



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS UNAM - UMSNH



ACCIONES SIMPLICIALES DEL GRUPO MODULAR DE SUPERFICIES DE TIPO INFINITO

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

M.C. ISRAEL MORALES JIMÉNEZ

TUTOR:

Dr. JOSÉ FERRÁN VALDEZ LORENZO
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

COMITÉ TUTOR:

Dr. NOÉ BÁRCENAS TORRES
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dr. JESÚS MUCIÑO RAYMUNDO
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

MORELIA, MICHOACÁN, MAYO 2020.

*Dedicado a Karley y Mónica,
a mis familiares,
colegas y amigos.*

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi asesor de doctorado, el profesor Ferrán Valdez, por la confianza depositada en mí al brindarme la oportunidad de trabajar su lado, por los comentarios atinados y oportunos, por la calidez de su persona. La realización de este trabajo fue posible en gran medida al apoyo constante y sin miramientos. Gracias a todos estos gestos, ahora conozco un poco más del mundo de las matemáticas.

Agradezco también a los revisores de esta tesis: a los profesores Javier Aramayona, Noé Bárcenas, Jesús Hernández, Rita Jiménez y Jesús Muciño. Sus amables comentarios y observaciones ayudaron a mejorar sustancialmente el contenido y la estructura de esta tesis.

Quiero hacer un especial reconocimiento a Noé Bárcenas y a Jesús Hernández por ser increíbles interlocutores en donde encontraron eco muchas de mis preguntas y cuestiones acerca de grupos modulares y teoría geométrica de grupos, han sido bastante influyentes en mi formación. Agradezco a Reynaldo Rojas y a Antonio Corona por su orientación en la obtención del Teorema 3.1.8 y el Lema 4.6.5. De igual manera, hago especial mención de Cristhian Hidber y José Hernández por las charlas mantenidas acerca de matemáticas y temas afines.

A mi querida compañera Karley y a mi estimada hermana Mónica, agradezco su entrañable cariño incondicional. Este trabajo está dedicado a ellas.

A todos mis familiares, padres, abuelos, hermanos, primos, etc., agradezco su apoyo.

Con cariño hago mención de mis amigos: Cenobio Yescas, César Díaz, Reynaldo Rojas, Jesús Hernández, Héctor Alonso, Antonio Corona, Antonio Montero, Sofía Zorrilla, Alejandra Villaseñor, Ariet Ramos, Hugo Soto, Yesenia Villicaña, en resumen, a todos mis amigos del básquet. Gracias por las experiencias estimulantes y enriquecedoras, su presencia en esta parte de mi vida fue significativo para el éxito.

Quiero agradecer a todo el personal administrativo y académico del Centro de Ciencias Matemáticas (CCM) y de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH) que a diario hacen posible un ambiente de trabajo agradable. En particular, agradezco a Lidia González por su diligente trabajo como bibliotecaria del CCM, a Morelia Álvarez por su atención constante en todos los procesos administrativos del posgrado conjunto, a Miguel A. Magaña y L. Gerardo Tejero, encargados de la unidad de cómputo, por su amable servicio, a Valdemar Orozco y a Hermelidia Santibañez, administrativos, por la amable orientación que recibí de ellos en cada uno de los trámites.

Este trabajo de doctorado fue auspiciado por la beca de doctorado otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT). Los gastos de viajes para la presentación de los resultados de esta tesis fueron cubiertos por el proyecto PAPIIT IN102018, proyecto CONACYT-Ciencia Básica 283960, PAEP, Centro de Ciencias Matemáticas UNAM-Morelia, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Instituto de Matemáticas (IMATE), Universidad de Toulouse, Universidad de Chicago, y Universidad del País Vasco. Finalmente, agradezco a Casa Matemática Oaxaca, Max-Planck Institut für Mathematik y American Institut of Mathematics por la hospitalidad recibida en las estancias de investigación.

Resumen. Los principales resultados de esta tesis de doctorado son:

1. *Método de Alexander para superficies de tipo infinito.* Para toda superficie de tipo infinito S posiblemente con frontera no vacía, existe una colección Γ de curvas y arcos esenciales en S tal que si un homomorfismo $h : S \rightarrow S$ fija las clases de isotopía de los elementos en Γ entonces h es isotópico (relativo a la frontera de S) a la identidad.
2. *Rigidez topológica del complejo de curvas.* Todo isomorfismo simplicial entre grafos de curvas de superficies de tipo infinito está inducido por un homeomorfismo.
3. *El grupo de automorfismos simpliciales del complejo de curvas.* Para toda superficie S de tipo infinito, el grupo de automorfismos simpliciales del complejo de curvas asociado a S es isomorfo al grupo modular extendido de S , es decir, $\text{Aut}(\mathcal{C}(S)) = \text{Mod}^*(S)$.
4. *Construcción de Hooper, Thurston y Veech.* Sea S una superficie de tipo infinito. Entonces existe un par de multicurvas α y β cuya unión llena la superficie S , y existe una estructura plana τ en S tales que los giros de Dehn T_α y T_β a lo largo de las multicurvas α y β , respectivamente, actúan por automorfismo afines en la superficie plana $M := (S, \tau)$.
5. *Elementos loxodrómicos.* Sea S una superficie de tipo infinito y p un punto marcado en S . Entonces existe una colección no numerable de elementos en el grupo $\text{Mod}(S, p)$ con acción loxodrómica en el grafo de lazos asociado a S . Más aún, los elementos de esta colección son homeomorfismos que no preservan ninguna subsuperficie de S de tipo finito.

Abstract. The main contributions of this doctoral thesis are:

1. *Alexander's method for infinite-type surfaces.* For any infinite-type surface S possibly with non-empty boundary, there exist a collection Γ of essential curves and arcs in S such that if $h : S \rightarrow S$ is a homeomorphism which preserves the isotopy class of the elements in Γ then h is isotopic (relative to the boundary of S) to the identity.
2. *Topological rigidity of the curve complex.* Every simplicial isomorphism between curve complexes of infinite-type surfaces is induced by a homeomorphism.
3. *The automorphisms group of the curve complex.* For every infinite-type surface S , the simplicial automorphisms group of the curve complex associated to S is isomorphic to the extended mapping class group of S , that is, $\text{Aut}(\mathcal{C}(S)) = \text{Mod}^*(S)$.
4. *The Hooper, Thurston and Veech construction.* Let S be an infinite-type surface. Then there exist a pair of multicurves α and β whose union fills S , and there exist a flat structure τ on S such that the Dehn twists T_α and T_β around the multicurves α and β , respectively, are affine automorphisms of the flat surface $M := (S, \tau)$.
5. *Loxodromic big mapping classes.* Let S be an infinite-type surface and p be a marked point in S . Then there exists an uncountable collection of elements in the group $\text{Mod}(S, p)$ with loxodromic action on the loop graph of S . Moreover, every element of this collection does not preserve any finite-type subsurface of S .

Palabras clave: homeomorfismo, complejo de curvas, grafo de lazos, grupo de automorfismos simpliciales, grupo modular.

Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	ix
1. Preliminares	1
1.1. Superficies topológicas	1
1.2. Curvas, arcos y multicurvas	4
1.3. El grupo modular de una superficie	8
1.4. Giros de Dehn	11
1.5. Clasificación de Nielsen-Thurston	12
1.6. El grafo de curvas	13
1.7. El grafo de lazos	14
2. Método de Alexander para superficies de tipo infinito	17
2.1. Resultados y aplicaciones	17
2.2. Prueba del Teorema 2.1.4	19
2.3. Homotopía relativa	23
3. Automorfismos del grafo de curvas	25
3.1. Resultados y aplicaciones	25
3.2. Invarianza del tipo topológico de curvas	27
3.3. Prueba del Teorema 3.1.3	32
4. Elementos del grupo modular con acción loxodrómica en el grafo de lazos	37
4.1. Resultados y aplicaciones	37
4.2. Preliminares	41
4.2.1. El grafo de lazos y su frontera	41
4.2.2. Superficies planas	43
4.3. Construcción de Hooper-Thurston-Veech	45
4.4. Direcciones λ -renormalizables	54
4.5. Prueba del Teorema 4.1.1	54
4.6. Prueba del Teorema 4.1.2	60
4.7. Multicurvas y la construcción de Hooper-Thurston-Veech	69
Bibliografía	73

Introducción

Una *superficie topológica* es una variedad 2-dimensional, Hausdorff y segundo numerable. En adelante, por superficie nos referimos a una superficie topológica conexa, orientable y sin frontera. Decimos que una superficie es de *tipo finito* si tiene grupo fundamental finitamente generado; de lo contrario diremos que es una *superficie de tipo infinito*.

Toda superficie S está completamente determinada hasta homeomorfismos por tres invariantes topológicos: el *género* $g(S) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, el *espacio de fines* $\text{Ends}(S)$ y el *espacio de fines acumulados por género* $\text{Ends}_\infty(S) \subseteq \text{Ends}(S)$. A los elementos de $\text{Ends}(S) \setminus \text{Ends}_\infty(S)$ se les llama *fines planos* de la superficie. El conjunto $S \cup \text{Ends}(S)$ está dotado de una topología que lo hace un espacio topológico conexo, Hausdorff, compacto y que contiene densamente a la superficie S ; este espacio se conoce como la *compactificación de Freudenthal* de la superficie S , véase la Sección 1. Con la topología heredada de $S \cup \text{Ends}(S)$, los subespacios $\text{Ends}_\infty(S)$ y $\text{Ends}(S)$ son homeomorfos a subconjuntos cerrados anidados del conjunto de Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Más aún, todo par de subconjuntos anidados del conjunto de Cantor es el espacio de fines de una superficie, véase [Ric63].

Una superficie S es de tipo finito si y sólo si $g(S) < \infty$ y $\text{Ends}(S)$ es un conjunto finito. En este caso S se denota por S_g^n donde $g = g(S)$ y n es la cardinalidad del conjunto $\text{Ends}(S)$. Si $n = 0$ entonces S_g^0 es la superficie compacta de género g a la cual nos referimos por S_g . La superficie S_g^n se puede obtener de S_g haciendo $S_g^n = S_g \setminus P$ donde $P \subset S_g$ tiene cardinalidad n . Usualmente en la literatura los elementos de P se conocen como las *ponchaduras* de S_g^n . En general, a los fines planos aislados de una superficie se le llaman *ponchaduras* de la superficie.

Asociado a una superficie topológica S está el *grupo modular* $\text{Mod}(S)$ el cual está formado por todas las clases de isotopía de homeomorfismos $S \rightarrow S$ que preservan la orientación de la superficie. Si además incluimos las clases de isotopía de homeomorfismos $S \rightarrow S$ que invierten la orientación de la superficie, obtenemos el *grupo modular extendido* de S el cual se denota por $\text{Mod}^*(S)$. El grupo modular y el grupo modular extendido están relacionados por la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow \text{Mod}(S) \longrightarrow \text{Mod}^*(S) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1. \quad (1)$$

Los grupos modulares de superficies de tipo finito han sido ampliamente estudiados y existe vasta información acerca de ellos, véase por ejemplo [FM12] y referencias citadas ahí. Por el contrario, los grupos modulares de superficies de tipo infinito han sido poco investigados y solo recientemente se ha hecho un esfuerzo real para comprenderlos. En la literatura actual, los grupos modulares de superficies de tipo infinito son conocidos como *big mapping class groups*. La justificación del calificativo *big* se debe a que estos grupos son no numerables, mientras que los grupos modulares de superficies de tipo finito son numerables.

Un objeto importante en el estudio de los grupos modulares de superficies es el *complejo de curvas*. Dada una superficie S , el *complejo de curvas* $\mathcal{C}(S)$ asociado a S es el complejo simplicial abstracto cuyo conjunto de vértices está formado por todas las clases de isotopía de curvas

cerradas simples esenciales¹ en S , los k -simplejos están formados por $k+1$ vértices con representantes disjuntos a pares. Este complejo simplicial fue introducido por W. Harvey [Har79, Har81] para superficies de tipo finito y desde entonces se ha demostrado que es un objeto central en el estudio de grupos modulares, véase [Iva01]. El complejo de curvas es un complejo bandera (flag complex) y por lo tanto el grupo de automorfismos simpliciales de $\mathcal{C}(S)$ es isomorfo al grupo de automorfismos simpliciales del 1-esqueleto de $\mathcal{C}(S)$, el cual se conoce como el *grafo de curvas* de la superficie S que también denotamos por $\mathcal{C}(S)$. Una superficie S es *esporádica* si pertenece al conjunto $\{S_0^{n \leq 4}, S_1^{n \leq 1}\}$. Entonces el grafo de curvas $\mathcal{C}(S)$ es no vacío y conexo si y solo si S no es esporádica, véase [FM12].

El grupo modular extendido $\text{Mod}^*(S)$ actúa sobre el complejo de curvas $\mathcal{C}(S)$ por automorfismos simpliciales y por consiguiente se tiene el homomorfismo de grupos

$$\Psi : \text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S)). \quad (2)$$

En el estudio de los grupos modulares de superficies de tipo finito el siguiente resultado es fundamental.

Teorema (de Ivanov para superficies de tipo finito). *Sea S_g^n una superficie de tipo finito no esporádica distinta de S_1^2 . Entonces todo automorfismo simplicial de $\mathcal{C}(S_g^n)$ está inducido por un homeomorfismo, es decir, Ψ es sobreyectiva.*

Este resultado fue demostrado inicialmente por N. Ivanov [Iva97] cuando S_g^n tienen género al menos dos; desde entonces se conoce como el *Teorema de Ivanov*. Posteriormente este teorema fue extendido de forma independiente por M. Korkmaz [Kor96] y F. Luo [Luo00] para superficies de género cero con al menos cinco ponchaduras y para superficies con género uno y al menos dos ponchaduras, este último da una descripción precisa del homomorfismo Ψ en los casos restantes. El Teorema de Ivanov es central en la teoría por los profundos resultados que se derivan de este acerca de la estructura algebraica de $\text{Mod}(S_g^n)$, algunas aplicaciones del Teorema de Ivanov se pueden ver en [Iva01, Iva97].

En el contexto de superficies de tipo infinito, J. Hernández-Hernández y F. Valdez [HHV17] fueron los primeros en investigar las propiedades del homomorfismo Ψ . Demostraron que si S es una superficie de tipo infinito cuyo espacio de fines coincide con su espacio de fines acumulados por género, es decir, $\text{Ends}(S) = \text{Ends}_\infty(S)$, entonces $\text{Aut}(\mathcal{C}(S)) = \text{Mod}^*(S)$. Uno de los resultados principales obtenidos es:

Teorema A. *Sea S una superficie de tipo infinito. Entonces todo automorfismo del complejo de curvas está inducido por un homeomorfismo. Más aún, la aplicación natural*

$$\Psi : \text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$$

es un isomorfismo.

En el proceso de nuestra investigación para la obtención del resultado anterior desarrollamos el (i) *método de Alexander para superficies de tipo infinito* [HHMV19] y solucionamos afirmativamente el (ii) *problema de rigidez topológica del grafo de curvas* [HHMV18] para superficies de tipo infinito. A continuación describimos estos dos resultados así como el contexto y sus aplicaciones.

(i) *Método de Alexander para superficies de tipo infinito.* El método de Alexander es una herramienta básica en el estudio de los grupos modulares de superficies de tipo finito. En esencia

¹Una curva cerrada simple en S es *esencial* si no es isotópica a un punto o a una ponchadura de la superficie.

establece que para determinar si un homeomorfismo de la superficie es isotópico a la identidad basta con observar su acción en una colección finita de curvas cerradas simples esenciales, véase la Proposición 2.8 en [FM12]. En colaboración con J. Hernández-Hernández y F. Valdez [HHMV19] generalizamos este método para superficies de tipo infinito:

Teorema B (Método de Alexander para superficies de tipo infinito). *Sea S una superficie de tipo infinito. Entonces existe una colección de curvas cerradas simples esenciales Γ (numerable de cardinalidad infinita) en S tal que cualquier homeomorfismo en $\text{Homeo}^+(S)$ que preserva la clase de isotopía de los elementos en Γ , es isotópico a la identidad en S .*

Como consecuencia directa del Teorema B, el homomorfismo Ψ es inyectivo para toda superficie S de tipo infinito. Este resultado era bien conocido para superficies de tipo finito $S_g^n \notin \{S_1^{n \leq 2}, S_2\}$, véase el Teorema 2.1.1. Análogamente a lo que sucede con grupos modulares de superficies de tipo finito, usando el método de Alexander se puede probar que el *centro* de $\text{Mod}(S)$ es trivial para toda superficie de tipo infinito, véase [LL19] ó el Teorema 2.1.6.

El Teorema B también tiene aplicaciones en el estudio de $\text{Mod}^*(S)$ como espacio topológico con la topología cociente heredada de $\text{Homeo}(S)$ con la topología compacto-abierta. Por ejemplo, N. Vlamis [Vla19] demuestra que la componente conexa por trayectorias del espacio $\text{Homeo}(S)$ que contiene a la identidad es cerrada y abierta, por lo tanto $\text{Mod}^*(S)$ es Hausdorff y totalmente disconexo, véase también la Proposición 2.1.8. Además, si S es una superficie de tipo infinito entonces $\text{Mod}^*(S)$ es topológicamente perfecto, véase el Teorema 2.1.11. Lo anterior no sucede con los grupos modulares de superficies de tipo finito, pues todos estos son espacios topológicos discretos.

(ii) *Problema de rigidez topológica del grafo de curvas.* Si $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ es un isomorfismo simplicial entre el grafo de curvas de S y S' , respectivamente, entonces ¿ S es homeomorfa a S' ?, es decir, ¿el complejo de curvas está completamente determinado por la superficie? Como consecuencia del trabajo de K. Shackleton [Sha07] sobre encajes locales entre grafos de curvas de superficies de tipo finito se deduce que $\mathcal{C}(S_g^n)$ es rígido combinatoriamente para superficies S_g^n no esporádicas y no contenidas en $\{S_2, S_0^6, S_1^2, S_0^5\}$ (Teorema 1 en [Ibíd.]), más aún, por el Teorema de Ivanov ϕ está inducido por un homeomorfismo. En colaboración con J. Hernández-Hernández y F. Valdez [HHMV18] probamos los análogos de los resultados anteriores de K. Shackleton para grafos de curvas de superficies de tipo infinito. De forma más precisa, demostramos el teorema siguiente cuya demostración es tratada en el Capítulo 3.

Teorema C (Rigidez topológica del grafo de curvas). *Sean S y S' dos superficies de tipo infinito y $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ un isomorfismo simplicial. Entonces S es homeomorfa a S' y ϕ está inducido por un homeomorfismo $h : S \rightarrow S'$.*

Notemos que el Teorema A (Teorema de Ivanov para superficies de tipo infinito) es consecuencia de los Teoremas B y C. El Teorema A fue obtenido de forma independiente por J. Bavard, S. Dowdall y K. Rafi en [BDR20] y lo usan para obtener información acerca de la estructura algebraica del grupo modular. Por ejemplo, demuestran que el grupo *comensurador abstracto* de $\text{Mod}(S)$ es isomorfo a $\text{Mod}^*(S)$; también, prueban que todo isomorfismo entre grupos modulares de superficies de tipo infinito está inducido por un homeomorfismo. Este último resultado fue previamente obtenido por P. Patel y N. Vlamis [PV18] para el grupo modular puro $\text{PMod}(S)$ el cual es el subgrupo de $\text{Mod}(S)$ generado por todas las clases que actúan de forma trivial en el espacio de fines de la superficie.

Por otra parte, el Teorema A también ha tenido aplicaciones en el estudio de la topología de $\text{Mod}^*(S)$. Como bien fue observado por J. Aramayona, P. Patel y N. Vlamis en [APV17], si dotamos al grupo $\text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ con la topología permutación, entonces $\Psi : \text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ es un isomorfismo de grupos topológicos, véase el Teorema 3.1.6. Como consecuencia de lo

anterior, se puede probar que si S es una superficie de tipo infinito entonces el grupo modular extendido $\text{Mod}^*(S)$ es un grupo topológico polaco (véase [APV17] ó el Teorema 3.1.7), no es localmente compacto (véase el Teorema 3.1.8) y es 0-dimensional², para todos estos resultados véase también [Vla19].

Recientemente se ha obtenido el análogo del Teorema de Ivanov para otros complejos simpliciales asociados a superficies de tipo infinito distintos al complejo de curvas. Por ejemplo, J. Aroca [Aro18] demostró que el grupo de automorfismos de determinados grafos simpliciales cuyos vértices son multicurvas (con propiedades específicas) en una superficie de tipo infinito es isomorfo al grupo modular extendido de la superficie. Otro ejemplo se encuentra en [AGK⁺19], en donde los autores demuestran que el grupo de automorfismo del *complejo de Torelli* es isomorfo al grupo modular extendido. Este resultado les permitió demostrar que el grupo conmensurador abstracto del *grupo de Torelli* (el subgrupo de $\text{Mod}(S)$ con acción trivial en el primer grupo de homología de S) es isomorfo al grupo modular extendido de la superficie.

En resumen, el estudio del complejo de curvas de una superficie ha sido importante en el estudio de la estructura algebraica y topológica de grupos modulares de superficies.

Otra faceta de cómo estudiar los grupos es a través de sus acciones en espacios hiperbólicos en el sentido de Gromov. Si un grupo discreto G actúa por isometrías en un espacio métrico geodésico X hiperbólico (en el sentido de Gromov), entonces un elemento $g \in G$ tiene acción *elíptica*, *parabólica* o *loxodrómica* en el espacio X si el *conjunto límite* $\Lambda(\langle g \rangle) \subset \partial X$ del subgrupo $\langle g \rangle < G$ tiene 0, 1 ó 2 elementos, respectivamente, donde ∂X es la *frontera de Gromov* de X , véase [Gro87, GdlH90, Osi18]. Esta es una forma de clasificar los elementos de un grupo a través de su acción en un espacio hiperbólico.

Un espacio métrico natural en donde el grupo modular de una superficie actúa por isometrías es en el grafo de curvas dotado de la métrica combinatoria que a cada par de vértices que forman una arista le asigna distancia 1. Si S es una superficie no esporádica entonces el grafo de curvas es no vacío, conexo, localmente infinito y hiperbólico, véase [MM99, HPW15, Bow14, Aou13]. Asimismo, el grafo de curvas $\mathcal{C}(S)$ tiene diámetro infinito si y sólo si S es de tipo finito [MM99]. Por el Teorema de clasificación de Thurston [Thu88] los elementos de $\text{Mod}(S_g^n)$ se clasifican como *periódicos*, *reducibles* ó *pseudo-Anosov*, véase [FLP12, FM12]. Gracias a esta clasificación, los elementos de $\text{Mod}(S_g^n)$ con acción elíptica en $\mathcal{C}(S_g^n)$ son los elementos periódicos y reducibles, no tiene elementos parabólicos y los elementos loxodrómicos son las clases de isotopía de homeomorfismos pseudo-Anosov, véase [MM99]. En cambio, si S es una superficie de tipo infinito, todos los elementos de $\text{Mod}(S)$ tienen acción elíptica en $\mathcal{C}(S)$, pues las órbitas de la acción son acotadas.

Aquí surge la pregunta natural, ¿los grupos modulares de superficies de tipo infinito admiten acciones por isometrías sobre espacios métricos geodésicos, hiperbólicos con órbitas no acotadas? Esta pregunta la han respondido K. Mann y K. Rafi [MR19] en gran generalidad. Para nuestra sorpresa, ellos demuestran que existen grupos modulares de superficies de tipo infinito que no admiten acciones en espacios geométricos con órbitas no acotadas. Esto marca una nueva diferencia entre estos grupos con los grupos modulares de superficies de tipo finito. Sin embargo, como veremos en los párrafos posteriores, cierta clase de grupos modulares de superficies de tipo infinito sí admiten acciones por isometrías en espacios geométricos con propiedades análogas al grafo de curvas de superficies de tipo finito. En adelante describimos el *grafo de lazos* $L(S; p)$ asociado a una superficie de tipo infinito S con $p \in S$. Este grafo resulta ser hiperbólico y de diámetro infinito. También, describimos el grupo $\text{Mod}(S; p)$ que actúa por isometrías sobre $L(S; p)$ y que está relacionado con el grupo modular $\text{Mod}(S)$ por medio de la sucesión exacta de Birman, véase la Ecuación (3).

Sea S una superficie de tipo infinito y $p \in S$, denotamos por $\text{Mod}(S; p)$ al grupo de todas las

²La topología de $\text{Mod}^*(S)$ tiene una base de abiertos y cerrados.

clases de isotopía relativa a $\mathbf{p}$ de homeomorfismos $S \rightarrow S$ que fijan a $\mathbf{p}$ y preservan la orientación de la superficie. Este grupo está relacionado con el grupo modular $\text{Mod}(S)$ por medio de la sucesión exacta de Birman:

$$1 \longrightarrow \pi_1(S, \mathbf{p}) \longrightarrow \text{Mod}(S; \mathbf{p}) \xrightarrow{F} \text{Mod}(S) \longrightarrow 1, \quad (3)$$

donde F es el homomorfismo que olvida la isotopía relativa a $\mathbf{p}$, véase la introducción al Capítulo 4 para más detalles.

Un lazo en S basado en $\mathbf{p}$ es una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ tal que su restricción al intervalo abierto $(0, 1)$ es un encaje topológico y $\alpha(0) = \mathbf{p} = \alpha(1)$. El *grafo de lazos* de S relativo a $\mathbf{p}$, denotado por $L(S; \mathbf{p})$, se define como el grafo simplicial abstracto cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todas las clases de isotopía relativa a $\mathbf{p}$ de lazos esenciales³ basados en $\mathbf{p}$; dos vértices generan una arista si tienen representantes disjuntos excepto en $\mathbf{p}$. Este grafo fue introducido por J. Bavard [Bav16] (motivada por las preguntas de D. Calegari en [Cal09a]) al estudiar el espacio de cuasimorfismos no triviales de $\text{Mod}(S^2 \setminus (K \cup \infty))$ con K un conjunto de Cantor contenido sobre el ecuador horizontal de S^2 . Notemos que haciendo $\mathbf{p} = \infty$ el grupo modular $\text{Mod}(S^2 \setminus (K \cup \infty))$ coincide con $\text{Mod}(S^2 \setminus K; \mathbf{p})$. En general, $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ coincide con $\text{Mod}(S \setminus \{\mathbf{p}\})$ si y solo si S no tiene ponchaduras.

El grafo de lazos $L(S; \mathbf{p})$ es conexo, hiperbólico (en el sentido de Gromov) y tiene diámetro infinito [Bav16, AFP17, FA19, DFV18]. Además, el grupo $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ actúa por isometrías sobre el grafo $L(S; \mathbf{p})$ dotado con la métrica combinatoria. De esta manera, un elemento en $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ se puede clasificar como *elíptico*, *parabólico* o *loxodrómico* de acuerdo a su acción en la frontera de Gromov $\partial L(S; \mathbf{p})$ del grafo de lazos $L(S; \mathbf{p})$. Otra de las aportaciones principales de esta tesis es al estudio de cierta clase de elementos de $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ con acción loxodrómica en el grafo de lazos. Para ello usamos la descripción de la frontera de Gromov de $L(S; \mathbf{p})$ descrita por J. Bavard y A. Walker en [BW18a].

J. Bavard y A. Walker en [BW18a] describen los elementos de $\partial L(S; \mathbf{p})$ como *cliques*⁴ cuyos vértices son clases de isotopía de *rayos que llenan* (high-filling rays) basados en $\mathbf{p}$. Luego, un elemento loxodrómico $f \in \text{Mod}(S; \mathbf{p})$ fija exactamente dos cliques $\mathcal{C}^-$ y $\mathcal{C}^+$ de *rayos que llenan* en $\partial L(S; \mathbf{p})$. En [BW18b], nuevamente J. Bavard y A. Walker demuestran que $0 < |\mathcal{C}^-| = |\mathcal{C}^+| < \infty$ (donde $|\cdot|$ denota el número de vértices) y definen el *peso* de f como $\omega(f) = |\mathcal{C}^-| = |\mathcal{C}^+|$. En este mismo trabajo, los autores puntualizan que los únicos ejemplos de elementos loxodróxicos en $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ que se conocían hasta ese momento eran:

1. El elemento loxodrómico $h \in S^2 \setminus (K \cup \{\infty\})$ definido por J. Bavard en [Bav16], donde K es un conjunto de Cantor contenido en el ecuador horizontal de la esfera S^2 . Este elemento no está en el grupo modular puro, no preserva ninguna subsuperficie de tipo topológico finito y tiene peso uno.
2. Clases definidas por homeomorfismos pseudo-Anosov con soporte en una subsuperficie de tipo finito S' de S que contiene a $\mathbf{p}$ en su interior, Teorema 8.3.1 en [BW18b].

Por esta razón, en el comentario 8.3.3 en [BW18b], los autores proponen construir ejemplos de elementos loxodróxicos de peso mayor que 1 que no preserven ninguna subsuperficie de tipo finito. Motivados por este comentario, en colaboración con F. Valdez [MV20] construimos elementos loxodróxicos en $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ con pesos arbitrarios y que satisfacen las propiedades requeridas, véase el Teorema D. La construcción de dichos elementos está inspirada en la construcción de Thurston-Veech de homeomorfismos pseudo-Anosov de superficies de tipo finito, véase [Thu88], [Vee89] o [FM12] para detalles acerca de esta construcción.

³Un lazo es esencial si no es homotópicamente trivial relativo a $\mathbf{p}$.

⁴Grafos completos.

Teorema D. Sea S una superficie de tipo infinito, $p \in S$ fijo y $m \in \mathbb{N}$. Sean $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ y $\beta = \{\beta_j\}_{j \in J}$ multicurvas en posición mínima cuya unión llena⁵ S tal que:

1. el grafo de configuración⁶ $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ es de valencia finita,
2. cada componente conexa D_k de $S \setminus \alpha \cup \beta$ es un polígono o un polígono ponchado⁷ con $n_k \leq N$ lados, para algún $N \in \mathbb{N}$ fijo, y
3. la componente conexa de $S \setminus \alpha \cup \beta$ que contiene a p es un $2m$ -polígono.

Si $T_\alpha, T_\beta \in \text{Mod}(S; p)$ son los giros de Dehn (positivos) a lo largo de las multicurvas α y β , respectivamente, entonces cualquier elemento $f \in \text{Mod}(S; p)$ en el semigrupo positivo generado por T_α y T_β^{-1} dado por una palabra en donde ambos generadores aparecen es un elemento loxodrómico de peso m para la acción de $\text{Mod}(S; p)$ sobre el grafo de lazos $L(S; p)$.

Similarmente como en la construcción de Thurston-Veech, la prueba descansa en encontrar una estructura plana sobre S en la cual T_α y T_β actúen por automorfismos afines. En el caso de superficies de tipo finito, esta estructura es única (hasta un reescalamiento) y está garantizada por el Teorema de Perron-Frobenius, véase el Teorema 4.3.1. Para superficies de tipo infinito, la existencia de la estructura plana sobre S la garantiza la existencia de funciones armónicas positivas del operador de adyacencia asociado al grafo $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Esto fue posible por el trabajo previo de P. Hooper en [Hoo15] sobre la dinámica de transformaciones infinitas de cambio de intervalo. Por este motivo hemos denominado a esta construcción la *construcción de Hooper-Thurston-Veech*. En contraste con superficies de tipo finito, existe una cantidad no numerable de estructuras planas sobre S que no están relacionadas hasta un reescalamiento. Hacemos notar también que la construcción de Hooper-Thurston-Veech es más general y aplica para una clase más grande de pares de multicurvas. Sin embargo, esta construcción es bastante más delicada y depende en gran medida del tipo de multicurvas que tomemos. Esto lo explicamos con detalle en la Sección 4.3. Véase también la Proposición 4.3.11 para una diferencia entre la construcción de Thurston-Veech y la construcción de Hooper-Thurston-Veech.

En el Teorema 4.1.2 demostramos que para toda superficie de tipo infinito S siempre existen pares de multicurvas como en el Teorema D, más aún, existe una cantidad no numerable de ellas. Esto asegura la existencia de suficientes elementos en $\text{Mod}(S; p)$ con acción loxodrómica en $L(S; p)$. Para la demostración, desarrollamos las *formas normales* de superficies de tipo infinito las cuales son una manera canónica de dibujar una superficie de tipo infinito. También hemos usado el Teorema D para mostrar otro fenómeno propio de los grupos modulares de superficies de tipo infinito. El Corolario 4.1.5 establece que para toda superficie de tipo infinito S existe una sucesión de elementos loxodróxicos en $\text{Mod}(S; p)$ que converge a un elemento elíptico. Lo anterior no es posible en grupos modulares de superficies de tipo finito, pues todos estos son grupos topológicos discretos.

Aún con el honesto esfuerzo de este trabajo, sigue abierto el problema de caracterizar los elementos de $\text{Mod}(S; p)$ con acción loxodrómica en el grafo de lazos $L(S; p)$. De acuerdo a la evidencia obtenida, nos aventuramos a formular la siguiente:

Conjetura. Si $f \in \text{Mod}(S; p)$ satisface que para cualquier lazo o rayo α basado en p , $f^n(\alpha)$ no es isotópico a α para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, entonces f tiene acción loxodrómica en el grafo de lazos $L(S; p)$.

⁵Una colección de curvas cerradas simples esenciales llena S si toda componente conexa complementaria de la unión de las curvas en la colección es homomorfa a un disco o un disco ponchado.

⁶El conjunto de vértices de este grafo es $I \cup J$ y existe una arista entre $i \in I$ y $j \in J$ por cada punto de intersección entre α_i y β_j .

⁷La frontera de cualquier componente conexa de $S \setminus \alpha \cup \beta$ está formada por arcos contenidos en las curvas $\alpha \cup \beta$, así, podemos pensar a estas como polígonos (topológicos).

La propiedad anterior (cuando α es una curva esencial) caracteriza a los elementos pseudo-Anosov del grupo modular de superficies de tipo finito, y estos a su vez, tienen acción loxodrómica en el grafo de curvas, vea [MM99].

La aplicación más importante hasta el momento del Teorema **D** es al espacio de cuasimorfismos no triviales del grupo $\text{Mod}(S; p)$. Describimos brevemente este concepto y su contexto. El espacio de cuasimorfismos no triviales $\widetilde{\text{QM}}(G)$ de un grupo discreto G se define como el kernel del morfismo de comparación $H_b^2(G; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(G; \mathbb{R})$ entre la cohomología real acotada y la cohomología real de G , véase [Fri17]. El concepto de cohomología acotada fue introducida por M. Gromov en su tratado [Gro82] para calcular el volumen simplicial de variedades Riemannianas orientadas con curvatura escalar acotada; para introducirse en el tema de cohomología acotada y su relación con otras áreas de las matemáticas véase [Cal09b, Fri17, Fuj09] y para su generalización a grupos topológicos localmente compactos véase [DM01].

Se ha demostrado que el cálculo de la dimensión de $\widetilde{\text{QM}}(G)$ está directamente relacionado con la estructura del grupo en cuestión. Por mencionar un ejemplo, si G es un grupo *promediable* (amenable group) entonces $\dim \widetilde{\text{QM}}(G) = 0$, véase el Corolario 3.8 en [Fri17]. En general, el cálculo de la dimensión del espacio de cuasimorfismos no triviales de un grupo determinado no es una tarea sencilla. Sin embargo, se han usado las acciones de grupos sobre espacios geométricos para demostrar que existe una gran variedad de clases de grupos con espacios de cuasimorfismos no triviales de dimensión infinita, véase la sección 2.9 en [Fri17] para una lista detallada.

Dentro de lo que nos concierne, M. Bestvina y K. Fujiwara demuestran que si la acción de un grupo G en un espacio hiperbólico es *no elemental* y contienen al menos dos elementos *independientes* y *anti-alineados* entonces $\dim \widetilde{\text{QM}}(G) = \infty$, véase el Teorema 1 en [BF02]. Como aplicación obtienen que si G es un subgrupo de $\text{Mod}(S_g^n)$ (donde S_g^n no es una superficie esporádica) con al menos dos elementos que tienen acción loxodrómica sobre el grafo de curvas $\mathcal{C}(S_g^n)$ entonces $\dim \widetilde{\text{QM}}(G) = \infty$. Inspirados en el trabajo de M. Bestvina y K. Fujiwara, J. Bavard y A. Walker demuestran que cualesquiera dos elementos de $\text{Mod}(S; p)$ con acción loxodrómica sobre el grafo de lazos con pesos distintos son *independientes* y *anti-alineados*, véase el Teorema 9.1.1 en [BW18b]. Por todo lo anterior, obtenemos de forma inmediata la siguiente aplicación del Teorema **D**:

Corolario. *Sea S una superficie de tipo infinito con $p \in S$ fijo. Si f_1 y f_2 son elementos loxodróxicos como en el Teorema **D** con pesos $m_1 \neq m_2$, respectivamente, entonces el espacio de cuasimorfismos no triviales de cualquier subgrupo de $\text{Mod}(S; p)$ que contiene a f_1 y f_2 tiene dimensión infinita.*

Como hemos mencionado, si S no tiene ponchaduras entonces $\text{Mod}(S; p)$ es isomorfo al grupo modular $\text{Mod}(S \setminus \{p\})$. Por consiguiente, el Teorema **D** y el corolario anterior aplican para los grupos modulares de superficies de tipo infinito con exactamente una ponchadura. Por otro lado, se conoce solo una superficie de tipo infinito para el cual el espacio de cuasimorfismos no triviales del grupo modular respectivo tiene dimensión cero. Esta superficie es $S^2 \setminus K$ con K un conjunto de Cantor contenido en el ecuador horizontal de la esfera S^2 . Esto es consecuencia del Teorema de la dualidad de Bavard, véase el Teorema 2.70 en [Cal09b], y de que $\text{Mod}(S^2 \setminus K)$ es uniformemente perfecto, véase [Cal09a]. Recientemente, K. Mann y K. Rafi [MR19] aplican el concepto de grupo *gruesamente acotado* (coarsely bounded), introducido por Rosendal en [Ros17], a grupos modulares de superficies de tipo infinito y demuestran que existen muchas superficies de tipo infinito cuyo grupo modular no admite acciones sobre espacios geométricos con órbitas no acotadas. Por lo tanto, en estos casos no es posible calcular la dimensión del espacio de cuasimorfismos usando los métodos de M. Bestvina y K. Fujiwara en [BF02]. Por mencionar algunos ejemplos que abarcan el trabajo de K. Mann y K. Rafi están $\text{Mod}(S^2 \setminus K)$ y $\text{Mod}(N)$ donde N es el Monstruo del lago Ness (la superficie de tipo infinito con exactamente

un fin el cual está acumulado por género). Hasta ahora permanece abierta la pregunta acerca de la dimensión del espacio de cuasimorfismos no triviales de $\mathbf{Mod}(\mathbf{N})$.

