hat{a} \rightarrow \tilde{a}/\alpha^2$, en donde α es un parámetro arbitrario [Guzmán & Ureña 2004].

Ahora es importante elegir el tipo de sistema bosónico a estudiar. Por una parte, en el trabajo original de BH, la masa de los bosones es del orden de meV, lo cual desafortunadamente lo descarta como modelo de materia oscura pues no ajustaría el espectro de potencias construido a partir del análisis de las fluctuaciones de materia (como se describió en la introducción). Por el contrario, si se supone que el bosón es de espín cero y ultraligero se resuelve el problema de espectro de potencias [Matos & Ureña-López 2001] y el bosón funciona como materia oscura a escala cósmica, pues de entrada tendría el primero de los problemas que mencionamos, a saber, el de la sobreabundancia.

Se ha mencionado reiteradamente el trabajo de [Matos & Robles 2013] porque en él se aplica el perfil de BH considerando que el bosón es precisamente de espín cero y ultraligero, y se han ajustado curvas de rotación galácticas para galaxias LSB y además se ha mostrado que el modelo no tiene el problema del cusp-core. En este sentido, se trata de un buen modelo que:

- No tiene el problema de la sobreabundancia.
- No tiene el problema del cusp-core.
- Resuelve el problema de las curvas de rotación galácticas.

Por ello se enfoca el esfuerzo a estudiar la cuarta de las propiedades: la estabilidad y comportamiento atractor del modelo con los parámetros que aportan estas tres propiedades y no los parámetros del perfil original de BH.

De entre la muestra presentada en [Matos & Robles 2013] en este trabajo se eligieron dos que ilustran el comportamiento genérico de los perfiles de materia oscura: la galaxia ESO3050090 y la galaxia ESO1870510, seleccionadas por presentar ajustes con gran precisión de las curvas de rotación [Matos & Robles 2013]. En la tabla 1 se muestran los valores del radio R , la densidad central ρ_{BEC}^c y la longitud de dispersión a calculada mediante Ec. (4.8) para ambas galaxias. También se muestran los valores computacionales tilde calculados este trabajo mediante las transformaciones Ec. (3.29).

Galaxia	R (kpc)	ρ_{BEC}^c ($M_{\odot} pc^{-3}$)	a (m)	\tilde{r}	$\tilde{\rho}_{BEC}^c$	\tilde{a}
ESO3050090	4.81	0.0217	7.554×10^{-80}	20	0.0318292	1.17
ESO1870510	2.93	0.0329	2.803×10^{-80}	20	0.0482571	0.43

Tabla 1. Parámetros físicos y computacionales de las galaxias ESO3050090 y ESO1870510.

Los resultados de la evolución del sistema GPP (Ecs. 3.38 y 3.39) para ambas galaxias con los parámetros computacionales de la Tabla 1 se muestran en las figuras 4.1 y 4.2. El factor de escala que se usó en este caso es $\alpha = 0,0006399$ para después de la evolución del sistema GPP poder recuperar las variables físicas. Para el tiempo inicial se grafica la curva de rotación por medio de la solución numérica del sistema GPP y se compara con la curva de rotación obtenida mediante los puntos observacionales para cada galaxia con sus correspondientes barras de error [de Blok et al. 2001], para después evolucionar el sistema GPP y estudiar la dinámica de las dos galaxias como se muestra en las Figs. (4.1) y (4.2).

