



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

Descomposiciones JSJ de Grupos Relativamente
Hiperbólicos

T E S I N A

que para obtener el grado de

Maestra en Ciencias Matemáticas

presenta

Sandy Guadalupe Aguilar Rojas.

Director: Jesús Hernández Hernández.

Morelia, Michoacán, México.
Enero del 2022.

Resumen

El presente trabajo introduce las definiciones de grupos relativamente hiperbólicos dadas por Bowditch, Farb y Osin, así como los preliminares necesarios para la enunciación de las mismas; se habla de cómo cada una de estas definiciones generalizan a los grupos hiperbólicos y responde la pregunta de si dichas definiciones son equivalentes.

Además, se da la definición de descomposiciones JSJ, con base en el trabajo de Guirardel y Levitt. Este trabajo da una demostración al hecho de que los grupos relativamente hiperbólicos (y por tanto, los grupos hiperbólicos) admiten una descomposición JSJ.

Palabras clave: Grupos relativamente hiperbólicos, subgrupos parabólicos, subgrupos periferales, espacios de deformación, descomposiciones JSJ.

Abstract

This work introduces the definitions of relatively hyperbolic groups given by Bowditch, Farb and Osin, as well as the necessary preliminaries to enunciate them; it is adressed how each of these definitions generalizes the hyperbolic groups and it is answered the question about the equivalence of such definitions.

Furthermore, this work gives the definitions of JSJ decompositions, based on the work of Guirardel and Levitt; and it gives a proof to the fact that relatively hyperbolic groups (and hence hyperbolic groups) admit a JSJ decomposition.

Key words: Relatively hyperbolic groups, parabolic subgroups, peripheral subgroups, deformation spaces, JSJ decompositions.

Índice

1. Introducción	1
2. Definiciones de hiperbolicidad relativa	2
2.1. Hiperbolicidad relativa en el sentido de Bowditch	2
2.1.1. Grupos geoméricamente finitos	2
2.1.2. Definición de hiperbolicidad relativa	3
2.2. Hiperbolicidad relativa en el sentido de Farb	3
2.3. Hiperbolicidad relativa en el sentido de Osin	4
2.3.1. Presentaciones y distancias relativas	5
2.3.2. Diagramas de van Kampen	6
2.3.3. Funciones de Dehn relativas y grupos relativamente hiperbólicos	8
2.3.4. Funciones de Dehn en grafos de Cayley	8
2.3.5. Caminos en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$	10
3. Equivalencia de definiciones de hiperbolicidad relativa	11
3.1. Las definiciones de Farb y Osin	11
4. Descomposiciones JSJ	13
4.1. $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles	13
4.2. Funciones entre árboles y espacios de deformación.	13
4.3. Refinamientos estándar	14
4.4. Subgrupos universalmente elípticos y descomposiciones JSJ	15
5. Descomposiciones JSJ de grupos relativamente hiperbólicos	20

1. Introducción

Las descomposiciones JSJ fueron introducidas por Jaco-Shalen y Johansson en su trabajo sobre teoría de la subvariedad característica de 3-variedades topológicas (ver [JS79] y [Joh79]). Dichas descomposiciones fueron llevadas al contexto de Teoría de Grupos por diferentes autores, tales como Kropholler, Sela, Rips, Bowditch, Dunwoody, Sageev, entre otros (ver [Kro90], [RS97], [Bow01] y [DS99]). En este trabajo, se estudiarán descomposiciones JSJ en este último contexto basándonos en el trabajo de Guirardel y Levitt en [GL17].

El problema que las descomposiciones JSJ de grupos aborda es la posibilidad de descomponer a un grupo finitamente generado sobre alguna familia de subgrupos del mismo, de manera que se satisfagan ciertas condiciones de maximalidad y unicidad (ver Sección 4 para una definición precisa de descomposiciones JSJ). Es importante mencionar que dicha descomposición no siempre existe.

Uno de los ejemplos de clases de grupos para los cuales existen descomposiciones JSJ son los grupos relativamente hiperbólicos. Dichos grupos se introdujeron por primera vez en el trabajo de Gromov (ver [Gro87]) y su definición ha sido abordada y reformulada por autores como Bowditch, Farb y Osin. Las definiciones de hiperbolicidad relativa que se abordarán serán las dadas por estos últimos en [Bow12], [Far98] y [Osi06], respectivamente.

Preguntas naturales que pueden surgir al hablar de las distintas definiciones de hiperbolicidad relativa son las siguientes: ¿qué relación tiene los grupos hiperbólicos con los grupos relativamente hiperbólicos? y ¿las diferentes definiciones de hiperbolicidad relativa coinciden?. Ambas de éstas preguntas serán contestadas a lo largo de este trabajo: Cada una de las definiciones de hiperbolicidad relativa son generalizaciones de los grupos hiperbólicos y son equivalentes (agregando cierta propiedad a la definición de Farb). La definición dada por Bowditch generaliza el hecho de que los grupos hiperbólicos no contienen elementos parabólicos; la dada por Farb generaliza que el grafo de Cayley de un grupo hiperbólico sea un espacio hiperbólico; y la definición dada por Osin generaliza el hecho de que los grupos hiperbólicos sean grupos finitamente presentados con funciones de Dehn lineales.

El presente trabajo se divide de la siguiente manera. La Sección 2 se dedicará a introducir los preliminares necesarios para entender las diferentes definiciones de hiperbolicidad relativa mencionadas con anterioridad y se enunciarán dichas definiciones. Posteriormente, en la Sección 3 abordaremos la pregunta acerca de la equivalencia de las distintas definiciones de hiperbolicidad relativa. La sección 4 se centrará en dar una definición precisa de descomposiciones JSJ, basándonos en el trabajo de Guirardel y Levitt; para finalmente, en la Sección 3 dar una demostración al hecho de que los grupos relativamente hiperbólicos (y por tanto, los grupos hiperbólicos) admiten una descomposición JSJ.

2. Definiciones de hiperbolicidad relativa

En esta sección se abordarán algunas definiciones de hiperbolicidad relativa con base en las obras de Bowditch, Farb y Osin (ver [Bow12], [Far98] y [Osi06]).

2.1. Hiperbolicidad relativa en el sentido de Bowditch

Se comenzará este trabajo con la definición dada por Bowditch en [Bow12]; para esto, se hablará brevemente de grupos geoméricamente finitos y grupos parabólicos. Estos últimos harán una reaparición al momento de hablar sobre descomposiciones JSJ para grupos relativamente hiperbólicos en la Sección 5.

2.1.1. Grupos geoméricamente finitos

Sean M un espacio topológico metrizable y G un grupo que actúa por homeomorfismos en M .

Definición 2.1. Se dice que G es un **grupo de convergencia** si la acción inducida en el espacio de tripletas distintas de M es propiamente discontinua. Se denotará por $\Lambda G \subset M$ al **conjunto límite de G** ; esto es, el único subconjunto cerrado minimal no vacío G -invariante. Se dice que la acción es **minimal** si $\Lambda G = M$.

Definición 2.2. Si M es compacto y $\text{card}(M) \geq 3$. Sea $\gamma \in M$, se define el conjunto $\text{Fix}(\gamma) = \{x \in M : \gamma \cdot x = x\}$. Se dice que γ es

- **elíptico** si tiene orden finito,
- **parabólico** si tiene orden infinito y $\text{card}(\text{Fix}(\gamma)) = 1$,
- **loxodrómico** si tiene orden infinito y $\text{card}(\text{Fix}(\gamma)) = 2$.

Puede verificarse que todo elemento de G es elíptico, parabólico o loxodrómico (ver Lema 2.1 de [Bow99]).

Definición 2.3. Un subgrupo $H \leq G$ es **parabólico** si es infinito, fija algún punto de M y no contiene elementos loxodróxicos. En este caso, el punto fijo se llama **punto parabólico** y es único.

El estabilizador G_p de un punto parabólico p es un grupo parabólico (se sigue del Lema 2.2 de [Bow99]), esto da una biyección entre subgrupos parabólicos maximales de G y puntos parabólicos en M .

Definición 2.4. Un grupo parabólico H con punto fijo p es **acotado** si el cociente $H \backslash (M - \{p\})$ es compacto. Un punto $p \in M$ es un **punto parabólico acotado** si su estabilizador H_p es acotado.

Definición 2.5. Un **punto límite cónico** es un punto $y \in M$ tal que existe una sucesión $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en G y $a, b \in M$ con $a \neq b$ tales que para todo $x \in M - \{y\}$ se tiene que $g_i \cdot y \rightarrow a$ y $g_i \cdot x \rightarrow b$.

