



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**RESPUESTA ÓPTICA DE CRISTALES FOTÓNICOS EN 2D CON
SUPERFICIES RUGOSAS QUE CONTIENEN METAMATERIAL
DISPERSIVO**

TESIS

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

PRESENTA:

LUIS EDUARDO PUENTE DÍAZ

DIRECTOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica
HÉCTOR I. PÉREZ AGUILAR

Morelia, Michoacán, Agosto de 2017

RESUMEN

En el presente trabajo se ha mostrado un estudio teórico y numérico de las estructuras de bandas de un Cristal Fotónico bidimensional (CF2D) infinito y la respuesta electromagnética de un CF2D finito con superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contienen medios de metamaterial (LHM) y/o dieléctrico. El trabajo está motivado en gran parte por la necesidad de una nueva alternativa de desarrollo en la tecnología de telecomunicaciones que sea puramente fotónico. Se aplicó una técnica numérica, conocida como el “Método de la ecuación integral”, para calcular las estructuras de bandas de un CF2D infinito y la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y de la transmitancia, como función del ángulo de incidencia de un CF2D finito formado por una celda unitaria cuadrada con inclusiones circulares de superficies lisas o aleatoriamente rugosas, que contiene medios de LHM y/o dieléctrico. Los cálculos fueron realizados variando las fracciones de llenado para las polarizaciones del campo eléctrico transversal (TE) y del campo magnético transversal (TM).

Los resultados obtenidos para las estructuras de bandas muestran que el efecto de la rugosidad aleatoria sobre la superficie de la inclusión circular lisa no presentan cambios notables en las estructuras de bandas para el CF2D infinito compuesto por medios dieléctricos, mientras que para medios de LHM se muestra que la rugosidad aleatoria modifica considerablemente las estructuras de bandas; en particular, genera nuevas bandas prohibidas, lo cual es importante tomar en cuenta en la fabricación de Cristales Fotónicos que contengan LHMs dispersivos. Debido al elevado tiempo de cómputo requerido para obtener las estructuras de bandas para la inclusión circular que tiene una superficie aleatoriamente rugosa con medios de LHM, se tuvo la necesidad de utilizar la computación en paralelo bajo el protocolo de MPI (Message Passing Interface) y CUDA (Computer Unified Device Architecture). Los resultados muestran que al usar la paralelización con MPI el tiempo de cómputo es menor que cuando se usa la paralelización con CUDA, el cual es un resultado importante a considerar para el caso de los CF2Ds finitos.

Referente al cálculo de la respuesta óptica de los sistemas finitos se muestra que al iluminar dichos sistemas utilizando un haz Gaussiano, se obtienen mejores resultados numéricos en comparación a una onda plana. Por otro lado para los CF2Ds finitos con superficies lisas y aleatoriamente rugosas compuestos por medios de dieléctrico o LHM, se muestra que la rugosidad aleatoria sobre las superficies de las inclusiones circulares afecta considerablemente sus propiedades reflectivas y transmitivas.

Palabras Clave: Cristales fotónicos, metamaterial dispersivo, estructuras de bandas fotónicas, respuesta óptica, método de la ecuación integral, superficies aleatoriamente rugosas.

ABSTRACT

In the present work we have shown a theoretical and numerical study of the band structures of an infinite two-dimensional Photonic Crystal (CF2D) and the electromagnetic response of a finite CF2D with smooth and randomly rough surfaces containing metamaterial (LHM) or dielectric media. The work is motivated largely by the need for a new alternative development in telecommunications technology that is purely photonic. We applied a numerical technique known as “Integral Equation Method” to calculate the band structures of an infinite CF2D and the optical response by calculating reflectance and transmittance as a function of the angle of incidence of a finite CF2D formed by a square unit cell with circular inclusions of smooth or randomly rough surfaces, containing LHM or dielectric media. The calculations were performed by varying the filling fractions for the transverse electric field polarizations (TE) and transverse magnetic field (TM).

The results obtained for the band structures show that the effect of the random roughness on the surface of the smooth circular inclusion does not show any notable changes in the band structures for the infinite CF2D composed by dielectric media, while for LHM media it is shown that the random roughness considerably modifies the band structures; in particular, it generates new bandgaps, which is important to consider in the manufacture of Photonic Crystals containing dispersive LHMs. Due to the high computation time required to obtain the band structures for the circular inclusion that has a randomly rough surface with LHM media, it was necessary to use parallel computing under the MPI protocol (Message Passing Interface) and CUDA (Computer Unified Device Architecture). The results show that by using the parallelization with MPI the performance is faster than when using the parallelization with CUDA, which is an important result to be considered in the case of finite CF2Ds.

Concerning the calculation of the optical response of finite systems shows that when illuminating such systems using a Gaussian beam, best numerical results are obtained compared to a plane wave. Furthermore for finite CF2Ds with smooth and randomly rough surfaces composed of dielectric or LHM media, it is shown that the random roughness on the surfaces of the circular inclusions considerably affects their reflective and transmissive properties.

Keywords: photonic crystals, dispersive metamaterial, photonic band structures, optical response, integral equation method, randomly rough surfaces.

Dedicatorias

Mi dedicación especial en el presente trabajo de tesis está dirigida a mis padres Ofelia Díaz Pérez y Alfredo Puente Medina, por haberme dado el regalo de la vida, educarme y apoyarme en los momentos y circunstancias difíciles de mi vida.

También dedico este trabajo a mis tíos: Alicia Díaz Pérez, José Díaz Pérez y M. Ernesto Soria Marín por todo el apoyo y consejos brindados en el trascurso de mi formación.

Fraternalmente:

Luis Eduardo Puente Díaz

Agradecimientos

El presente trabajo fue posible llevarlo a cabo gracias a su arduo apoyo y a su incansable paciencia del Dr. Héctor Pérez Aguilar, quien con sus conocimientos, experiencia, correcciones y aportaciones dedicadas a la realización de esta tesis se llegó hasta la meta; es por ello, que le doy mi más sincero agradecimiento.

Agradezco el apoyo otorgado por CONACyT mediante una beca de estudios de maestría.

Agradezco en forma especial a los integrantes de mi comité, quienes me hicieron las correcciones y observaciones de mi trabajo de tesis, me refiero a la Dra. Mary Carmen y Monserrat Peña Gomar, a la Dra. Yesenia Arredondo León, al M.C. Gabriel Arroyo y al Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova quienes cordialmente aceptaron colaborar para la revisión de dicho trabajo y llegar hasta su objetivo final.

También agradezco a todos y cada uno de los catedráticos en el transcurso de la maestría, quienes pusieron su mejor empeño para que un servidor tuviera los conocimientos necesarios de cada materia que ellos impartían.

De igual forma deseo agradecer con mucho afecto y especial cariño a mi familia, padres, hermana, tíos y demás familiares quienes me dieron una palabra de aliento y me motivaron a seguir con mucho empeño en mis estudios. Para ellos, de corazón mi eterno agradecimiento.

Sinceramente:

Luis Eduardo Puente Díaz

Contenido

	Página
Resumen	i
Abstract	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1. Estructura de la tesis	8
II. CRISTALES FOTÓNICOS Y METAMATERIALES	11
II.1. Cristales Fotónicos	11
II.2. Breve historia de los Metamateriales	14
II.3. Propiedades de los Metamateriales	19
II.3.1. Respuesta eléctrica	24
II.3.2. Respuesta magnética	31
II.4. Aplicaciones de los Metamateriales	35
III. MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL	43
III.1. Descripción del método de la ecuación integral	43
III.1.1. CF2D infinito	44
III.1.2. CF2D finito	56
III.1.3. El campo y la potencia incidente (Onda plana)	61
III.1.4. El campo y la potencia esparcida (Onda plana)	67
III.1.5. El campo incidente (Onda Gaussiana)	69
III.1.6. La Potencia Incidente (Onda Gaussiana)	71
III.1.7. El campo y la potencia esparcida (Onda Gaussiana)	73
III.2. Verificación del Método Integral	74
III.2.1. Respuesta óptica para un sistema finito de una interfaz	75
III.2.2. Respuesta óptica para un sistema finito de dos interfaces	76
IV. RESULTADOS	79
IV.1. Estructuras de bandas de un CF2D infinito	80
IV.1.1. Medios dieléctricos	80
IV.1.2. Medios de LHM	85

Contenido (continuación)

	Página
IV.2. Respuesta óptica de sistemas finitos	91
IV.2.1. Medios dieléctricos	92
IV.2.2. Medios de LHM	105
V. CONCLUSIONES	113
REFERENCIAS	118

Lista de Figuras

Figura	Página	
1	Ejemplos de una estructura fotónica unidimensional (a), bidimensional (b) y tridimensional (c). En 1D se alternan láminas de alto y bajo índice de refracción. En 2D se muestra una estructura cuadrada de cilindros situados en un medio de distinto índice de refracción. En el ejemplo en 3D, la modulación del índice de refracción surge de ordenar las esferas en una estructura simple cúbica en un medio diferente.	4
2	Detalles que distingue una onda dependiendo de su longitud de onda. Si la estructura es mucho más pequeña que la longitud de onda, el medio se puede aproximar como continuo.	5
3	Estructuras cristalinas fotónicas en 1D, 2D y 3D con su correspondiente zona de Brillouin.	13
4	La Copa Lycurgus se ve (a) en luz reflejada y (b) en luz transmitida. Una nanopartícula metálica utilizada en el metamaterial se muestra en (c).	15
5	(a) Primera observación de un NIM a frecuencias de microondas (curva punteada). La curva sólida representa la transmisión del SRR. (b) Diagrama del NIM el cual consiste en resonadores de anillos divididos, creados en una placa de circuito, y postes metálicos. La constante de red del sistema es de $a = 8.0$ mm.	16
6	(a) Ejemplo de un sólo cuadrado resonador de anillo de división y celda unitaria de un LHM. (b) Ejemplo de una lente de LHM. Cortesía del Centro de Investigación Glenn de la NASA. (c) LHM en forma de cuña diseñado para tener un índice de refracción negativo. (d) Potencia detectada como una función del ángulo para una cuña de Teflón (curva azul) y una cuña de LHM (curva roja).	18
7	En un medio con (a) $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) > 0$, los vectores \mathbf{k} y \mathbf{S} van en la misma dirección y con (b) $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) < 0$, van en direcciones opuestas; es decir, los vectores \mathbf{k} y \mathbf{S} son antiparalelos dentro del medio con índice de refracción negativo.	23
8	En los LHMs el flujo de energía y la velocidad de grupo se propagan hacia delante pero la velocidad de fase se propaga hacia atrás.	24

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
9	Metamaterial compuesto de tubos de metal con el que es posible obtener una respuesta eléctrica negativa.	30
10	Un resonador de anillo cortado es como un circuito LC.	32
11	a) SRR doble, b) meta-átomo compuesto por un tubo metálico y un SSR doble.	33
12	Lente hecha por Duke University en 2009. Fuente: http://pratt.duke.edu/news/next-generation-lens-promises-more-control	35
13	Imagen del LHM holey-estructurado.	36
14	(a) Una representación en 3-D de un satélite de comunicación compuesto de LHMs. (b) Revestimiento de LHM para el satélite de comunicación. Fuente: http://news.psu.edu/story/161153/2011/01/30/metamaterials-approach-makes-better-satellite-antennas	37
15	Antena de LHM para uso de teléfonos celulares. Fuente: http://wikivisually.com/wiki/Metamaterial_antenna	38
16	Arreglo de un SRRs compuesto de impresiones de plata sobre una extensión de polímero.	38
17	(a) Diagrama de una celda unitaria del absorbedor de LHM de TiN de tres capas con dimensiones de $a = 250$ nm, $w = 50$ nm, $p = 300$ nm, $h_1 = 30$ nm, $h_2 = 60$ nm y $h_3 = 150$ nm . (b) Imagen del absorbedor fabricado de TiN.	39
18	Capa de invisibilidad ultrafina formada por nanoantenas de oro (bloques de oro) que cubre un objeto. La luz se refleja en la capa (flechas rojas) como si estuviera reflejándose en un espejo plano.	41
19	(a) Diagrama de un cristal fotónico bidimensional infinito. La celda unitaria cuadrada de longitud D está compuesta de dos materiales diferentes con índices de refracción $n_1(\omega)$ y $n_2(\omega)$, respectivamente. (b) CF2D finito correspondiente.	45
20	Celda unitaria de un CF2D compuesto de dos materiales diferentes con índices de refracción $n_1(\omega)$ y $n_2(\omega)$ en una celda cuadrada con una inclusión de forma arbitraria, con su vector normal $\hat{\mathbf{n}}'$ perpendicular al contorno Γ_j correspondiente.	50

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
21	Celda unitaria de un CF2D con una red cuadrada y una inclusión de forma arbitraria compuesta por dos materiales diferentes con índices de refracción $n_1(\omega)$ y $n_2(\omega)$, respectivamente. Los medios están limitados por los contornos $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c, \Gamma_d$ y Γ_e , cuyos vectores normales van hacia afuera de la región 1.	51
22	Diagrama de un CF2D finito. Los contornos de integración se indican por las curvas discontinuas. R_0 y R_q representan las regiones que encierran los medios de incidencia y de transmisión, respectivamente.	57
23	Diagrama de un sistema finito formado por una interfaz entre dos medios. Los contornos de integración se indican por las curvas discontinuas. R_0 y R_1 representan las regiones que encierran los medios de incidencia y de transmisión, respectivamente.	58
24	Diagrama de un sistema finito formado por dos interfaces entre tres medios. Los contornos de integración se indican por las curvas discontinuas. R_0, R_1 , y R_2 representan las regiones que encierran el medio de incidencia, el medio entre las interfaces y el medio de transmisión, respectivamente.	59
25	Diagrama de un sistema finito formado por dos interfaces y una inclusión de geometría arbitraria. Los contornos de integración se indican por las curvas discontinuas. R_0, R_1, R_2 y R_3 representan las regiones que encierran el medio de incidencia, el medio entre las interfaces, el medio que contiene la inclusión y el medio de transmisión, respectivamente.	60
26	Campo incidente $\Psi^{(inc)}$ con ángulo de incidencia θ_1 y campo esparcido $\Psi^{(1)}$ para θ_s , en la región R_1 . En la región R_2 , $\Psi^{(2)}$ con ángulo de esparcimiento θ_s (casos de reflexión y transmisión, respectivamente).	62
27	Diagrama de un CF2D finito con inclusiones circulares. El haz incidente sobre el sistema es un haz gaussiano con un semi-ancho g , mientras que la distancia de separación entre las interfaces es d . Los ángulos θ_1 y θ_s corresponden a los ángulos de incidencia y esparcimiento (para reflexión y transmisión), respectivamente. R_0 y R_q corresponden a las regiones que contienen a los medios de incidencia y de transmisión, mientras que R_1 y $R_2 - R_{q-1}$ representan la región que contiene a las inclusiones y la región correspondiente a cada inclusión.	70

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
28	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para una interfaz entre (a) aire y vidrio ($n_0 = 1$ y $n_1 = 1.50$, respectivamente) y, (c) aire y silicio ($n_0 = 1$ y $n_1 = 3.681$) para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo analítico vs. numérico. En (b) y (d), se muestran el balance de energía correspondiente a cada sistema particular.	75
29	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces compuesto por (a) aire, vidrio y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 1.50$ y $n_2 = 1$, respectivamente) y (c) aire, silicio y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 3.681$ y $n_2 = 1$) para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico y analítico. En (b) y (d) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.	77
30	Estructuras de bandas para un CF2D infinito con inclusión circular para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$, con una fracción de llenado de ((a) y (b)) $f = 0.05$, ((c) y (d)) $f = 0.12$ y ((e) y (f)) $f = 0.50$ para las polarizaciones TE y TM. El recuadro izquierdo representa la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k . . .	81
31	Estructuras de bandas para un CF2D infinito con inclusión circular con una superficie aleatoriamente rugosa ($a = 0.05236$ y $\delta = 0.02$) para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$, con una fracción de llenado de ((a) y (b)) $f = 0.05$, ((c) y (d)) $f = 0.12$ y ((e) y (f)) $f = 0.50$ para las polarizaciones TE y TM. El recuadro izquierdo representa la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k . . .	83
32	Permitividad eléctrica y permeabilidad magnética de un LHM dispersivo, como función de la frecuencia reducida.	86
33	Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada con inclusión circular compuesta por dos medios: vacío ($\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$) y LHM dispersivo ($\varepsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$), con $\omega_p = 1.592$, $\omega_0 = 0.637$ y $F = 0.56$. Polarizaciones TM y TE con las fracciones de llenado ((a) y (c)) $f = 0.50$, ((b), (d)) $f = 0.68$, respectivamente. El recuadro izquierdo representa la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k	88

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
34	Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada que tiene una inclusión circular con una superficie aleatoriamente rugosa ($a = 0.05236$ y $\delta = 0.02$), compuesta por dos medios: vacío ($\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$) y LHM dispersivo ($\varepsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$), con $\omega_p = 1.592$, $\omega_0 = 0.637$ y $F = 0.56$. Polarizaciones TM y TE con las fracciones de llenado ((a) y (c)) $f = 0.50$, ((b), (d)) $f = 0.68$, respectivamente. El recuadro izquierdo representa la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k . . .	90
35	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie lisa, compuesto por (a) aire, vidrio, aire y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$, respectivamente) y (c) aire, silicio, aire y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 3.681$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$, respectivamente) para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico. (b) y (d) muestran el balance de energía correspondiente a cada sistema.	93
36	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa ($a = 0.01745$ y $\delta = 0.01$), compuesto por (a) aire, vidrio, aire y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$, respectivamente) y (c) aire, silicio, aire y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 3.681$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$, respectivamente) para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico. (b) y (d) muestran el balance de energía correspondiente a cada sistema.	95
37	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies lisas con una fracción de llenado de (a) $f = 0.05$, (c) $f = 0.12$ y (e) $f = 0.50$ para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico. El medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 3.681$ (silicio). En (b), (d) y (f) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.	96

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
38	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies lisas con una fracción de llenado de (a) $f = 0.05$, (c) $f = 0.12$ y (e) $f = 0.50$ para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico. El medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 3.681$ (silicio). En (b), (d) y (f) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.	99
39	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies lisas con una fracción de llenado de $f = 0.05$ para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. El medio de incidencia, el medio que contiene a las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contienen las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 2.9833$. En (b) y (d) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.	101
40	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies aleatoriamente rugosas ($a = 0.01745$ y $\delta = 0.01$) con una fracción de llenado de (a) $f = 0.05$, (c) $f = 0.12$ y (e) $f = 0.50$ para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico. El medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 3.681$ (silicio). En (b), (d) y (f) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.	102
41	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies aleatoriamente rugosas ($a = 0.01745$ y $\delta = 0.01$) con una fracción de llenado de $f = 0.05$ para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. El medio de incidencia, el medio que contiene a las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contienen las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 2.9833$. En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.	104

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
42	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces compuesto por aire, LHM y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = -7.9786$ y $n_2 = 1$, respectivamente) para las polarizaciones (a) TE y (b) TM, mediante cálculo numérico. En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.	106
43	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie lisa compuesto por: aire, aire, LHM y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = -7.9786$ y $n_3 = 1$, respectivamente) para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema particular.	107
44	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa ($a = 0.01745$ y $\delta = 0.01$) compuesto por: aire, aire, LHM y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = -7.9786$ y $n_3 = 1$, respectivamente) para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema particular.	108
45	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con superficies lisas para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. El medio de incidencia, el medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = -7.9786$ (LHM). En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.	109
46	Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con superficies aleatoriamente rugosas ($a = 0.01745$ y $\delta = 0.01$) para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. El medio de incidencia, el medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión, tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (i.e. aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = -7.9786$ (LHM). En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.	111

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

Muchos de los avances en la tecnología han resultado de una comprensión más profunda de las propiedades de los materiales. Hoy en día, se cuenta con una colección de materiales totalmente artificiales con una gama de propiedades mecánicas, gracias a los avances en metalurgia, cerámica y plásticos.

En la actualidad, el control sobre los materiales se ha extendido para aprovechar sus propiedades eléctricas. Los avances en la física de los semiconductores ha permitido adaptar las propiedades de conducción de ciertos materiales, iniciando así la revolución del transistor en la electrónica. Con las nuevas aleaciones y la cerámica, los científicos han inventado los superconductores de alta temperatura y otros materiales exóticos que pueden formar la base de tecnologías futuras.

En las dos últimas décadas, los investigadores han estado trabajando en poder controlar las propiedades ópticas de los materiales, dado que una alta gama de desarrollos tecnológicos sería posible si se pudieran diseñar materiales que respondan a las ondas de luz sobre un rango deseado de frecuencias: reflejándolas perfectamente, permitiendo que se propaguen sólo en ciertas direcciones o confinándolas dentro de un volumen específico.

En la actualidad, los cables de fibra óptica que simplemente guían la luz han revolucionado la industria de las telecomunicaciones. La ingeniería láser, la computación de alta velocidad y la espectroscopía son sólo algunos de los campos próximos en línea para aprovechar los beneficios de los avances en materiales ópticos.

Así pues, se está interesado en saber que clase de materiales nos permiten controlar la propagación de las señales ópticas. Para ver esto, es conveniente repasar ciertos detalles sobre aquellos materiales cuyas propiedades eléctricas, como ya se ha comentado puedan ser controladas, como son los cristales. Un cristal es una disposición periódica de átomos o moléculas; es decir, un cristal se forma cuando un elemento básico de la estructura se repite en el espacio ordenado y periódicamente. A causa de esta ordenación, un cristal presenta un potencial periódico para la propagación de electrones a través del mismo, y es precisamente esta geometría periódica la que determina la mayor parte de las propiedades conductivas del material.

El equivalente óptico del cristal semiconductor es el cristal fotónico (CF) (Joannopoulos *et al.*, 2008), en el cual los átomos o moléculas son reemplazados por medios macroscópicos con diferentes constantes dieléctricas, y el potencial periódico es reemplazado por una función dieléctrica periódica (o equivalentemente, un índice periódico de refracción). Si las constantes dieléctricas de los materiales en el cristal son suficientemente diferentes, y si la absorción de luz por los materiales es mínima, entonces las refracciones y reflexiones de la luz de todas las diversas interfaces pueden producir muchas de esas mismas propiedades (para la propagación de los fotones) que los cristales semiconductores determinan para la propagación de los electrones.

Actualmente, las guías de ondas metálicas y cavidades se usan ampliamente para controlar la propagación de ondas electromagnéticas en el rango de las microondas. Las paredes de una cavidad metálica prohíben la propagación de ondas electromagnéticas con frecuencias por debajo de una determinada frecuencia umbral, y una guía de ondas

metálica permite la propagación sólo a lo largo de su eje. Sería extremadamente útil tener estas mismas capacidades para ondas electromagnéticas con frecuencias fuera del régimen de microondas, como la luz visible. Sin embargo, la energía luminosa visible se disipa rápidamente dentro de componentes metálicos, lo que hace imposible generalizar este método de control óptico. Por esta razón, surgen los cristales fotónicos que permiten que las propiedades útiles de cavidades y guías de ondas sean generalizadas y escaladas para abarcar una amplia gama de frecuencias.

De este modo, una solución para el diseño de materiales con nuevas e inusuales propiedades ópticas es el CF, el cual es un material de constante dieléctrica variable, periódica y ordenada, de bajas pérdidas por absorción, y que permite introducir bandgaps (energía o frecuencia en la que la propagación de la luz está prohibida dentro del CF) en determinadas zonas del espectro de frecuencias. Cuando la radiación electromagnética incide sobre la superficie del CF o es emitida desde su interior, la interferencia entre las distintas ondas reflejadas en cada interfaz entre los medios de constante dieléctrica variable, da lugar a que ciertos rangos de frecuencias no puedan transmitirse en el cristal. Dicho de otro modo, para esas energías no hay estados disponibles en el interior del material y son, por lo tanto, prohibidas. El valor de las constantes dieléctricas y el periodo espacial de su variación del CF determinan la posición y anchura de las bandas prohibidas. Por ejemplo, modulaciones periódicas en distancias del orden del milímetro o del micrómetro darán lugar a bandas prohibidas en el rango de las microondas o el infrarrojo, respectivamente.

Por esta razón, los cristales fotónicos (CFs) que constituyen arreglos periódicos de diferentes materiales en una, dos y tres dimensiones con celdas unitarias, cuyas magnitudes son del orden de la longitud de onda de la luz (ver Fig. 1), han sido el objeto de investigación en los últimos años debido a su potencial para desarrollar circuitos integrados completamente ópticos (Teo *et al.*, 2006).

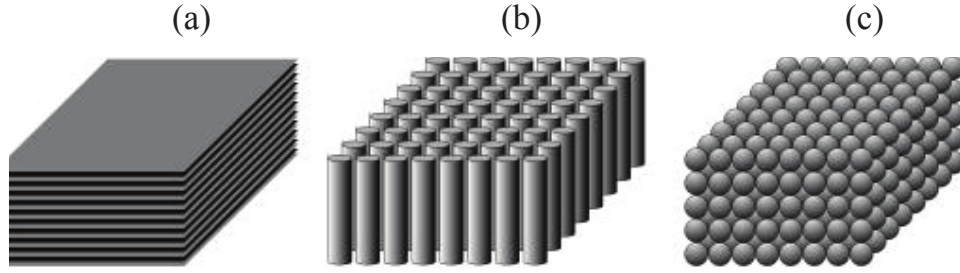


Figura 1. Ejemplos de una estructura fotónica unidimensional (a), bidimensional (b) y tridimensional (c). En 1D se alternan láminas de alto y bajo índice de refracción. En 2D se muestra una estructura cuadrada de cilindros situados en un medio de distinto índice de refracción. En el ejemplo en 3D, la modulación del índice de refracción surge de ordenar las esferas en una estructura simple cúbica en un medio diferente.

En los últimos años, se ha demostrado que la adición de nuevos materiales para la estructura de los CFs ha dado nuevas propiedades en estos sistemas que fueron originalmente concebidos como la composición de materiales puramente dieléctricos. Algunas de las propiedades muy interesantes presentes en estos sistemas son el confinamiento de la luz (Megens *et al.*, 1999), guías de ondas (Li *et al.*, 2006), la refracción negativa (Yuntuan *et al.*, 2006) y la conmutación de la señal mediante la inclusión de defectos de materiales no lineales (Soljagic *et al.*, 2005).

Otros tipos de estructuras de materiales que han atraído mucho interés recientemente son los “Metamateriales” o “Materiales Izquierdos” (LHMs¹) (Veselago, 1968), que deben su nombre al hecho de que los vectores de luz \mathbf{E} , \mathbf{H} y \mathbf{k} forman una tríada de vectores ortogonales con una orientación izquierda para una onda que se propaga a través de estos medios.

Estos materiales artificiales tienen un índice de refracción negativo dentro de un rango dado del espectro electromagnético. Cabe mencionar que estos materiales no existen en la naturaleza; sin embargo, se pueden construir cumpliendo las propiedades previamente mencionadas. Algunos de los fenómenos ópticos bien conocidos presentan

¹Por sus siglas en inglés, Left-Handed Metamaterials.

variaciones que los hacen potencialmente útiles para nuevas aplicaciones tecnológicas, como por ejemplo la refracción negativa, la invisibilidad y la transmisión de información (Cui *et al.*, 2010).

Los LHMs son materiales fabricados artificialmente y, en principio, pueden ser diseñados para tener casi cualquier propiedad óptica que deseemos. Para que esto funcione se necesita que la unidad de estructura sea mucho más pequeña que el tamaño de la onda (la longitud de onda) de modo que, al propagarse, la luz no distinga los detalles de la estructura y “vea” un medio continuo (ver Fig. 2). En este caso, la estructura forma un medio efectivo que se puede describir como un material ordinario.

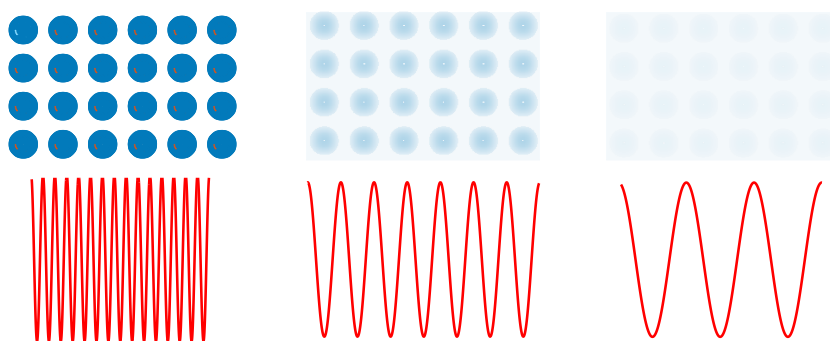


Figura 2. Detalles que distingue una onda dependiendo de su longitud de onda. Si la estructura es mucho más pequeña que la longitud de onda, el medio se puede aproximar como continuo.

Como se ha comentado anteriormente, la unidad de estructura máxima de un LHM tiene que ser menor que la longitud de onda incidente. Esto implica procesos de fabricación con una resolución de varios órdenes de magnitud por debajo de la longitud de onda a la que se espera trabajar, lo que en la actualidad presenta enormes dificultades, sobre todo en las frecuencias ópticas. Por lo tanto, para poder fabricar LHM que trabajen en el espectro visible y el infrarrojo, es necesario que sus componentes básicos tengan tamaños del orden de nanómetros a varias micras, y es imprescindible disponer de los medios y técnicas necesarias. Así pues, a pesar de que esta nueva tecnología

ha tenido un gran desarrollo, los LHMs siguen enfrentando muchos retos y probablemente pasen todavía muchos años antes de que podamos apreciar su verdadero impacto tecnológico.

La disciplina de los LHMs empezó a desarrollarse en los años noventa, pero el interés en esta nueva tecnología se disparó en el año 2000, cuando un LHM con índice de refracción negativo —una propiedad óptica que no se encuentra en la naturaleza— fue propuesto y construido por un grupo encabezado por David R. Smith (Smith *et al.*, 2000) en la Universidad de California en San Diego. Detrás de esta propuesta también estaba el propio J. B. Pendry cuyas contribuciones habían sido fundamentales para establecer las bases teóricas detrás del diseño de los LHMs (Pendry *et al.*, 1996, 1998, 1999).

Smith y Pendry, en colaboración con David Schuring, construyeron posteriormente (2006) la primera capa de invisibilidad para microondas (Smith *et al.*, 2006), confirmando que, en principio, construir una capa de invisibilidad era posible. Estos primeros diseños “perfectos”, resultan extremadamente difíciles de construir (la capa construida en 2006 era solamente un prototipo aproximado). En 2008, J. Li y J. B. Pendry propusieron un medio más simple que podría funcionar en circunstancias más restrictivas para los detalles de este diseño (Li y Pendry, 2008). En 2009, a partir de este diseño, se realizaron dos experimentos (en la Universidad Cornell y en la Universidad de California en Berkeley) en los que se construyeron capas de invisibilidad para el infrarrojo cercano (Gabrielli *et al.*, 2009; Valentine *et al.*, 2009), y, posteriormente (Berkeley, 2011), para luz visible (Gharghi *et al.*, 2011).

A pesar de estos grandes avances, una capa de invisibilidad como las que se ven comúnmente en producciones de Hollywood está probablemente todavía muy lejana. Para poder abordar estas líneas de investigación novedosas que tienen trascendencia en el medio internacional, se requiere dominar no sólo los aspectos teóricos sino también

el modelaje.

Por ende, el estudio de la propagación de la luz en CFs se basa en métodos numéricos que se aplicaron primero en física del estado sólido para el estudio de estructuras de bandas electrónicas. El más citado puede ser el método de ondas planas (Archuleta-García *et al.*, 2007) que permite calcular las estructuras de bandas fotónicas que implican materiales sin dispersión y absorción. Una desventaja de este método es cuando los bordes afilados están presentes en las inclusiones de la celda unitaria y, la expansión de la función dieléctrica en términos de una serie de Fourier truncada, presenta problemas de convergencia aumentando los requisitos de memoria. Además de un alto contraste entre las propiedades de los materiales que componen, también el método produce cierta inestabilidad en las soluciones.

Bajo este contexto, el método integral que se está considerando en este trabajo (Mendoza-Suárez *et al.*, 2007), presenta algunas ventajas en comparación con el método de ondas planas y otros métodos, ya que tiene la capacidad de estudiar diferentes aspectos de CF2Ds que involucran geometrías complicadas (superficies aleatoriamente rugosas) y propiedades físicas muy novedosas, como las correspondientes de los LHMs dispersivos.

En la actualidad, gracias a los métodos numéricos es posible modelar ciertos problemas en pocos minutos. Sin embargo, problemas reales y más complejos donde su ejecución requiere muchas horas de cálculo e incluso varios días, por lo que es necesario buscar nuevas alternativas basadas en multiprocesamiento, que pueda procesar grandes volúmenes de datos en forma simultánea. Una solución alternativa es la programación en paralelo, que consiste en la posibilidad de dividir un determinado problema en partes que puedan resolverse de forma independiente.

El interés de este trabajo tiene como finalidad hacer un estudio teórico y numérico de las estructuras de bandas y de la respuesta electromagnética de un CF2D finito con

superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contienen medios de LHM y/o dieléctrico en una celda unitaria cuadrada mediante la aplicación de un método numérico conocido como el Método de la Ecuación Integral basado en la segunda identidad de Green para resolver la ecuación de Helmholtz.

Para obtener dichas estructuras de bandas del sistema propuesto, se requiere elevado tiempo computacional, por lo cual, se ha tenido la necesidad de utilizar la computación en paralelo con las librerías MPI FORTRAN (Message Passing Interface) (Pérez-Hernández, 2015; Lozano-Trejo, 2017) y CUDA FORTRAN (Computer Unified Device Architecture) (Sánchez-López, 2016; Lozano-Trejo, 2017), sobre los procesadores de la CPU y la tarjeta gráfica GPU respectivamente, para reducir el tiempo de cálculo mejorando el rendimiento de cómputo.

I.1. Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis está desarrollado de la siguiente manera:

En el capítulo II se habla sobre las propiedades de los CFs y se da una definición general de los LHMs. También se mencionan características de estos materiales artificiales. Se muestran las funciones que dan las propiedades ópticas de los LHMs como son las funciones de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, las cuales son usadas para modelar numéricamente el comportamiento de estos materiales. Por último, se mencionan algunas aplicaciones.

En el capítulo III se da una descripción del método numérico, conocido como el Método de la Ecuación Integral (Mendoza-Suárez *et al.*, 2007), que se utiliza para obtener las estructuras de bandas de un CF2D infinito y la respuesta electromagnética de un CF2D finito con superficies lisas o aleatoriamente rugosas que contienen medios de LHM y/o dieléctrico en una celda unitaria cuadrada.

Dicha metodología parte del segundo teorema integral de Green, donde se obtiene un par de ecuaciones integrales con las cuales se pueden determinar las estructuras de bandas en términos de un par de funciones fuente. Dichas funciones fuente están definidas por el campo magnético y su derivada normal, para el caso de la polarización TM, y por el campo eléctrico y su derivada normal, para la polarización TE, evaluados en la superficie de la celda cuadrada con una inclusión que tiene superficies aleatoriamente rugosas. El método integral también es adecuado para el cálculo de la distribución del campo electromagnético en la región de campo lejano para un CF2D finito truncado, por lo que este método nos permitirá estudiar la respuesta óptica del CF2D finito. Con la finalidad de verificar el funcionamiento del método integral en sistemas finitos se analizará primero los sistemas compuestos por una interfaz simple entre dos medios dieléctricos y dos interfaces entre tres medios dieléctricos donde el tercer medio se va a considerar como el primer medio. Se compararán los resultados numéricos obtenidos con los resultados analíticos correspondientes (haciendo uso de las ecuaciones de Fresnel).