En conclusión, el estudio de los grupos modulares de superficies de tipo infinito ha sido bastante intenso en los últimos años, véase [AV20]. Estos grupos comparten ciertas propiedades con los grupos modulares de superficies de tipo finito, en algunas ocasiones acompañada de la generalización de algunas herramientas existentes en el estudio de los grupos modulares de superficies de tipo finito. Ejemplo de lo anterior son los Teoremas **A**, **B** y **C** mencionados arriba, véase nuevamente [AV20] para otros puntos de contacto.

Un problema central en la teoría de grupos modulares de superficies de tipo infinito, es la clasificación de los elementos de $\mathbf{Mod}(\mathbf{S})$ al estilo de Nielsen-Thurston. Una forma de obtener esta clasificación es por medio de la caracterización de los elementos elípticos, parabólicos y loxodrómicos de $\mathbf{Mod}(\mathbf{S})$ respecto a su acción en un espacio métrico geodésico hiperbólico. Es importante señalar que por el trabajo de K. Mann y K. Rafi [MR19], existen muchas superficies para las cuales todos los elementos del grupo modular son elípticos. Por lo tanto en estos casos no es posible dar una buena clasificación de los elementos de $\mathbf{Mod}(\mathbf{S})$ usando acciones en espacios métricos hiperbólicos. Sin embargo, si $\mathbf{S}$ tiene exactamente una ponchadura, el Teorema **D** representa un avance en el problema de clasificación, al exhibir una clase no numerable de elementos loxodrómicos en $\mathbf{Mod}(\mathbf{S})$ respecto a su acción en el grafo de lazos.

Recientemente, también se han estudiado otros grafos asociados a superficies de tipo infinito análogos a los que existen para superficies de tipo finito. Algunos ejemplos son: el *grafo de multicurvas* (con restricciones topológicas y geométricas) el cual en la mayoría de los casos es hiperbólico y tiene diámetro infinito, para detalles véase [FP15] y [Aro18]. El *grafo de curvas no separadoras* de una superficie de tipo infinito con género finito y positivo es hiperbólico y tiene diámetro infinito, véase [Ras20]. El *grafo de arcos* relativo a un conjunto finito de puntos marcados es cuasi-isométrico al grafo de lazos y por lo tanto es hiperbólico y de diámetro infinito, véase [AV18] y [AFP17]. Finalmente, en [DFV18] los autores caracterizan los grafos $\mathbf{Mod}(\mathbf{S})$ -invariantes con órbitas no acotadas cuyos vértices son curvas cerradas simples esenciales. En cada caso, sigue abierto el estudio de la acción del grupo modular en la frontera de Gromov. Este estudio tendría potenciales aplicaciones al problema de clasificación de los elementos de $\mathbf{Mod}(\mathbf{S})$.

Finalmente, no cabe duda que el estudio de los grupos modulares de superficies de tipo infinito seguirá siendo importante en los próximos años prometiendo resultados novedosos e impactantes. Recomendamos ver [LPRT19] en donde se puede encontrar una lista actualizada de los problemas abiertos en el área de grupos modulares de superficies de tipo infinito.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Superficies topológicas

Una *superficie topológica* es una 2-variedad Hausdorff y segundo numerable. Por definición una superficie topológica no tiene frontera, sin embargo, habrán resultados que son fácilmente extrapolados a superficies con frontera. Especificaremos esto en su momento. En este trabajo cuando hablemos de una superficie nos referimos a una superficie topológica conexa, orientable y sin frontera.

Por el teorema de clasificación de superficies [Lef25, Ric63], una superficie tiene asociado dos invariantes topológicos que la caracterizan completamente hasta homeomorfismos: el género $g(S) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y un par de espacios topológicos anidados $\text{Ends}(S) \supseteq \text{Ends}_\infty(S)$ llamados *espacio de fines* y *espacio de fines acumulados por género* de S , respectivamente.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Kerékjártó, [Ric63]). *Sean S y S' dos superficies. Entonces S es homeomorfa a S' si y sólo si $g(S) = g(S')$ y los espacios $\text{Ends}(S) \supseteq \text{Ends}_\infty(S)$ y $\text{Ends}(S') \supseteq \text{Ends}_\infty(S')$ son homeomorfos como espacios anidados¹.*

Nota 1.1.2. El Teorema de Kerékjártó es más general e incluye a las superficies con frontera y a las superficies no orientables. En estos casos es necesario agregar otros invariantes topológicos adicionales que describen su comportamiento al infinito.

Brevemente describimos el espacio de fines y el espacio de fines acumulados por género de una superficie.

Sea S una superficie y consideramos $A(S)$ el conjunto de todas las sucesiones anidadas $(U_i)_{i \geq 1} := U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \dots$ de subconjuntos abiertos, no vacíos, conexos y con frontera topológica compacta en S tales que $\bigcap_i \overline{U_i} = \emptyset$. Dos sucesiones $(U_i)_{i \geq 1}, (U'_j)_{j \geq 1}$ en $A(S)$ están relacionadas si para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $U_i \supsetneq U'_j$, y viceversa. Denotamos con $\text{Ends}(S)$ al conjunto de todas las clases de equivalencia de elementos en $A(S)$. Los elementos de $\text{Ends}(S)$ se escriben como $[U_i]$.

Dado un subconjunto abierto y conexo U de S , consideramos

$$U^* := \{[U_i] \in \text{Ends}(S) : \text{existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \supsetneq U_j\}. \quad (1.1)$$

La colección de conjuntos de la forma $U \sqcup U^*$ define una base para la topología de $\hat{S} := S \cup \text{Ends}(S)$. El siguiente teorema describe la topología de $\hat{S}$ y del espacio de fines de una superficie.

Teorema 1.1.3 ([Ray60]). *Sea S una superficie y $\hat{S} := S \cup \text{Ends}(S)$. Entonces*

¹Es decir, existe un homeomorfismo $f : \text{Ends}(S) \rightarrow \text{Ends}(S')$ tal que la $f(\text{Ends}_\infty(S)) = \text{Ends}_\infty(S')$.

1. $\hat{S}$ es Hausdorff, conexo, localmente conexo y compacto,
2. $\text{Ends}(S)$ es cerrado, no tiene puntos interiores en $\hat{S}$ y es totalmente desconexo, y
3. si $U \subseteq \hat{S}$ es abierto y conexo, entonces $\hat{S} \setminus U$ es conexo.

Al espacio topológico $\hat{S} = S \cup \text{Ends}(S)$ se le llama la *compactificación de Freudenthal* de la superficie S . Por el Teorema 1.1.3, el espacio $\text{Ends}(S) \subset \hat{S}$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Este espacio es llamado el *espacio de fines* de S y nos referimos a un elemento particular de $\text{Ends}(S)$ como un *fin* de la superficie S .

Un fin $[U_i] \in \text{Ends}(S)$ de S es *plano* si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que U_i tiene género 0. Se denota por $\text{Ends}_{\infty}(S)$ al *espacio de fines acumulados por género* de S el cual se define como el conjunto de todos los fines no planos de S . El espacio $\text{Ends}_{\infty}(S)$ es un subespacio cerrado de $\text{Ends}(S)$. Por lo tanto, los espacios $\text{Ends}_{\infty}(S) \subseteq \text{Ends}(S)$ son homeomorfos a dos subconjuntos cerrados anidados del conjunto de Cantor $2^{\mathbb{N}}$, véase [Ric63]. Tenemos el siguiente teorema de realización.

Teorema 1.1.4 ([Ric63]). *Sean $F \supseteq F'$ dos subconjuntos cerrados anidados del conjunto de Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Entonces existe una superficie S con espacio de fines y espacio de fines acumulado por género homeomorfos a F y F' , respectivamente.*

Otro subconjunto del espacio de fines que usaremos constantemente es el espacio de *fines planos aislados* al cual nos referimos por $\text{IPEnds}(S)$. Usualmente, los elementos de $\text{IPEnds}(S)$ se piensan como *pochaduras* de la superficie.

Definición 1.1.5 (Superficies de tipo finito e infinito). Sea S una superficie topológica. Decimos que S es de *tipo finito* si tiene grupo fundamental finitamente generado. De lo contrario, decimos que S es de *tipo infinito*.

Una superficie topológica S es de tipo finito si y solo si $g(S) < \infty$ y $\text{Ends}(S)$ es un conjunto finito. En este caso S se denota por S_g^n donde $g = g(S)$ y n es la cardinalidad del conjunto $\text{Ends}(S)$. Si $n = 0$ entonces S_g^0 es la superficie compacta de género g a la cual nos referimos por S_g . La superficie S_g^n se puede obtener de S_g haciendo $S_g^n = S_g \setminus P$ donde $P \subset S_g$ tiene cardinalidad n . Usualmente en la literatura los elementos de P se conocen como las *ponchaduras* de S_g^n . En general, a los fines planos aislados de una superficie se llaman *ponchaduras* de la superficie.

Definición 1.1.6 (Complejidad y superficies esporádicas). La *complejidad* de una superficie de tipo finito $S = S_g^n$ es $\kappa(S) := 3g - 3 + n$. Decimos que S es una superficie *esporádica* si $\kappa(S) \leq 1$.

Nota 1.1.7. Notemos que las únicas superficies esporádicas son: $S_0^{n \leq 4}$, S_1 y S_1^1 .

Si S es una superficie de tipo infinito entonces el conjunto de fines planos aislados $\text{IPEnds}(S)$ es un subespacio propio, numerable y discreto de $\text{Ends}(S)$. Usualmente, los elementos de este espacio son considerados como *ponchaduras* o bien como puntos marcados en la superficie. En la Figura 1.1 se muestran algunos ejemplos de superficies de tipo infinito.

En algunas demostraciones consideramos superficies con frontera, por ello introducimos la siguientes definiciones y notación. Dada una superficie S posiblemente con frontera no vacía, denotamos con ∂S a la frontera de S . Definimos y denotamos el *interior* de S por $\text{int}(S) := S \setminus \partial S$.

Una *curva cerrada simple* en S es un encaje topológico $S^1 \hookrightarrow S$. Por brevedad diremos *curva* para referirnos a una curva cerrada simple.

En adelante, cuando consideremos superficies con frontera asumiremos que las componentes conexas de ∂S son curvas (cerradas simples) en la superficie.

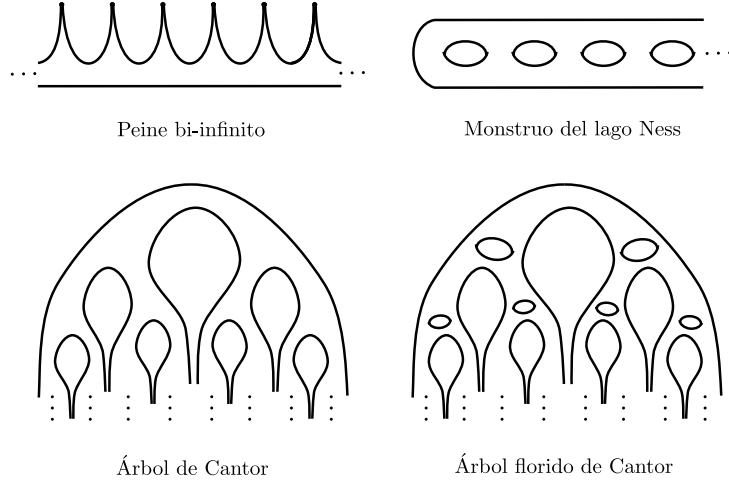


Figura 1.1: Superficies de tipo infinito.

Nota 1.1.8 (Superficies de tipo finito con frontera). Toda superficie con frontera y grupo fundamental finitamente generado está completamente determinada por el género $g \geq 0$, el número de ponchadura $n \geq 0$ en la superficie y el número de componentes de frontera $b \geq 0$, véase [Ric63]. Estas superficies se denotan por $S_{g,b}^n$. Notemos que el interior de $S_{g,b}^n$ es una superficie sin frontera homeomorfa a S_g^{n+b} . Definimos la *complejidad* de $S_{g,b}^n$ como $\kappa(\text{int}(S_{g,b}^n))$.

Definición 1.1.9 (Curva esencial). Sea S una superficie posiblemente con frontera. Decimos que una curva α en S es *esencial* si no es isotópica a un punto, a una ponchadura o a una componente de frontera de S . Si $S \setminus \alpha$ es conexa entonces decimos que α es una curva *no separadora*, de lo contrario, llamamos a α curva *separadora*.

Ahora definimos el concepto de *saturación principal* de una superficie de tipo infinito por subsuperficies de tipo finito. El uso de este concepto será recurrente en este escrito, ya que algunos resultados válidos para superficies de tipo finito se pueden inducir a superficies de tipo infinito por medio de saturaciones principales.

Definición 1.1.10 (Saturación principal). Sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subsuperficies con frontera de una superficie de tipo infinito S (posiblemente con frontera no vacía). Decimos que $\{S_i\}$ es una *saturación principal* de S si $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ y para todo $i \in \mathbb{N}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\text{int}(S_i)$ es una superficie de tipo finito,
2. $\text{int}(S_i)$ está contenido en $\text{int}(S_{i+1})$,
3. $\partial S_i \setminus \partial S$ es una unión disjunta finita de curvas esenciales separadoras en S , y
4. el interior de cada componente conexa de $S_{i+1} \setminus \overline{S_i}$ tiene complejidad al menos 4.

Dado que una superficie es σ -compacto, las saturaciones principales siempre existen. En la Figura 1.2 se muestra un ejemplo de una saturación principal en el *monstruo del lago Ness*, es decir, la superficie de tipo infinito con exactamente un fin el cual es acumulado por género.

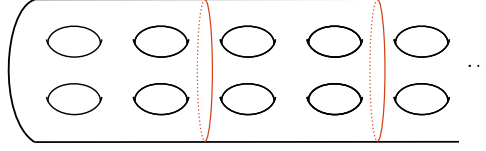


Figura 1.2: Una saturación principal en el monstruo del lago Ness.

1.2. Curvas, arcos y multicurvas

En esta sección introducimos la noción de arco esencial en una superficie S de tipo infinito con puntos finales en $\text{Ends}(S)$ (no necesariamente en el conjunto de punchaduras $\text{IPEnds}(S)$). Todo el discurso de esta sección está encaminado en dar la prueba de la Proposición 1.2.14 la cual afirma que si S es una superficie hiperbólica de primer tipo entonces todo arco esencial en S tiene un único representante geodésico en su clase de isotopía. Este resultado aparece en el Apéndice del trabajo [BW18b] de J. Bavard y A. Walker, aquí damos una demostración alternativa.

Definición 1.2.1 (Arco esencial). Un *arco simple* en una superficie S es un encaje $\beta : (0, 1) \hookrightarrow S$ con extensión continua $\hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow \hat{S} = S \cup \text{Ends}(S)$ tal que $\hat{\beta}(0), \hat{\beta}(1) \in \text{Ends}(S)$. Llamamos a $\hat{\beta}(0)$ y $\hat{\beta}(1)$ los *puntos finales* de β . También, decimos que un arco β en S es *esencial* si $\hat{\beta}$ no es isotópico, relativo a sus puntos finales, a un punto en $\hat{S}$.

Nota 1.2.2 (Arcos en superficies con frontera). Un arco en una superficie con frontera es una función continua $\beta : [0, 1] \rightarrow S$ tal que la restricción de β al intervalo $(0, 1)$ es un encaje cuya imagen está completamente contenida en $\text{int}(S)$, y $\beta(0), \beta(1) \in \partial S$. Un arco es *esencial* si no es isotópico a un arco contenido en ∂S . Recordemos que las isotopías son tomadas relativas a la frontera de S .

Decimos que dos arcos o curvas esenciales α y β en una superficie S forman un *bígono* si existe un disco $D \subset S$ cuya frontera está formada por dos arcos, uno contenido en α y el otro contenido en β , véase la Figura 1.3.

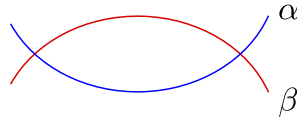


Figura 1.3: Bígono formado por α y β .

Definición 1.2.3 (Posición mínima). Dos arcos o curvas esenciales en una superficie están en *posición mínima* si no forman bígono.

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son clases de isotopía de arcos o curvas esenciales en una superficie S , el *número de intersección geométrica* de $\mathbf{a}$ con $\mathbf{b}$ se define por

$$i(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \inf\{|\alpha \cap \beta| : \alpha \in \mathbf{a}, \beta \in \mathbf{b}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \quad (1.2)$$

Lema 1.2.4 (Sección 1.2 en [FM12], Lema 2.5 [CB88]). Sea S una superficie y α, β curvas o arcos esenciales con ambos puntos finales en $\text{IPEnds}(S)$. Entonces β es isotópico a β' , por medio de una isotopía de S , que está en posición mínima con α . Más aún, α y β están en posición mínima si y solo si $|\alpha \cap \beta| = i([\alpha], [\beta]) < \infty$.

Todo arco esencial en S con ambos puntos finales en $\text{IPEnds}(S)$ es propio² pues está soportado en una subsuperficie de tipo finito de S . Lo mismo se puede afirmar para cualquier curva esencial en S .

Lema 1.2.5 (Arcos esenciales son propios). *Sea S una superficie de tipo infinito. Entonces todo arco esencial en S es propio.*

Demostración. Sea $\alpha : (0, 1) \rightarrow S$ un arco esencial en S , $K \subset S$ subconjunto compacto de S y $U := S \setminus K$. Entonces $U \sqcup U^* \subset \hat{S}$ (véase la Ecuación 1.1) es una vecindad abierta que contiene a $\hat{\alpha}(0)$ y $\hat{\alpha}(1)$ en su interior. Por la continuidad de $\hat{\alpha}$, existen $1 > t > s > 0$ tales que $\hat{\alpha}([0, s]), \hat{\alpha}([t, 1]) \subset U \sqcup U^*$. Por lo tanto, $\alpha^{-1}(K) = \hat{\alpha}^{-1}(K) \subseteq [s, t]$ es compacto. $\square$

Sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una saturación principal de una superficie de tipo infinito S , véase la Definición 1.1.10. Para cada $i \in \mathbb{N}$ denotamos por B_i al conjunto de todas las curvas frontera de S_i y hacemos $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$. Por definición, para $i \neq j$ tenemos que $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Lema 1.2.6 (Posición mínima de arcos respecto a saturaciones principales). *Sea S una superficie de tipo infinito y $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una saturación principal de S . Entonces todo arco esencial α en S es homotópico a un arco α' , por medio de una isotopía de S , relativa a ∂S , tal que α' está en posición mínima con toda curva en B .*

Demostración. Si ambos puntos finales de α están en $\text{IPEnds}(S)$ entonces α intersecta un número finito de curvas en B . Aplicando el Lema 1.2.4 obtenemos el resultado.

Supongamos que al menos un punto final de α no es una ponchadura de S . Por el Lema 1.2.5, $\alpha \subset S$ es propio. Así, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\alpha \cap \partial S_i$ tiene cardinalidad finita.

Ahora construimos una familia de isotopías ambientes $\{H_i : S \times I \rightarrow S\}_{i \in \mathbb{N}}$ que nos permitirán construir una isotopía ambiente $H : S \times I \rightarrow S$ con $\alpha' := H(\alpha, 1)$ en posición mínima con todos los elementos de B . Hagamos $\alpha_0 := \alpha$ y tomemos $m_1 \in \mathbb{N}$ el mínimo número natural para el cual todo bígono que forma α con ∂S_1 está completamente contenido en S_{m_1} . Por el Lema 1.2.4 aplicado a S_{m_1} , existe una isotopía ambiente $H_1 : S \times I \rightarrow S$ rel. $S \setminus S_{m_1}$ tal que $H_1(-, 0) = \text{Id}_S$, $H_1|_{\partial S_1 \times \{1\}} = \text{Id}|_{\partial S_1}$ y $H_1(\alpha_0, 1)$ está en posición mínima con todas las curvas en B_1 . Definamos $\alpha_1 := H_1(\alpha_0, 1)$.

Similarmente, tomemos $m_2 \geq m_1$ de tal manera que todo bígono entre α_1 y ∂S_2 esté contenido completamente en S_{m_2} . Usando un argumento similar al de arriba aplicado a $S \setminus S_2$, podemos construir una isotopía ambiente $H_2 : S \times I \rightarrow S$ rel. $S \setminus S_{m_2}$ tal que $H_2|_{\overline{S_1} \times I} = H_1|_{\overline{S_1} \times I}$, $H_2|_{(S \setminus S_1) \times \{0\}} = \text{Id}|_{S \setminus S_1}$, $H_2|_{\partial S_2 \times \{1\}} = \text{Id}|_{\partial S_2}$ y $\alpha_2 := H_2(\alpha_1, 1)$ está en posición mínima con todas las curvas en $B_2 \cup B_1$.

De forma inductiva, para cada $n \geq 3$ construimos la isotopía ambiente $H_n : S \times I \rightarrow S$ rel. $S \setminus S_{m_n}$ que satisface las propiedades siguientes:

1. $H_n|_{\overline{S_m} \times I} = H_m|_{\overline{S_m} \times I}$ para todo $m < n$,
2. $H_n|_{(S \setminus S_{n-1}) \times \{0\}} = \text{Id}|_{S \setminus S_{n-1}}$,
3. $H_n|_{\partial S_n \times \{1\}} = \text{Id}|_{\partial S_n}$, y
4. $\alpha_n := H_n(\alpha_{n-1}, 1)$ está en posición mínima con toda curva en B_m para todo $m \leq n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $g_n := H_n(-, 1) \in \text{Homeo}^+(S)$. Por la condición 1 la función

$$\begin{aligned} g : S &\rightarrow S \\ s \in S_n &\mapsto g_n(s), \end{aligned}$$

²Una función continua es propia si la imagen inversa de todo conjunto compacto es compacto.

define un homeomorfismo de S que preserva la orientación. También, por la condición 4, $g(\alpha)$ está en posición mínima con todas las curvas en B . Ahora veamos que g es homotópica a Id_S . En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \zeta_n: \quad \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1} \right] &\rightarrow [0, 1] \\ t &\mapsto n(n+1) \left(t - \frac{n-1}{n} \right). \end{aligned}$$

Por las condiciones 1 y 2 sobre las homotopías $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tenemos que la aplicación $H : S \times I \rightarrow S$ dada por

$$H(s, t) = \begin{cases} H_n(s, \zeta_n(t)) & \text{si } t \in \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1} \right], \\ g(s) & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

define una homotopía ambiente de S con $H(-, 0) = \text{Id}_S$ y $H(-, 1) = g$. $\square$

Definición 1.2.7 (Colecciones de curvas localmente finitas). Una colección de curvas o arcos esenciales L en una superficie S es *localmente finita* si todo punto en S tiene una vecindad abierta que intersecta a un número finito de curvas en L .

Dos colecciones de curvas o arcos esenciales L y L' localmente finitas en una superficie S están en *posición mínima* si para todo $l \in L$ y todo $l' \in L'$, l y l' están en posición mínima.

Definición 1.2.8 (Multicurva). Una *multicurva* en una superficie S es una colección de curvas esenciales localmente finita tal que todos sus elementos son disjuntos y no isotópicos a pares. A una *multicurva maximal* respecto a la inclusión le llamamos *descomposición en pantalones* de S .

Si $S = S_g^n$ es una superficie de tipo finito y α es una descomposición en pantalones de S_g^n entonces α tiene exactamente $\kappa(S_g^n) - 1$ elementos, más aún, $S \setminus \alpha$ es la unión disjunta de $\kappa(S_g^n) - g + 1$ superficies cada una homeomorfa a S_0^3 . En cambio, una descomposición en pantalones α de una superficie de tipo infinito S tiene cantidad infinita (numerable). De forma similar, cada componente conexa de $S \setminus \alpha$ es una superficie homeomorfa a S_0^3 . Comúnmente, a S_0^3 se le llama *pantalón* (topológico).

Nota 1.2.9. En superficies de tipo infinito existen colecciones maximales de curvas esenciales (respecto a la inclusión) disjuntas y no isotópicas a pares para las cuales su complemento en la superficie no es una colección disjunta de superficies homeomorfas a S_0^3 , véase la Figura 3.6.2 en [Hub06] para un ejemplo. En este caso, la colección de curvas mencionada no es localmente finita.

Una superficie S es *hiperbólica* si está dotada de una estructura hiperbólica. Denotemos por μ a la métrica hiperbólica sobre S y llamemos S_μ a la superficie hiperbólica S con la métrica μ . Se dice que S_μ es *convexo* si para todo par de puntos $x, y \in S_\mu$ y todo segmento δ en S_μ con puntos finales x, y es isotópico, relativo a $\{x, y\}$, a un segmento geodésico. Si S_μ es convexo entonces el cubriente universal de S_μ , $\widetilde{S}_\mu$, es isométrico a un subconjunto convexo $C \subseteq \mathbb{D}$, donde $\mathbb{D}$ es el disco de Poincaré, el grupo fundamental de S_μ , $\pi_1(S_\mu) < \text{Isom}^+(\mathbb{D})$, actúa de forma libre y propiamente discontinua sobre C y $S_\mu = C/\pi_1(S_\mu)$, véase [CME06].

Un *pantalón geométrico* es una superficie (posiblemente con frontera) cuyo interior es homeomorfo a un pantalón (topológico) el cual está equipado con una estructura hiperbólica convexa y tiene frontera geodésica. La Figura 1.4 muestra los posibles casos en que puede aparecer un pantalón geométrico.

Definición 1.2.10 (Descomposición en pantalones geométricos). Una descomposición en pantalones $P := \{\alpha_i\}_{i \geq 1}$ de una superficie hiperbólica S_μ es *geométrico* si todas las curvas de P son geodésicas cerradas simples en S_μ y la cerradura en S_μ de cada componente conexa de $S_\mu \setminus \left(\bigcup_{i \geq 1} \alpha_i \right)$ es isométrico a un pantalón geométrico.

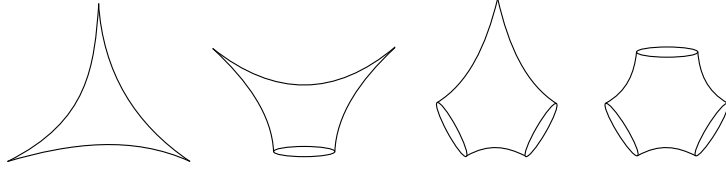


Figura 1.4: Pantalones geométricos.

Una superficie hiperbólica convexa S_μ es *Nielsen-convexo* si todo punto $z \in S_\mu$ pertenece a un segmento geodésico con puntos finales en geodésicas cerradas simples en S_μ . Este concepto fue introducido en [ALP⁺11] en el estudio de los diferentes espacios de Teichmüller asociados a una superficie de tipo infinito. El resultado que necesitamos aquí es el siguiente:

Teorema 1.2.11 (Teorema 4.5 en [ALP⁺11]). *Sea S_μ una superficie hiperbólica. Entonces S_μ es Nielsen-convexo si y solo si toda descomposición en pantalones (topológico) de S_μ es isotópica a una descomposición en pantalones geométrico.*

Nota 1.2.12. Una superficie hiperbólica S_μ es de *primer tipo* si el conjunto límite de $\pi_1(S_\mu) < \text{Iso}^+(\mathbb{D})$, $\Lambda(\pi_1(S_\mu))$, coincide con $\partial\mathbb{D}$, es decir, $\Lambda(\pi_1(S_\mu)) = \partial\mathbb{D}$. Si S_μ es una superficie hiperbólica de primer tipo entonces S_μ es Nielsen-convexo.

Por la nota anterior, tenemos que la demostración de la siguiente proposición es completamente análoga al del Lema 2.6 en [CB88].

Proposición 1.2.13. *Sea S_μ una superficie hiperbólica de primer tipo, P_1 y P_2 dos descomposiciones en pantalones de S_μ distintas. Entonces existe $f \in \text{Homeo}^+(S_\mu)$ isotópico a Id_{S_μ} tal que $f(P_1)$ y $f(P_2)$ son ambas descomposiciones en pantalones geométricos de S_μ , en particular, están en posición mínima.*

Toda curva cerrada simple esencial en S_μ tiene un único representante geodésico en su clase de isotopía. Lo mismo se puede afirmar para cualquier arco esencial cuyos puntos finales son punchaduras en S_μ (véase la Proposición 1.6 y el comentario en la sección 1.2.7 en [FM12]). A continuación, mostramos que si S_μ es una superficie hiperbólica de primer tipo entonces podemos afirmar que todo arco esencial (cuyos puntos finales no necesariamente son punchaduras en S_μ) tiene un único representante geodésico en su clase de isotopía. Este hecho será crucial para dar una descripción precisa de los elementos en la frontera de Gromov del grafo de lazos en el Capítulo 4.

Proposición 1.2.14 (Representante geodésico de arcos). *Sea S_μ una superficie hiperbólica de primer tipo. Entonces todo arco esencial en S_μ tiene un único representante geodésico en su clase de isotopía.*

Demostración. Sea γ un arco esencial en S_μ . Si S_μ es de tipo finito o ambos puntos finales de γ son punchaduras en S_μ véase Sección 1.2 de [FM12].

Supongamos que la superficie S_μ es de tipo infinito. Consideremos los casos (i) ambos puntos finales de γ no son cúspides de S_μ (ii) exactamente un punto final de γ es una cúspide de S_μ .
(i) ambos puntos finales de γ no son cúspides en S_μ . Sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una saturación principal de S_μ y B el conjunto de curvas frontera de esta saturación. Completando B a una descomposición en pantalones P de S_μ y usando el Teorema 1.2.11 aplicado a P , podemos asumir que todas las curvas en B son geodésicas cerradas simples en S_μ . Luego, por el Lema 1.2.6, podemos poner a γ en posición mínima con todas las curvas en B .

Consideremos $\pi: \mathbb{D} \rightarrow S_\mu$ el cubriente universal de S_μ . Tomemos $\tilde{\gamma} \subset \mathbb{D}$ un levantamiento de γ . Veamos que $\tilde{\gamma}$ define dos puntos distintos en la frontera de $\mathbb{D}$. Los argumentos que usamos son los mismos de Levitt en su prueba del Lema 1 en [Lev83]. Primero, dado que γ está en posición mínima con todas las curvas en B , se tiene que $\tilde{\gamma}$ intersecta a lo más una vez a cualquier componente conexa de $\pi^{-1}(B)$. Notemos que γ intersecta un número infinito de curvas en B . Puesto que S_μ es de primer tipo y las curvas en B son disjuntas a pares tenemos que los puntos finales de $\tilde{\gamma}$ están en $\partial\mathbb{D}$. Además, dado que γ no es esencial los puntos finales de $\tilde{\gamma}$ son distintos. Llamemos $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ a los puntos finales de $\tilde{\gamma}$.

Sea $\tilde{\delta}$ la única geodésica en $\mathbb{D}$ con puntos finales $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$. Mostremos que $\delta := \pi(\tilde{\delta})$ es una geodésica simple en S_μ en la clase de isotopía de γ . La demostración de lo anterior esta basada en la siguiente afirmación; existe una saturación principal $\{S'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de S_μ y una sucesión $\{\delta_n: \mathbb{R} \rightarrow S_\mu\}_{n \geq 0}$ de arcos esenciales en S_μ tales que:

1. $\delta_0 := \gamma$,
2. para todo $n \geq 0$, δ_n es isotópica a δ_{n+1} ,
3. para todo $n \geq 0$, δ_n está en posición mínima con todas las curvas frontera de $\{S'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$,
4. existen sucesiones $0 < t_1 < t_2 < \dots$ y $0 > t'_1 > t'_2 > \dots$ tales que para todo $n \geq 1$, $\delta_n|_{[t'_n, t_n]}$ es un segmento geodésico simple en S_μ contenido en S'_{n+1} con $\delta_n(t'_n), \delta_n(t_n) \in \partial S'_n$.

Por el inciso 3, para cada $n \geq 0$, δ_n tiene un único levantamiento $\tilde{\delta}_n$ en $\mathbb{D}$ con puntos finales $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$. Este hecho y el inciso 4 implica que la sucesión de segmentos geodésicos simples $\{\delta_n|_{[t'_n, t_n]}\}$ converge a δ . Por consiguiente, δ es simple. Finalmente, por los incisos 1 y 2, γ es isotópico a δ . En resumen, δ es una geodésica simple en la clase de isotopía de γ . La unicidad se obtiene inmediatamente.

Ahora demostramos la afirmación de arriba. Sin perdida de generalidad supongamos que $\gamma(0) \in S_1$ y hagamos $\delta_0 = \gamma$. Sea $t_1 > 0$ tal que $\gamma(t_1) \in \partial S_1$ y $\gamma(t) \in S_\mu \setminus \overline{S_1}$ para todo $t > t_1$. Esto lo podemos hacer pues γ es propio y S_1 es una superficie de tipo finito cuyas curvas frontera son separadoras en S_μ . De forma similar escogemos $t'_1 < 0$. Sea $S'_1 := S_1$ y definamos S'_2 como la mínima subsuperficie en $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\gamma([t'_1, t_1]) \subset S'_2$. Luego, dado que S_μ es una superficie de primer tipo, en particular es Nielsen-convexo, $\gamma|_{[t'_1, t_1]}$ es isotópico (*rel.* $\{\gamma(t'_1), \gamma(t_1)\} \cup S_\mu \setminus S'_2$) a un segmento geodésico simple. Completamos la isotopía anterior a una isotopía global sobre S_μ para obtener un arco esencial δ_1 con las condiciones deseadas. Inductivamente construimos δ_n para todo $n \geq 2$ usando el procedimiento anterior.

Caso ii) exactamente un punto final p de γ es una cúspide de S_μ . Supongamos que $\gamma(-\infty) = p$. Similarmente al caso i), construimos la geodésica δ . La construcción de la saturación principal $\{S'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y de la sucesión $\{\delta_n\}$ de arcos simples en la afirmación del caso i) es cierta usando intervalos de la forma $(-\infty, t_n]$. El resto de la prueba es análoga al caso i). $\square$

Terminamos esta sección con una definición que usaremos constantemente en este escrito.

Definición 1.2.15 (Colección de curvas y arcos que llenan una subsuperficie). Sea S una superficie, $N \subseteq S$ una subsuperficie, y A una colección de curvas y arcos en S contenidos en N . Decimos que A *llena* N si $\text{int}(N \setminus A)$ es la unión disjunta de discos y discos ponchados.

1.3. El grupo modular de una superficie

El grupo modular de superficies de tipo finito ha sido ampliamente estudiado en las últimas décadas, véase por ejemplo [FM12] y las referencias en este libro. En cambio, la literatura de

grupos modulares de superficies de tipo infinito ha sido poco desarrollada. Uno de los objetivos de esta tesis es contribuir en el estudio de los grupos modulares de superficies de tipo infinito. En esta sección introducimos el grupo modular para superficies en general así como algunos de sus subgrupos. Explicamos las diferencias y similitudes que comparten los grupos modulares de superficies de tipo finito con los grupos modulares de superficies de tipo infinito. En la literatura reciente a estos últimos se les puede encontrar con el nombre de *big mapping class groups*.

Dada una superficie S , denotamos con $\text{Homeo}(S)$ al conjunto de todos los homeomorfismos $S \rightarrow S$ incluyendo los que invierten la orientación de S . Dotamos a $\text{Homeo}(S)$ con la topología compacto-abierto el cual lo hace un grupo topológico con la operación composición de funciones.

También, definimos $\text{Homeo}^+(S)$ como el grupo de todos los homeomorfismos $S \rightarrow S$ que preservan la orientación de S . Notemos que $\text{Homeo}^+(S)$ es un subgrupo cerrado de $\text{Homeo}(S)$ de índice dos.

Con $\text{Homeo}_0(S)$ denotamos a la componente conexa por trayectorias de $\text{Homeo}^+(S)$ que contiene a Id_S . Notemos que $\text{Homeo}_0(S)$ es un subgrupo normal de $\text{Homeo}^+(S)$.