Puede verificarse que los puntos límites cónicos no pueden ser puntos parabólicos (ver Proposición 6.1 de [Bow12])

Definición 2.6. Un grupo de convergencia G es **geoméricamente finito** si todo punto de M es un punto límite cónico o un punto parabólico acotado.

2.1.2. Definición de hiperbolicidad relativa

Sea G un grupo y \mathcal{H} un conjunto de subgrupos infinitos de G .

Definición 2.7. El grupo G es **hiperbólico relativo a \mathcal{H}** si G admite una acción por isometrías propiamente discontinua en un espacio métrico X (dotado con la métrica de caminos) tal que

1. X es propio e hiperbólico,
2. todo punto de la frontera de X es punto límite cónico o punto parabólico acotado (esto es, G actúa como grupo geoméricamente finito en la frontera de X),
3. los elementos de \mathcal{H} son precisamente los subgrupos parabólicos maximales de G ,
4. todo elemento de \mathcal{H} es finitamente generado.

A los elementos de \mathcal{H} se les llama **subgrupos periferales**.

Esta definición es equivalente a la siguiente (ver Teorema 7.10 de [Bow12]).

Definición 2.8. El grupo G es **hiperbólico relativo a \mathcal{H}** si G admite una acción en un grafo conexo K tal que

1. K es hiperbólico y para todo $n \in \mathbb{Z}$ cada arista de K está contenida en únicamente una cantidad finita de circuitos de longitud n ,
2. existe una cantidad finita de G -órbitas de aristas y cada estabilizador de aristas es finito,
3. los elementos de \mathcal{H} son precisamente los estabilizadores de vértices de K ,
4. todo elemento de \mathcal{H} es finitamente generado.

Observación 2.9. Si G es relativamente hiperbólico respecto a \mathcal{H} y $Q \leq G$ es un subgrupo parabólico, entonces Q está contenido en algún elemento de \mathcal{H} , pues \mathcal{H} consiste de los subgrupos parabólicos maximales de G ; de esto, si \mathcal{A} es la familia de subgrupos parabólicos de G , entonces

$$\mathcal{A} \subset \{Q \leq G: Q \subset gHg^{-1}, \text{ para ciertos } g \in G \text{ y } H \in \mathcal{H}\}.$$

Ahora, si R es un subgrupo de G tal que $R \subset gHg^{-1}$ para ciertos $g \in G$ y $H \in \mathcal{H}$, entonces Q no contiene elementos loxodrómicos, puesto que H no los contiene; además, fija un punto, puesto que gHg^{-1} lo hace; se sigue que R es parabólico y de esto,

$$\mathcal{A} = \{Q \leq G: Q \subset gHg^{-1}, \text{ para ciertos } g \in G \text{ y } H \in \mathcal{H}\}.$$

2.2. Hiperbolicidad relativa en el sentido de Farb

En esta sección se introducirá la definición más geométrica de grupos relativamente hiperbólicos de la que se hablará en este trabajo; ésta es la definición dada por Farb en [Far98].

Antes de comenzar, introduciremos la siguiente notación: Dado Γ un grafo, se denotará por $V(\Gamma)$ a su conjunto de vértices y por $E(\Gamma)$ a su conjunto de aristas.

Sea G un grupo finitamente generado con grafo de Cayley Γ y sea $\{H_1, \dots, H_r\}$ un conjunto de subgrupos de G finitamente generados, con $r \in \mathbb{N}$.

Definición 2.10. El **grafo de Cayley aconado de G respecto a $\{H_1, \dots, H_r\}$** es el grafo $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}(\{H_1, \dots, H_r\})$ dado como sigue:

- **Vértices:** son los vértices de Γ y se agrega un vértice $v(gH_i)$ por cada clase lateral gH_i , con $g \in G$ e $i \in \{1, \dots, r\}$.

- **Aristas:** son las aristas de Γ y se agrega una arista de longitud $\frac{1}{2}$ entre h y $v(gH_i)$ para cada $g \in G$ y $h \in gH_i$, con $i \in \{1, \dots, r\}$, donde $\{h, v(gH_i)\}$ denota una arista entre los vértices h y $v(gH_i)$.

Definición 2.11. El grupo G es **hiperbólico relativo** a $\{H_1, \dots, H_r\}$ si el grafo de Cayley aconado $\widehat{\Gamma}$ de G respecto a $\{H_1, \dots, H_r\}$ es hiperbólico.

A los grupos relativamente hiperbólicos en el sentido de la Definición 2.11 se les suele llamar **grupos débilmente relativamente hiperbólicos**. A dicha definición, dada por Farb, se le acompaña (por lo general) de una propiedad llamada la Propiedad de Clases Laterales Acotadas o Propiedad BCP, por sus siglas en inglés. A continuación se hablará de dicha propiedad.

Un camino w en Γ induce un camino en $\widehat{\Gamma}$, dicho camino se construye en la siguiente definición y se denotará por \hat{w} .

Definición 2.12. Sea S un conjunto generador finito de G y S_i un conjunto de palabras $y_{i_j} \in F(S)$ las cuales representan los generadores de H_i , con $i \in \{1, \dots, r\}$ y donde $F(S)$ denota al grupo libre generado por S . Dado un camino w en Γ , se construye a \hat{w} como sigue.

1. Se busca de izquierda a derecha en w subpalabras y_{i_j} ; si estas se traslapan, se consideran las que se encuentran más a la izquierda.
2. Para cada subpalabra maximal z de w dada por $y'_{i_j} s$, si z va de g a gz en Γ , se reemplaza el camino dado por z por una arista del vértice asociado a g al vértice $v(gH_i)$ y una arista de $v(gH_i)$ al vértice asociado a gz .

Nótese que la definición previa depende de los generadores de H_i , para $i \in \{1, \dots, r\}$

Definición 2.13. Dado un camino w en Γ , si \hat{w} pasa por algún vértice $v(gH_i)$ se dice que w (o \hat{w}) penetra a la clase lateral gH_i .

Definición 2.14. Sea w un camino en Γ .

- Si \hat{w} es una geodésica en $\widehat{\Gamma}$ se dice que w es una **geodésica relativa** en Γ .
- Si \hat{w} es una $(P, 0)$ -cuasi-geodésica, con $P \geq 1$, a w se le llama una $(P, 0)$ -**cuasi-geodésica relativa** en Γ .
- El camino w (o \hat{w}) es un camino **sin backtracking** si para toda clase lateral gH_i penetrada por \hat{w} , \hat{w} no pasa por gH_i más de una vez.

Definición 2.15 (Propiedad BCP). El par $(G, \{H_1, \dots, H_r\})$ **satisface la Propiedad BCP** si para todo $P \geq 1$ existe $c = c(P) \geq 0$ tal que si u y v son $(P, 0)$ -cuasi-geodésicas relativas sin backtracking con $u_- = v_-$ y $d_\Gamma(u_+, v_+) \leq 1$ (donde u_-, v_- y u_+, v_+ denotan los extremos iniciales y finales de u y v , respectivamente), entonces se satisface lo siguiente.

1. Si u penetra un coset gH_i pero v no penetra a gH_i , entonces u viaja una Γ -distancia a lo más c en gH_i .
2. Si u y v penetran a un coset gH_i , entonces los vértices de Γ en los que u y v entran a gH_i por primera vez se encuentran a Γ -distancia a lo más c ; similarmente, para los vértices en los que u y v salen de gH_i por última vez.

2.3. Hiperbolicidad relativa en el sentido de Osin

La última definición que se dará sobre grupos relativamente hiperbólicos en este trabajo, la cual protagoniza esta sección, es la dada por Osin en [Osi06]. Dicha definición generaliza el hecho de que un grupo hiperbólico es finitamente presentado y tiene una función de Dehn asociada lineal (ver [BH99], páginas 450 y 451; y [BRS07], Sección I.1.1.1).

2.3.1. Presentaciones y distancias relativas

A continuación, se dará la definición de un grupo relativamente finitamente presentado, la cual generaliza a los grupos finitamente presentados; además se introducirá una distancia para grupos que cuenten con una de estas presentaciones.

Sea G un grupo, $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subgrupos de G y $X \subset G$ simétrico (esto es, $X = X^{-1}$).

Definición 2.16. El grupo G es **generado por X respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$** si G es generado por el conjunto $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda\right) \cup X$.

Observación 2.17. Un grupo G generado por X respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ puede pensarse como un cociente del grupo

$$F = \left(*_{\lambda \in \Lambda} \tilde{H}_\lambda\right) * F(X),$$

donde $F(X)$ es el grupo libre generado por el conjunto $X \subset G$ y para cada $\lambda \in \Lambda$, \tilde{H}_λ es una copia isomorfa de H_λ .