En el capítulo IV se aplica el método descrito en el capítulo III a los problemas de interés de esta tesis de investigación. En este capítulo se presentan los resultados numéricos de las estructuras de bandas para un CF2D infinito formado por una celda unitaria cuadrada con una inclusión circular de superficie lisa y aleatoriamente rugosa que contiene medios de LHM y/o dieléctrico. Dado que en el caso de la inclusión circular con superficies aleatoriamente rugosas hubo la necesidad de utilizar la computación en paralelo bajo el protocolo de MPI y CUDA debido al gran tiempo de cómputo requerido para obtener las estructuras de bandas, se muestran un par de tablas que contienen los tiempos de cómputo requeridos, en su forma secuencial y en su forma paralelizada, para calcular las estructuras de bandas. Para estos resultados se utilizaron tres distintas formas de programación las cuales corresponden a la forma secuencial (forma tradicional de programación) y a su forma paralelizada al usar MPI FORTRAN

(usando procesadores (CPU)) y CUDA FORTRAN (usando tarjeta gráfica (GPU)). En este capítulo también se presentan los resultados numéricos obtenidos de la respuesta óptica de un CF2D finito formado por una celda unitaria cuadrada con inclusiones circulares de superficie lisa y aleatoriamente rugosa que contienen medios de LHM y/o dieléctrico mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda Gaussiana).

En el capítulo V, se dan las conclusiones principales de esta tesis.

Capítulo II

CRISTALES FOTÓNICOS Y METAMATERIALES

En este capítulo se presenta una breve historia de los CFs y de los LHMs, así como las propiedades que los caracterizan. Se da una definición general de los LHMs y se hace un análisis sobre modelos experimentales creados para obtener una respuesta eléctrica y magnética que cumplan con las propiedades de los LHMs, con el objetivo de obtener un par de funciones que permitan modelar numéricamente las propiedades ópticas de los LHMs. Por último, se mencionan algunas aplicaciones de dichos materiales artificiales (LHM).

II.1. Cristales Fotónicos

A pesar de que los CFs han atraído la atención durante las últimas décadas, las primeras hipótesis de la posibilidad de controlar la propagación de la luz utilizando las estructuras periódicas se inician por Rayleigh (1887). Esas fueron las investigaciones de estructuras periódicas en 1D.

Casi después de 100 años en 1972, el científico de la Unión Soviética V.P. Bykov publicó un artículo en el que describió la posibilidad de utilizar estructuras periódicas

para el control de la emisión espontánea de la luz (Bykov, 1972). Sin embargo, las primeras obras asumidas para iniciar el progreso intensivo de los CFs son las obras de E. Yablonovitch y S. John que fueron publicadas en 1987 (Yablonovitch, 1987b; John, 1987).

Los trabajos se dedicaron a la posibilidad del control de la emisión espontánea y a la posibilidad del control de la propagación de la luz mediante estructuras periódicas. Después de la publicación de estos artículos, una serie de publicaciones dedicadas a la física y la tecnología de CFs se duplicó cada año. En 1990, K.M. Ho, C.T. Chan y C.M. Soukoulis (Ho *et al.*, 1990) obtuvieron la estructura de bandas de un CF compuesto por una red FCC (una estructura de ópalo) que consistía en esferas dieléctricas con alto índice de refracción colocadas en aire.

Actualmente la investigación en CFs ha llegado a un punto tal de maduración que ya se tienen nuevas tecnologías de nano-fabricación consiguiendo las primeras aplicaciones prácticas de elevado impacto tecnológico. Sin embargo, en los últimos años se han conseguido las primeras aplicaciones prácticas, como son los láseres de CFs o las guías de onda nanoestructuradas con bandas prohibidas (Staude *et al.*, 2012; Yu *et al.*, 2014; Halir *et al.*, 2015; Lehmann y Spatschek, 2016).

Estas estructuras dieléctricas poseen una modulación periódica del índice de refracción, siendo su periodo del orden de la longitud de onda del campo electromagnético en el rango óptico. Esta disposición periódica provoca un comportamiento de los fotones en su interior similar al de los electrones en la estructura cristalina de un semiconductor (Korvink y Greiner, 2002).

La propiedad más relevante de los CFs es la posibilidad de presentar bandas prohibidas fotónicas (que es una zona prohibida de fotones) produciendo efectos no observados en la óptica tradicional (Yablonovitch, 1987a; Joannopoulos *et al.*, 2008; Sakoda, 2001). En esta banda prohibida, la luz no puede entrar en el cristal y los electrones no pueden

emitir fotones dentro del cristal. Esta propiedad permite un perfecto control de la propagación de la luz.

En la Fig. 3 se muestran CFs semiconductores en una, dos y tres dimensiones con períodos de orden nanométricos y las correspondientes zonas de Brillouin (celdas unitarias en el espacio de la red recíproca, que representa el espectro espacial de Fourier de la estructura cristalina fotónica).

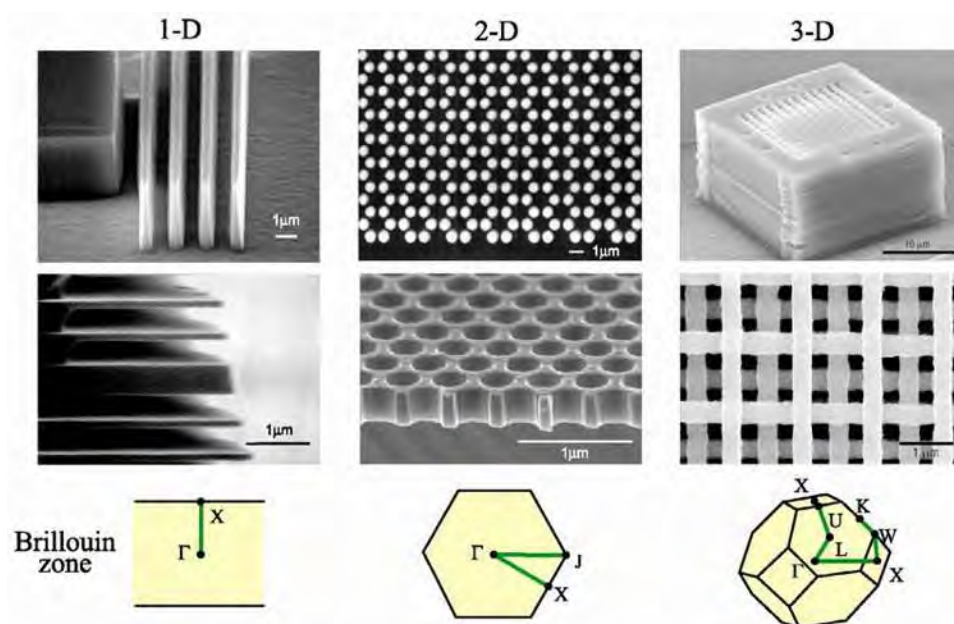


Figura 3. Estructuras cristalinas fotónicas en 1D, 2D y 3D con su correspondiente zona de Brillouin.

Así pues, un interés en la investigación de los CFs es buscar el control totalmente óptico de la información en un circuito, con la idea de desarrollar novedosas aplicaciones tecnológicas, que tendrían grandes ventajas sobre los dispositivos electrónicos convencionales en la miniaturización de circuitos a través de peculiaridades tales como la permeabilidad negativa y la permitividad que se hacen presentes, una extraordinaria dispersión de velocidad de grupo que permita manipular un pulso óptico, entre otras.

Estos dispositivos podrían ser la piedra angular de nuevas computadoras ópticas que superarán las limitaciones impuestas por la progresiva miniaturización de los actuales

procesadores de silicio. Asimismo, se tendrá una gama de aplicaciones en espectroscopía, metrología, biomedicina, imágenes y telecomunicaciones (Yasumoto, 2006).

II.2. Breve historia de los Metamateriales

Casi todos los fenómenos electromagnéticos resultan de las interacciones entre las ondas electromagnéticas y los materiales. Así pues, se está interesado en manipular las ondas electromagnéticas de una manera deseada elaborando estructuras de cierta geometría con materiales disponibles. La eventual capacidad y diversidad de dispositivos electromagnéticos se limitan en gran parte sólo por el alcance de los materiales disponibles utilizados para construirlos.

En las últimas décadas, una nueva clase de materiales creados artificialmente, conocidos como Metamateriales (LHMs), han recibido considerable atención tanto en la física como en la ingeniería. Esto es debido a que los LHMs pueden ofrecer propiedades electromagnéticas que son difíciles o imposibles de lograr con materiales convencionales de origen natural, ya que requieren que el índice de refracción sea negativo.

Siglos atrás, la gente comenzó a usar LHMs deliberadamente en piezas de arte sin una comprensión completa de la física detrás de los resultados que lograban. Un ejemplo famoso es la Copa Lycurgus exhibida en el Museo Británico; el cristal romano *challis* data del siglo IV dC. La taza fue hecha probablemente del primer LHM conocido, vidrio de rubí con las nanopartículas del oro encajadas (Barber y Freestone, 1990). La propiedad de dispersión del LHM ofrecía a la copa una belleza única, que parecía verde cuando se veía en luz reflejada como la luz del día, pero rojiza con la luz transmitida a través del vidrio, como se muestra en la Fig. 3 (Shalaev y Cai., 2010).

El primer término fue aplicado por Veselago (1968), debido a que el vector de onda \mathbf{k} , el vector de campo eléctrico \mathbf{E} y el vector de campo magnético \mathbf{H} forman una

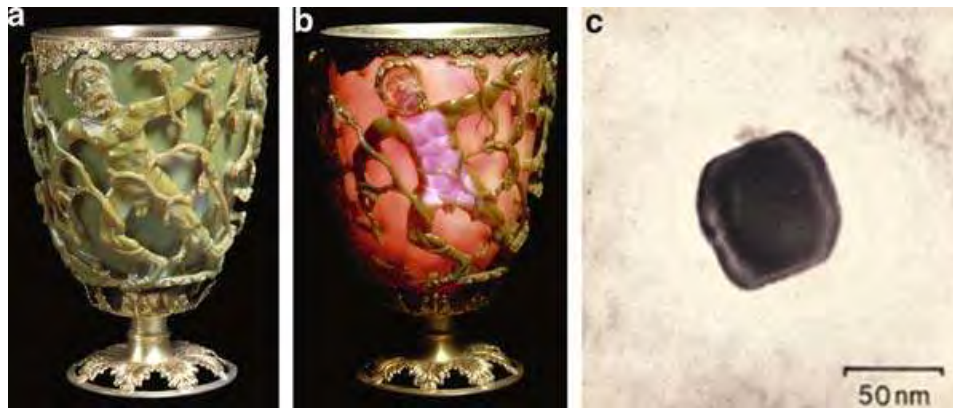


Figura 4. La Copa Lycurgus se ve (a) en luz reflejada y (b) en luz transmitida. Una nanopartícula metálica utilizada en el metamaterial se muestra en (c).

tríada de vectores ortogonales con una orientación Izquierda. En su trabajo pionero (Veselago, 1968), Veselago señaló que los materiales izquierdos tienen simultáneamente permitividad y permeabilidad negativa, lo que permite tener un medio con índice de refracción negativo (para algunas frecuencias de onda de excitación común) y algunas propiedades únicas de los LHMs; por ejemplo, el efecto inverso de Snell, el inverso desplazamiento Doppler y la radiación de Cherenkov inversa. Sin embargo, su idea fue olvidada debido a que en ese momento, el equipo necesario para la fabricación de dichos materiales no existía.

Se demostró Pendry *et al.* (1999), que los materiales con arreglos de resonadores de anillos cortados (SRRs) producen permeabilidad negativa sobre ciertas bandas de frecuencia. Combinando un arreglo bidimensional (2D) de SRRs intercalados con un arreglo 2D de barras metálicas (Pendry *et al.*, 1996; Shalaev y Cai., 2002), dan permitividad negativa, permitiendo así la construcción de los LHMs. En el 2000 el Dr. Smith (Smith *et al.*, 2000), demostró por primera vez la existencia experimental de los LHMs, construyendo el primer medio con índice negativo (NIM) en la Universidad de California en San Diego. El NIM y las observaciones de dicho experimento son mostradas en las Figs. 5(a) y (b).

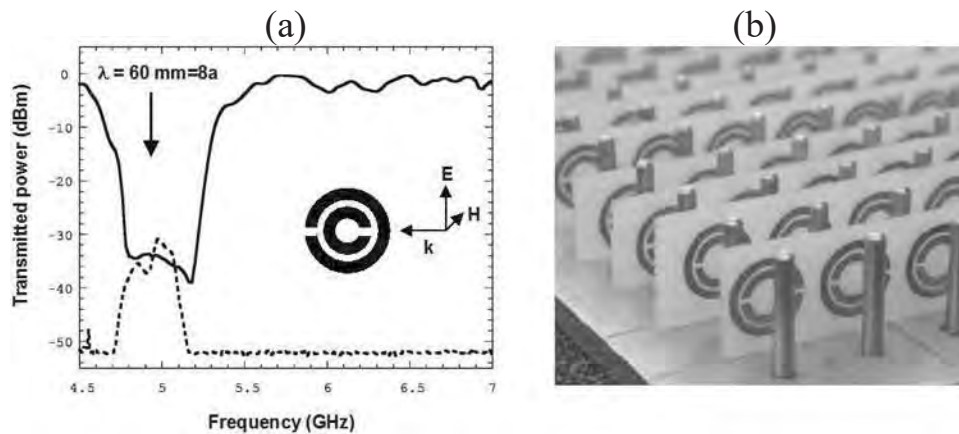


Figura 5. (a) Primera observación de un NIM a frecuencias de microondas (curva punteada). La curva sólida representa la transmisión del SRR. (b) Diagrama del NIM el cual consiste en resonadores de anillos divididos, creados en una placa de circuito, y postes metálicos. La constante de red del sistema es de $a = 8.0$ mm.

El experimento se realizó con la onda confinada entre placas metálicas paralelas en una configuración de guía de ondas. Para acoplar a los SRRs, el campo magnético tuvo que ser perpendicular al plano del SSR, y para acoplar a las barras, el campo eléctrico tuvo que ser paralelo con las barras, y por supuesto la dirección de la propagación fue perpendicular a los campos eléctrico y magnético, como se muestra en la Fig. 5(b). Los resultados experimentales se muestran en la Fig. 5(a). En estos se puede notar que si sólo están presentes los SRR (curva sólida), existe una banda de contención entre las frecuencias 4.7 y 5.2 GHz.

En la banda de contención, la atenuación aumenta de 2 dBm a aproximadamente 35 dBm. Siguiendo la interpretación de Smith, el arreglo SRR actúa como un material con una μ negativa en la banda de contención y la propagación está prohibida: $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ con $\epsilon > 0$ y $\mu < 0$ es imaginario. Cuando las varillas también se incluyen (curva de puntos), entonces la banda de contención se convierte en una banda de paso. La atenuación disminuye de 50 dBm a aproximadamente 32 dBm. Observar que la atenuación es muy pequeña incluso en la banda de paso porque hay una cantidad considerable de absorción. De nuevo, la interpretación es la siguiente: el conjunto de varillas actúa

como un material con una permitividad efectiva sobre todo el intervalo espectral de interés, y cuando las permitividades y permeabilidades efectivas son ambas negativas, entonces $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ se convierte en real. La banda de contención que se convierte en una banda de paso, demuestra que un material con ambas constantes de material negativo puede propagar ondas electromagnéticas.

El experimento crucial sobre la refracción negativa fue realizado por Shelby y sus compañeros de trabajo en 2001 con un experimento de la ley de Snell realizado en un LHM en forma de cuña diseñado para tener un índice de refracción negativo a frecuencias de microondas (R. A. Shelby y Schultz, 2001). En este experimento, mostrado en la Fig. 6, un haz de microondas se dirigió sobre la superficie plana de la cuña, pasando a través del ancho sin desviarse y luego refractándose en la segunda interfaz. La dependencia angular de la potencia refractada se midió alrededor de la circunferencia, estableciendo el ángulo de refracción. El resultado del experimento indicó claramente que el ancho de la cuña refracta el haz de microondas de una manera consistente con la ley de Snell.

A continuación, la Fig. 6(a) muestra el perfil de un único cuadrado resonador de anillo de división, junto con la celda unitaria de un LHM. Asimismo, la Fig. 6(b) representa la lente asociada de LHM (Cortesía del Centro de Investigación Glenn de la NASA). Finalmente, a través de las Figs. 6(c) y 6(d) se reportan el LHM en forma de cuña diseñado para tener un índice de refracción negativo y, la potencia detectada como una función del ángulo para una cuña de Teflón ($n = 1.4$, curva azul) en comparación con la cuña de LHM de índice negativo (curva roja), respectivamente. La ubicación del pico correspondiente a la cuña del medio con índice negativo implica un índice de $n = -2.7$.

Desde esta primera demostración de refracción negativa, se reportaron dos experimentos de la ley de Snell más, ambos utilizando muestras de cuña de LHM con un diseño

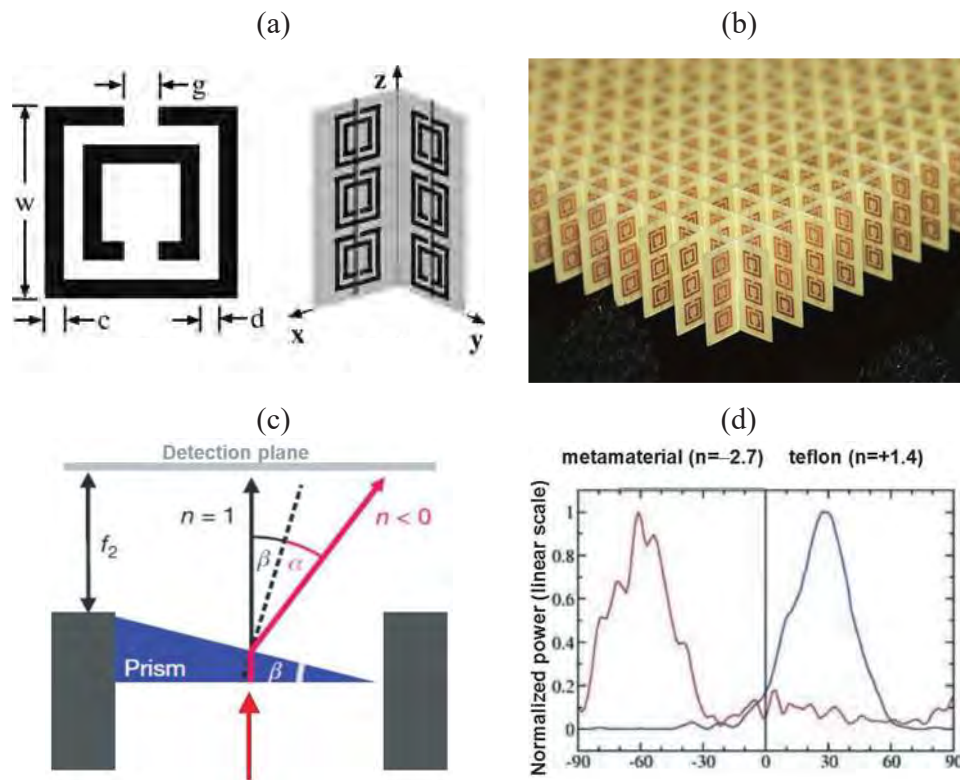


Figura 6. (a) Ejemplo de un sólo cuadrado resonador de anillo de división y celda unitaria de un LHM. (b) Ejemplo de una lente de LHM. Cortesía del Centro de Investigación Glenn de la NASA. (c) LHM en forma de cuña diseñado para tener un índice de refracción negativo. (d) Potencia detectada como una función del ángulo para una cuña de Teflón (curva azul) y una cuña de LHM (curva roja).

similar al utilizado en la primera demostración. Estos experimentos abordaron aspectos no probados en el primer experimento. En uno de los experimentos, por ejemplo, se hicieron mapas espaciales de los campos electromagnéticos en función de la distancia desde la cuña al detector.

Además, se utilizaron muestras de cuña con dos cortes de superficie diferentes para confirmar que el ángulo de refracción era consistente con la ley de Snell (Houck *et al.*, 2003). En el segundo de estos experimentos, el haz refractado negativamente se midió a distancias mucho más distantes de la muestra de la cuña (Parazzoli *et al.*, 2003). En este último experimento, la muestra de LHMs fue cuidadosamente diseñada de tal manera que las pérdidas de material se minimizaron y la estructura presentó una mejor

impedancia que coincide con el espacio libre. De esta manera, se transmitió mucha más energía a través de la muestra, haciendo que el haz refractado negativamente fuese más fácil de observar y mucho menos probable que fuera el resultado de artefactos experimentales. Estas mediciones adicionales han bastado para convencer a la mayoría de que los materiales con índice de refracción negativo son realmente una realidad.

II.3. Propiedades de los Metamateriales

Todos los materiales pueden ser ampliamente definidos por sus propiedades particulares. Estas propiedades, en principio, pueden tomar cualquier valor, y no esperamos que se presenten en los materiales que encontramos en la naturaleza. Esta enorme dificultad promete ser superada con el continuo desarrollo de los llamados LHMs. Estos materiales permitirán construir artificialmente medios materiales que tendrían casi cualquier propiedad que deseemos.

Como la disciplina de los LHMs está todavía en desarrollo, no existe aún una definición que sea aceptada universalmente. Algunas de las definiciones más posibles para el término no satisfacen a todos los investigadores en el campo. Por ejemplo, la Red Metamórfica de la Unión Europea, el principal patrocinador del Congreso de LHMs, define un LHM como un arreglo de elementos estructurales artificiales, diseñado para lograr propiedades electromagnéticas ventajosas e inusuales. Tal definición, aunque aborda la naturaleza artificial de los LHMs, es quizás excesivamente inclusiva y no reconoce la importante diferencia entre LHMs y otras estructuras artificiales como los CFs.

De esta manera se presenta la definición que propone Vladimir Shalaev, uno de los pioneros de esta nueva rama de la física (Shalaev y Cai., 2010):

“Un LHM es un material estructurado artificialmente que obtiene sus

propiedades, no directamente de los materiales que lo constituyen (por ejemplo, la composición química del material), sino a partir de una unidad de estructura. Un LHM tiene una escala mucho más pequeña que la longitud de onda de interés y su respuesta electromagnética se expresa en términos de parámetros de los materiales como por ejemplo: la permitividad, la permeabilidad y el índice de refracción”.

La escala en un LHM hace que todo el material sea macroscópicamente uniforme, y este hecho hace que un LHM sea esencialmente un material en lugar de un dispositivo. De esta manera, la escala distingue los LHMs de muchos otros medios. Los materiales convencionales y LHMs artificiales comparten la característica de que sus constantes de red son mucho más pequeñas que la longitud de onda de interés. Sin embargo, cuando la escala es del orden de la longitud de onda, la respuesta de la estructura está dominada por efectos de difracción y de interferencia. Los fenómenos en esta categoría ocurren a través de casi todo el espectro electromagnético, incluyendo los cristales en la difracción de rayos X y los CFs en la óptica.

Como ya se mencionó, los LHMs también son conocidos como “Materiales Izquierdos”, los cuales se caracterizan por tener índice de refracción negativo. Recordando que el índice de refracción está dado como $n^2 = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)$, donde ω es la frecuencia de la onda. De esta expresión se tiene que para propiedades de signo opuesto (por ejemplo $\varepsilon(\omega) < 0$ y $\mu(\omega) > 0$) el índice sería puramente imaginario y no habría propagación de la onda electromagnética. Por otro lado, cuando ambas cantidades tienen el mismo signo ($\varepsilon(\omega), \mu(\omega) > 0$ ó $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) < 0$), se tiene un medio transparente que propaga radiación electromagnética. Así pues, si las propiedades de los materiales son positivas, el índice de refracción debe ser positivo, y si se tienen cantidades negativas se debe tomar el signo negativo. Este hecho es una consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell.

Se consideran las dos ecuaciones de Maxwell correspondientes a la ley de Faraday y la ley de Ampere, respectivamente, en su forma diferencial para un medio libre sin cargas ni corrientes, cuya permitividad eléctrica $\varepsilon(\omega)$ y permeabilidad magnética $\mu(\omega)$ dependen de la frecuencia ω ,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu(\omega) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon(\omega) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{H} son los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Recordar que las ecuaciones constitutivas de los campos eléctrico y magnético para materiales lineales están dadas como:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \mu(\omega) \mathbf{H}, \quad (4)$$

donde \mathbf{D} y \mathbf{B} son los campos de desplazamiento eléctrico e inducción magnética, respectivamente.

Considerando la exponencial compleja para una onda plana armónica,

$$\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (5)$$

se tiene que la derivada con respecto al tiempo es

$$\frac{\partial(\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))}{\partial t} = -i\omega \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (6)$$

Ahora calculando la derivada parcial con respecto a una de las variables del espacio; por ejemplo, x , se obtiene:

$$\frac{\partial(\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))}{\partial x} = \frac{\partial(\exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t))}{\partial x} = ik_x \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (7)$$

De ahí que, en la aplicación del operador nabla dado por:

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8)$$

se deduce fácilmente que

$$\nabla(\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) = i\mathbf{k} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (9)$$

Por lo tanto, tenemos las siguientes relaciones de operadores:

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega, \quad (10)$$

$$\nabla \longrightarrow i\mathbf{k}. \quad (11)$$

Aplicando los operadores dados por las Ecs. (10) y (11) en las Ecs. (1) y (2), obtenemos

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu(\omega)\mathbf{H}, \quad (12)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}. \quad (13)$$

Así, de estas expresiones se tiene que \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{H} forman una tríada de vectores ortogonales. La orientación –derecha o izquierda– de la tríada de vectores depende del signo de las propiedades del material como se puede ver en las Figs. 7(a) y (b). Si ambas son positivas ($\varepsilon(\omega), \mu(\omega) > 0$) tenemos una tríada derecha y si ambas son negativas ($\varepsilon(\omega), \mu(\omega) < 0$) tenemos una tríada izquierda. Como el vector de Poynting está dado por $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, entonces la tríada ortogonal $\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ siempre es derecha, y, por tanto, cuando $\varepsilon, \mu < 0$, tiene la orientación opuesta a $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$. Esto se traduce en que \mathbf{S} y \mathbf{k} son antiparalelos dentro del medio con índice de refracción negativo. Este comportamiento debe implicar que el medio negativo “regresa” el avance de la fase (los frentes de onda), y esto, a su vez, debe traducirse en que la fase viaja en dirección contraria a la propagación de los rayos de luz, dada por el vector de Poynting.

Cuando la onda electromagnética incide desde el vacío en un medio negativo, la componente paralela de \mathbf{k} debe conservarse (este hecho es una consecuencia de la continuidad de la fase (Griffiths, 1999)) y \mathbf{S} debe alejarse de la frontera, por lo que el vector

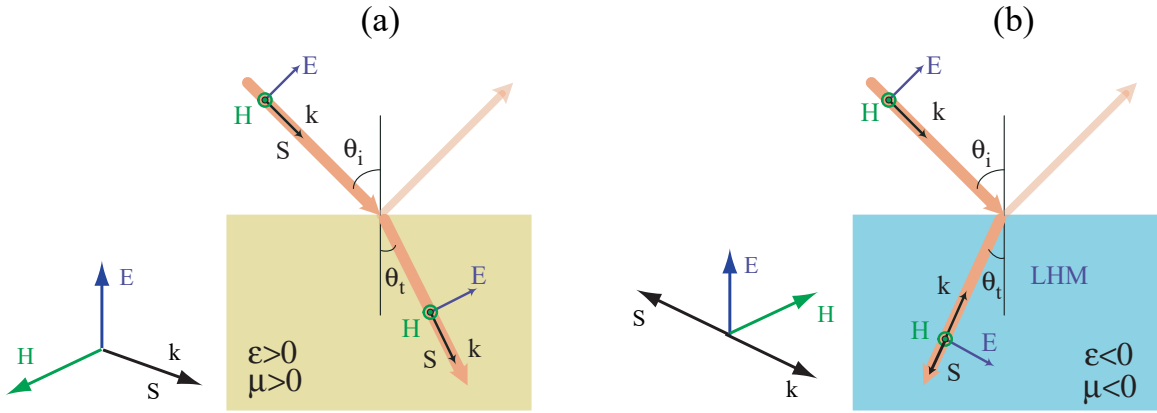


Figura 7. En un medio con (a) $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) > 0$, los vectores \mathbf{k} y \mathbf{S} van en la misma dirección y con (b) $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) < 0$, van en direcciones opuestas; es decir, los vectores \mathbf{k} y \mathbf{S} son antiparalelos dentro del medio con índice de refracción negativo.

de Poynting se refracta en el tercer cuadrante (ver Fig. 7(b)) en lugar de en el cuarto cuadrante como en el caso ordinario. Ese fenómeno se conoce como refracción negativa. Notamos también de la Fig. 7(b) que, como los rayos de la onda electromagnética van en dirección del vector de Poynting, se conserva la misma ley de la refracción,

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t, \quad (14)$$

$$\sin \theta_i = \frac{n_t}{n_i} \sin \theta_t = n_{it} \sin \theta_t, \quad (15)$$

o bien,

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_t, \quad (16)$$

con el índice de refracción (n) negativo cuando $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) < 0$.

En un LHM la velocidad de fase en términos del índice de refracción está dado por la expresión $v_p = c/n(\omega)$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y $n(\omega)$ es el índice de refracción negativo ($n(\omega) < 0$). En esta expresión, se puede ver que v_p tiene un valor negativo, por lo que la velocidad de fase está en la dirección opuesta al flujo de energía; es decir, en el sentido de que el flujo de energía sale de la fuente y en la onda con una velocidad de fase apuntando hacia atrás como se muestra en la Fig. 8.

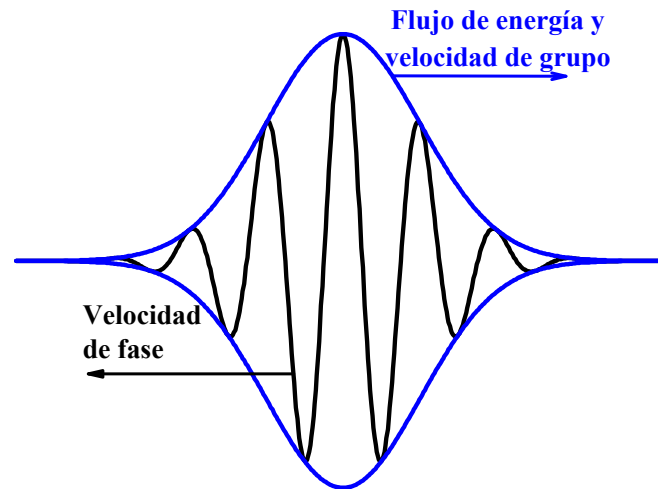


Figura 8. En los LHM's el flujo de energía y la velocidad de grupo se propagan hacia delante pero la velocidad de fase se propaga hacia atrás.

II.3.1. Respuesta eléctrica

Debido a que los átomos y moléculas no siempre le pueden “seguir el paso” a los campos, la respuesta del medio, en general, es función de la frecuencia de oscilación de los campos. Así definir a ε y μ en el espacio de frecuencias y no como funciones del tiempo.

En los metales, los electrones de conducción no están asociados a ningún átomo o molécula en particular; sin embargo, se pueden modelar como partículas libres. Debido a la inercia de la conducción de electrones, no se puede usar simplemente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (Ley de Ohm) para la densidad de corriente, donde σ es la conductividad estática. Sino que se debe considerar el movimiento de los electrones bajo la acción del campo eléctrico alternante de la onda de luz.

Dado que los electrones de conducción no están ligados, no hay ninguna fuerza de restauración elástica y por lo tanto la ecuación diferencial del movimiento de electrones está dada por:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\tau^{-1}\mathbf{v} = -e\mathbf{E}, \quad (17)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad del electrón, e es la carga del electrón y $m\tau^{-1}$ es la constante de dispersión de fricción. Esta constante está relacionada con la conductividad estática de la forma $m\tau^{-1} = (1/\sigma)(n_e e^2)$, donde n_e es el número de electrones de conducción por unidad de volumen (densidad volumétrica).

Por otro lado, tenemos que la densidad de carga está dada por

$$\mathbf{J} = -n_e e \mathbf{v}. \quad (18)$$

Ahora, despejando \mathbf{v} de la Ec. (18) y sustituyéndola en la Ec. (17), se tiene que

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \tau^{-1}\mathbf{J} = \frac{n_e e^2}{m} \mathbf{E}. \quad (19)$$

Así, el decaimiento de una corriente transitoria está regida por la ecuación homogénea asociada

$$m \frac{d\mathbf{J}}{dt} + \tau^{-1}\mathbf{J} = 0, \quad (20)$$

cuya solución es $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 \exp(-t/\tau)$. Por lo que una corriente transitoria decaerá por e^{-1} para un valor inicial en un tiempo τ . Este parámetro es llamado el tiempo de relajación.

Para un campo eléctrico estático, la Ec. (19) se reduce en

$$\mathbf{J} = \left(\frac{n_e e^2}{m} \tau \right) \mathbf{E}, \quad (21)$$

y así, la conductividad estática σ está dada por

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m} \tau. \quad (22)$$

Supongamos ahora una dependencia armónica del tiempo $e^{-i\omega t}$ para el campo eléctrico \mathbf{E} y la corriente resultante \mathbf{J} en la Ec. (19). Entonces, se tiene que

$$(-i\omega + \tau^{-1})\mathbf{J} = \frac{n_e e^2}{m} \mathbf{E} = \tau^{-1} \sigma \mathbf{E}, \quad (23)$$

cuya solución para \mathbf{J} es

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma}{(1 - i\omega\tau)} \mathbf{E}. \quad (24)$$

Ahora se consideran las ecuaciones de Maxwell para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} macroscópicamente promediados y medios no magnéticos; es decir, la magnetización, \mathbf{M} , y la densidad volumétrica de carga eléctrica ρ son ambos cero, dadas por

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (28)$$

Al aplicar el rotacional a la Ec. (25), se tiene que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right), \quad (29)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (30)$$

que al sustituir la Ec. (26) en la Ec. (30) y usando la relación $1/c^2 = \mu_0 \varepsilon_0$, se obtiene la ecuación de onda del campo eléctrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (31)$$

Los dos términos del lado derecho de la ecuación anterior se llaman términos fuente. Se derivan de la presencia de cargas de polarización y cargas de conducción dentro del medio, respectivamente. La forma en que la propagación de la luz se ve afectada por las fuentes se puede ver de la solución de la ecuación de onda cuando se incluyen los términos fuente. En el caso de medios no conductores, el término de polarización $\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$ es de importancia. Resulta que este término conduce a la explicación de muchos efectos ópticos, incluyendo la dispersión, la absorción, la doble refracción y la actividad óptica, por mencionar sólo algunos. En el caso de los metales el término de conducción $\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$ es relevante, mientras que el término de polarización $\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$ se puede despreciar debido a que en este caso los electrones de conducción no están ligados; es decir, no

hay ninguna fuerza de restauración elástica como la habría en el caso de medios no conductores. Así, las soluciones resultantes de la ecuación de onda explican la gran opacidad y alta reflectancia de los metales.