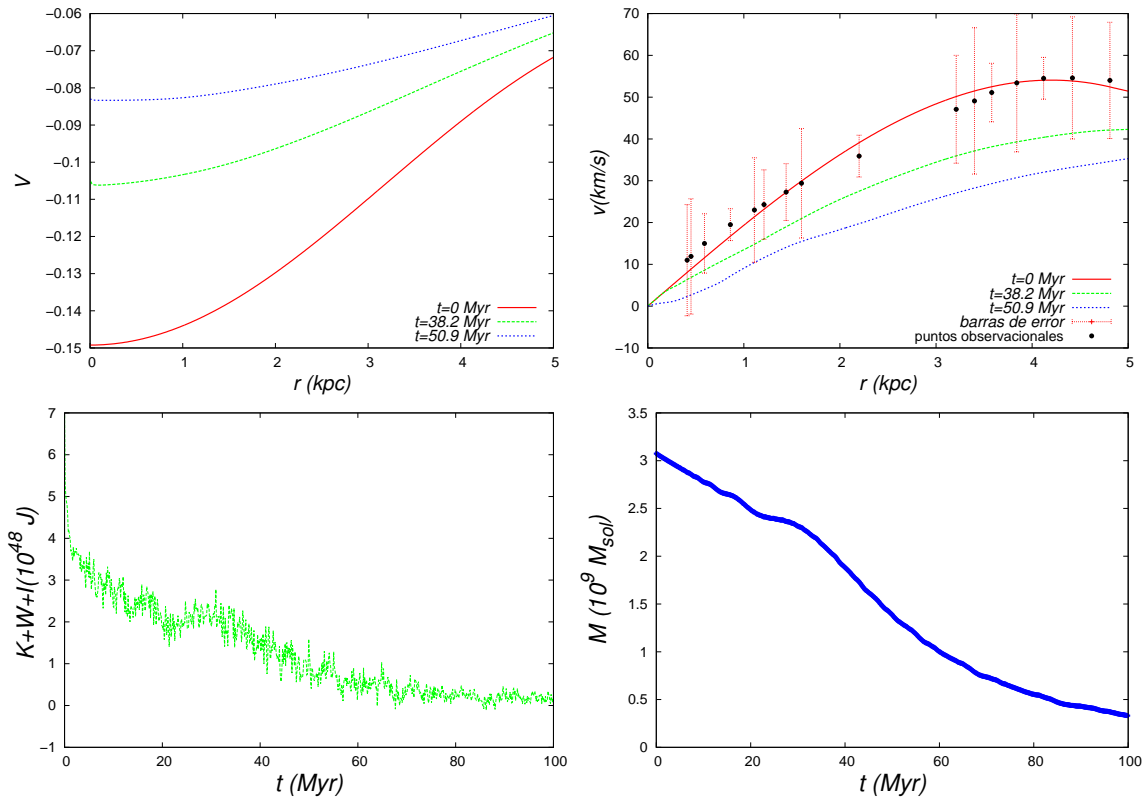


Figura 4.1: Galaxia ESO3050090. Se muestran instantáneas del potencial gravitacional en unidades de código para tres tiempos distintos, el tiempo es medido en Mega años (Myr), y se puede notar que tal potencial no es independiente del tiempo. También se muestra la curva de rotación y lo rápido que se distorsiona en el tiempo. De igual forma se muestra la masa M contenida en el radio $r = R$, como una función del tiempo y se aprecia lo rápido que decrece. Adicionalmente se muestran la cantidad $K + W + I$ en Joules (J) y se aprecia que es positiva al principio; el hecho de que sea positiva inicialmente indica que el sistema no es acotado y se debe dispersar. Que el sistema se dispersa queda manifiesto en la pérdida de masa contenida en el radio R .

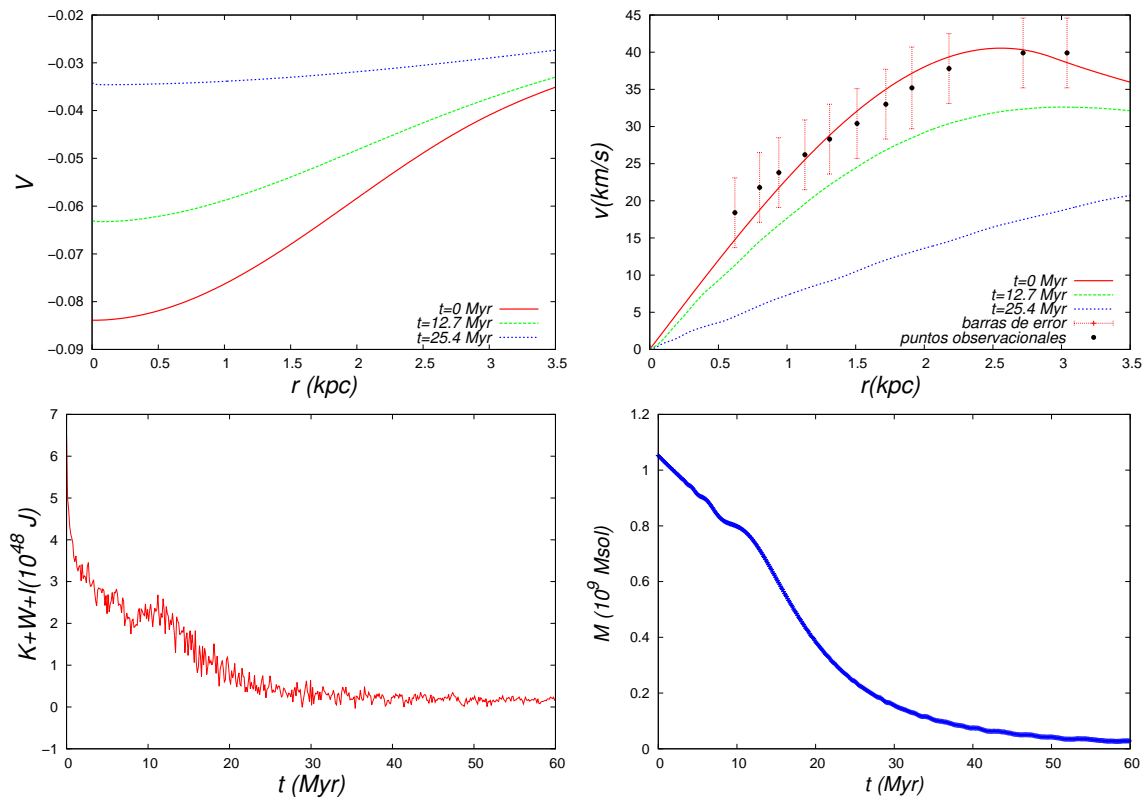


Figura 4.2: Galaxia ESO1870510. El comportamiento es totalmente similar al de la galaxia mostrada en la Fig. (4.1).

En primer lugar, un dato determinante es que la energía total del sistema $E = K + W + I$ es positiva de entrada al tiempo inicial. La primera implicación es que el sistema es no acotado y por tanto debería dispersarse. Entonces las pequeñas perturbaciones debidas a los errores de los métodos numéricos son suficientes para desencadenar la fisión del sistema sin necesidad de aplicar perturbaciones explícitas. En seguida es de esperar que la masa decrezca en el volumen contenido en la esfera de radio R , porque la configuración se está dispersando, dato que también se muestra para ambos casos. En consecuencia la curva de rotación y el potencial sufren las consecuencias del cambio en el valor de la masa del sistema.