Nota 1.3.1. En [Yag00], T. Yagasaki mostró que el espacio $\text{Homeo}_0(S)$ de una superficie de tipo infinito S es una $\mathbf{l}_2$ -variedad homotópicamente trivial, véase también [BMSY14, BMR⁺13]. Si S es una superficie de tipo finito posiblemente con frontera diferente de S_0 , S_0^1 , S_0^2 , S_1 , el disco cerrado, el anillo cerrado o el disco cerrado ponchado entonces el espacio $\text{Homeo}_0(S)$ es contraíble, véase el Teorema 1.14 en [FM12] y referencias citadas allí.

Ahora introducimos el objeto principal de estudio.

Definición 1.3.2 (Grupo modular y grupo modular extendido). Dada S una superficie, el *grupo modular* de S se define por

$$\text{Mod}(S) := \text{Homeo}^+(S)/\text{Homeo}_0(S), \quad (1.3)$$

y el *grupo modular extendido* de S se define por

$$\text{Mod}^*(S) := \text{Homeo}(S)/\text{Homeo}_0(S). \quad (1.4)$$

Nota 1.3.3. Equivalentemente, $\text{Mod}^*(S)$ es el grupo de todas las clases de isotopía de homeomorfismos $S \rightarrow S$ que fijan puntualmente ∂S . Una afirmación similar es cierto para $\text{Mod}(S)$.

Los grupos modulares de superficies de tipo finito han sido ampliamente estudiados y se conoce mucho acerca de ellos, como ejemplo basta ver [FM12] en donde se pone de manifiesto la importancia de estos grupos por su relación con distintas áreas de las matemáticas. Por otro lado, solo recientemente el estudio de los grupos modulares de superficies de tipo infinito ha sido de interés para la comunidad matemática, recomendamos ver [AV20] para un recopilación de los resultados acerca de este tema hasta el momento.

Nota 1.3.4 (Grupo modular de superficies con frontera). Algunos resultados obtenidos en esta tesis son válidos para superficies con frontera, diremos en su lugar cuando esto sea así. En este caso, los elementos de $\text{Homeo}(S)$ son todos los homeomorfismos $h : S \rightarrow S$ tales que $h|_{\partial S} = \text{Id}_{\partial S}$. De manera similar se definen los grupos $\text{Homeo}^+(S)$ y $\text{Homeo}_0(S)$. El grupo modular extendido de una superficie con frontera, que también lo denotamos por $\text{Mod}^*(S)$, se define como el grupo de todas las clases de isotopía de homeomorfismos $S \rightarrow S$ que fijan puntualmente la frontera de la superficie. En este caso la isotopía es relativa a la frontera de S . De forma similar se define el grupo modular y los distintos subgrupos del grupo modular extendido que definiremos posteriormente.

Homotopía vs Isotopía. Un hecho que será crucial en la obtención de nuestros resultados es que homotopía e isotopía en superficies topológicas son equivalentes.

Teorema 1.3.5 (Equivalencia entre homotopía e isotopía). *Sea S una superficie de tipo infinito posiblemente con frontera y $f, g \in \text{Homeo}^+(S)$. Entonces f es homotópico a g si y solo si f es isotópico a g .*

Este Teorema 1.3.5 se sigue del trabajo de Cantwell y Colon, véase [CC15]. Este resultado también es cierto para superficies de tipo finito, en cuyo caso se tiene que excluir el disco cerrado, el anillo cerrado, y la esfera con una o dos ponchaduras, véase [Bae28, Eps66] o bien el Teorema 1.12 en [FM12].

En resumen, tenemos cuatro maneras equivalentes de ver el grupo modular (extendido) de una superficie, excepto en los casos descritos en el párrafo anterior:

$$\begin{aligned} \text{Mod}(S) &:= \text{Homeo}^+(S)/\text{Homeo}_0(S), \\ &= \pi_0(\text{Homeo}^+(S)), \\ &= \text{Homeo}^+(S)/\text{isotopía}, \\ &= \text{Homeo}^+(S)/\text{homotopía}. \end{aligned}$$

Nota 1.3.6 (Grupo modular suave). El grupo modular (extendido) de una superficie de tipo finito se puede definir, equivalentemente, como el grupo de todas las clases de difeotopías de la superficie, véase el Teorema 1.13 en [FM12]. Esto deja de ser cierto para superficies de tipo infinito. Por mencionar solo un ejemplo, si S es una superficie cerrada menos el conjunto de Cantor estándar (triádico) contenido en un intervalo $\mathbb{C}^n$ -encajado de manera suave en S , entonces el grupo de todas las clases de difeotopías de clase $\mathbb{C}^n$ con $n \geq 2$ es numerable, véase [FN18] para más detalles y ejemplos más generales. También en [HM19b] podemos encontrar otras diferencias entre el grupo modular y el grupo modular suave de superficies de tipo infinito.

Usando la compactificación de Freudenthal de una superficie S tenemos que todo elemento del grupo modular $\text{Mod}(S)$ induce un homeomorfismo del espacio de fines $\text{Ends}(S)$ en sí mismo, es decir, se tiene el homomorfismo de grupos continuo

$$F : \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Homeo}(\text{Ends}(S), \text{Ends}_\infty(S)). \quad (1.5)$$

Definición 1.3.7 (Grupo modular puro). El *grupo modular puro* de una superficie S se define por

$$\text{PMod}(S) := \text{Ker}(F).$$

El grupo modular puro $\text{PMod}(S)$ es un subgrupo cerrado de $\text{Mod}(S)$. Si el espacio de fines de S es finito entonces $\text{PMod}(S)$ tiene índice finito en $\text{Mod}(S)$. También, $\text{PMod}(S)$ coincide con $\text{Mod}(S)$ si y solamente si S es una superficie de tipo finito con a lo más una ponchadura o S es una superficie de tipo infinito con a lo más un fin acumulado por género y a lo más una ponchadura; la Figura 1.5 muestra las únicas posibilidades para S de tipo infinito con $\text{PMod}(S) = \text{Mod}(S)$. Notemos que $\text{PMod}(S)$ es no numerable para superficies de tipo infinito.

Introducimos el siguiente subgrupo del grupo modular puro $\text{PMod}(S)$.

Definición 1.3.8 (Grupo modular de soporte compacto). Dada una superficie S se define y denota por $\text{Mod}_c(S)$ al subgrupo de $\text{PMod}(S)$ generado por todas las clases de isotopía de homeomorfismos con soporte compacto en S .

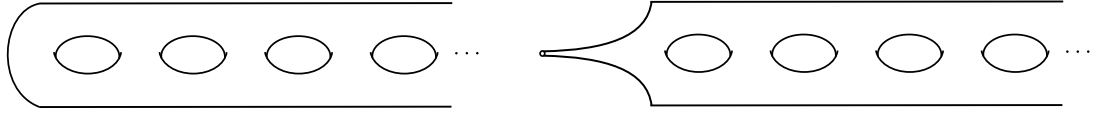


Figura 1.5: Las dos posibilidades para una superficie de tipo infinito S que satisface $\mathbf{PMod}(S) = \mathbf{Mod}(S)$.

Si S es una superficie de tipo finito entonces $\mathbf{Mod}_c(S) = \mathbf{PMod}(S)$. En otro caso, $\mathbf{Mod}_c(S)$ es un subgrupo normal propio de $\mathbf{PMod}(S)$. En efecto, tomemos una saturación principal $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ por subsuperficies de tipo finito de la superficie de tipo infinito S . Entonces

$$\mathbf{Mod}_c(S) = \varinjlim \mathbf{PMod}(S_n).$$

Así, $\mathbf{Mod}_c(S)$ es numerable y por lo tanto distinto de $\mathbf{PMod}(S)$.

Nota 1.3.9 (Topología de $\mathbf{Mod}^*(S)$). El grupo modular extendido $\mathbf{Mod}^*(S)$ de una superficie topológica S es un grupo topológico con la topología cociente heredada de $\mathbf{Homeo}(S)$ por medio de la aplicación proyección $\pi : \mathbf{Homeo}(S) \rightarrow \mathbf{Mod}^*(S)$. Con esta topología sobre $\mathbf{Mod}^*(S)$, el grupo modular $\mathbf{Mod}(S)$ y el grupo modular puro $\mathbf{PMod}(S)$ son subgrupos cerrados de $\mathbf{Mod}^*(S)$.

Si S_g^n es una superficie de tipo finito entonces $\mathbf{Mod}^*(S_g^n)$ es discreto. Como aporte de esta tesis, los resultados obtenidos en los Capítulos 2 y 3 permiten obtener información acerca de la topología de $\mathbf{Mod}^*(S)$ cuando S es una superficie de tipo infinito. Por ejemplo, se puede probar que el grupo modular extendido de una superficie de tipo infinito es un grupo topológico polaco (Teorema 3.1.7), no numerable, totalmente desconexo (Teorema 2.1.10), topológicamente perfecto (Teorema 2.1.11) y no es localmente compacto (Teorema 3.1.8). Varios de los resultados anteriores aparecen recopilados en [Vla19] por N. Vlamis. Aquí damos demostraciones alternativas de algunos de ellos.

1.4. Giros de Dehn

Uno de los elementos más simples del grupo modular de una superficie son los giros de Dehn alrededor de curvas cerradas simples. Describiremos brevemente estos elementos y definiremos los giros de Dehn alrededor de multicurvas.

Sea $\mathbb{A}$ el anillo cerrado $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ con su orientación estándar. Sea S una superficie topológica orientada con orientación fija. Consideremos γ una curva cerrada simple en S , $N(\gamma)$ una vecindad regular cerrada de γ con orientación inducida por S y δ el arco simple transversal a γ que conecta las dos componentes de frontera de $N(\gamma)$. Tomemos el homeomorfismo $\rho : \mathbb{A} \rightarrow N(\gamma)$ que preserve la orientación tal que $\rho^{-1}(\gamma) = \mathbb{S}^1 \times \{\frac{1}{2}\}$ y $\rho^{-1}(\delta) = \{0\} \times [0, 1]$. En la Figura 1.6 hemos identificado $N(\gamma)$ con $\mathbb{A}$ y este a su vez lo hemos encajado en el plano (θ, t) por medio de la aplicación $(\theta, r) \mapsto (\theta, r + 1)$.

El *giro de Dehn izquierdo* $T_\gamma : S \rightarrow S \in \mathbf{Homeo}^+(S)$ alrededor de la curva γ se define por:

$$T_\gamma(x) = \begin{cases} \rho \circ T \circ \rho^{-1}(x) & \text{si } x \in N(\gamma), \\ x & \text{si } x \in S \setminus N(\gamma), \end{cases}$$

donde $T : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es el homeomorfismo dado por $T(\theta, t) := (\theta + 2\pi t, t)$.

Denotamos con T_γ^{-1} al inverso de T_γ y lo llamamos el *giro de Dehn derecho* alrededor de la curva γ . La clase de isotopía de T_γ está completamente determinada por la clase de isotopía de la curva γ y no depende de la vecindad regular $N(\gamma)$, véase [Iva01] y [FM12] para más propiedades acerca de los giros de Dehn.

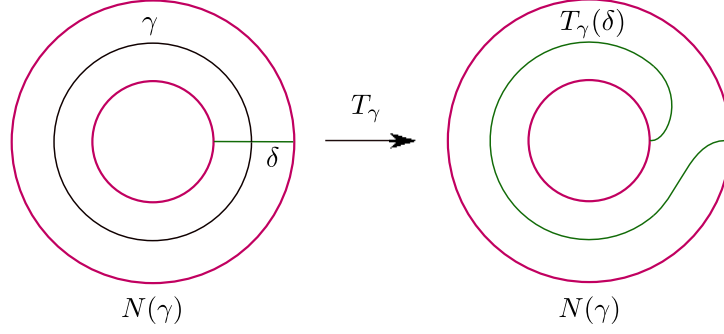


Figura 1.6: Acción del giro de Dehn izquierdo T_γ sobre el arco δ .

Nota 1.4.1 (Generadores del grupo modular). Para una superficie de tipo finito S_g^n , el grupo modular puro $\text{PMod}(S_g^n)$ está generado por un número finito de giros de Dehn. Dado que $\text{PMod}(S_g^n)$ es un subgrupo de índice finito en $\text{Mod}(S_g^n)$ tenemos que este último es finitamente generado, más aún, está generado por un número finito de giros de Dehn y *medios giros* (half-twist), véase la Sección 9 en [FM12] para la definición de los homeomorfismos medios giros. De hecho, $\text{Mod}(S_g^n)$ está finitamente presentado, véase el Teorema 5.3 en [FM12].

Dado un grupo topológico G y $A \subseteq G$, decimos que G es *topológicamente generado* por A si $G = \overline{\langle A \rangle}$, es decir, A genera un subgrupo denso de G . Si S es una superficie de tipo infinito con a lo más un fin acumulado por género entonces $\text{PMod}(S)$ es topológicamente generado por giros de Dehn, véase [PV18] o [AV20]. En otro caso, el grupo modular puro es topológicamente generado por giros de Dehn y *translaciones del género* (handle shifts), véase el Teorema 4 en [PV18]. Por otro lado, el grupo modular de una superficie de tipo infinito no es topológicamente generado por un subconjunto compacto, véase [Vla19].

Introducimos ahora los giros de Dehn alrededor de multicurvas. Esta clase de homeomorfismos serán importantes para establecer los resultados en el Capítulo 4. Sea K un subconjunto finito o infinito de $\mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}^K$ y $\alpha := \{\alpha_k\}_{k \in K}$ una multicurva en una superficie topológica S . Para cada curva $\alpha_k \in \alpha$ tomamos $N_k := N(\alpha_k)$ una vecindad regular cerrada de α_k en S tal que $N_i \cap N_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

El *giro de Dehn izquierdo* alrededor de la multicurva α , $T_\alpha \in \text{Homeo}^+(S)$, la definimos por

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} T_{\alpha_k}(x) & \text{si } x \in N_k, \\ x & \text{si } x \in S \setminus (\cup_{k \in K} N_k), \end{cases}$$

De manera similar, decimos que T_α^{-1} es el *giro de Dehn derecho* alrededor de la multicurva α . Notemos que la clase de isotopía de T_α es un elemento en el grupo modular puro $\text{PMod}(S)$. Los giros de Dehn alrededor de multicurvas en superficies de tipo infinito serán importantes en nuestro trabajo desarrollado en el Capítulo 4.

1.5. Clasificación de Nielsen-Thurston

La clasificación de los elementos de $\text{Mod}(S_g^n)$ es un resultado central en desarrollo de la teoría de los grupos modulares de superficies de tipo finito. Esta clasificación se debe a Thurston en [Thu88]. Sin embargo, este resultado ya aparecía implícita en los trabajos de Nielsen, recomendamos ver [FM12] para más información acerca de este tema. En lo que sigue describimos brevemente en qué consiste esta clasificación.

Sea S_g^n una superficie de tipo finito. Un homeomorfismo $\varphi \in \text{Homeo}^+(S_g^n)$ es *pseudo-Anosov* si existe un par de foliaciones singulares medibles transversas $(\mathcal{F}^u, \mu_u)$ y $(\mathcal{F}^s, \mu_s)$ sobre S_g^n y un número $\lambda > 1$ tales que

$$\begin{aligned}\varphi \cdot (\mathcal{F}^u, \mu_u) &= (\mathcal{F}^u, \lambda \mu_u), \text{ y} \\ \varphi \cdot (\mathcal{F}^s, \mu_s) &= (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1} \mu_s).\end{aligned}$$

Las foliaciones $(\mathcal{F}^u, \mu_u)$ y $(\mathcal{F}^s, \mu_s)$ se llaman *foliación inestable* y *foliación estable*, respectivamente, y el número λ se dice que es el *factor de estiramiento* de φ .

Un elemento $f \in \text{Mod}(S)$ es *pseudo-Anosov* si tiene un representante en su clase de isotopía que es un homeomorfismo pseudo-Anosov. Dos homeomorfismos pseudo-Anosov en la misma clase de isotopía son conjugados por un homeomorfismo isotópico a la identidad, véase [FLP12].

También decimos que un elemento $f \in \text{Mod}(S_g^n)$ es *reducible* si existe una multicurva $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^m$ tal que $f(\alpha_i)$ es isotópica a α_i para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Teorema 1.5.1 (Clasificación de Nielsen-Thurston). *Sea S_g^n una superficie de tipo finito. Entonces cada elemento $f \in \text{Mod}(S_g^n)$ es periódico, reducible o pseudo-Anosov. Además, un elemento pseudo-Anosov no es periódico ni reducible.*

En el Capítulo 4 extenderemos la construcción de Thurston-Veech (Sección 14.1 en [FM12]) a superficies de tipo infinito el cual llamamos la *construcción de Hooper-Thurston-Veech*, véase la Sección 4.3. Con esta herramienta logramos construir elementos en el grupo modular de ciertas superficies de tipo infinito con acción loxodrómica en el grafo de lazos. Estos elementos son análogos a los homeomorfismos pseudo-Anosov en el sentido que preservan un par de foliaciones singulares medibles transversas sobre la superficie de tipo infinito con factor de estiramiento $\lambda \geq 2$, véase el Teorema 4.3.8.

1.6. El grafo de curvas

Un objeto importante en el estudio de los grupos modulares de superficies es el *complejo de curvas*. Dada una superficie S , el *complejo de curvas* $\mathcal{C}(S)$ asociado a S es el complejo simplicial abstracto cuyo conjunto de vértices está formado por todas las clases de isotopía de curvas cerradas simples esenciales en S , los k -simplejos están formados por $k+1$ vértices con representantes disjuntos a pares. Este complejo simplicial fue introducido por W. Harvey [Har79, Har81] para superficies de tipo finito y desde entonces se ha demostrado que es un objeto central en el estudio de grupos modulares, véase [Iva01]. El complejo de curvas es un complejo bandera (flag complex) y por lo tanto el grupo de automorfismos simpliciales de $\mathcal{C}(S)$ es isomorfo al grupo de automorfismos simpliciales del 1-esqueleto de $\mathcal{C}(S)$, el cual se conoce como el *grafo de curvas* de la superficie S que también denotamos por $\mathcal{C}(S)$.

Al grafo de curvas $\mathcal{C}(S)$ lo dotamos de la métrica combinatoria que a cada par de vértices conectados por una arista le asigna distancia igual a 1. Para toda superficie S , excepto para las superficies esporádicas, $\mathcal{C}(S)$ es no vacío, conexo y localmente infinito, [Sch06]. Sin embargo, dependiendo del tipo topológico de la superficie, el grafo de curvas tiene distintas propiedades. Si S_g^n no es esporádica entonces $\mathcal{C}(S_g^n)$ es 17-hiperbólico en el sentido de Gromov y tienen diámetro infinito, véase [MM99, HPW15, Bow14]. En cambio, si S es una superficie de tipo infinito entonces $\mathcal{C}(S)$ tiene diámetro 2 y por consiguiente es 2-hiperbólico. En el capítulo 3 quedará claro que si bien el grafo de curvas de una superficie de tipo infinito no es interesante desde el punto de vista de la geometría a larga escala por tener diámetro finito sí captura mucha información algebraica y topológica del grupo modular.

El grupo modular extendido de una superficie S induce una acción natural por automorfismos simpliciales sobre el grafo de curvas, esto es, dado $\phi := [f] \in \text{Mod}^*(S)$, definimos $\tilde{\phi} \in \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$

por $\tilde{\phi} : [\alpha] \mapsto [f(\alpha)]$ para todo vértice $[\alpha] \in \mathcal{C}^0(S)$. De esta manera tenemos el morfismo de grupos siguiente:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbf{Mod}^*(S) &\rightarrow \mathbf{Aut}(\mathcal{C}(S)) \\ \phi &\mapsto \tilde{\phi} \end{aligned}$$

La aplicación del método de Alexander (Sección 2.3 en [FM12]) para superficies de tipo finito permite establecer que Ψ es inyectiva si $S_g^n \notin \{S_1^{n \leq 2}, S_2\}$, véase también el Teorema 2.1.1. El primer aporte de esta tesis al estudio de grupos modulares de superficies de tipo infinito se encuentra en el Capítulo 2 en donde desarrollamos el método de Alexander para superficies de tipo infinito. Entre algunas de las aplicaciones de este resultado obtenemos que Ψ es inyectiva para toda superficie de tipo infinito.

Otro de los aportes principales de esta tesis es el análogo del siguiente teorema para superficies de tipo infinito, véase el Teorema 3.1.4.

Teorema 1.6.1 (de Ivanov para superficies de tipo finito). *Sea S_g^n una superficie de tipo finito no esporádica distinta de S_1^2 . Entonces todo automorfismo simplicial de $\mathcal{C}(S_g^n)$ está inducido por un homeomorfismo, es decir, Ψ es sobreyectiva.*

Este resultado fue demostrado inicialmente por N. Ivanov [Iva97] cuando S_g^n tienen género al menos dos; desde entonces se conoce como el *Teorema de Ivanov*. Posteriormente este teorema fue extendido de forma independiente por M. Korkmaz [Kor96] y F. Luo [Luo00] para superficies de género cero con al menos cinco ponchaduras y para superficies con género uno y al menos dos ponchaduras, este último da una descripción precisa del homomorfismo Ψ en los casos restantes. El Teorema de Ivanov es central en la teoría por los profundos resultados que se derivan de este acerca de la estructura algebraica de $\mathbf{Mod}(S_g^n)$, algunas aplicaciones del Teorema 1.6.1 se pueden ver en [Iva01, Iva97]. En la introducción del Capítulo 3 recopilamos algunas aplicaciones del análogo del Teorema 1.6.1 para superficies de tipo infinito concernientes a la topología y estructura algebraica del grupo modular extendido $\mathbf{Mod}^*(S)$.

1.7. El grafo de lazos

Este *grafo de lazos* fue introducido por J. Bavard [Bav16] (motivada por las preguntas de D. Calegari en [Cal09a]) al estudiar el espacio de cuasimorfismos no triviales de $\mathbf{Mod}(S^2 \setminus (K \cup \infty))$ con K un conjunto de Cantor contenido sobre el ecuador horizontal de S^2 , (D. Calegari en [Cal09a] propuso estudiar el *grafo de rayos* de $S^2 \setminus (K \cup \infty)$ con potenciales aplicaciones al estudio del espacio de cuasimorfismos del grupo modular $\mathbf{Mod}(S^2 \setminus (K \cup \infty))$). En [Bav16], J. Bavard demostró que el grafo de lazos es cuasi-isométrico al grafo de rayos, es Gromov-hiperbólico y tiene diámetro infinito). Posteriormente, el grafo de lazos fue generalizado para toda superficie de tipo infinito S y se demostró que este grafo es Gromov-hiperbólico y tiene diámetro infinito, véase [AFP17, FA19]. Recientemente, en [BW18b] y [BW18a], J. Bavard y A. Walker estudian la frontera de Gromov del grafo de lazos y establecen una descripción precisa de los elementos de $\mathbf{Mod}(S; p)$ con acción loxodrómica en el grafo de lazos. Usando esta descripción, en el Capítulo 4 construimos elementos loxodrómicos que no preservan ninguna subsuperficie de tipo finito. Esta construcción está inspirada en la construcción de Thurston-Veech de homeomorfismos pseudo-Anosov de superficies de tipo finito.

Definición 1.7.1 (Lazo esencial). Sea S una superficie y $p \in S$ un punto marcado. Un *lazo* basado en p es una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = p$ y la restricción de α al intervalo abierto $(0, 1)$ es un encaje topológico. Decimos que un lazo es *esencial* si no es isotópico, relativo a $\{p\}$, a un punto.

Equivalentemente, si pensamos a $\mathbf{p}$ como una punchadura de $\mathbf{S}$ entonces un lazo esencial en $\mathbf{S}$ es un arco esencial con ambos puntos finales en $\mathbf{p}$, véase la Definición 1.2.1. Ahora definimos formalmente el grafo de lazos de una superficie con al menos una punchadura.

Definición 1.7.2 (Grafo de lazos). Sea $\mathbf{S}$ una superficie y $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$ un punto marcado. El *grafo de lazos* de $\mathbf{S}$, $\mathbf{L}(\mathbf{S}; \mathbf{p})$, es el grafo simplicial abstracto cuyo conjunto de vértices son todas las clases de isotopía, relativa a $\{\mathbf{p}\}$, de lazos esenciales en $\mathbf{S}$ y dos vértices generan una arista en $\mathbf{L}(\mathbf{S}; \mathbf{p})$ si tienen representantes disjuntos.

Nota 1.7.3. Notemos que todo lazo tiene soporte en una subsuperficie de tipo finito de $\mathbf{S}$, por consiguiente, el conjunto de vértices de $\mathbf{L}(\mathbf{S}; \mathbf{p})$ es numerable.

Definición 1.7.4. Sea $\mathbf{S}$ una superficie y $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$ un punto marcado. Definimos y denotamos con $\mathbf{Mod}(\mathbf{S}; \mathbf{p})$ al grupo de todas las clases de isotopía, relativa a $\{\mathbf{p}\}$, de homeomorfismos $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ que preservan la orientación de $\mathbf{S}$ y que fijan a $\mathbf{p}$. De forma análoga se define $\mathbf{Mod}^*(\mathbf{S}; \mathbf{p})$ permitiendo homeomorfismos que no necesariamente preservan la orientación de $\mathbf{S}$.

Nota 1.7.5. Si la superficie $\mathbf{S}$ no tienen punchaduras, es decir, $\mathbf{IPEnds}(\mathbf{S}) = \emptyset$ entonces el grupo $\mathbf{Mod}(\mathbf{S}; \mathbf{p})$ coincide con el grupo modular $\mathbf{Mod}(\mathbf{S} \setminus \{\mathbf{p}\})$. El recíproco también es cierto.

Si dotamos al grafo de lazos $\mathbf{L}(\mathbf{S}; \mathbf{p})$ con la métrica combinatoria, entonces el grupo $\mathbf{Mod}(\mathbf{S}; \mathbf{p})$ actúa por isometrías sobre $\mathbf{L}(\mathbf{S}; \mathbf{p})$. Más aún, la acción es fiel. En efecto, consideremos a $\mathbf{p}$ como una punchadura de $\mathbf{S}$ y supongamos que $\mathbf{f} \in \mathbf{Mod}(\mathbf{S})$ fija la clase de isotopía de todo lazo α basado en $\mathbf{p}$. Entonces $\mathbf{f}$ también fija la clase de conjugación de todo elemento en $\pi_1(\mathbf{S}, \mathbf{p})$. Por el método de Alexander para superficies de tipo finito e infinito, véase el Teorema 2.1.4), $\mathbf{f}$ es isotópico a $\mathbf{Id}_{\mathbf{S}}$ relativo a $\mathbf{Ends}(\mathbf{S})$, en particular, $\mathbf{f}$ es isotópico a $\mathbf{Id}_{\mathbf{S}}$ relativo a $\{\mathbf{p}\}$ pues $\mathbf{p}$ consideramos a $\mathbf{p}$ como una punchadura de $\mathbf{S}$.

Capítulo 2

Método de Alexander para superficies de tipo infinito

2.1. Resultados y aplicaciones

El método de Alexander nos dice que para poder decidir si un homeomorfismo $S_g^n \rightarrow S_g^n$ es isotópico a $\text{Id}_{S_g^n}$ basta ver su acción sobre una colección finita de arcos y curvas esenciales en S_g^n , véase la Sección 2.3 en [FM12] para más detalles.

Teorema 2.1.1 (método de Alexander para superficies de tipo finito). *Sea S_g^n una superficie de tipo finito con complejidad $\kappa(S_g^n) \geq 1$ y $\varphi \in \text{Homeo}^+(S_g^n)$. Si $S_g^n \notin \{S_1^0, S_1^1, S_1^2, S_2^0\}$ entonces existe una colección finita de curvas esenciales Γ en S_g^n tal que si φ preserva las clases de isotopía de los elementos de Γ , entonces φ es isotópico a $\text{Id}_{S_g^n}$.*

Nota 2.1.2. Para toda superficie en el conjunto $\{S_1^0, S_1^1, S_1^2, S_2^0\}$ la involución hiperelíptica no es isotópica al homeomorfismo identidad y preserva las clases de isotopía de toda curva esencial en la superficie, véase la Figura 2.1.

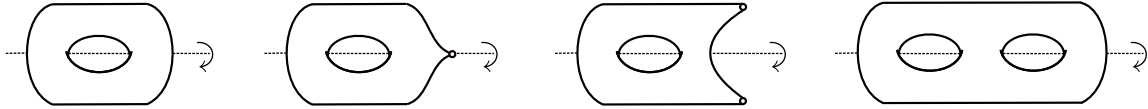


Figura 2.1

Una aplicación inmediata del método de Alexander es el siguiente:

Corolario 2.1.3. *Si S_g^n es una superficie de tipo finito con complejidad $\kappa(S_g^n) \geq 2$ y no pertenece al conjunto $\{S_1^2, S_2\}$ entonces el homomorfismo de grupos $\Psi : \text{Mod}^*(S_g^n) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S_g^n))$ es inyectivo.*

Motivados por estudiar el homomorfismo Ψ en el caso de superficies de tipo infinito, en este apartado generalizamos el método de Alexander. El enunciado que probaremos en este capítulo es el siguiente:

Teorema 2.1.4. *Sea S una superficie de tipo infinito posiblemente con frontera no vacía. Entonces existe una colección de curvas y arcos esenciales Γ en S localmente finita tal que cualquier homeomorfismo en $\text{Homeo}^+(S)$ que preserve la clase de isotopía de los elementos en Γ , es isotópico a la identidad en S .*

La colección de curvas y arcos esenciales Γ en el Teorema 2.1.4 es localmente finita, de cardinalidad infinita, y se cumple que toda subsuperficie de tipo finito de S contiene un número finito de elementos de Γ . En este sentido, Γ es pequeña comparada con el número total de curvas y arcos esenciales en la superficie S . Los resultados de este capítulo fueron publicados en [HHMV19].

Aplicaciones

En [HHV17], J. Hernández-Hernández y F. Valdez demostraron que la representación Ψ es fiel si S es una superficie de tipo infinito cuyos fines están acumulados por género. Como aplicación del Teorema 2.1.4 obtenemos la generalización de este resultado para toda superficie de tipo infinito. Los métodos usados en [HHV17] son distintos a los desarrollados aquí.

Teorema 2.1.5. *Sea S una superficie de tipo infinito. Entonces la acción natural del grupo modular extendido de S en el complejo de curvas es fiel, es decir, $\Psi : \text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ es inyectivo.*

El *centro* de un grupo G es el subgrupo de G generado por todos los elementos de G que conmuta con todo elemento de G . J. Lanier y M. Loving nos han señalado el siguiente corolario del Teorema 2.1.4. La demostración es completamente análoga a la prueba del Teorema 3.10 en [FM12] o véase [LL19].

Teorema 2.1.6. *Sea S una superficie de tipo infinito. Entonces el centro de $\text{Mod}(S)$ es trivial.*

Nota 2.1.7. Para superficies con frontera, la clase de isotopía de giros de Dehn alrededor de curvas paralelas a las curvas frontera son elementos no triviales del centro del grupo modular.

Las siguientes aplicaciones están relacionadas con la topología del grupo modular.

Proposición 2.1.8. *Sea S una superficie de tipo infinito posiblemente con frontera. Entonces el subgrupo normal $\text{Homeo}_0(S)$ es cerrado en $\text{Homeo}(S)$.*

Demostración. Dado $K \subset S$ compacto y $U \subseteq S$ abierto denotamos con $[K, U]$ al elemento en la base de la topología compacto-abierta de $\text{Homeo}^+(S)$. Pongamos $C := \text{Homeo}_0(S)$ y tomemos $f \in \overline{C} \setminus C \subseteq \text{Homeo}^+(S)$. Sea α una curva esencial en S y consideremos $N(\alpha)$ una vecindad regular (abierto) de α en S homeomorfa a un anillo abierto. Como $f \in [\alpha, f(N(\alpha))]$, existe $h \in C \cap [\alpha, f(N(\alpha))]$. Así, $h(\alpha)$ es isotópica a $f(\alpha)$. También, $h(\alpha)$ es isotópica a α pues $h \in C$. Por lo tanto, $f(\alpha)$ es isotópica a α para toda curva esencial α en S . Por el Teorema 2.1.4, f está en C . Por lo tanto $\text{Homeo}_0(S)$ es cerrado en $\text{Homeo}^+(S)$.

Dado que $\text{Homeo}^+(S)$ es cerrado en $\text{Homeo}(S)$, tenemos que $\text{Homeo}_0(S)$ es cerrado en $\text{Homeo}(S)$. $\square$

Nota 2.1.9 ($\text{Mod}^*(S_g^n)$ es discreto). Si S_g^n es una superficie de tipo finito entonces la Proposición 2.1.8 también es válido y su demostración es análoga. Más aún, $\text{Homeo}_0(S_g^n)$ es abierto en $\text{Homeo}(S_g^n)$. Para ver esto, tomemos una colección finita de curvas esenciales Γ cuya unión llena S_g^n y que satisface las hipótesis del Teorema 2.1.1. Entonces $\text{Homeo}_0(S_g^n) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} [\gamma, N(\gamma)]$. Por lo tanto, $\text{Homeo}_0(S_g^n)$ coincide con la componente conexa de $\text{Homeo}(S_g^n)$ que contiene a $\text{Id}_{S_g^n}$. Así concluimos que $\text{Mod}^*(S_g^n)$ es discreto.

Si S es una superficie de tipo infinito entonces $\text{Homeo}_0(S)$ coincide con la componente conexa de $\text{Homeo}(S)$ que contiene a Id_S . La prueba usa el Teorema 2.1.4 y es bastante elaborada para presentarla aquí, nos referimos a las notas de N. Vlamis [Vla19] para su demostración. La discusión anterior implica lo siguiente:

Teorema 2.1.10. *Sea S una superficie de tipo infinito posiblemente con frontera. Entonces el grupo modular extendido $\text{Mod}^*(S)$ es totalmente desconexo.*

El siguiente resultado marca otra diferencia entre los grupos modulares de superficies de tipo infinito y los grupos modulares de superficies de tipo finito.

Teorema 2.1.11. *Sea S una superficie de tipo infinito posiblemente con frontera. Entonces el grupo modular extendido $\text{Mod}^*(S)$ es topológicamente perfecto.*

Demostración. Tomemos $\{\alpha_i\}_{i \geq 1}$ una multicurva infinita en S . Definamos $f_n \in \text{Homeo}^+(S)$ como el giro de Dehn alrededor de la multicurva $\{\alpha_i\}_{i \geq n}$. Tenemos que la sucesión $\{f_n\}$ converge a Id_S en la topología compacto abierta, y por lo tanto $[\text{Id}_S] \in \text{Mod}^*(S)$ es un punto de acumulación. $\square$

2.2. Prueba del Teorema 2.1.4

En lo que resta de este capítulo todas las superficies que consideremos son de tipo infinito posiblemente con frontera. Esbozamos brevemente la idea de la prueba del Teorema 2.1.4. Usamos la noción de *saturación principal* de una superficie de tipo infinito S (Definición 1.1.10) y probamos que todo homeomorfismo h que preserve las clases de isotopía de las curvas frontera de la saturación principal es isotópico a un homeomorfismo h' que fija puntualmente las componentes de frontera de la saturación principal, véase el Lema 2.2.4. En la prueba de este lema usamos teoría de obstrucción para asegurar la existencia de tal isotopía. Esta es la parte delicada y técnica de toda la prueba. Por ello dedicamos una sección individual al final del capítulo para exponer el resultado de teoría de obstrucción que usamos. Introducimos el concepto de *sistema de Alexander estable* de curvas y arcos en una superficie S . Estas son colecciones de curvas y arcos en la superficie tal que todo homeomorfismo $f \in \text{Homeo}^+(S)$ que preserve las clases de isotopía de los elementos de esta colección es isotópica a Id_S . Posteriormente, construimos explícitamente una colección de curvas y arcos que llenan la superficie S y probamos que esta colección es un sistema de Alexander estable. Al final demostramos que existe una cantidad no numerable de sistemas de Alexander estables.

Recordemos que si S tiene frontera entonces los elementos de $\text{Homeo}^+(S)$ fijan puntualmente la frontera de S . Además, las isotopías se consideran relativas a ∂S .

La siguiente definición está inspirada en el método de Alexander para superficies de tipo finito, véase la Sección 2.3 en [FM12].

Definición 2.2.1 (Sistema de Alexander). Sea $\Gamma := \{\gamma_i\}_{i \in I}$ una colección de curvas y arcos esenciales en S . Decimos que Γ es un sistema de Alexander si satisface las siguientes condiciones:

1. Los elementos en Γ están en posición mínima por pares.
2. Para todo $\gamma_i, \gamma_j \in \Gamma$ con $\gamma_i \neq \gamma_j$, tenemos que γ_i no es isotópico a γ_j .
3. Para distintos índices $i, j, k \in I$, al menos uno de los siguientes conjuntos es vacío: $\gamma_i \cap \gamma_j$, $\gamma_j \cap \gamma_k$, $\gamma_k \cap \gamma_i$.

Observemos que todo subconjunto de un sistema de Alexander es un sistema de Alexander. Cabe señalar que la definición de sistema de Alexander es también válida para superficies de tipo finito. La siguiente proposición es el análogo de la Proposición 2.8 en [FM12] en el contexto de superficies de tipo infinito cuya demostración también es completamente análoga.