Por tanto, la ecuación de onda para medios que incluyan inclusiones metálicas se puede expresar de la siguiente forma:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (32)$$

Usando la expresión dinámica para \mathbf{J} , dada por la Ec. (24), en la ecuación de onda (Ec (32)), se obtiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\mu_0 \sigma}{(1 - i\omega\tau)} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (33)$$

Para resolver la Ec. (33) se propone un campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(Kz - \omega t)}, \quad (34)$$

que representa una onda armónica plana. Sustituyendo directamente la Ec. (34) en la Ec. (33) se puede mostrar que ésta es una solución, siempre que

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega\mu_0\sigma}{1 - i\omega\tau}. \quad (35)$$

La presencia del término imaginario en el denominador implica que el número de onda K debe ser un número complejo. Expresemos K en términos de la parte real e imaginaria como:

$$K = k + i\alpha. \quad (36)$$

Esto es equivalente a introducir un índice de refracción complejo,

$$\mathcal{N} = n + i\kappa, \quad (37)$$

por lo que

$$K = \frac{\omega}{c} \mathcal{N}. \quad (38)$$

Entonces, la solución dada por la Ec. (34), se puede escribir como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (39)$$

El factor $e^{-\alpha z}$ indica que la amplitud de la onda decrece exponencialmente con la distancia. Esto significa que a medida que la onda avanza, la energía de la onda es absorbida por el medio. La parte imaginaria κ del índice de refracción complejo es conocido como el índice de excitación. Los dos números α y κ están relacionados por la expresión

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \kappa. \quad (40)$$

De las Ecs. (35) y (38) se obtiene:

$$\mathcal{N}^2 = (n + i\kappa)^2 = 1 + \frac{i\mu_0 \sigma c^2}{\omega - i\omega^2 \tau}, \quad (41)$$

$$= 1 - \frac{\mu_0 \sigma c^2}{\tau(i\omega \tau^{-1} + \omega^2)}, \quad (42)$$

$$= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega \tau^{-1}}. \quad (43)$$

Se introdujo la frecuencia de plasma para el metal, la cual está definida por la relación

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma c^2}{\tau}}. \quad (44)$$

Al igualar la parte real e imaginaria de la Ec. (43), se obtienen las siguientes dos expresiones:

$$n^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}}, \quad (45)$$

$$2n\kappa = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} \left(\frac{1}{\omega \tau} \right). \quad (46)$$

Así, la permitividad eléctrica está relacionada con la parte real e imaginaria del índice de refracción complejo como $\varepsilon_r(\omega) = n^2 - \kappa^2$ y $\varepsilon_i(\omega) = 2n\kappa$. La componente imaginaria de la permitividad es la que describe la absorción de energía en el medio y la

componente real nos describe las propiedades de los materiales reales. Usando las Ecs. (45) y (46), las componentes de la permitividad eléctrica se pueden reescribir como:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}}, \quad (47)$$

$$\varepsilon_i(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} \left(\frac{1}{\omega\tau} \right). \quad (48)$$

Observamos que si τ^{-2} es pequeño en comparación con ω_p , cuando $\omega \ll \omega_p$, la parte real de la permitividad toma valores negativos hasta llegar a ω_p donde $\varepsilon_r \approx 0$. Para la frecuencia $\omega = \omega_p$ se tiene que $\varepsilon \rightarrow 1$. La parte imaginaria toma valores positivos grandes en la región $\omega \ll \omega_p$ y tiende rápidamente a cero pasando por la frecuencia del plasma. Esta es la razón del porqué los metales sean opacos para frecuencias menores a ω_p y se vuelvan transparentes para frecuencias mayores.

Tiempos de relajación típicos de los metales, se deducen de las mediciones de conductividad que son del orden $\tau = 10^{-13}$ s, los cuales corresponden a frecuencias en la región del espectro infrarrojo. Para frecuencias de plasma de los metales son típicamente de alrededor de $\omega = 10^{15}$ s⁻¹, correspondientes a las regiones cercanas al visible y al ultravioleta.

Las Ecs. (47) y (48) describen un modelo conocido como el modelo de Drude, donde los electrones no están ligados a los átomos, y son libres de moverse a su alrededor, chocando unos con otros.

Arreglo de tubos metálicos

Un arreglo de tubos metálicos en aire, como el de la Fig. 9, es quizá el ejemplo más simple de un LHM.

El arreglo está caracterizado por tubos de radio a y una constante de red d . Si estos parámetros son mucho más chicos que la longitud de onda de interés, el medio se puede describir con una permitividad efectiva dada por el modelo de Drude (Ecs (47) y (48)).

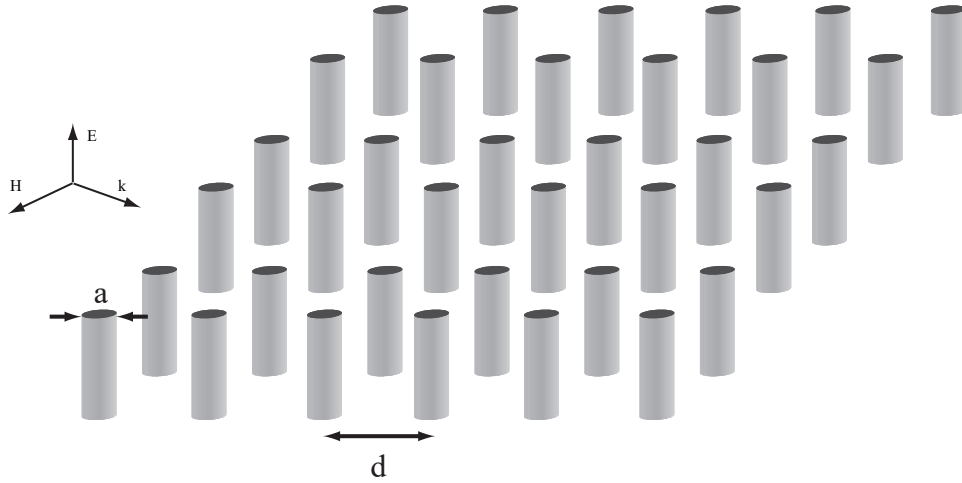


Figura 9. Metamaterial compuesto de tubos de metal con el que es posible obtener una respuesta eléctrica negativa.

Para este caso supondremos que el campo eléctrico es paralelo a los tubos.

El estudio de la respuesta electromagnética de este arreglo tiene varios precedentes, pero fue John B. Pendry en 1996 quien lo propuso en el contexto de los LHMs (Pendry *et al.*, 1996). De hecho, este artículo es uno de los trabajos más relevantes sobre los LHMs. J. B. Pendry propone que el medio se puede describir como un metal donde debemos considerar una densidad volumétrica efectiva y una masa efectiva del electrón definidas como

$$N_{ef} = n_e \frac{\pi a^2}{d^2}, \quad (49)$$

$$m_{ef} = \frac{\mu_0 n_e a^2 e^2}{2} \ln \left(\frac{d}{a} \right), \quad (50)$$

donde n_e es la densidad volumétrica, a es el radio de el tubo, d es la constante de red, μ_0 es la constante de permeabilidad magnética en el vacío y e es la carga del electrón.

El ajuste en la densidad volumétrica se debe a que los electrones, al estar confinados en los tubos metálicos, sólo ocupan una fracción del volumen de la red. El segundo ajuste a considerar se debe a que la auto inductancia de los tubos se opone al cambio de la corriente eléctrica y J. B. Pendry propuso que este efecto se puede representar como

un aumento en la masa efectiva del electrón. A partir de estos parámetros efectivos la frecuencia de plasma, dada por la Ec. (44), ahora es:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{N_{ef}e^2}{m_{ef}\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu_0\epsilon_0 d^2 \ln(d/a)}} = \sqrt{\frac{2\pi c^2}{d^2 \ln(d/a)}}. \quad (51)$$

Notar que la frecuencia de plasma queda expresada únicamente en términos de las características geométricas del arreglo; por lo que, podemos ajustar ω_p tomando simplemente distintos anchos y densidades para los tubos. Como la densidad volumétrica disminuye y la masa efectiva aumenta, el efecto final es una disminución en la frecuencia de plasma. Esta disminución puede ser de varios órdenes de magnitud. Aquí debemos comentar que el aumento en la masa efectiva del electrón es una suposición limitada que no se puede aplicar de modo general.

II.3.2. Respuesta magnética

Controlar la respuesta magnética de los medios es otro de los grandes retos que enfrentan los LHMs. Los medios naturales, de hecho, no presentan respuesta magnética alguna en la óptica. El libro de texto de Landau y Lifshitz (Landau y Lifshitz., 1981) menciona al respecto:

“En contraste con la permitividad eléctrica $\epsilon(\omega)$, cuando se alcanza el dominio de las frecuencias ópticas, carece de sentido utilizar la permeabilidad magnética $\mu(\omega)$ y al estudiar los correspondientes fenómenos debemos usar $\mu = 1$ ”.

En la Ref. (Landau y Lifshitz., 1981), los autores calculan el acoplamiento eléctrico y magnético de un átomo y muestran que, en general, se puede despreciar el acoplamiento magnético. Esto implica que los LHMs, no están sujetos a la restricción descrita por Landau y Lifshitz.

En el caso eléctrico se pudo establecer un modelo general pensando en electrones libres. Sin embargo, en este caso, un modelo tan general no es posible y, para determinar $\mu(\omega)$, debemos saber exactamente el modo en el que el meta-átomo, unidad de estructura que forma parte de una arquitectura celular que puede ser periódica o no periódica, adquiere un momento magnético.

Resonador de anillo cortado (SRR)

El único modo de obtener una respuesta magnética es, por tanto, con un material estructurado artificialmente. En 1999, John B. Pendry propuso un meta-átomo que podría lograr esta hazaña, el cual se conoce como resonador de anillo cortado o SRR¹ y exploró explícitamente la idea de estructurar un medio magnético (Pendry *et al.*, 1999). Este anillo resonador es, sin duda, el meta-átomo más famoso y es un símbolo para los LHMs en general.

En la Fig. 10 se muestra el esquema básico de un resonador de anillo cortado. El radio promedio del anillo es R y la circunferencia tiene un pequeño corte de largo d . Además, el anillo tiene una sección transversal circular de radio a .

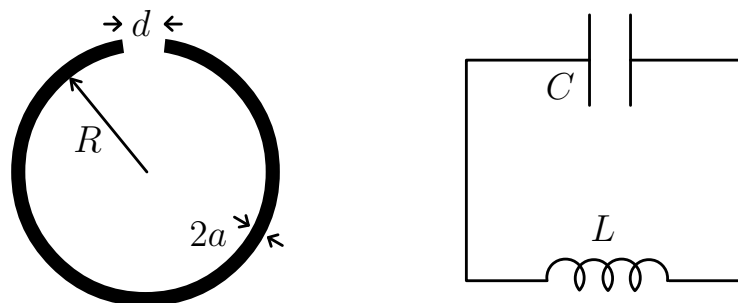


Figura 10. Un resonador de anillo cortado es como un circuito LC.

Como se observa en la Fig 10, la respuesta del meta-átomo se puede modelar como un circuito LC. Cuando un campo magnético atraviesa perpendicularmente el plano del

¹Por sus siglas en inglés, Split-Ring Resonator.

anillo se forma una corriente inducida por lo que el anillo funciona como un inductor y las cargas acumuladas en el corte del anillo funcionan como un capacitor. Si se aproxima la inductancia por la de un anillo cerrado, $L \approx \mu_0 \pi R L$ y tomando la capacitancia como $C = \varepsilon_0 \pi a^2 / d$, la frecuencia de resonancia para el circuito LC es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\pi a} \sqrt{\frac{d}{R}}, \quad (52)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Se ve entonces que la frecuencia de resonancia depende únicamente de los detalles geométricos del anillo. Este, por supuesto, es un cálculo muy aproximado y no da cuenta de posibles efectos que pueden tomar relevancia.

En su artículo relevante, J. B Pendry no propone exactamente el anillo cortado simple como el de la Fig. 10, sino un anillo doble como el de la Fig. 11(a), en el que se forma una capacitancia adicional entre los anillos. El punto importante de esta estructura es que existe un corte que impide que la corriente fluya alrededor de cualquier anillo. Sin embargo, hay una capacitancia considerable entre los dos anillos, lo que permite que la corriente fluya.

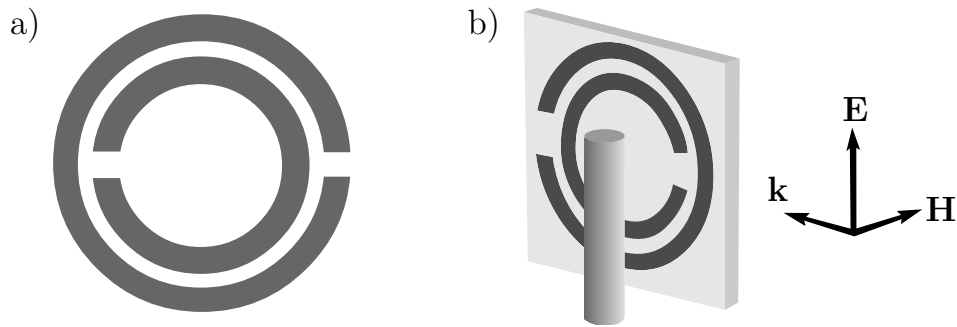


Figura 11. a) SRR doble, b) meta-átomo compuesto por un tubo metálico y un SSR doble.

J. B. Pendry calculó (para más detalles ver (Pendry *et al.*, 1999)) para un arreglo de hojas enrolladas de anillos la permeabilidad magnética efectiva, suponiendo que los anillos son suficientemente próximos entre sí y que las líneas de fuerza magnéticas son

debido a las corrientes en los anillos apilados. Esto sólo puede ser cierto si el radio de los anillos es del mismo orden como el lado de celda unidad, obteniendo

$$\mu_{ef}(\omega) = 1 - \frac{\frac{\pi r^2}{a^2}}{1 + i \frac{2l\sigma_1}{\omega r \mu_0} - \frac{3lc^2}{\pi \omega^2 \ln\left(\frac{2c}{d}\right) r^3}}, \quad (53)$$

siendo σ_1 la resistencia por unidad de longitud de las hojas medidas alrededor de la circunferencia. La Ec. (53) se puede reescribir como:

$$\mu_{ef}(\omega) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi r^2}{a^2}\right) \omega^2}{\omega^2 + i \frac{2l\sigma_1}{r \mu_0} \omega - \frac{3lc^2}{\pi \ln\left(\frac{2c}{d}\right) r^3}}, \quad (54)$$

$$\mu_{ef}(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 + i\gamma\omega - \omega_0^2}, \quad (55)$$

donde se ha definido el parámetro F como la fracción de volumen de la celda ocupada por el SRR, ω_0 como la frecuencia de resonancia y γ como el término de amortiguamiento, dados por

$$F = \frac{\pi r^2}{a^2}, \quad (56)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3lc^2}{\pi \ln\left(\frac{2c}{d}\right) r^3}}, \quad (57)$$

$$\gamma = \frac{2l\sigma_1}{r \mu_0}, \quad (58)$$

respectivamente. La Ec. (55) sugiere que $\mu_{ef}(\omega)$ puede ser negativa alrededor de la frecuencia ω_0 si el término de amortiguamiento γ tiene un valor pequeño.

Debemos mencionar que controlar la respuesta magnética sigue siendo un reto enorme, y en muchos prototipos de LHM se ha buscado usar propiedades simplificadas para no tener que lidiar con $\mu(\omega)$. En el capítulo IV haremos uso de las Ecs. (47) y (55) para modelar un LHM con el método numérico descrito en este trabajo.

II.4. Aplicaciones de los Metamateriales

En esta sección se mencionarán algunas aplicaciones de los LHMs. En el año 2005, una super lente compuesta de LHMs de plata logró reconstruir imágenes en el campo cercano, a menos de una longitud de onda de la fuente (Melville y Blaikie, 2005). Para su fabricación se utilizó una capa de plata de 50 nm de espesor junto con un total de 35 nm de espaciadores dieléctricos adicionales. Mediante el control de la planaridad de las capas de lente y espaciador, y reduciendo la rugosidad de la superficie a aproximadamente 1 nm, se obtuvieron imágenes de rejillas con períodos hasta 145 nm.

Por otro lado los ingenieros de la Universidad de Duke crearon una nueva generación de lentes que podrían mejorar en gran medida las capacidades de las telecomunicaciones o sistemas de radar para proporcionar un amplio campo de visión y mayor detalles. La lente que formaron no se parece en nada a una lente normal (ver Fig. 12). Mientras que las lentes tradicionales están hechas de sustancias claras -como vidrio o plástico- con superficies muy pulidas, la nueva lente se parece más a una miniatura de persianas venecianas. Sin embargo, su capacidad de enfocar la dirección de los rayos electromagnéticos que pasan a través de él supera a la de una lente convencional.

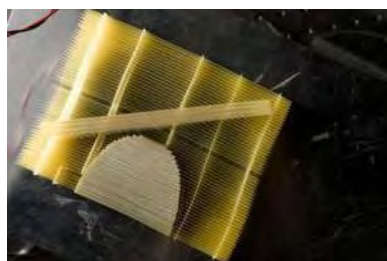


Figura 12. Lente hecha por Duke University en 2009. Fuente: <http://pratt.duke.edu/news/next-generation-lens-promises-more-control>

Esta lente mide cuatro pulgadas por cinco pulgadas y menos de una pulgada de alto y está compuesto por más de 1000 piezas individuales del mismo material de fibra de vidrio utilizado en las placas de circuito impreso y está grabado con cobre.

Reconociendo las limitaciones de los lentes tradicionales, los científicos han estado investigando durante mucho tiempo otras opciones, incluyendo las conocidas como lentes de índice de gradiente (GRIN). Éstas son típicamente esferas claras, y mientras que tienen ventajas sobre las lentes tradicionales, son difíciles de fabricar. Además, debido a que la mayoría de los sistemas sensores están orientados en dos dimensiones, la imagen esférica no siempre se traduce claramente en una superficie plana.

La nueva lente, sin embargo, tiene un gran ángulo de visión, casi 180 grados, y debido a que su punto focal es plano, puede usarse con tecnologías de imagen estándar. Los últimos experimentos se realizaron con microondas, pero los investigadores dicen que es teóricamente posible diseñar lentes para frecuencias más amplias.

En la actualidad los científicos están tratando de crear una super lente de campo lejano usando LHM, utilizando una lente de LHM para magnificar la propagación de ondas evanescentes, para que sean lo suficientemente grandes como para ser detectables por una lente convencional. Por otro lado, en 2010, fueron utilizados LHMs para crear nano lentes tridimensionales que logran imágenes de super resolución (Casse *et al.*, 2010). En ese mismo año, se creó un LHM 3D holey-estructurado (Zhu *et al.*, 2010) que logra la imagen acústica hasta un tamaño de $\lambda/50$. El LHM holey-estructurado se muestra en la Fig. 13.

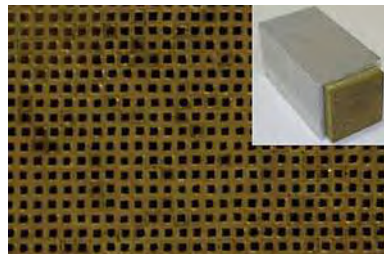


Figura 13. Imagen del LHM holey-estructurado.

Los componentes evanescentes del campo de un objeto de longitud de onda se transmiten eficientemente a través de la estructura como resultado de su fuerte acoplamiento

con las resonancias Fabry-Pérot dentro de la placa holey. Esta capacidad de formación de imágenes acústicas a una escala de longitud de onda muy pequeña puede abrir la puerta a una amplia gama de aplicaciones, incluyendo ultrasonografía médica, sonar subacuático y evaluación ultrasónica no destructiva.

En el año 2011, ingenieros de Penn State y Lockheed Martin Corp. hablaban del potencial de los LHMs para la creación de satélites de comunicación, ya que esto ahorraría dinero, haciéndolos más ligeros y más eficientes de energía. Por lo tanto, los satélites serían más baratos de hacer y de enviar al espacio. Una representación en 3D de un satélite se muestra en la Fig. 14(a), donde el revestimiento del satélite está hecho de LHM como se muestra en la Fig. 14(b).

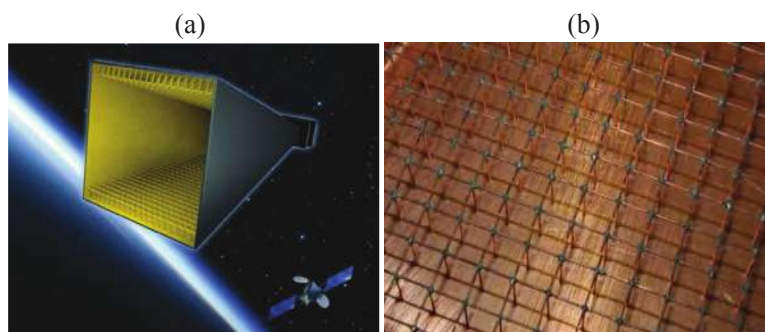


Figura 14. (a) Una representación en 3-D de un satélite de comunicación compuesto de LHMs. (b) Revestimiento de LHM para el satélite de comunicación. Fuente: <http://news.psu.edu/story/161153/2011/01/30/metamaterials-approach-makes-better-satellite-antennas>

Otras aplicaciones de los LHMs son la energía solar, los dispositivos de encubrimiento, las antenas de telefonía celular y las antenas moldeadas para que coincida con la forma aerodinámica de un avión. Muchos teléfonos celulares ya contienen antenas de LHMs que pueden manejar múltiples frecuencias. Una de estas antenas se representa en la Fig. 15. Los LHMs se pueden crear para ser absorbentes casi perfectas de la luz. De esta manera, pueden ser útiles en la producción de energía solar. Mientras más fotones se puede absorber, más energía se pueden producir.



Figura 15. Antena de LHM para uso de teléfonos celulares. Fuente: http://wikivisually.com/wiki/Metamaterial_antenna

Por otro lado, se tiene la esperanza de que los LHMs puedan ser usados para aplicaciones aeroespaciales remotas, en sensores de detección, en la vigilancia de infraestructuras, en la gestión de la energía solar inteligente, en la seguridad pública, en la mejora de sensores ultrasónicos, entre otros.

Un desarrollo de los LHMs es del tipo de LHM sintonizable. Este tipo puede ser sintonizado para responder a las diferentes frecuencias en lugar de frecuencias fijas solamente, como se muestra en la Fig. 16. Varias aplicaciones pueden surgir simplemente a partir de este tipo de LHM, tales como: la energía fotovoltaica, las gafas para bloquear el deslumbramiento y los dispositivos de procesamiento de señales ópticas para acelerar las comunicaciones, entre otras.

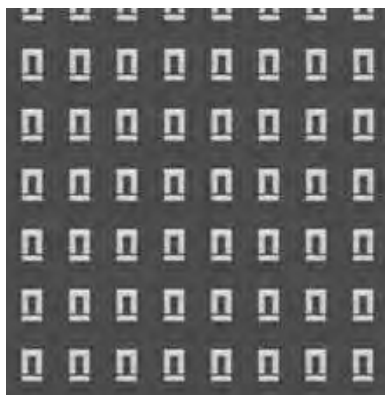


Figura 16. Arreglo de un SRRs compuesto de impresiones de plata sobre una extensión de polímero.

Otra aplicación importante de los LHM son los LHM plasmónicos que ofrecen un

importante impacto científico y tecnológico con aplicaciones que abarcan desde el diagnóstico médico, hasta la energía limpia y el procesamiento de la información. Un ejemplo de estas aplicaciones son los absorbentes de LHM (típicamente hechos de metales como Au, Ag, Cu o Ni), los cuales son capaces de absorber las ondas electromagnéticas debido a la excitación de los polaritones de plasmón de superficie (SPPs), que son oscilaciones colectivas de electrones libres sobre la interfaz entre el metal y el dieléctrico. En el año 2014, se diseñó y se fabricó un absorbente de LHM de TiN (Li *et al.*, 2014) con absorción de luz eficiente y de banda ancha. El absorbente de LHM de 240 nm de espesor presenta una absorción amplia independiente de la polarización sobre todo el intervalo visible de 400 – 800 nm, con un ángulo de incidencia grande (hasta 70°) y el cual muestra una enorme estabilidad térmica, ilustrando la promesa para aplicaciones de alta temperatura tales como la termo fotovoltaica solar. El absorbente de LHM tiene una estructura de tres capas como se muestra en la Fig. 17(a) el cual está formado de la siguiente manera: la capa superior tiene 30 nm de espesor de TiN, celdas unitarias en forma de anillo con longitudes de los lados exterior e interior de 250 nm y 150 nm, respectivamente. Se distribuyen periódicamente en ambas direcciones X e Y.

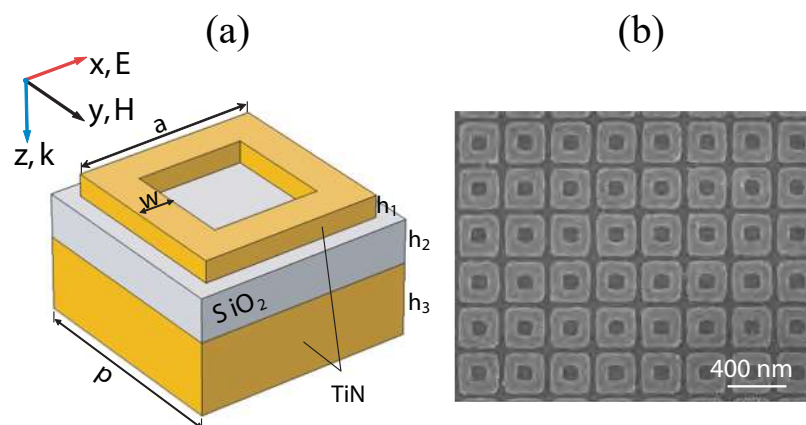


Figura 17. (a) Diagrama de una celda unitaria del absorbente de LHM de TiN de tres capas con dimensiones de $a = 250$ nm, $w = 50$ nm, $p = 300$ nm, $h_1 = 30$ nm, $h_2 = 60$ nm y $h_3 = 150$ nm. (b) Imagen del absorbente fabricado de TiN.

La celda simétrica de anillo cuadrado permite una absorción independiente de la polarización a una incidencia normal. La capa intermedia es una película de SiO_2 de 60 nm de espesor, que es un dieléctrico ópticamente transparente y sin pérdidas con un índice de refracción de aproximadamente 1.475 y un punto de fusión de 1600°C . La capa posterior es una película de TiN con un espesor de 150 nm, que tiene transmitancia casi cero. En los experimentos, se utilizó un sustrato de zafiro de 0.44 mm de espesor como sustrato de soporte para el LHM. En la Fig. 17(b) se muestra el absorbedor de LHM de TiN fabricado. Las esquinas cuadradas rectangulares diseñadas se redondearon con diámetros de aproximadamente 3 nm debido a la limitación de la técnica de fabricación. Los resultados del experimento muestran que la absorción del LHM de TiN supera el 87% en todo el rango visible de 400 – 800 nm. Esto confirma que el LHM de TiN con un espesor total de sólo 240 nm proporciona una absorción extremadamente fuerte y de banda ancha.

Los absorbedores electromagnéticos han atraído mucho interés en otras áreas debido a que las estructuras plasmónicas y LHM pueden funcionar como eficientes absorbentes de banda estrecha debido a la excitación de resonancias plasmónicas o fotónicas, proporcionando un gran potencial para aplicaciones en el diseño de emisores térmicos selectivos, biosensores, etc.

Otro tema importante sobre aplicaciones de los LHM es el ocultamiento e invisibilidad; es decir, el desarrollo de dispositivos capaces de proporcionar invisibilidad. El interés por la aplicación de los LHM a ocultamiento e invisibilidad ha experimentado un gran crecimiento, siendo una de las áreas de investigación en LHM con mayor actividad científica. En el año 2015 los científicos del Laboratorio Nacional Lawrence Berkeley (Berkeley Lab) y de la Universidad de California (UC) Berkeley, del Departamento de Energía de Estados Unidos (DOE), desarrollaron una capa de invisibilidad ultrafina (de aproximadamente 80 nanómetros de espesor) (Ni *et al.*, 2015) como se muestra en la

Fig. 18, que puede ajustarse a la forma de un objeto y ocultarlo de la detección con luz visible. La capa funciona utilizando nanoantenas de oro (bloques de oro) sobre la superficie, cada una manipulando la fase de la onda de luz que se dispersa en la capa. Aunque esta capa es sólo de tamaño microscópico, los principios detrás de la tecnología deben permitir que también se aplique para ocultar los elementos macroscópicos.

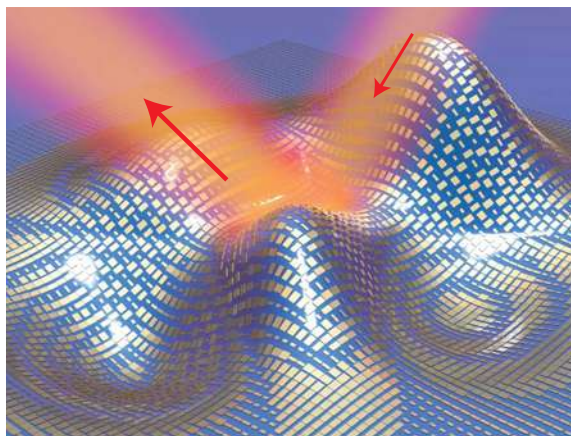


Figura 18. Capa de invisibilidad ultrafina formada por nanoantenas de oro (bloques de oro) que cubre un objeto. La luz se refleja en la capa (flechas rojas) como si estuviera reflejándose en un espejo plano.

El equipo de científicos liderado por Xiang Zhang probaron el funcionamiento de la capa ultrafina al cubrir un objeto de tamaño de $36 \mu\text{m}$ por $36 \mu\text{m}$ con una forma arbitraria. Cuando el objeto cubierto se iluminó con luz de longitud de onda de 730 nm (rojo oscuro) la intensidad de luz reflejada de la superficie de la capa era idéntica a la intensidad de luz reflejada por un espejo plano, haciendo que el objeto cubierto sea invisible incluso para los instrumentos sensibles a las fases. La superficie de la capa fue diseñada para redirigir las ondas de luz reflejadas y restaurar el frente de onda dispersado por el objeto, compensando la diferencia de fase usando elementos resonantes de desplazamiento de fase (nanoantenas) sobre la superficie de la capa. Así pues, un cambio de fase proporcionado por cada nanoantena individual restaura completamente, tanto el frente de onda como la fase de la luz dispersa, de modo que el objeto permanece

perfectamente oculto.

La capacidad de manipular las interacciones entre la luz y LHM ofrece tentadoras perspectivas de futuro para tecnologías como microscopios ópticos de alta resolución y computadoras ópticas super veloces. Las capas de invisibilidad a escala microscópica pueden resultar valiosas para ocultar la distribución detallada de los componentes microelectrónicos o para fines de cifrado de seguridad. En la macroescala, entre otras aplicaciones, estas capas de invisibilidad podrían resultar útiles para pantallas 3D.

Capítulo III

MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL

En este capítulo se presenta un desarrollo descriptivo del método integral que permite calcular las estructuras de bandas de un cristal fotónico bidimensional (CF2D) infinito y la respuesta electromagnética de un CF2D finito con superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contienen medios de LHM y/o dieléctrico, formado por una celda unitaria cuadrada.

III.1. Descripción del método de la ecuación integral

A continuación, se describe un método numérico para calcular las estructuras de bandas de un CF2D infinito y la respuesta electromagnética de un CF2D finito, basado en la solución numérica de la ecuación de Helmholtz usando ecuaciones integrales (Mendoza-Suárez *et al.*, 2007). Este método parte del segundo teorema integral de Green permitiendo obtener un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran como incógnitas, el modo del campo y su derivada normal evaluadas en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial

homogénea (CF2D infinito) y no homogénea (CF2D finito) cuya solución determina las funciones fuente. Con ellas se puede calcular las estructuras de bandas y la respuesta electromagnética de un CF2D infinito y finito, respectivamente.

Este método implica ecuaciones independientes del tiempo, por lo que la evolución en el tiempo de los sistemas no es una preocupación, y funciona a lo largo de los contornos de las fronteras involucradas en la geometría que se manejan. Esto presenta algunas ventajas en comparación con otros métodos, ya que sólo se tiene en cuenta un número finito de puntos de muestreo a lo largo de los contornos de la celda unitaria, permitiendo el uso de una menor cantidad de recursos computacionales.

III.1.1. CF2D infinito

Primeramente vamos a considerar el CF2D infinito, ya que es suficiente analizar una celda unitaria debido a la periodicidad del sistema propuesto.

Ecuación de onda

La descripción del siguiente método integral fue tomada de la Ref. (Mendoza-Suárez *et al.*, 2007), el cual se basa en medios compuestos de LHM. Como el objetivo de esta tesis es estudiar un CF2D que contiene medios de LHM y/o dieléctrico, formado por una celda cuadrada unitaria, se va a describir el método bajo la consideración de medios compuestos de LHM; sin embargo, cabe mencionar que el método se puede aplicar también a medios dieléctricos y conductores. Posteriormente, se tomará en cuenta las consideraciones para la propagación de ondas a través del CF2D finito propuesto (Fig. 19(b)).

En la Fig. 19(a) se muestra la geometría de un CF2D formado por una celda cuadrada que contiene una inclusión con una geometría arbitraria. El medio de la inclusión es un LHM con índice de refracción $n_2(\omega)$ y está rodeado por otro medio con

índice de refracción $n_1(\omega)$.

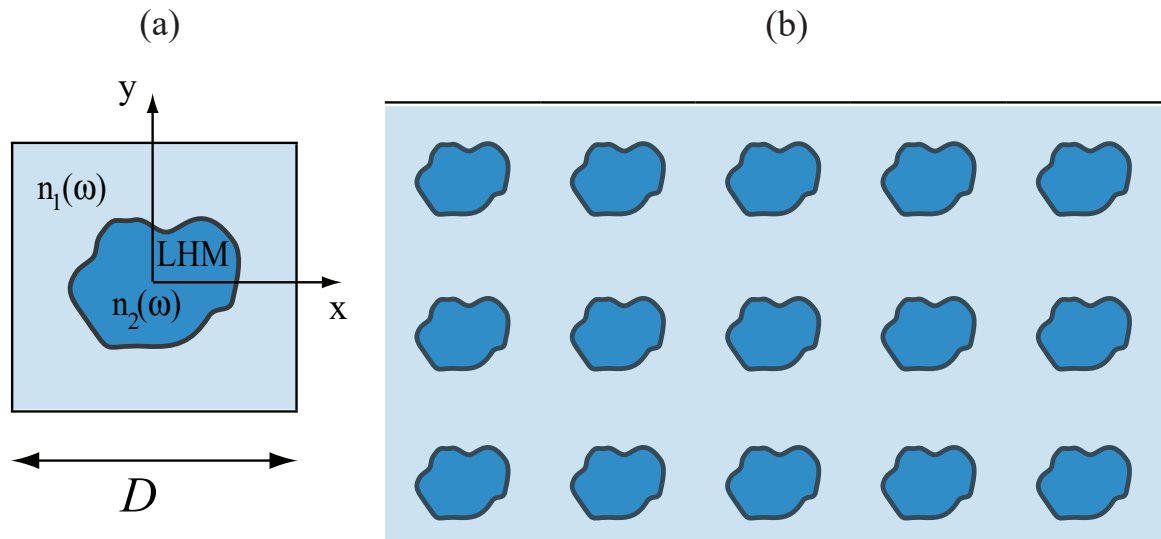


Figura 19. (a) Diagrama de un cristal fotónico bidimensional infinito. La celda unitaria cuadrada de longitud D está compuesta de dos materiales diferentes con índices de refracción $n_1(\omega)$ y $n_2(\omega)$, respectivamente. (b) CF2D finito correspondiente.