También es importante indicar las escalas de tiempo de los procesos de decaimiento. En ambas figuras se muestra que la masa del halo decrece a la mitad en alrededor de 20 y 50 Mega años, respectivamente. Estas escalas de tiempo son considerablemente cortas comparadas con la escala de 10^9 años que las galaxias parecen mostrar como escala de tiempo de equilibrio.

Adicionalmente a la inestabilidad, los halos de Böhmer-Harko muestran una inconsistencia importante y entonces en las aplicaciones del modelo como tal: el radio R y la densidad central ρ_{BEC}^c son los parámetros de ajuste del modelo, que se relacionan mediante la expresión $R = \pi \sqrt{\frac{\hbar^2 a}{Gm^3}}$ [Matos & Robles 2012, Böhmer & Harko 2007]. El punto es que R es un parámetro que cambia de galaxia a galaxia. Esto implica que para una masa m del bosón dada, como por ejemplo para el modelo de materia oscura se tiene un bosón ultraligero $m \sim 10^{-23}$ eV, entonces para una galaxia dada hay un R fijo y una longitud de dispersión a . Sin embargo, para el mismo bosón y para una galaxia diferente R es distinto y por lo tanto a también lo es. Esto sería equivalente a considerar que los bosones interactúan de manera distinta en diferentes galaxias, lo cual es totalmente inesperado para una candidato de materia oscura. Contrariamente, si a está dada para todas las galaxias, entonces todas las galaxias deben tener el mismo R para una m fija y es claro que las galaxias tienen diferentes tamaños. Esto es tal vez un problema importante, tal y como es el de la inestabilidad mostrado en este trabajo.

El hecho de que el valor de K contribuya de modo significativo a la energía total $E = K + W + I$, indica que la aproximación de Thomas-Fermi puede no ser válida en este caso.

Este hallazgo que pondría en duda el modelo de BEC resultado de la suposición de la aproximación de Thomas-Fermi, motivó que se verificara la validez de dicha aproximación al menos para el modelo de Böhmer-Harko original con masas que son atómicas y no de materia oscura. El resultado es que en efecto, la cantidad I/E para el caso de masa ultraligera es 80 órdenes de magnitud menor que cuando se considera la masa del bosón del orden de meV. Es entonces factible que los modelos del gas atómico sean estables, pero no se hace aquí porque de entrada el gas atómico queda descartado como materia oscura.

Capítulo 5

Conclusiones

En el capítulo 1 se mencionó parte de la historia, la motivación y las observaciones que dieron origen a las hipótesis que sugieren la existencia de materia oscura, tanto a nivel cosmológico como galáctico. En este mismo capítulo se centró la atención en la materia oscura vista desde el punto de vista del modelo Λ CDM, y se describieron sus propiedades más importantes, así como algunos de sus problemas. Se describieron los modelos de materia oscura que se han propuesto, y como punto central se habló sobre el problema de la materia oscura a escala galáctica, en especial el problema de las curvas de rotación. Se explicó porqué en este trabajo se considera la hipótesis de que la materia oscura esté formada por un Condensado de Bose-Einstein (BEC), tal modelo resolvería los problemas que presenta el modelo CDM, los cuales son: la sobreabundancia de estructuras pequeñas, el problema del *cusp-core* y el problema de las curvas de rotación.

En el capítulo 2 se habló sobre la materia oscura galáctica dando a conocer las principales observaciones que llevaron a inferir la existencia de materia oscura a nivel de cúmulos, grupos y galaxias. Las observaciones se basaron en el cálculo de las masas, usando específicamente el cociente masa-luminosidad M/L_B , en donde se encontraron grandes discrepancias entre los valores observados y los calculados. También se explicó cómo se calculan las curvas de rotación galácticas para partículas de prueba que siguen trayectorias circulares. Se vio que cuando se calculan tales curvas de rotación se encuentra que no presentan un comportamiento Kepleriano como se esperaría si solamente contribuyera el potencial gravitacional debido a la materia luminosa. En este capítulo se presentaron modelos fenomenológicos que tratan de resolver dicho problema de las curvas de rotación, pero sin suponer un candidato de materia oscura. Sin embargo, como se vio en este mismo capítulo hay modelos que proponen que la materia oscura estaría formada por un BEC, y tal propuesta se basa en considerar que los halos de materia oscura tienen un perfil de densidad de la forma $\rho = \rho_0^B \frac{\sin(kr)}{kr}$.

En el capítulo 3 se obtuvo la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP), que junto con la ecuación de Poisson forman el sistema de ecuaciones Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP), el cual describe la dinámica de un condensado de Bose-Einstein auto-gravitante. Se obtu-

vo el sistema GPP adimensional que permitió un manejo computacional adecuado y se demostró que el sistema GPP adimensional es invariante ante un reescalamiento. Se estudió el enfoque del sistema GPP como un problema de eigenvalores, con el cual es posible construir configuraciones de equilibrio. Finalmente se presentó el enfoque en donde el sistema GPP se puede tratar como un sistema de ecuaciones hidrodinámicas en el límite de Thomas-Fermi.

El resultado de esta tesis es el que se presentó en el capítulo 4, en el cual se demostró que los halos de materia oscura esféricamente simétricos de Böhmer-Harko son inestables si $m \sim 10^{-23}$ eV, cuando se tratan en el marco del sistema GPP, esto es, se demostró que los halos que ajustan a curvas de rotación galácticas y representan una solución potencial al problema del cusp-core, pierden masa rápidamente en un rango de la mitad de su masa en un lapso de decenas de millones de años. Este comportamiento se espera ya que el perfil sin r/r es totalmente inconsistente con el perfil exponencial de los perfiles de densidad de las soluciones del estado base.