Lema 2.2.2 (Proposición 2.8 [FM12]). *Sea S una superficie de tipo infinito posiblemente con frontera no vacía, y Γ un sistema de Alexander finito en S . Si $h \in \text{Homeo}^+(S)$ tal que para toda $\gamma \in \Gamma$, $h(\gamma)$ es isotópico a γ , entonces existe $f \in \text{Homeo}^+(S)$ isotópico a Id_S relativo a ∂S tal que $f|_\gamma = h|_\gamma$ para toda $\gamma \in \Gamma$.*

Nota 2.2.3. Si S no es conexa y Γ tiene cardinalidad finita en cada componente de S , entonces podemos aplicar el Lema 2.2.2 a cada componente conexa de S .

Sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una saturación principal de S (Definición 1.1.10). Para cada $i \in \mathbb{N}$, denotamos por B_i al conjunto de todas las curvas frontera de S_i que son curvas esenciales en S . Por la condición 2 en la Definición 1.1.10, para $i \neq j$ tenemos que $B_i \cap B_j = \emptyset$. Definimos las fronteras de $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ por $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$.

Por simplicidad, si A es una colección de curvas y arcos en S y $f \in \text{Homeo}^+(S)$, denotamos con $f|_A$ a la restricción de f al conjunto en S que resulta de la unión de todos los elementos en A .

El paso fundamental para demostrar el Teorema 2.1.4 es el lema siguiente.

Lema 2.2.4. *Sea S una superficie de tipo infinito posiblemente con frontera, $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una saturación principal de S , y B las fronteras de $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Si $h \in \text{Homeo}^+(S)$ es tal que $h(\gamma)$ es isotópico a γ para toda $\gamma \in B$, entonces h es isotópico a un homeomorfismo $g \in \text{Homeo}^+(S)$ para el cual $g|_B = \text{Id}|_B$.*

Demostración. Dividimos la prueba en dos partes. En la primera parte construimos un homeomorfismo g tal que $g|_B = \text{Id}|_B$. En la segunda parte, usando resultados clásicos de teoría de obstrucción, mostramos que g es isotópica a h . En la Sección 2.3 explicamos los resultados de teoría de obstrucción que utilizamos.

Primera Parte: Construcción de g . Notemos que para cada $i \geq 1$, B_i es un sistema de Alexander finito tanto en S como en $S \setminus S_k$ para cada $k < i$. Dado que h y B_1 satisfacen las condiciones del Lema 2.2.2, existe $f_1 \in \text{Homeo}^+(S)$ isotópico a Id_S tal que $f_1|_{B_1} = \text{Id}|_{B_1}$. Definamos $g_1 := f_1^{-1} \circ h$. Entonces $g_1|_{B_1} = \text{Id}|_{B_1}$, y por lo tanto $g_1(S_1) = S_1$. Además, g_1 fija las clases de isotopía de los elementos de B . De esta manera tenemos que la restricción de g_1 a $S \setminus \text{int}(S_1)$ y B_2 satisfacen las condiciones de la Nota 2.2.3 en $S \setminus \text{int}(S_1)$.

Sea $\tilde{g}_1 := g_1|_{S \setminus \text{int}(S_1)}$. Entonces por la Nota 2.2.3, existe $\tilde{f}_2 \in \text{Homeo}^+(S \setminus \text{int}(S_1))$ (que fija puntualmente $\partial(S \setminus \text{int}(S_1))$) isotópico a $\text{Id}_{S \setminus \text{int}(S_1)}$ relativo a $\partial(S \setminus \text{int}(S_1))$ tal que $\tilde{f}_2|_{B_2} = \tilde{g}_1|_{B_2}$. Así, definimos el homeomorfismo siguiente:

$$f_2(s) = \begin{cases} s & \text{si } s \in S_1, \\ \tilde{f}_2(s) & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que f_2 también es isotópico a Id_S . Similarmente, definimos $g_2 := f_2^{-1} \circ g_1 \in \text{Homeo}^+(S)$.

Por construcción, g_2 satisface que $g_2|_{B_2} = \text{Id}|_{B_2}$, y $g_2|_{S_1} = g_1|_{S_1}$. Más aún, g_2 preserva las componentes conexas de $S \setminus S_2$, y g_2 es isotópica a g_1 .

De esta manera, definimos inductivamente para cada $n > 2$ un homeomorfismo $g_n \in \text{Homeo}^+(S)$ tal que:

1. g_n es isotópico a g_{n-1} ,
2. $g_n|_{B_n} = \text{Id}|_{B_n}$, y
3. para todo $m < n$, tenemos que $g_n|_{S_m} = g_m|_{S_m}$.

Definimos la función siguiente:

$$\begin{aligned} g: S &\rightarrow S \\ s &\mapsto g_n(s) \text{ si } s \in S_n. \end{aligned}$$

Por el punto 3, g está bien definida. Además, por construcción se tiene que $g \in \text{Homeo}^+(S)$ y $g|_B = \text{Id}_S|_B$.

Segunda Parte: g es isotópico a h . Afirmamos que para cada $n \geq 1$, el homeomorfismo g_n es homotópico a g_{n+1} relativo a S_n , es decir, existe una homotopía $H_n: S \times I \rightarrow S$ que satisface lo siguiente:

- (a) $H_n|_{S \times \{0\}} = g_n$,
- (b) $H_n|_{S \times \{1\}} = g_{n+1}$, y
- (c) $H_n(x, t) = g_n(x) = g_{n+1}(x)$ para todo $t \in I$ y para todo $x \in S_n$.

La prueba de la afirmación anterior usa teoría de obstrucción. Su exposición será tratada en la Sección 2.3 al final de este capítulo. La principal dificultad es que hay muchas formas de homotopar g_n en g_{n+1} . Nosotros estamos interesados en asegurar la existencia de las homotopías H_n que son relativas a S_n .

Para cada $n \leq 1$, definimos el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \zeta_n: \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1} \right] &\rightarrow [0, 1] \\ t &\mapsto n(n+1) \left(t - \frac{n-1}{n} \right). \end{aligned}$$

Por las condiciones (a) y (b) sobre la familia de homotopías $\{H_n\}$ la aplicación $H: S \times I \rightarrow S$ dada por

$$H(s, t) = \begin{cases} H_n(s, \zeta_n(t)) & \text{si } t \in \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1} \right], \\ g(s) & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

está bien definida.

Afirmamos que H es una homotopía entre g_1 y g . Primero, notamos que para todo $s \in S$, $H(s, 0) = H_1(s, \zeta_1(0)) = H_1(s, 0) = g_1(s)$ y $H(s, 1) = g(s)$. Resta probar que H es continua. Si $(s, t) \in S \times [0, 1]$, entonces por definición, para algún $n \leq 1$, H y H_n coinciden en alguna vecindad abierta de (s, t) . Por la continuidad de H_n , H es continua en (s, t) . Ahora, tomemos $(s, 1) \in S \times \{1\}$. Entonces existe $m \geq 1$ tal que $s \in \text{int}(S_m)$ para todo $m \geq n$. Escojamos una vecindad abierta U_s de s propiamente contenida en $\text{int}(S_m)$. Por la condición (c) listada arriba, para todo $m \geq n$ y $(s', t') \in U_s \times \left(\frac{n-1}{n}, 1 \right]$, tenemos que $H(s', t') = H_m(s', t') = g_m(s') = g(s')$. Así, H coincide con g en una vecindad abierta de $(s, 1)$ y por lo tanto H es continua en $(s, 1)$.

Finalmente, dado que h es isotópica a g_1 , obtenemos que h es homotópica a g . Por el Teorema 1.3.5, concluimos que h es isotópica a g . $\square$

Definición 2.2.5 (Sistema de Alexander estable). Sea Γ un sistema de Alexander en S . Decimos que Γ es un sistema de Alexander estable en S si Γ llena S y cada $f \in \text{Homeo}^+(S)$ que preserva las clases de isotopía de los elementos en Γ es isotópico a la identidad relativo a ∂S .

Nota 2.2.6. No todo sistema de Alexander que llena S es estable. En la Figura 2.2 mostramos una colección de curvas A en la superficie cerrada con género 4 en donde la involución hiperelíptica preserva las curvas en A pero no es isotópica al homeomorfismo identidad.

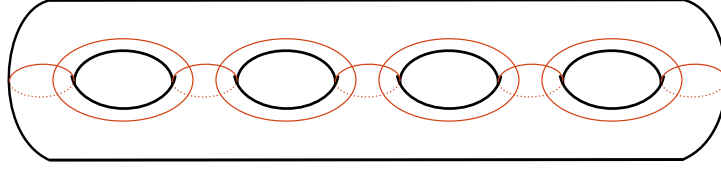


Figura 2.2: Un ejemplo de sistema de Alexander que llena la superficie cerrada con género 4 que no es estable.

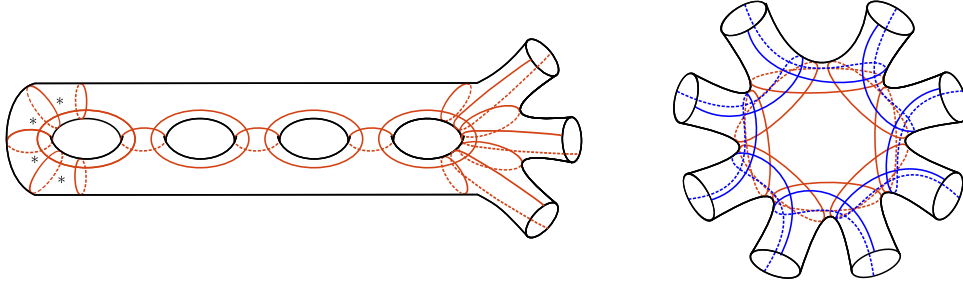


Figura 2.3: (Izquierda) Un ejemplo de sistema de Alexander estable en la superficie $S_{4,3}^4$. (Derecha) Un ejemplo de sistema de Alexander estable en la superficie $S_{0,8}$

Nota 2.2.7. En la Figura 2.3 mostramos ejemplos de sistemas de Alexander estables en superficies de tipo finito que pueden usarse para construir sistemas de Alexander estables en cualquier superficie de tipo infinito. La forma de hacer lo anterior es tomando una saturación principal $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de S y considerar las curvas y arcos en la Figura 2.3 en cada componente conexa de $S \setminus B$.

Prueba del Teorema 2.1.4. Construiremos un sistema de Alexander Γ que llena S y mostramos que este es estable.

Tomemos una saturación principal $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de S , y sea B a la colección de curvas frontera de $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que no son curvas frontera de S . Sea $\gamma \in B$ y supongamos que γ es una curva frontera de S_n .

Tomemos τ_1 y τ_2 dos puntos distintos en γ y escojamos dos arcos esenciales α_1, α_2 en S que conectan τ_1 con τ_2 de tal manera que el interior de α_1 este contenido en $S_n \setminus \text{int}(S_{n-1})$ y el interior de α_2 este contenido en el interior de $S_{n+1} \setminus \text{int}(S_n)$.

La concatenación γ^* de α_1 seguido de α_2 es una curva esencial que interseca transversalmente γ en los puntos τ_1 y τ_2 . Denotamos por B^* a la colección $\{\gamma^*\}_{\gamma \in B}$.

Para cada $n \geq 1$ es posible escoger una colección finita C_n de curvas esenciales en $S_n \setminus \text{int}(S_{n-1})$ tal que para cada componente conexa S' de $S_n \setminus \text{int}(S_{n-1})$ la colección de curvas y arcos definida por $C_n \cup (B^* \cap S')$ es un sistema de Alexander finito cuyo complemento en S' es una unión disjunta de discos y discos ponchados. Por el método de Alexander para superficies de tipo topológico finito (Proposición 2.8 [FM12]), $C_n \cup (B^* \cap S')$ es estable. Ejemplos de tales colecciones de curvas son mostradas en la Figura 2.3.

Definimos $C := \bigcup_{n \geq 1} C_n$ y $\Gamma := B \cup B^* \cup C$. Hacemos notar que por construcción Γ es un sistema de Alexander en S .

Sea $h \in \text{Homeo}^+(S)$ tal que fija las clases de isotopía de elementos en γ . Afirmamos que h es isotópica a Id_S , probando así que Γ es un sistema de Alexander estable.

Primero, dado que h fija la clase de isotopía de los elementos en $B \subseteq \Gamma$, el Lema 2.2.4, h es isotópica a $h' \in \text{Homeo}^+(S)$ para la cual $h'|_B = \text{Id}_S|_B$. En particular, h' fija todas las clases de isotopía de los elementos en Γ .

También, notemos que para cualquier $n \geq 1$, si S' es una componente conexa de $S_n \setminus \text{int}(S_{n-1})$, entonces $h'|_{S'}(S') = S'$ y $h'|_{\partial S'} = \text{Id}_{\partial S'}$. Así, $h'|_{S'} \in \text{Homeo}^+(S')$ y fija puntualmente $\partial S'$. Usando el hecho que por construcción $R := \Gamma \cap S'$ es un sistema de Alexander estable en S' , y que $h'|_{S'}$ fija las clases de isotopía de cada elemento en R , obtenemos una isotopía $J_{S'}$ relativa a $\partial S'$ de $h'|_{S'}$ a $\text{Id}_{S'}$. Repitiendo este proceso con todas las componentes conexas de $S_n \setminus \text{int}(S_{n-1})$ para toda $n \geq 1$, obtenemos una colección de isotopías relativas a la frontera de $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Finalmente, juntamos estas isotopías para obtener una isotopía de h' a Id_S . Aquí termina la prueba del Teorema 2.1.4. $\square$

Ya que hemos probado la existencia de sistemas de Alexander estables de curvas y arcos en cualquier superficie de tipo infinito, mostramos a continuación que existe una cantidad no numerables de clases de isotopía de estas.

Lema 2.2.8. *Sea S una superficie de tipo infinito posiblemente con frontera. Entonces existe una cantidad no numerable de clases de isotopía de sistemas de Alexander estables en S .*

Demostración. Fijemos $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una saturación principal de S , y sea $\Gamma := B \cup C \cup B^*$ como en la prueba del Teorema 2.1.4. Para cada $i \geq 1$, sea $\phi_i \in \text{Homeo}^+(\text{int}(S_i) \setminus S_{i-1})$ (que fija puntualmente $\partial(\text{int}(S_i) \setminus S_{i-1})$) un homeomorfismo pseudo-Anosov (con $S_0 = \emptyset$), véase la sección 1.4 para ver la definición de homeomorfismo pseudo-Anosov.

Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto de todas las clases de isotopía de sistemas de Alexander estables de S . Notemos que $\mathcal{A}$ es invariante bajo la acción de $\text{Homeo}^+(\text{int}(S_i) \setminus S_{i-1})$; así podemos definir la aplicación siguiente:

$$\begin{aligned} \Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^+} &\rightarrow \mathcal{A} \\ \{\epsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}} &\mapsto \left[B \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} \phi_i^{\epsilon_i}(C_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} \phi_i^{\epsilon_i}(f(B_i)) \right) \right], \end{aligned}$$

donde f es la biyección entre B y B^* . Dado que cada ϕ_i es un homeomorfismo pseudo-Anosov, Φ es inyectivo. De esta manera, $\mathcal{A}$ es un conjunto no numerable. $\square$

2.3. Homotopía relativa

En este apartado explicamos cómo resultados clásicos de teoría de obstrucción son usados para asegurar la existencia de las homotopías H_n en la prueba del Lema 2.2.4. Nuestra discusión está basada en el trabajo de P. Olu [Olu50] y adaptada al contexto de superficies orientadas con frontera.

El problema de la Extensión: Sea S una superficie orientable (no necesariamente compacta, ni de tipo finito y con frontera posiblemente no vacía) y $S' \subseteq S$ una subsuperficie. Consideremos dos funciones continuas $f_0, f_1 : S \rightarrow S$ tal que $f_0(s) = f_1(s)$ para todo $s \in S'$. Siguiendo [Olu50], sea $\bar{S}_{0,1}$ el subconjunto de $S \times I$ formado por $S \times \{0\} \cup S' \times I \cup S \times \{1\}$. Definamos $F : \bar{S}_{0,1} \rightarrow S$ por:

$$F(s, t) = \begin{cases} f_0(s) & \text{si } (s, t) \in S \times \{0\} \cup S' \times I \\ f_1(s) & \text{si } (s, t) \in S \times \{1\}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Decimos que f_0 es homotópica a f_1 relativa a S' si F definida como arriba tiene una extensión continua a $S \times I$. El resultado siguiente es una adaptación del Teorema 25.2 en [Olu50] al contexto de superficies orientables con frontera no vacía; este da un criterio para determinar cuando f_0 y f_1 son homotópicas relativa a S' . Primero enunciamos el resultado, después explicamos su contenido y finalmente mostramos cómo aplicarlo en la prueba del Lema 2.2.4.

Teorema 2.3.1. Sean $f_0, f_1 : S \rightarrow S$ dos funciones continuas tal que $f_0(s) = f_1(s)$ para todo $s \in S'$ con S' una subsuperficie conexa y no vacía de S . Sea $s_0 \in S'$ y $\theta_i : \pi_1(S, s_0) \rightarrow \pi_1(S, f_i(s_0))$ el homomorfismo inducido por f_i para $i = 0, 1$. Para $k \in \{0, 1, 2\}$ fijo, los enunciados siguientes son equivalentes:

1. (Para $k = 2$) $O^k(f_0, f_1) \text{ rel } S'$ es no-vacío y contiene al elemento cero.
2. (Para $1 \leq k$) $f_0 \simeq f_1 \text{ dim } k \text{ (rel } S')$.
3. (Para $1 \leq k$) $O^{k+1}(f_0, f_1) \text{ rel } S'$ es no vacío.
4. (Para $k = 1$) Los homomorfismos θ_0, θ_1 inducidos por f_0 y f_1 , respectivamente, son iguales.

Ahora explicamos el contenido de este teorema. Sea τ una triangulación de S y τ^k su k -esqueleto (en particular $\tau^2 = S$). Dos funciones f_0 y f_1 que satisfacen las hipótesis del Teorema anterior son *homotópicas en dimensión k relativa a S'* , escribimos $f_0 \simeq f_1 \text{ dim } k \text{ (rel } S')$, si f_0 restringida a $S' \cup \tau^k$ es homotópica a f_1 restringida a $S' \cup \tau^k$ relativa a S' . Este es precisamente el contenido del punto 2. En los puntos 1 y 3 aparece $O^k(f_0, f_1) \text{ rel } S'$, la k -ésima *obstrucción de una homotopía de f_0 a f_1 relativo a S'* . Este es un subconjunto del grupo de cohomología $H^k(S, S', \theta_0^* \pi_n)$. Aquí, $\theta_0^* \pi_n$ es el sistema de grupos locales (torcidos) $\theta_0^* \pi_k(S, s_0)$, donde $\pi_k(S, s_0)$ es el k -ésimo grupo de homotopía de S con base en s_0 . La definición tanto de obstrucción como de cohomología de grupos están explicados en [Olu50], citamos también [DK01] para ver los resultados clásicos de teoría de obstrucción. Como veremos posteriormente estos objetos son triviales en nuestro contexto.

Construcción de las homotopías H_n . Recordemos que en la prueba del Lema 2.2.4 para cada $n \geq 1$ tenemos dos homeomorfismos $g_n, g_{n+1} \in \text{Homeo}^+(S)$ isotópicos entre sí que coinciden en $S_n \subset S$. Esto implica que los isomorfismos que inducen en el grupo fundamental de S con punto base en el interior de S_n son iguales. En otras palabras, g_n y g_{n+1} satisfacen el punto 4 del Teorema 2.3.1.

Por el punto 3 tenemos que $O^2(f_0, f_1) \text{ rel } S'$ es no vacío. Dado que S no es una esfera, los grupos de cohomología $H^2(S, S', \theta_0^* \pi_n)$ son triviales (pues todos los coeficientes $\pi_2(S, s_0)$ son triviales), y por lo tanto tenemos que $O^2(f_0, f_1) \text{ rel } S'$ solo contiene al elemento cero, satisfaciendo así el punto 1 para $k = 2$. En particular, por el punto 2 podemos concluir que g_n y g_{n+1} son homotópicas en dimensión dos relativo a S_n , lo cual deseábamos. $\square$

Capítulo 3

Automorfismos del grafo de curvas

3.1. Resultados y aplicaciones

La aplicación del método de Alexander nos permite obtener que el homomorfismo $\Psi : \text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ es inyectivo para toda superficie $S \notin \{S_1^0, S_1^1, S_1^2, S_2^0\}$ con complejidad $\kappa(S) \geq 1$, véase el Corolario 2.1.3. Ahora cabe preguntarse si la representación Ψ es sobreyectiva.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Ivanov para superficies de tipo finito). *Sea S_g^n una superficie de tipo finito no esporádica distinta de S_1^2 . Entonces todo automorfismo simplicial de $\mathcal{C}(S_g^n)$ está inducido por un homeomorfismo, es decir, Ψ es sobreyectiva.*

Este resultado fue demostrado inicialmente por N. Ivanov [Iva97] cuando S_g^n tienen género al menos dos; desde entonces se conoce como el *Teorema de Ivanov*. Posteriormente este teorema fue extendido de forma independiente por M. Korkmaz [Kor96] y F. Luo [Luo00] para superficies de género cero con al menos cinco ponchaduras y para superficies con género uno y al menos dos ponchaduras, este último da también una descripción precisa del homomorfismo Ψ en los casos restantes. El Teorema de Ivanov es central en la teoría por los profundos resultados que se derivan de este acerca de la estructura algebraica de $\text{Mod}(S_g^n)$, algunas aplicaciones se pueden ver en [Iva01, Iva97].

Nota 3.1.2. Si $S \in \{S_1^0, S_1^1, S_0^4\}$ entonces $\mathcal{C}(S)$ tiene una cantidad numerable de vértices y carece de aristas. Por consiguiente, el grupo $\text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ es isomorfo al grupo de permutaciones de $\mathbb{N}$, el cual es no numerable. Sin embargo, $\text{Mod}(S)$ es numerable. Así, el homomorfismo Ψ no es sobreyectivo.

Por otro lado tenemos el problema de *rigidez* del grafo de curvas, esto es: Si $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ es un isomorfismo simplicial entre el grafo de curvas de S y S' , respectivamente, entonces ¿ S es homeomorfa a S' ?, es decir, ¿el complejo de curvas está completamente determinado por la superficie? Como consecuencia del trabajo de K. Shackleton [Sha07] sobre encajes locales entre grafos de curvas de superficies de tipo finito se deduce que $\mathcal{C}(S_g^n)$ es rígido combinatoriamente para superficies S_g^n no esporádicas y no contenidas en $\{S_2, S_0^6, S_1^2, S_0^5\}$ (Teorema 1 en [Ibid.]), más aún, por el Teorema de Ivanov ϕ está inducido por un homeomorfismo. En colaboración con J. Hernández-Hernández y F. Valdez [HHMV18] probamos los análogos de los resultados anteriores para grafos de curvas de superficies de tipo infinito. De forma más precisa, demostramos el teorema siguiente:

Teorema 3.1.3. *Sean S y S' dos superficies de tipo infinito y $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ un isomorfismo simplicial. Entonces S es homeomorfa a S' y ϕ está inducido por un homeomorfismo $h : S \rightarrow S'$.*

La sobreyectividad de Ψ fue obtenido de forma independiente por J. Bavard, S. Dowdall, y K. Rafi en [BDR20].

Aplicaciones

Presentamos aquí algunas aplicaciones del Teorema 3.1.3. Recomendamos ver las notas de N. Vlamis [Vla19] en donde aparecen algunas de estas aplicaciones y se recopilan muchas otras más. También recomendamos el artículo [AV20] de J. Aramayona y N. Vlamis en donde se puede ver un panorama general sobre lo que se sabe acerca de grupos modulares de superficies de tipo infinito.

Usando el método de Alexander para superficies de tipo infinito, véase el Teorema 2.1.5, y el Teorema 3.1.3 obtenemos:

Teorema 3.1.4. *Sea S una superficie de tipo topológico infinito. Entonces todo automorfismo del complejo de curvas está inducido por un homeomorfismo. Más aún, la aplicación natural*

$$\Psi : \text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$$

es un isomorfismo.

Este resultado fue obtenido previamente por J. Hernández-Hernández y Ferrán Valdez en [HHV17] en el caso cuando S es una superficie de tipo infinito tal que todos sus fines son acumulados por género.

Como aplicación del Teorema de Ivanov en el contexto de superficies de tipo finito, N. Ivanov mostró que el *grupo de automorfismos exteriores* de un subgrupo de índice finito de $\text{Mod}^*(S)$ es finito, y que el grupo *commensurador abstracto*¹ de $\text{Mod}^*(S)$ es isomorfo a $\text{Mod}^*(S)$. Nos referimos a la sección 8 y 9 de [Iva01] para ver otras aplicaciones del Teorema de Ivanov. De forma muy similar al estudio emprendido por N. Ivanov, en [BDR20] J. Bavard, S. Dowdall, y K. Rafi obtienen como aplicación del Teorema 3.1.4 lo siguiente:

Teorema 3.1.5 ([BDR20]). *Sea S una superficie de tipo infinito. Entonces*

- a) el grupo de automorfismos externos de un subgrupo de índice finito de $\text{Mod}^*(S)$ es finito, y*
- b) el grupo commensurador abstracto de $\text{Mod}^*(S)$ es isomorfo a $\text{Mod}^*(S)$.*

Véase el Corolario 1.2 en [BDR20] para una versión más detallada y completa del Teorema anterior.

Otra aplicación importante del Teorema 3.1.4 es que el isomorfismo $\Psi : \text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ es un isomorfismo de grupos topológicos al dotar a $\text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ con la *topología permutación*. Explicamos esto a continuación. Sea X un grafo con conjunto de vértices numerable. Dado A un subconjunto de vértices en X , definimos el *estabilizador puntual* de A por $\text{U}(A) := \{f \in \text{Aut}(\Gamma) : f(a) = a \text{ para todo } a \in A\}$. La colección de todos los $\text{Aut}(\Gamma)$ -trasladados de estabilizadores puntuales de conjuntos finitos A define una base para la topología de $\text{Aut}(\Gamma)$.

El conjunto de vértices de $\mathcal{C}(S)$ es numerable de cardinalidad infinita, por consiguiente $\text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ es un grupo topológico con la topología permutación descrita arriba. Por otro lado recordemos que $\text{Mod}^*(S)$ es un grupo topológico con la topología cociente inducida por $\text{Homeo}(S, \partial S)$ con la topología compacta-abierta.

Los siguientes dos resultados aparecen por primera vez en [APV17] atribuidos a J. Aramayona, P. Patel y N. Vlamis.

Por el Teorema 3.1.4 y la aplicación del método de Alexander (Teorema 2.1.4) nos da como resultado el siguiente

¹Sea G un grupo. Consideremos el conjunto $\{f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \text{ isomorfismo} : \Gamma_1, \Gamma_2 \leq G \text{ de índice finito}\}$. Dos morfismos $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ y $f' : \Gamma'_1 \rightarrow \Gamma'_2$ están relacionados si coinciden en un subgrupo de índice finito de $\Gamma_1 \cap \Gamma'_1$. El conjunto de clases de equivalencia de tales isomorfismos define el *commensurador abstracto* de G el cual se denota por $\text{Comm}(G)$. Este tiene estructura de grupo al definir $f' \circ f$ sobre $f'(\Gamma_2 \cap \Gamma'_1)$.

Teorema 3.1.6 ([APV17]). *Sea S una superficie de tipo infinito. Entonces el isomorfismo de grupos $\Psi : \text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ es un homeomorfismo de grupos topológicos.*

Usando el trabajo de P. Cameron en [Cam96], damos una prueba alternativa del siguiente teorema.

Teorema 3.1.7 ([APV17]). *Sea S una superficie de tipo infinito. El grupo topológico $\text{Mod}^*(S)$ es polaco.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.6, $\text{Mod}^*(S)$ es isomorfo como grupo topológico a $\text{Aut}(\mathcal{C}(S))$. Luego, por el Teorema 2.1 en [Cam96] el grupo $\text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ es un subgrupo cerrado del grupo simétrico infinito $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Dado que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es un grupo topológico Polaco y que esta propiedad se hereda a subgrupos cerrados, obtenemos que $\text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ es Polaco. $\square$

Recordemos que si S es una superficie de tipo finito, entonces $\text{Mod}^*(S)$ es un grupo topológico discreto. En particular, $\text{Mod}^*(S)$ es localmente compacto. Usando la correspondencia topológica dada por el Teorema 3.1.6 y que el grupo $\text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ puede verse como subgrupo cerrado del grupo simétrico infinito $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.8 ([Vla19]). *Sea S una superficie de tipo topológico infinito. El grupo topológico $\text{Mod}^*(S)$ no es localmente compacto.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.6, probamos la afirmación para $\text{Aut}(\mathcal{C}(S))$. Supongamos que este espacio es localmente compacto, es decir, para todo punto $\tilde{f} \in \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ existe una vecindad $\mathcal{U}$ de $\tilde{f}$ con cerradura compacta. Tomando una traslación podemos asumir que $\mathcal{U}(A) \subseteq \mathcal{U}$ para algún conjunto finito A de vértices en $\mathcal{C}(S)$. Como $\mathcal{U}$ es relativamente compacto tenemos que la cerradura de $\mathcal{U}(A)$ es compacta en $\text{Aut}(\mathcal{C}(S))$.

Por otro lado, dado un vértice v en $\mathcal{C}(S)$, definimos $P_v : \text{Aut}(\mathcal{C}(S)) \rightarrow \mathcal{C}^0(S)$ por $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}(v)$ para cada $\tilde{f} \in \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$, donde $\mathcal{C}^0(S)$ denota el conjunto de vértices de $\mathcal{C}(S)$. Con la topología discreta sobre $\mathcal{C}^0(S)$, la función P_v es continua. Así, para cada $v \in \mathcal{C}^0(S)$, $P_v(\overline{\mathcal{U}(A)}) \subset \mathcal{C}^0(S)$ es finito. Afirmamos que existe $v \in \mathcal{C}^0(S) - A$ y existe $f \in \text{Mod}^*(S)$ tal que $\tilde{f} = \Psi(f) \in \mathcal{U}(A)$ y $\tilde{f}(v) \notin P_v(\overline{\mathcal{U}(A)})$. Esto es una contradicción pues como $\tilde{f} \in \mathcal{U}(A)$ entonces por la definición de P_v , $\tilde{f}(v) \in P_v(\overline{\mathcal{U}(A)})$. Para probar la afirmación, sea S' una subsuperficie conexa de tipo finito de S que contiene a toda curva de A . Tomemos v una curva con soporte disjunto de S' . Luego dado B un conjunto finito de curvas en S arbitrario, es posible encontrar un homeomorfismo f con soporte disjunto de S' y tal que $f(v)$ no esté contenida en B . Haciendo $B = P_v(\overline{\mathcal{U}(A)})$ obtenemos la prueba de la afirmación. $\square$

3.2. Invarianza del tipo topológico de curvas

En esta sección damos los resultados preliminares necesarios para probar el Teorema 3.1.3. Primero caracterizamos simplicialmente las descomposiciones en pantalones de una superficie. Luego, definimos el *grafo de adyacencia* asociado a una descomposición en pantalones de una superficie de tipo infinito y probamos que todo isomorfismo simplicial entre grafos de curvas induce un isomorfismo entre grafos de adyacencia. También investigamos la invarianza de ciertos tipos topológicos de clases de isotopía de curvas esenciales bajo isomorfismos simpliciales entre grafos de curvas.

Recordemos que una descomposición en pantalones de una superficie S es una multicurva maximal (respecto a la inclusión), véase la Definición 1.2.8. Nos referimos por descomposición en pantalones tanto a una multicurva maximal $P := \{\alpha_k\}_{k \in K}$ y a su imagen $\{[\alpha_k]\}_{k \in K}$ en $\mathcal{C}^0(S)$.

El siguiente lema caracteriza simplicialmente una descomposición en pantalones de S en el grafo de curvas $\mathcal{C}(S)$.

Lema 3.2.1. Sea S una superficie de tipo infinito y $P := \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^0(S)$. Entonces P es una descomposición en pantalones de S si y solo si esta colección satisface lo siguiente:

1. $i(\alpha_k, \alpha_l) = 0$ para todo $k, l \in \mathbb{N}$,
2. para cada $\alpha \in \mathcal{C}^0(S)$ se tiene:
 - a. $i(\alpha, \alpha_k) \neq 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$, y
 - b. $|\{k \in \mathbb{N} : i(\alpha, \alpha_k) \neq 0\}| < \infty$.

Demostración. La condición necesaria se verifica rápidamente. Probamos la condición suficiente. Dado que S es una superficie, está uniformizada por el disco de Poincaré. Así, podemos escoger una métrica Riemanniana completa en S con curvatura constante negativa. Dado que la métrica es completa, podemos escoger para cada α_k el único representante geodésico en la clase de isotopía de α_k . Las condiciones 1 y 2.a implican que $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una colección maximal de curvas disjuntas y no isotópicas a pares. Para verificar que esta colección de curvas es localmente finita procedemos de la siguiente manera. Sea $s \in S$ un punto y $N \subseteq S$ una subsuperficie compacta de tipo finito que contiene a s en su interior, tal que cada componente de ∂N es una curva geodésica cerrada esencial en S . Supongamos primero que existe una cantidad finita de curvas en $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que intersectan a ∂N . En este caso, podemos encontrar una vecindad U de s contenida en N que intersecta a un número finito de elementos en $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Por otro lado, si una cantidad infinita de elementos en $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ intersecta a ∂N , obtenemos una contradicción con la condición 2.b. $\square$

Corolario 3.2.2. Sea $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ un isomorfismo simplicial. Entonces ϕ manda una descomposición en pantalones de S en una descomposición en pantalones de S' .

Una multicurva L en una superficie S acota una subsuperficie Σ de S , si los elementos de L son exactamente las curvas frontera de la cerradura de Σ en S . También, decimos que Σ está *inducida* por L si existe un subconjunto $M \subseteq L$ que acota $\text{int}(\Sigma)$ y no contiene elementos de $L \setminus M$ en su interior. En este caso, $\partial \Sigma \neq \emptyset$ y las curvas frontera de Σ están contenidas en L .

Sea P una descomposición en pantalones, y $\alpha, \beta \in P$. Decimos que α y β son *adyacentes respecto a P* si existe una subsuperficie Σ inducida por P tal que α y β son dos de sus curvas frontera.

Definición 3.2.3 (Grafo de adyacencia). Sea S una superficie y P una descomposición en pantalones de S . Definimos el grafo de adyacencia de P , denotado por $\mathcal{A}(P)$, como el grafo simplicial abstracto cuyo conjunto de vértices es P y dos vértices generan una arista si son adyacentes respecto a P .

Ahora estamos en condiciones de probar que un isomorfismo simplicial entre grafos de curvas induce un isomorfismo entre grafos de adyacencia.

Proposición 3.2.4. Sea $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ un isomorfismo simplicial entre grafos de curvas de superficies de tipo infinito. Entonces ϕ induce un isomorfismo de grafos

$$\tilde{\phi} : \mathcal{A}(P) \rightarrow \mathcal{A}(\phi(P))$$

para cualquier descomposición en pares de pantalones P de S .

Demostración. Dado que descomposiciones en pantalones son multicurvas maximales, $\tilde{\phi}$ es una correspondencia biyectiva entre el conjunto de vértices de $\mathcal{A}(P)$ y el conjunto de vértices de $\mathcal{A}(\phi(P))$. De esta manera, basta verificar que tanto $\tilde{\phi}$ como $\tilde{\phi}^{-1}$ preservan aristas. Lo anterior sigue del hecho que cualesquiera dos vértices α y β son adyacentes en $\mathcal{A}(P)$ si y solo si existe una curva γ en S que intersecta a α y β pero no intersecta ninguna otra curva en $P \setminus \{\alpha, \beta\}$. $\square$

A continuación probamos varias propiedades topológicas preservadas por el isomorfismo $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$. Los siguientes dos lemas y la Proposición 3.2.7 se pueden deducir del trabajo de Shkelton [Sha07]. Para ser más precisos, el Lema 3.2.6 y la Proposición 3.2.7 abajo son los Lemas 8 y 12 en [Sha07]. El trabajo de Shkelton no es en el contexto de superficies de tipo infinito, sin embargo, los argumentos que usa son de naturaleza local, y así, pueden ser inmediatamente extrapolados a todas las superficies de tipo infinito. Para que esta parte de la tesis sea autocontenido, incluimos un esbozo de las pruebas en cada caso.

Decimos que una curva esencial α en S es *separadora* si $S \setminus \alpha$ no es conexa. Una curva separadora es *exterior* si acota una subsuperficie homeomorfa a S_0^3 .

Lema 3.2.5. *Sea $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ un isomorfismo simplicial entre grafos de curvas de superficies de tipo infinito. Entonces ϕ envía curvas separadoras no-exteiores en curvas separadoras no-exteiores, curvas no-separadoras en curvas no-separadoras y por lo tanto curvas exteriores en curvas exteriores.*

Demostración. Observemos que para cualquier descomposición en pantalones P de S , un vértice en $\mathcal{A}(P)$ es un vértice de corte si y solo si es una curva separadora no-exterior. Como $\tilde{\phi}$ es un isomorfismo, esta preserva vértices separadores y así ϕ envía curvas separadoras no-exteiores en curvas separadoras no-exteiores.