Sea

$$\mathcal{H} = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\tilde{H}_\lambda - \{1\}\right),$$

entonces F está generado por $X \cup \mathcal{H}$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ se define el conjunto S_λ como el conjunto de palabras en el alfabeto \tilde{H}_λ que representan la identidad en F , entonces

$$F = \left\langle X, \mathcal{H} \left| S = 1 \text{ si } S \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right. \right\rangle.$$

Se denotará por N al núcleo del morfismo $F \rightarrow G$ dado por extender los isomorfismos dados por $H_\lambda \cong \tilde{H}_\lambda$ y la función identidad en X .

Definición 2.18. Si un grupo G generado por X respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ satisface que N es la cerradura normal de \mathcal{R} en el grupo F , para algún subconjunto $\mathcal{R} \subset (X \cup \mathcal{H})^*$, entonces G tiene **presentación relativa respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$** dada como

$$\left\langle X, \mathcal{H} \left| S = 1 \text{ si } S \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda; R = 1 \text{ si } R \in \mathcal{R} \right. \right\rangle.$$

Para simplificar notación, nos referiremos a la presentación dada en la Definición 2.18 escribiendo

$$\langle X, H_\lambda, \lambda \in \Lambda \mid R = 1 \text{ si } R \in \mathcal{R} \rangle. \quad (1)$$

Definición 2.19. La presentación relativa (1) es **finita** si los conjuntos X y \mathcal{R} son finitos. Un grupo G es **finitamente presentado relativo a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$** si admite una presentación relativa finita respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

A partir de ahora, asumiremos que G es un grupo con presentación (1).

Definición 2.20. Para $g \in G$, la **longitud relativa respecto a la colección de subgrupos $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de G** , $|g|_{X \cup \mathcal{H}}$, se define como la longitud de la palabra más corta en $(X \cup \mathcal{H})^*$ que representa al elemento g en G . Dicha longitud induce una **distancia relativa en G** dada como

$$dist_{X \cup \mathcal{H}}(g, h) = |g^{-1}h|_{X \cup \mathcal{H}}.$$

La definición de la función distancia relativa en G depende del conjunto generador relativo X y la colección de subgrupos $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$; sin embargo, se puede verificar que ésta es independiente del conjunto generador relativo en el sentido del siguiente resultado (una prueba de este hecho puede consultarse en [Osi06], Proposición 2.8, página 11).

Proposición 2.21. *Sean X y Y conjuntos generadores de G relativos a la colección de subgrupos $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Entonces, las funciones distancia $dist_{X \cup \mathcal{H}}$ y $dist_{Y \cup \mathcal{H}}$ son Lipschitz-equivalentes.*

2.3.2. Diagramas de van Kampen

Un concepto de suma importancia para enunciar y entender la definición de grupos relativamente hiperbólicos en el sentido de Osin son los diagramas de van Kampen, pues es a través de éstos que es posible dar una definición de área relativa y, con ésta, definir las funciones de Dehn relativas.

Definición 2.22. Una **función planar** Δ sobre una presentación

$$\langle Z | \mathcal{P} \rangle \tag{2}$$

es un 2-complejo simplemente conexo dotado con una función de etiquetado

$$\phi: E(\Delta) \rightarrow Z^{\pm 1},$$

donde $E(\Delta)$ es el conjunto de aristas orientadas de Δ y $\phi(e^{-1}) = (\phi(e))^{-1}$. Por definición, la etiqueta de un camino $p = e_1 \cdots e_n$ es la palabra $\phi(e_1) \cdots \phi(e_n)$ y su **longitud** $l(p)$ es el número de aristas que conforman a p .

Dada una celda Π de Δ , se denotará por $\partial\Pi$ a su frontera y por $\partial\Delta$ a la frontera de Δ .

Las etiquetas de $\partial\Pi$ y $\partial\Delta$ están definidas hasta permutación cíclica y toma de inversos. Si Δ es una función planar, por convención, se tomará la lectura de la etiqueta de $\partial\Delta$ en el sentido de las manecillas del reloj y la de $\partial\Pi$ en dirección contraria a ésta.

Definición 2.23. Una función Δ sobre una presentación (2) es un **diagrama de van Kampen** si para toda celda Π de Δ , la etiqueta de la frontera $\phi(\partial\Pi)$ es una permutación cíclica de alguna palabra $P^{\pm 1}$, con $P \in \mathcal{P}$.

La importancia de los diagramas de van Kampen puede verse reflejada en el siguiente lema (una prueba de éste puede consultarse en [LS01], Proposición 9.2).

Lema 2.24 (Lema de van Kampen). *Dado un grupo con presentación (2). Una palabra W sobre el alfabeto $Z^{\pm 1}$ representa la identidad en el grupo si y sólo si existe un diagrama de van Kampen Δ sobre (2) tal que $\phi(\partial\Delta) \equiv W$, donde \equiv denota la igualdad letra por letra entre dos palabras.*

Definición 2.25. Sea Δ un diagrama de van Kampen sobre la presentación relativa (1). Una **S_λ -celda** es una celda Π de Δ tal que $\phi(\partial\Pi)$ es una relación de S_λ . Una celda de Δ es una **S-celda** si es una S_λ -celda para algún $\lambda \in \Lambda$.

Se define el análogo para relaciones en \mathcal{R} .

Definición 2.26. Sea Δ un diagrama de van Kampen sobre la presentación relativa (1). Una **\mathcal{R} -celda** es una celda Π de Δ tal que $\phi(\partial\Pi)$ es una relación en \mathcal{R} .

Definición 2.27. Dado un diagrama de van Kampen Δ sobre (1), se denotará por $N_{\mathcal{R}}(\Delta)$ al número de \mathcal{R} -celdas de Δ y por $N_S(\Delta)$ al número de S-celdas de Δ . El **área** de Δ se define como

$$\text{Área}(\Delta) = N_{\mathcal{R}}(\Delta) + N_S(\Delta).$$

Definición 2.28. El **tipo** de un diagrama de van Kampen Δ es la tripleta

$$\tau(\Delta) = (N_{\mathcal{R}}(\Delta), N_S(\Delta), \text{card}(E(\Delta))).$$

Se ordenan los tipos de diagramas de van Kampen con el orden lexicográfico.

Definición 2.29. Dada una palabra $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$.

- (a) Una subpalabra V de W es una **H_λ -subpalabra** si consiste de letras de \tilde{H}_λ ,
- (b) Una H_λ -subpalabra de W es una **H_λ -sílabo** si es maximal.

Si W es una palabra cíclica (esto es, representa el elemento neutro en el grupo), entonces consideramos también subpalabras de rotaciones de W .

Se denotará por $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ al grafo de Cayley de G respecto al conjunto generador $X \cup \mathcal{H}$. Se traducen las definiciones previas para caminos en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$.

Definición 2.30. Sea q un camino en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$.

- (a) Un subcamino p de q es un **H_λ -subcamino** si la etiqueta de p es una H_λ -subpalabra de la palabra $\phi(q)$.
- (b) Una **H_λ -componente** de q es un H_λ -subcamino p tal que la etiqueta de p es una H_λ -sílabo de la palabra $\phi(q)$.

En camino cíclicos se toman consideraciones análogas al caso de las palabras.

Definición 2.31. Dos H_λ -componentes p_1, p_2 de un camino q en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ están **conectadas** si existe un camino c en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ que conecta a un vértice de p_1 con un vértice de p_2 y $\phi(c)$ es una palabra con letras en \tilde{H}_λ . A c se le llama **H_λ -conector**.

Similarmente, se tiene la definición de H_λ -sílabos conectadas.

Observación 2.32. Si p_1 y p_2 son H_λ -componentes conectadas, entonces para todos los vértices en p_1 y p_2 existe un H_λ -conector entre ellos. Más aún, puede asumirse que dicho conector consiste de una única arista en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$, puesto que está etiquetado por una palabra en H_λ , la cual se encuentra en el conjunto generador.

Nótese que en este caso, los vértices de dichas componentes se encuentran en la misma clase lateral gH_λ de G , para algún $g \in G$ y $\lambda \in \Lambda$.

Definición 2.33. Una H_λ -componente (H_λ -sílabo) de un camino (palabra) q es **aislada** si no está conectada a ninguna otra H_λ -componente (H_λ -sílabo) de q .

El siguiente resultado se sigue de las definiciones previas.

Lema 2.34. *En una geodésica en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ toda componente es aislada.*

Definición 2.35. Para toda $\lambda \in \Lambda$, se denotará por Ω_λ al subconjunto de todos los elementos $g \in H_\lambda$ tal que existe una relación $R \in \mathcal{R}$ y una H_λ -sílabo V de R tal que V representa a g en G . Se define el conjunto

$$\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda.$$

Observemos que si \mathcal{R} es finito, entonces también lo es Ω .