Otro de los resultados encontrados en esta tesis han sido reportados en el trabajo [Guzmán et al. 2013] que está sometido, para el caso de un bosón ultraligero de $m \sim 10^{-23}$ eV, la energía cinética K contribuye significativamente a la energía total $E = K + W + I$, lo que indica que la aproximación de Thomas-Fermi (necesaria para construir los perfiles tipo Böhmer-Harko) podría no ser válida en este caso. Sin embargo este hallazgo que pondría en duda el modelo de BEC, resultado de la suposición de la aproximación de Thomas-Fermi, motivó que se verificara la validez de dicha aproximación al menos para el modelo de Böhmer-Harko original con masas atómicas del orden $m \sim \text{meV}$, y no de materia oscura. El resultado es que en efecto, la cantidad I/E para el caso de la masa ultraligera es 80 órdenes de magnitud menor que cuando se considera la masa del bosón del orden meV. Es entonces factible que los modelos del gas atómico sean estables, pero no se hace en esta tesis porque de entrada el gas atómico queda descartado como materia oscura.

Además de la inestabilidad, se encontró que el perfil de Böhmer-Harko presenta una inconsistencia importante, esta es: el radio R y la densidad central ρ_{BEC}^c son los parámetros de ajuste del modelo, que se relacionan mediante la expresión $R = \pi \sqrt{\frac{\hbar^2 a}{Gm^3}}$. El punto es que R es un parámetro que cambia de galaxia a galaxia. Por ejemplo para la masa del bosón ultraligero $m \sim 10^{-23}$ eV, entonces para una galaxia dada hay un R fijo y una longitud de dispersión a . Sin embargo, para el mismo bosón y para una galaxia diferente R es distinto y por lo tanto a también lo es. Esto sería equivalente a decir de los bosones interactúan de manera distinta en diferentes galaxias, lo cual es totalmente inesperado para un candidato de materia oscura.

A la luz de estos resultados, se puede resumir el estatus del modelo de halos de materia oscura esféricamente simétricos formados por un BEC de la siguiente manera:

1. Las configuraciones de equilibrio del estado base que se estudian en el trabajo [Guzmán & Ureña 2004] son estables en un sentido muy general, pero muestran curvas de rotación insatisfactorias. Aunque hay intentos por resolver este problema, el

cual consiste en la construcción de modelos con mezcla de estados base con estados excitados [Bernal & Ureña 2010], sin embargo no está exento de problemas, por ejemplo, si la temperatura crítica para que ocurra la condensación es tan alta (del order de TeV) no es de esperar que haya estructuras que contengan proporciones parecidas de partículas sí condensadas y de partículas en estados excitados.

2. Cuando se construyen las configuraciones estacionarias en el límite de Thomas-Fermi (halos de Böhmer-Harko), se muestran ajustes de curvas de rotación aceptables y es una alternativa para resolver el problema del cusp-core en las galaxias, sin embargo como se demostró en este trabajo estas configuraciones son inestables.
3. Para rescatar el modelo de halos de BEC como materia oscura es necesario: 1) preservar la masa ultraligera del bosón sin espín para que se conserven las propiedades del modelo a escala cosmológica, 2) explicar la existencia de halos de distintos tamaños sin que las propiedades de los bosones, en especial m y a cambien de una galaxia a otra. Por ahora no se conoce una solución a este problema y estamos trabajando en la idea de incorporar la rotación de los halos, que bien podría ser una propiedad local de cada galaxia.

Aunque la naturaleza de la materia oscura sigue siendo un misterio, hay modelos que pueden explicar muchas de las observaciones y hay otros que apenas comienzan a explicarlas, lo que conlleva a la existencia de muchos modelos que dan pie a su estudio y validez, como en el caso específico de este trabajo que se basó en el estudio del Condensado de Bose-Einstein (BEC) como candidato de materia oscura.

Apéndice A

Métodos Numéricos

En este apéndice se describen los métodos numéricos usados para resolver el sistema GPP como un problema de valores iniciales.

A.0.3. Diferencias Finitas

Para integrar las ecuaciones involucradas en este trabajo se usaron diferencias finitas para aproximar las derivadas que aparecen en tales ecuaciones. La aproximación en diferencias finitas se basa en lo siguiente [Guzmán 2010]. Se asume el caso de un dominio hipotético finito con una coordenada temporal t y una coordenada espacial x . Las coordenadas espaciales son definidas como un conjunto discreto de puntos dados por $x_j = j\Delta x$, y las fronteras corresponden a los puntos x_0 (en la izquierda) y x_N (en la derecha). El tiempo $t^n = n\Delta t$ también está definido solamente para ciertos valores del tiempo continuo, definiendo así una malla numérica. Entonces, una función es definida solamente para los valores de x y t que corresponden a puntos en la malla de tal manera que para una función continua f dada, hay valores (t^n, x_j) , entonces en ese punto la función se denota por f_j^n . Para un dominio uniformemente discretizado, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ y $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, indican la resolución en las coordenadas espacial y temporal respectivamente. Una vez definido un dominio discreto aproximado, procedemos a definir una aproximación para una Ecuación Diferencial Parcial (EDP), tal y como se ilustra en la Fig. (A.1). La aproximación en diferencias finitas asume que la función involucrada puede ser expandida en una serie de Taylor alrededor de cada punto de la malla a un orden de aproximación deseado. Por lo tanto, considerando la función f suave en cada x_i , el valor de la función para los vecinos más cercanos puede ser