Todos los problemas sobre electromagnetismo, siempre que nos mantengamos en una situación macroscópica como es el caso de la propagación de la luz a través de un CF que contiene medios de LHM y/o dieléctrico, pueden tratarse a través de las ecuaciones de Maxwell. Para iniciar con el método integral, vamos a obtener la ecuación de onda para nuestro sistema propuesto. Se considerarán medios sin cargas ni corrientes ($\rho = 0$ y $J = 0$, respectivamente) cuyas propiedades del material dadas por la permitividad eléctrica $\varepsilon(\omega)$ y permeabilidad magnética $\mu(\omega)$ dependerán de la frecuencia ω . Asumiremos además, que la amplitud de los campos es lo suficientemente baja como para no exceder el régimen lineal.

Así, las ecuaciones de Maxwell correspondientes son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (60)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu(\omega) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (61)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (62)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{H} son los campos eléctrico y magnético, respectivamente; asimismo, \mathbf{D} y \mathbf{B} son los campos de desplazamiento eléctrico e inducción magnética. Además tenemos las ecuaciones constitutivas de los campos eléctrico y magnético para materiales lineales dadas por:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}, \quad (63)$$

$$\mathbf{B} = \mu(\omega) \mathbf{H}. \quad (64)$$

Al aplicar el rotacional a la Ec. (62), se tiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \quad (65)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon(\omega) \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}), \quad (66)$$

que al sustituir la Ec. (59) en la Ec. (66), se obtiene la ecuación de onda del campo magnético

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu(\omega) \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (67)$$

Procediendo de manera análoga, se obtiene la ecuación de onda del campo eléctrico

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu(\omega) \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (68)$$

donde el producto $\mu(\omega) \varepsilon(\omega) = 1/[v(\omega)]^2$, siendo $v(\omega)$ la velocidad de la onda en el medio y que depende de la frecuencia ω .

Como las ecuaciones de Maxwell son lineales, podemos separar la dependencia temporal de la dependencia espacial de los campos electromagnéticos, considerándolas independientes. En cuanto a la dependencia temporal, asumiremos que los campos varían sinusoidalmente en función del tiempo. Por ser funciones armónicas, sabemos por el teorema de Fourier, que cualquier solución a un problema electromagnético puede ser expresada como una combinación lineal de campos armónicos. Así, los campos eléctrico y magnético se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (69)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (70)$$

Estas ecuaciones, permiten transformar a las ecuaciones de onda de los campos eléctrico y magnético como las ecuaciones de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mu(\omega)\varepsilon(\omega)\omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (71)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mu(\omega)\varepsilon(\omega)\omega^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0. \quad (72)$$

Definiendo $k^2 = \mu(\omega)\varepsilon(\omega)\omega^2$ como la magnitud del vector de onda y tomando en cuenta que la velocidad en el vacío está dada por $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$ y que el índice de refracción está dado por $n(\omega) = c/v(\omega)$, se tiene que la relación de dispersión será:

$$k = n(\omega)\frac{\omega}{c}, \quad (73)$$

donde el índice de refracción $n(\omega) = \pm\sqrt{\mu_r(\omega)\varepsilon_r(\omega)}$ que involucra las propiedades de los materiales está dado en términos de la permeabilidad magnética $\mu_r(\omega)$ y de la permitividad eléctrica $\varepsilon_r(\omega)$ relativas, ambas funciones dependientes de la frecuencia ω (para medios dispersivos como el LHM). El signo que aparece en la expresión del índice de refracción debe ser tomado como negativo cuando se considere un LHM, y positivo, cuando el medio sea un material dieléctrico ($n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$, con $\mu_r > 0$ y $\varepsilon_r > 0$).

Así, las ecuaciones de onda (Ecs. (71) y (72)) para el campo eléctrico y magnético respectivamente, se pueden reescribir como:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (74)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0. \quad (75)$$

Más aún, las Ecs. (74) y (75) se pueden expresar en términos de la función Ψ que representa a cualquiera de los campos electromagnéticos, en la forma

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + k^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (76)$$

Es importante mencionar que el método integral será descrito muy brevemente, pero si el lector desea conocer el desarrollo detalladamente puede consultar la Ref. (Centeno-Jiménez, 2014).

Función de Green para la ecuación de Helmholtz

Para estudiar el sistema propuesto, la ecuación de Helmholtz se puede escribir como:

$$\nabla^2 \Psi_j(\mathbf{r}) + k_j^2 \Psi_j(\mathbf{r}) = 0, \quad (77)$$

donde j indica el j -ésimo medio, $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ es el vector de posición del punto de observación que es independiente de z para el CF2D. $\Psi_j(\mathbf{r})$ representa el campo eléctrico E_z , en el caso de la polarización TE y el campo magnético H_z , en el caso de la polarización TM. Además, la magnitud del vector de onda se define por

$$k_j = n_j(\omega) \frac{\omega}{c}, \quad (78)$$

donde la velocidad de la luz está indicada por c . Recordando que el signo que aparece en la expresión del índice de refracción $n(\omega) = \pm \sqrt{\mu_r(\omega)\varepsilon_r(\omega)}$, debe ser tomado como negativo cuando se considere un LHM y positivo, cuando el medio sea un material dieléctrico.

Para resolver la Ec. (77), se considera una función de Green $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ para el j -ésimo medio y que pueda cumplir en la forma

$$\nabla^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_j^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (79)$$

donde $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el propagador del campo debido a una fuente de luz puntual, que emite a la frecuencia ω en la posición \mathbf{r}' y $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la función delta de Dirac. Una solución de la Ec. (79) está representada por la siguiente función de Green

$$G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (80)$$

siendo $H_0^{(1)}(\zeta)$ la función de Hankel de primera clase y de orden cero (Mendoza-Suárez *et al.*, 2007).

Representación integral de la ecuación de Helmholtz

Se aplicará el segundo teorema integral de Green bidimensional para las funciones $\Psi_j(\mathbf{r})$ y $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en cada región correspondiente al j -ésimo medio. Para ello, se multiplica la Ec. (77) por $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y la Ec. (79) por $-\Psi_j(\mathbf{r})$ y se suman ambas ecuaciones, que al integrarlas sobre una superficie cerrada S_j limitada a su vez por un contorno cerrado Γ_j , nos permite obtener:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} [G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla\Psi_j(\mathbf{r}) - \Psi_j(\mathbf{r})\nabla G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \oint_{S_j} \Psi_j(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') da, \quad (81)$$

siendo ds el diferencial de la longitud de arco y da , el diferencial de área a considerar.

Como la derivada normal está definida como $\partial\Psi_j/\partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\Psi_j$, la Ec. (81) se puede reescribir como

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds = \Psi_j(\mathbf{r}')\theta(\mathbf{r}'), \quad (82)$$

donde la integral de superficie se ha representado mediante el producto del campo por

la función escalón de Heaviside:

$$\theta(\mathbf{r}') = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r}' \in S \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}' \notin S. \end{cases} \quad (83)$$

Considerando la convención de que \mathbf{r} representa la posición del observador (donde se mide el campo), se pueden intercambiar las variables \mathbf{r} y \mathbf{r}' en la Ec. (82)

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right] ds' = \Psi_j(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{r}), \quad (84)$$

de manera que \mathbf{r}' se desplaza sobre los contornos. Mediante un razonamiento análogo, se ha tomado en cuenta la definición de la derivada normal para la función de Green:

$$\frac{\partial G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r}), \quad (85)$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}'$ la normal a la superficie y \mathbf{r}' el vector que se desplaza sobre el contorno cerrado Γ_j , como se muestra en la Fig. 20. De forma similar para $\partial \Psi_j(\mathbf{r}') / \partial n' = \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Psi_j(\mathbf{r}')$.

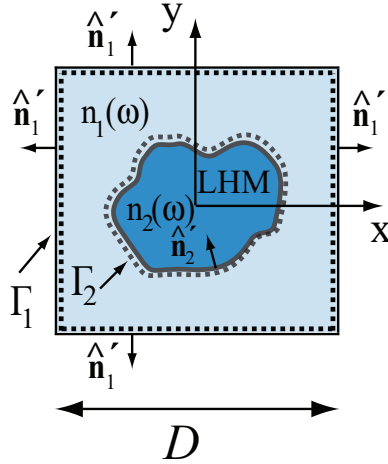


Figura 20. Celda unitaria de un CF2D compuesto de dos materiales diferentes con índices de refracción $n_1(\omega)$ y $n_2(\omega)$ en una celda cuadrada con una inclusión de forma arbitraria, con su vector normal $\hat{\mathbf{n}}'$ perpendicular al contorno Γ_j correspondiente.

Por lo tanto, la ecuación de Helmholtz para los campos en un sistema 2D en el punto \mathbf{r}' se puede representar mediante la ecuación integral

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds' = \Psi_j(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{r}), \quad (86)$$

donde

$$G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j | \mathbf{r} - \mathbf{r}' |), \quad (87)$$

es la función de Green en medios homogéneos. En la Ec. (86), la superficie S_j está limitada por el contorno cerrado Γ_j correspondiente y la derivada normal $\partial/\partial n'$ va hacia afuera del contorno Γ_j .

Discretización de la ecuación integral

Como uno de los objetivos de esta tesis es calcular las estructuras de bandas para un CF2D que contiene medios de LHM y/o dieléctrico, se considera una celda unitaria cuadrada compuesta por dos materiales diferentes con índices de refracción $n_1(\omega)$ y $n_2(\omega)$ y una inclusión con geometría arbitraria como se muestra en la Fig. 21.

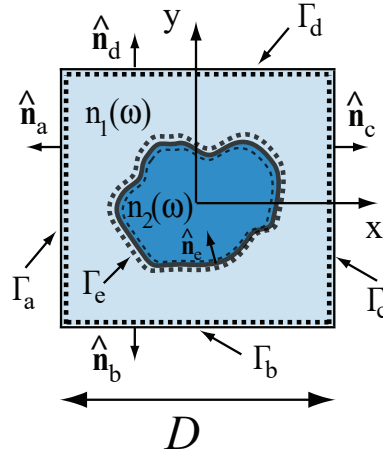


Figura 21. Celda unitaria de un CF2D con una red cuadrada y una inclusión de forma arbitraria compuesta por dos materiales diferentes con índices de refracción $n_1(\omega)$ y $n_2(\omega)$, respectivamente. Los medios están limitados por los contornos $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c, \Gamma_d$ y Γ_e , cuyos vectores normales van hacia afuera de la región 1.

Se aplicará el teorema de Green bidimensional (Ec. (86)) para cada región sobre los contornos $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c + \Gamma_d + \Gamma_e$ y $\Gamma_2 = \Gamma_e$. Podemos representar un conjunto de ecuaciones integrales acopladas para $\Psi_j(\mathbf{r}')$ y $\partial\Psi_j(\mathbf{r}')/\partial n'$ permitiendo que \mathbf{r} represente los vectores $\mathbf{R}_a + \xi\hat{\mathbf{n}}_a, \mathbf{R}_b + \xi\hat{\mathbf{n}}_b, \mathbf{R}_c + \xi\hat{\mathbf{n}}_c, \mathbf{R}_d + \xi\hat{\mathbf{n}}_d$ y $\mathbf{R}_e + \xi\hat{\mathbf{n}}_e$, donde $\mathbf{R}_a, \mathbf{R}_b, \mathbf{R}_c, \mathbf{R}_d$

y \mathbf{R}_e son los vectores de posición usados para recorrer los contornos $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c, \Gamma_d$ y Γ_e , respectivamente. El parámetro ξ es una cantidad infinitesimal positiva y los vectores normales correspondientes a los contornos son $\hat{\mathbf{n}}_a, \hat{\mathbf{n}}_b, \hat{\mathbf{n}}_c, \hat{\mathbf{n}}_d$ y $\hat{\mathbf{n}}_e$ (ver Fig. 21). Por consiguiente, la ecuación integral para la región 1 con índice de refracción $n_1(\omega)$ es

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\Gamma_a} \left[G_1(\mathbf{R}_a + \xi \hat{\mathbf{n}}_a, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_a}{\partial n'_a} - \Psi_a \frac{\partial G_1(\mathbf{R}_a + \xi \hat{\mathbf{n}}_a, \mathbf{r}')}{\partial n'_a} \right] ds' \right. \\ + \int_{\Gamma_b} \left[G_1(\mathbf{R}_b + \xi \hat{\mathbf{n}}_b, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_b}{\partial n'_b} - \Psi_b \frac{\partial G_1(\mathbf{R}_b + \xi \hat{\mathbf{n}}_b, \mathbf{r}')}{\partial n'_b} \right] ds' \\ + \int_{\Gamma_c} \left[G_1(\mathbf{R}_c + \xi \hat{\mathbf{n}}_c, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_c}{\partial n'_c} - \Psi_c \frac{\partial G_1(\mathbf{R}_c + \xi \hat{\mathbf{n}}_c, \mathbf{r}')}{\partial n'_c} \right] ds' \\ + \int_{\Gamma_d} \left[G_1(\mathbf{R}_d + \xi \hat{\mathbf{n}}_d, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_d}{\partial n'_d} - \Psi_d \frac{\partial G_1(\mathbf{R}_d + \xi \hat{\mathbf{n}}_d, \mathbf{r}')}{\partial n'_d} \right] ds' \\ \left. + \int_{\Gamma_e} \left[G_1(\mathbf{R}_e + \xi \hat{\mathbf{n}}_e, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_e}{\partial n'_e} - \Psi_e \frac{\partial G_1(\mathbf{R}_e + \xi \hat{\mathbf{n}}_e, \mathbf{r}')}{\partial n'_e} \right] ds' \right\} = 0, \end{aligned} \quad (88)$$

y para la región 2,

$$\frac{1}{4\pi} \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left\{ - \int_{\Gamma_e} \left[G_2(\mathbf{R}_e + \xi \hat{\mathbf{n}}_e, \mathbf{r}') \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial n'_e} - \tilde{\Psi}_e \frac{\partial G_2(\mathbf{R}_e + \xi \hat{\mathbf{n}}_e, \mathbf{r}')}{\partial n'_e} \right] ds' \right\} = \tilde{\Psi}_e. \quad (89)$$

Es necesario el límite para evitar una singularidad en la función de Green cuando su argumento es cero. La geometría del problema está descrita por la representación de puntos a lo largo del contorno Γ_j con coordenadas $x(s), y(s)$ como funciones paramétricas de la longitud de arco s y de sus respectivas derivadas hasta de segundo orden: $x'(s), y'(s), x''(s)$ y $y''(s)$. Estas funciones se consideran continuas al menos por tramos.

En las Ecs. (88) y (89) tenemos dos integrales de contorno que se denotarán por

$$I_G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \quad (90)$$

$$I_{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds'. \quad (91)$$

Para resolver numéricamente las Ecs. (90) y (91) se realiza una discretización, ya que en el formalismo general, las integrales no se pueden resolver de manera exacta.

Para esto, dividimos el contorno Γ_j en n pequeños segmentos de longitud de arco Δs

$$I_G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \quad (92)$$

$$I_\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds'. \quad (93)$$

Si Δs es suficientemente pequeño para un muestreo fino, entonces podemos considerar que el campo $\Psi_j(\mathbf{r}')$ y su derivada normal $\partial \Psi_j(\mathbf{r}')/\partial n'$ son aproximadamente constantes. Así, las ecuaciones anteriores se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$I_G(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^j \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds', \quad (94)$$

$$I_\Psi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^j \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \quad (95)$$

donde se han definido las funciones

$$\Phi_n^j = \left. \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}, \quad (96)$$

$$\Psi_n^j = \Psi_j(\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}. \quad (97)$$

Evaluando las integrales de las Ecs. (94) y (95) en el punto de observación $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m$, podemos definir los elementos de matriz como:

$$L_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G_j(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') ds', \quad (98)$$

$$N_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G_j(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \quad (99)$$

donde el subíndice m indica el punto de observación y el subíndice n el punto de integración.

Estos elementos de matriz (para más detalles, ver la Ref. (Centeno-Jiménez, 2014)) están dados por las expresiones:

$$L_{mn}^{(j)} = \frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)}(k_j R_{mn})(1 - \delta_{mn}) + \left[\frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left(k_j \frac{\Delta s}{2e} \right) \right] \delta_{mn}, \quad (100)$$

$$N_{mn}^{(j)} = \frac{i\Delta s}{4} k_j H_1^{(1)}(k_j R_{mn}) \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} (1 - \delta_{mn}) + \left[\frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n \right] \delta_{mn}, \quad (101)$$

siendo

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \mathbf{R}_{mn} = -y'(s)(x_m - x_n) + x'(s)(y_m - y_n), \quad (102)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s), \quad (103)$$

$$R_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}. \quad (104)$$

Por tanto, haciendo uso de las Ecs. (98) y (99) se pueden reescribir las Ecs. (94) y (95) como:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^j \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G_j(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') ds' \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{mn}^j \Phi_n^j, \quad (105)$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^j \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G_j(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds' \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_{mn}^j \Psi_n^j. \quad (106)$$

Ahora, sustituyendo las Ecs. (105) y (106) en las Ecs. (88) y (89) obtenemos un conjunto de $N_{abcd} + 2N_e$ ecuaciones algebraicas homogéneas, donde cada contorno es muestreado en un número finito de puntos igualmente espaciados: N_a para Γ_a , N_b para Γ_b , ..., y así sucesivamente. Por ende, $N_{abcd} = N_a + N_b + N_c + N_d$ (donde $N_a = N_c$, $N_b = N_d$).

Para cada región con $m = 1 + 2, \dots, N_{abcd} + N_e$, se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{n=1}^{N_a} N_{mn}^1 \Psi_a^n - \sum_{n=1}^{N_a} L_{mn}^1 \Phi_a^n \right] + \left[\sum_{n=N_a+1}^{N_a+N_b} N_{mn}^1 \Psi_b^n - \sum_{n=N_a+1}^{N_a+N_b} L_{mn}^1 \Phi_b^n \right] \\
& + \left[\sum_{n=N_a+N_b+1}^{N_{abcd}-N_d} N_{mn}^1 \Psi_c^n - \sum_{n=N_a+N_b+1}^{N_{abcd}-N_d} L_{mn}^1 \Phi_c^n \right] \\
& + \left[\sum_{n=N_{abcd}-N_d+1}^{N_{abcd}} N_{mn}^1 \Psi_d^n - \sum_{n=N_{abcd}-N_d+1}^{N_{abcd}} L_{mn}^1 \Phi_d^n \right] \\
& + \left[\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} N_{mn}^1 \Psi_e^n - \sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} L_{mn}^1 \Phi_e^n \right] = 0,
\end{aligned} \tag{107}$$

y para $m = N_{abcd} + N_e + 1, \dots, N_{abcd} + 2N_e$,

$$\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} N_{mn}^2 \tilde{\Psi}_e^n - \sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} L_{mn}^2 \tilde{\Phi}_e^n = \tilde{\Psi}_e^n. \tag{108}$$

Debido a la geometría del CF2D propuesto (ver Fig. 21), se tiene que en este caso las condiciones de periodicidad son:

$$\Psi_c = \Psi_a \exp(ik_x D), \quad \Phi_c = -\Phi_a \exp(ik_x D), \tag{109}$$

$$\Psi_d = \Psi_b \exp(ik_y D), \quad \Phi_d = -\Phi_b \exp(ik_y D), \tag{110}$$

donde el signo menos está presente debido a que los vectores normales a los perfiles Γ_a y Γ_c , Γ_b y Γ_d son opuestos. Recordar que D es la longitud de la celda cuadrada tanto en la dirección x , así como a lo largo de la dirección y . Por otro lado, tenemos que las condiciones de frontera para el contorno Γ_e son:

$$\tilde{\Psi}_e = \Psi_e, \quad \tilde{\Phi}'_e = \frac{f_2}{f_1} \Phi_e, \tag{111}$$

siendo la cantidad f_j dada por

$$f_j = \begin{cases} \mu_j(\omega) & \text{para polarización TE} \\ \varepsilon_j(\omega) & \text{para polarización TM.} \end{cases} \tag{112}$$

Aplicando las condiciones de frontera y de periodicidad en las Ecs. (107) y (108), se tiene

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{n=1}^{N_a} N_{mn}^1 \Psi_a^n - \sum_{n=1}^{N_a} L_{mn}^1 \Phi_a^n \right] + \left[\sum_{n=N_a+1}^{N_a+N_b} N_{mn}^1 \Psi_b^n - \sum_{n=N_a+1}^{N_a+N_b} L_{mn}^1 \Phi_b^n \right] \\
& + \left[\exp(ik_x D) \sum_{n=N_a+N_b+1}^{N_{abcd}-N_d} N_{mn}^1 \Psi_a^n + \exp(ik_x D) \sum_{n=N_a+N_b+1}^{N_{abcd}-N_d} L_{mn}^1 \Phi_a^n \right] \\
& + \left[\exp(ik_y D) \sum_{n=N_{abcd}-N_d+1}^{N_{abcd}} N_{mn}^1 \Psi_b^n + \exp(ik_y D) \sum_{n=N_{abcd}-N_d+1}^{N_{abcd}} L_{mn}^1 \Phi_b^n \right] \\
& + \left[\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} N_{mn}^1 \Psi_e^n - \sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} L_{mn}^1 \Phi_e^n \right] = 0, \tag{113}
\end{aligned}$$

y

$$\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} (N_{mn}^2 - \delta_{mn}) \Psi_e^n - \frac{f_2}{f_1} \sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} L_{mn}^2 \Phi_e^n = 0. \tag{114}$$

En la Ec. (114) es necesario considerar que $\Psi_a^n = \Psi_a^{n+N_a+N_b}$ y $\Phi_a^n = \Phi_a^{n+N_a+N_b}$, con $n = 1, 2, \dots, N_a$. Además de $\Psi_a^{n+N_a} = \Psi_a^{n+N_a+N_b+N_c}$ y $\Phi_a^{n+N_a} = \Phi_a^{n+N_a+N_b+N_c}$ con $n = 1, 2, \dots, N_b$.

El sistema de ecuaciones algebraico determinado por las Ecs. (113) y (114) determinan una matriz cuadrada M de dimensión $N_{abcd} + 2N_e$. Este sistema es homogéneo, por lo que para obtener una solución no trivial su determinante debe ser cero. Así, para la función real definida como

$$D(k, \omega) = \ln [|\det(M)|], \tag{115}$$

sus puntos mínimos locales darán la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$ que determina la estructura de bandas.

III.1.2. CF2D finito

Ahora vamos a considerar el caso finito para estudiar la respuesta óptica del sistema propuesto.

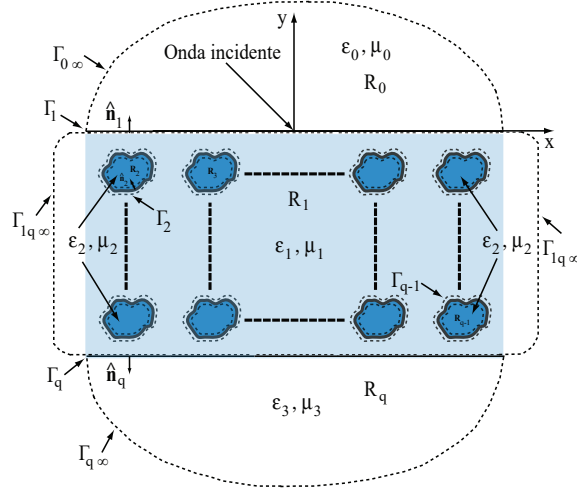


Figura 22. Diagrama de un CF2D finito. Los contornos de integración se indican por las curvas discontinuas. R_0 y R_q representan las regiones que encierran los medios de incidencia y de transmisión, respectivamente.

El método integral también es adecuado para el cálculo de la distribución del campo eléctrico o magnético en las regiones de campo cercano y lejano para un CF2D finito truncado (Fig. 22).

Aplicando el teorema de Green para la región de incidencia (vacío) con una onda incidente (Fig. 22), se obtiene el campo total (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006; Mendoza-Suárez y Méndez, 1997):

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_{inc}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \left[\Psi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'_1} - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_1} \right] ds', \quad (116)$$

donde $\Psi_{inc}(\mathbf{r})$ representa el campo incidente y $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función de Green en la región del vacío.

Considerando las condiciones de frontera sobre el campo y su derivada normal a lo largo de los diferentes contornos Γ_p (Fig. 22), el sistema de ecuaciones puede ser expresado finalmente por:

Sistema finito formado por una interfaz

$$\sum_{n=1}^{N_1} \left(\delta_{mn(1)} - N_{mn(1)}^{(0)} \right) \Psi_{n(1)}^{(1)} + \frac{f_0}{f_1} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(0)} \Phi_{n(1)}^{(1)} = \Psi_m^{inc}, \quad (117)$$

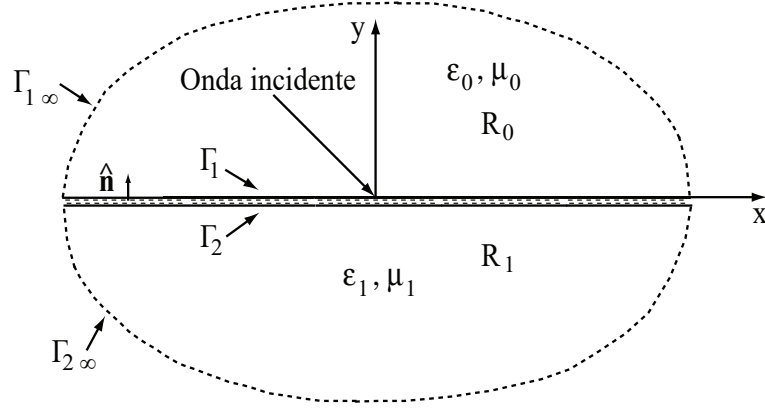


Figura 23. Diagrama de un sistema finito formado por una interfaz entre dos medios. Los contornos de integración se indican por las curvas discontinuas. R_0 y R_1 representan las regiones que encierran los medios de incidencia y de transmisión, respectivamente.

$$-\sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1)}^{(1)} \Psi_{n(1)}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(1)} \Phi_{n(1)}^{(1)} = 0. \quad (118)$$

Este sistema lineal e inhomogéneo de ecuaciones determina una matriz cuadrada M de rango $2N_1 \times 2N_1$. Para este caso, se ha considerado que el medio de incidencia tiene las propiedades ópticas dadas por la permeabilidad magnética μ_0 y permitividad eléctrica ϵ_0 y, que el medio de transmisión, tiene las propiedades dadas por (μ_1, ϵ_1) , como se muestra en la Fig. 23.

Sistema finito formado por dos interfaces

$$\sum_{n=1}^{N_1} \left(\delta_{mn(1)} - N_{mn(1)}^{(0)} \right) \Psi_{n(1)}^{(1)} + \frac{f_0}{f_1} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(0)} \Phi_{n(1)}^{(1)} = \Psi_m^{inc}, \quad (119)$$

$$-\sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1)}^{(1)} \Psi_{n(1)}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(1)} \Phi_{n(1)}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_2} N_{mn(2)}^{(1)} \Psi_{n(2)}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^{(1)} \Phi_{n(2)}^{(1)} = 0, \quad (120)$$

$$\sum_{n=1}^{N_2} \left(\delta_{mn(2)} - N_{mn(2)}^{(2)} \right) \Psi_{n(2)}^{(1)} + \frac{f_2}{f_1} \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^{(2)} \Phi_{n(2)}^{(1)} = 0. \quad (121)$$

Este sistema lineal e inhomogéneo de ecuaciones determina una matriz cuadrada M de rango $2(N_1 + N_2) \times 2(N_1 + N_2)$. Para este caso se ha considerado que el medio de incidencia tiene las propiedades ópticas dadas por la permeabilidad magnética μ_0 y

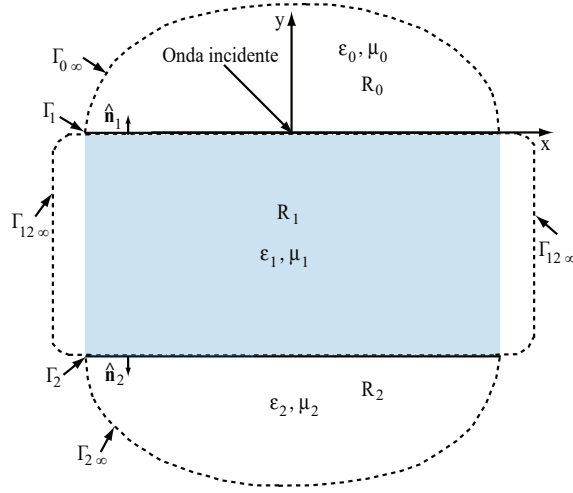


Figura 24. Diagrama de un sistema finito formado por dos interfaces entre tres medios. Los contornos de integración se indican por las curvas discontinuas. R_0 , R_1 , y R_2 representan las regiones que encierran el medio de incidencia, el medio entre las interfaces y el medio de transmisión, respectivamente.

permitividad eléctrica ε_0 , el medio entre las interfaces tiene las propiedades dadas por μ_1 , ε_1 y el medio de transmisión tiene las propiedades dadas por μ_2 , ε_2 (ver Fig. 24).

Sistema finito formado por dos interfaces y una inclusión

$$\sum_{n=1}^{N_1} \left(\delta_{mn(1)} - N_{mn(1)}^{(0)} \right) \Psi_{n(1)}^{(1)} + \frac{f_0}{f_1} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(0)} \Phi_{n(1)}^{(1)} = \Psi_m^{inc}, \quad (122)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1)}^{(1)} \Psi_{n(1)}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(1)} \Phi_{n(1)}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_2} N_{mn(2)}^{(1)} \Psi_{n(2)}^{(1)} \\ & + \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^{(1)} \Phi_{n(2)}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_3} N_{mn(3)}^{(1)} \Psi_{n(3)}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_3} L_{mn(3)}^{(1)} \Phi_{n(3)}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (123)$$

$$\sum_{n=1}^{N_2} \left(\delta_{mn(2)} - N_{mn(2)}^{(2)} \right) \Psi_{n(2)}^{(1)} + \frac{f_2}{f_1} \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^{(2)} \Phi_{n(2)}^{(1)} = 0, \quad (124)$$

$$\sum_{n=1}^{N_3} \left(\delta_{mn(3)} - N_{mn(3)}^{(3)} \right) \Psi_{n(3)}^{(1)} + \frac{f_3}{f_1} \sum_{n=1}^{N_3} L_{mn(3)}^{(3)} \Phi_{n(3)}^{(1)} = 0. \quad (125)$$

Este sistema lineal e inhomogéneo de ecuaciones determina una matriz cuadrada M de rango $2(N_1 + N_2 + N_3) \times 2(N_1 + N_2 + N_3)$. Para este caso se ha considerado

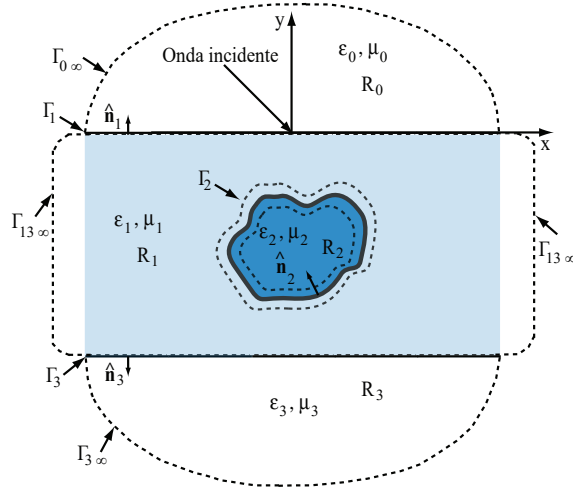


Figura 25. Diagrama de un sistema finito formado por dos interfaces y una inclusión de geometría arbitraria. Los contornos de integración se indican por las curvas discontinuas. R_0 , R_1 , R_2 y R_3 representan las regiones que encierran el medio de incidencia, el medio entre las interfaces, el medio que contiene la inclusión y el medio de transmisión, respectivamente.

que el medio de incidencia tiene las propiedades ópticas dadas por la permeabilidad magnética μ_0 y permitividad eléctrica ε_0 , el medio que contiene a la inclusión tiene las propiedades dadas por μ_1 , ε_1 , la inclusión tiene las propiedades dadas por μ_2 , ε_2 y el medio de transmisión tiene las propiedades dadas por (μ_3, ε_3) , mostradas en la Fig. 25.

Sistema finito formado por dos interfaces y q inclusiones (CF2D finito)

Por la misma analogía presente en los casos anteriores, el sistema de ecuaciones para un CF2D finito formado por dos interfaces y q inclusiones (Fig. 22), puede ser expresado como

$$\sum_{n=1}^{N_1} \left(\delta_{mn(1)} - N_{mn(1)}^{(0)} \right) \Psi_{n(1)}^{(1)} + \frac{f_0}{f_1} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(0)} \Phi_{n(1)}^{(1)} = \Psi_m^{inc}, \quad (126)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1)}^{(1)} \Psi_{n(1)}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(1)} \Phi_{n(1)}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_2} N_{mn(2)}^{(1)} \Psi_{n(2)}^{(1)} \\ & + \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^{(1)} \Phi_{n(2)}^{(1)} + \dots - \sum_{n=1}^{N_q} N_{mn(q)}^{(1)} \Psi_{n(q)}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_q} L_{mn(q)}^{(1)} \Phi_{n(q)}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (127)$$

$$\sum_{n=1}^{N_2} \left(\delta_{mn(2)} - N_{mn(2)}^{(2)} \right) \Psi_{n(2)}^{(1)} + \frac{f_2}{f_1} \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^{(2)} \Phi_{n(2)}^{(1)} = 0, \quad (128)$$

$$\sum_{n=1}^{N_3} \left(\delta_{mn(3)} - N_{mn(3)}^{(2)} \right) \Psi_{n(3)}^{(1)} + \frac{f_2}{f_1} \sum_{n=1}^{N_3} L_{mn(3)}^{(2)} \Phi_{n(3)}^{(1)} = 0, \quad (129)$$

...

$$\sum_{n=1}^{N_{q-1}} \left(\delta_{mn(q-1)} - N_{mn(q-1)}^{(2)} \right) \Psi_{n(q-1)}^{(1)} + \frac{f_2}{f_1} \sum_{n=1}^{N_{q-1}} L_{mn(q-1)}^{(2)} \Phi_{n(q-1)}^{(1)} = 0, \quad (130)$$

$$\sum_{n=1}^{N_q} \left(\delta_{mn(q)} - N_{mn(q)}^{(3)} \right) \Psi_{n(q)}^{(1)} + \frac{f_3}{f_1} \sum_{n=1}^{N_q} L_{mn(q)}^{(3)} \Phi_{n(q)}^{(1)} = 0. \quad (131)$$

Este sistema lineal e inhomogéneo de ecuaciones determina una matriz cuadrada M de rango $2(\sum_{p=1}^q N_p) \times 2(\sum_{p=1}^q N_p)$. Se ha supuesto (ver Fig. 22) que el medio de incidencia tiene las propiedades ópticas dadas por la permeabilidad magnética μ_0 y permitividad eléctrica ε_0 , el medio que contiene las inclusiones tiene las propiedades dadas por μ_1, ε_1 , las q inclusiones (consideradas iguales) tienen las propiedades dadas por μ_2, ε_2 y el medio de transmisión tiene las propiedades dadas por μ_3, ε_3 .