Definición 2.36. Sea q un ciclo en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$. El **área relativa**, $\text{Área}^{rel}(q)$, respecto a las presentación (1) es

$$\text{Área}^{rel}(q) = \text{mín}\{N_{\mathcal{R}}(\Delta) \mid \Delta \text{ es un diagrama de van Kampen sobre (1) con } \phi(\partial\Delta) \equiv \phi(q)\}.$$

2.3.3. Funciones de Dehn relativas y grupos relativamente hiperbólicos

En este apartado se dará la definición de grupos relativamente hiperbólicos en el sentido de Osin; para esto, es necesario definir las funciones de Dehn relativas.

Sea G un grupo dado por la presentación relativa (1). Para toda palabra $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ que representa 1 en G existe una expresión

$$W =_F \prod_{i=1}^k f_i^{-1} R_i f_i, \quad (3)$$

donde $=_F$ representa la igualdad en el grupo F , $R_i \in \mathcal{R}$ y $f_i \in F$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Definición 2.37. Una **función isoperimétrica relativa** de la presentación (1) respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y cualquier palabra $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ con $\|W\| \leq n$ (donde $\|\cdot\|$ denota la longitud de W) que representa 1 en G , es posible escribir a W como en (3) con

$$k \leq f(n).$$

Si $\mathcal{H} = \emptyset$, la definición de función isoperimétrica relativa coincide con la definición de función isoperimétrica (ver Sección 2 de [Far98]).

Puede verificarse que la Definición 2.37 es equivalente a la siguiente.

Definición 2.38. Una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una **función isoperimétrica relativa** de la presentación (1) con respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ si para todo $n \in \mathbb{N}$ y cualquier ciclo q en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ de longitud $l(q) \leq n$, se satisface que

$$\text{Área}^{rel}(q) \leq f(n).$$

Definición 2.39. La **función de Dehn relativa** de un grupo G con presentación (1) respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es la función isoperimétrica relativa de (1) más pequeña.

Si G no posee funciones isoperimétricas relativas finitas, se dice que la función de Dehn relativa no está bien definida.

Ahora, consideremos la siguiente relación de equivalencia entre funciones.

Definición 2.40. Dadas funciones $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, se dice que f es **asintóticamente menor que g** si existen constantes $C, K, L \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(n) \leq Cg(Kn) + Ln$$

y se escribe $f \preceq g$. Si $f \preceq g$ y $g \preceq f$, entonces f es **asintóticamente equivalente a g** , se denotará ésto como $f \sim g$.

A partir de ahora, se pensarán a las funciones de Dehn relativas como a su clase de equivalencia.

Definición 2.41. Sean G un grupo y $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subgrupos de G . Se dice G es **hiperbólico relativo** a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ si es relativamente finitamente presentado con respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ y la función de Dehn relativa de G respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es lineal.

2.3.4. Funciones de Dehn en grafos de Cayley

A continuación, se definirán las funciones de Dehn para grafos, las cuales permitirán dar información sobre el grafo $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$, cuando G es un grupo finitamente presentado relativo a la colección de subgrupos $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_m\}$. La información que se dará al respecto será breve, por lo que se invita al lector a consultar la Sección 2.5 de [Osi06] para más detalles al respecto.

Se comenzará con algunas definiciones preliminares.

Definición 2.42. Una **función combinatoria** entre complejos CW es una función tal que las imágenes de celdas abiertas son homeomorfas a celdas abiertas, vía la restricción de dicha función.

Definición 2.43. Un **complejo combinatorio** es un complejo CW, K , tal que para cualquier $(n + 1)$ -celda e de K , la función de pegado $\phi_e: \partial D^{n+1} \rightarrow Sk^{(n)}K$, donde $Sk^{(n)}K$ denota el n -esqueleto de K y D^n es el disco unitario n -dimensional, es combinatoria respecto a alguna estructura combinatoria en $\partial D^{n+1} = S^n$.

Definición 2.44. Una **función combinatoria singular** $f: L \rightarrow K$ entre complejos CW es una función continua tal que para toda n -celda e en L se tiene que o bien $f|_e$ es un homeomorfismo con imagen una celda abierta de K , o $f(e)$ está contenida en el $(n - 1)$ -esqueleto de L .

Definición 2.45. Sea $k \geq 3$. Una **k -partición** del disco unitario 2-dimensional D es un homeomorfismo de D a un 2-complejo combinatorio en el que cada 2-celda es un l -ágono para algún $3 \leq l \leq k$.

En vista de las definiciones anteriores, ya es posible dar una definición de funciones de Dehn.

Definición 2.46. Sea Σ un grafo equipado con la métrica combinatoria y c un ciclo combinatorio en Σ . Si $k \geq 3$, un **k -relleno** de c consiste de una k -partición del disco unitario 2-dimensional D y una función combinatoria singular $\Phi: Sk^{(1)}D \rightarrow \Sigma$ tal que $\Phi(\partial D) = c$, donde $Sk^{(1)}D$ denota el 1-esqueleto de D con la estructura celular inducida por la k -partición de D .

Se denotará por $|\Phi|$ al número de caras de D respecto a la estructura celular inducida por la k -partición. La **k -área** de c se define como

$$A^{(k)}|(c) = \min\{|\Phi|: \Phi \text{ es un } k\text{-relleno de } c\},$$

si c no admite un k -relleno, entonces $A^{(k)}|(c) = \infty$.

La **función de Dehn** asociada a Σ se define como

$$f_{\Sigma}^{(k)} = \sup_{l(c) \leq n} A^{(k)}(c),$$

donde el supremo se toma sobre los ciclos c de longitud combinatoria a lo más n .

Consideramos las funciones de Dehn asociadas a los grafos como su clase de equivalencia bajo la relación de ser asintóticamente equivalentes, definida previamente.

Teorema 2.47. *Supongamos que G es un grupo finitamente presentado respecto a una colección de subgrupos $\{H_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ y su función de Dehn relativa asociada, δ_G^{rel} , respecto a dicha colección está bien definida. Entonces, la función de Dehn $f_{(G, X \cup \mathcal{H})}$ del grafo de Cayley $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ es equivalente a δ_G^{rel} .*

El Corolario siguiente nos permite relacionar ser un grupo hiperbólico relativo a una colección de subgrupos y la geometría del grafo de Cayley asociado a éste.

Corolario 2.47.1. *Supongamos que G es un grupo finitamente presentado respecto a una colección de subgrupos $\{H_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ y su función relativa asociada δ_G^{rel} respecto a dicha colección está bien definida. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. G es hiperbólico relativo $\{H_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$.
2. El grafo de Cayley $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ es un espacio métrico hiperbólico.

2.3.5. Caminos en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$.

Consideremos G un grupo generado por un conjunto finito X y $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_m\}$ una colección de subgrupos de G tal que G es finitamente relativamente presentado respecto a \mathcal{H} . Sea p un camino en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$, se denotará por p_- y p_+ a su inicio y fin, respectivamente.

Definición 2.48. Sea γ un camino en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$.

- (a) El camino γ es **sin backtracking** si toda H_i -componente de γ es aislada, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.
- (b) Sea v un vértice en una H_i -componente s de γ , v es un **vértice interno** de s si $v \neq s_-$ y $v \neq s_+$.
- (c) Un vértice v de γ **no es de fase** si existe una H_i -componente s tal que v es un vértice interno en s , para algún $i \in \{1, \dots, m\}$. En el caso contrario se dice que v **es de fase**.

Definición 2.49. Sean p y q caminos en $\Gamma(G, X, \cup \mathcal{H})$ y $k \geq 0$. Se dice que p y q son **k-similares** si

$$\max\{d_X(p_-, q_-), d_X(p_+, q_+)\} \leq k.$$

Los resultados siguientes serán de suma importancia para la demostración de la equivalencia entre las distintas definiciones de hiperbolicidad relativa y sus demostraciones pueden verificarse en el Capítulo 3 y el Apéndice de [Osi06].

Teorema 2.50. Para todo $\lambda \geq 1, c \geq 0$ y $k \geq 0$ existe una constante $K = K(\lambda, c, k)$ tal que para cualesquiera par de (λ, c) -cuasi-geodésicas k -similares p, q sin backtracking se satisface lo siguiente:

- (1) Los vértices fase de p y los vértices fase de q están a distancia Hausdorff menor o igual a k .
- (2) Si s es una H_i -componente de p , para algún $i \in \{1, \dots, m\}$, tal que $d_X(s_-, s_+) > K$ entonces existe una H_i -componente t de q conectada a s .
- (3) Si s y t son H_i -componentes de p y q , respectivamente tales que están conectadas, entonces $\max\{d_X(s_-, t_-), d_X(s_+, t_+)\} \leq k$.