Ahora, si α es una curva no-separadora en S , podemos encontrar una descomposición en pantalones P de S con α en P y con grado cuatro en $\mathcal{A}(P)$. El resultado sigue de notar que un vértice en $\mathcal{A}(P)$ asociado a una curva exterior tiene grado a lo más dos para cualquier descomposición en pantalones P . $\square$

Sea α una curva separadora no-exterior contenida en una descomposición en pantalones P de S . Entonces por la definición de adyacencia con respecto a P , existe descomposiciones en pantalones P_1, P_2 de las componentes conexas de $S \setminus \{\alpha\}$ que corresponden a las componentes conexas de $\mathcal{A}(P) \setminus \{\alpha\}$. Por la Proposición y Lema anteriores, esta descomposición es preservada por ϕ , esto es, $\phi(\alpha)$ es una curva separadora no-exterior en S' , y $\phi(P_1), \phi(P_2)$ son descomposiciones en pantalones de $S' \setminus \{\phi(\alpha)\}$. En el caso particular que α acote una subsuperficie de tipo finito con complejidad κ , tenemos que $\phi(\alpha)$ también acota una subsuperficie de tipo finito con complejidad κ . Estos hechos aparecerán de forma implícita en la prueba de algunos de los resultados subsecuentes.

Lema 3.2.6. *Sea $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ un isomorfismo simplicial entre grafos de curvas de superficies de tipo infinito y α una curva separadora no-exterior que acota una subsuperficie homeomorfa a $S_{1,0}^1$ (toro ponchado). Entonces $\phi(\alpha)$ también acota a una subsuperficie homeomorfa a $S_{1,0}^1$ (toro ponchado).*

Demostración. Sea $S := \Sigma_1 \sqcup \alpha \sqcup \Sigma_2$ donde Σ_1 es un toro ponchado y Σ_2 es una superficie de tipo infinito conexa. Sea P una descomposición en pantalones de S que contiene α . Entonces $P := P_1 \sqcup \alpha \sqcup P_2$ con P_1 y P_2 descomposición en pantalones de Σ_1 y Σ_2 , respectivamente. Además, P_1 solo contiene una curva no-separadora β (es decir, Σ_1 tiene complejidad uno). Observar que α es un vértice de corte en $\mathcal{A}(P)$. Por el Lema 3.2.5, $\phi(\alpha)$ es también un vértice de corte en $\mathcal{A}(\phi(P))$.

Entonces $S' := \Sigma'_1 \sqcup \phi(\alpha) \sqcup \Sigma'_2$ donde Σ'_1 y Σ'_2 son subsuperficies conexas de S' , y $\phi(P) := \phi(P_1) \sqcup \phi(\alpha) \sqcup \phi(P_2)$ con $\phi(P_1)$ y $\phi(P_2)$ descomposiciones en pantalones de Σ'_1 y Σ'_2 , respectivamente. Por lo tanto, Σ'_1 tiene complejidad uno y $\phi(P_1)$ solo contiene a $\phi(\beta)$. Nuevamente, por el Lema 3.2.5, $\phi(\beta)$ es una curva no-separadora en S' y concluimos que $\phi(\alpha)$ acota un toro ponchado. $\square$

Proposición 3.2.7. Sea $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ un isomorfismo simplicial entre grafos de curvas de superficies de tipo infinito. Entonces el género de S coincide con el género de S' , es decir, $g(S) = g(S')$.

Demostración. Sea L una multicurva en S tal que cada curva en L acota un toro ponchado en S y $S \setminus L$ solo tiene una componente conexa de tipo topológico infinito con género cero. En otras palabras, L es una multicurva que captura todo el género en S , véase la Figura 3.1. Por lo anterior, $g(S)$ coincide con la cardinalidad de L . Por el Lema 3.2.6, para cada $\alpha \in L$, la curva $\phi(\alpha)$ acota un toro ponchado en S' inducido por $\phi(L)$. Así, $g(S) \leq g(S')$. Dado que ϕ es un isomorfismo obtenemos la igualdad. $\square$

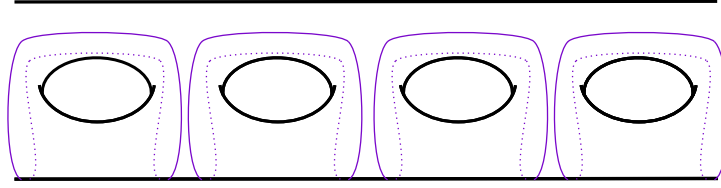


Figura 3.1: Curvas que capturan el género de S .

Dos curvas $\{\alpha, \beta\}$ forman un *par periférico* si acotan una subsuperficie de S homeomorfa a $S_{0,2}^1$ (anillo ponchado).

Proposición 3.2.8. Sea $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ un isomorfismo simplicial entre grafos de curvas de superficies de tipo infinito. Entonces ϕ envía pares periféricos en pares periféricos.

Demostración. Observemos que si $\{\alpha, \beta\}$ es un par periférico entonces ambas curvas son separadoras o bien ambas son no-separadoras. Por lo tanto consideramos solo los tres casos siguientes: (1) ambas curvas α y β son curvas separadoras siendo α una curva exterior, (2) ambas curvas α y β son curvas separadoras no-exteriores, y (3) ambas curvas α y β son curvas no-separadoras.

Caso 1: Sea P una descomposición en pantalones de S que contiene a α y β . Entonces α es un vértice de grado uno en $\mathcal{A}(P)$ que es adyacente solo a β . Estas propiedades son preservadas por isomorfismos simpliciales. Por la Proposición 3.2.4 y Lema 3.2.5, $\phi(\alpha)$ es una curva exterior adyacente solo a $\phi(\beta)$ y así estas curvas forman un par periférico en S' .

Caso 2: Este es un resultado inmediato del hecho que ϕ es un isomorfismo y del lema siguiente que da una caracterización simplicial de pares periféricos formado por curvas separadoras no-exteriores. Recordemos que el *enlace* de un vértice $\alpha \in \mathcal{C}^0(S)$ es el subgrafo completo de $\mathcal{C}(S)$ inducido por todos los vértices adyacentes a α en $\mathcal{C}(S)$. Esto lo denotamos por $\text{Lk}(\alpha)$. Notemos también que $\text{Lk}(\alpha)$ es naturalmente isomorfo a $\mathcal{C}(S \setminus \alpha)$. Para cualquier subgrafo Γ de $\mathcal{C}(S)$, denotamos por Γ^* al grafo cuyo conjunto de vértices es $V(\Gamma)$ y dos vértices generan una arista si no generan una arista en Γ .

Lema 3.2.9. Sean α y β dos curvas separadoras no-exteriores disjuntas. Entonces el grafo $(\text{Lk}(\alpha) \cap \text{Lk}(\beta))^*$ tiene dos componentes conexas si y solo si $\{\alpha, \beta\}$ forma un par periférico.

Demostración. La condición necesaria de la afirmación es evidente. Para la condición suficiente, notemos que $S \setminus (\alpha \cup \beta) := S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$. Como $(\text{Lk}(\alpha) \cap \text{Lk}(\beta))^*$ tiene dos componentes conexas, existe j tal que S_j tiene complejidad no-positiva. Más aún, dado que α y β son curvas separadoras no-exteriores obtenemos que $\partial S_j = \alpha \cup \beta$. Un cálculo directo sobre los posibles tipos topológicos de S_j da el resultado. $\square$

Caso 3: Hasta tomar un homeomorfismo de S , podemos encontrar una curva separadora γ tal que $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ acota un pantalón como en la Figura 3.2. Sea P una descomposición en pantalones de S que contenga a $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Por el Lema 3.2.5, $\phi(\gamma)$ es también una curva separadora, así tenemos que $S' \setminus \phi(\gamma) := S_1 \sqcup S_2$, más aún, el vértice correspondiente en $\mathcal{A}(\phi(P))$ es un vértice de corte que separa a $\mathcal{A}(\phi(P))$ en un grafo finito Γ_1 (cuyos vértices son $\phi(\alpha)$ y $\phi(\beta)$) y un grafo infinito Γ_2 . La definición de adyacencia con respecto a $\mathcal{A}(\phi(P))$ implica que Γ_1 y Γ_2 son los grafos de adyacencia de descomposiciones en pantalones de S_1 y S_2 (hasta re-indexar para que los índices coincidan), respectivamente. Entonces S_1 tiene complejidad igual a dos y contiene a $\phi(\alpha) \cup \phi(\beta)$. Dado que ambas curvas $\phi(\alpha)$ y $\phi(\beta)$ son no-separadoras en S' , S_1 tiene género positivo. Por lo tanto S_1 es homeomorfa a un toro con una componente de frontera (con curva frontera $\phi(\gamma)$) y una ponchadura, de donde se obtiene el resultado. $\square$

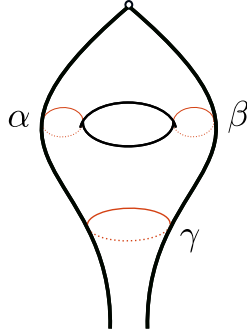


Figura 3.2: α y β son curvas no-separadoras que forman un par periférico.

Proposición 3.2.10. *Sea $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ un isomorfismo simplicial entre grafos de curvas de superficies de tipo topológico infinito. Suponga que α es una curva separadora no exterior que acota una subsuperficie de tipo finito $\Sigma \subseteq S$. Entonces $\phi(\alpha)$ acota una subsuperficie de tipo finito $\Sigma' \subseteq S'$ homeomorfa a Σ .*

Demostración. Sea $S := \Sigma \sqcup \alpha \sqcup \Sigma_1$ donde Σ es una superficie de tipo finito conexa con género g , n ponchaduras y una componente de frontera dada por α . Entonces por el Lema 3.2.5 y el párrafo que le sigue, $\phi(\alpha)$ acota una subsuperficie de tipo finito Σ' de la misma complejidad que Σ . Así podemos escribir $S' := \Sigma' \sqcup \phi(\alpha) \sqcup \Sigma'_1$. Tomemos P una descomposición en pantalones de Σ satisfaciendo:

- Si $g = 0$, P está compuesta solamente de curvas separadoras en S .
- Si $g > 0$, P contiene g curvas que acotan un toro ponchado y $P \cup \{\alpha\}$ contiene n pares periféricos.

Notemos que estas propiedades de P son preservadas por ϕ . Si $g = 0$ entonces $\phi(P)$ está también compuesta solamente de curvas separadoras, así Σ' tiene género cero. Si $g > 0$ entonces $\phi(P)$ es una descomposición en pantalones de Σ' con g curvas que acotan un toro ponchado y $\phi(P) \cup \{\phi(\alpha)\}$ contiene n pares periféricos. Dado que Σ y Σ' tienen la misma complejidad y exactamente una componente de frontera, un cálculo directo muestra que ellas son homeomorfas. $\square$

3.3. Prueba del Teorema 3.1.3

La idea de la prueba es la siguiente: si $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una saturación principal de S y $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ es un isomorfismo simplicial entre grafos de curvas entonces existe un homeomorfismo $f : S \rightarrow S'$ que coincide con ϕ en la colección B de curvas frontera de la saturación principal. La herramienta principal para establecer esto es el uso del grafo de adyacencia de una descomposición en pantalones de S . Luego mostramos que la restricción de ϕ a S_i define una función simplicial inyectiva $\phi_i : \mathcal{C}(S_i) \rightarrow \mathcal{C}(f(S_i))$. Aplicando el trabajo de K. Shackleton [Sha07] sobre la rigidez combinatoria del grafo de curvas de superficies de tipo finito obtenemos homeomorfismos $g_i : S_i \rightarrow f(S_i)$ que coincide con ϕ_i . Finalmente se prueba que esta colección de homeomorfismos induce un homeomorfismo $h : S \rightarrow S'$ que coincide con ϕ en todo $\mathcal{C}(S)$.

Sea $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una saturación principal de S . Para cada $i \geq 1$ denotamos por B_i al conjunto de curvas frontera de S_i y $B := \bigcup_{i \geq 1} B_i$.

En la prueba del teorema siguiente usamos la siguiente notación: dada una descomposición en pantalones P de S y un subconjunto $Y \subseteq P$, denotamos por $V(Y)$ al conjunto de vértices en el grafo de adyacencia $\mathcal{A}(P)$ definido por los elementos en Y .

Teorema 3.3.1. *Sean S y S' superficies de tipo infinito y $\phi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S')$ un isomorfismo simplicial. Entonces S es homeomorfa a S' . Más aún, existe un homeomorfismo $f : S \rightarrow S'$ tal que $\phi(\beta) = f(\beta)$ para todo $\beta \in B$.*

Demostración. Sea $S \setminus B := \bigcup_{j \geq 1} \text{int}(\Sigma_j)$, donde la colección $\{\Sigma_j\}_{j \geq 1}$ está formada por subsuperficies de S de tipo finito cuya complejidad es al menos cuatro y tal que para cualquier $j \neq k$, $\Sigma_j \cap \Sigma_k$ es vacía o bien está formado por curvas frontera de S_i , para alguna $i \geq 1$, véase la Figura 3.3. Para cada $j \geq 1$, sea P_j una descomposición en pantalones de Σ_j que contiene una multicurva (posiblemente vacía) tal que cada curva en ella acota un toro ponchado en Σ_j ; en otras palabras, escogemos P_j de tal manera que capture el género de Σ_j , como en la Figura 3.1. Entonces $P := \left(\bigsqcup_{j \geq 1} P_j \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i \geq 1} B_i \right)$ es una descomposición en pantalones de S . Sea $\mathcal{A}(P)$ el grafo de adyacencia de P y $\tilde{\phi} : \mathcal{A}(P) \rightarrow \mathcal{A}(\phi(P))$ el isomorfismo de grafos correspondiente (ver Proposición 3.2.4). Las curvas en B son por definición no-exteriores y separadoras, así cada elemento $v \in V(B)$ es un vértice de corte en $\mathcal{A}(P)$. Entonces $\mathcal{A}(P) \setminus V(B) = \bigsqcup_{j \geq 1} \Gamma_j$, donde cada Γ_j es un subgrafo finito cuyo conjunto de vértices $V(\Gamma_j)$ es precisamente la descomposición en pares de pantalones P_j de Σ_j .

Recordando que ϕ envía curvas separadoras no-exteriores en curvas separadoras no-exteriores (ver Lema 3.2.5) y definiendo Σ'_j como la subsuperficie de S' acotada por $\phi(\partial \Sigma_j)$, tenemos que

$$\tilde{\phi}(P) = \left(\bigsqcup_{j \geq 1} \tilde{\phi}(P_j) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i \geq 1} \tilde{\phi}(B_i) \right)$$

es tal que $\tilde{\phi}(P_j)$ es una descomposición en pantalones de $\Sigma'_j \subset S'$. Dado que $\tilde{\phi}(P_j)$ es conexa respecto a $\mathcal{A}(\phi(P))$, Σ'_j es conexa. Por construcción P_j captura el género de Σ_j y dado que ϕ es un isomorfismo simplicial, Σ_j y Σ'_j tienen el mismo género, el mismo número de componentes de frontera y la complejidad de ambas coinciden. Un cálculo directo permite concluir que ellas son homeomorfas. Nuevamente, por construcción tenemos que $\partial \Sigma'_j := \{\phi(\alpha) : \alpha \subseteq \partial \Sigma_j\}$. Entonces podemos encontrar una colección de homeomorfismos que preservan la orientación $\{f_j : \Sigma_j \rightarrow \Sigma'_j\}_{j \geq 1}$ tal que cada f_j envía una curva frontera $\alpha \subset \partial \Sigma_j$ en $\phi(\alpha) \subset \partial \Sigma'_j$. Estos homeomorfismos se pueden pegar para originar un homeomorfismo global $f : S \rightarrow S'$ que coincide con ϕ sobre el conjunto B . $\square$

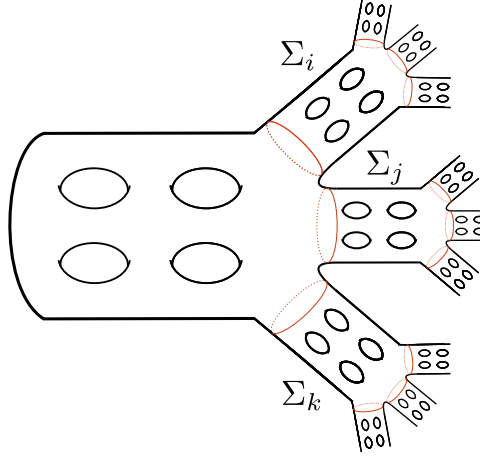


Figura 3.3: La colección de subsuperficies $\{\Sigma_j\}_{j \geq 1}$.

Con este resultado hemos probado la rigidez topológica del grafo de curvas. Ahora que sabemos que S es homeomorfa a S' resta probar que ϕ está inducido por un homeomorfismo $S \rightarrow S'$.

De aquí en adelante, $f : S \rightarrow S'$ denota al homeomorfismo obtenido en el Teorema 3.3.1. Notemos que todo homeomorfismo h de la forma $f \circ g$ con $g \in \text{Stab}_{\text{pt}}(B)$, donde $\text{Stab}_{\text{pt}}(B) := \{g \in \text{Homeo}^+(S) : g \text{ fija puntualmente a } B\}$, también coincide con ϕ en B .

Para cada subsuperficie Σ de S con complejidad al menos dos, tenemos que la inclusión natural $\iota : \Sigma \rightarrow S$ induce un mapeo simplicial $\iota_* : \mathcal{C}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}(S)$ entre grafos de curvas que es un isomorfismo sobre su imagen. Abusando de notación, denotamos por $\mathcal{C}(\Sigma)$ a la imagen de ι_* sobre $\mathcal{C}(S)$. Análogamente, hacemos lo mismo para subsuperficies de S' .

Lema 3.3.2. *Para todo $i \geq 1$, y para toda curva $\alpha \in \mathcal{C}(S_i) < \mathcal{C}(S)$, tenemos que $\phi(\alpha) \in \mathcal{C}(f(S_i)) < \mathcal{C}(S')$. En particular, para cada $i \geq 1$, la restricción de ϕ a $\mathcal{C}(S_i)$ define una función simplicial inyectiva $\phi_i : \mathcal{C}(S_i) \rightarrow \mathcal{C}(f(S_i))$.*

Demostración. Sea $i \geq 1$ fijo, P_1 una descomposición en pantalones de S_i , y P_2 una descomposición en pantalones de $S \setminus S_i$. Entonces $P := P_1 \sqcup B_i \sqcup P_2$ define una descomposición en pantalones de S .

Recordemos que f coincide con ϕ sobre B , y que todas las curvas en $\partial f(S_i)$ son separadoras. Entonces, por el mismo argumento como en el Teorema 3.3.1 tenemos que $\phi(P_1)$ es una descomposición en pantalones de $f(S_i)$ y está contenida en el interior de $f(S_i)$. Análogamente, las curvas en $\phi(P_2)$ están contenidas en el interior de $f(S \setminus S_i)$.

Ahora, sea α una curva contenida en S_i . Si $\alpha \in P_1$, entonces $\phi(\alpha) \in \mathcal{C}(f(S_i))$ como arriba. Si $\alpha \notin P_1$, entonces existe $\beta \in P_1$ tal que $i(\alpha, \beta) \neq 0$. Así tenemos que:

- $\phi(\alpha)$ es disjunta de cada elemento de $\phi(B_i) = f(B_i)$,
- $\phi(\beta)$ está contenida en $f(S_i)$, y
- $i(\phi(\alpha), \phi(\beta)) \neq 0$.

Por lo tanto podemos concluir que $\phi(\alpha)$ está contenida en $f(S_i)$. □

Con este Lema y el resultado de Shackleton sobre rigidez combinatoria entre grafos de curvas (véase el Teorema 1 en [Sha07]), obtenemos para cada $i \geq 1$ un homeomorfismo $g_i : S_i \rightarrow f(S_i)$ inducido por ϕ_i , esto es, para toda curva $\alpha \in \mathcal{C}(S_i)$ se tiene que $\phi(\alpha) = g_i(\alpha)$.

Afirmamos que cada g_i se puede extender, hasta isotopía, a un homeomorfismo $\bar{g}_i : \bar{S}_i \rightarrow \bar{f}(S_i)$ entre las cerraduras en S y S' de las subsuperficies respectivas. Explicamos esto en los siguientes párrafos.

Cada S_i es una subsuperficie abierta de S y sus ponchaduras se pueden clasificar en dos categorías: aquellas que persisten cuando tomamos la cerradura $\bar{S}_i$ de S_i en S (que son precisamente las ponchaduras de S_i que también son ponchaduras de S) y aquellas que no (estas inducen curvas en $B_i = \partial S_i$ cuando se toma la cerradura de S_i en S). La obstrucción de la extensión de g_i es que g_i intercambie una ponchadura de S_i que persiste en $\bar{S}_i$ con otra que no. Supondremos que este es el caso y llegaremos a una contradicción.

Sean α , β y γ curvas que acotan un pantalón en S tal que $\alpha \subset S_i$ y $\beta, \gamma \in \mathcal{C}(S_i)$. Notemos que esto implica que $\{\beta, \gamma\}$ es un par periférico en S_i . Si g_i intercambia la ponchadura de S_i definida por $\bar{S}_i \setminus \alpha$ con una ponchadura de S , entonces $\{\phi(\beta), \phi(\gamma)\}$ define un par periférico en S . Por la Proposición 3.2.8, $\{\beta, \gamma\}$ es también un par periférico en S' . Esta situación está descrita en la Figura 3.4. Es claro que $S \setminus \alpha$ tiene una componente cuya complejidad es estrictamente menor que tres. Esto es una contradicción pues ambas componentes de $S \setminus \alpha$ tiene complejidad al menos cuatro.

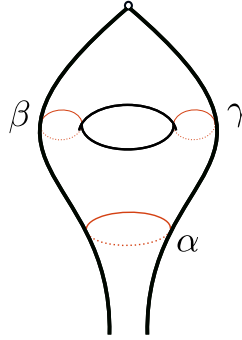


Figura 3.4: $\{\beta, \gamma\}$ es un par periférico.

De esta manera podemos isotopar g_i a un homeomorfismo $\tilde{g}_i : S_i \rightarrow f(S_i)$ que se puede extender a un homeomorfismo $\bar{g}_i : \bar{S}_i \rightarrow \bar{f}(S_i)$ que también está inducida por ϕ_i . Usando el Lema siguiente podemos asegurar que para cada $i \geq 1$, $\bar{g}_i$ coincide con f sobre el conjunto B .

Lema 3.3.3. *Sean α, β y γ curvas en S que acotan un pantalón en S tal que α es una curva separadora. Entonces $\phi(\alpha), \phi(\beta)$ y $\phi(\gamma)$ también acotan un pantalón en S' .*

Demostración. Sea P una descomposición en pantalones de S con $\alpha, \beta, \gamma \in P$. Entonces α es adyacente a β y γ , y β es adyacente a γ en $\mathcal{A}(P)$. Por la Proposición 3.2.4, sabemos que adyacencia es preservada por ϕ . La única posibilidad para que esto suceda y que las curvas $\phi(\alpha), \phi(\beta)$ y $\phi(\gamma)$ no acoten un pantalón en S' , está (hasta isomorfismo) ilustrado en la Figura 3.5. Sin embargo, si esto sucede, podemos encontrar una curva δ en S' que intersecta solo una vez a $\phi(\alpha)$, lo cual es imposible dado que $\phi(\alpha)$ es una curva separadora en S' (véase Lema 3.2.5). Por lo tanto $\phi(\alpha), \phi(\beta)$ y $\phi(\gamma)$ acotan un pantalón en S' . $\square$

Para cada $i \geq 1$ podemos tomar un homeomorfismo $l_i : S \setminus S_i \rightarrow S' \setminus f(S_i)$ de la forma $f \circ \eta$ con $\eta \in \text{Stab}_{\text{pt}}(B)$, y definimos:

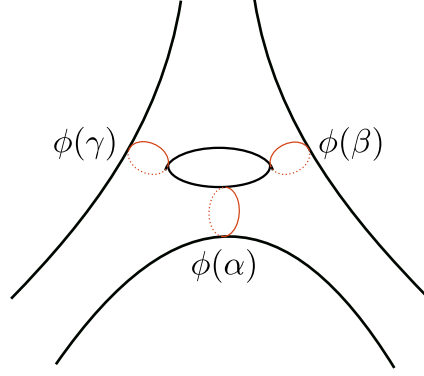


Figura 3.5: Las curvas $\phi(\alpha)$, $\phi(\beta)$ y $\phi(\gamma)$ no acotan un pantalón.

$$h_i(x) = \begin{cases} \bar{g}_i(x) & \text{si } x \in S_i, \\ l_i(x) & \text{si } x \in S \setminus S_i. \end{cases}$$

De esta forma obtenemos una familia de homeomorfismo $h_i : S \rightarrow S'$ que por construcción satisface que $h_i(\alpha) = \phi(\alpha) = h_j(\alpha)$ para todo $i < j$ y toda $\alpha \in \mathcal{C}(S_i) < \mathcal{C}(S_j) < \mathcal{C}(S)$. Como consecuencia del Método de Alexander (véase la Proposición 2.8, [FM12]), obtenemos que para cada $i < j$, $h_i|_{S_i} = h_j|_{S_j} \circ M_i$, donde $M_i \in \text{Homeo}^+(S_i)$ es un giro de Dehn (posiblemente con peso) a lo largo de una multicurva cuyo soporte está contenido en una vecindad de ∂S_i en S_i . En otras palabras, para cada $i \geq 1$ existe una subsuperficie $\tilde{S}_i \subset S_i \subset S$ isotópica a S_i tal que el soporte de M_i está contenido en $S \setminus \tilde{S}_i := \bigsqcup_{k=1}^{m_i} A_k$, donde cada A_k es un anillo. En particular tenemos que $M_i|_{\tilde{S}_i} = \text{Id}|_{\tilde{S}_i}$, y así para cada $i < j$, $h_i|_{\tilde{S}_i} = h_j|_{\tilde{S}_i}$. De esta manera podemos definir

$$\begin{aligned} h : S &\rightarrow S' \\ s \in \tilde{S}_i &\mapsto h_i(s). \end{aligned}$$

Dado que para todo $1 \leq i < j$ tenemos que $h_i|_{\tilde{S}_i} = h_j|_{\tilde{S}_i}$, h está bien definida. Más aún, es un homeomorfismo y por construcción coincide con ϕ en todo el grafo de curvas $\mathcal{C}(S)$, como se deseaba. $\square$

Capítulo 4

Elementos del grupo modular con acción loxodrómica en el grafo de lazos

4.1. Resultados y aplicaciones

Sea S una superficie de tipo infinito y $p \in S$ un punto marcado. Recordamos que $\text{Mod}(S; p)$ es el grupo de todas las clases de isotopía, relativa a $\{p\}$, de homomorfismos $S \rightarrow S$ que preservan la orientación de S y fijan p , véase la Definición 1.7.4. Notemos que $\text{Mod}(S; p)$ coincide con el grupo modular $\text{Mod}(S \setminus \{p\})$ si y solo si S no tiene ponchaduras, es decir, $\text{IPEnds}(S) = \emptyset$.

El grupo $\text{Mod}(S; p)$ está relacionado con el grupo modular $\text{Mod}(S)$ por medio de la sucesión exacta de Birman:

$$1 \longrightarrow \pi_1(S, p) \xrightarrow{\mathcal{P}} \text{Mod}(S; p) \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Mod}(S) \longrightarrow 1. \quad (4.1)$$

Para obtener lo anterior, primero notemos que $\text{Homeo}^+(S, p) \rightarrow \text{Homeo}^+(S) \xrightarrow{\mathcal{E}} S$ es un fibración donde $\mathcal{E}$ es la función evaluación en p . Luego, dado que $\text{Homeo}^+(S)$ es un espacio topológico contraíble (véase la Nota 1.3.1) y S es una superficie conexa, aplicando la sucesión exacta larga de grupos de homotopía obtenemos la sucesión exacta de Birman, para más detalles véase la Sección 4.2.3 en [FM12].

El grafo de lazos $L(S; p)$ es el grafo simplicial abstracto cuyo conjunto de vértices está formado por todas las clases de isotopía, relativa a $\{p\}$, de lazos esenciales basados en p y dos vértices generan una arista si tienen representantes disjuntos excepto en p , véase la Definición 1.7.2. Este grafo fue introducido por J. Bavard en [Bav16] en el estudio del espacio de cuasimorfismos no triviales de $\text{Mod}(S^2 \setminus (K \cup \{p\}))$ donde K es un conjunto de Cantor contenido en el ecuador horizontal de la esfera y $p \in S^2$ es el polo norte.

El grupo $\text{Mod}(S; p)$ actúa por isometrías en el grafo de lazos $L(S; p)$ dotado de la métrica combinatoria. Además, como espacio métrico $L(S; p)$ es conexo, Gromov-hiperbólico y tiene diámetro infinito, véase [Bav16, FA19, DFV18]. Gracias a estas propiedades que posee el grafo de lazos, un elemento de $\text{Mod}(S; p)$ es *elíptico*, *parabólico* o *loxodrómico* de acuerdo a su acción en la frontera de Gromov de $L(S; p)$. Para ser más precisos, si X es un espacio métrico geodésico Gromov-hiperbólico, la frontera de Gromov ∂X se define como el conjunto de todas las clases de equivalencia de sucesiones que convergen al infinito (con el producto de Gromov). La unión $X \cup \partial X$ es un espacio topológico Hausdorff completamente metrizable que contiene a X como subconjunto denso, para más detalles véase la Sección 1.8 en [Gro87]. Si G es un grupo que actúa por isometrías sobre X , el *conjunto límite* de G , denotado por $\Lambda(G) \subseteq \partial X$, es el conjunto de puntos de acumulación en ∂X de G -órbitas, es decir, $\Lambda(G) = \overline{G \cdot x} \cap \partial X$ con $x \in X$. Se dice que un elemento $g \in G$ es *elíptico* si $|\Lambda(\langle g \rangle)| = 0$ (equivalentemente, las órbitas de $\langle g \rangle$ son acotadas),

parabólico si $|\Lambda(\langle g \rangle)| = 1$ o *loxodrómico* si $|\Lambda(\langle g \rangle)| = 2$. En tal caso, también se dice que la acción de g en X es elíptica, parabólica o loxodrómica, respectivamente. Los elementos de $\Lambda(\langle g \rangle)$ son puntos fijos de la acción de $\langle g \rangle$ sobre ∂X , véase la Sección 8.1 en [Gro87] para ver los detalles de esta clasificación.

En [BW18a], Bavard y Walker describen los elementos de $\partial L(S; p)$ como *cliques*, es decir, grafos completos, cuyos vértices son clases de isotopía de *rayos que llenan* (high-filling rays) basados en p . Posteriormente, los mismos autores en [BW18b] demuestran que si $f \in \text{Mod}(S; p)$ es un elemento loxodrómico entonces los elementos de $\Lambda(\langle f \rangle) := \{\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-\}$ tienen una cantidad finita de vértices y además estos tienen misma cardinalidad. Llamaron al número natural $|\mathcal{C}^+| = |\mathcal{C}^-|$ el *peso* de f . Luego, J. Bavard y A. Walker observan que los únicos ejemplos de elementos loxodróxicos en $\text{Mod}(S; p)$ que se conocían hasta ese momento eran:

1. El elemento loxodrómico $h \in \mathbb{S}^2 \setminus (K \cup \{p\})$ (con $p \in \mathbb{S}^2$ el polo norte y K un conjunto de Cantor contenido en el ecuador horizontal de la esfera) definido por J. Bavard en [Bav16]. Este elemento no está en el grupo modular puro, no preserva ninguna subsuperficie de tipo topológico finito y tiene peso uno.
2. Clases de isotopía definidas por homeomorfismos pseudo-Anosov con soporte en una subsuperficie de tipo finito S' de S que contiene a p en su interior, véase el Teorema 8.3.1 en [BW18b].

Por esta razón, en el comentario 8.3.3 en [BW18b], los autores proponen construir ejemplos de elementos loxodróxicos de peso mayor que 1 que no preserven ninguna subsuperficie de tipo finito. Motivados por este comentario, en colaboración con F. Valdez construimos una cantidad no numerable de elementos loxodróxicos en $\text{Mod}(S; p)$ con dichas propiedades, este es el principal resultado que nos proponemos exponer en este apartado. Los resultados de este capítulo se encuentran publicados en [MV20]. Enunciamos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.1.1. *Sea S una superficie de tipo infinito, $p \in S$ un punto marcado y $m \in \mathbb{N}$. Sean $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ y $\beta = \{\beta_j\}_{j \in J}$ multicurvas en posición mínima cuya unión llena S y no contiene a p y tales que:*

1. *el grafo de configuración¹ $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ es de valencia finita,*
2. *cada componente conexa D_k de $S \setminus \alpha \cup \beta$ es un polígono o un polígono ponchado² con $n_k \leq N$ lados para algún $N \in \mathbb{N}$ y*
3. *la componente conexa de $S \setminus \alpha \cup \beta$ que contiene a p es un $2m$ -polígono.*

Si $T_\alpha, T_\beta \in \text{Mod}(S; p)$ son los giros de Dehn (izquierdos) alrededor de las multicurvas α y β , respectivamente, entonces cualquier elemento $f \in \text{Mod}(S; p)$ en el semigrupo positivo generado por T_α y T_β^{-1} dado por una palabra en donde ambos generadores aparecen es un elemento loxodrómico de peso m para la acción de $\text{Mod}(S; p)$ sobre el grafo de lazos $L(S; p)$.

Similarmente como en la construcción de Thurston-Veech (véase [Thu88] y [Vee89]), la prueba del teorema anterior se basa en encontrar una estructura plana sobre S en la cual T_α y T_β actúen por automorfismos afines. En el caso de superficies de tipo finito, esta estructura es única (hasta un reescalamiento) y está garantizada por el Teorema de Perron-Frobenius. Para superficies de

¹El conjunto de vértices de este grafo es $I \cup J$ y, existe una arista entre $i \in I$ y $j \in J$ por cada punto de intersección entre α_i y β_j .

²La frontera de cualquier componente conexa de $S \setminus \alpha \cup \beta$ está formada por arcos contenidos en las curvas $\alpha \cup \beta$, así, podemos pensar a estas como polígonos (topológicos).

tipo infinito, la existencia de la estructura plana sobre S está garantizada por la existencia de funciones armónicas positivas del operador de adyacencia asociado al grafo de configuración $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Esto fue posible por el trabajo previo de P. Hooper en [Hoo15] sobre dinámica de transformaciones infinitas de cambio de intervalo. Por esta razón a esta construcción la hemos denominado la *construcción de Hooper-Thurston-Veech*. En este contexto, existe una cantidad no numerable de estructuras planas sobre S (que no están relacionadas hasta un reescalamiento). Señalamos que la construcción de Hooper-Thurston-Veech es más general y aplica para una clase más grande de pares de multicurvas, sin embargo, esta construcción es bastante más delicada y depende en gran medida del tipo de multicurvas que tomemos. Esto lo explicamos con detalle en la Sección 4.3. Por otro lado, la construcción de Hooper-Thurston-Veech presenta diferencias respecto a la construcción de Thurston-Veech, esto lo señalamos en la Proposición 4.3.11, véase también [DHV19].

El siguiente teorema afirma que para toda superficie de tipo infinito S siempre existen pares de multicurvas como en el Teorema 4.1.1, más aún, existe una cantidad no numerable de ellas. Esto asegura la existencia de suficientes elementos en $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ con acción loxodrómica en el grafo de lazos $L(S; \mathbf{p})$.

Teorema 4.1.2. *Sea S una superficie de tipo infinito, $\mathbf{p} \in S$ un punto marcado y $\mathbf{m} \in \mathbb{N}$. Entonces existen dos multicurvas $\alpha := \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\beta := \{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ cuya unión llena S y no contiene a $\mathbf{p}$, y tales que:*

1. *existe $M > 0$ tal que todo vértice del grafo de configuración $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ tiene grado a lo más M , equivalentemente, para todo $\alpha_k \in \alpha$ y $\beta_j \in \beta$, $\sum_{j \geq 1} i(\alpha_k, \beta_j) < M$ y $\sum_{k \geq 1} i(\alpha_k, \beta_j) < M$,*
2. *existe una componente conexa D de $S \setminus (\alpha \cup \beta)$ que contiene a $\mathbf{p}$ y tal que ∂D es un $2\mathbf{m}$ -polígono y*
3. *cada componente conexa D_i de $S \setminus (\alpha \cup \beta)$ es un polígono de n_i lados con $n_i \leq N$ para alguna $N \in \mathbb{N}$.*

Para la demostración, desarrollamos las *formas normales* de superficies de tipo infinito las cuales son una manera canónica de dibujar una superficie de tipo infinito. Estas formas normales facilitan la construcción explícita de las multicurvas que satisfacen las condiciones del Teorema 4.1.2, véase la Sección 4.6.