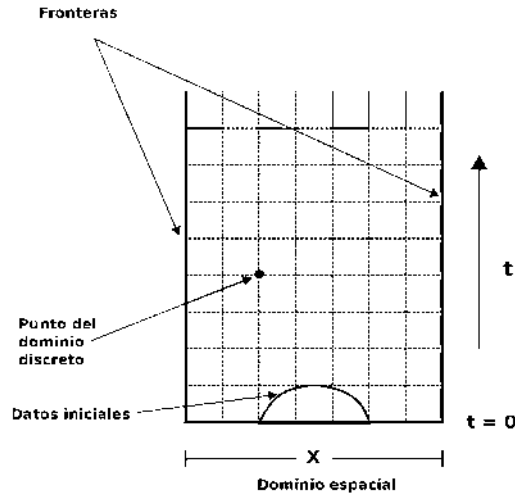


Figura A.1: Versión discreta del dominio que define una malla sobre la que quedan definidas las funciones involucradas en la EDP

calculado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 f(x_{j-1}) &= f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) - \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x_j) + O(\Delta x^4), \\
 f(x_j) &= f(x_j), \\
 f(x_{j+1}) &= f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x_j) + O(\Delta x^4),
 \end{aligned}$$

donde las primas denotan las derivadas respecto a x . Comenzando de estas aproximaciones es posible construir operadores diferenciales para las derivadas de $f(x_j)$. Por ejemplo, sumando la primera y la tercera expresión se obtiene una expresión para la primera derivada en el punto x_j con un error de segundo orden

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2\Delta x} + O(\Delta x^2);$$

notando que el valor de la función para los vecinos izquierdos y derechos más cercanos es necesario para calcular esta derivada, por ello es llamada diferencia finita centrada. Para obtener la segunda derivada de f , es suficiente escribir la combinación

$$f''(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

la cual implica que la expresión para la segunda derivada también tiene una aproximación de segundo orden. Como en el caso previo, esta también es una aproximación centrada.

Análogamente para la discretización temporal. En la posición de las fronteras espaciales, uno de los vecinos más cercanos se perdería (para el punto x_0 el punto de la izquierda x_{-1} no está definido, y para el punto x_N el punto de la derecha x_{N+1} no está definido), una aproximación centrada requeriría la adición de un punto extra (un punto fantasma) en el dominio; en muchos de los problemas es preferible dejar sin puntos fantasmas para el propósito de imponer condiciones de frontera. Por lo tanto, se consideran solamente los puntos a la derecha en el dominio espacial (en el caso de condiciones a la izquierda), o solamente puntos a la izquierda (en el caso de condiciones a la derecha). De esta forma se procede a escribir las aproximaciones de la función tomando en cuenta solamente puntos sobre la derecha o la izquierda:

$$f(x_j) = f(x_j), \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} f(x_{j+1}) &= f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3), \\ f(x_{j+2}) &= f(x_j) + 2\Delta x f'(x_j) + 2\Delta x^2 f''(x_j) + O(\Delta x^3) \\ f(x_j) &= f(x_j), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} f(x_{j-1}) &= f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3), \\ f(x_{j-2}) &= f(x_j) - 2\Delta x f'(x_j) + 2\Delta x^2 f''(x_j) + O(\Delta x^3). \end{aligned}$$

La combinación

$$f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 3f(x_j) = 2\Delta x f'(x_j) + O(\Delta x^3),$$

implica la expresión deseada para la primera derivada espacial de la función con segundo orden de aproximación. De esta forma se tiene que para la frontera izquierda

$$f'_0 = \frac{-f(x_2) + 4f(x_1) - 3f(x_0)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

y en el caso de la frontera derecha,

$$f'_N = \frac{f(x_{N-2}) - 4f(x_{N-1}) + 3f(x_N)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

A.0.4. La evolución

Para evolucionar en el tiempo la Ecuación de Gross-Pitaevskii se utiliza el Método de Líneas (MoL) por sus siglas en inglés, el cual consiste en lo siguiente. La evolución de datos consiste en el cálculo de una función f_j^{n+1} a partir de datos en los niveles de tiempo previos.

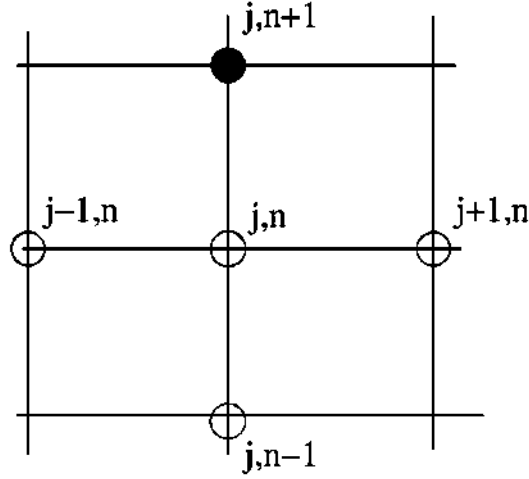


Figura A.2: Molécula correspondiente al algoritmo de evolución de Ec. (A.3) para la construcción de t^{n+1} a partir de datos de tiempos t^n y t^{n-1} .