Denotaremos la longitud de un camino p en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ como $l(p)$.

Definición 2.51. Un ciclo p en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ es **atómico** si cualquier subcamino q de p tal que $l(q) \leq \frac{1}{2}l(p)$ es geodésico en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$.

Lema 2.52. Supongamos que $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ es hiperbólico y denotemos por δ a su constante de hiperbolicidad. Si p es un ciclo atómico en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$, entonces se satisface lo siguiente:

- (1) $l(p) \leq 4\delta + 9$,
- (2) toda H_i -componente de p es aislada para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$.

Corolario 2.52.1. Supongamos que $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ es hiperbólico. Sea \mathcal{A} el conjunto de etiquetas de todos los ciclos atómicos en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$. Entonces, $\text{card}(\mathcal{A}) < \infty$.

3. Equivalencia de definiciones de hiperbolicidad relativa

En esta sección se hablará de las equivalencias que existen entre las definiciones de hiperbolicidad relativa dadas con anterioridad. Se probará únicamente el hecho de que las definiciones de Osin y Farb (agregando la propiedad BCP) son equivalentes; sin embargo, éstas también coinciden con la dada por Bowditch. Una prueba de la equivalencia entre las definiciones de Bowditch y Farb (agregando la propiedad BCP) puede consultarse en el Anexo de [Dah03].

3.1. Las definiciones de Farb y Osin

El objetivo de este apartado es verificar que la definición de Osin para grupos relativamente hiperbólicos es equivalente a la definición dada por Farb agregando a esta última la propiedad de clases laterales acotadas.

Comenzamos notando el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea G un grupo generado por un conjunto finito $X \subset G$ y $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_m\}$ una colección de subgrupos de G . El grafo de Cayley aconado $\widehat{\Gamma}$ es cuasi-isométrico a $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ dotado con la métrica relativa $\text{dist}_{X \cup \mathcal{H}}$.*

El Lema 3.1 se sigue de tomar el encaje cuasi-isométrico inducido por la función identidad en G .

Observación 3.2. En particular, el Lema 3.1 nos dice que $\widehat{\Gamma}$ es hiperbólico si y sólo si $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ lo es, pues la hiperbolicidad es un invariante cuasi-isométrico.

El siguiente lema es una traducción de la propiedad BCP en términos de la definición de Osin.

Lema 3.3. *Sea G un grupo generado por un conjunto finito X y $\{H_1, \dots, H_m\}$ una colección finita de subgrupos finitamente generados de G . El par $(G, \{H_1, \dots, H_m\})$ satisface la propiedad BCP si y sólo si para todo $\lambda \geq 1$ existe una constante b tal que se satisface lo siguiente:*

Sean p, q $(\lambda, 0)$ -cuasi-geodésicas sin backtracking (esto es, toda componente es aislada) tales que $p_- = q_-$ y $\text{dist}_X(p_+, q_+) \leq 1$.

- (1) *Si s es una H_i -componente de p , para algún $i \in \{1, \dots, m\}$, tal que $\text{dist}_X(s_-, s_+) \geq b$, entonces existe una H_i -componente t de p tal que t está conectada a s .*
- (2) *Si s, t son H_i -componentes conectadas de p y q respectivamente, para algún $i \in \{1, \dots, m\}$; entonces $\text{dist}_X(s_-, t_-) \leq b$ y $\text{dist}_X(s_+, t_+) \leq b$.*

A continuación, se enuncia el resultado principal de este apartado.

Teorema 3.4. *Sean G un grupo generado por un conjunto finito X y $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_m\}$ una colección finita de subgrupos de G . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a) *G es relativamente hiperbólico respecto a $\{H_1, \dots, H_m\}$ en el sentido de Osin.*
- (b) *G es relativamente hiperbólico respecto a $\{H_1, \dots, H_m\}$ en el sentido de Farb y satisface la propiedad BCP.*

Demostración. Del Teorema 2.50 y el Lema 3.3, se tiene que (a) implica (b).

Ahora, para verificar que (b) implica (a), probaremos que G tiene presentación relativa

$$\langle X \cup \mathcal{H} \mid R = 1 \text{ si } R \in \mathcal{A} \rangle,$$

donde \mathcal{A} es el conjunto de etiquetas de todos los ciclos atómicos de $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$, y la función de Dehn relativa correspondiente satisface $\delta^{rel}(n) \leq 2^n$.

Sea W una palabra sobre $(X \cup \mathcal{H})^*$ de longitud a lo más n que representa a 1 en G . Basta verificar que existe un diagrama de van Kampen con frontera etiquetada por W con a lo más 2^n celdas etiquetadas por palabras de \mathcal{A} .

Sea p un ciclo en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ con etiqueta W . Si p es atómico, consideramos el diagrama de van Kampen dado por una única 2-celda con frontera la etiqueta de p . Si p no es atómico, entonces procederemos por inducción sobre n .

Como p no es atómico, podemos asumir que es el producto de dos ciclos q_1, q_2 tales que

$$l(q_i) \leq l(p) - 1,$$

con $i \in \{1, 2\}$. Entonces, salvo un movimiento cíclico,

$$W =_F V_1 V_2,$$

donde $\|V_i\| \leq \|W\| - 1 \leq n - 1$ y V_i representa 1 en G para $i = 1, 2$. Entonces, por hipótesis de inducción, existen diagramas de van Kampen con fronteras etiquetadas por V_1 y V_2 , respectivamente, y tales que cada uno de dichos diagramas tiene a lo más $2^{\|V_1\|}$ y $2^{\|V_2\|}$ celdas, respectivamente, etiquetadas por palabras de \mathcal{A} . Pegamos los diagramas de van Kampen mencionados de manera que obtenemos un nuevo diagrama de van Kampen cuya etiqueta de frontera es W y el número de celdas etiquetadas por palabras de \mathcal{A} es a lo más

$$2^{\|V_1\|} + 2^{\|V_2\|} \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n.$$

De esto, la función de Dehn relativa de G respecto a \mathcal{H} está bien definida. Ahora, como $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ es hiperbólico, puesto que $\widehat{\Gamma}$ lo es, se sigue, por el Corolario 2.47.1, que la función de Dehn relativa es lineal. ■

4. Descomposiciones JSJ

A lo largo de esta sección se definirán las descomposiciones JSJ para grupos relativamente finitamente presentados en el sentido de Guirardel y Levitt (ver [GL17]). Otras construcciones de estas descomposiciones para grupos finitamente presentados pueden consultarse en el trabajo de Dunwoody (ver [DS99]), el de Fujiwara y Papasoglu (ver [FP06]), y el de Rips y Zela (ver [RS97]); es posible verificar que dichas construcciones son descomposiciones JSJ en el sentido que se dará en este trabajo (para detalles ver la Sección 2.6 de [GL17]).

Sea G un grupo finitamente generado y T un árbol tal que G actúa en T sin inversiones. Se denotará por Γ al grafo de grupos dado por el cociente $\Gamma = T/G$ cuyos grupos vértices y aristas asociados son los grupos estabilizadores de vértices y aristas, respectivamente (para más detalles ver [Ser80]).

4.1. $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles

En este apartado hablaremos de $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles, los cuales más adelante nos permitirán dar la definición de una descomposición JSJ.

Definición 4.1. Un elemento $g \in G$ (o subgrupo $H \leq G$) es **elíptico** en el árbol T si fija un vértice de éste.

Notemos que ser elíptico es equivalente a estar contenido en un conjugado de un grupo vértice de Γ .

Consideremos \mathcal{H} un conjunto de subgrupos de G y \mathcal{A} una colección no vacía de subgrupos de G tal que es estable bajo conjugación y bajo tomar subgrupos; esto es, si $H \in \mathcal{A}$ entonces $g^{-1}Hg \in \mathcal{A}$ para todo $g \in G$, y todo subgrupo de H es un elemento de \mathcal{A} .

Definición 4.2. Sea T un árbol en el cual G actúa sin inversiones.

- (a) Decimos que T es un **\mathcal{A} -árbol** si sus estabilizadores de aristas pertenecen a \mathcal{A} .
- (b) Si T es un \mathcal{A} -árbol tal que todo elemento en \mathcal{H} es elíptico en T , entonces T es un **$(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol**.

Observemos que un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol T satisface que para todo $H \in \mathcal{H}$, H está contenido en un conjugado de algún grupo vértice de Γ . Además, el conjunto de $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles no cambia al reemplazar elementos de \mathcal{H} por conjugados.