Aplicaciones

Dado un grupo G discreto, el espacio de cuasimorfismos no triviales $\widetilde{\text{QM}}(G)$ de G se define como el kernel del morfismo de comparación $H_b^2(G; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(G; \mathbb{R})$ entre la cohomología acotada y la cohomología real de G . El cálculo de la dimensión del espacio de cuasimorfismos no triviales de un grupo determinado no es una tarea sencilla. Sin embargo, se han usado las acciones de grupos sobre espacios geométricos para demostrar que existe una gran variedad de clases de grupos con espacios de cuasimorfismos no triviales de dimensión infinita, véase la sección 2.9 en [Fri17] para una lista detallada. En particular, M. Bestvina y K. Fujiwara demuestran que si la acción de un grupo G en un espacio Gromov-hiperbólico es *no elemental* y contienen al menos dos elementos *independientes* y *anti-alineados* entonces $\dim \widetilde{\text{QM}}(G) = \infty$, véase el Teorema 1 en [BF02]. Inspirados en el trabajo de M. Bestvina y K. Fujiwara, J. Bavard y A. Walker demuestran que cualesquiera dos elementos de $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ (con la topología discreta) con acción loxodrómica sobre el grafo de lazos con pesos distintos son *independientes* y *anti-alineados*, véase el Teorema 9.1.1 en [BW18b]. Por todo lo anterior, obtenemos de forma inmediata la siguiente aplicación del Teorema 4.1.1:

Corolario 4.1.3. *Sea S una superficie de tipo infinito con $p \in S$ un punto marcado. Si f_1 y f_2 son elementos loxodróxicos como en el Teorema 4.1.1 con pesos $m_1 \neq m_2$, respectivamente, entonces el espacio de cuasimorfismos no triviales de cualquier subgrupo de $\text{Mod}(S;p)$ que contiene a f_1 y f_2 tiene dimensión infinita.*

Para hacer más visible el resultado anterior y exponer otros resultados relevantes con el estudio de los grupos modulares de superficies de tipo infinito hacemos el siguiente paréntesis. Sean X un espacio métrico, con métrica d , geodésico, Gromov-hiperbólico y G un grupo discreto con acción sobre X por isometrías. Decimos que la acción de G en X es *elemental* si el conjunto límite $\Lambda(G) \subseteq \partial X$ de la acción es infinito, donde ∂X es la frontera de Gromov de X . La acción de G en X es *acilíndrica* si para todo $D \geq 0$ existe, $R, N \geq 0$ tal que para todo $x, y \in X$ con $d(x, y) \geq D$ se satisface que el conjunto

$$\{g \in G : d(x, g \cdot x), d(y, g \cdot y) \leq R\},$$

tiene cardinalidad a lo más N . Un grupo es *acilíndricamente hiperbólico* si admite una acción acilíndrica no elemental. En [Bow08] B. Bowditch prueba que la acción del grupo modular $\text{Mod}(S_g^n)$ sobre el grafo de curvas $\mathcal{C}(S_g^n)$ es acilíndrica. En contraste, si S es una superficie de tipo infinito entonces el estabilizador puntual en $\text{Mod}(S;p)$ de cualquier conjunto finito de lazos es infinito. Por lo tanto, el grupo $\text{Mod}(S;p)$ no actúa acilíndricamente en el grafo de lazos $L(S;p)$. Más aún, J. Bavard y A. Genevois [BG18] demostraron que los grupos modulares de superficies de tipo infinito no son acilíndricamente hiperbólicos.

Por otra parte, con la finalidad de estudiar el espacio de cuasimorfismos no triviales de grupos modulares de superficies de tipo finito, M. Bestvina y K. Fujiwara en [BF02] introducen la noción de acción WPD (weak properly discontinuous). Decimos que un elemento loxodróxico $g \in G$ es *WPD* si para todo $x \in X$ y para todo $R \geq 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{h \in G : d(x, g \cdot x), d(g^N \cdot x, hg^N \cdot x) \leq R\}$$

es finito. Entonces se dice que el grupo G tiene *acción WPD* sobre X si la acción es no elemental y contiene al menos un elemento WPD. Notemos que ser acilíndrico implica ser WPD. Los autores en [Ibid.] probaron que si G tiene acción WPD sobre X entonces la dimensión del espacio de cuasimorfismos no triviales de G es infinita, es decir, $\dim \widetilde{QM}(G) = \infty$. En particular, probaron que todo elemento pseudo-Anosov de $\text{Mod}(S_g^n)$ es un elemento WPD respecto a su acción sobre el grafo de curvas, véase la Sección 1.5 para la definición de elemento pseudo-Anosov. Por lo tanto, $\text{Mod}(S_g^n)$ tiene acción WPD sobre $\mathcal{C}(S_g^n)$ y $\dim \widetilde{QM}(\text{Mod}(S_g^n)) = \infty$. Notemos que si S es una superficie de tipo infinito entonces $\text{Mod}(S;p)$ no contiene elementos WPD respecto a su acción sobre el grafo de lazos, la razón es la misma por cual la acción de $\text{Mod}(S;p)$ sobre el grafo de lazos no es acilíndrica.

Posteriormente, M. Bestvina, K. Bromberg y K. Fujiwara en [BBF15]) introducen una versión débil del concepto de acción WWP a la cual llamaron WWPD. Veamos brevemente en qué consiste. Sean G y X como antes y sea $g \in G$ un elemento loxodróxico con $\Lambda(\langle g \rangle) = \{\eta^+, \eta^-\} \subset \partial X$ el conjunto de puntos fijos de g . Decimos que g es *WWPD* si para toda sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos en G con $g_n(\eta^+) \rightarrow \eta^+$ y $g_n(\eta^-) \rightarrow \eta^-$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se satisface que $g_n(\eta^+) = \eta^+$ y $g_n(\eta^-) = \eta^-$. Los autores en [Ibid.] demuestran que todo elemento pseudo-Anosov en $\text{Mod}(S_g^n)$ es WWPD respecto a su acción sobre el grafo de curvas de la superficie S_g^n . Inspirados en el trabajo de M. Bestvina y K. Fujiwara en [BF02], M. Handel y L. Mosher en [HM19a] demuestran que si H es un subgrupo de G con al menos un par de elementos loxodróxicos *independientes* y al menos un elemento WWPD entonces $\dim \widetilde{QM}(H) = \infty$, véase el Teorema 2.10 en [HM19a]. Como hemos dicho anteriormente, si S es una superficie de tipo infinito entonces el grupo $\text{Mod}(S;p)$ no tienen elementos WPD. Recientemente, A. Rasmussen

[Ras19] ha anunciado que los elementos WWPD de $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ son los elementos pseudo-Anosov soportados en una subsuperficie S' de tipo finito de S que contiene a $\mathbf{p}$ en su interior. Como consecuencia obtenemos:

Corolario 4.1.4. *Los elementos loxodrómicos como en el Teorema 4.1.1 no son WWPD respecto a su acción sobre el grafo de lazos $L(S; \mathbf{p})$.*

Para grupos modulares de superficies de tipo finito toda sucesión convergente en $\text{Mod}(S_g^n)$ es eventualmente constante pues $\text{Mod}(S_g^n)$ es un grupo topológico discreto. Un fenómeno distinto a lo anterior sucede en el grupo $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$. Nuestra construcción usada para demostrar el Teorema 4.1.2 nos permite construir sucesiones de elementos loxodrómicos que convergen a elementos elípticos en $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$, véase el final de la sección 4.6 para la prueba del siguiente resultado:

Corolario 4.1.5. *Sea S una superficie de tipo infinito y $\mathbf{p} \in S$ un punto marcado. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}$ en $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ de elementos loxodrómicos que converge en la topología compacto-abierta a un elemento (no trivial) elíptico. En particular, el conjunto formado por todos los elementos de $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ con acción loxodrómica en el grafo de lazos no es cerrado.*

4.2. Preliminares

Introducimos las generalidades de los resultados de J. Bavard y A. Walker en [BW18a] y [BW18b] que usaremos en la prueba del Teorema 4.1.1. Así mismo damos también los conceptos de teoría de superficies planas necesarios para describir la construcción de Hooper-Thurston-Veech en la Sección 4.3.

4.2.1. El grafo de lazos y su frontera

En [BW18a], J. Bavard y A. Walker describen de manera precisa los elementos de la frontera de Gromov del grafo de lazos $L(S; \mathbf{p})$ en términos de la *cubierta cónica*. Por otro lado, en [BW18b] describen los elementos en $\text{Mod}(S; \mathbf{p})$ con acción loxodrómica en $L(S; \mathbf{p})$. Describimos brevemente los aspectos generales de su trabajo que usaremos.

El siguiente Teorema es una reformulación del Teorema 1.1 y el Lema 3.4 en [AFP17]. El caso particular cuando $S = \mathbb{S}^2 \setminus (K \cup \{\mathbf{p}\})$ donde K es un conjunto de Cantor contenido en el ecuador horizontal de $\mathbb{S}^2$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^2$ es el polo norte se le atribuye a J. Bavard [Bav16]. Véase también [FA19] para una versión más general.

Teorema 4.2.1 ([Bav16, AFP17, FA19]). *Sea S una superficie de tipo infinito y $\mathbf{p} \in S$ un punto marcado. Entonces el grafo de lazos $L(S; \mathbf{p})$ es conexo, Gromov-hiperbólico y tiene diámetro infinito.*

Para describir la frontera de Gromov de $L(S; \mathbf{p})$ necesitamos introducir el *grafo de rayos completo* asociado a S . De aquí en adelante asumimos que S es una superficie hiperbólica de primer tipo, véase la Nota 1.2.12, y consideramos a $\mathbf{p}$ como una ponchadura de la superficie, es decir, es un fin plano aislado de S . Tomando en cuenta lo anterior, $\mathbf{p}$ es una cúspide de S .

Un *rayo corto* en S es un arco esencial con exactamente un punto final en $\mathbf{p}$, es decir, el otro punto final está en $\text{Ends}(S) \setminus \{\mathbf{p}\}$. Por la Proposición 1.2.14 todo lazo o rayo corto en S tiene un único representante geodésico en su clase de isotopía.

Un *rayo largo* en S es una geodésica simple bi-infinita con un fin en $\mathbf{p}$ y cuyo fin restante nunca es un punto en $\text{Ends}(S)$.

Definición 4.2.2 (Grafo de rayos completo). Sea S una superficie (de tipo infinito) hiperbólica de primer tipo y p una ponchadura de S . El *grafo de rayos completo* de S , denotado por $R(S; p)$, es el grafo simplicial abstracto cuyo conjunto de vértices está formado por todas las clases de isotopía de lazos, rayos cortos y rayos largos en S y dos vértices generan una arista en $R(S; p)$ si tienen representantes disjuntos en su clase de isotopía.

Nota 4.2.3. A diferencia del grafo de lazos $L(S; p)$, el grafo de rayos completo $R(S; p)$ tiene una cantidad no numerable de vértices.

Un hecho crucial y nada obvio del trabajo J. Bavard y A. Walker es que el grupo $\text{Mod}(S; p)$ actúa por isometrías en el grafo de rayos completo $R(S; p)$, Lema 5.5.1 en [BW18b]. Para esto ellos introducen la *cubierta cónica* de la superficie S .

La *cubierta cónica* de S , denotada por S_C , es el espacio cubriente de S asociado al subgrupo $\mathbb{Z}$ de $\pi_1(S)$ generado por una curva cerrada simple γ alrededor de p . La cubierta cónica S_C es conformemente equivalente a un disco ponchado, donde la ponchadura $\tilde{p}$ es el único levantamiento de la cúspide p , véase la Figura 4.1. Definimos la *circunferencia cónica*, $\mathbb{S}_C^1$, como la frontera de la cubierta cónica S_C . Notemos que toda geodésica simple en S que representa a un lazo, rayo corto o rayo largo, orientado y con origen en p , tiene un único levantamiento geodésico en S_C con un fin en $\tilde{p}$ y el otro fin en la circunferencia cónica $\mathbb{S}_C^1$.

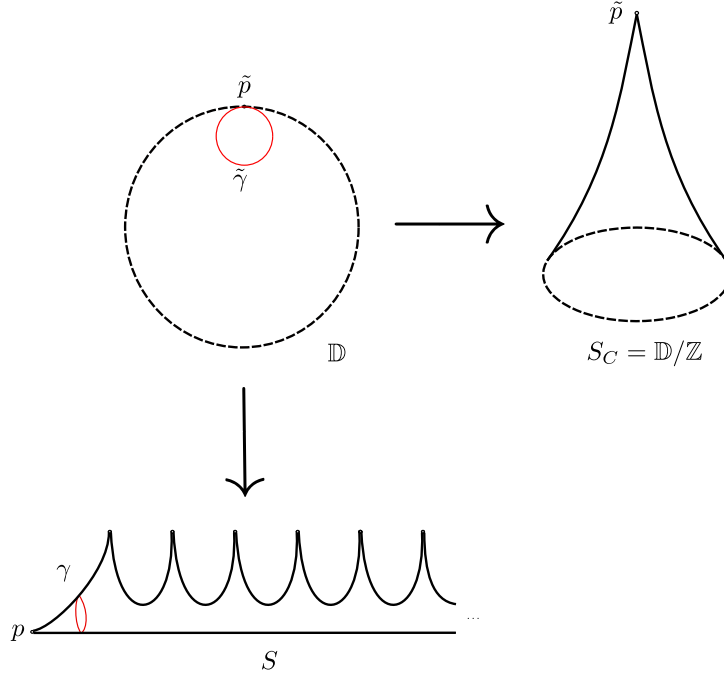


Figura 4.1: S_C es la cubierta cónica de S .

El conjunto de puntos finales en la circunferencia cónica de los levantamientos a la cubierta cónica de lazos orientados es denso en $\mathbb{S}_C^1$. Dado que todo $\phi \in \text{Mod}(S; p)$ fija la ponchadura p , existe $\tilde{\phi} : S_C \rightarrow S_C$ levantamiento de ϕ a la cubierta cónica S_C . Como ϕ preserva el orden cíclico de los puntos finales de los levantamientos de lazos, se tiene que $\tilde{\phi}$ se extiende a un homeomorfismo sobre $S_C \cup \mathbb{S}_C^1$. Por lo tanto, $\text{Mod}(S; p)$ actúa por isometrías en $R(S; p)$.

Teorema 4.2.4 ([BW18b]). Sea S una superficie de tipo infinito, hiperbólica de primer tipo con al menos una ponchadura p . Entonces el grafo de rayos completo $R(S; p)$ no es conexo. Además, $R(S; p)$ tiene una componente conexa que contiene a todo lazo y rayo corto de S , tiene diámetro

infinito y es cuasiisométrico al grafo de lazos $L(S; p)$. Cualquier otra componente conexa de $R(S; p)$ es un clique³ cuyos elementos son exclusivamente rayos largos.

Llamamos *componente principal* a la componente conexa de $R(S; p)$ que contiene a todo lazo y rayo corto de S . Observemos que si γ es un rayo largo no contenido en la componente principal de $R(S; p)$ entonces está a distancia infinita de esta componente conexa. En particular, γ intersecta transversalmente a todo lazo y rayo corto en S . Los rayos largos no contenidos en la componente principal se llaman *rayos que llenan S* (high-filling rays). Con este lenguaje, toda componente conexa de $R(S; p)$ distinta de la componente principal es un clique de rayos que llenan S .

Denotemos con $\mathcal{H}(S; p)$ al conjunto de todos los rayos que llenan S en $R(S; p)$. En [BW18a], J. Bavard y A. Walker dotan a $\mathcal{H}(S; p)$ de una topología, véanse Sección 4.1 y la Definición 5.2.4 en [Ibid.] para detalles.

Teorema 4.2.5. *Sea $\mathcal{E}(S; p) = \mathcal{H}(S; p) / \sim$, donde $\sim$ identifica todos los rayos high-filling contenidos en el mismo clique y dotemos a este conjunto con la topología cociente. Entonces existe un homeomorfismo $\text{Mod}(S; p)$ -equivariante $F : \mathcal{E}(S; p) \rightarrow \partial L(S; p)$ donde $\partial L(S; p)$ es la frontera de Gromov del grafo de lazos.*

Sea $\phi \in \text{Mod}(S; p)$ un elemento loxodrómico y $\phi^+, \phi^- \in \partial L(S; p)$ los puntos en la frontera de Gromov fijos por ϕ . Por el Teorema 4.2.5, ϕ^+ y ϕ^- son cliques de rayos que llenan S .

Teorema 4.2.6 (Teorema 7.1.1 en [BW18b]). *Sea ϕ un elemento loxodrómico de $\text{Mod}(S; p)$ respecto a su acción en el grafo de lazos $L(S; p)$. Entonces los puntos $\phi^+, \phi^- \in \partial L(S; p)$ fijos por ϕ tienen una cantidad finita de vértices, más aún, tienen la misma cardinalidad.*

Definimos el *peso* de un elemento loxodrómico $\phi \in \text{Mod}(S; p)$ como la cardinalidad de ϕ^+ o bien de ϕ^- .

4.2.2. Superficies planas

En pocas palabras, la construcción de Hooper-Thurston-Veech consiste en lo siguiente: dada una superficie de tipo infinito S y un par de multicurvas α y β tal que su unión llena la superficie (más hipótesis adicionales) construir una estructura plana sobre S en donde los giros de Dehn izquierdos T_α y T_β alrededor de las multicurvas α y β , respectivamente, son automorfismo afines. En esta sección tratamos las generalidades de superficies planas que usaremos para describir de forma precisa la construcción de Hooper-Thurston-Veech.

Una *estructura plana* en una superficie X es un atlas maximal de funciones $\tau := \{\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}\}$ donde $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de X y cada ϕ_i es un homeomorfismo sobre su imagen tal que las funciones de transición de τ son traslaciones o reflexiones por un punto, estas últimas son funciones de la forma $z \mapsto -z + c$ para alguna $c \in \mathbb{C}$.

Sea X una superficie dotada de una métrica Riemanniana. Un punto $p \in X$ es una *singularidad cónica* de ángulo $n\pi$ para algún $n \in \mathbb{N}$ si existe una vecindad abierta $U \subset X$ de p isométrico a una vecindad del origen $V \subset \mathbb{C}^*$ con métrica $(dr)^2 + (nr d\theta)^2$. Si $n = 2$ llamamos a p un *punto regular* de S .

Definición 4.2.7 (Superficie plana y superficie de traslación). Una *superficie plana* es un par $M := (X, \tau)$ con X una superficie y τ una estructura plana sobre $X \setminus \Sigma$ en donde $\Sigma \subset X$ satisface lo siguiente:

³Un clique es un grafo simplicial completo.

1. Σ es un subconjunto discreto y cerrado de X y
2. todo elemento $z \in \Sigma$ es una singularidad cónica.

Si todas las funciones de transición de τ son traslaciones llamamos a M una *superficie de traslación*.

En la definición anterior, X puede ser una superficie de tipo infinito. Un ejemplo de estas superficies planas es: llamemos X^* al resultado de pegar los lados de una cantidad infinita numerable de polígonos compactos por medio de traslaciones o reflexiones por un punto. En general X^* no es una superficie, pues los vértices de una cantidad infinita de polígonos pueden estar pegados. Obtenemos una superficie plana de tipo infinito X al remover de X^* todos los puntos que no tienen una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{C}$.

Completación métrica. Sea M es una superficie plana. Entonces $X \setminus \Sigma$ hereda una métrica plana por medio del *pull back* de la métrica Euclidiana sobre $\mathbb{C}$. En particular, todos los puntos de $X \setminus \Sigma$ son regulares. Denotamos con $\widehat{M}$ a la completación métrica de $X \setminus \Sigma$ respecto a esta métrica. Al conjunto de puntos no-regulares de $\widehat{M}$ lo denotamos con $\text{Sing}(M) \subset \widehat{M}$ y lo llamamos el conjunto de *singularidades* de $\widehat{M}$, véase [DHV19].

Cubriente doble orientado. Si M no es una superficie de traslación entonces M tiene un cubriente doble $d : \widetilde{M} \rightarrow M$ tal que $\widetilde{M}$ es una superficie de traslación por medio del *pull back* de la estructura plana de M . Supongamos que z_0 es una singularidad cónica de M de ángulo $n\pi$. Si n es par entonces $d^{-1}(z_0)$ está formado por dos singularidades cónicas de $\widetilde{M}$ de ángulo $n\pi$, en cambio, si n es impar entonces $d^{-1}(z_0)$ es una singularidad cónica de $\widetilde{M}$ de ángulo $2n\pi$, véase la Sección 1.1.4 en [DHV19].

Transformaciones afines. Sean $M_1 := (X_1, \tau_1)$ y $M_2 := (X_2, \tau_2)$ superficies planas con conjuntos de singularidades cónicas Σ_1 y Σ_2 , respectivamente. Una función $f : M_1 \rightarrow M_2$ con $f(\Sigma_1) \subseteq \Sigma_2$ es *afín* si $f|_{X_1 \setminus \Sigma_1}$ es una función $\mathbb{R}$ -afín en coordenadas locales. Un *automorfismo afín* de M_1 es un homeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_1$ afín. Denotamos con $\text{Aff}(M_1)$ al grupo de todos los automorfismos afines de M_1 y con $\text{Aff}^+(M_1)$ al subgrupo de $\text{Aff}(M_1)$ formado por todos los automorfismos afines de M_1 que preservan la orientación. Dado $f \in \text{Aff}(M)$, la derivada de f define un único elemento $Df \in \text{GL}(2, \mathbb{R})/\{\text{Id}, -\text{Id}\}$ al cual llamamos la *derivada* de f .

Flujo de líneas. Identifiquemos el círculo unitario $\mathbb{S}^1$ el conjunto de direcciones y tomemos una dirección $\theta \in \mathbb{S}^1$. Si M es una superficie de traslación entonces el campo de direcciones que se obtiene del pull back del campo vectorial constante $V_{\mathbb{C}, \theta}(z) := e^{i\theta}$ en $\mathbb{C}$ define un campo vectorial $V_{M, \theta}$ sobre M . En este caso, las curvas solución del campo vectorial $V_{M, \theta}$ define un flujo $F_{M, \theta}^t$ sobre M el cual se llama *flujo de líneas* ó *flujo de traslación* sobre M en la dirección θ . Estrictamente hablando, $F_{M, \theta}^t$ no es un flujo en M , pues puede alcanzar un punto singular de M en tiempo finito. En general, si M es una superficie plana arbitraria, entonces el pull back del campo vectorial $V_{\mathbb{C}, \theta}$ sobre $\mathbb{C}$ solo define un *campo direcciones* sobre M . En este caso, las curvas integrales de este campo de direcciones define una *foliación* $\mathcal{F}_{M, \theta}$ sobre M en la dirección θ . Cuando el contexto sea claro, suprimimos M en $V_{M, \theta}$, $F_{M, \theta}^t$ y $\mathcal{F}_{M, \theta}$, véase la Sección 1.1.5 en [DHV19].

Cilindros y bandas. Un *cilindro horizontal*, denotado por $C_{c, I}$, es una superficie de traslación de la forma $([0, c] \times I) / \sim$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, no necesariamente acotado, y $(0, s)$ está identificado con (c, s) para todo $s \in I$. El número c y la longitud del intervalo I , $\text{long}(I)$, se llaman la *circunferencia* y la *altura* de $C_{c, I}$, respectivamente. El *modulo* del cilindro $C_{c, I}$ se define por $\frac{\text{long}(I)}{c}$.

Una *banda horizontal*, denotado por $C_{\infty, I}$, es una superficie de traslación de la forma $\mathbb{R} \times I$ con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto acotado. Análogamente, la *altura* de la banda horizontal $C_{\infty, I}$ se define por $\text{long}(I)$.

Un subconjunto abierto de una superficie de traslación M es un *cilindro* (respectivamente, *banda*) en la dirección $\theta \in \mathbb{S}^1$ si es isométrico a $e^{-i\theta}C_{c, I}$ (respectivamente, $e^{-i\theta}C_{\infty, I}$). Para superficies planas en general la definición de cilindros y bandas es similar aunque en este caso la dirección está bien definida hasta cambio de signo.

Definición 4.2.8 (Descomposición en cilindros). Sea M una superficie plana y $\theta \in \mathbb{S}^1$ una dirección. Una *descomposición en cilindros* de M en la dirección θ es una colección maximal (bajo la contención de conjuntos) $\{C_k\}_{k \geq 0}$ de cilindros en la dirección θ en M disjuntos a pares tal que $M = \overline{\bigcup_{k \geq 1} C_k}$.

4.3. Construcción de Hooper-Thurston-Veech

En esta sección describimos la *construcción de Hooper-Thurston-Veech* la cual es la generalización a superficies de tipo infinito de la construcción de Thurston-Veech para superficies de tipo finito, véase el Teorema 4.3.1. Esta construcción está inspirado en el trabajo de P. Hooper [Hoo15] en donde construye una superficie de traslación a partir de un grafo bipartito con determinadas propiedades (*ribbon graph*). A diferencia de él, nosotros tomamos como datos de entrada una superficie de tipo infinito arbitraria y un par de multicurvas que llenan la superficie. Para ser más precisos: dadas dos multicurvas α y β en una superficie de tipo infinito S tal que su unión llena la superficie (con hipótesis adicionales, véase Teorema 4.1.1), construimos el *grafo de configuración*, $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, el cual es un grafo simplicial bipartito localmente finito cuyos vértices tienen grado uniformemente acotado. Usando teoría espectral de grafos aplicado al grafo $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ para cada $\lambda \geq 2$ y h una función λ -armónica del operador de adyacencia asociado al grafo $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ es posible dotar a S de una estructura plana τ tal que los giros de Dehn izquierdos T_α y T_β actúan por automorfismos afines en la superficie plana $M := M(\alpha, \beta, \lambda, h) := (S, \tau)$. La superficie plana M no necesariamente es una superficie de traslación. El grupo $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ generado por T_α y T_β es libre de rango 2 y la derivada induce una representación fiel $\rho : \langle T_\alpha, T_\beta \rangle \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, véase el Teorema 4.3.8.

También contrastamos la construcción de Thurston-Veech con la construcción de Hooper-Thurston-Veech. En la construcción de Thurston-Veech, la clase de isotopía de un elemento $f \in G_\lambda$ con derivada parabólica es un elemento reducible de $\text{Mod}(S_g^n)$, es decir, deja invariante una multicurva en S_g^n , véase la Sección 1.5. Este fenómeno no es válido en general en la construcción de Hooper-Thurston-Veech. Como evidencia mostramos un par de multicurvas α y β en el monstruo del lago Ness S , con $\lambda = 2$ y h la función λ -armónica igual a la función constante 1 tal que $f := T_\alpha \circ T_\beta$ tiene derivada parabólica pero que para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y toda curva esencial γ en $M := M(\alpha, \beta, \lambda = 2, h = 1)$, $f^n(\gamma)$ no es isotópica a γ , véase la Proposición 4.3.11. La propiedad anterior para f caracteriza a los homeomorfismos pseudo-Anosov de superficies de tipo finito.

Es posible generalizar la construcción de Hooper-Thurston-Veech al considerar multicurvas arbitrarias α y β cuya unión llena S . Similarmente, tomando $\lambda \geq 2$ y h una función λ -armónica del operador de adyacencia de $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ es posible dotar de una estructura plana a una subsuperficie de la superficie S . Esta subsuperficie es densa en S y en general no es homeomorfa a S . Detallamos esto en la Sección 4.7.

Iniciamos por recordar la construcción de Thurston-Veech, véase el Teorema 14.1 en [FM12].

Teorema 4.3.1 (Construcción de Thurston-Veech). Sean $\alpha := \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ y $\beta := \{\beta_j\}_{j=1}^m$ dos multicurvas que llenan una superficie de tipo finito S_g^n . Entonces existe $\lambda := \lambda(\alpha, \beta) > 1$ y una representación fiel $\rho : \langle T_\alpha, T_\beta \rangle \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ dada por:

$$T_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_\beta \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, $f \in \langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ es periódico, reducible o pseudo-Anosov de acuerdo a si $\rho(f)$ es elíptico, parabólico o hiperbólico, respectivamente.

La idea para probar el teorema anterior es encontrar una estructura plana sobre S_g^n que admita descomposiciones en cilindros horizontal y vertical $\{H_i\}_{i=1}^n$ y $\{V_j\}_{j=1}^m$, respectivamente, tal que cada cilindro tiene módulo $\frac{1}{\lambda}$. Además, las curvas centrales de H_i y V_j son α_i y β_j , respectivamente. Esta estructura plana existe y es única hasta reescalamiento por el teorema de Perron-Frobenius, véase el Teorema 14.2 en [FM12]. Para ver que el giro de Dehn T_α alrededor de la multicurva α es una transformación afín de S_g^n tomemos un cilindro horizontal H_i con curva central α_i cuya altura es h_i y cuya circunferencia es c_i . Como el módulo del cilindro H_i es $\frac{1}{\lambda}$ tenemos que $\lambda h_i = c_i$. La imagen de los vectores $(c_i, 0)$ y $(0, h_i)$ bajo la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nos da $(c_i, 0)$ y $(\lambda h_i, h_i) = (c_i, h_i)$, respectivamente. Cortando sobre la diagonal el nuevo cuadrilátero, véase la Figura 4.2, y pegando de acuerdo a la identificación recuperamos el cilindro H_i . Por lo tanto, T_α actúa como un automorfismo afín sobre H_i y fija la frontera de H_i . El mismo procedimiento se puede aplicar a todo cilindro horizontal en $\{H_i\}_{i=1}^n$. De esta manera obtenemos que T_α es un automorfismo afín sobre todo S , véase la Figura 4.2. Análogamente se prueba que T_β es un automorfismo afín de S .

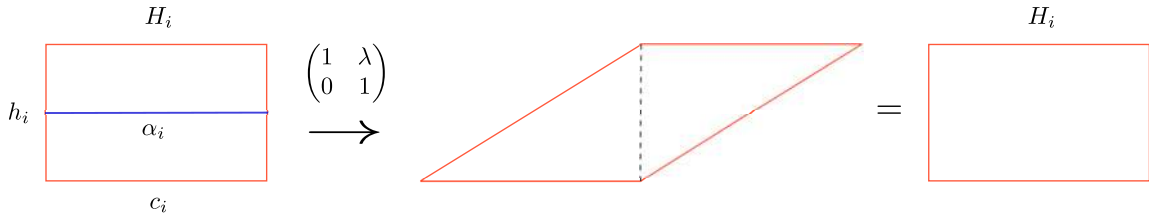


Figura 4.2: Acción del giro de Dehn afín T_α sobre el cilindro H_i .

La construcción de Hooper-Thurston-Veech es una generalización de la construcción de Thurston-Veech a superficies de tipo infinito. A continuación explicamos cómo se obtiene dicha generalización.

Definición 4.3.2 (Grafo de configuración). Sean $\alpha := \{\alpha_i\}_{i \in I}$ y $\beta := \{\beta_j\}_{j \in J}$ dos multicurvas en posición mínima en una superficie S . El *grafo de configuración* del par (α, β) es el grafo bipartito $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ cuyo conjunto de vértices es $I \sqcup J$ y hay una arista entre los vértices $i \in I$ y $j \in J$ por cada intersección entre las curvas α_i y β_j .

Nota 4.3.3. Como las multicurvas son colecciones de curvas localmente finitas, véase la Definición 1.2.7, el grafo de configuración $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ es localmente finito. Además, el conjunto de aristas de $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto $(\bigcup_{i \in I} \alpha_i) \cap (\bigcup_{j \in J} \beta_j)$.

Recordamos que una colección de curvas α localmente finita llena una superficie S si toda componente conexa de $S \setminus \alpha$ es homeomorfa a un disco o un disco ponchado, véase la Definición 1.2.15.

Lema 4.3.4. Sean $\alpha := \{\alpha_i\}_{i \in I}$ y $\beta := \{\beta_j\}_{j \in J}$ dos multicurvas en posición mínima en una superficie S . Si las multicurvas α y β son tales que su unión llena la superficie S entonces el grafo $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ es conexo.

Definición 4.3.5 (Operador de adyacencia). Sea G un grafo conexo y localmente finito con conjunto de vértices V . El *operador de adyacencia* de G es la aplicación lineal $A := A(G) : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ que a cada $h \in \mathbb{R}^V$ le asigna $A(h) \in \mathbb{R}^V$ definido por

$$A(h)(v) := \sum_{w \sim v} h(w),$$

donde la suma es tomada sobre los vértices w adyacentes a v en G con multiplicidad dada por el número de aristas entre w y v .

Descomposición en cilindros y funciones armónicas. Sea M una superficie plana que contiene dos descomposiciones en cilindros, una horizontal $H := \{H_i\}_{i \in I}$ y otra vertical $V := \{V_j\}_{j \in J}$, respectivamente, tal que todo cilindro en $H \cup V$ tiene *módulo* $\frac{1}{\lambda}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Tomemos las curvas centrales α_i de H_i y β_j de V_j , respectivamente, y definamos $\alpha := \{\alpha_i\}_{i \in I}$ y $\beta := \{\beta_j\}_{j \in J}$. Entonces α y β son multicurvas cuya unión llena M , además, los giros de Dehn izquierdos T_α y T_β alrededor de las multicurvas α y β , respectivamente, son automorfismos afines de M . Sea $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ el grafo de configuración asociado al par de multicurvas (α, β) con conjunto de vértices $I \cup J$ y consideremos la función $h : I \cup J \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ que asigna a cada índice la *altura* del cilindro correspondiente. Entonces $h \in \mathbb{R}^{I \cup J}$ y satisface la ecuación $Ah = \lambda h$ donde A es el operador de adyacencia del grafo $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$.

Definición 4.3.6 (Función λ -armónica). Sea G un grafo conexo localmente finito con conjunto de vértices V , A el operador de adyacencia de G y $\lambda > 0$. Una función $h : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ es λ -armónica si satisface la ecuación $Ah = \lambda h$.

En resumen, la existencia de descomposiciones en cilindros horizontal y vertical en una superficie plana donde todos los cilindros tienen módulo $\frac{1}{\lambda}$ implica la existencia de una función λ -armónica del operador de adyacencia del grafo de configuración $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. La construcción de Hooper-Thurston-Veech para superficies de tipo infinito es el converso del proceso anterior: dadas dos multicurvas α y β cuya unión llena una superficie (topológica) de tipo infinito S y dada h una función λ -armónica del operador de adyacencia del grafo $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ se puede construir una estructura plana τ (que depende de α , β , λ y h) sobre S con descomposiciones en cilindros horizontal y vertical (con curvas centrales α y β , respectivamente) donde todos los cilindros tienen módulo $\frac{1}{\lambda}$.

Antes de describir la construcción de Hooper-Thurston-Veech revisamos algunos resultados de teoría espectral de grafos infinitos, véase [MW89] para una revisión completa de este tema. Decimos que un grafo conexo tiene *grado finito* si el grado de los vértices está uniformemente acotado.

Sea G un grafo conexo bipartito de grado finito con una cantidad infinita de vértices. Entonces Por el Teorema 3.1 en [MW89], el operador de adyacencia asociado a G es un operador acotado sobre el espacio de Hilbert $\ell^2(V)$ donde V es el conjunto de vértices de G . Luego, por el Teorema 4.4 en [MW89], el radio espectral del operador de adyacencia coincide con su norma. Por lo tanto, el radio espectral del operador de adyacencia $A(G)$ es finito.

Definimos el *radio espectral* del grafo G , denotado por $r(G)$, como el radio espectral del operador de adyacencia asociado a G .

Lema 4.3.7. Sea G un grafo bipartito conexo, de grado finito y con una cantidad infinita de vértices. Entonces $r(G)$ es finito, más aún, $r(G) \geq 2$.

Demostración. Solo necesitamos ver que $r(G) \geq 2$. Por la hipótesis sobre el grafo G es posible encontrar una copia del grafo de los números naturales $\mathbb{N}$ como subgrafo de G . Dado que el radio espectral del operador de adyacencia de $\mathbb{N}$ es igual a 2, véase el Ejercicio 8 en la pág. 268 en [TL58], tenemos que $r(A) \geq 2$, véase el Teorema 4.13 en [MW89]. $\square$

Teorema 4.3.8 (Construcción de Hooper-Thurston-Veech). *Sea S una superficie de tipo infinito. Suponga que existe $\alpha := \{\alpha_i\}_{i \in I}$ y $\beta := \{\beta_j\}_{j \in J}$ dos multicurvas cuya unión llena la superficie S tales que*

- (i) *el grado de los vértices del grafo de configuración $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ está uniformemente acotado y*
- (ii) *la frontera de toda componente complementaria de $N(\alpha \cup \beta)$ en S es un polígono con un número finito de lados, donde $N(\alpha \cup \beta)$ es una vecindad regular de $\alpha \cup \beta$ en S .*

Entonces se satisface lo siguiente:

1. *Para todo $\lambda \geq 2$ existe una función h positiva λ -armónica de $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ que define una estructura plana τ sobre S .*
2. *La superficie plana $M := M(\alpha, \beta, \lambda, h) := (S, \tau)$ admite dos descomposiciones en cilindros una horizontal $H := \{H_i\}_{i \in I}$ y otra vertical $V := \{V_j\}_{j \in J}$ donde todo cilindro en $H \cup V$ tiene módulo $\frac{1}{\lambda}$. Las curvas centrales de H y V son las multicurvas α y β , respectivamente.*
3. *Los giros de Dehn izquierdos T_α y T_β alrededor de las multicurvas α y β , respectivamente, son automorfismos afines de M y fijan la frontera de los cilindros en H y V , respectivamente.*
4. *El subgrupo de $\text{Mod}(S)$ generado por las clases de isotopía de T_α y T_β es isomorfo a $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle \leq \text{Aff}^+(M)$. Además, $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ es libre de rango 2 y la derivada define una representación fiel $\rho : \langle T_\alpha, T_\beta \rangle \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ dada por:*

$$T_\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_\beta \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota 4.3.9. 1. Notemos que si p es una ponchadura de la superficie S , entonces $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ es también un subgrupo de $\text{Mod}(S; p)$.