Cada sistema de ecuaciones lineales e inhomogéneas (para los diferentes sistemas finitos) pueden resolverse numéricamente para determinar el campo y su derivada normal, a lo largo de todos los contornos. Es importante mencionar que ya se han utilizado las condiciones de frontera dadas por la Ec. (111). Por lo tanto, el campo eléctrico o magnético en cualquier punto del espacio, se puede determinar por medio de la Ec. (116) a lo largo de los diferentes contornos, en el caso de que el punto de observación \mathbf{r} se encuentra dentro del medio incidente.

III.1.3. El campo y la potencia incidente (Onda plana)

Una vez que se obtienen las fuentes $\Psi_n^{(1)}$ y $\Phi_n^{(1)}$, ahora se puede calcular el campo en cualquier punto dentro de las regiones que constituyen el sistema mediante las mismas ecuaciones integrales. Como ejemplo ilustrativo, se muestra el caso de una interfaz que

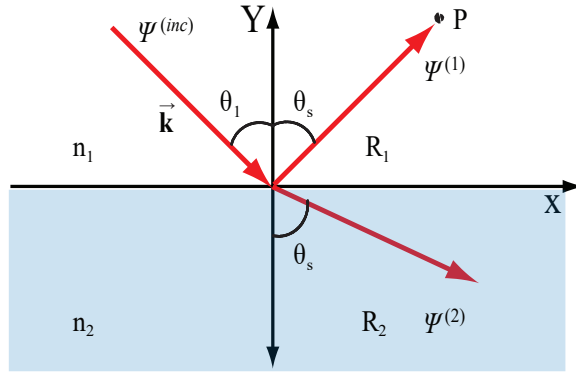


Figura 26. Campo incidente $\Psi^{(inc)}$ con ángulo de incidencia θ_1 y campo esparcido $\Psi^{(1)}$ para θ_s , en la región R_1 . En la región R_2 , $\Psi^{(2)}$ con ángulo de esparcimiento θ_s (casos de reflexión y transmisión, respectivamente).

separa dos medios (ver Fig. 26). Si $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_1$, la ecuación correspondiente es

$$\Psi_m^{(1)} = \sum_{n=1}^N L_{mn}^{(1)} \Phi_n^{(1)} - \sum_{n=1}^N N_{mn}^{(1)} \Psi_n^{(1)} - \Psi_m^{inc(1)}. \quad (132)$$

De lo contrario, si $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_2$, con la ecuación asociada

$$\Psi_m^{(2)} = \sum_{n=1}^N L_{mn}^{(2)} \Phi_n^{(2)} - \sum_{n=1}^N N_{mn}^{(2)} \Psi_n^{(2)}, \quad (133)$$

se obtiene el campo en ambas regiones. Puede verse, a partir de la Fig. 26, que se cumplen las siguientes relaciones:

$$k_{1x} = k_1 \sin \theta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 \sin \theta_1, \quad (134)$$

$$k_{1y} = -k_1 \cos \theta_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} n_1 \cos \theta_1. \quad (135)$$

Por lo que, el campo incidente está dado por

$$\Psi^{(inc)}(\mathbf{r}) = \Psi_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} n_1 [x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1]}, \quad (136)$$

o bien,

$$\Psi^{(inc)}(\mathbf{r}) = \Psi_0 e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (137)$$

donde Ψ_0 es una constante con unidades adecuadas, \mathbf{k} es el vector de onda y \mathbf{r} la posición de cada punto sobre el cual la onda incide.

Para el campo lejano se utilizarán las expresiones

$$L_{mn} \approx \frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)}(kR_{mn}), \quad (138)$$

y

$$N_{mn} \approx \frac{i\Delta s}{4} k H_1^{(1)}(kR_{mn}) \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}}, \quad (139)$$

que están definidas en las Ecs. (100) y (101), respectivamente. Aquí, $\mathbf{R}_{mn} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n$ donde $\mathbf{r}_m = r_m \sin \theta_s \hat{\mathbf{i}} + r_m \cos \theta_s \hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{r}_n = x_n \hat{\mathbf{i}} + y_n \hat{\mathbf{j}}$.

Tomando en cuenta que el observador r_m se encuentra muy lejos del sistema; es decir, que $r_m \gg r_n$ y $r_m \gg \lambda$. Así pues, se necesita una aproximación asintótica de la función de Hankel $H_0^{(1)}$ para argumentos grandes, por lo que se considera la expresión

$$H_0^{(1)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ix}, \quad (140)$$

donde $x = kR_{mn}$, siendo

$$\begin{aligned} R_{mn} &= \sqrt{(r_m - r_n) \cdot (r_m - r_n)} = \sqrt{r_m^2 - 2r_m \cdot r_n + r_n^2} \\ &= r_m \sqrt{1 - \frac{2r_m \cdot r_n}{r_m^2} + \left(\frac{r_n}{r_m}\right)^2} \approx r_m \sqrt{1 - \frac{2r_m \cdot r_n}{r_m^2}} \\ &\approx r_m \left(1 - \frac{r_m \cdot r_n}{r_m^2}\right) = r_m - \frac{r_m \cdot r_n}{r_m}. \end{aligned} \quad (141)$$

Por ende,

$$\sqrt{R_{mn}} \approx \sqrt{r_m} \sqrt{\left(1 - \frac{r_m \cdot r_n}{r_m^2}\right)} \approx \sqrt{r_m}, \quad (142)$$

donde $\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n = r_m x_n \sin \theta_s + r_m y_n \cos \theta_s$, para θ_s es el ángulo de esparcimiento de la luz. Sustituyendo la Ec. (140) con las aproximaciones de las Ecs. (141) y (142) en la Ec. (138):

$$\begin{aligned} L_{mn} &\approx \left(\frac{i\Delta s}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \frac{e^{ikr_m}}{\sqrt{r_m}} e^{-\frac{ik}{r_m}(r_m x_n \sin \theta_s + r_m y_n \cos \theta_s)}, \\ &\approx \left(\frac{i\Delta s}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \frac{e^{ikr_m}}{\sqrt{r_m}} e^{-ik(x_n \sin \theta_s + y_n \cos \theta_s)}. \end{aligned} \quad (143)$$

Designando como

$$q = \left(\frac{i\Delta s}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right), \quad (144)$$

podemos expresar

$$L_{mn} \approx q \frac{e^{ikr_m}}{\sqrt{r_m}} e^{-ik(x_n \sin \theta_s + y_n \cos \theta_s)}. \quad (145)$$

Análogamente, la función $H_1^{(1)}(x)$ para argumentos grandes

$$H_1^{(1)} \approx -i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ix} = -iH_0^{(1)}, \quad (146)$$

se tiene que

$$\hat{\mathbf{R}}_{mn} = \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} \approx \frac{x_m}{r_m} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y_m}{r_m} \hat{\mathbf{j}}, \quad (147)$$

donde $x_m = r_m \sin \theta_s$ y $y_m = r_m \cos \theta_s$; es decir, $\hat{\mathbf{R}}_{mn} \approx \sin \theta_s \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta_s \hat{\mathbf{j}}$.

Sustituyendo las Ecs. (146) y (147) en la Ec. (139), tenemos

$$N_{mn} \approx \left(q \frac{e^{ikr_m}}{\sqrt{r_m}} e^{-ik(x_n \sin \theta_s + y_n \cos \theta_s)} \right) (-ik \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{R}}_{mn}). \quad (148)$$

Por lo tanto, el campo reflejado dado por la Ec. (132) se puede reescribir como

$$\Psi_m^{(1)} = q \frac{e^{ik_1 r_m}}{\sqrt{r_m}} \sum_{n=1}^N (\Phi_n^{(1)} + ik_1 (-y'_n \sin \theta_s + x'_n \cos \theta_s) \Psi_n^{(1)}) e^{-ik_1(x_n \sin \theta_s + y_n \cos \theta_s)}. \quad (149)$$

Nótese que en esta expresión se omitió el término del campo incidente. Similarmente, para la región de transmisión donde $\mathbf{r}_m \in \mathbf{R}_2$:

$$\Psi_m^{(2)} = q \frac{e^{ik_2 r_m}}{\sqrt{r_m}} \sum_{n=1}^N (\Phi_n^{(2)} + ik_2 (-y'_n \sin \theta_s + x'_n \cos \theta_s) \Psi_n^{(2)}) e^{-ik_2(x_n \sin \theta_s + y_n \cos \theta_s)}. \quad (150)$$

Ahora se va a determinar la potencia total incidente. Para ello, analizamos que la onda incidente que se propaga depende de la orientación del campo electromagnético. Primeramente consideraremos el caso de la polarización TE, cuyos campos eléctrico y magnético correspondientes son

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_z(x, y) \hat{\mathbf{k}}, \quad (151)$$

y

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + H_y(x, y) \hat{\mathbf{j}}. \quad (152)$$

Para calcular el coeficiente de reflexión diferencial, el cual representa la fracción de energía incidente sobre una superficie que es esparcida por unidad de ángulo, se necesita calcular tanto el flujo incidente total así como el flujo esparcido total. Para esto, se emplea el vector de Poynting \mathbf{S} , que proporciona la dirección y magnitud del flujo de energía por unidad de tiempo. Empleando la notación compleja se tiene que

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (153)$$

El promedio temporal del vector de Poynting de una onda representa la potencia media que la onda transporta por unidad de área transversal a la propagación y se conoce como densidad de potencia o irradiancia, la cual está dada por

$$P = \frac{1}{2} |\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)| = \frac{1}{2} |\text{Re} [E_z(x, y)H_x^*(x, y) \hat{\mathbf{j}} - E_z(x, y)H_y^*(x, y) \hat{\mathbf{i}}]|. \quad (154)$$

Dado que sólo se está interesado en el flujo de energía a través de la interfaz, solamente contribuirá un sólo término (a saber, el término de la componente en $\hat{\mathbf{j}}$). Por lo que, la ecuación anterior puede ser escrita como

$$P = \frac{1}{2} |\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)| = \frac{1}{2} |\text{Re}(E_z H_x^*)|. \quad (155)$$

Utilizando $\frac{\partial E_z}{\partial y} = i\omega\mu H_x$ (una de las ecuaciones de Maxwell), finalmente se tiene

$$P = \frac{1}{2} \left| \text{Re} \left[E_z \left(\frac{-i}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)^* \right] \right|. \quad (156)$$

Si el campo incidente en la superficie es

$$E_z^{(inc)}(x, y) = e^{ik_1[x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1]}, \quad (157)$$

de donde,

$$\frac{\partial E_z^{(inc)}}{\partial y} = -ik_1 \cos \theta_1 E_z^{(inc)}. \quad (158)$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
 P^{(inc)} &= \frac{1}{2} \left| \operatorname{Re} \left[E_z^{(inc)} \left(\frac{-k_1 \cos \theta_1}{\omega \mu_1} E_z^{(inc)} \right)^* \right] \right|, \\
 &= \frac{k_1 \cos \theta_1}{2\omega \mu_1} |E_z^{(inc)}|^2.
 \end{aligned} \tag{159}$$

Para obtener la potencia incidente total es necesario integrar sobre un área en particular. El haz está confinado a lo largo del plano x - z , con límites de integración desde $-L/2$ hasta $L/2$. Entonces, la potencia total incidente en un área de $L_x L_z$ perteneciente a la interfaz será

$$\begin{aligned}
 P_{total}^{(inc)} &= \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \int_{-\frac{L_z}{2}}^{\frac{L_z}{2}} P^{(inc)} dz dx = \frac{k_1 \cos \theta_1}{2\omega \mu_1} |E_z^{(inc)}|^2 L_x L_z, \\
 &= \frac{n_1 \frac{\omega}{c} \cos \theta_1}{2\omega \mu_1} |E_z^{(inc)}|^2 L_x L_z, \\
 &= \frac{n_1 \cos \theta_1}{2c \mu_1} |E_z^{(inc)}|^2 L_x L_z.
 \end{aligned} \tag{160}$$

Si $|E_z^{(inc)}|^2 = 1$:

$$P_{total}^{(inc)} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{2c \mu_1} L_x L_z. \tag{161}$$

Procediendo de manera similar para el tipo de polarización TM, consideramos los campos electromagnéticos correspondientes:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H_z(x, y) \hat{\mathbf{k}}, \tag{162}$$

y

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + E_y(x, y) \hat{\mathbf{j}}. \tag{163}$$

Haciendo uso de la relación $\frac{\partial H_z}{\partial y} = -i\omega \varepsilon E_x$ (la ecuación de Maxwell correspondiente, para este caso en particular), se obtiene

$$P_{total}^{(inc)} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{2c \varepsilon_1} L_x L_z. \tag{164}$$

III.1.4. El campo y la potencia esparcida (Onda plana)

Si el campo esparcido tiene la forma

$$\Psi_j(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma_j} [L_{mn}^{(j)} \Phi_n^{(j)} - N_{mn}^{(j)} \Psi_n^{(j)}] ds', \quad (165)$$

empleando las funciones de Hankel en el límite asintótico bajo la suposición de que $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{R}|$, la Ec. (149) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(1)}(\mathbf{r}) = & \left\{ \left(\frac{-i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{ik_1 r_m}}{\sqrt{r_m}} \right) \sum_{n=1}^N [ik_1(y'_n \sin \theta_s - x'_n \cos \theta_s) \Psi_n^{(1)} - \Phi_n^{(1)}] \Delta s \right\} \\ & \times [e^{-ik_1(x_n \sin \theta_s + y_n \cos \theta_s)}]. \end{aligned} \quad (166)$$

Por lo tanto,

$$|\Psi_m^{(1)}(\mathbf{r})|^2 = \frac{\Delta s}{8\pi k_1 r_m} \left| \sum_{n=1}^N [ik_1(y'_n \sin \theta_s - x'_n \cos \theta_s) \Psi_n^{(1)} - \Phi_n^{(1)}] e^{-ik_1(x_n \sin \theta_s + y_n \cos \theta_s)} \right|^2. \quad (167)$$

Definiendo la sección eficaz de esparcimiento de un material como

$$\sigma_R(\theta_s) = \Delta s \sum_{n=1}^N [ik_1(y'_n \sin \theta_s - x'_n \cos \theta_s) \Psi_n^{(1)} - \Phi_n^{(1)}] e^{-ik_1(x_n \sin \theta_s + y_n \cos \theta_s)}, \quad (168)$$

se puede observar que la Ec. (166) es función de dos variables independientes: \mathbf{r} y θ_s .

Por ende,

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \theta_s) = I_s(\mathbf{r}) \sigma_R(\theta_s). \quad (169)$$

Utilizando un procedimiento similar al caso de la potencia incidente, la potencia esparcida en reflexión está dada por

$$P_R = \int \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da, \quad (170)$$

tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) &= \frac{n_1}{2\mu_1 c} |\mathbf{E}_s|^2 \hat{\mathbf{k}}, \\ &= \frac{n_1}{2\mu_1 c} |I_s(\mathbf{r})|^2 |\sigma_R(\theta_s)|^2 \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (171)$$

Finalmente, la potencia esparcida en reflexión es

$$\begin{aligned}
P_R &= \frac{n_1}{2\mu_1 c} \int |I_s(\mathbf{r})|^2 |\sigma_R(\theta_s)|^2 da, \\
&= \frac{n_1}{16\pi k_1 \mu_1 c} \int \frac{1}{r_m} |\sigma_R(\theta_s)|^2 da, \\
&= \frac{n_1}{16\pi k_1 \mu_1 c} \int_0^{L_z} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r_m} |\sigma_R(\theta_s)|^2 dz r_m d\theta_s, \\
&= \frac{n_1 L_z}{16\pi k_1 \mu_1 c} \sum_{i=1}^{N_{\theta_s}} |\sigma_R(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s.
\end{aligned} \tag{172}$$

Dividiendo la Ec. (172) por la Ec. (161), se tiene (para el caso de la polarización TE) el diferencial de la reflectancia:

$$\begin{aligned}
dR(\theta_s) &\equiv \frac{P_R}{P_{total}^{(inc)}} = \frac{\frac{n_1 L_z}{16\pi k_1 \mu_1 c} |\sigma_R(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s}{\frac{n_1 \cos \theta_1}{2c\mu_1} L_x L_z}, \\
&= \frac{1}{8\pi k_1 \cos \theta_1 L_x} |\sigma_R(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s.
\end{aligned} \tag{173}$$

Al integrar sobre el intervalo de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, obtenemos la expresión para la reflectancia

$$R(\theta_s) \equiv \frac{1}{8\pi k_1 \cos \theta_1 L_x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sigma_R(\theta_s)|^2 d\theta_s. \tag{174}$$

Por otro lado, la potencia esparcida en transmisión correspondiente es

$$P_T = \frac{n_2 L_z}{16\pi k_2 \mu_2 c} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |\sigma_T(\theta_s)|^2 d\theta_s. \tag{175}$$

Análogamente, se llega al diferencial de transmitancia $dT(\theta_s)$:

$$\begin{aligned}
dT(\theta_s) &\equiv \frac{P_T}{P_{total}^{(inc)}} = \frac{\frac{n_2 L_z}{16\pi k_2 \mu_2 c} |\sigma_T(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s}{\frac{n_1 \cos \theta_1}{2c\mu_1} L_x L_z}, \\
&= \frac{1}{8\pi k_2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \cos \theta_1 L_x} |\sigma_T(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s.
\end{aligned} \tag{176}$$

En la ecuación anterior se debe considerar que si los medios que conforman el sistema de una interfaz son dieléctricos, entonces a frecuencias ópticas (i.e. espectro visible) se cumple que $\mu_1 \approx \mu_2$.

Integrando la Ec. (176) sobre el intervalo de $[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, se obtiene la transmitancia total dada por

$$T(\theta_s) \equiv \frac{1}{8\pi k_2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \cos \theta_1 L_x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |\sigma_T(\theta_s)|^2 d\theta_s. \quad (177)$$

De tal modo que, procediendo similarmente al caso de la polarización TE, se pueden obtener las expresiones para la reflectancia y transmitancia bajo la polarización TM:

$$R(\theta_s) \equiv \frac{1}{8\pi k_1 \cos \theta_1 L_x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sigma_R(\theta_s)|^2 d\theta_s, \quad (178)$$

y

$$\begin{aligned} T(\theta_s) &\equiv \frac{1}{8\pi k_2 \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \cos \theta_1 L_x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |\sigma_T(\theta_s)|^2 d\theta_s, \\ &= \frac{1}{8\pi k_2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \cos \theta_1 L_x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |\sigma_T(\theta_s)|^2 d\theta_s, \end{aligned} \quad (179)$$

donde, en esta última ecuación se utilizó la relación (para medios dieléctricos), $n \approx \sqrt{\varepsilon}$. Cabe mencionar que dichas expresiones para R y T en ambas polarizaciones (TE y TM), deben obedecer la ley de la conservación de la energía referida por $R + T = 1$.

III.1.5. El campo incidente (Onda Gaussiana)

Ahora se considerará un CF2D iluminado con un haz gaussiano ya que, al ser el tamaño del sistema finito, éste permite evitar efectos de borde. La intersección con el plano de la interfaz tiene un ancho g . Este parámetro debe ser más pequeño que la longitud total del sistema (ver Fig. 27). Para mayor detalle ver la Ref. (Pérez-Aguilar, 2009).

Para describir un haz gaussiano se propone una forma funcional del campo incidente en términos de su espectro angular $A(q, k_1)$:

$$f(x, y) = \int_{-n_0(\frac{\omega}{c})}^{n_0(\frac{\omega}{c})} \frac{1}{2\pi} A(q, k_1) e^{iqx - i\alpha_0(q)y} dq, \quad (180)$$

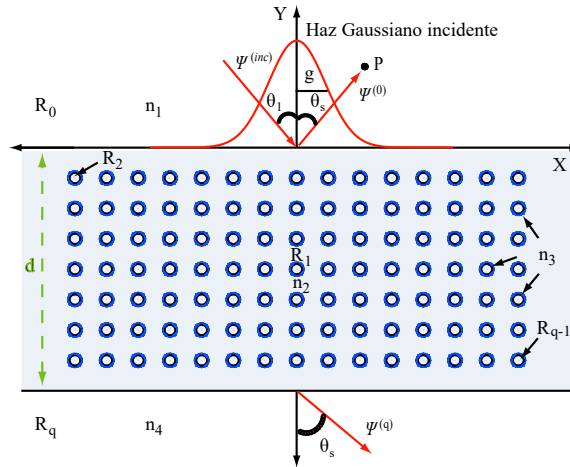


Figura 27. Diagrama de un CF2D finito con inclusiones circulares. El haz incidente sobre el sistema es un haz gaussiano con un semi-ancho g , mientras que la distancia de separación entre las interfaces es d . Los ángulos θ_1 y θ_s corresponden a los ángulos de incidencia y esparcimiento (para reflexión y transmisión), respectivamente. R_0 y R_q corresponden a las regiones que contienen a los medios de incidencia y de transmisión, mientras que R_1 y $R_2 - R_{q-1}$ representan la región que contiene a las inclusiones y la región correspondiente a cada inclusión.

donde $\alpha_0(q) = \left[\left(n_0 \left(\frac{\omega}{c} \right) \right)^2 - q^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, con $\text{Re} \{ \alpha_0(q) \} > 0$ e $\text{Im} \{ \alpha_0(q) \} > 0$. Por consiguiente, el campo incidente puede ser descrito por

$$\Psi_{(inc)}^0(x, y) = \Psi_0 f(x, y), \quad (181)$$

tal que Ψ_0 es una constante con las unidades apropiadas. En este caso, para un haz gaussiano se propone la función

$$A(q, k_1) = \sqrt{\pi} g e^{-\frac{g^2(q-k_1)^2}{4} + i\alpha_0(q)d}. \quad (182)$$

Sustituyendo la Ec. (182) en la Ec. (180) y evaluando en $y = d$,

$$\Psi_{(inc)}^{(0)}(x, d) = \Psi_0 \int_{-n_0(\frac{\omega}{c})}^{n_0(\frac{\omega}{c})} \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} g e^{-\frac{g^2(q-k_1)^2}{4}} e^{iqx} dq, \quad (183)$$

nos permite la obtención del campo incidente sobre dicho plano; es decir,

$$\Psi_{(inc)}^{(0)}(x, d) = \Psi_0 e^{ik_1 x} e^{-\frac{x^2}{g^2}}, \quad (184)$$

donde $k_1 = n_0 \left(\frac{\omega}{c}\right) \sin \theta_1$ y θ_1 representa el ángulo de incidencia correspondiente. Esta ecuación muestra que sobre el plano $y = d$, el campo incidente tiene una modulación gaussiana y una fase que es la de una onda plana con un ángulo de incidencia θ_1 . En el sistema propuesto (Fig. 27), el campo incidente está sobre el plano $x = 0$ (i.e. el parámetro $d = 0$).

III.1.6. La Potencia Incidente (Onda Gaussiana)

Partiendo de la ecuación del campo incidente, dada por

$$\Psi_{(inc)}^0(x, y) = \Psi_0 \int_{-n_0(\frac{\omega}{c})}^{n_0(\frac{\omega}{c})} \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} g e^{-\frac{g^2(q-k_1)^2}{4}} e^{iqx+i\alpha_0(q)(d-y)} dq, \quad (185)$$

se tiene

$$\frac{\partial \Psi_{(inc)}^{(0)}}{\partial y} = -i\alpha_0(k_1) \Psi_{(inc)}^0(x, y). \quad (186)$$

En este punto, se ha supuesto que la exponencial en el integrando es relativamente angosta y que está centrada en $q = k_1$, de manera que se puede considerar que $\alpha_0(q)$ es una constante sobre el rango en el cual el integrando es significativo. Al evaluar la derivada del campo incidente en $y = d$, obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{\partial \Psi_{(inc)}^{(0)}(x, d)}{\partial y} = -i\alpha_0(k_1) \Psi_{(inc)}^0(x, d), \quad (187)$$

donde $\Psi_{(inc)}^0(x, d)$ está dada por la Ec. (184).

Dado que $k_1 = n_0 \left(\frac{\omega}{c}\right) \sin \theta_1$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_0(k_1) &= [(k_1)^2 - (k_1 \sin \theta_1)^2]^{\frac{1}{2}}, \\ &= k_1 [1 - \sin^2 \theta_1]^{\frac{1}{2}}, \\ &= k_1 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (188)$$

De ahí que, la Ec. (187) se puede reescribir como

$$\frac{\partial \Psi_{(inc)}^{(0)}(x, d)}{\partial y} = -ik_1 \cos \theta_1 \Psi_{(inc)}^0(x, d). \quad (189)$$

Al proceder como se hizo en el caso de la onda plana (al utilizar las ecuaciones de Maxwell: $\frac{\partial E_z}{\partial y} = i\omega\mu H_x$ para la polarización TE y $\frac{\partial H_z}{\partial y} = -i\omega\varepsilon E_x$, para la polarización TM), se puede calcular nuevamente la potencia incidente en la forma

$$\begin{aligned} P_{TE}^{(inc)} &= \frac{1}{2} \left| \text{Re} \left[\Psi_{(inc)}^{(0)}(x, d) \left(\frac{-i}{\omega\mu_1} \frac{\partial \Psi_{(inc)}^{(0)}(x, d)}{\partial y} \right)^* \right] \right|, \\ &= \frac{k_1 \cos \theta_1}{2\omega\mu_1} \left| \Psi_{(inc)}^{(0)}(x, d) \right|^2, \end{aligned} \quad (190)$$

y

$$\begin{aligned} P_{TM}^{(inc)} &= \frac{1}{2} \left| \text{Re} \left[\Psi_{(inc)}^{(0)}(x, d) \left(\frac{i}{\omega\varepsilon_1} \frac{\partial \Psi_{(inc)}^{(0)}(x, d)}{\partial y} \right)^* \right] \right|, \\ &= \frac{k_1 \cos \theta_1}{2\omega\varepsilon_1} \left| \Psi_{(inc)}^{(0)}(x, d) \right|^2. \end{aligned} \quad (191)$$

Para obtener el resultado buscado, es necesario integrar sobre un área específica. El haz está confinado a lo largo del plano x - z , con límites de integración desde $-L/2$ hasta $L/2$. Entonces, la potencia total incidente en un área particular $L_x L_z$ es

$$\begin{aligned} P_{TE}^{(inc.Total)} &= \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \int_{-\frac{L_z}{2}}^{\frac{L_z}{2}} P_{TE}^{(inc)} dz dx, \\ &= \frac{k_1 \cos \theta_1}{2\omega\mu_1} |\Psi_0|^2 L_z \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} e^{-2\frac{x^2}{g^2}} dx, \\ &= \frac{n_1 \cos \theta_1}{2c\mu_1} |\Psi_0|^2 L_z \frac{g}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{L_x}{g\sqrt{2}}}^{\frac{L_x}{g\sqrt{2}}} e^{-u^2} du. \end{aligned} \quad (192)$$

Considerando $|\Psi_0|^2 = 1$ y que L_x es muy grande ($L_x \rightarrow \infty$), la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} P_{TE}^{(inc.Total)} &= \frac{n_1 \cos \theta_1}{2c\mu_1} L_z \frac{g}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}, \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4c\mu_1} n_1 \cos \theta_1 g L_z. \end{aligned} \quad (193)$$

Mediante un procedimiento análogo para la polarización TM, se llega a la expresión para la potencia incidente total:

$$P_{TM}^{(inc.Total)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4c\varepsilon_1} n_1 \cos \theta_1 g L_z. \quad (194)$$

En las Ecs. (190) - (194), las siglas TE y TM denotan las polarizaciones transversal eléctrica y transversal magnética, respectivamente.

III.1.7. El campo y la potencia esparcida (Onda Gaussiana)

De manera similar a como se hizo en el caso de la onda plana, se puede obtener (para la polarización TE) el diferencial de la reflectancia asociada, la cual está dada por

$$\begin{aligned} dR(\theta_s) &\equiv \frac{P_R}{P_{TE}^{(inc.Total)}} = \frac{\frac{n_1 L_z}{16\pi k_1 \mu_1 c} |\sigma_R(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s}{\frac{\sqrt{2\pi}}{4c\mu_1} n_1 \cos\theta_1 g L_z}, \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} g k_1 \cos\theta_1} |\sigma_R(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s. \end{aligned} \quad (195)$$

Al integrar la Ec. (195) en el intervalo de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se tiene que la reflectancia es,

$$R(\theta_s) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} g k_1 \cos\theta_1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sigma_R(\theta_s)|^2 d\theta_s. \quad (196)$$

Por otro lado, al igual que en onda plana, la potencia esparcida en transmisión (para la polarización TE) corresponde a

$$P_T = \frac{n_4 L_z}{16\pi k_4 \mu_4 c} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |\sigma_T(\theta_s)|^2 d\theta_s, \quad (197)$$

donde el subíndice 4 se está usando para denotar las propiedades ópticas de la región de transmisión en el CF2D de la Fig. 27.

Procediendo análogamente al caso de la onda plana, se llega a la expresión que denota el diferencial de transmitancia $dT(\theta_s)$

$$\begin{aligned} dT(\theta_s) &\equiv \frac{P_T}{P_{TE}^{(inc.Total)}} = \frac{\frac{n_4 L_z}{16\pi k_4 \mu_4 c} |\sigma_T(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s}{\frac{\sqrt{2\pi}}{4c\mu_1} n_1 \cos\theta_1 g L_z}, \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} \left(\frac{\mu_4}{\mu_1}\right) \left(\frac{n_1}{n_4}\right) k_4 g \cos\theta_1} |\sigma_T(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s. \end{aligned} \quad (198)$$

En la ecuación anterior, se debe considerar que si los medios que conforman el sistema son dieléctricos, entonces para frecuencias ópticas (i.e. pertenecientes al espectro visible) se tiene que $\mu_1 \approx \mu_4$.

Al integrar la Ec. (198) sobre el intervalo de $[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ se obtiene la transmitancia del sistema,

$$T(\theta_s) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} \left(\frac{\mu_4}{\mu_1}\right) \left(\frac{n_1}{n_4}\right) k_4 g \cos \theta_1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |\sigma_T(\theta_s)|^2 d\theta_s. \quad (199)$$

A través de un razonamiento análogo al caso de la polarización TE, se determinan las expresiones para la reflectancia y transmitancia en polarización TM:

$$R(\theta_s) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} g k_1 \cos \theta_1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sigma_R(\theta_s)|^2 d\theta_s, \quad (200)$$

y

$$\begin{aligned} T(\theta_s) &\equiv \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} \left(\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_1}\right) \left(\frac{n_1}{n_4}\right) k_4 g \cos \theta_1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |\sigma_T(\theta_s)|^2 d\theta_s, \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} \left(\frac{n_4}{n_1}\right) k_4 g \cos \theta_1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |\sigma_T(\theta_s)|^2 d\theta_s, \end{aligned} \quad (201)$$

de modo tal que, en esta última ecuación, se utilizó la relación (para medios dieléctricos) $n \approx \sqrt{\varepsilon}$. Cabe recordar que dichas expresiones, en ambas polarizaciones, deben a su vez obedecer la ley conservación de la energía dada por $R + T = 1$.

III.2. Verificación del Método Integral

Con la finalidad de verificar el funcionamiento del método integral en sistemas finitos, se analizará primero el sistema de una interfaz simple entre dos medios dieléctricos y, posteriormente se analizará el sistema de dos interfaces entre tres medios dieléctricos. La razón por la cual se analizan estos dos sistemas, es porque todavía los resultados numéricos obtenidos pueden ser comparados con los resultados analíticos (haciendo uso de las ecuaciones de Fresnel).

III.2.1. Respuesta óptica para un sistema finito de una interfaz

Los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda plana y Onda Gaussiana), con longitud de onda de $1 \mu\text{m}$ se muestran en las Figs. 28(a) y 28(c) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente. La Fig. 28(a) corresponde al sistema formado por los índices de refracción $n_0 = 1$ y $n_1 = 1.50$ (pertenecientes al aire (medio de incidencia) y vidrio (medio de transmisión), respectivamente) y una interfaz de longitud $l = 37 \mu\text{m}$. Mientras que la Fig. 28(c) muestra el sistema que incluye los índices de refracción $n_0 = 1$ y $n_1 = 3.681$ (correspondientes al aire (medio de incidencia) y silicio (medio de transmisión), respectivamente) y una interfaz de longitud $l = 15 \mu\text{m}$. En el caso de la onda Gaussiana se utilizó un semi-ancho de $g = 7 \mu\text{m}$ para el sistema aire-vidrio y un semi-ancho de $g = 3 \mu\text{m}$ para el sistema aire-silicio. A través de las Figs. 28(b) y 28(d) se muestra el balance de energía asociado específicamente a cada sistema.

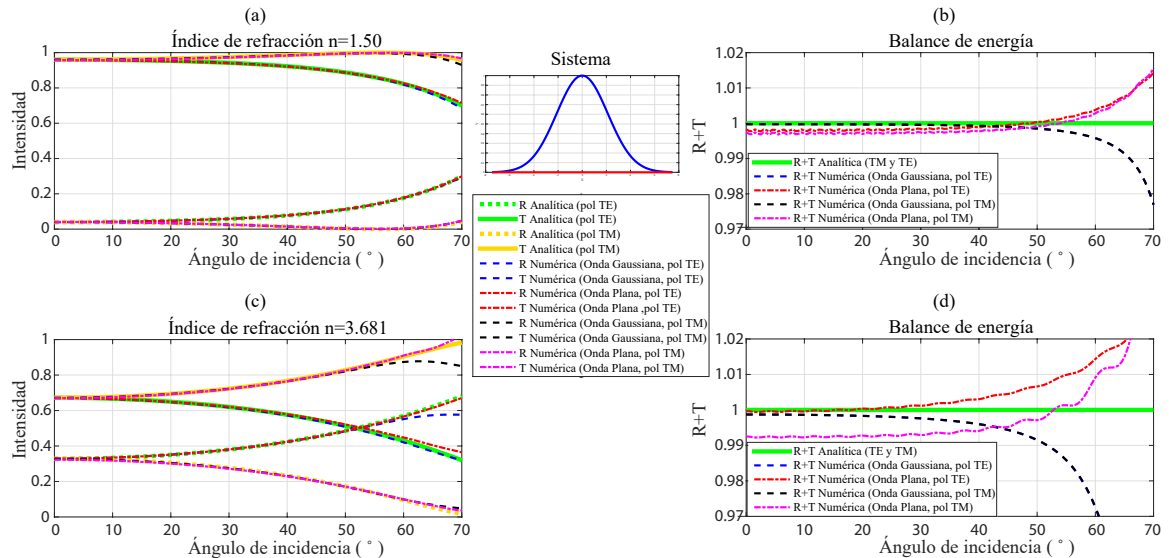


Figura 28. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para una interfaz entre (a) aire y vidrio ($n_0 = 1$ y $n_1 = 1.50$, respectivamente) y, (c) aire y silicio ($n_0 = 1$ y $n_1 = 3.681$) para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo analítico vs. numérico. En (b) y (d), se muestran el balance de energía correspondiente a cada sistema particular.

Se debe mencionar que las longitudes de las interfaces para cada sistema, se eligieron al considerar que la onda plana presenta un error numérico mayor al elegir una longitud más grande; mientras que al utilizar la onda de tipo Gaussiana, no se presenta este problema. Por ende, se puede elegir una longitud de las interfaces más grande.

De los resultados anteriores, se puede observar que el resultado numérico al usar onda plana y onda gaussiana, presenta gran concordancia al ajustarse a la predicción del caso analítico. Así pues, se puede concluir que para el sistema de una interfaz simple entre dos medios dieléctricos, el método integral funciona de manera precisa.