Para ilustrarlo considérese la Ec. (3.34) escrita en la forma siguiente para $j = 1, \dots, N-1$:

$$(\partial_{\tilde{t}} \tilde{\psi})_j = \frac{i}{2} \left(\frac{\tilde{\psi}_{j+1} - 2\tilde{\psi}_j + \tilde{\psi}_{j-1}}{\Delta \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}_j} \frac{\tilde{\psi}_{j+1} - \tilde{\psi}_{j-1}}{2\Delta \tilde{r}} \right) - i\tilde{V}_j \tilde{\psi}_j - i\tilde{a} |\tilde{\psi}_j|^2 \tilde{\psi}_j. \quad (\text{A.3})$$

Esta versión de la ecuación se conoce como versión semidiscreta, es decir, que solamente la parte derecha aparece en forma discreta, denotada usualmente por $rhs(\tilde{\psi})$. Esto es, (A.3), es una ecuación ordinaria en \tilde{t} de $\tilde{\psi}$ para cada valor de j , o sea se tienen $N-1$ ecuaciones diferenciales ordinarias en \tilde{t} de $\tilde{\psi}$. Lo anterior indica que basta con un integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias para evolucionar datos de un tiempo al siguiente en cada valor de j . Este método de evolución es conocido como “método de líneas”(MoL) y se trata de una herramienta muy utilizada para la evolución en problemas de valores iniciales. La molécula usada para construir la solución al tiempo $n+1$ se muestra en la Fig. (A.2).

Como se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se elige un integrador en términos de la precisión deseada, la disipación que introduce en los cálculos y sus propiedades de estabilidad, lo que implica para nuestro caso en el valor del factor $\Delta t / \Delta r^2$ [Thomas 1995, Gustafsson 1996, Teukolsky 1992]. Para obtener los resultados de este trabajo se ha usado un algoritmo Runge-Kutta de tercer orden, según el cual, si una función f satisface una ecuación del tipo $\partial_t f = rhs(f) = S$, donde S es la *parte derecha* de la ecuación de evolución para f y que puede incluir funciones y derivadas de funciones conocidas en su versión discreta, el algoritmo para calcular f^{n+1} en términos de valores de funciones en

el tiempo previo se resume así:

$$\begin{aligned} f^* &= f^n + \Delta t S^n, \\ f^{**} &= \frac{3}{4}f^n + \frac{1}{4}f^* + \frac{\Delta t}{4}S^*, \\ f^{n+1} &= \frac{1}{3}f^n + \frac{2}{3}f^{**} + \frac{2}{3}\Delta t S^{**}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Este algoritmo es usado ampliamente porque requiere solamente de tres iteraciones de tiempo y es preciso y estable para valores suficientemente pequeños del factor $\Delta t/\Delta r^2$.

Para resolver la ecuación de Poisson (3.39) primero se reescribe en la siguiente forma

$$\frac{d^2}{d\tilde{r}^2}(\tilde{r}\tilde{V}) = \tilde{r}|\tilde{\psi}|^2, \quad (\text{A.5})$$

y entonces se aplicó el algoritmo de Numerov de sexto orden [Koonin & Meredith 1990], el cual se define como

$$(\tilde{r}\tilde{V})_{n+1} = 2(\tilde{r}\tilde{V})_n - (\tilde{r}\tilde{V})_{n-1} + \frac{h^2}{12}((\tilde{r}|\tilde{\psi}|^2)_{n+1} + 10(\tilde{r}|\tilde{\psi}|^2)_n + (\tilde{r}|\tilde{\psi}|^2)_{n-1}) + O(h^6). \quad (\text{A.6})$$

En donde $h = r_{n+1} - r_n$.

Tratamiento en el origen

Como se puede observar en la forma en la Ec. (3.38) aparece un término que va como $1/\tilde{r}$ y el cual diverge en $\tilde{r} = 0$. Por esta razón es necesario hacer un tratamiento especial para evitar dicha divergencia. Para resolver este problema se considera lo siguiente

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}^2} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{r}^2} = \frac{1}{2\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}}. \quad (\text{A.7})$$

Y de tal forma que $\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}} = 2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}^2}$, por ello la discretización de (A.3) resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{t}} = \frac{i}{2} \left(\frac{\tilde{\psi}_{i+1} - 2\tilde{\psi}_i + \tilde{\psi}_{i-1}}{\Delta \tilde{r}^2} + 4 \frac{\tilde{\psi}_{i+1} - \tilde{\psi}_{i-1}}{\tilde{r}_{i+1}^2 - \tilde{r}_{i-1}^2} \right) \\ - i\tilde{V}_i \tilde{\psi}_i - i\tilde{a}|\tilde{\psi}_i|^2 \tilde{\psi}_i, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

de esta forma se evita la divergencia en $\tilde{r} = 0$ en la evolución del sistema GPP. El caso de la ecuación de Poisson se evita la divergencia si se escribe como la Ec. (A.5) y cuando se aplicó el algoritmo de Numerov se evita la división entre cero, ya que el término $1/\tilde{r}$ se evalúa hasta 1 solamente.

A.0.5. Condiciones de frontera

A cada paso de tiempo, la ecuación de Poisson (A.5) se integró de afuera hacia dentro, usando el algoritmo de Numerov de sexto orden y aplicando la siguiente condición de frontera

$$\tilde{V}(\tilde{r}_{n-1}) = -\frac{\tilde{N}(\tilde{r}_{n-1})}{\tilde{r}_{n-1}}, \quad (\text{A.9})$$

$$\tilde{V}(\tilde{r}_n) = -\frac{\tilde{N}(\tilde{r}_n)}{\tilde{r}_n}, \quad (\text{A.10})$$

donde $\tilde{N} = \int |\tilde{\psi}|^2 d^3\tilde{r}$, es el número total de partículas sobre todo el volumen.