4.2. Funciones entre árboles y espacios de deformación.

A continuación, se definirá una relación de equivalencia entre árboles denominada **pertenecer al mismo espacio de deformación**; dicho espacio, dado como una clase de equivalencia de esta relación, es otro de los ingredientes necesarios para definir descomposiciones JSJ.

Consideremos T, T' árboles tales que G actúa en estos sin inversiones.

Definición 4.3. Una **función** entre árboles $f: T \rightarrow T'$ es una función definida en vértices $f: V(T) \rightarrow V(T')$ tal que la imagen de una arista de T es un camino de aristas en T' (dicho camino puede consistir únicamente de un vértice) y es G -equivariante (esto es, $f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$ para cualesquiera $g \in G$ y $v \in V(T)$).

Definición 4.4. Una función $f: T \rightarrow T'$ es un **morfismo** si es posible subdividir a T de tal forma que cada arista de T tiene como imagen a una arista de T' y cada vértice de T tiene como imagen a un vértice de T' .

Dado $f: T \rightarrow T'$ un morfismo entre árboles, se tiene que cualquier estabilizador de arista de T está contenido en un estabilizador de arista de T' .

Definición 4.5. Una función entre árboles $f: T \rightarrow T'$ es una **función colapso** si se obtiene de colapsar aristas y aplicar un isomorfismo. El árbol T' es un **colapso** de T (o T **refina a** T') si existe una función colapso $f: T \rightarrow T'$.

Ser una función colapso es equivalente a **preservar alineación**, esto es, ser una función $f: T \rightarrow T'$ tal que la imagen de cualquier arco $[a, b]$ es un punto o el arco $[f(a), f(b)]$. A su vez, esto es equivalente a que la primagen de todo subárbol sea un subárbol.

Definición 4.6. Un árbol T **domina** a T' si existe una función G -equivariante $f: T \rightarrow T'$. A la función f se le denomina **función dominante**.

Equivalentemente, T domina a T' si cada estabilizador de vértice de T fija a un vértice en T' ; esto es, todo subgrupo elíptico en T es elíptico en T' .

Definición 4.7. Dos árboles pertenecen al mismo **espacio de deformación** \mathcal{D} si tienen los mismos subgrupos elípticos; esto es, se dominan entre sí. Si se consideran exclusivamente a \mathcal{A} -árboles, a \mathcal{D} se le llama un **espacio de deformación sobre** \mathcal{A} . Si consideramos únicamente a $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles, \mathcal{D} es un **espacio de deformación sobre** \mathcal{A} **relativo a** \mathcal{H} .

Definición 4.8. Sean $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ espacios de deformación. Decimos que \mathcal{D}' domina a \mathcal{D} si T' domina a T , para cualesquiera T, T' árboles tales que $T \in \mathcal{D}$ y $T' \in \mathcal{D}'$.

La dominación es un orden parcial para los espacios de deformación.

4.3. Refinamientos estándar

Los refinamientos serán de suma importancia para verificar la existencia de los espacios de deformación JSJ, es por esto que en este apartado hablaremos de la existencia de refinamientos estándar para árboles respecto a otros árboles.

Sean T_1 y T_2 árboles tales que G actúa en éstos sin inversiones.

Definición 4.9. Un árbol T_1 es **elíptico** respecto a T_2 si todo estabilizador de arista de T_1 fija un vértice en T_2 .

Nótese que si existe un refinamiento T de T_1 que domina a T_2

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & T_2, \\ & & \downarrow \\ & & T_1 \end{array}$$

entonces cada estabilizador de vértice en T_1 fija un punto en T_2 , puesto que los estabilizadores de T_1 son elípticos en T y, por tanto, en T_2 ; esto es, T_1 es elíptico respecto a T_2 . Un converso para esta observación está dado en la siguiente proposición, cuya prueba puede consultarse en la Proposición 2.2 de [GL17].

Proposición 4.10. *Si T_1 es elíptico respecto a T_2 , entonces existe un árbol T y funciones $p: T \rightarrow T_1$ y $f: T \rightarrow T_2$ tales que se cumple lo siguiente:*

1. p es una función colapso,
2. para cada $v \in V(T_1)$, la función f restringida al subárbol $Y_v = p^{-1}(v)$ es inyectiva.

En particular,

- (i) T es un refinamiento de T_1 que domina a T_2 ,

- (II) el estabilizador de cualquier arista de T fija una arista en T_1 o en T_2 ,
- (III) todo estabilizador de arista de T_2 contiene un estabilizador de arista de T ,
- (IV) un subgrupo de G es elíptico en T si y solo si es elíptico en T_1 y en T_2 .

Definición 4.11. Un árbol T dado como en la Proposición 4.10 es llamado un **refinamiento estándar de T_1 que domina a T_2** .

De la Proposición 4.10 (IV), se sigue que los refinamientos estándar pertenecen al mismo espacio de deformación; sin embargo, no hay unicidad para refinamientos estándar.

4.4. Subgrupos universalmente elípticos y descomposiciones JSJ

Finalizaremos esta sección dando la definición de descomposiciones JSJ y verificando su existencia para grupos relativamente finitamente presentados.

Definición 4.12. Un subgrupo $H \leq G$ es **universalmente elíptico** si es elíptico en todo $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol. Un árbol es **universalmente elíptico** si sus estabilizadores de aristas son universalmente elípticos.

Algunas propiedades importantes de árboles universalmente elípticos se encuentran en el siguiente lema, cuya demostración puede consultarse en [GL17].

Lema 4.13. Sean T_1 y T_2 árboles.

- (1) Si T_1 es universalmente elíptico, entonces algún refinamiento de T_1 domina a T_2 .
- (2) Si T_1 y T_2 son universalmente elípticos, entonces todo refinamiento estándar T de T_1 que domina a T_2 es universalmente elíptico. En particular, existe un árbol T universalmente elíptico que domina a T_1 y T_2 .
- (3) Si T_1 y T_2 son universalmente elípticos y tienen los mismos elementos elípticos, entonces T_1 y T_2 pertenecen al mismo espacio de deformación.

Se denotará por \mathcal{A}_{ell} al subconjunto de \mathcal{A} dado por los subgrupos universalmente elípticos. Notemos que \mathcal{A}_{ell} es cerrada bajo conjugación y toma de subgrupos. Además, un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol T es universalmente elíptico si y sólo si es un $(\mathcal{A}_{ell}, \mathcal{H})$ -árbol.

Definición 4.14. Un **espacio de deformación JSJ** es un espacio de deformación \mathcal{D} de $(\mathcal{A}_{ell}, \mathcal{H})$ -árboles que es maximal respecto a la dominación; se denotará a \mathcal{D} por \mathcal{D}_{JSJ} . A los elementos $T \in \mathcal{D}_{JSJ}$ se les llama **árboles (o descomposiciones) JSJ**.

Nótese, por el Lema 4.13, que si \mathcal{D}_{JSJ} existe entonces es único. Además, los elementos de \mathcal{D}_{JSJ} son los árboles universalmente elípticos que dominan a cualquier otro árbol universalmente elíptico.

A continuación, se verificará que los espacios de deformación JSJ existen para grupos relativamente finitamente presentados; para esto, nos apoyaremos fuertemente del siguiente resultado.

Teorema 4.15 (Accesibilidad relativa de Dunwoody). *Sea G un grupo finitamente presentado relativo a $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_p\}$. Supongamos que*

$$T_1 \leftarrow \dots \leftarrow T_k \leftarrow T_{k+1} \leftarrow \dots$$

es una sucesión de refinamientos de $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles. Entonces existe un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol S tal que

- 1. para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe un morfismo $S \rightarrow T_k$,

2. cada estabilizador de arista de S es finitamente generado.

Antes de dar una prueba para el Teorema 4.15, observemos que se tiene la siguiente caracterización de grupos relativamente finitamente presentados.

Observación 4.16. Un grupo G es finitamente presentado relativo a la colección de subgrupos $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_p\}$ si y sólo si es el grupo fundamental fundamental de un 2-complejo simplicial X con subcomplejos conexos disjuntos Y_1, \dots, Y_p tales que

- $X - (Y_1 \cup \dots \cup Y_p)$ contiene una cantidad finita de celdas abiertas,
- $j_i: \pi_1(Y_i) \rightarrow \pi_1(X)$ es un encaje,
- $Im(j_i)$ es conjugado a H_i .

(Una demostración a este hecho puede encontrarse en la Sección 2.5 de [GL17]).

A continuación, se darán algunas definiciones que serán de ayuda para la demostración del Teorema 4.15, las cuales pueden consultarse en [Dun85] y [DS99].