III.2.2. Respuesta óptica para un sistema finito de dos interfaces

Ahora se analizará un sistema más complejo para compararlo posteriormente, con el cálculo analítico. El sistema está formado por dos interfaces entre tres medios dieléctricos, donde el tercer medio se va a considerar como el primero. Los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda plana y Onda Gaussiana) con longitud de onda de $1 \mu\text{m}$, se muestran en las Figs. 29(a) y 29(c) para las polarizaciones TE y TM. El resultado de la Fig. 29(a) corresponde al sistema formado por los índices de refracción $n_0 = 1$, $n_1 = 1.50$ y $n_2 = 1$ (correspondientes al aire (medio de incidencia), vidrio (medio entre las interfaces) y aire (medio de transmisión), respectivamente); una longitud de las interfaces de $l = 55 \mu\text{m}$ y una distancia de separación entre las interfaces de $d = 4 \mu\text{m}$. Mientras que el resultado de la Fig. 29(c) corresponde al sistema formado por los índices de refracción $n_0 = 1$, $n_1 = 3.681$ y $n_2 = 1$ (correspondientes al aire (medio de incidencia), silicio (medio entre las interfaces) y aire (medio de transmisión), respectivamente); una longitud de las interfaces de $l = 56 \mu\text{m}$ y una

distancia de separación entre las interfaces de $d = 4 \mu\text{m}$. Para el caso del haz gaussiano se utilizó un semi-ancho de $g = 13 \mu\text{m}$, en ambos sistemas. En las Figs. 29(b) y 29(d) se muestran el balance de energía correspondiente a cada sistema.



Figura 29. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces compuesto por (a) aire, vidrio y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 1.50$ y $n_2 = 1$, respectivamente) y (c) aire, silicio y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 3.681$ y $n_2 = 1$) para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico y analítico. En (b) y (d) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

Cabe mencionar que las longitudes de las interfaces para cada sistema, se eligieron al considerar que la onda plana presenta un error numérico mayor al elegir una longitud más grande; mientras que al utilizar la onda Gaussiana, no se presenta este problema. Por tanto, al utilizar la onda Gaussiana se puede elegir una longitud de las interfaces más grande. Respecto a la onda Gaussiana puede destacarse que no se debe elegir un semi-ancho mayor para estos sistemas, ya que entonces la onda Gaussiana presenta un mayor error numérico.

De los resultados anteriores se puede observar que, para ambos sistemas, al utilizar la onda Gaussiana se presentan mejores resultados numéricos que al utilizar la onda plana; es decir, al utilizar la onda Gaussiana los resultados numéricos se ajustan mejor

a los resultados del cálculo analítico para ambas polarizaciones. Al observar la Fig. 29(b) se puede concluir que al utilizar la onda plana se tiene un error numérico máximo para ciertos ángulos del 6% y 7% para las polarizaciones TM y TE, respectivamente; mientras que al utilizar la onda Gaussiana, se tiene un error numérico menor al 1% para ambas polarizaciones. Similarmente, a partir de la Fig. 29(d) se puede concluir que, al utilizar la onda plana se tiene un error numérico máximo del 3% y 4% para las polarizaciones TM y TE, respectivamente; mientras que al utilizar la onda Gaussiana, se tiene un error numérico del 1% para ambas polarizaciones.

Así pues, se concluye que al utilizar la onda Gaussiana, el cálculo numérico se ajusta mejor a los resultados del cálculo analítico para ambas polarizaciones (TE y TM). Asimismo se comprueba que, el método integral funciona de manera muy precisa para este tipo de sistemas en específico.

Capítulo IV

RESULTADOS

En este capítulo se presenta un análisis de las estructuras de bandas para un CF2D infinito formado por una celda unitaria cuadrada (compuesta de dieléctrico) con inclusión circular de superficie lisa y aleatoriamente rugosa que contiene medios de LHM y/o de dieléctrico. En el caso de la inclusión circular con superficies aleatoriamente rugosas (para medios de LHM) hubo la necesidad de utilizar la computación en paralelo bajo el protocolo de MPI y CUDA debido a la gran cantidad de tiempo de cómputo necesario para obtener las estructuras de bandas. Por lo que, se muestran un par de tablas que contienen los tiempos de cómputo requeridos, en su forma secuencial y en su forma paralelizada, para el cálculo las estructuras de bandas. Por último, se presenta un análisis de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia al ser iluminado con un haz de luz incidente (Onda plana y Onda Gaussiana), los sistemas finitos formados por: dos interfaces con una inclusión circular y dos interfaces con q inclusiones circulares (sistema de un CF2D finito) de superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contienen medios de LHM y/o de dieléctrico.

IV.1. Estructuras de bandas de un CF2D infinito

En esta sección se muestran los resultados obtenidos de las estructuras de bandas para un CF2D infinito formado por una celda unitaria cuadrada con inclusión circular de superficie lisa o aleatoriamente rugosa que contiene medios de LHM o de dieléctrico. Estos cálculos fueron realizados variando las fracciones de llenado para las polarizaciones TE y TM.

El cálculo de las estructuras de bandas está en términos de la frecuencia reducida $\omega_r = \omega D/2\pi c$ y el vector de onda reducido $k_r = kD/2\pi$ en la primera zona de Brillouin en el espacio k (recuadro derecho de cada una de las gráficas), para los diferentes valores de la fracción de llenado f que está relacionada con el radio de la inclusión circular como $R = \left(\sqrt{\frac{f}{\pi}}\right) D$, donde el parámetro de red fue tomado como $D = 1$.

IV.1.1. Medios dieléctricos

Inclusión circular de superficie lisa

En la Fig. 30, se muestran las estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria formada por dos materiales de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ (vacío) y $\varepsilon_2 = 8.9$ (dióxido de aluminio Al_2O_3) (Ramos-Mendieta y Halevi, 1996). Las fracciones de llenado correspondientes son $f = 0.05$ (Fig. 30(a) y 30(b)), $f = 0.12$ (Fig. 30(c) y 30(d)) y $f = 0.50$ (Fig. 30(e) y 30(f)) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente. En los recuadros izquierdos, se muestran las celdas unitarias cuadradas con sus inclusiones circulares para los diferentes valores de la fracción de llenado f , y en los recuadros derechos se muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k .

En las Figs. 30(a) y 30(c), se puede observar la aparición de una banda prohibida ancha (franja roja) alrededor de la frecuencia reducida $\omega_r = 0.45$ y $\omega_r = 0.35$, respectivamente; mientras que en la Fig. 30(e) se puede apreciar la aparición de tres bandas

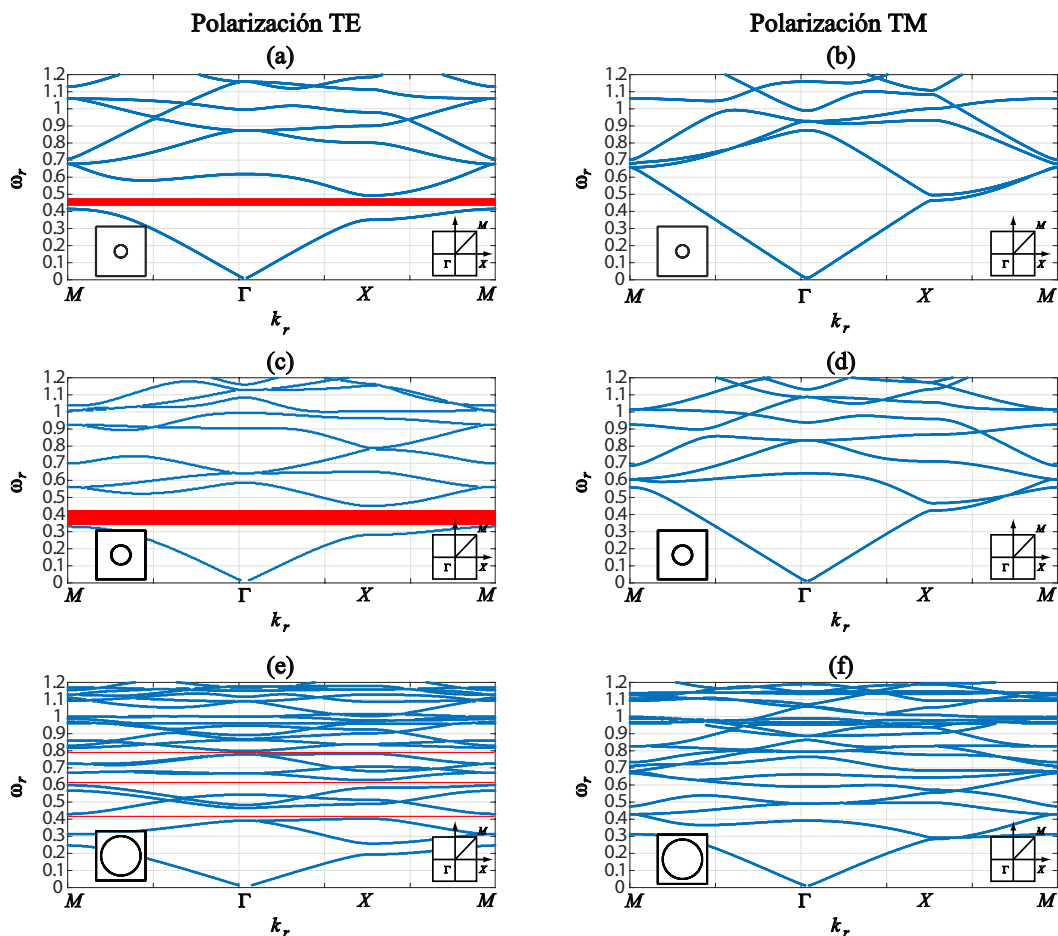


Figura 30. Estructuras de bandas para un CF2D infinito con inclusión circular para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$, con una fracción de llenado de ((a) y (b)) $f = 0.05$, ((c) y (d)) $f = 0.12$ y ((e) y (f)) $f = 0.50$ para las polarizaciones TE y TM. El recuadro izquierdo representa la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k .

prohibidas muy angostas aproximadamente en las frecuencias $\omega_r = 0.41$, $\omega_r = 0.61$ y $\omega_r = 0.79$. Esto nos indica que al ser iluminado un CF truncado, la luz será reflejada completamente con estas frecuencias bajo la polarización TE. En las Figs. 30(b), 30(d) y 30(f) no se obtuvo ninguna banda prohibida, lo cual nos dice que bajo la polarización TM se transmitirá la luz a través del cristal para todo el intervalo de frecuencias de $(0, 1.2)$. También se puede observar que bajo la polarización TE, entre menor sea la fracción de llenado se pueden tener bandas prohibidas más anchas, y que éstas apare-

cen a una frecuencia mayor para la fracción de llenado más pequeña ($f = 0.05$). Estas bandas anchas permiten un mayor control de la propagación de la luz a través de un CF2D.

Inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa

En la Fig. 31, se muestran las estructuras de bandas de un CF2D formado por una celda unitaria cuadrada con inclusión circular que tiene una superficie aleatoriamente rugosa. Para comparar los resultados con el caso de superficies lisas (Fig. 30), usamos los mismos parámetros con las diferentes fracciones de llenado $f = 0.05$ (Fig. 31(a) y 31(b)), $f = 0.12$ (Fig. 31(c) y 31(d)) y $f = 0.50$ (Fig. 31(e) y 31(f)) para las polarizaciones TE y TM. En los recuadros izquierdos, se muestran las celdas unitarias cuadradas con sus inclusiones circulares que tienen una superficie aleatoriamente rugosa. Para modelar la rugosidad sobre la superficie de la inclusión, se consideró un perfil de superficie aleatoria sobre la inclusión circular. Este perfil está definido por una realización de un proceso aleatorio de correlación Gaussiana que obedece una función de densidad de probabilidad exponencial negativa (Maradudin *et al.*, 1990). Para modelar la superficie, se consideró un perfil que tiene rugosidad aleatoria con una longitud de correlación $a = 0.05236$ y una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.02$, para los diferentes valores de la fracción de llenado f .

Como se observa en la Fig. 31, el efecto de la rugosidad no presenta cambios significativos en las estructuras de bandas mostradas para el caso de la superficie lisa (Fig. 30). Se puede observar que las bandas permitidas fueron afectadas (muy poco) sobre sus posiciones iniciales, como se aprecia en las Figs. 31(c) y 31(e) donde hubo un pequeño desplazamiento de las bandas permitidas, provocando que una banda prohibida muy angosta apareciera aproximadamente a la frecuencia $\omega_r = 0.95$ y que la banda prohibida angosta aproximadamente a la frecuencia $\omega_r = 0.79$ desapareciera.

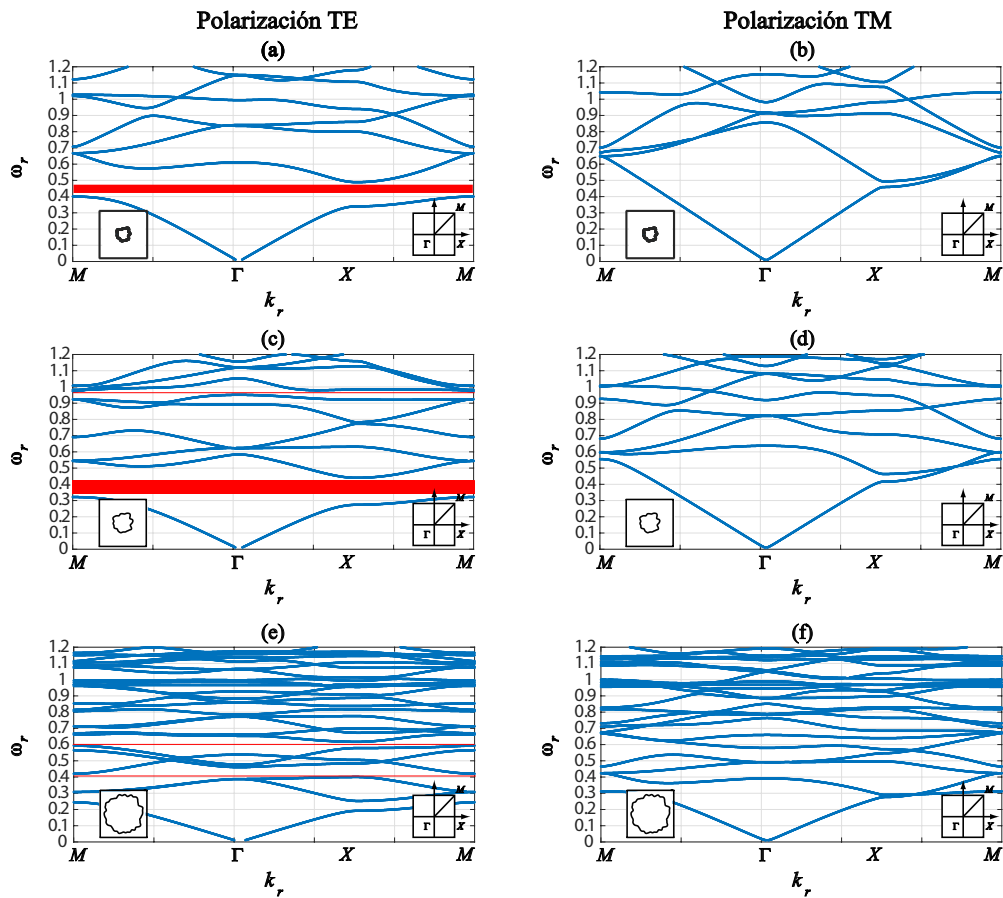


Figura 31. Estructuras de bandas para un CF2D infinito con inclusión circular con una superficie aleatoriamente rugosa ($a = 0.05236$ y $\delta = 0.02$) para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$, con una fracción de llenado de ((a) y (b)) $f = 0.05$, ((c) y (d)) $f = 0.12$ y ((e) y (f)) $f = 0.50$ para las polarizaciones TE y TM. El recuadro izquierdo representa la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k .

En la tabla I se muestran los tiempos de cómputo requeridos, en su forma secuencial y en su forma paralelizada, para calcular las estructuras de bandas para un CF2D infinito. Para estos resultados se han utilizado tres distintas formas de programación, las cuales corresponden a la forma secuencial (forma tradicional de programación), su forma paralelizada al usar MPI (usando procesadores (CPU)) y CUDA FORTRAN (usando tarjeta gráfica (GPU)). En la forma secuencial se utilizaron distintos compiladores como: GFORTRAN, PGIFORTRAN (usando librerías de LAPACK) e INTEL

FORTRAN (usando librerías de LAPACK y sus librerías internas de MKL). En su forma paralelizada usando CUDA FORTRAN se utilizó un método llamado SVD, el cual calcula los valores singulares para un sistema de ecuaciones homogéneo, y usando MPI (usando librerías de LAPACK y librerías internas de MKL) se empleó comunicación bloqueante con 16 y 32 procesadores.

Tabla I. Tiempos de cómputo requeridos para calcular las estructuras de bandas para un CF2D infinito con medios dieléctricos en su forma secuencial y en su forma paralelizada.

Tiempo (hrs)	SECUENCIAL				PARALELIZADO			
	PGIFORTRAN	GFORTRAN	Intel (LAPACK)	Intel (MKL)	CUDA (SVD)	MPI(16) (LAPACK)	MPI(16) (MKL)	MPI(32) (MKL)
TM	52.40	49.83	43.85	23.53	49.45	3.32	2.29	1.42
TE	10.31	9.87	9.1	4.8	9.53	0.84	0.42	0.29

Los tiempos de la tabla I corresponden a las estructuras de bandas de las Figs. 30(c) y 30(d) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente. Para la polarización TM, se utilizó un intervalo de muestreo de $\Delta s = 0.03333$ y los intervalos de k_r con 844 puntos y de $\omega_r \in (0.01, 1.5)$ con 644 puntos, lo cual nos da un rango de matriz de 632×632 . Para la polarización TE, se utilizó el mismo intervalo de muestreo de la polarización TM y los intervalos de k_r con 362 puntos y de ω_r con 300 puntos, lo cual nos da el mismo rango de matriz de 632×632 .

Al hacer una comparación de los diferentes tiempos de cómputo (para la polarización TM) respecto a la versión secuencial en el que se utilizó el compilador PGIFORTRAN se obtiene que, el compilador GFORTRAN y el compilador de Intel (usando librerías de LAPACK) son casi iguales; en cambio, con el compilador de Intel (usando librerías internas de MKL) es 2 veces más rápido. Haciendo la comparación con las versiones paralelizadas, se tiene que al usar CUDA FORTRAN el tiempo de cómputo es casi el mismo que la versión secuencial; mientras que usando MPI se obtiene una rapidez de 16, 23 y 37 veces más rápido que la versión secuencial usando 16 procesadores

(usando librerías de LAPACK), 16 procesadores (usando librerías internas de MKL) y 32 procesadores (usando librerías internas de MKL), respectivamente.

Así pues, de los resultados obtenidos se tiene que al calcular las estructuras de bandas, el compilador de Intel (usando librerías internas de MKL) es mucho más rápido que los otros compiladores y que al usar la paralelización con CUDA el tiempo de cómputo es mayor que al usar la paralelización con MPI. Por lo que se concluye que la paralelización con CUDA, no es apropiada para el cálculo de las estructuras de bandas correspondientes al caso infinito.

IV.1.2. Medios de LHM

Inclusión circular de superficie lisa

Como en esta sección se está interesado en hacer un análisis de las estructuras de bandas de un CF2D infinito que contiene medios de LHM. A continuación, se presentan las características de las funciones de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, las cuales son usadas para modelar numéricamente las propiedades ópticas de los LHMs.

Modelo de un medio con LHM dispersivo

La celda unitaria que se está considerando en este trabajo de tesis está compuesta por dos medios: uno de vacío y el otro de LHM dispersivo, cuyas propiedades ópticas están dadas por la función de permitividad eléctrica:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (202)$$

y de permeabilidad magnética:

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (203)$$

Estas funciones fueron deducidas a partir de las Ecs. (47) y (55) despreciando los términos τ^{-2} y γ , respectivamente (por ser cantidades muy pequeñas). Las funciones

dadas por las Ecs. (202) y (203) están mostradas en la Fig. 32 con las frecuencias de plasma $\omega_p = 10c/D$, la frecuencia de resonancia $\omega_0 = 4c/D$, y el factor que representa la fracción de volumen de la celda ocupada por el SRR, $F = 0.56$ (Bria *et al.*, 2004; Villa *et al.*, 2007). En la Fig. 32, se usaron las unidades reducidas de la frecuencia dada por $\omega_r = \omega D/2\pi c$ y el vector de onda de Bloch $k_r = kD/2\pi$, donde c representa la velocidad de la luz y D es una constante de normalización que elegimos para ser la dimensión del lado de una celda unitaria cuadrada. En unidades reducidas, las frecuencias de plasma y de resonancia son $\omega_p = 1.592$ y $\omega_0 = 0.637$, respectivamente.

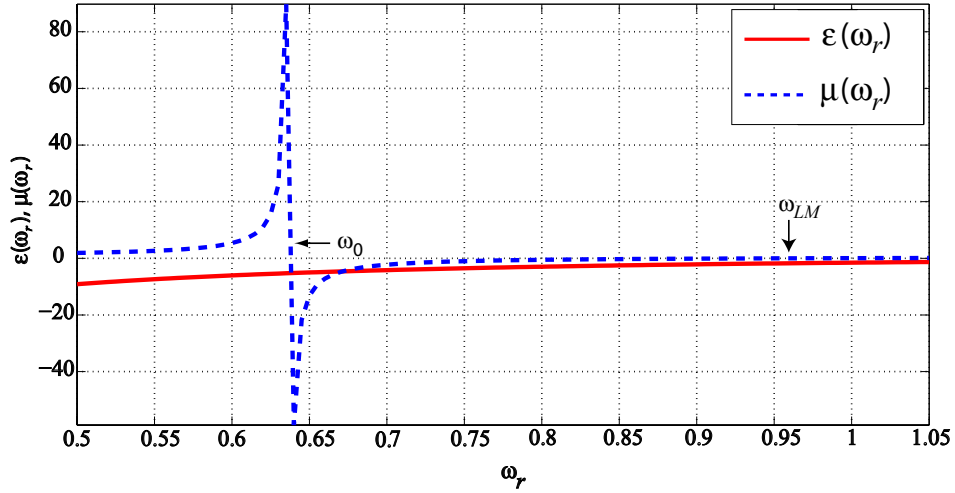


Figura 32. Permitividad eléctrica y permeabilidad magnética de un LHM dispersivo, como función de la frecuencia reducida.

Analizando la Ec. (202) se puede observar que cuando $\omega \ll \omega_p$, la función de permitividad eléctrica toma valores negativos muy grandes hasta llegar a ω_p , donde $\varepsilon \approx 0$ y pasando este punto, $\varepsilon \rightarrow 1$. Como se está interesado en los valores para los cuales $\varepsilon(\omega) < 0$ y $\mu(\omega) < 0$ simultáneamente, al hacer un análisis de la función de permeabilidad magnética (Ec. (203)) se tiene que ω obtiene valores negativos si se encuentra en el intervalo $\left(-\frac{\omega_0}{\sqrt{1-F}}, -\omega_0\right) \cup \left(\omega_0, \frac{\omega_0}{\sqrt{1-F}}\right)$ (para más detalle ver (Puente-Díaz, 2015)). Como los valores para ω negativos no tienen sentido físico, se concluye que la función de permeabilidad magnética tomará valores negativos si ω se

encuentra en el intervalo $\left(\omega_0, \frac{\omega_0}{\sqrt{1-F}}\right)$. Por lo tanto, la región donde el LHM presenta un índice de refracción negativo; es decir, donde las funciones de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética presentan valores simultáneamente negativos, está dentro del rango de frecuencias $\omega_0 < \omega < \omega_{LM}$ tal que $\omega_{LM} = \omega_0/\sqrt{1-F} \approx 0.96$.

Ahora, tomando en cuenta estos resultados para las funciones de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, a continuación se muestran los resultados de las estructuras de bandas de un CF2D infinito que contiene medios de LHM. En la Fig. 33, mostramos las estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada que tiene inclusión circular compuesta por dos medios: vacío o aire (constante dieléctrica $\varepsilon_1 = 1$ y constante de permeabilidad magnética $\mu_1 = 1$), y LHM dispersivo cuyas propiedades ópticas están dadas por las funciones de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética $\varepsilon_2(\omega)$ y $\mu_2(\omega)$, respectivamente ($n_2 = \sqrt{\mu_2(\omega)\varepsilon_2(\omega)}$, ver Fig. 21). Para estos cálculos usamos los parámetros de frecuencia de plasma y de resonancia (en unidades reducidas) dadas por $\omega_p = 1.592$ y $\omega_0 = 0.637$, respectivamente; así como el factor $F = 0.56$. Para el caso de la polarización TM, consideramos las fracciones de llenado $f = 0.50$ (Fig. 33(a)) y $f = 0.68$ (Fig. 33(b)). Similarmente, las Figs. 33(c) y 33(d) muestran las estructuras de bandas para el caso de la polarización TE con las mismas fracciones de llenado de los casos anteriores. En los recuadros izquierdos, se muestran las celdas unitarias cuadradas con sus inclusiones circulares para los diferentes valores de la fracción de llenado f y en los recuadros derechos, se muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k .

En la Fig. 33(c), claramente observamos una banda prohibida bastante ancha para la región de altas frecuencias al igual que en la Fig. 33(d), cuya banda es más angosta en comparación con la que aparece en la Fig. 33(c). Además, en la Fig. 33(d) aparecen tres bandas más alrededor de las frecuencias reducidas $\omega_r = 0.747$, $\omega_r = 0.793$ y $\omega_r = 0.802$. Esto nos indica que al ser iluminado un CF truncado, la luz será reflejada

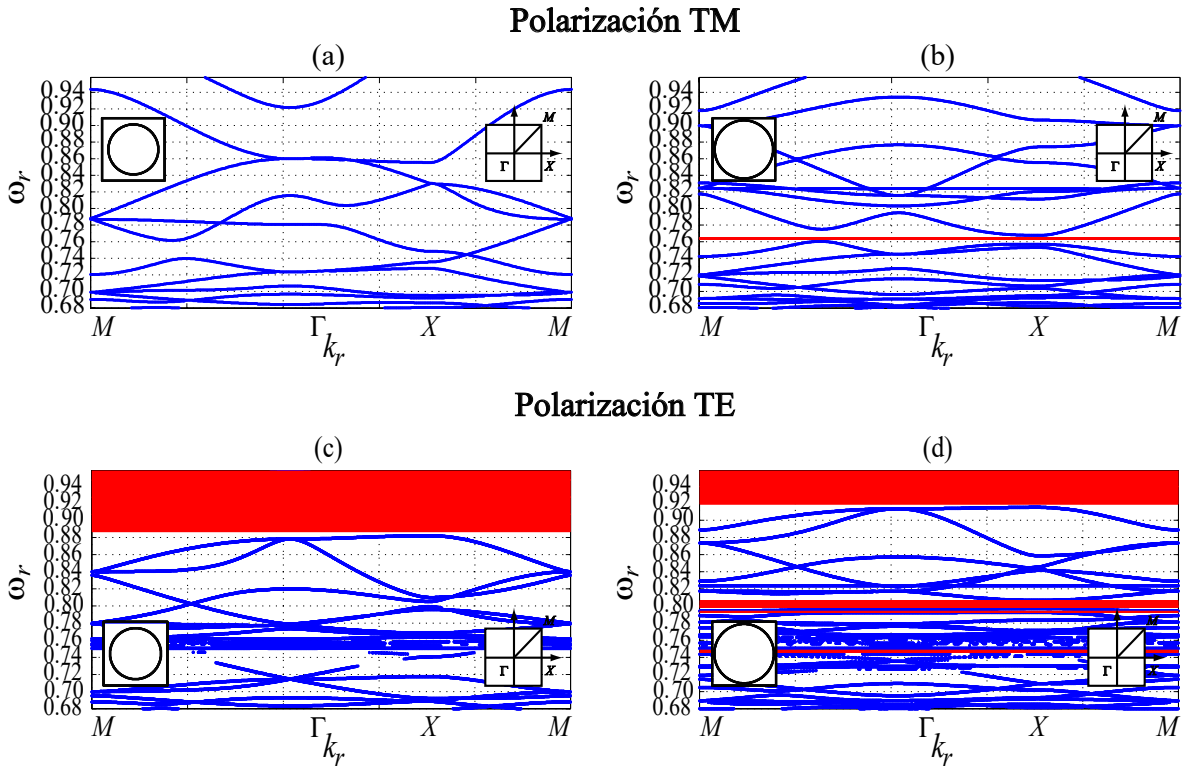


Figura 33. Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada con inclusión circular compuesta por dos medios: vacío ($\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$) y LHM dispersivo ($\varepsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$), con $\omega_p = 1.592$, $\omega_0 = 0.637$ y $F = 0.56$. Polarizaciones TM y TE con las fracciones de llenado ((a) y (c)) $f = 0.50$, ((b), (d)) $f = 0.68$, respectivamente. El recuadro izquierdo representa la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k .

completamente para estas frecuencias bajo la polarización TE. En la Fig. 33(a) no obtuvimos ninguna banda prohibida, en comparación con el caso de la polarización TE. Sin embargo, en la Fig. 33(b) se puede observar la aparición de una banda prohibida angosta, aproximadamente en la frecuencia reducida $\omega_r = 0.764$.

Si el lector desea conocer un análisis más detallado de las estructuras de bandas de un CF2D infinito que contiene medios de LHM, puede consultar la Ref. (Puente-Díaz, 2015).

Inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa

En la Fig. 34, se muestran las estructuras de bandas de un CF2D formado por una celda unitaria cuadrada con inclusión circular que tiene una superficie aleatoriamente rugosa. Para comparar los resultados con el caso de superficies lisas (Fig. 33), se usaron los mismos parámetros para las diferentes fracciones de llenado $f = 0.50$ (Figs. 34(a) y (c)) y $f = 0.68$ (Figs. 34(b) y (d)) para las polarizaciones TM y TE. En los recuadros izquierdos, se muestran las celdas unitarias cuadradas con sus inclusiones circulares que tienen una superficie aleatoriamente rugosa. Para modelar la superficie, se consideró un perfil que tiene rugosidad aleatoria con una longitud de correlación $a = 0.05236$ y una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.02$, para los diferentes valores de la fracción de llenado f .

Como se observa en la Fig. 34, el efecto de la rugosidad modifica considerablemente las estructuras de bandas; en particular, genera nuevas bandas prohibidas. Para la polarización TM puede observarse que, para frecuencias pequeñas (longitudes de ondas grandes) la rugosidad modifica ligeramente algunas estructuras de bandas (comparar Figs. 33(a) y 33(b) con Figs. 34(a) y 34(b)). En cambio, para frecuencias más grandes (longitudes de ondas pequeñas) la rugosidad afecta considerablemente la forma de las estructuras de bandas, generando nuevas bandas prohibidas. Para la polarización TE puede observarse que, el efecto de la rugosidad hace que las bandas prohibidas se hagan ligeramente más angostas, como se puede observar al comparar las bandas prohibidas de las Figs. 33(c) y 33(d) con las Figs. 34(c) y 34(d). Por otro lado, para frecuencias pequeñas (longitudes de ondas grandes) la rugosidad afecta la forma de las estructuras de bandas con nuevas bandas prohibidas a diferencia de las Figs. 33(c) y 33(d), como se muestra en las Figs. 34(c) y 34(d). Esto nos permite concluir que, para medios dieléctricos, la rugosidad de la superficie del CF2D no es relevante en comparación con materiales artificiales (LHM). Por lo tanto, los medios de LHM dispersivo permiten

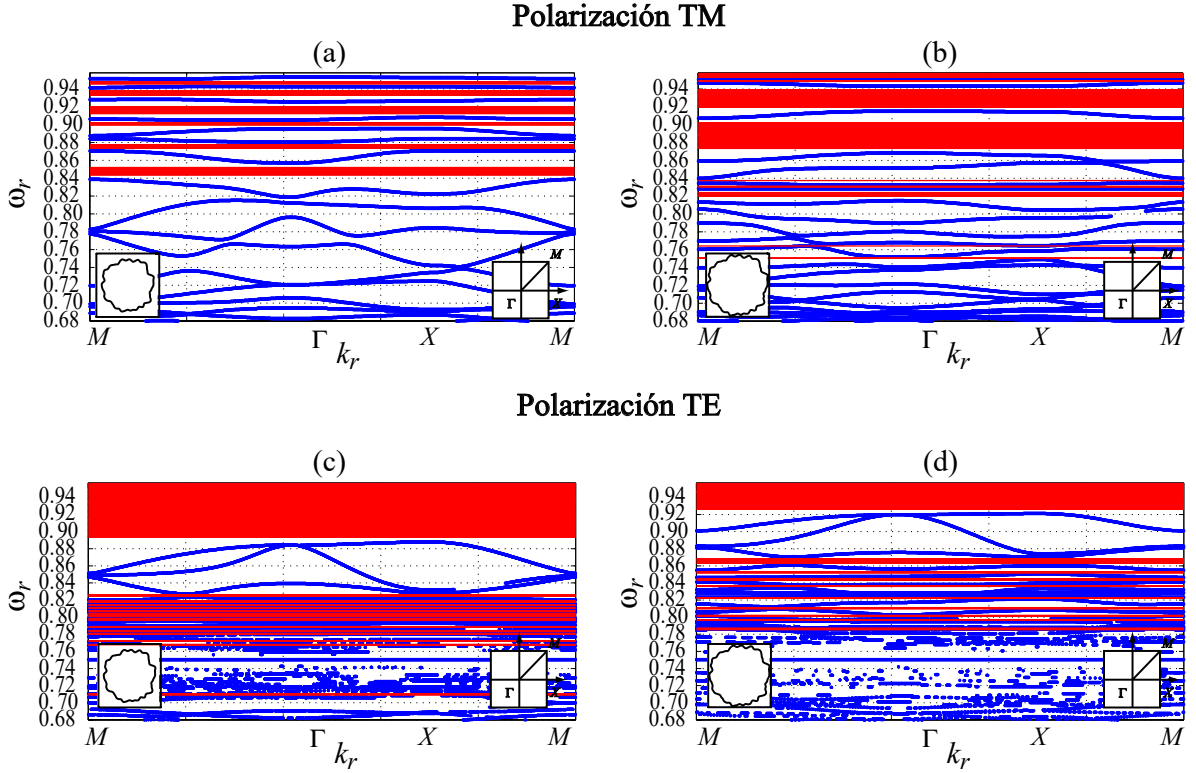


Figura 34. Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada que tiene una inclusión circular con una superficie aleatoriamente rugosa ($a = 0.05236$ y $\delta = 0.02$), compuesta por dos medios: vacío ($\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$) y LHM dispersivo ($\varepsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$), con $\omega_p = 1.592$, $\omega_0 = 0.637$ y $F = 0.56$. Polarizaciones TM y TE con las fracciones de llenado ((a) y (c)) $f = 0.50$, ((b), (d)) $f = 0.68$, respectivamente. El recuadro izquierdo representa la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k .

tener mayor control de la propagación de la luz abriendo un campo de aplicaciones, como son los filtros ópticos.

Similarmente en la tabla II, se muestran los tiempos de cómputo para las estructuras de bandas de las Figs. 34(a) y 34(c) para las polarizaciones TM y TE, respectivamente. Para la polarización TM se utilizó un intervalo de muestreo de $\Delta s = 0.02604$ y los intervalos de k_r con 1687 puntos y de $\omega_r \in (0.637, 0.960)$ con 1600 puntos, lo cual nos da un rango de matriz de 664×664 . Para la polarización TE, se utilizó un intervalo de muestreo de $\Delta s = 0.01488$ y los intervalos de k_r con 3137 puntos y de ω_r con 2837 puntos, lo cual nos da un rango de matriz de 776×776 .