2. En la Sección 4.6 presentamos la prueba del Teorema 4.1.2 el cual asegura la existencia de pares de multicurvas que satisfacen las condiciones del Teorema 4.3.8 en toda superficie de tipo infinito.
3. En la Sección 4.7 veremos ejemplos en donde la condición (ii) no se satisface y enunciaremos el marco general donde es válida la construcción de Hooper-Thurston-Veech.

Demostración. Por la condición (i), el hecho que el grafo de configuración $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ es conexo y por el Lema 4.3.7, tenemos que $r(\mathcal{G}(\alpha, \beta)) \geq 2$. Usando el Teorema 6.3 en [MW89] tenemos que para todo $\lambda \geq r(\mathcal{G}(\alpha, \beta)) \geq 2$ la ecuación $Ah = \lambda h$ tiene una solución λ -armónica positiva, donde $A := A(\mathcal{G}(\alpha, \beta))$.

Ahora veremos cómo dotar a S de una estructura plana a partir de una función λ -armónica del operador de adyacencia A . Abusando de la notación, denotamos con $\alpha \cup \beta$ al conjunto $\left(\bigcup_{i \geq 1} \alpha_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \geq 1} \beta_j\right)$ y con $\alpha \cap \beta$ al conjunto $\left(\bigcup_{i \geq 1} \alpha_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \geq 1} \beta_j\right)$. Por simplicidad, consideramos las

ponchaduras de S como puntos marcados en la superficie. Así, toda componente complementaria de $\alpha \cup \beta$ en S es un disco o un disco con un punto marcado en su interior.

Consideramos $\alpha \cup \beta \subset S$ como un grafo encajado en S cuyo conjunto de vértices es $\alpha \cap \beta$ y con conjunto de aristas la colección de arcos en $\alpha \cup \beta \setminus (\alpha \cap \beta)$. Al grafo $\alpha \cup \beta$ le asociamos su *grafo dual* denotado por $(\alpha \cup \beta)^* \subset S$, el cual lo definimos como sigue: sea D una componente conexa de $S \setminus (\alpha \cup \beta)$. Si D es homeomorfo a un disco con punto un marcado hacemos $p_D \in D$ igual al punto marcado de D , en otro caso, tomamos $p_D \in D$ un punto en el interior de D . El conjunto de vértices de $(\alpha \cup \beta)^*$ es el conjunto $\{p_D : D \text{ es componente conexa de } S \setminus (\alpha \cup \beta)\}$. Ahora, por cada arista e del grafo $\alpha \cup \beta$ asignamos la única arista $e^* \in E((\alpha \cup \beta)^*)$ transversal a e que conecta los vértices de las componentes conexas de $S \setminus (\alpha \cup \beta)$ adyacentes a e (posiblemente la misma), véase la Figura 4.27.

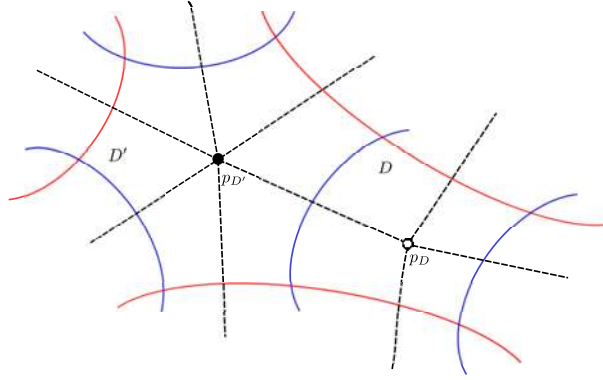


Figura 4.3: El grafo $\alpha \cup \beta$ está en línea continua (curvas azules y rojas), en línea discontinua negra está el grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$.

Por la condición (ii) el grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ define una descomposición celular de S por cuadriláteros, es decir, cada componente conexa de $S \setminus (\alpha \cup \beta)^*$ es un cuadrilátero. Notemos que cada cuadrilátero contiene exactamente un punto de $\alpha \cap \beta$.

Sea $h : V(\mathcal{G}(\alpha, \beta)) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ una función λ -armónica con $\lambda \geq 2$ y consideremos las funciones

$$p_\alpha, p_\beta : E(\mathcal{G}(\alpha, \beta)) \rightarrow V(\mathcal{G}(\alpha, \beta))$$

tales que para cada arista $e \in E(\mathcal{G}(\alpha, \beta))$, $p_\alpha(e)$ y $p_\beta(e)$ son los vértices finales de e en I y J , respectivamente.

Recordemos que el conjunto de aristas de $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ está en correspondencia biyectiva con $\alpha \cap \beta$. Así, por cada arista $e \in E(\mathcal{G}(\alpha, \beta))$, definimos R_e como la cerradura del cuadrilátero topológico en S que contiene en su interior al punto en $\alpha \cap \beta$ correspondiente a e . Para construir la estructura plana sobre S , a cada cuadrilátero topológico R_e , con $e \in E(\mathcal{G}(\alpha, \beta))$ asociamos el rectángulo $[0, h(p_\beta(e))] \times [0, h(p_\alpha(e))]$, véase la Figura 4.4. Esto define una estructura plana τ sobre S y denotamos con $M := M(\alpha, \beta, \lambda, h) := (S, \tau)$ a la superficie plana obtenida.

Notemos que para cada $i \in I$, los rectángulos en el conjunto $\{R_e : e \in p_\alpha^{-1}(i)\}$ tienen altura $h(i)$. Sea H_i el conjunto que se obtiene de pegar los rectángulos que pertenecen al conjunto $\{R_e : e \in p_\alpha^{-1}(i)\}$ de acuerdo al recorrido de α_i en alguna dirección preferida. Entonces tenemos que α_i es la curva central del cilindro $H_i = \bigcup_{e \in p_\alpha^{-1}(i)} R_e$ cuya *circunferencia* está dada por

$$\sum_{e \in p_\alpha^{-1}(i)} h(p_\beta(e)) = \sum_{j \sim i} h(j) = Ah(i) = \lambda h(i).$$

Por lo tanto el módulo del cilindro H_i es igual a $\frac{1}{\lambda}$. Similarmente, β_j es la curva central del cilindro $V_j := \bigcup_{e \in p_\beta^{-1}(j)} R_e$ el cual tiene módulo $\frac{1}{\lambda}$.

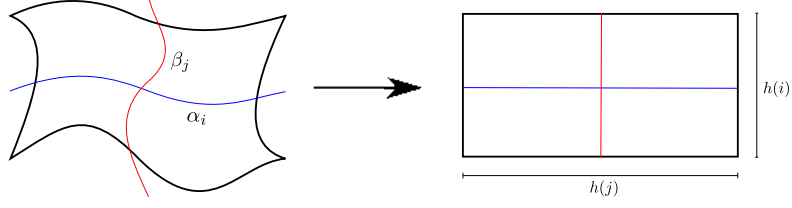


Figura 4.4: Rectificación del rectángulo R_e .

De lo anterior, los giros de Dehn positivos T_α y T_β son automorfismos afines de M con derivadas $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. Así, $\rho = \langle T_\alpha, T_\beta \rangle \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ definida por

$$T_\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_\beta \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

es un homomorfismo de grupos.

Tomemos el subgrupo de $\text{Mod}(S)$ generado por las clases de isotopía de T_α y T_β el cual denotamos por $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle$, aquí estamos identificando los giros de Dehn con su clase de isotopía. Dado que todo automorfismo afín isotópico a la identidad es la identidad podemos ver a $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ como subgrupo de $\text{Aff}^+(M)$. De esta manera la derivada induce el homomorfismo de grupos $\rho : \langle T_\alpha, T_\beta \rangle \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Ahora demostramos que $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ es libre de rango 2, la demostración es tomada de [Lei04]. Denotemos con G_λ al subgrupo de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ generado por la matrices $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$. Veamos que G_λ es libre de rango 2. El dominio fundamental de la acción de G_λ sobre $\mathbb{H}^2$ es

$$\left\{ -\frac{\lambda}{2} < \text{Re}(z) \leq \frac{\lambda}{2} \right\} \cap \left\{ |z + \frac{1}{\lambda}| > \frac{1}{\lambda} \right\} \cap \left\{ |z - \frac{1}{\lambda}| \geq \frac{1}{\lambda} \right\} \subset \mathbb{H}^2.$$

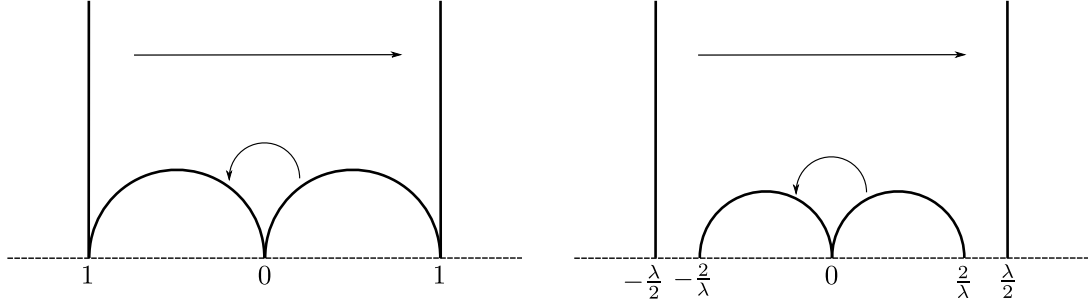


Figura 4.5: (Izquierda) dominio fundamental para $\lambda = 2$. (Derecha) dominio fundamental para $\lambda > 2$.

Si $\lambda = 2$, entonces $\mathbb{H}^2/G_\lambda$ es homeomorfo a la esfera con tres ponchaduras S_0^3 . En cambio, si $\lambda > 2$, entonces la envolvente convexa de $\mathbb{H}^2/G_\lambda$ es homeomorfa al disco con dos ponchaduras. En cualquiera de los dos casos, G_λ es libre de rango 2, véase la Figura 4.5.

Como $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ está generado por dos elementos, tenemos que $\psi : \mathbb{F}_2 \rightarrow \langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ es sobreyectiva. Así, el homomorfismo $\rho \circ \psi : \mathbb{F}_2 \rightarrow G_\lambda \cong \mathbb{F}_2$ también es sobreyectivo. Dado que $\mathbb{F}_2$ es *Hopfiano*, véase [MKS04], tenemos que $\rho \circ \psi$ es un isomorfismo. De esta manera ψ es inyectivo y por lo tanto un isomorfismo.

□

Nota 4.3.10. Sean (α, β) un par de multicurvas como en el Teorema 4.3.8. Por construcción, todo vértice del grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ tiene grado par. Por consiguiente si $v \in V((\alpha \cup \beta)^*)$ tiene grado k , este define una singularidad cónica de M de ángulo $\frac{\pi k}{2}$. En particular, si $\frac{k}{2}$ es impar, entonces la superficie M no es de traslación, pues en una superficie de traslación toda singularidad cónica es de ángulo múltiplo par de π .

Thurston-Veech vs Hopper-Thurston-Veech. Sean $\lambda \geq 2$ y denotemos con G_λ al subgrupo de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ generado por las matrices $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$. Al final de la demostración del Teorema 4.3.8 probamos que G_λ es libre de rango 2. Ahora, si $\lambda > 2$ entonces todo elemento parabólico de G_λ es conjugado a alguno de los generadores de G_λ . En cambio, si $\lambda = 2$ entonces todo elemento parabólico de G_λ es conjugado a $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & -\lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, véase el final de la demostración del Teorema 4.3.8 y la Figura 4.5. Esta observación nos permite encontrar una diferencia sustancial entre la construcción de Hooper-Thurston-Veech respecto a la construcción de Thurston-Veech.

Proposición 4.3.11. Sea M la escalera infinita (infinite staircase) como en la Figura 4.6 y sean α y β las multicurvas obtenidas de las curvas centrales de los cilindros en las descomposiciones en cilindros horizontal y vertical de M , respectivamente. Entonces la transformación afín $f := T_\alpha \circ T_\beta$ tiene derivada parabólica y satisface que para toda curva cerrada simple esencial γ en M y para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $f^n(\gamma)$ no es isotópica a γ .

Nota 4.3.12. En la construcción de Thurston-Veech, todo elemento del grupo $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ con derivada parabólica es reducible, es decir, deja invariante una multicurva en la superficie, véase el Teorema 4.3.1.

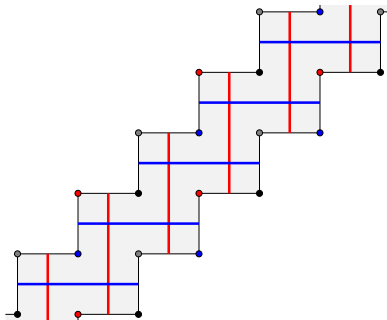


Figura 4.6: La escalera infinita M es homeomorfa al monstruo del lago Ness, figura tomada de [DHFV19].

Demostración. Sea $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ el grafo de configuración asociado a α y β . En este caso, $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ es isomorfo al grafo de los números enteros. Luego, para $\lambda = 2$ tenemos que $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dada por $h(n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ es la única (salvo un reescalamiento) función 2-armónica del operador de adyacencia asociado a $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Por el Teorema 4.3.8 los giros de Dehn T_α y T_β son automorfismos afines de $M := M(\alpha, \beta, \lambda = 2, h \equiv 1)$ con derivadas $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

La transformación afín $f := T_\alpha \circ T_\beta$ tiene derivada parabólica pues $\rho(f) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Luego, $\rho(f)$ tiene como (único) vector propio a $(x, y) = (1, -1)$ el cual tiene dirección $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Aplicando la caracterización del flujo de líneas sobre la escalera al infinito en [HHW13], tenemos que el flujo de líneas $\mathcal{F}_\theta^t$ se descompone en dos bandas infinitas. Esto implica en particular que para toda curva cerrada simple esencial γ en M y para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $f^n(\gamma)$ no es isotópica a γ . En la Figura 4.7 se describe el par de multicurvas en el monstruo del lago Ness (topológico) tal que la construcción de Hooper-Thurston-Veech da origen a la escalera al infinito $M := M(\alpha, \beta, \lambda = 2, h \equiv 1)$.

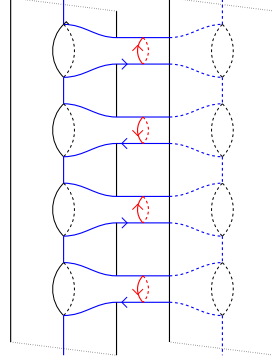


Figura 4.7: Multicurvas orientadas α (azul) y β (rojo) en el monstruo del lago Ness tal que la construcción de Hooper-Thurston-Veech produce la escalera al infinito $M(\alpha, \beta, \lambda = 2, h \equiv 1)$, figura tomada de [DHV19].

□

Grafos bipartitos con $\lambda = 2$. Veremos que existe una cantidad finita de grafos bipartitos infinitos para los cuales su operador de adyacencia tiene valor propio 2.

Proposición 4.3.13. *Sea Γ un grafo bipartito, conexo de grado finito con una cantidad infinita de vértices. Entonces $r(\Gamma) = 2$ si y solo si Γ es alguno de los grafos en la Figura 4.8, más aún, en cada caso el operador de adyacencia tiene una única (salvo un reescalamiento) función 2-armónica.*

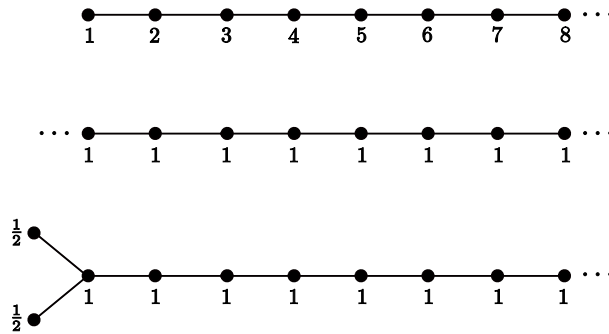


Figura 4.8: Grafos bipartitos infinitos cuyo operador de adyacencia tiene valor propio $\lambda = 2$. En los vértices hemos asignado el valor de la única (salvo reescalamiento) función 2-armónica.

Demostración. Sea $I \sqcup J$ la partición en conjuntos disjuntos del conjunto de vértices de Γ . Notemos que por las hipótesis sobre Γ tenemos que tanto I como J tienen cardinalidad infinita.

Podemos verificar que para cada uno de los grafos en la Figura 4.8 el operador de adyacencia tiene una única (salvo un reescalamiento) solución 2-armónica, véase la Figura 4.8 para un ejemplo de una función 2-armónica en cada caso. Para la otra parte de la prueba, usaremos la clasificación de grafos bipartitos que tienen radio espectral exactamente 2, véase el Teorema 4.3 en [Lei04]. Estos grafos son mostrados en la Figura 4.9 (Figura 7 en [Lei04]).

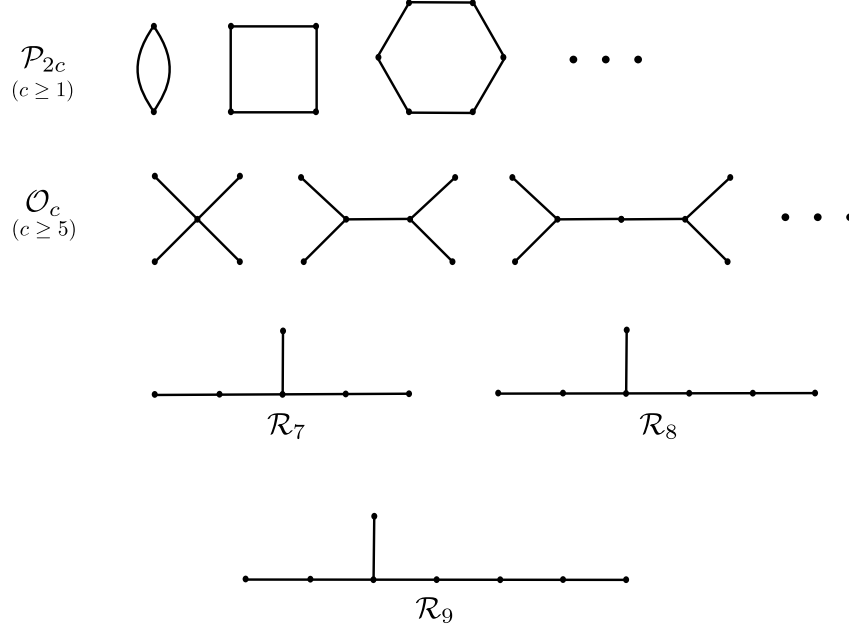


Figura 4.9: Grafos bipartitos finitos cuyo operador de adyacencia tiene valor propio $\lambda = 2$.

Sea Γ un grafo bipartito como en la proposición con radio espectral $r(\Gamma) = 2$. Supongamos que Γ no es un árbol. Como Γ es bipartito entonces Γ contiene un ciclo de longitud par C , es decir, C es de la forma $\mathcal{P}_{2c}$ para algún $c \geq 1$, véase la Figura 4.9. Como Γ tiene una cantidad infinita de vértices entonces existe D un subgrafo propiamente contenido en Γ y que contiene propiamente a C . Por el Teorema 4.2 en [Lei04], $r(D) > r(C) = 2$ y por el Teorema 4.13 en [MW89], $r(\Gamma) \geq r(D)$. Así $r(\Gamma) > 2$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto Γ no contiene ciclos, es decir, Γ es un árbol.

Dado que Γ es un árbol entonces satisface uno de los siguientes puntos:

1. el grado de todo vértice es a lo más 2,
2. contiene a lo más un vértice de grado 3,
3. contiene al menos dos vértices de grado 3,
4. contiene al menos un vértice de grado 4.

En el caso 1, Γ corresponde con el grafo de los números naturales $\mathbb{N}$ o con el grafo de los números enteros $\mathbb{Z}$. Ambos grafos tienen radio espectral igual a 2. En el caso 2, si Γ contiene a $\mathcal{R}_8$, véase la Figura 4.9, entonces $r(\Gamma) > 2$. Para verificar esto, usamos el mismo argumento de arriba que se usó para probar que Γ no contiene ciclos. De esta manera Γ no contiene propiamente una copia del grafo $\mathcal{R}_8$. Por inspección concluimos que en este caso Γ corresponde con el último grafo en la Figura 4.8. En el caso 3, Γ contiene propiamente como subgrafo a $\mathcal{O}_c$ para algún

$c > 5$. Nuevamente, $r(\Gamma) > 2$ lo cual es una contradicción. Finalmente para el caso 4, Γ contiene propiamente como subgrafo a $\mathcal{O}_5$, véase la Figura 4.9. Por consiguiente, $r(\Gamma) > 2$ lo cual no puede ser. $\square$

4.4. Direcciones λ -renormalizables

Como hemos mencionado anteriormente, P. Hooper en [Hoo15] toma como dato de entrada un grafo bipartito (*ribbon graph*) y construye una superficie de traslación, véase la Sección 3.4 en [Ibid]. Algunos de los resultados principales de P. Hooper en [Ibid.] conciernen a la dinámica del flujo de líneas en una *dirección renormalizable* sobre la superficie de traslación. A diferencia de P. Hooper, nosotros tomamos como datos de entrada dos multicurvas que llenan la superficie, $\lambda \geq 2$ y una función λ -armónica y obtenemos una superficie plana M que en general no es de traslación. Sin embargo, el doble cubriente orientado de M , $\widetilde{M}$, sí es una superficie de traslación y las descomposiciones en cilindros horizontal y vertical de M , cuyos cilindros tienen módulo $\frac{1}{\lambda}$, inducen descomposiciones en cilindros horizontal y vertical de $\widetilde{M}$, respectivamente, con cilindros todos de módulo $\frac{1}{\lambda}$. De esta manera la superficie de traslación $\widetilde{M}$ se puede obtener por medio de la construcción de P. Hooper y podemos aplicar sus resultados sobre el flujo de líneas a la superficie $\widetilde{M}$. En la Sección 4.5 establecemos resultados sobre el flujo de líneas válidos para $\widetilde{M}$ que se heredan a la superficie plana M . Esto permite obtener el Teorema 4.1.1.

Definición 4.4.1 (Direcciones λ -renormalizables). Sean $\lambda \geq 2$ y $G_\lambda \leq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ el grupo generado por las matrices $\rho(T_\alpha)$ y $\rho(T_\beta)$ donde ρ es la representación como en el Teorema 4.3.8. El grupo G_λ actúa sobre la línea real proyectiva $\mathbb{RP}^1$ de forma lineal. Decimos que una dirección $\theta \in \mathbb{S}^1$ es λ -renormalizable si su proyectivización en $\mathbb{RP}^1$ está en el conjunto límite de G_λ y no es la proyectivización de una dirección propia de cualquier elemento conjugado en G_λ de

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que la superficie M como en el Teorema 4.3.8 es de traslación y sea $\mathcal{F}_\theta^t$ el flujo de líneas sobre M en la dirección λ -renormalizable θ .

Teorema 4.4.2 (Teorema 6.2 en [Hoo15]). *El flujo de líneas $\mathcal{F}_\theta^t$ no tiene conexiones silla.*

Teorema 4.4.3 (Teorema 6.4 en [Hoo15]). *El flujo de líneas $\mathcal{F}_\theta^t$ es conservativo, es decir, dado $A \subset M$ con medida (de Lebesgue) positiva y cualquier $T > 0$, para casi todo $x \in M$ existe $t \geq T$ tal que $\mathcal{F}_\theta^t(x) \in A$.*

4.5. Prueba del Teorema 4.1.1

Sean S una superficie de tipo infinito con una ponchadura $p \in \text{Ends}(S)$, α y β dos multicurvas cuya unión llena S que satisfacen las hipótesis del Teorema 4.1.1, $\lambda \geq 2$ y h una función λ -armónica del operador de adyacencia asociado al grafo de adyacencia $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Por el Teorema 4.3.8, existe una estructura plana τ sobre S tal que los giros de Dehn T_α y T_β son automorfismo $\mathbb{R}$ -afines sobre $M := (S, \tau)$. Además, M tiene dos descomposiciones en cilindros una horizontal $\mathcal{H}$ y otra vertical $\mathcal{V}$ tales que las curvas en α y β son las curvas centrales de los cilindros en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente. Consideremos la representación fiel $\rho : \langle T_\alpha, T_\beta \rangle \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ dado por:

$$T_\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_\beta \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $f \in \text{Mod}(S; p)$ en el semigrupo positivo generado por T_α y T_β^{-1} dado por una palabra en donde cada generador aparece. Entonces $\rho(f)$ es una matriz positiva hiperbólica con direcciones propias θ y θ' asociados a los valores propios $\eta > 1$ y η^{-1} de $\rho(f)$, respectivamente. Notemos que la normalización de estas direcciones propias son direcciones λ -renormalizables las cuales las denotamos también por θ y θ' , véase la Definición 4.4.1. Entonces θ y θ' definen dos foliaciones singulares medibles transversas $(\mathcal{F}_\theta^u, \mu_u)$ y $(\mathcal{F}_{\theta'}^s, \mu_s)$ inestable y estable, respectivamente, tales que $f \cdot (\mathcal{F}_\theta^u, \mu_u) = (\mathcal{F}_\theta^u, \eta \mu_u)$ y $f \cdot (\mathcal{F}_{\theta'}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}_{\theta'}^s, \eta^{-1} \mu_s)$. Por brevedad escribimos $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ para referirnos a estas foliaciones, véase [FM12] para saber detalles acerca de como se definen las medidas transversas μ_u y μ_s , aunque para la discusión que sigue no es esencial.

Recordemos que todo vértice del grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ es una singularidad cónica de la superficie plana M de ángulo $k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Denotamos con $\mathcal{C}$ al conjunto de todos los vértices del grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$. Para cada $q \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{F} \in \{\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s\}$ denotamos por $\text{Sep}_q(\mathcal{F})$ al conjunto de hojas de la foliación $\mathcal{F}$ con origen en q , a tales hojas les llamamos *separatrices con origen* en q . Notemos que si el ángulo total de $q \in \mathcal{C}$ es $k\pi$ entonces $|\text{Sep}_q(\mathcal{F}^u)| = |\text{Sep}_q(\mathcal{F}^s)| = k$. También, dado $A \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{F} \in \{\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s\}$, $Q(A, \mathcal{F}) \subset M$ denota la unión de todas las separatrices de $\mathcal{F}$ con origen en un punto de A , es decir, $Q(A, \mathcal{F}) := \bigcup_{q \in A, l \in \text{Sep}_q(\mathcal{F})} l$.

La siguiente proposición es esencial para la demostración del Teorema 4.1.1.

Proposición 4.5.1. *Sea $q \in \mathcal{C}$. Entonces toda separatriz en $\text{Sep}_q(\mathcal{F}^s) \cup \text{Sep}_q(\mathcal{F}^u)$ es densa en M .*

Demostración. Primero consideramos el caso cuando M es una superficie de traslación. Al final consideramos el caso cuando M no es una superficie de traslación.

Mostremos que cualquier separatriz en $\text{Sep}_q(\mathcal{F}^u)$ es densa. La misma afirmación es cierta para las separatrices en $\text{Sep}_q(\mathcal{F}^s)$ cuya demostración es análoga. La prueba se sigue de dos afirmaciones:

Afirmación 1. *La unión de todas las separatrices de $\mathcal{F}^u$, $Q = Q(\mathcal{C}, \mathcal{F}^u)$, es densa en S .*

Para probar esto, usamos fuertemente el trabajo de P. Hooper [Hoo15] y que la superficie M es de traslación. Supongamos que existe un conjunto U abierto no vacío en $M \setminus \overline{Q_C}$. Notemos que U es $\mathcal{F}^u$ -invariante. Luego, dado que la dirección θ es una dirección λ -renormalizable, por el Teorema 4.4.2, el flujo de líneas $\mathcal{F}^u$ no tiene conexiones silla. Así, el conjunto U no puede ser un cilindro y por lo tanto U contiene una banda infinita, *i.e.* un conjunto que (salvo una rotación) es isométrico a $(a, b) \times \mathbb{R}$ para algún $a < b$. Pero esto es imposible pues, por el Teorema 4.4.3 (Teorema 6.4 in [Hoo15]), el flujo de líneas $\mathcal{F}^u$ es conservativo. Aquí termina la prueba de la Afirmación 1.

De aquí en adelante, si γ es una separatriz de $\mathcal{F}^u$ con origen en $q \in \mathcal{C}$, denotamos por $\gamma(x)$, con $x > 0$, a la parametrización de γ para la cual $\lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x) = q$ y $|\gamma'(x)| = 1$.

Sea C un cilindro horizontal o vertical en M y $\xi \in \mathcal{C} \cap \partial C$. Denotamos por $\gamma_{\xi, C}^u$ (respectivamente, $\gamma_{\xi, C}^s$) a la única separatriz de $\mathcal{F}^u$ (respectivamente, $\mathcal{F}^s$) con origen en ξ para la cual $\gamma_{\xi, C}^u(t) \in C$ para todo t en una vecindad pequeña de 0. Si $H \in \mathcal{H}$ es un cilindro horizontal, sean $\mathcal{C}^b(H)$ y $\mathcal{C}^t(H)$ el conjunto de todos los puntos en $\mathcal{C} \cap \partial H$ que están en el borde inferior y superior⁴ del cilindro H , respectivamente; similarmente, para un cilindro vertical $V \in \mathcal{V}$ denotamos con $\mathcal{C}^e(V)$ y $\mathcal{C}^w(V)$ al conjunto de todos los puntos en $\mathcal{C} \cap \partial V$ contenidos en el borde izquierdo y derecho de V , respectivamente.

Sean $H \in \mathcal{H}$ y $V \in \mathcal{V}$ tales que $H \cap V \neq \emptyset$. En este caso, $H \cap V$ es un rectángulo en M cuyas esquinas denotamos por q^b, q^t, p^b, p^t como se muestra en la Figura 4.10.

⁴Dotamos a M con la orientación inducida por la orientación estándar del plano Euclidiano para que tenga sentido hablar de componentes de frontera izquierda-derecha y superior-inferior de un cilindro.

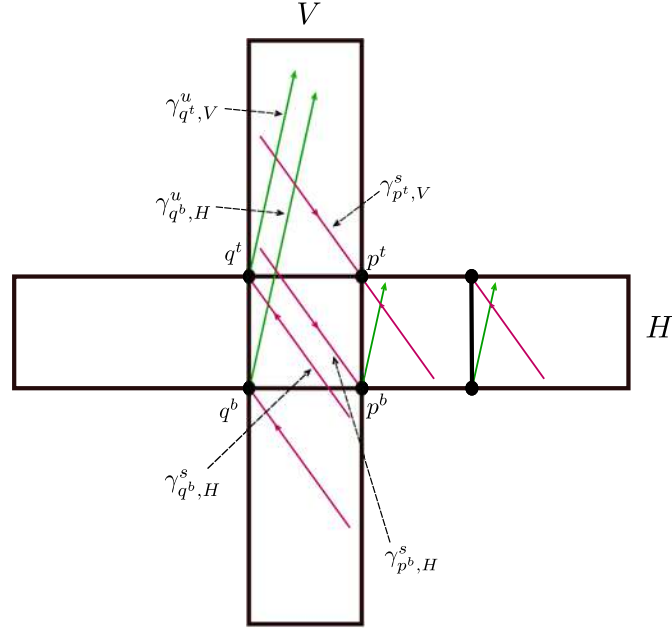


Figura 4.10: Rectángulo $H \cap V$.

Afirmación 2. Para cada $\xi \in \{q^t, p^b, p^t\}$, la separatriz $\gamma_{\xi, H}^u$ está contenida en $\omega(\gamma_{q^b, H}^u)$, el conjunto ω -límite⁵ de $\gamma_{q^b, H}^u$.

Para probar esta afirmación, observemos que las coordenadas de $\rho(f)$ son todas positivas. En particular, $\rho(f)$ envía el cuadrante $\mathbb{R}_{x \geq 0, y \geq 0}^2$ en sí mismo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el espacio propio inestable de $\rho(f)$ está contenido en $\mathbb{R}_{x \geq 0, y \geq 0}^2 \cup \mathbb{R}_{x \leq 0, y \leq 0}^2$. Entonces el espacio propio estable de $\rho(f)$ está contenido en $\mathbb{R}_{x \geq 0, y \leq 0}^2 \cup \mathbb{R}_{x \leq 0, y \geq 0}^2$. Así, $\gamma_{q^b, H}^u$ intersecta a $\gamma_{\xi, H}^s$, más aún, $(\gamma_{q^b, H}^u \cap \gamma_{\xi, H}^s) \cap (H \cup V) \neq \emptyset$, véase la Figura 4.10. Al tomar la evaluación de todos estos puntos en potencias positivas sucesivas de f obtenemos que $\xi \in \omega(\gamma_{q^b, H}^u)$, y por lo tanto, $\gamma_{\xi, H}^u \subseteq \omega(\gamma_{q^b, H}^u)$. Esto termina la prueba de la Afirmación 2.

Como consecuencia inmediata de la Afirmación 2 tenemos lo siguiente: para cualesquiera $H \in \mathcal{H}$ y $V \in \mathcal{V}$ se satisface:

- (i) para cada $\xi \in \mathcal{C}^b(H) \cup \mathcal{C}^t(H)$, la separatriz $\gamma_{\xi, H}^u$ está contenida en $\omega(\gamma_{q^b, H}^u)$, y
- (ii) para cada $\xi \in \mathcal{C}^e(V) \cup \mathcal{C}^w(V)$, la separatriz $\gamma_{\xi, V}^u$ está contenida en $\omega(\gamma_{q^b, V}^u) = \omega(\gamma_{q^b, H}^u)$.

Ahora estamos en condiciones de probar la Proposición 4.5.1 para el caso cuando M es una superficie de traslación. Sea $q \in \mathcal{C}$ y $H \in \mathcal{H}$ un cilindro horizontal tal que $q \in \mathcal{C}^b(H)$. Denotemos con $\alpha_H \in \alpha$ la curva central del cilindro H y sea $\text{Lk}(\alpha_H)$ el *link* (*enlace*) de α_H en el grafo de configuración $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Por los hechos (i) y (ii) arriba, para cada cilindro vertical V' con $V' \cap H \neq \emptyset$ y para todo $\xi \in \mathcal{C}^e(V') \cup \mathcal{C}^w(V')$, la separatriz $\gamma_{\xi, V'}^u$ está contenida en $\omega(\gamma_{q^b, H}^u)$. Notemos que la curva central de V' está contenida en $\text{Lk}(\alpha)$. Usando la conexidad del grafo de configuración $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ y aplicando repetidamente los hechos (i) y (ii) obtenemos que toda separatriz de la foliación $\mathcal{F}^u$ está contenida en $\omega(\gamma_{q^b, H}^u)$, es decir, $Q(\mathcal{C}, \mathcal{F}^u) \subseteq \omega(\gamma_{q^b, H}^u)$. Por la Afirmación 1 se concluye el resultado de la Proposición 4.5.1 cuando M es una superficie de

⁵ $\omega(\gamma_{q^b, H}^u, f) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f^n(\gamma_{q^b, H}^u)}$.

traslación. Aquí termina la prueba de la Proposición 4.5.1 en el caso cuando M es una superficie de traslación.

Supongamos ahora que M no es una superficie de traslación. Sea $d : \widetilde{M} \rightarrow M$ la cubierta doble orientada de M . Veamos que la superficie de traslación $\widetilde{M}$ admite dos descomposiciones en cilindros una horizontal y otra vertical tal que el módulo de todo cilindro en estas descomposiciones es $\frac{1}{\lambda}$.

Notemos que para cada cilindro horizontal $H \in \mathcal{H}$ en la descomposición por cilindros horizontales de M , $d^{-1}(H)$ está formado por dos copias isométricas de H . Además, estos cilindros son maximales en $\widetilde{M}$. El único caso en que $d^{-1}(H)$ es un solo cilindro en $\widetilde{M}$ es precisamente cuando una singularidad cónica de ángulo π está en ∂H . Es un hecho general que si $p \in \mathcal{C}$ es una singularidad cónica de ángulo $n\pi$, entonces $d^{-1}(p)$ está formada por dos singularidades cónicas de ángulo $n\pi$ si n es par, mientras que si n es impar, $d^{-1}(p)$ solo consta de una singularidad cónica de ángulo $2n\pi$. Notemos que los puntos en $\mathcal{C} \cap \partial H$ que son singularidades cónicas de ángulo π en la superficie plana M provienen de ponchaduras (fines planos aislados) de la superficie S . Por lo tanto, $d^{-1}(H)$ no puede ser un cilindro en $\widetilde{M}$. La misma afirmación es cierta para cualquier cilindro vertical en $\mathcal{V}$ y la prueba es análoga. De lo anterior concluimos que $\widetilde{\mathcal{H}} := d^{-1}(\mathcal{H})$ y $\widetilde{\mathcal{V}} := d^{-1}(\mathcal{V})$ definen descomposiciones horizontales y verticales maximales de $\widetilde{M}$ con curvas centrales $\widetilde{\alpha} := d^{-1}(\alpha)$ y $\widetilde{\beta} := d^{-1}(\beta)$, respectivamente.