Definición 4.17. Sea X un 2-complejo poliedral (esto es, las 2-celdas son polígonos y sus funciones de pegado son funciones simpliciales). Un **patrón** en X es un 1-complejo P encajado en X tal que si σ es una 2-celda cerrada en X , entonces $P \cap \sigma$ consiste de una colección finita de caminos de aristas disjuntos cuyos extremos están en $Sk^{(1)}X - Sk^{(0)}X$ y sus vértices están en el interior de σ (aquí, $Sk^{(0)}X$ y $Sk^{(1)}X$ denotan el 0-esqueleto y 1-esqueleto de X , respectivamente).

Definición 4.18. Sea L un 2-complejo conexo. Una **vía** es un subconjunto S de $|L|$ (donde $|\cdot|$ denota la realización geométrica) con las siguientes propiedades.

1. S es conexo.
2. Para cada 2-simplejo σ de $|L|$, si $S \cap \sigma$ es la unión de una cantidad distinta de líneas rectas disjuntas que unen aristas distintas de σ .
3. Si γ es un 1-simplejo de L y σ no es una cara de un 2-simplejo, entonces $S \cap |\sigma| = \emptyset$ o S consiste de un único punto en el interior de $|\gamma|$.

Definición 4.19. Una **banda** es un subconjunto B de $|L|$ tal que

1. B es conexo.
2. Para cada 2-simplejo σ de L , $B \cap |\sigma|$ es una unión de una cantidad finita de componentes, las cuales están acotadas por dos intervalos cerrados en distintas caras de σ y las líneas disjuntas que unen los extremos de dichos intervalos.
3. Si γ es un 1-simplejo de L que no es cara de un 2-simplejo, entonces $B \cap |\gamma| = \emptyset$ o B consiste de un subconjunto de $|\gamma|$ acotado por dos puntos en el interior de $|\gamma|$.

Definición 4.20. Se define lo siguiente.

- Si B es una banda, entonces se obtiene una vía $t(B)$ al tomar el punto medio de cada componente de $|\gamma| \cap B$ por cada 1-simplejo γ de L y unir dichos puntos en las componentes apropiadas de $|\sigma| \cap B$, donde σ es un 2-simplejo de L .
- Se dice que B **no está torcida** si B es homeomorfa a $t(B) \times [0, 1]$ en cuyo caso ∂B tiene dos componentes homeomorfas a $t(B)$.
- Dos vías son **paralelas** si existe una banda B no torcida tal que $\partial B = S_1 \cup S_2$.

Ahora, se procederá a dar una prueba al Teorema 4.15.

Demostración. Sean G un grupo finitamente presentado relativo a $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_p\}$ y X el 2-complejo simplicial dado como en la Observación 4.16. Sea

$$\pi: \tilde{X} \rightarrow X$$

el cubriente universal del X , con G actuando en X por transformaciones de cubierta.

Para $i \in \{1, \dots, p\}$, se considerará una componente conexa \tilde{Y}_i de $\pi^{-1}(Y_i)$ tal que su estabilizador es H_i y levantamientos fijos $v_1, \dots, v_q \in \tilde{X}$ para todos los vértices en $X - (Y_1 \cup \dots \cup Y_p)$. Se denotará por $p_k: T_{k+1} \rightarrow T_k$ a las funciones colapso dadas en el enunciado.

Nótese que la preimagen del punto medio de una arista $e_k \in E(T_k)$ es un único punto, el cual es el punto medio de la arista de T_{k+1} cuya imagen es e_k .

A continuación, se construirán funciones equivariantes $f_k: \tilde{X} \rightarrow T_k$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

- $f_k(\tilde{Y}_i)$ es un vértice fijado por H_i ,
- $f_k(v_j)$ es un vértice,
- f_k envía a cada arista de \tilde{X} a un punto o (de manera inyectiva) a un segmento en T_k ,
- $p_k(f_{k+1}(x)) = f_k(x)$ si x es un vértice de \tilde{X} o si $f_k(x)$ es el punto medio de una arista de T_k .

La construcción de dichas funciones f_k se hará de manera inductiva. Se comenzará con un punto T_0 y f_0, p_0 las funciones constantes. Supóngase que $f_k: \tilde{X} \rightarrow T_k$ ha sido construida. Se procederá a construir f_{k+1} .

Para definir f_{k+1} en \tilde{Y}_i nótese que $f_k(\tilde{Y}_i)$ es un vértice de T_k fijado por H_i . Como p_k preserva alineación, $p_k^{-1}(f_k(\tilde{Y}_i))$ es un subárbol H_i -invariante; además, dado que H_i es elíptico en T_{k+1} , éste fija algún vértice en dicho subárbol. Se define $f_{k+1}(\tilde{Y}_i)$ como dicho vértice.

Se toma $f_{k+1}(v_j)$ como cualquier vértice en $p_k^{-1}(f_k(v_j))$ y se extiende equivariantemente.

Sea e una arista en X tal que no está contenida en $Y_1 \cup \dots \cup Y_p$ y \tilde{e} un levantamiento de e en \tilde{X} . La función f_{k+1} ya ha sido definida para los extremos de \tilde{e} ; a continuación se definirá en \tilde{e} . La restricción de p_k al segmento de T_{k+1} que une a las imágenes de los extremos de \tilde{e} es una función colapso; entonces, la preimagen del punto medio de una arista e_k de T_k es el punto medio de la arista de T_{k+1} con imagen e_k . Como f_k es constante o inyectiva en \tilde{e} , es posible definir f_{k+1} como una función constante o inyectiva en \tilde{e} y que satisface que $p_k(f_{k+1}(x)) = f_k(x)$ si $f(x)$ es el punto medio de una arista de T_k . Se extiende dicha función equivariantemente para definir a f_{k+1} en el 1-esqueleto de \tilde{X} .

Se extiende f_{k+1} de manera estándar a todo triángulo no contenido en $\pi^{-1}(Y_i)$, para $i = 1, \dots, p$. Si f_{k+1} no es constante en uno de dichos triángulos, las preimágenes de puntos medios de aristas de T_{k+1} son caminos de aristas que unen lados distintos.

La función f_{k+1} ha sido construida de manera que satisface las propiedades deseadas. Esto termina la construcción de las funciones f_k .

Ahora, se define $\tilde{\tau}_k \subset \tilde{X}$ como la preimagen, vía la función f_k , de los puntos medios de aristas de T_k ; ésto es un patrón. Dicho patrón $\tilde{\tau}_k$ no interseca a ningún \tilde{Y}_i , con $i = 1, \dots, p$; además, por la construcción de las funciones f_k , se tiene que $\tilde{\tau}_k \subset \tilde{\tau}_{k+1}$. Sea $\tau_k = \pi(\tilde{\tau}_k)$; este es un grafo finito, pues se encuentra contenido en el complemento de $Y_1 \cup \dots \cup Y_p$.

Sea S_k el árbol dual de $\tilde{\tau}_k$ en \tilde{X} . A continuación, se verificará que S_k es un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol con estabilizadores de aristas finitamente generados. Por construcción, f_k induce una función

$$\varphi_k: S_k \rightarrow T_k$$

que envía aristas en aristas; de esto, los estabilizadores de aristas de S_k están en \mathcal{A} . Además, son finitamente generados pues están generados por grupos fundamentales de componentes de τ_k . También se tiene que todo H_i , con $i = 1, \dots, p$, es elíptico en S_k , puesto que \tilde{Y}_i no intersecta a $\tilde{\tau}_k$. De esto, S_k es un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol.

Sea $X' \subset X$ la cerradura del complemento de Y_1, \dots, Y_p . Por construcción, X' es un complejo finito. Por el Teorema 2.2 de [Dun85], se tiene que hay una cota en el número de vías no paralelas en X' . Esto implica que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ se satisface que para toda componente conexa σ de $\tau_k - \tau_{k_0}$ existe una componente conexa σ' de τ_{k_0} tal que $\sigma \cup \sigma'$ acota una región producto que no contiene vértices de X' . Se sigue que para $k \geq k_0$, es posible obtener S_k de S_{k_0} . Entonces, se considera $S = S_{k_0}$. ■

Corolario 4.20.1. *Si G es finitamente presentado relativo a \mathcal{H} y T es un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol, entonces existe un morfismo*

$$f: S \rightarrow T,$$

donde S es un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol con estabilizadores de aristas finitamente generados.

Ahora que se ha probado el Teorema 4.15 y obtenido el Corolario 4.20.1, se procederá a demostrar la existencia de descomposiciones JSJ para grupos relativamente finitamente presentados.