Tabla II. Tiempos de cómputo requeridos para calcular las estructuras de bandas para un CF2D infinito con medios de LHM en su forma secuencial y en su forma paralelizada.

Tiempo (días)	SECUENCIAL				PARALELIZADO			
	PGIFORTRAN	GFORTRAN	Intel (LAPACK)	Intel (MKL)	CUDA (SVD)	MPI(16) (LAPACK)	MPI(16) (MKL)	MPI(32) (MKL)
TM	12.42	11.56	9.4	5.05	11.77	0.75	0.53	0.34
TE	66.1	62.2	50.36	29.6	23.50	4.19	2.66	1.70

Haciendo un análisis similar al caso dieléctrico (tabla I), se tiene que al calcular las estructuras de bandas, el compilador de Intel (usando librerías internas de MKL) es mucho más rápido que los otros compiladores y que al usar la paralelización con CUDA, el tiempo de cómputo es mayor que al usar la paralelización con MPI; por lo que, se concluye que la paralelización con CUDA no es apropiada para el cálculo de las estructuras de bandas.

Cabe mencionar que, los cálculos de las estructuras de bandas se realizaron en la estación de trabajo de la FCFM, la cual tiene 2 procesadores “Intel Xeon Processor 8 Cores E5-2640 (20M Cache, 2.00 GHz)” con 64 GB de memoria (8 X 8GB), una tarjeta TESLA k40 con 12 GB de memoria RAM y un sistema operativo Linux CentOS 6.2 x 86_64.

El análisis del tiempo de cómputo fue importante realizarlo porque ya nos permite ver cuál es la forma más óptima para desarrollar los algoritmos para el caso del CF2D finito que requerirá mucho más recursos de cómputo.

IV.2. Respuesta óptica de sistemas finitos

En esta sección, se muestran los resultados obtenidos para la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia al ser iluminado con un haz de luz incidente (Onda plana y Onda Gaussiana), los sistemas finitos compuestos por: dos interfaces con una inclusión circular y dos interfaces con q

inclusiones circulares (sistema de un CF2D finito), de superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contienen medios de LHM y/o de dieléctrico. Estos cálculos fueron realizados variando las fracciones de llenado (en el caso del CF2D) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente.

IV.2.1. Medios dieléctricos

Respuesta óptica para un sistema de dos interfaces y una inclusión circular de superficie lisa

Dado que se quiere analizar un sistema compuesto por dos interfaces que contengan q inclusiones circulares, es necesario analizar primero un sistema relativamente más simple que contenga sólo una inclusión en el centro de ambas interfaces y observar, qué tanto se afecta el sistema compuesto. Este problema es complejo y no se puede realizar de manera analítica, por lo que no se podrá corroborar los resultados numéricos. Sin embargo, dados los resultados anteriores (en el capítulo 3) para el caso de los sistemas finitos compuestos por una interfaz y dos interfaces, confiamos en la veracidad del método integral.

El sistema propuesto está formado por dos interfaces entre tres medios dieléctricos y una inclusión circular que se encuentra en el centro de ambas interfaces, la cual contiene un medio dieléctrico. En este sistema el medio de incidencia, el medio que contiene la inclusión circular y el medio de transmisión, se considerarán iguales.

Los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia, como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda plana y Onda Gaussiana) con longitud de onda de $1 \mu\text{m}$, se muestran en las Figs. 35(a) y 35(c) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente.

El resultado de la Fig. 35(a) corresponde al sistema formado por los índices de

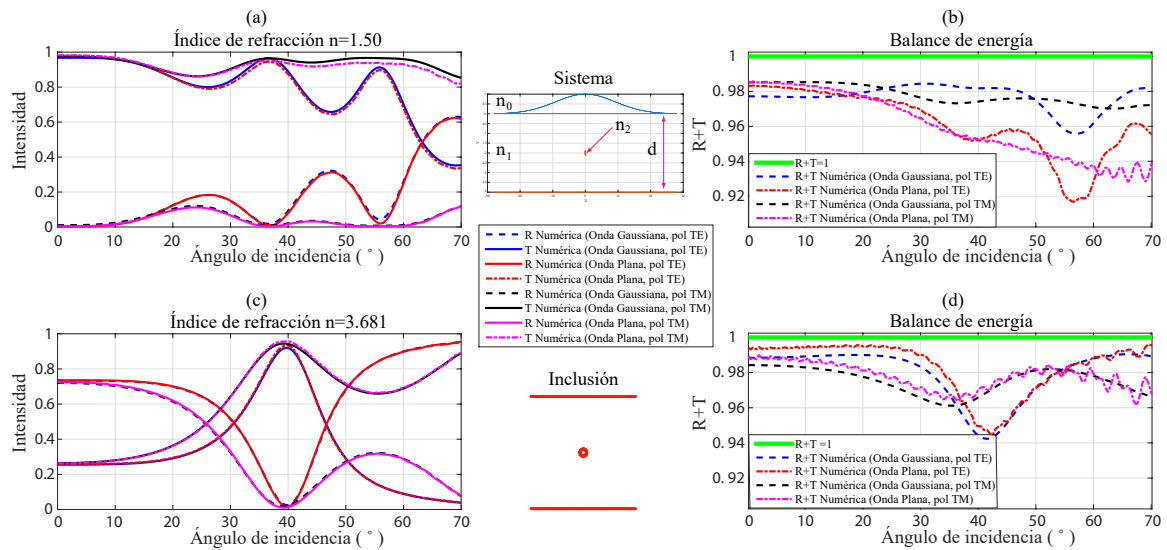


Figura 35. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie lisa, compuesto por (a) aire, vidrio, aire y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$, respectivamente) y (c) aire, silicio, aire y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 3.681$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$, respectivamente) para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico. (b) y (d) muestran el balance de energía correspondiente a cada sistema.

refracción $n_0 = 1$, $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$ (correspondientes al aire (medio de incidencia), vidrio (medio entre las interfaces), aire (medio en la inclusión) y aire (medio de transmisión), respectivamente) mientras que el resultado de la Fig. 35(c) corresponde al sistema formado por los índices de refracción $n_0 = 1$, $n_1 = 3.681$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$ (correspondientes al aire (medio de incidencia), silicio (medio entre las interfaces), aire (medio en la inclusión) y aire (medio de transmisión), respectivamente). La fracción de llenado correspondiente a la inclusión circular es de $f = 0.05$ para ambos sistemas y los parámetros de la longitud de las interfaces, la separación entre ellas y el semi-ancho del haz Gaussiano corresponden a los mismos parámetros utilizados en el sistema de dos interfaces. En las Figs. 35(b) y 35(d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

Si comparamos estos resultados con los de la Fig. 29, se puede observar que las curvas numéricas correspondientes a la transmitancia y la reflectancia para cada pola-

rización tienen el mismo comportamiento, sólo que las curvas dadas en la Fig. 35 están desplazadas. Además, al observar el balance de energía se puede notar que el error numérico es mayor en el sistema formado por dos interfaces y una inclusión que en el caso del sistema formado por dos interfaces.

De la Fig. 35(b) se puede concluir que al utilizar la onda plana se tiene un error numérico máximo del 7% y 8% para las polarizaciones TM y TE, mientras que al utilizar la onda Gaussiana se tiene un error numérico máximo del 3% y 4%, respectivamente. Similarmente de la Fig. 35(d), se puede concluir que al utilizar tanto la onda Gaussiana como la onda plana, se tiene un error numérico máximo aproximadamente del 4% y 6% para las polarizaciones TM y TE, respectivamente.

Así pues, se puede concluir que al tener una inclusión en el sistema de dos interfaces, las propiedades reflectivas y transmitivas se ven afectadas y por tal motivo, la mejor manera de obtener un menor error en este sistema es utilizando como haz incidente una onda Gaussiana.

Respuesta óptica para un sistema de dos interfaces y una inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa

También estamos interesados en saber qué tanto cambian las propiedades reflectivas y transmitivas al poner una rugosidad aleatoria sobre la superficie de la inclusión circular, para el sistema formado por dos interfaces y una inclusión. Por tal motivo, se hace un análisis de este sistema particular, cuyos resultados se muestran en la Fig. 36. Los parámetros correspondientes a este sistema son los mismos que se utilizaron para el sistema de dos interfaces y una inclusión circular de superficie lisa.

Para modelar la rugosidad sobre la superficie de la inclusión, se considera un perfil de superficie aleatorio sobre la inclusión circular. Para modelar la superficie, se consideró un perfil que tiene rugosidad aleatoria con una longitud de correlación $a = 0.01745$ y

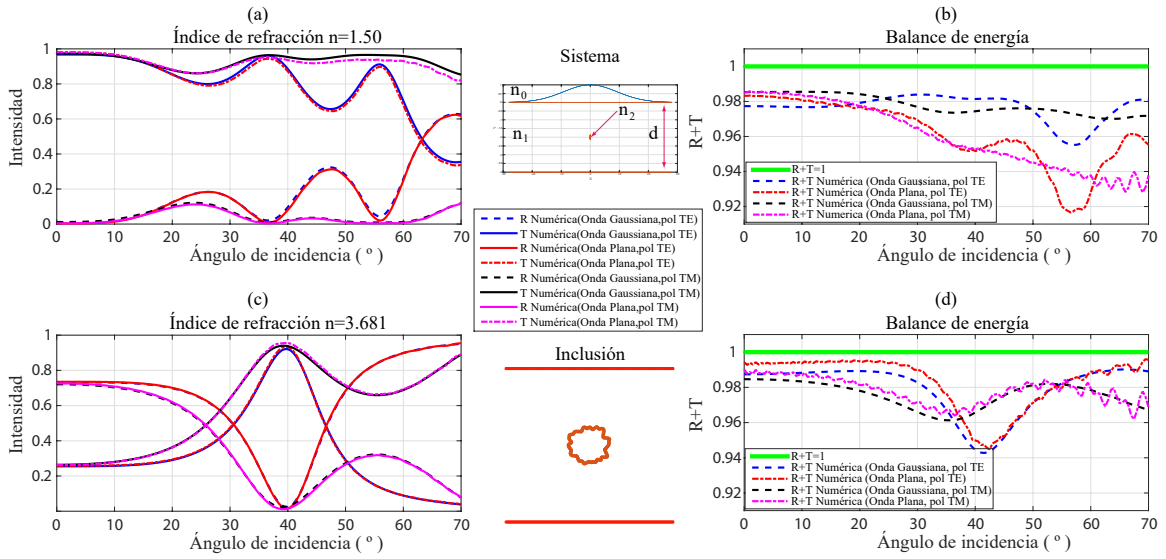


Figura 36. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa ($a = 0.01745$ y $\delta = 0.01$), compuesto por (a) aire, vidrio, aire y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$, respectivamente) y (c) aire, silicio, aire y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 3.681$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$, respectivamente) para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico. (b) y (d) muestran el balance de energía correspondiente a cada sistema.

una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.01$.

Al comparar estos resultados con los obtenidos por la Fig. 35, se concluye que la rugosidad aleatoria sobre la inclusión circular no afecta las propiedades reflectivas y transmitivas del sistema que contiene la inclusión circular de superficie lisa.

Respuesta óptica de un CF2D finito con superficies lisas

Con todo el análisis anterior para los distintos sistemas, confiamos en la veracidad del método integral para tratar el sistema de un CF2D finito formado por una celda unitaria cuadrada con inclusiones circulares de superficie lisa que contienen medios dieléctricos y cuya iluminación del sistema se hará utilizando Onda Gaussiana, ya que como se observó en los resultados anteriores es la más apropiada para obtener buenos resultados. Los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente

(Onda Gaussiana), con longitud de onda de $1 \mu\text{m}$ para el CF2D finito compuesto de 707 inclusiones (101 inclusiones en dirección del eje X y 7 inclusiones en dirección del eje Y), se muestran en las Figs. 37(a), 37(c) y 37(e) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente.

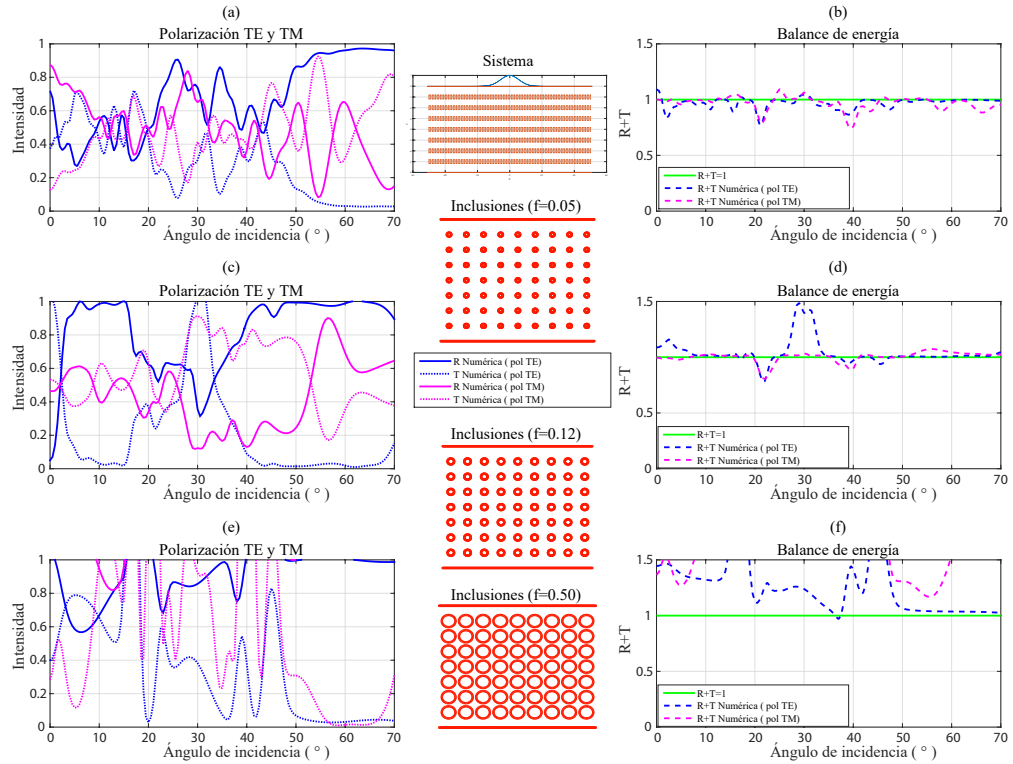


Figura 37. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies lisas con una fracción de llenado de (a) $f = 0.05$, (c) $f = 0.12$ y (e) $f = 0.50$ para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico. El medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 3.681$ (silicio). En (b), (d) y (f) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

Los resultados de las Figs. 37(a), 37(c) y 37(e) corresponden a los CF2Ds finitos con la fracción de llenado de $f = 0.05$, $f = 0.12$ y $f = 0.50$, respectivamente. En estos sistemas el medio de incidencia, el medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión, tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire) y el medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por

el índice de refracción $n = 3.681$ (silicio). Los parámetros utilizados para estos CF2Ds finitos son: una longitud de interfaces $l = 102 \mu\text{m}$, una distancia entre las interfaces $d = 8 \mu\text{m}$ y un semi-ancho del haz gaussiano $g = 13 \mu\text{m}$. En las Figs. 37(b), 37(d) y 37(f) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

En las Figs. 37(a) y 37(c) se puede observar que, para ángulos de incidencia mayores a 50° y 40° , el haz incidente (para la polarización TE) se reflejará casi por completo, transmitiéndose muy poco. Mientras que, para ángulos entre 30° y 50° para la polarización TM (Fig. 37(c)) el haz se transmite casi completamente, por lo que se reflejará muy poco. También se puede observar de la Fig. 37(b), que el error numérico máximo obtenido en el cálculo de la reflectancia y transmitancia, para ambas polarizaciones, es de aproximadamente el 20% para algunos ángulos de incidencia, mientras que en la Fig. 37(d) se aprecia que el error numérico máximo es de aproximadamente el 50% y 20% para las polarizaciones TE y TM, respectivamente. En la Fig. 37(f) se observa que el error numérico cometido es demasiado grande. Esto es debido a que para esta fracción de llenado grande ($f = 0.50$), se discretizó de igual manera que en los casos de las fracciones de llenado pequeñas ($f = 0.05$ y $f = 0.12$), en los cuales se utilizaron 32 puntos sobre cada inclusión circular. Estos cálculos se podrían mejorar al discretizar más finamente los contornos de las superficies involucradas (lo cual implica un número de puntos mayor sobre las inclusiones del CF2D) y al hacer el sistema más grande en la dirección del eje X (esto debido a que el sistema es finito y mientras más grande es, mejores resultados se obtienen). La razón por la cual no se discretizó más finamente las superficies involucradas o se hizo el sistema más grande, es porque se llegó al límite posible del equipo computacional, utilizando con ello toda la memoria disponible de la máquina para hacer los cálculos. Cabe recordar que, la estación de trabajo de la FCFM utilizada tiene 2 procesadores “Intel Xeon Processor 8 Cores E5-2640 (20M Caché, 2.00 GHz)”, con 64 GB de memoria (8 X 8 GB).

Con esta consideración en mente, al analizar un CF2D finito con inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa, se debe tener presente que para generar la superficie rugosa en la inclusión se ocupa un poco más del doble de puntos de los que se utilizan en el caso de la superficie lisa. Lo anterior implica que, con la memoria con la que cuenta el equipo de cómputo (utilizada para estos cálculos), es necesario trabajar con sistemas más pequeños de inclusiones que en el caso liso. A continuación, se muestran los resultados obtenidos para un CF2D finito con inclusión circular de superficie lisa con el mismo tamaño del sistema rugoso, el cual se tratará más adelante para poder hacer una comparación. En las Figs. 38(a), 38(c) y 38(e) se muestran los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda Gaussiana), con longitud de onda de $1 \mu\text{m}$ para el CF2D finito compuesto de 415 inclusiones (83 inclusiones en dirección del eje X y 5 inclusiones en dirección del eje Y) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente.

En las Figs. 38(b), 38(d) y 38(f) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema, para los cuales el medio de incidencia, el medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 3.681$ (silicio). Los parámetros utilizados para el CF2D finito son: una longitud de interfaces $l = 84 \mu\text{m}$, una distancia entre las interfaces $d = 6 \mu\text{m}$ y un semi-ancho del haz gaussiano $g = 13 \mu\text{m}$.

De la Fig. 38(b) se puede observar que el error numérico máximo presente en el cálculo de la reflectancia y de la transmitancia es del 10% y 20% para las polarizaciones TE y TM; mientras que en la Fig. 38(d) se aprecia que el error numérico máximo es del 20% y 30%, respectivamente. Finalmente, en la Fig. 38(f) se observa que el error numérico máximo cometido es aproximadamente del 17% para la polarización TE y

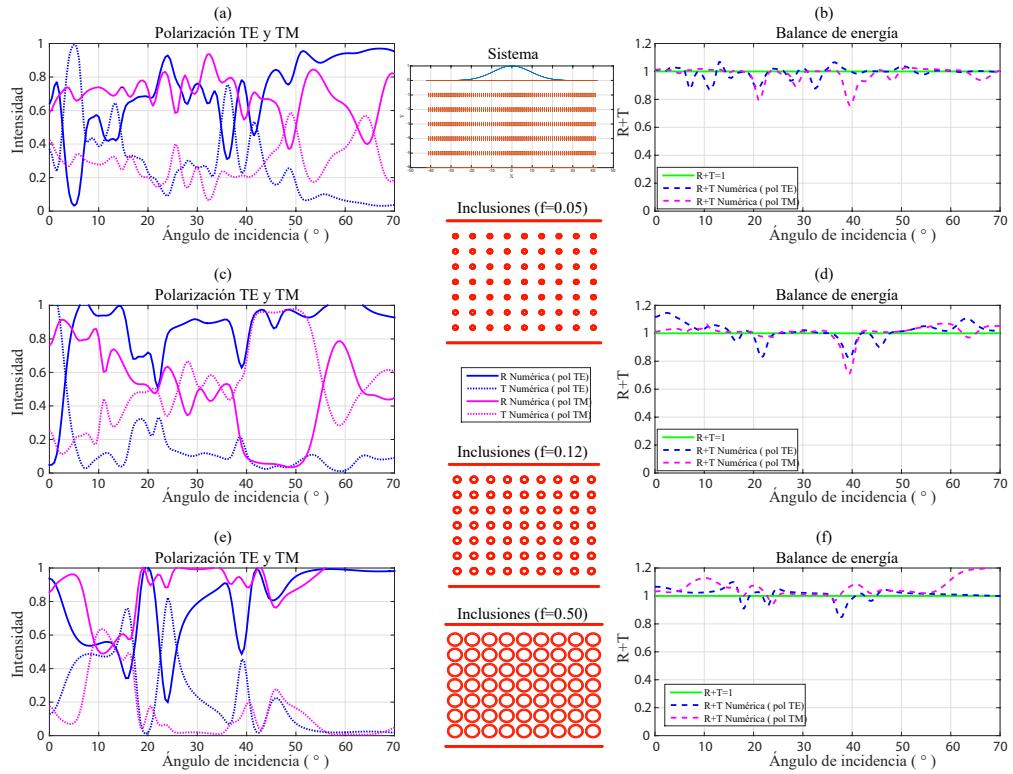


Figura 38. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies lisas con una fracción de llenado de (a) $f = 0.05$, (c) $f = 0.12$ y (e) $f = 0.50$ para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico. El medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 3.681$ (silicio). En (b), (d) y (f) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

el 20% para la polarización TM (para ángulos grandes). Si se comparan estos errores numéricos con los obtenidos en la Fig. 37, se puede observar que se comete un menor error en este caso, a pesar de que el sistema es más pequeño. Esto es debido a que el sistema pequeño permite una discretización más fina en relación con el sistema más grande y por lo tanto, se obtienen mejores resultados. En particular, se nota una mejora significativa para el CF2D con fracción de llenado de $f = 0.05$ (Figs. 38(e) y 38(f)), esto debido a que la discretización sobre la inclusión circular en el sistema pequeño es más fina que en el sistema grande (una diferencia del doble de puntos sobre las inclusiones que conforman cada sistema).

También se puede observar que en la Fig. 38(a), para ambas polarizaciones, la reflectancia es alta. En particular, para un haz incidente bajo la polarización TE y en ángulos mayores a 50° , el haz se reflejará casi por completo; lo anterior implica que para estos ángulos, habrá muy poca transmitancia. En la Fig 38(c), se puede observar que para un haz incidente bajo la polarización TE, la reflectancia es alta; en particular para ángulos mayores a 40° , el haz se reflejará casi por completo. Bajo la polarización TM, la reflectancia irá disminuyendo a medida que el ángulo de incidencia vaya aumentando (0° a 50°). En particular, para ángulos de incidencia entre 40° y 50° , la reflectancia es mínima; lo cual implica que, para estos ángulos el haz se transmitirá casi por completo. En la Fig. 38(e), se puede observar que la reflectancia es alta para ángulos de incidencia mayores a 20° bajo polarización TM; en particular, para ángulos mayores a 50° , la transmitancia será muy baja para ambas polarizaciones.

Por último, en esta sección se muestran los resultados obtenidos de un CF2D finito con inclusión circular de superficie lisa con una fracción de llenado de $f = 0.05$, donde el medio de incidencia, el medio que contiene a las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contienen las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 2.9833$ (correspondiente al sistema del CF2D infinito, en las estructuras de bandas).

En las Figs. 39(a) y 39(c), se muestran los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda Gaussiana), con longitud de onda de $1 \mu\text{m}$ para el CF2D finito compuesto de 415 inclusiones (83 inclusiones en dirección del eje X y 5 inclusiones en dirección del eje Y) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente.

De las Figs. 39(a) y 39(c), se puede observar que para ángulos mayores a 10° , la

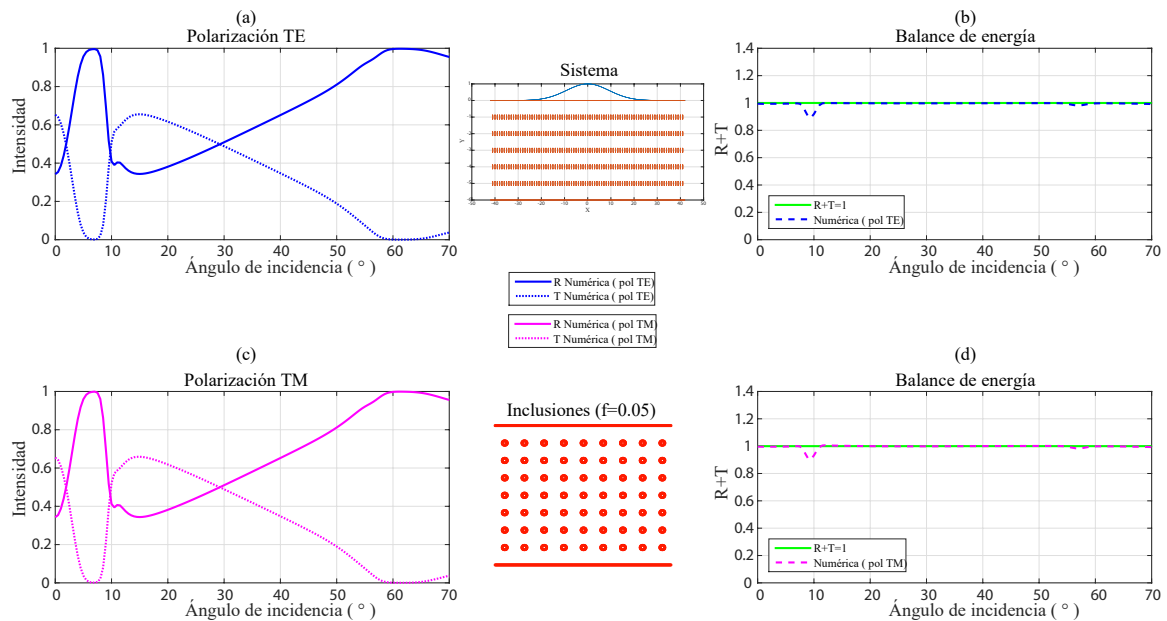


Figura 39. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies lisas con una fracción de llenado de $f = 0.05$ para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. El medio de incidencia, el medio que contiene a las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contienen las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 2.9833$. En (b) y (d) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

reflectancia irá aumentando conforme el ángulo de incidencia aumente. En particular, para ángulos mayores a 60° , la reflectancia es máxima; lo cual indica que, al incidir el haz Gaussiano sobre el sistema propuesto, para estos ángulos no habrá transmitancia en ambas polarizaciones. También se puede observar, a partir de las Figs. 39(b) y 39(d), que el error numérico máximo obtenido en el cálculo de la reflectancia y transmitancia es de aproximadamente el 10% para las polarizaciones TE y TM.

Respuesta óptica de un CF2D finito con superficies aleatoriamente rugosas

También es de interés el saber qué tanto cambian las propiedades reflectivas y transmitivas al poner una rugosidad aleatoria sobre la superficie de las inclusiones circulares que conforman el CF2D finito; por tal motivo, se hace un análisis de estos sistemas.

Los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda Gaussiana), con longitud de onda de $1 \mu\text{m}$ para el CF2D finito compuesto de 415 inclusiones (83 inclusiones en dirección del eje X y 5 inclusiones en dirección del eje Y), se muestran en las Figs. 40(a), 40(c) y 40(e) para las polarizaciones TE y TM.

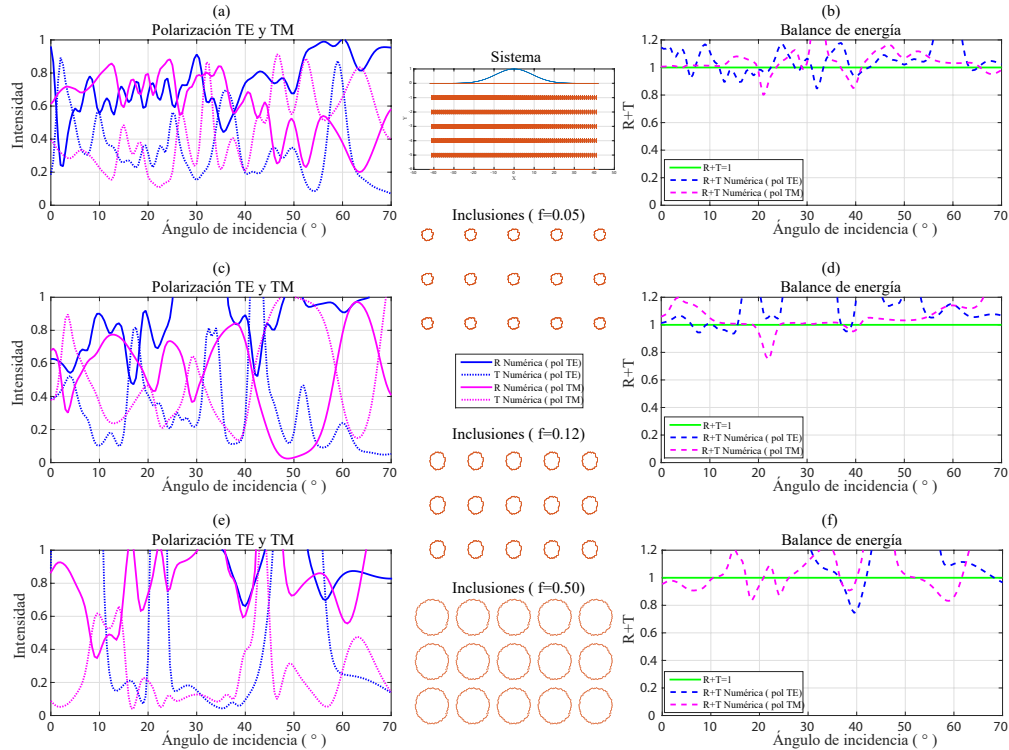


Figura 40. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies aleatoriamente rugosas ($a = 0.01745$ y $\delta = 0.01$) con una fracción de llenado de (a) $f = 0.05$, (c) $f = 0.12$ y (e) $f = 0.50$ para las polarizaciones TE y TM, mediante cálculo numérico. El medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 3.681$ (silicio). En (b), (d) y (f) se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

Los resultados de las Figs. 40(a), 40(c) y 40(e) corresponden a los CF2Ds finitos con la fracción de llenado de $f = 0.05$, $f = 0.12$ y $f = 0.50$, respectivamente. En estos sistemas el medio de incidencia, el medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$

(aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 3.681$ (silicio). Los parámetros utilizados en el sistema son los mismos que fueron utilizados en el caso liso (Fig. 38). La rugosidad aleatoria sobre la superficie de la inclusión circular fue modelada con los mismos parámetros que en el caso del sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa. En las Figs. 40(b), 40(d) y 40(f), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

De la Fig. 40(b), se puede observar que el error numérico cometido en el cálculo de la reflectancia y transmitancia para las polarizaciones TE y TM es de aproximadamente el 20% en ciertos ángulos de incidencia, mientras que de las Figs. 40(d) y 40(f) se puede observar que el error numérico máximo en el cálculo es grande. De igual manera, se podría mejorar el error numérico al discretizar más finamente los contornos involucrados o al hacer el sistema más grande en la dirección del eje X.

Finalmente, se muestran los resultados obtenidos por un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies aleatoriamente rugosas con una fracción de llenado de $f = 0.05$, donde el medio de incidencia, el medio que contiene a las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contienen las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 2.9833$ (correspondiente al sistema del CF2D infinito, en las estructuras de bandas). La rugosidad aleatoria sobre las superficies de las inclusiones circulares fue modelada con los mismos parámetros que en el caso del sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa. En las Figs. 41(a) y 41(c), se muestran los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda Gaussiana), con longitud de onda de $1 \mu\text{m}$ para el CF2D finito compuesto de 415 inclusiones (83 inclusiones en dirección del eje X y 5 inclusiones

en dirección del eje Y), para las polarizaciones TE y TM.

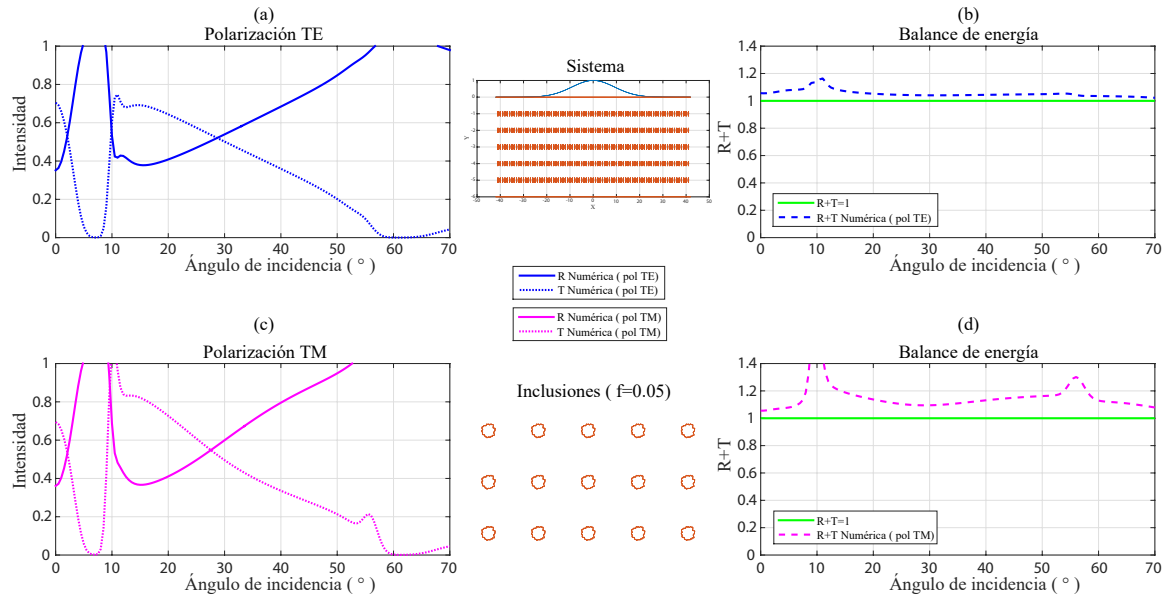


Figura 41. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con inclusiones circulares de superficies aleatoriamente rugosas ($a = 0.01745$ y $\delta = 0.01$) con una fracción de llenado de $f = 0.05$ para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. El medio de incidencia, el medio que contiene a las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contienen las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 2.9833$. En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

En las Figs. 41(b) y 41(d), se puede observar que el error numérico máximo presente en el cálculo de la reflectancia y transmitancia es de aproximadamente el 20% y un poco más del 40%, respectivamente. Al comparar los resultados de los CF2Ds con superficies lisas (Figs. 38 y 39) respecto a los resultados con superficies aleatoriamente rugosas (Figs. 40 y 41) se puede concluir que la rugosidad aleatoria sobre la superficie de las inclusiones circulares afecta considerablemente las propiedades reflectivas y transmitivas del CF2D finito.