Se quieren evolucionar sistemas fuera del equilibrio y permitir el flujo de partículas fuera del dominio numérico, es por eso que se implementa una **esponja** sobre los puntos exteriores de la malla, la cual consiste en añadir un potencial imaginario $\tilde{V}_I(\tilde{r})$ a la ecuación de Schrödinger. La expresión que usamos para el perfil de la esponja es

$$\tilde{V}_I = -\frac{i}{2}\tilde{V}_a \left\{ 2 + \tanh\left[\frac{(\tilde{r}_j - r_c)}{\delta}\right] - \tanh\left(\frac{r_c}{\delta}\right) \right\}, \quad (\text{A.11})$$

la cual es una versión suave de una función escalón con amplitud \tilde{V}_a , centrada en r_c y ancho δ . El signo menos garantiza que la parte imaginaria del potencial tiene el efecto de un sumidero de partículas.

A.1. Convergencia

En esta sección se muestra una prueba de convergencia para el código implementado en esta tesis en el caso en que los datos iniciales son los de una configuración de equilibrio como la que se explicó en el capítulo 3. En la figura A.3 se presenta la prueba de convergencia para la densidad central con dos distintas resoluciones, también se muestra el virial para dos resoluciones distintas. Es importante mencionar que se utilizó la aproximación de segundo orden para los estenciles en las derivadas espaciales, y una aproximación de sexto orden para resolver la ecuación de Poisson, entonces en este trabajo se encontró una convergencia a segundo orden, es decir tiene el orden de convergencia de la aproximación de segundo orden. La figura A.3 muestra este hecho.

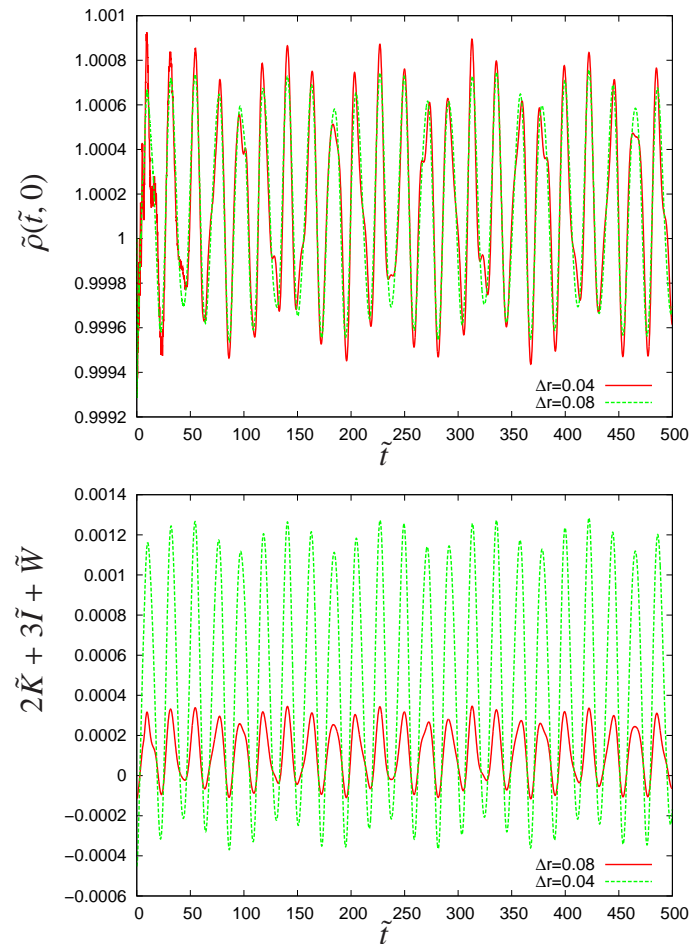


Figura A.3: Se muestra en unidades de código la evolución para sistemas de equilibrio con $\tilde{a} = 0$. En la figura de arriba se muestra el valor central $\tilde{\rho}(\tilde{t}, 0)$ para dos resoluciones $\Delta r = 0,04$ y $0,08$, con la frontera localizada en $\tilde{r} = 50$. La curva que corresponde a la resolución más alta ha sido escalada como $[\tilde{\rho}_{0,08} - 1]/4 + 1$, y de hecho estos valores ajustan con los encontrados para $\tilde{\rho}_{0,04}$, lo que indica convergencia a segundo orden. Entonces, las simulaciones se hacen en el regimen de convergencia de la discretización de segundo orden usada para los estenciles de las derivadas. En la figura de abajo se muestra la cantidad de virialización $2\tilde{K} + 3\tilde{I} + \tilde{W}$, la cual en el caso continuo debe ser cero. Se puede ver que sus valores son 4 veces menores si la resolución espacial es el doble. Esto indica claramente convergencia a cero de segundo orden para esta cantidad, lo cual a su vez significa que se puede recuperar lo que se espera en el límite continuo.