Teorema 4.21. *Sea G un grupo finitamente generado y finitamente presentado relativo a una colección de subgrupos $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_p\}$. Entonces el espacio de deformación JSJ, \mathcal{D}_{JSJ} , de G sobre \mathcal{A} relativo a \mathcal{H} existe y contiene un árbol con estabilizadores de aristas (y por tanto vértices) finitamente generados.*

Demostración. Sea \mathcal{U} el conjunto de $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles T universalmente elípticos tales que para cualesquiera $v \in V(T)$ y $e \in E(T)$, los estabilizadores G_v y G_e son finitamente generados (hasta isomorfismos equivariantes). El conjunto \mathcal{U} es no vacío, pues el árbol que consiste de un único vértice u satisface que $G_u = G$ es finitamente generado, y por tanto dicho árbol es un elemento de \mathcal{U} .

Nótese que si $T \in \mathcal{U}$, entonces $\Gamma = T/G$ es un grafo de grupos finito con grupos aristas y grupos vértices finitamente generados.

A continuación, se verificará que \mathcal{U} es numerable. Como G es finitamente generado, entonces tiene una cantidad numerable de subgrupos finitamente generados. Además, si H_1, H_2 son subgrupos finitamente generados de G , entonces $\text{Hom}(H_1, H_2)$ es numerable. Se sigue que, hasta isomorfismos, hay una cantidad numerable de grafos de grupos tales que sus grupos asociados son subgrupos finitamente generados de G . De esto, \mathcal{U} es numerable. Entonces se puede escribir $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, donde los U_i son $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles universalmente elípticos con estabilizadores de vértices y aristas finitamente generados, donde $i \in \mathbb{N}$.

Ahora, dado un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol T universalmente elíptico, por el Corolario 4.20.1 existe un elemento en \mathcal{U} que domina a T . De esto, se tiene que para probar el Teorema 4.21 basta encontrar un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol que domine a todos los elementos de \mathcal{U} .

Se construirá una sucesión de $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ universalmente elípticos tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, T_k domina a U_i para cualquier $i \leq k$ y T_k refina a T_{k+1} (cuando los subíndices tengan sentido). Dicha construcción se realizará de manera inductiva. Se define $T_0 = U_0$ y se asume que para $k \in \mathbb{N}$ existe un T_k tal que cumple la descripción previa. Se define a T_{k+1} como el refinamiento estándar de T_k que domina a U_{k+1} . Por el Lema 4.13 (2), T_{k+1} es universalmente elíptico; además, como T_{k+1} refina a T_k y, por hipótesis de inducción, T_k domina a U_i para todo $i \leq k$, entonces T_{k+1} domina a U_i para todo $i \leq k + 1$. Se ha construido la sucesión $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ deseada.

Ahora, la sucesión construida

$$T_0 \leftarrow \dots \leftarrow T_k \leftarrow T_{k+1} \leftarrow \dots$$

satisface las hipótesis del Teorema 4.15 y entonces, por dicho resultado, existe un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol $S \in \mathcal{U}$ universalmente elíptico que domina a T_k para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y por tanto a cada $U \in \mathcal{U}$.

Sea T un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol universalmente elíptico, por el Corolario 4.20.1, existe $S' \in \mathcal{U}$ tal que S' domina a T . Entonces, por lo dicho anteriormente, S domina a T . Así, S es un árbol JSJ, lo cual prueba que existe un espacio de deformación JSJ para G . ■

Nótese que, en particular, existen espacios de deformación JSJ para grupos finitamente presentados.

5. Descomposiciones JSJ de grupos relativamente hiperbólicos

En esta sección, se usarán los resultados y teoría desarrollada con anterioridad para probar que los grupos relativamente hiperbólicos admiten una descomposición JSJ sobre sus subgrupos parabólicos relativa a sus subgrupos periferales.

Consideremos G un grupo relativamente hiperbólico respecto a la colección de subgrupos finitamente generados $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_p\}$. Sea \mathcal{A} la familia de subgrupos parabólicos de G , entonces por la Observación 2.9, se tiene que

$$\mathcal{A} = \{H \leq G : H \subset gH_i g^{-1}, \text{ para ciertos } g \in G \text{ e } i \in \{1, \dots, p\}\}.$$

Proposición 5.1. *Los subgrupos parabólicos de G son universalmente elípticos; esto es, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ell}$.*

Demostración. Sea T un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol, entonces T es un \mathcal{A} -árbol tal que H_i es elíptico en T para todo $i \in \{1, \dots, p\}$.

Sea $H \in \mathcal{A}$, entonces

$$H \subset gH_i g^{-1},$$

para ciertos $g \in G$ e $i \in \{1, \dots, p\}$.

Como H_i es elíptico en T , entonces

$$H_i \subset hG_v h^{-1},$$

para algunos $h \in H$ y $v \in V(\Gamma)$, donde G_v denota el grupo vértice asociado a v en el grafo de grupos $\Gamma = T/G$.

De esto,

$$H \subset gH_i g^{-1} \subset ghG_v h^{-1} g^{-1} = (gh)G_v(gh)^{-1}.$$

Entonces, H es elíptico en T . Como T es arbitrario, se sigue que H es universalmente elíptico para todo $H \in \mathcal{A}$. ■

Proposición 5.2. *Los grupos relativamente hiperbólicos admiten una descomposición JSJ sobre sus subgrupos parabólicos relativa a sus subgrupos periferales.*

Demostración. Sea G un grupo relativamente hiperbólico relativo a la familia de subgrupos finitamente generados $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_p\}$. Por el Teorema 3.4, G tiene una presentación relativa a \mathcal{H} finita.

Entonces, por la Proposición 5.1 y el Teorema 4.21, se sigue que G admite una descomposición JSJ sobre sus subgrupos parabólicos relativa a sus subgrupos periferales. ■

Nótese que, por el Teorema 4.21 y el hecho de que los grupos relativamente hiperbólicos son finitamente presentados relativos a sus subgrupos periferales, pueden encontrarse diversas colecciones sobre las cuales es posible obtener descomposiciones JSJ. Entonces, las descomposiciones propuestas en este trabajo no son las únicas que pueden hacerse. Otro ejemplo de descomposiciones JSJ para grupos relativamente hiperbólicos puede encontrarse en [Bow01] y [Bow12], donde utilizan la frontera de los grupos relativamente hiperbólicos y puntos de corte para realizar descomposiciones JSJ sobre subgrupos finitos relativas a sus subgrupos periferales.

Referencias

- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Bow99] B. H. Bowditch. Convergence groups and configuration spaces. In *Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, pages 23–54. de Gruyter, Berlin, 1999.
- [Bow01] B. H. Bowditch. Peripheral splittings of groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(10):4057–4082, 2001.
- [Bow12] B. H. Bowditch. Relatively hyperbolic groups. *Internat. J. Algebra Comput.*, 22(3):1250016, 66, 2012.
- [BRS07] Noel Brady, Tim Riley, and Hamish Short. *The geometry of the word problem for finitely generated groups*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007. Papers from the Advanced Course held in Barcelona, July 5–15, 2005.
- [Dah03] François Dahmani. *Les groupes relativement hyperboliques et leurs bords*, volume 2003/13 of *Prépublication de l’Institut de Recherche Mathématique Avancée [Prepublication of the Institute of Advanced Mathematical Research]*. Université Louis Pasteur, Département de Mathématique, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 2003. Thèse, l’Université Louis Pasteur (Strasbourg I), Strasbourg, 2003.
- [DS99] M. J. Dunwoody and M. E. Sageev. JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups. *Invent. Math.*, 135(1):25–44, 1999.
- [Dun85] M. J. Dunwoody. The accessibility of finitely presented groups. *Invent. Math.*, 81(3):449–457, 1985.
- [Far98] B. Farb. Relatively hyperbolic groups. *Geom. Funct. Anal.*, 8(5):810–840, 1998.
- [FP06] K. Fujiwara and P. Papasoglu. JSJ-decompositions of finitely presented groups and complexes of groups. *Geom. Funct. Anal.*, 16(1):70–125, 2006.
- [GL17] Vincent Guirardel and Gilbert Levitt. JSJ decompositions of groups. *Astérisque*, (395):vii+165, 2017.
- [Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [Joh79] Klaus Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, volume 761 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [JS79] William H. Jaco and Peter B. Shalen. Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 21(220):viii+192, 1979.
- [Kro90] P. H. Kropholler. An analogue of the torus decomposition theorem for certain Poincaré duality groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 60(3):503–529, 1990.
- [LS01] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1977 edition.
- [Osi06] Denis V. Osin. Relatively hyperbolic groups: intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 179(843):vi+100, 2006.

- [RS97] E. Rips and Z. Sela. Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition. *Ann. of Math. (2)*, 146(1):53–109, 1997.
- [Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980. Translated from the French by John Stillwell.