IV.2.2. Medios de LHM

Respuesta óptica para un sistema de dos interfaces

Al igual que en el caso de medios dieléctricos, ahora se analizará un sistema que está formado por dos interfaces entre tres medios, donde el medio entre las interfaces estará compuesto de LHM y tanto el primer medio como el tercero, estarán compuestos de dieléctrico (en este caso, aire). Los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda Gaussiana) con longitud de onda de $1.5385 \mu\text{m}$, se muestran en las Figs. 42(a) y 42(c) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente. Los resultados de las Figs. 42(a) y 42(c) corresponden al sistema formado por los índices de refracción $n_0 = 1$, $n_1 = -7.9786$ (para la longitud de onda considerada) y $n_2 = 1$ (medio de incidencia: aire), LHM (medio entre las interfaces) y aire (medio de transmisión), respectivamente; una longitud de las interfaces $l = 62 \mu\text{m}$ y una distancia de separación entre las interfaces, $d = 5 \mu\text{m}$. Para el haz Gaussiano se utilizó un semi-ancho de $g = 7 \mu\text{m}$, en ambas polarizaciones. En las Figs. 42(b) y 42(d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema. De las Figs. 42(a) y 42(c), se puede concluir que al incidir el haz Gaussiano bajo la polarización TE, sobre el sistema de dos interfaces que contienen un medio de LHM, éste se transmitirá casi por completo y se reflejará muy poco para los diferentes ángulos de incidencia. Mientras que bajo la polarización TM, el haz se transmitirá casi por completo para ángulos pequeños; sin embargo, a medida que el ángulo de incidencia vaya aumentando, su transmitancia disminuirá y por lo tanto, su reflectancia aumentará. También se puede observar de la Fig. 42(b), que el error numérico en el cálculo de la reflectancia y transmitancia para la polarización TE es de aproximadamente el 6% para ángulos de incidencia grandes, mientras que de la Fig. 42(d) el error numérico presente en el cálculo para la polarización

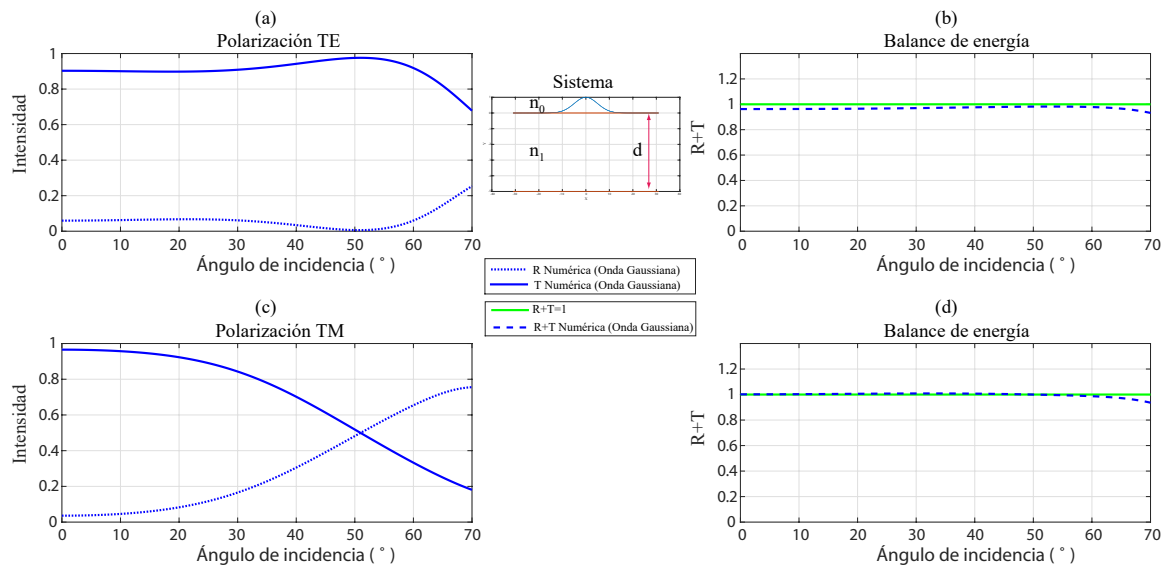


Figura 42. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces compuesto por aire, LHM y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = -7.9786$ y $n_2 = 1$, respectivamente) para las polarizaciones (a) TE y (b) TM, mediante cálculo numérico. En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

TM, es alrededor del 5%.

Respuesta óptica para un sistema de dos interfaces y una inclusión circular de superficie lisa

A continuación, se presenta el análisis de un sistema que está formado por dos interfaces entre tres medios dieléctricos y una inclusión circular que se encuentra en el centro de ambas interfaces, la cual contiene un medio de LHM. Los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia, como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda Gaussiana) con longitud de onda de $1.5385 \mu\text{m}$, se muestran en las Figs. 43(a) y 43(c) para las polarizaciones TE y TM.

Los resultados en las Figs. 43(a) y 43(c), corresponden al sistema formado por los índices de refracción $n_0 = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = -7.9786$ (para la longitud de onda considerada) y $n_3 = 1$ (correspondientes al aire (medio de incidencia), aire (medio entre

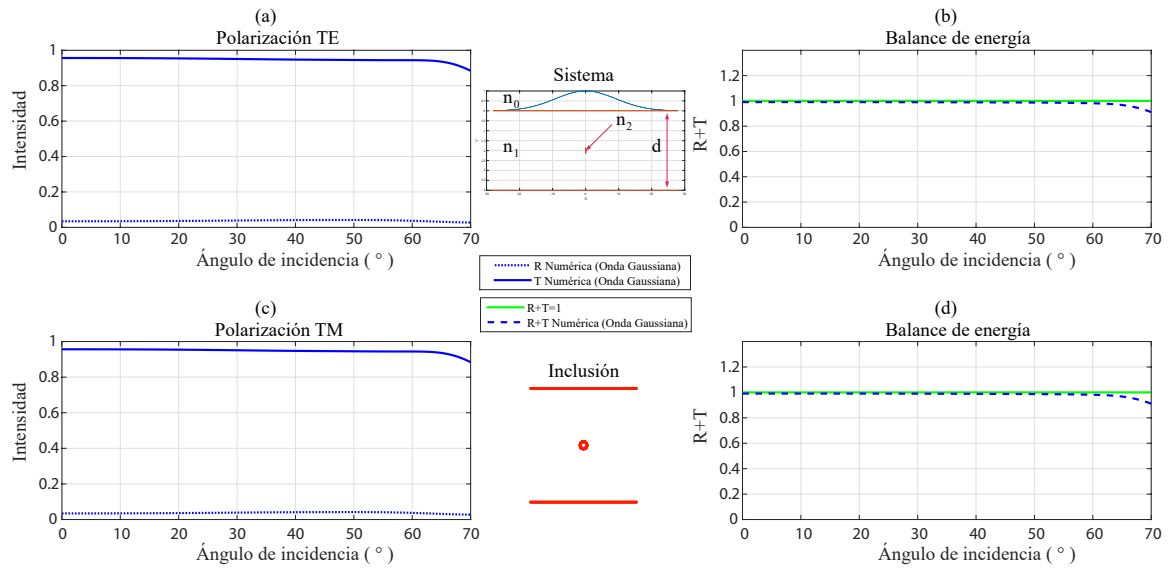


Figura 43. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie lisa compuesto por: aire, aire, LHM y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = -7.9786$ y $n_3 = 1$, respectivamente) para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema particular.

las interfaces), LHM (medio en la inclusión) y aire (medio de transmisión), respectivamente). Los parámetros utilizados para este sistema, son los mismos que han sido empleados en el sistema de dos interfaces que contienen un medio de LHM y la fracción de llenado correspondiente a la inclusión circular es de $f = 0.05$, para este sistema. En las Figs. 43(b) y 43(d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema particular.

De las Figs. 43(a) y 43(c) se puede concluir que al incidir el haz Gaussiano sobre el sistema propuesto, éste se transmitirá casi por completo para los diferentes ángulos de incidencia en ambas polarizaciones. También se puede observar de las Figs. 43(b) y 43(d), que el error numérico máximo en el cálculo de la reflectancia y transmitancia es de aproximadamente el 6%, para las polarizaciones TE y TM.

Respuesta óptica para un sistema de dos interfaces y una inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa

Enseguida, se presenta el análisis de un sistema que está formado por dos interfaces entre tres medios dieléctricos y una inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa que se encuentra en el centro de ambas interfaces, la cual contiene un medio de LHM. Los resultados de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia, se muestran en la Fig. 44. Los parámetros correspondientes a este sistema son los mismos que se utilizaron para el sistema de dos interfaces y una inclusión circular de superficie lisa.

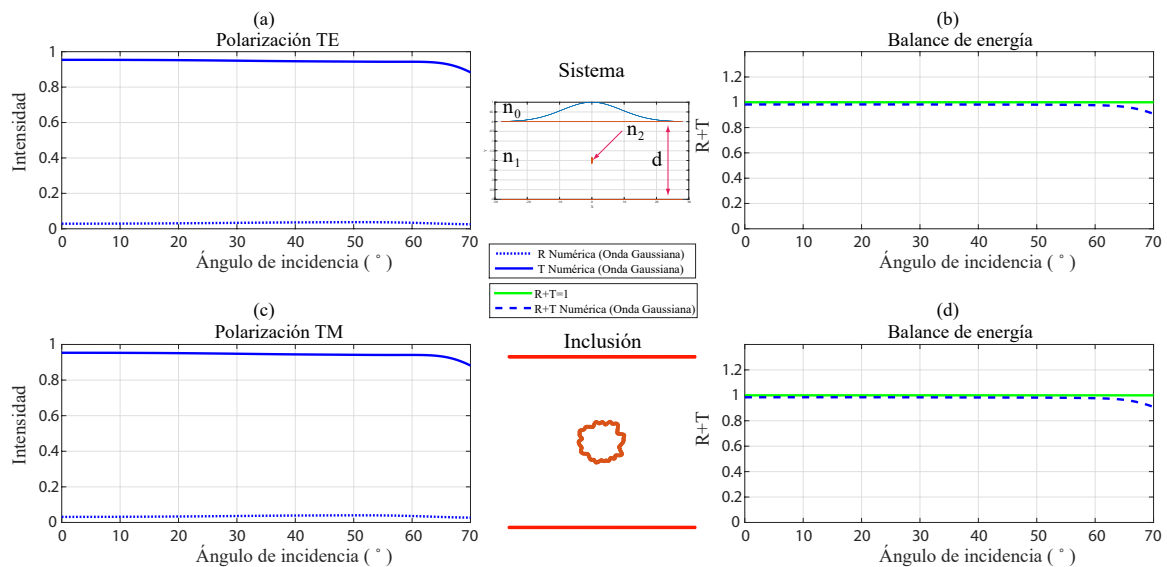


Figura 44. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa ($a = 0.01745$ y $\delta = 0.01$) compuesto por: aire, aire, LHM y aire ($n_0 = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = -7.9786$ y $n_3 = 1$, respectivamente) para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema particular.

Para modelar la rugosidad sobre la superficie de la inclusión, se considera un perfil sobre la inclusión circular que tiene rugosidad aleatoria con una longitud de correlación $a = 0.01745$ y una desviación estándar de las alturas, $\delta = 0.01$.

Al comparar estos resultados con los obtenidos de la Fig. 43, se concluye que la

rugosidad aleatoria sobre la inclusión circular no afecta las propiedades reflectivas, ni transmitivas del sistema que contiene la inclusión circular de superficie lisa.

Respuesta óptica de un CF2D finito con superficies lisas

Ahora presentamos el análisis de un sistema de un CF2D finito, formado por una celda unitaria cuadrada con inclusiones circulares de superficies lisas que contiene medios de LHM. Los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia, como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda Gaussiana) con longitud de onda de $1.5385 \mu\text{m}$, para el CF2D finito compuesto de 244 inclusiones (61 inclusiones en dirección del eje X y 4 inclusiones en dirección del eje Y), se muestran en las Figs. 45(a) y 45(c) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente.

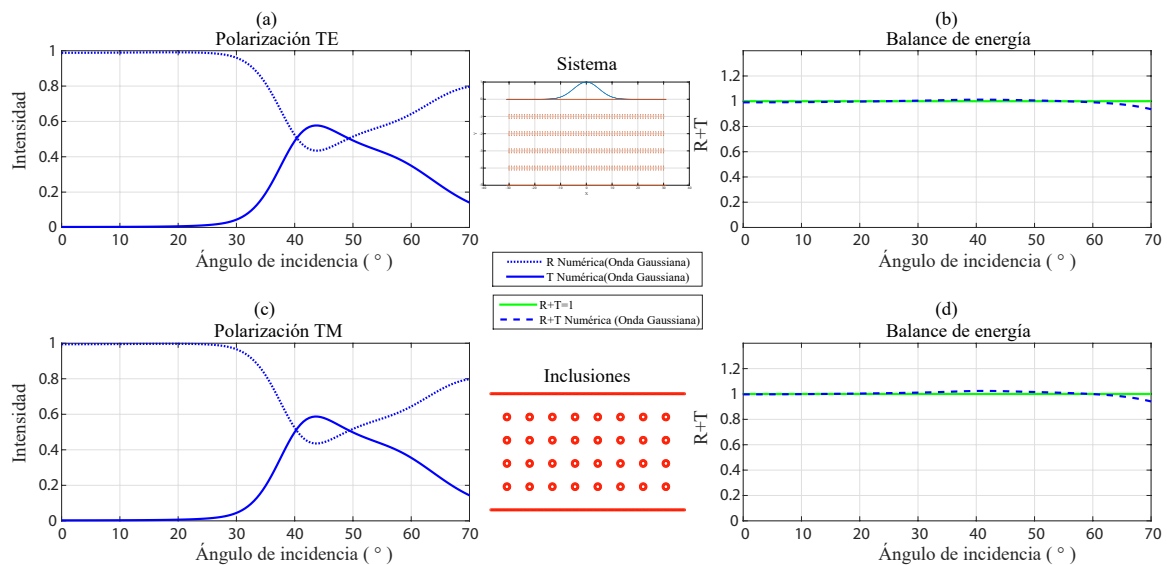


Figura 45. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con superficies lisas para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. El medio de incidencia, el medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = -7.9786$ (LHM). En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

Los resultados de las Figs. 45(a) y 45(c) corresponden al CF2D finito donde el medio

de incidencia, el medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire, en este caso). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = -7.9786$ (LHM). Los parámetros utilizados para este sistema, son los mismos que los empleados en el sistema de dos interfaces entre tres medios dieléctricos y una inclusión circular. En las Figs. 45(b) y 45(d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

De las Figs. 45(a) y 45(c) se puede concluir que, para ambas polarizaciones, al incidir el haz Gaussiano sobre el sistema propuesto, éste se reflejará por completo para ángulos de incidencia menores a 30° ; para ángulos entre 30° y 43° la reflectancia disminuirá, por lo que la transmitancia aumentará y para ángulos mayores a 43° , la reflectancia aumentará y la transmitancia disminuirá. También se puede observar de las Figs. 45(b) y 45(d), que el error numérico en el cálculo de la reflectancia y transmitancia es de alrededor del 5% (para ángulos mayores), bajo las polarizaciones TE y TM.

Respuesta óptica de un CF2D finito con superficies aleatoriamente rugosas

Finalmente, nos referimos al análisis para un sistema de un CF2D finito formado por una celda unitaria cuadrada con inclusiones circulares de superficies aleatoriamente rugosas, que contiene medios de LHM. Los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia, como función del ángulo de incidencia con un haz de luz incidente (Onda Gaussiana) con longitud de onda de $1.5385 \mu\text{m}$ para el CF2D finito compuesto de 244 inclusiones, se muestran en las Figs. 46(a) y 46(c) para las polarizaciones TE y TM, respectivamente.

Los resultados de las Figs. 46(a) y 46(c) corresponden al caso del CF2D finito donde el medio de incidencia, el medio que contienen las inclusiones y el medio de transmisión tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (aire).

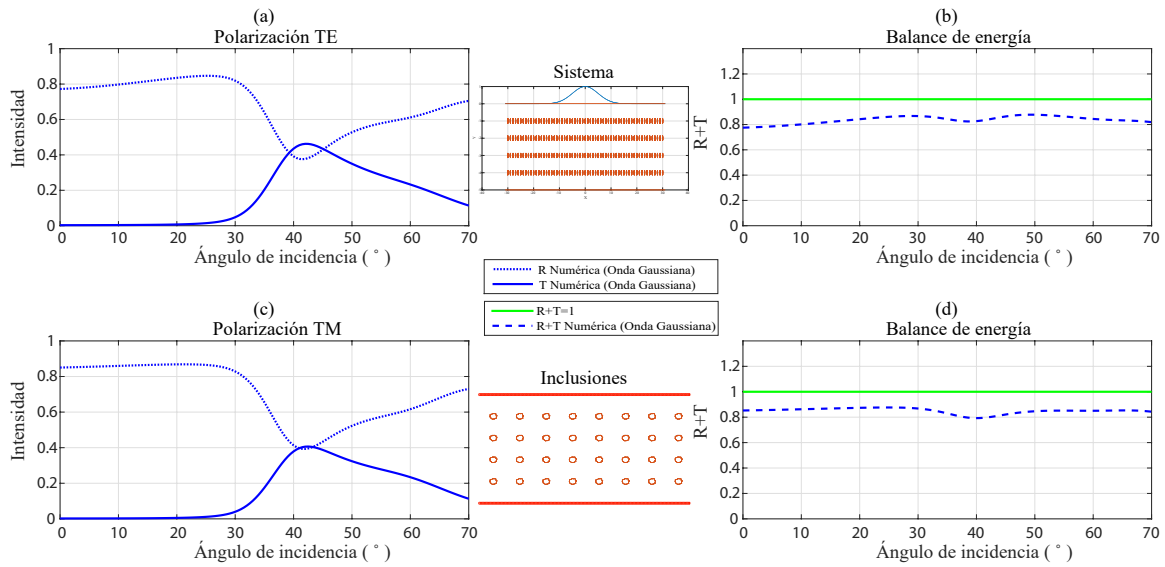


Figura 46. Reflectancia (R) y Transmitancia (T) para un CF2D finito con superficies aleatoriamente rugosas ($a = 0.01745$ y $\delta = 0.01$) para las polarizaciones (a) TE y (c) TM, mediante cálculo numérico. El medio de incidencia, el medio que contienen las inclusiones y el medio de trasmisión, tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = 1$ (i.e. aire). El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = -7.9786$ (LHM). En (b) y (d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema.

El medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción $n = -7.9786$ (LHM). Los parámetros utilizados para este sistema son los mismos empleados en el sistema del CF2D finito con superficies lisas. La rugosidad aleatoria sobre las superficies de las inclusiones circulares fue modelada con los mismos parámetros que, se implementaron en el caso del sistema formado por dos interfaces y una inclusión circular de superficie aleatoriamente rugosa. En las Figs. 46(b) y 46(d), se muestra el balance de energía correspondiente a cada sistema particular.

Al comparar estos resultados con los obtenidos en el caso liso (Fig. 45), se concluye que la rugosidad aleatoria sobre la inclusión circular afecta las propiedades reflectivas y transmitivas del sistema que contiene la inclusión circular de superficie lisa. También se puede observar de las Figs. 46(b) y 46(d), que el error numérico cometido en el cálculo de la reflectancia y de la transmitancia aumentó en comparación al sistema de

inclusiones de superficies lisas, para las polarizaciones TE y TM.

Capítulo V

CONCLUSIONES

En este capítulo se menciona un breve resumen y en base a los resultados obtenidos, se enuncian las conclusiones más importantes de este proyecto de investigación.

Se aplicó un método numérico para calcular la estructura de bandas de un CF2D infinito y la respuesta electromagnética de un CF2D finito con superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contienen medios de LHM y/o dieléctrico.

La técnica numérica que se utilizó en este trabajo se le conoce como el método de la ecuación integral. Este método parte del segundo teorema integral de Green, permitiendo obtener un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran como incógnitas, el modo del campo y su derivada normal evaluados en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea (para el CF2D infinito) y no homogénea (para el CF2D finito) cuya solución determina las funciones fuente, con las que se pueden obtener las estructuras de bandas y la distribución del campo eléctrico o magnético, en las regiones de campo lejano. Con este método, se calcularon las estructuras de bandas de un CF2D infinito y la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y de la transmitancia, como función del ángulo de incidencia de un CF2D finito formado por una celda unitaria cuadrada con una inclusión circular de superficie lisa o aleatoriamente rugosa, que contiene medios de

LHM y/o dieléctrico. Los cálculos fueron realizados variando las fracciones de llenado para las polarizaciones TE y TM, respectivamente.

El método integral tiene una gran ventaja en comparación de otros métodos, la cual es sólo tener en cuenta un número finito de puntos de muestreo a lo largo de los contornos involucrados en el sistema de interés, en lugar de toda la superficie; permitiendo así, el empleo de una menor cantidad de recursos computacionales. Además, el método integral permite estudiar diferentes aspectos de estos sistemas que tienen geometrías complicadas; en particular la rugosidad en la superficie de los CFs que contienen medios de LHM y/o dieléctrico.

En el cálculo de las estructuras de bandas para un CF2D formado por una celda unitaria cuadrada con una inclusión circular que tiene una superficie lisa y que está compuesto por dos materiales dieléctricos diferentes, nos permite concluir bajo la polarización TE, que entre menor sea la fracción de llenado utilizada se puede tener bandas prohibidas más anchas y éstas aparecen a una frecuencia mayor, para la fracción de llenado más pequeña. Esto permite un mayor control de la propagación de la luz a través de el CF2D finito, bajo este tipo de polarización. Al implementar la polarización TM, no se obtuvo ninguna banda prohibida como resultado; lo cual nos indica que se transmitirá la luz completamente a través del cristal, para todo el intervalo de frecuencias considerado. Respecto al efecto de la rugosidad sobre la superficie de la inclusión circular, se concluye que las estructuras de bandas no presentan cambios notables, ya que las bandas permitidas fueron afectadas muy poco en sus posiciones.

En el cálculo de las estructuras de bandas para un CF2D infinito formado por una celda unitaria cuadrada con inclusión circular de superficie lisa que contiene medios de LHM, los resultados muestran que entre mayor es la fracción de llenado, se pueden obtener más bandas prohibidas bajo la polarización TE. En cuanto al efecto de la rugosidad sobre la superficie de la inclusión circular, se pudo observar que las estructuras

de bandas se modifican considerablemente. Para el caso de la polarización TE se puede concluir que, el efecto de la rugosidad modifica la forma y la posición de las estructuras de bandas. Es decir, para frecuencias grandes (longitudes de onda pequeñas) la rugosidad provoca que algunas zonas de las bandas permitidas cambien notablemente de posición y que las bandas prohibidas se hagan ligeramente más angostas. En cambio, para frecuencias pequeñas (longitudes de onda grandes), la rugosidad afecta mucho más la forma de las estructuras de bandas generando, a su vez, nuevas bandas prohibidas. Por otro lado, en el caso de la polarización TM, el efecto presente de la rugosidad modifica de manera notoria la forma de las estructuras de bandas, para todas las fracciones de llenado; en particular, genera nuevas bandas prohibidas, a diferencia del caso de superficies sin rugosidad.

Estos resultados son muy importantes porque indican que la rugosidad sobre las superficies de los CFs, es un aspecto a tomar en cuenta en su fabricación. Cabe mencionar que, modificar las superficies con defectos es otra forma de obtener bandas prohibidas, en todo el intervalo de las frecuencias para un LHM dispersivo. Esto permite tener un mayor control de la propagación de la luz a través del CF2D propuesto.

Dado que en el caso de la inclusión circular con superficies aleatoriamente rugosas, hubo la necesidad de utilizar la computación en paralelo bajo el protocolo de MPI y CUDA, debido a la gran cantidad de tiempo de cómputo requerido para obtener las estructuras de bandas, se hizo necesario efectuar (para la polarización TM) una comparación de los distintos tiempos de cómputo respecto a la versión secuencial, en el que se utilizó el compilador PGIFORTRAN y del cual se obtuvo que al calcular las estructuras de bandas, el compilador de Intel (usando librerías internas de MKL) es mucho más rápido que los otros compiladores y, que al implementar la paralelización con CUDA, el tiempo de cómputo es mayor que al usar la paralelización con MPI. En base a lo anterior se concluye que, la paralelización con CUDA no es apropiada para

el cálculo de las estructuras de bandas correspondientes al caso infinito. El análisis del tiempo de cómputo fue importante realizarlo porque permite ver cuál es la forma más óptima para desarrollar los algoritmos en el caso del CF2D finito, el cual requiere mucho más recursos computacionales.

Referente al cálculo de la respuesta óptica de los sistemas finitos (sistemas compuestos por una interfaz, dos interfaces y dos interfaces con una inclusión, respectivamente), se puede resaltar el hecho de que al iluminar dichos sistemas utilizando una onda Gaussiana, se obtenían mejores resultados numéricos en comparación a una onda plana. Por tal razón se decidió utilizar este tipo de iluminación en el sistema formado por el CF2D finito. Por otro lado, se hizo un comparativo de los resultados numéricos con los analíticos para una y dos interfaces, lográndose una gran concordancia con ambos métodos. Esto dio validez y confiabilidad al método numérico propuesto para aplicarlo a sistemas más complicados como fue el CF2D finito.

Al comparar los resultados de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y de la transmitancia, como función del ángulo de incidencia de los sistemas finitos compuestos por dos interfaces y una inclusión de superficie lisa y aleatoriamente rugosa con medios de dieléctrico o LHM, nos permite inferir que la rugosidad aleatoria sobre la inclusión circular no afecta las propiedades reflectivas, ni transmitivas del sistema.

De la misma manera, al comparar los resultados de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y de la transmitancia, como función del ángulo de incidencia de los CF2Ds finitos con superficies lisas y aleatoriamente rugosas compuestos por medios de dieléctrico o LHM, llegamos a concluir que la rugosidad aleatoria sobre las superficies de las inclusiones circulares afecta considerablemente las propiedades reflectivas y transmitivas del CF2D finito. Estos resultados son muy importantes, ya que nos indican que este aspecto es importante a tomar en cuenta en el proceso de fabricación de un CF2D finito. Como trabajo futuro se pretende hacer un estudio

numérico similar calculando la reflectancia o transmitancia del sistema variando las frecuencias del haz de iluminación para hacer un comparativo con las estructuras de bandas presentes en este trabajo.

Referencias

- Archuleta-García, R., Manzanares-Martínez, M. B., y Manzanares-Martínez, J. (2007). Una descripción del método de ondas planas para el cálculo de bandas fotónicas. *Rev. Boliviana de Fis.*, **13**: 79–85.
- Barber, D. J. y Freestone, I. C. (1990). An investigation of the origin of the color of the lycurgus cup by analytical transmission electron-microscopy. *Archaeometry*, **32**: 33–45.
- Bria, D., Djafari-Rouhani, B., Akjouj, A., Dobrzynski, L., Vigneron, J. P., El-Boudoti, E. H., y Nougouai, A. (2004). Band structure and omnidirectional photonic band gap in lamellar structures with left-handed materials. *Phys. Rev. Lett.*, **69**: 066613.
- Bykov, V. P. (1972). Spontaneous emission in a periodic structure. *J. Exp. Theor. Phys.*, **35**: 269–273.
- Casse, B. D. F., Lu, W. T., Huang, Y. J., Gultepe, E., Menon, L., y Sridhar, S. (2010). Super-resolution imaging using a three-dimensional metamaterials nanolens. *Appl. Phys. Lett.*, **96**(023114): 1–3.
- Centeno-Jiménez, T. P. (2014). *Estructuras de bandas de cristales fotónicos en 2D con superficies rugosas usando un método integral*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH. Págs. 100.
- Cui, T. J., Smith, D. R., y Liu, R. (2010). *Metamaterials Theory, Design and Applications*. Springer, USA, primera edición.
- Gabrielli, L. H., Cardenas, J., Poitras, C. B., y Lipson., M. (2009). Silicon nanostructure cloak operating at optical frequencies. *Nature Photonics*, **3**: 461–463.
- Gharghi, M., Gladden, C., Zentgraf, T., Liu, Y., Yin, X., Valentine, J., y Zhang, X. (2011). A carpet cloak for visible light. *Nano Letters*, **11**: 2825.
- Griffiths, D. J. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, USA, tercera edición.
- Halir, R., Bock, P. J., Cheben, P., nux, A. O.-M., Alonso-Ramos, C., Schmid, J. H., Lapointe, J., Xu, D. X., Wangüemert-Pérez, J. G., Molina-Fernández, I., y Janz, S. (2015). Waveguide sub-wavelength structures: a review of principles and applications. *Laser & Photonics Reviews*, **9**: 25–49.
- Ho, K. M., Chan, C. T., y Soukoulis, C. M. (1990). Existence of a photonic gap in periodic dielectric structures. *Phys. Rev. Lett.*, **65**: 3152–3155.

- Houck, A. A., Brock, J. B., y Chuang, I. L. (2003). Experimental observations of a left-handed material that obeys snell's law. *Phys. Rev. Lett.*, **90**: 137401.
- Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., Winn, J. N., y Meade, R. D. (2008). *Photonic crystals: Molding the flow of light*. Princeton University Press, New York, segunda edición.
- John, S. (1987). Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, **58**: 2486–2489.
- Korvink, J. G. y Greiner, A. (2002). *Chapter 2: " The Crystal Lattice System " in Semiconductors for Micro and Nanotechnology: An Introduction for Engineers*. Wiley-VCH, Germany.
- Landau, L. D. y Lifshitz., E. M. (1981). *Electrodinámica en los medios continuos*. Reverté.
- Lehmann, G. y Spatschek, K. H. (2016). Transient plasma photonic crystals for high-power lasers. *Phys. Rev. Lett.*, **116**: 225002.
- Li, J. y Pendry, J. B. (2008). A new strategy for cloaking. *Phys. Rev. Lett*, **101**: 203901.
- Li, J., Huang, W., y Han, Y. (2006). Tunable photonic crystals by mixed liquids. *Colloids Surf.*, **279**: 213–217.
- Li, W., Guler, U., Kinsey, N., Naik, G. V., Boltasseva, A., Guan, J., Shalaev, V. M., y Kildishev, A. V. (2014). Refractory plasmonics with titanium nitride: Broadband metamaterial absorber. *Adv. Mater.*, **26**: 7959–7965.
- Lozano-Trejo, E. (2017). *Estudio numérico de la respuesta óptica en guías de ondas de cristal fotónico usando programación en paralelo con los protocolos de MPI y CUDA*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH. Págs. 80.
- Maradudin, A. A., Michel, T., McGurn, R. A., y Méndez, E. R. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **203**: 255–307.
- Megens, M., Wijnhoven, J. E. G. J., Lagendijk, A., y Vos, W. L. (1999). Light sources inside photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B.*, **16**: 1403–1408.
- Melville, D. O. S. y Blaikie, R. J. (2005). Super-resolution imaging through a planar silver layer. *Optical Society of America*, **13**(6): 2127–2134.
- Mendoza-Suárez, A. y Méndez, E. R. (1997). Light scattering by a reentrant fractal surface. *Appl. Opt.*, **36**: 3521–3531.

- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2006). Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one and two dimensional photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**(10): 2249–2256.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2007). Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive lefthanded materials and dielectrics in the unit cell. *J. Opt. Soc. Am. B*, **24**(12): 3091–3098.
- Ni, X., Wong, Z. J., Mrejen, M., Wang, Y., y Zhang, X. (2015). An ultrathin invisibility skin cloak for visible light. *Science*, **349**: 1310–1314.
- Parazzoli, C. G., Greeger, R. B., Li, K., Koltjenbah, B. E., y Tanielian, M. (2003). Experimental verification and simulation of negative index of refraction using snell's law. *Phys. Rev. Lett.*, **90**: 107401.
- Pendry, J. B., Holden, A. J., Stewart, W. J., y Youngs, I. (1996). Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Phys. Rev. Lett.*, **76**: 4773–4776.
- Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J., y Stewart, W. J. (1998). Low frequency plasmons in thin wire structures. *J. Phys. Condens. Matter*, **10**: 4785–4809.
- Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J., y Stewart, W. J. (1999). Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **47**: 2075–2084.
- Pérez-Aguilar, H. I. (2009). *Propagación y esparcimiento de luz en sistemas con geometrías confinantes*. Tesis de Doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada. Págs. 127.
- Pérez-Hernández, E. (2015). *Estudio numérico de la propagación de la luz en guías de ondas periódicas y onduladas usando la programación en paralelo*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH. Págs. 148.
- Puente-Díaz, L. E. (2015). *Estructuras de bandas de cristales fotónicos en 2D con superficies rugosas que contienen metamaterial dispersivo*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH. Págs. 76.
- R. A. Shelby, D. R. S. y Schultz, S. (2001). Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, **292**(11): 77–79.
- Ramos-Mendieta, F. y Halevi, P. (1996). Surface modes in a 2d array of square dielectric cylinders. *Solid State Communications*, **100**: 311–314.
- Rayleigh, L. (1887). On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. *Philosophical Magazine*, **24**: 145–159.

- Sakoda, K. (2001). *Optical properties of photonic crystals*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Sánchez-López, S. (2016). *Estudio numérico de la programación en paralelo usando el protocolo cuda fortran*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH. Págs. 101.
- Shalaev, V. y Cai., W. (2002). Electrodynamics of metallic photonic crystals and the problem of left-handed materials. *Phys. Rev. Lett.*, **89**: 093901.
- Shalaev, V. y Cai., W. (2010). *Optical Metamaterials*. Springer, USA.
- Smith, D. R., Padilla, W. J., Vier, D. C., Nemat-Nasser, S. C., y Schultz, S. (2000). Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, **84**: 4184–4187.
- Smith, D. R., Schuring, D., Pendry, J. B., Mock, J. J., Cummer, S. A., Justice, B. J., y Starr, A. F. (2006). Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, páginas 314–977.
- Soljacic, M., Luo, C., Joannopoulos, J. D., y Fan, S. (2005). Nonlinear photonic crystal microdevices for optical integration. *Opt. Lett.*, **28**: 637–639.
- Staude, I., McGuinness, C., Frolich, A., Byer, R. L., Colby, E., y Wegener, M. (2012). Waveguides in three-dimensional photonic bandgap materials for particle-accelerator on a chip architecture. *Optics Express*, **20**: 5607–5612.
- Teo, S. H. G., Liu, A. Q., Yu, M. B., y Singh, J. (2006). Fabrication and demonstration of square lattice two-dimensional rodtype photonic band gap crystal optical intersections. *Photonics Nanostruct. Fundam. Appl.*, **4**: 103–115.
- Valentine, J., Li, J., Zentgraf, T., Bartal, G., y Zhang, X. (2009). An optical cloak made of dielectrics. *Nature Materials*, **8**: 568–571.
- Veselago, V. (1968). The electrodynamics of substances with simultaneously negative values. *Sov. Phys. Usp.*, **10**(4): 509–514.
- Villa, F., Gaspar, J. A., y Mendoza, A. (2007). Surface modes in one dimensional photonic crystals that include left handed materials. *J. Electromagn. Waves Appl.*, **21**: 485–489.
- Yablonovitch, E. (1987a). Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, **58**: 2059–2062.
- Yablonovitch, E. (1987b). Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, **58**: 2059–2062.
- Yasumoto, K. (2006). *Electromagnetic Theory and Applications for Photonic Crystals*. CRC Pressll Taylor & Francis Group, USA. Págs. 444.

- Yu, S. P., Hood, J. D., Muniz, J. A., Martin, M. J., Norte, R., Hung, C. L., Meenehan, S. M., Cohen, J. D., Painter, O., y Kimble, H. J. (2014). Nanowire photonic crystal waveguides for single-atom trapping and strong light-matter interactions. *Appl. Phys. Lett.*, **104**: 111103.
- Yuntuan, F., Haijin, S., y Tinggen, S. (2006). New evidences of negative refraction in photonic crystals. *Opt. Mater.*, **28**: 1156–1159.
- Zhu, J., Christensen, J., Jung, J., Martin-Moreno, L., Yin, X., Fok, L., Zhang, X., y Garcia-Vidal, F. J. (2010). A holey-structured metamaterial for acoustic deep-subwavelength imaging. *Nature Physics*, **7**: 52–55.