Bibliografía

- [Cyburt 2004] R.H. Cyburt Phys. Rev. D 70, 023505 (2004).
- [Klypin A. et al. 1999] Klypin A. et al., ApJ. **522**, 82 (1999).
- [Hinshaw 2009] G.Hinshaw et al.,Astrophys.J.Suppl.**180** (2009) 225.
- [Dundley 2009] J.Dunkley et al.,Astrophys.J.Suppl.**180** (2009) 306.
- [Komatsu 2011] E.Komatsu et al.,Astrophys.J.Suppl.**192** (2011) 18.
- [Pitaevskii et al. 1999] F. Dalfovo, S. Giorgino, L.P. Pitaevskii and S. Stringari Rev. Mod. Phys., **71**, 463 (1999).
- [Moore 1999] B.Moore et al.,Astrophys.J **524** (1999) L19.
- [Sanders 1984] R. H. Sanders, Astron. Astrophys.136 L21 (1984); R. H. Sanders, Astron. Astrophys.154,135 (1986).
- [Milgrom 1983] M. Milgrom, Astrophys. J.270, 365 (1983); J. Bekenstein and M. Milgrom, Astrophys. J.286, 7 (1984); M. Milgrom, New Astron. Rev.46, 741, (2002); M. Milgrom, Astrophys. J.
- [Matos & Ureña-López 2001] T. Matos and L. A. Ureña-Lopez, Phys. Rev. D 63, 063506 (2001).
- [Ade et al. 2013] Ade, P. A. R.; Aghanim, N.; Armitage-Caplan, C.; et al. (Planck Collaboration) (22 March 2013). "Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results – Table 9". Astronomy and Astrophysics (submitted).
- [Sin 1994] S. J. Sin, Phys. Rev. D 50, 3650 (1994).
- [Harko 2011] T. Harko, MNRAS, 2011a, 413, 3095.
- [Harko 2011] T. Harko, JCAP 1105:022,2011.
- [Guzmán & Ureña 2006] F.S. Guzmán and L. A. Ureña-López, ApJ. **645** (2006) 814-819.

- [Guzmán 2010] F.S. Guzmán, Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas, *Rev. Mex. de Física* 56 (1) 51-68.
- [Thomas 1995] J.W. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods* (Texts in Applied Mathematics 22, Springer 1995).
- [Gustafsson 1996] B. Gustafsson, H-O. Kreiss, and J. Olinger, *Time Dependent Problems and Difference Methods* (Wiley-Interscience, 1996).
- [Teukolsky 1992] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery J., *Numerical Recipes in Fortran* (Cambridge University Press, 1992).
- [Begeman et al. 1991] Begeman K.G. Broeils, R.H. Sanders, 1991, *MNRAS*, 1991, 249, 523.
- [Dubinski et al. 1991] J. Dubinski, R.G. Carlberg, 1991, *ApJ*, 378, 496.
- [Navarro et al. 1996] J.F. Navarro, C.S. Frenk, S.D.M White, 1996, *ApJ*, 462, 563.
- [Navarro et al. 1997] J.F. Navarro, C.S. Frenk, S.D.M. White, 1996, *ApJ*, 490, 493.
- [Gross 1958] E.P. Gross, *Ann of Phys* 4 (1958) 57. E.P. Gross, *Nuovo Cimento* 20 (1961) 195. L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* 13 (1959) 830. L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* 13 (1961) 451.
- [Pitaevskii 1959] L.P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* 9, 830 (1959); *ibid* 13, 451 (1961).
- [Matos & Robles 2012] Victor H. Robles, Tonatiuh Matos, *MNRAS*, 2012, 422, 282-289.
- [Ruffini & Bonazolla 1969] R. Ruffini and S. Bonazolla, *Phys. Rev.* **187** (1969) 1767.
- [Sin 1994] Sang-Jin Sin, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 3650. S.U. Ji and S.J. Sin, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 3655.
- [Guzmán & Ureña 2004] F. S. Guzmán and L. A. Ureña-López, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 124033.
- [Bernal & Guzmán 2006] A. Bernal and F. S. Guzmán, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 063504.
- [Bernal & Ureña 2010] L.A. Ureña-Lopez, A. Bernal, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 123535.
- [Böhmer & Harko 2007] T. Harko & C.G Böhmer, *JCAP* 0706:025, 2007.
- [Chavanis & Harko 2012] P.H. Chavanis, T. Harko, *Phys. Rev. D* 86, 064011 (2012).
- [Harko 2011] T. Harko, *JCAP* 1105:022, 2011.

- [Matos & Robles 2013] Victor H. Robles, T. Matos, 2013, ApJ, 763,19.
- [Harko & Madarassy 2012] T. Harko, E. J. M. Madarassy, JCAP 01 (2012) 020.
- [Chavanis 2011] P.H. Chavanis, Phys. Rev. D 84, 043531 (2011).
- [Binney & Tremaine 1987] J. Binney, S. Tremaine, Galactic Dynamics (Princeton,NJ: Princeton University Press, 1987).
- [Madelung 1927] E. Madelung, Zeit. F. Phys. **40**, 322 (1927).
- [Bohm 1952] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).
- [Pethick & Smith 2008] C.J. Pethick and H. Smith, Bose-Einstein condensation in dilute gases, Cambridge, Cambridge University Press, (2008).
- [Chandrasekhar 1957] S. Chandrasekhar, An Introduction to the study of stellar structure, New York, Dover Publications (1957).
- [Chavanis & Delfini 2011] P.H. Chavanis and L. Delfini, Phys. Rev. D 84, 043532 (2011).
- [Pitaevskii & Stringari 2003] L. Pitaevskii and S. Stringari, Bose-Einstein condensation, Clarendon Press, Oxford (2003); R.A. Duine and H. T. C. Stoof, Phys. Repts. **396**,115 (2004).
- [Koonin & Meredith 1990] Koonin, S, E.,& Meredith, D, C. 1990, Computational Physics (Reading:Addison-Wesley).
- [Guzmán et al. 2013] F.S.Guzmán, F.D. Lora-Clavijo, J.J. González-Avilés, F.J. Rivera-Paleo, Stability of BEC dark matter halos, submitted.
- [de Blok et al. 2001] de Blok W. J. G. et al., 2001, ApJ, 552, L23.