Ahora, dado que los cilindros en $\widetilde{\mathcal{H}} \cup \widetilde{\mathcal{V}}$ tienen el mismo módulo que los cilindros en $\mathcal{H} \cup \mathcal{V}$, los giros de Dehn alrededor de las multicurvas $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$, $T_{\widetilde{\alpha}}$ y $T_{\widetilde{\beta}}$, respectivamente, son automorfismos afines de $\widetilde{M}$. Además, la derivada de $T_{\widetilde{\alpha}}$ coincide con la derivada de T_{α} y la derivada de $T_{\widetilde{\beta}}$ coincide con la derivada de T_{β} . Así, el levantamiento de f a $\widetilde{M}$, $\widetilde{f}$, es un automorfismo afín sobre $\widetilde{M}$ en el semigrupo positivo generado por $T_{\widetilde{\alpha}}$ y $T_{\widetilde{\beta}}^{-1}$. Además la derivada de $\widetilde{f}$ es igual a la matriz $\rho(f) \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Por consiguiente los vectores propios de la derivada de $\widetilde{f}$ definen dos foliaciones $\widetilde{f}$ -invariantes $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ y $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ medibles transversas en $\widetilde{M}$ tales que $\widetilde{\mathcal{F}}^u = d^{-1}(\mathcal{F}^u)$ y $\widetilde{\mathcal{F}}^s = d^{-1}(\mathcal{F}^s)$.

Sea $q \in \mathcal{C}$ y tomemos $\gamma \in \text{Sep}(\mathcal{F}^u)$ con origen en q . Como $\widetilde{\mathcal{F}}^u = d^{-1}(\mathcal{F}^u)$, existe $\widetilde{\gamma} \subseteq d^{-1}(\gamma)$ separatriz de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ con origen en un punto $\widetilde{q} \in d^{-1}(q)$ tal que $d(\widetilde{\gamma}) = \gamma$. Dado que $\widetilde{M}$ es una superficie de traslación, $\widetilde{\gamma}$ es densa en $\widetilde{M}$. Por consiguiente, γ es densa en M pues d es sobreyectiva. Aquí termina la prueba de la Proposición 4.5.1. $\square$

Continuamos con la prueba del Teorema 4.1.1. Tomemos una estructura hiperbólica de primer tipo sobre S , véase la Nota 1.2.12. Denotemos con $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$ al cubriente universal de S .

Consideremos el grafo de rayos completo $R(S; p)$ de S . Notemos que en este caso, la ponchadura p representa una cúspide de S . Indexamos el conjunto de separatrices de $\mathcal{F}^u$ con origen en la cúspide p de S por $\text{Sep}_p(\mathcal{F}^u) := \{\gamma_i\}_{i=1}^m$. En lo que sigue, a cada $\gamma_i \in \text{Sep}(\mathcal{F}^u)$ le asociaremos una única geodésica δ_i en S y mostraremos que el conjunto $\{\delta_i\}_{i=1}^m$ define un clique de rayos que llenan (high-filling rays) la superficie S . Para los elementos en $\text{Sep}(\mathcal{F}^s)$ los argumentos son análogos. Las ideas usadas están inspiradas en el trabajo de P. Levitt en [Lev83].

Escojamos $\widetilde{p} \in \partial \mathbb{D}$ un levantamiento de la cúspide p , y tomemos $\widetilde{\gamma} \subset \mathbb{D}$ un levantamiento de $\gamma \in \text{Sep}(\mathcal{F}^u)$ que tiene a $\widetilde{p}$ como uno de sus puntos finales.

Notemos que p es una cúspide en S acotada por una región cuya frontera es un polígono con $2m$ lados los cuales son arcos de curvas en $\alpha \cup \beta$. En consecuencia, existe $\eta \in \alpha \cup \beta$ tal que γ intersecta transversalmente a η . Notemos que la foliación $\mathcal{F}^u$ es transversal a toda curva en $\alpha \cup \beta$. Salvo una isotopía acotada⁶ podemos asumir que η es una geodésica cerrada simple en S . Como γ es densa en S , véase la Proposición 4.5.1, γ intersecta transversalmente a η un

⁶Una isotopía $H : S \times I \rightarrow S$ es *acotada* si existe $D > 0$ tal que para todo $t \in I$, $\sup_{s \in S} \{d(s, H(s, t))\} \leq D$, donde d es la métrica hiperbólica sobre S .

número infinito de veces. Por lo tanto, $\tilde{\gamma}$ intersecta un número infinito de levantamientos de η . Afirmamos lo siguiente:

Afirmación 3. $\tilde{\gamma}$ intersecta a cualquier componente conexa de $\pi^{-1}(\eta)$ a lo más una vez.

Sea $\tilde{\eta}$ una componente conexa de $\pi^{-1}(\eta)$ y supongamos que (*) no sucede. Entonces existe un disco D encajado en $\mathbb{D}$ cuya frontera ∂D está acotada por dos arcos transversales, uno contenido en $\tilde{\gamma}$ y el otro contenido en $\tilde{\eta}$. Como el conjunto $\mathcal{C}$ es discreto y cerrado en S , (recordar que $\mathcal{C}$ es el conjunto de vértices de los cuadriláteros que dan origen a la estructura plana sobre S), tenemos que $\pi^{-1}(\mathcal{C}) \cap D$ es finito, donde $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ es el conjunto de singularidades de la foliación $\tilde{\mathcal{F}}^u = \pi^{-1}(\mathcal{F}^u)$ sobre $\mathbb{D}$. Así, existe una hoja de la foliación $\mathcal{F}^u$ tangente al arco de D contenido en $\tilde{\eta}$. Esto contradice que la foliación $\mathcal{F}^u$ es transversal a la curva η . Aquí termina la prueba de la Afirmación 3.

Por la Afirmación 3, existe una sucesión infinita de dominios acotados por geodésicas en $\pi^{-1}(\eta)$ que están anidados en $\mathbb{D} \cup \partial \mathbb{D}$, véase la Figura 4.11. Puesto que el grupo fundamental de S es un grupo Fuchsiano de primer tipo, los puntos finales de $\pi^{-1}(\eta)$ son densos en la circunferencia unitaria $\partial \mathbb{D}$. Por lo tanto, existe un punto en $\tilde{q} := q(\tilde{\gamma}) \in \partial \mathbb{D}$ que es punto final de $\tilde{\gamma}$.

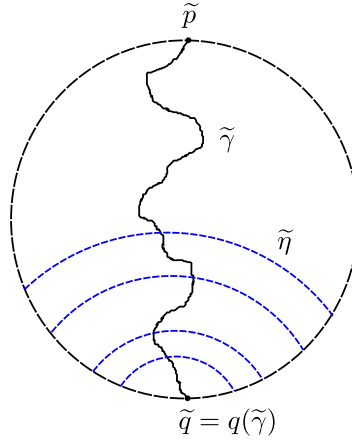


Figura 4.11: Vecindades anidadas del punto $\tilde{q}$ cuya frontera está acotada por geodésicas en $\pi^{-1}(\eta)$.

Como γ no es un lazo en S , pues la foliación $\mathcal{F}^u$ no tiene conexiones de silla, tenemos que $\tilde{q} \neq \tilde{p}$. Sea $\tilde{\delta}$ la única geodésica en $\mathbb{D}$ con puntos finales $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$, y definamos $\delta := \pi(\tilde{\delta})$.

Demostremos que la geodésica δ es simple. Supongamos lo contrario. Entonces existen dos geodésicas conexas de $\pi^{-1}(\delta)$ que se intersectan transversalmente en $\mathbb{D}$. Esto implica que existen dos componentes conexas de $\pi^{-1}(\gamma)$ que se intersectan, lo cual es imposible, pues γ es simple en S .

Ahora demostramos que la geodésica δ es un rayo largo en S . Como γ no es un lazo en S , entonces δ no es un lazo. Por otro lado, sabemos que γ intersecta un número infinito de veces a una curva en $\alpha \cup \beta$. Por la afirmación (*) arriba, tenemos que lo mismo es cierto para δ . Puesto que todo rayo corto es propio en S , δ no puede ser un rayo corto.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, denotemos con $\tilde{q}_i$ al punto final del levantamiento de $\gamma_i \in \text{Sep}_p(\mathcal{F}^u)$ con punto final en $\tilde{p}$, y sea $\delta_i := \pi(\tilde{\delta}_i)$, donde $\tilde{\delta}_i$ es la única geodésica en $\mathbb{D}$ cuyos puntos finales son $\tilde{p}$ y $\tilde{q}_i$. Hemos mostrado arriba que cada δ_i es un rayo largo en S . Dado que las separatrices en $\text{Sep}_p(\mathcal{F}^u)$ no son isotópicas entre sí, se infiere que $\delta_i \neq \delta_j$ para todo $i \neq j$.

Definamos $\Delta := \{\delta_i\}_{i=1}^m$. Notemos que $f(\Delta) = \Delta$ pues f permuta los elementos de $\text{Sep}_p(\mathcal{F}^u)$. Veamos que el conjunto Δ es un clique de rayos que llenan la superficie S , es decir, es un punto

en la frontera de Gromov de $R(S; p)$. Consideremos v un rayo (o lazo) geodésico simple en S con origen en p tal que $v \notin \Delta$. Como todo elemento en Δ es un rayo largo en S , basta probar que v intersecta a algún elemento de Δ . Nuevamente, fijemos $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ y tomemos $\tilde{v}$ el único levantamiento de v con punto final $\tilde{p}$. Declaremos que $\tilde{q}$ es el otro punto final de $\tilde{v}$.

Para el resto de la prueba véase la Figura 4.12. Sea $D \subset \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ un disco cuya frontera está formada por $\tilde{p} \cup \tilde{\gamma}_l \cup \tilde{\gamma}_r \cup A$, donde A es un arco cerrado en $\partial\mathbb{D}$ que contiene a $\tilde{q}$, y $\tilde{\gamma}_l$ y $\tilde{\gamma}_r$ son los levantamientos de γ_l y γ_r , respectivamente, distintos tal que D no contiene en su interior ninguna componente de $\pi^{-1}(\text{Sep}_p(\mathcal{F}^u))$ con punto final $\tilde{p}$. Sean $\tilde{q}_l$ y $\tilde{q}_r$ los puntos finales $\tilde{\gamma}_l$ y $\tilde{\gamma}_r$ en A , respectivamente. Luego, como p es una singularidad de la foliación $\mathcal{F}^u$ existe un arco simple $\Sigma \subset D$ con un punto final en $\tilde{\gamma}_l$ y el otro en $\tilde{\gamma}_r$ que es transversal a la foliación $\pi^{-1}(\mathcal{F}^u)$ excepto en un punto ξ en el interior de Σ en donde la foliación es tangente. Más aún, podemos asumir que la componente conexa D' de $D \setminus \Sigma$ que contiene a $\tilde{p}$ en su frontera no contiene puntos singulares de la foliación $\pi^{-1}(\mathcal{F}^u)$, pues la singularidad p de $\mathcal{F}^u$ no es acumulada por otras singularidades de la foliación. El punto ξ divide a Σ en dos segmentos Σ_L y Σ_R . Por otro lado $\tilde{q}$ divide al segmento A en dos segmentos A_L y A_R .

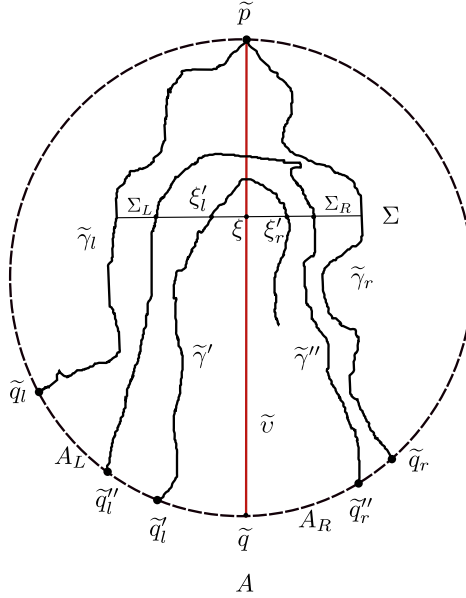


Figura 4.12

Dado que $\gamma \in \text{Sep}_p(\mathcal{F}^u)$ es denso en S , $\pi^{-1}(\gamma)$ es denso en $\mathbb{D}$. En particular, $\pi^{-1}(\gamma) \cap \Sigma$ es denso en Σ pues $\pi^{-1}(\mathcal{F}^u)$ es transversal a $\Sigma \setminus \xi$ y D' no contiene puntos singulares de $\pi^{-1}(\mathcal{F}^u)$. Podemos tomar una hoja $\tilde{\gamma}'$ de $\pi^{-1}(\gamma)$ que intersecta a Σ_L en un punto ξ'_l . Sin pérdida de generalidad, supongamos que uno de sus puntos finales $\tilde{q}_l'$ está en A_L . Dado que $D' \subset D$ no contiene singularidades de la foliación $\pi^{-1}(\mathcal{F}^u)$, $\tilde{\gamma}' \cap \Sigma = \{\xi'_l, \xi'_r\}$ con $\xi'_r \in \Sigma_R$.

Nuevamente, como $\pi^{-1}(\gamma) \cap \Sigma$ es transversal y densa en Σ , existe una hoja $\tilde{\gamma}''$ de $\tilde{\gamma}$ que intersecta Σ_R transversalmente en un punto $\xi''_r \in \Sigma_R$ entre ξ'_r y $\Sigma_R \cap \tilde{\gamma}_r$. Más aún, podemos asumir que un punto final de $\tilde{\gamma}''$ está contenido en A_R suficientemente cerca de $\tilde{q}_r$. Esto se puede hacer así pues $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ (el conjunto de singularidades de la foliación $\pi^{-1}(\mathcal{F}^u)$) es un subconjunto discreto y cerrado de $\mathbb{D}$ y por la forma en que el punto final de $\tilde{\gamma}_r$ fue localizado por medio de vecindades. Por lo tanto, el otro punto final de $\tilde{\gamma}''$ está entre $\tilde{q}_l$ y $\tilde{q}_l'$. De esta manera, la geodésica en D que conecta los puntos finales de $\tilde{\gamma}''$ intersecta a $\tilde{v}$ transversalmente. Así, v y γ se intersectan transversalmente y por lo tanto v intersecta transversalmente a un elemento del conjunto Δ . Esto termina la demostración del Teorema 4.1.1. $\square$

Nota 4.5.2. Observamos que para probar que el conjunto $\Delta = \{\delta_i\}_{i=1}^m$ es un clique de rayos que llenan S basta la densidad de las separatrices de las foliaciones $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ en una vecindad de S que contiene a p .

Tomando en cuenta la nota anterior, recuperamos el Lema 7.1.2 en [BW18b], véase también el Teorema 8.3.1 en *Ibíd.*

Corolario 4.5.3 (Lema 7.1.2 en [BW18b]). *Sea $S' \subset S$ una subsuperficie de tipo finito que contiene a p con complejidad $\kappa(S') \geq 1$, $h' \in \text{Mod}(S')$ un elemento pseudo-Anosov que fija p para el cual p es una singularidad de ángulo k de las foliaciones estable e inestable asociadas a h' . Sea $h \in \text{Mod}(S, p)$ la extensión de h' como la identidad en $S \setminus S'$. Entonces $h \in \text{Mod}(S; p)$ es un elemento loxodrómico de peso k . Más aún, los conjuntos de separatrices basadas en p de las foliaciones invariantes por h' definen (después de estirar como en la prueba del Teorema 4.1.1) los cliques de rayos high-filling fijados por h' .*

Demostración del Corolario 4.1.5. Sean α (curvas azules) y β (curvas rojas) las multicurvas que llenan el monstruo del lago Ness S con punto marcado p como en la Figura 4.13. Escribamos $\beta := \beta' \sqcup \{\mathbf{a}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \sqcup \{\mathbf{b}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\beta_n := \beta' \sqcup \{\mathbf{a}_i\}_{i \geq n} \sqcup \{\mathbf{b}_i\}_{i \geq n}$. Por el Teorema 4.1.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n := T_\alpha \circ T_{\beta_n}^{-1} \in \text{Mod}(S; p)$ tiene acción loxodrómica en el grafo de lazos $L(S; p)$ y por lo tanto en la componente principal de $R(S; p)$ pues esta última es cuasi-isométrica a $L(S)$. Notemos que f_n converge a $f := T_\alpha \circ T_{\beta'}^{-1}$ en la topología compacto-abierta. Es claro que f fija puntualmente los rayos cortos l y l' con origen en p . Por lo tanto f tiene acción elíptica en la componente principal del grafo $R(S; p)$ y por consiguiente en $L(S; p)$.

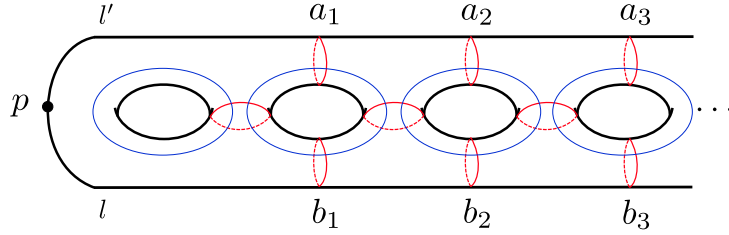


Figura 4.13

4.6. Prueba del Teorema 4.1.2

Inspirados en la construcción de J. Bavard y A. Walker de una superficie a partir de un grafo, desarrollamos la *forma normal* de una superficie de tipo infinito. Esta forma normal es una descripción visual específica de una superficie de tipo infinito la cual nos permite construir explícitamente el par de multicurvas del Teorema 4.1.2.

Denotamos con $T2^{\mathbb{N}}$ al *árbol binario enraizado* infinito con raíz $\emptyset$, esto es, el árbol cuyo conjunto de vértices es numerable de cardinalidad infinita y tal que todo vértice de $T2^{\mathbb{N}}$ tiene grado tres, con excepción del vértice raíz $\emptyset$ quien tiene grado dos. Llamamos d a la métrica combinatoria sobre $T2^{\mathbb{N}}$.

El espacio de fines de $T2^{\mathbb{N}}$, $\text{Ends}(T2^{\mathbb{N}})$, es homeomorfo al conjunto de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ y se puede ver como el conjunto de todos los rayos geodésicos infinitos en $T2^{\mathbb{N}}$ con vértice inicial $\emptyset$, véase la Figura 4.14. Para cada $x \in 2^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$, sea $r(x) := (\emptyset, a_1, a_2, \dots) \in \text{Ends}(T2^{\mathbb{N}})$ el rayo geodésico asociado a x . Entonces $r : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \text{Ends}(T2^{\mathbb{N}})$ es un homeomorfismo.

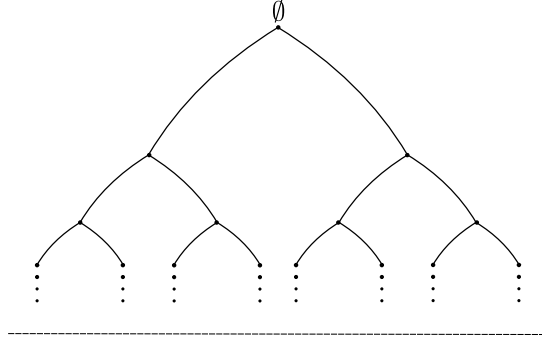


Figura 4.14: Encaje de $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{H}^2$.

Definición 4.6.1. Sea F un subconjunto de $2^{\mathbb{N}}$. Definimos el *árbol inducido* por F por $T_F := \bigcup_{x \in F} r(x) \subseteq \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$.

Observemos que el espacio de fines de T_F coincide con F .

Sean v y v^* dos vértices distintos en $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. Si v está contenido en la geodésica que conecta a v^* con $\emptyset$, entonces decimos que v^* es un *descendiente* de v .

Definición 4.6.2 (Árbol simple). Un subárbol enraizado de $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ sin hojas es *simple* si para todo vértice v con grado dos, diferente del vértice raíz, se tiene que todos los vértices descendientes de v también tiene grado dos.

Cirugía. Sea R un subárbol de $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, y $L \subseteq R^0$ un subconjunto no vacío de vértices de R . A partir de R y L definimos $G_{R,L}$ como el grafo obtenido de R por medio de reemplazar cada vértice en L por un triángulo, véase Figura 4.15. De forma más precisa, definimos $O(L) := \{(v, v^*) \in R^1 : v \in L, v^* \text{ es un descendiente de } v\}$, y denotemos por R' al árbol obtenido de R por medio de subdivisión baricéntrica sobre las aristas de R contenida en $O(L)$. Tomemos $v \in L$.

- 1) Si $\deg(v) = 3$, llamamos v' y v'' a los dos descendientes de v adyacentes a v en R' .
- 2) Si $\deg(v) = 2$, denotamos por v' al único descendiente de v en R' , y tomamos un nuevo vértice v'' que no está en $V(R')$.

Definimos y denotamos por $G := G_{R,L}$ al grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G) := V(R') \sqcup \left(\bigcup_{v \in L, \deg(v)=2} \{v''\} \right)$, y conjunto de aristas $E(G) := E(R') \sqcup \left(\bigcup_{v \in L} \{(v, v''), (v', v'')\} \right)$.

Definición 4.6.3 (Grafo $T(S)$). Sea S una superficie de tipo topológico infinito con género $g \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ y $\text{Ends}(S) \supseteq \text{Ends}_{\infty}(S)$ su espacio de fines y espacio de fines acumulados por género. Tomemos un encaje $f : \text{Ends}(S) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$. Por el Lema 4.6.5, cuya demostración posponemos por el momento, asumimos que el subárbol $T_{f(\text{Ends}(S))}$ de $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ inducido por $f(\text{Ends}(S))$ es simple. Definimos el grafo $T(S)$ de acuerdo a los siguientes criterios:

- Si $g(S) = 0$ definimos $T(S) := T_{f(\text{Ends}(S))}$.
- Si $g(S) = \infty$ entonces $T(S) = G_{T,L}$ con $T := T_{f(\text{Ends}(S))}$ y L el conjunto de vértices de $T_{f(\text{Ends}_{\infty}(S))}$.
- Si $g(S) \in \mathbb{N}$ entonces $T(S) = G_{T,L}$ donde $T := T_{f(\text{Ends}(S))}$ y L es el conjunto de vértices de un segmento geodésico en T de longitud $g(S) - 1$ enraizado en $\emptyset$.

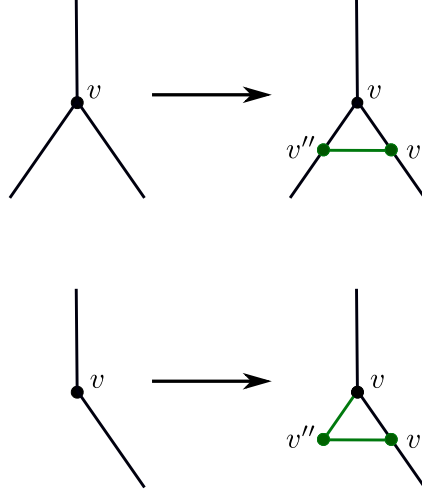


Figura 4.15: Cirugía en los vértices.

La realización geométrica de $T(S)$ se encaja en el plano $\{(x, 0, z) \in \mathbb{H}^3 : z > 0\}$ como en la Figura 4.14. Abusando de la notación, denotamos nuevamente con $T(S)$ a este encaje. Más aún, existe una vecindad regular $N_\epsilon = N_\epsilon(T(S)) \subseteq \mathbb{H}^3$ de $T(S)$ de radio $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeña) tal que S es homeomorfa a $S' := \partial \overline{N_\epsilon}$. Observar que $T(S)$ es retracto por deformación fuerte de S' . Identificamos S con S' y decimos que S está en *forma normal* y que $T(S)$ es el grafo *subyacente* que induce a S .

Nota 4.6.4. En [BW18b], A. Walker and J. Bavard definen el *rooted core tree* T del cual ellos construyen una superficie $S(T)$ homeomorfa a la superficie dada S , véase Lemma 2.3.1 y sección 2.3 en [Ibid]. En nuestra construcción, $T_{f(\text{Ends}(S))}$ es un “rooted core tree” al declarar que un vértice de $T_{f(\text{Ends}(S))}$ está marcado si es un vértice de $T_{f(\text{Ends}_\infty(S))}$. La principal diferencia con el trabajo de Bavard y Walker es que la forma normal que proponemos proviene de un árbol simple. Esta propiedad es fuertemente usada en la demostración del Teorema 4.1.2.

Dado F un subgrafo de $T(S)$, denotamos con $S(F) := \partial \overline{N_\epsilon(F)}$ a la subsuperficie de S inducida por F , donde $N_\epsilon(F) \subset \mathbb{H}^3$ es la vecindad regular de F de radio $\epsilon > 0$. En particular tenemos que $S(T(S)) = S$.

Lema 4.6.5. Sea F' un subconjunto cerrado no vacío del conjunto de Cantor $2^\mathbb{N}$. Entonces existe $F \subseteq 2^\mathbb{N}$ homeomorfo a F' tal que T_F , el subárbol inducido por F , es simple.

Recordemos que el lema anterior garantiza que en la construcción de la forma normal de S se pueda asumir que el árbol $T_{f(\text{Ends}(S))}$ sea simple.

Demostración. Consideremos el homeomorfismo $r : 2^\mathbb{N} \rightarrow \text{Ends}(T2^\mathbb{N})$ como arriba. Sea $x \in F' \subseteq 2^\mathbb{N}$, y $r(x) := \{r_x^n\}_{n \geq 0}$ el rayo geodésico en $T_{F'}$ con vértice inicial $\emptyset$ asociado a x . Hacemos $A_x := \{a_x^n \geq 0 : \text{el vértice } r_x^{a_x^n} \text{ tiene grado tres en } T_{F'}, \text{ o es igual a } \emptyset\}_{n=0}^N$, para algún $N := N(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ahora definamos $\phi : F' \rightarrow 2^\mathbb{N}$ como sigue: para cada $x \in F'$, $\phi(x) \in 2^\mathbb{N}$ está definida por

$$\phi(x)(m) = \begin{cases} x(a_x^m) & \text{si } m \leq N(x) \\ 0 & \text{si } m > N(x). \end{cases}$$

La aplicación ϕ es inyectiva. En efecto, supongamos que x y y son elementos distintos en F' . Entonces $n := \max\{m : r_x^m = r_y^m\} < \infty$. Así, tenemos que $x(n) \neq y(n)$. Como los vértices

r_x^{n+1} y r_y^{n+1} son diferentes, el vértice $r_x^n = r_y^n$ tiene dos ramificaciones en $T_{F'}$. Por consiguiente $n = a_x^n = a_y^n$ para algún $m \geq 0$ y $\phi(x)(m) = x(n) \neq y(n) = \phi(y)(m)$.

Mostremos que ϕ es continua. Supongamos que $\phi(x) \in U_s$ con $s \in 2^n$, donde 2^n denota el espacio de todas las funciones de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ sobre $\{0, 1\}$, y U_s es una vecindad abierta de s en $2^{\mathbb{N}}$, i.e., el conjunto de todas las funciones en $2^{\mathbb{N}}$ tal que su restricción a $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ coincide con s . Sea t igual a la restricción de x a $\{0, 1, 2, \dots, a_m^n\}$, donde $m = n$ si $n \leq N(x)$ o $m = N(x)$ en otro caso. La continuidad de ϕ sigue de notar que x está en $U_t \cap F'$ y $\phi(U_t \cap F') \subseteq U_s$.

Como F' es compacto, ϕ es un homeomorfismo sobre su imagen. Por lo tanto $F := \phi(F')$ es homeomorfo a F' .

Mostremos que el árbol T_F inducido por F es simple. Sea v un vértice de T_F . Entonces $v = r_{\phi(x)}^n$ para algún $x \in F'$ y algún $n \in \mathbb{N}$. Si $n \leq N(x)$, entonces v tiene grado tres. En caso contrario, v tiene grado dos. Esto prueba nuestra afirmación. $\square$

Demostración del Teorema 4.1.2. Dividimos la prueba en dos partes. En la primera parte probamos la existencia de un par de multicurvas cuya unión llena S y que satisfacen los incisos (1) y (2) del teorema. En la segunda parte, usamos la primera parte de la demostración para dar explícitamente un par de multicurvas que satisfacen todos los incisos del Teorema.

Primera parte: Sea S una superficie de tipo topológico infinito en su forma normal y $T(S)$ la gráfica subyacente que induce a S .

La idea de la prueba es construir dos colecciones disjuntas de curvas disjuntas a pares A (curvas azules) y B (curvas rojas) tal que después de olvidar las curvas no-esenciales en A y B , obtenemos el par de multicurvas α and β , respectivamente. Al final probamos que en efecto, este par de multicurvas satisfacen los incisos 1 y 2 del Teorema 4.1.2.

Definamos la gráfica $T_g(S)$ como el subgrafo completo de $T(S)$ generado por todos los vértices contenidos en un triángulo de $T(S)$. Notemos que $T_g(S)$ es conexo.

Sea $T'_g(S)$ el grafo que se obtiene de la unión de $T_g(S)$ con todas las aristas en $T(S)$ adyacentes a $T_g(S)$. Como $T_g(S)$ es conexo, el grafo $T'_g(S)$ también es conexo. Consideremos Δ un triángulo en $T_g(S)$ y sea Δ' la unión disjunta de Δ con todas las aristas en $T'_g(S)$ adyacentes a Δ . Tenemos que Δ' es una de las siguientes posibilidades: (1) la unión disjunta de Δ con exactamente tres aristas adyacentes a él, o (2) la unión disjunta de Δ con exactamente dos aristas adyacentes a él. En cada caso escogemos las curvas azules y rojas como en la Figura 4.16 (Izquierda).

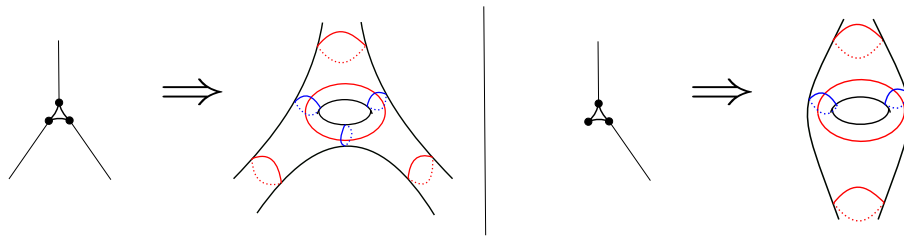


Figura 4.16: Curvas azules y rojas asociadas a la vecindad Δ' del triángulo Δ .

Para cada arista e en $T'_g(S)$ que conecta dos triángulos en $T'_g(S)$, escogemos la curva azul como en la Figura 4.17.

Identificamos dos casos:

Caso (1) $\text{Ends}(S) = \text{Ends}_\infty(S)$. En este caso $T_g(S) = T'_g(S) = T(S)$. Entonces todas las curvas en $A \cup B$ son esenciales y termina la construcción de las colecciones de curvas A and B .

Caso (2) $\text{Ends}(S) \neq \text{Ends}_\infty(S)$. En este caso identificamos dos subcasos adicionales: (i) S tiene a lo más un fin plano aislado, y (ii) S tiene más de dos fines planos aislados.

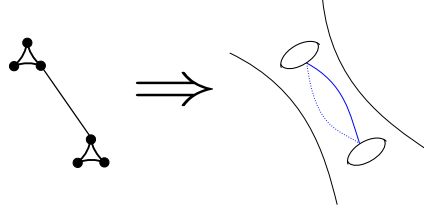


Figura 4.17: Curva azul asociada a la arista que conecta dos triángulos.

- (i) S tiene a lo más un fin plano aislado. Sea F una componente conexa de $T(S) - T'_g(S)$. Tenemos que F es un árbol no vacío con un número infinito de vértices. Sea v_F el único vértice en F que es adyacente a una arista $e(v_F)$ en $T'_g(S)$. Si v_F tiene grado uno en F , entonces todo vértice de F distinto de v_F tiene grado dos, pues $T_{f(\text{Ends}(S))}$ es un árbol simple, véase la Definición 4.6.2. En este caso, tenemos que la subsuperficie $S(F) \subset S$ inducida por F es homeomorfa al disco ponchado. Entonces la curva en S asociada a la arista $e(v_F)$ no es esencial.

Si v_F tiene grado dos en F , coloreamos de color azul todas las aristas en un nivel impar de F , y de color rojo todas las aristas en un nivel par de F , véase la Figura 4.18 (Izquierda). Sean e y e' dos aristas en F ambas en el mismo nivel que comparten un vértice común v . Supongamos que todos los vértices de $e \cup e'$ diferentes de v tienen grado tres. Si e y e' están coloreados de azul (red color), escogemos la curva roja (curva azul) en S como en la Figura 4.18 (Derecha).

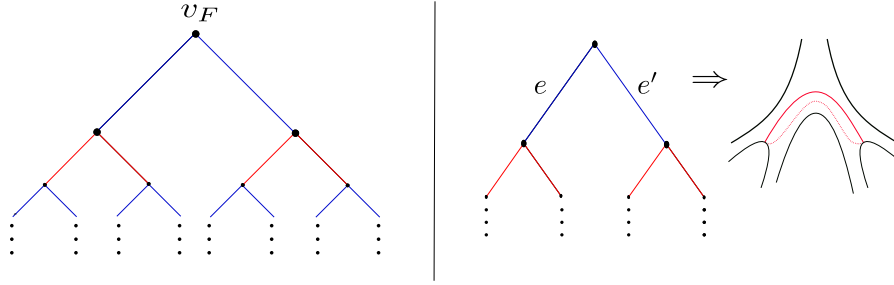


Figura 4.18: (Izquierda) Las aristas de F coloreadas de color azul y rojo. (Derecha) La curva en S correspondiente al par de aristas e y e' coloreadas de azul.

Para cada arista $e(v_F)$, escogemos la curva azul en S como en la Figura 4.19 (Izquierda). Finalmente, para cada arista e de F , tomamos la curva en S coloreada con el mismo color de la arista e como es mostrada en la Figura 4.19 (Derecha). Aquí finaliza la construcción de A and B en este caso.

- (ii) S tiene más de un fin plano aislado. Sea R el subgrafo completo de $T(S)$ generado por el conjunto de vértices dado por la unión disjunta de el vértice $\emptyset$ y el conjunto de todos los vértices de grado tres en $T(S)$. Definimos $T''_g(S)$ como el grafo completo de $T(S)$ generado por todos los vértices en $T(S)$ a distancia a lo más uno de R . Notemos que $T''_g(S)$ es conexo y contiene a $T'_g(S)$, pues $T_{f(\text{Ends}(S))}$ es simple. También, $T''_g(S)$ tiene al menos dos hojas, i.e., vértices de grado uno, pues $\text{Ends}(S)$ tiene al menos dos fines planos aislados. Sean v_1 y v_2 dos hojas en $T''_g(S)$ a distancia 3 en $T''_g(S)$. Entonces existe una única arista e en $T''_g(S)$ cuyos vértices adyacentes están a distancia uno de v_1 o v_2 . Así, tenemos que e está contenida en una componente conexa de $T(S) \setminus T'_g(S)$, ya que e no es una arista

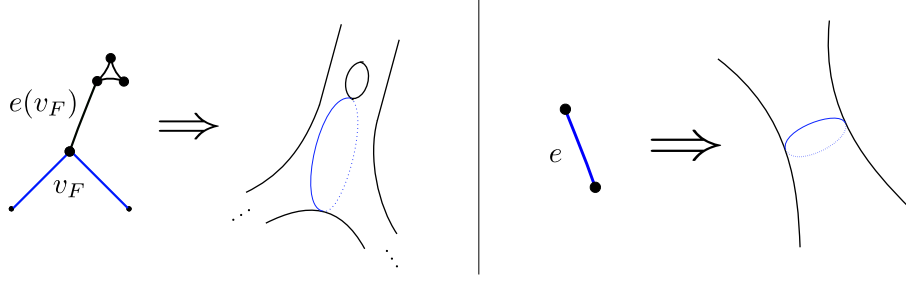


Figura 4.19: (Izquierda) Curva azul asociada a la arista $e(v_F)$ que conecta F con $T'_g(S)$. (Derecha) Curva azul (curva roja) asociada a la arista e of F .

contenida en un triángulo de $T(S)$. Si e está coloreada de color rojo (color azul), escogemos la curva azul (curva roja) en S como en la Figura 4.20. Aquí finaliza la construcción de las colecciones de curvas A and B .

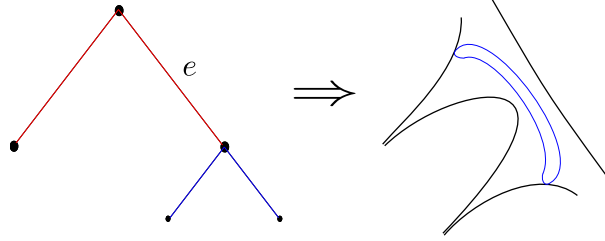


Figura 4.20: La curva azul correspondiente a la arista roja e .

Definimos α y β como el conjunto de curvas esenciales en A y B , respectivamente. Por construcción tenemos que α y β son multicurvas en posición mínima. Además, $\alpha \cup \beta$ llena S . Además, estas multicurvas satisfacen el inciso 1 del Teorema 4.1.2, pues, toda curva $\eta \in \alpha \cup \beta$ intersecta a lo más tres curvas en $\alpha \cup \beta$ y, $i([a], [b]) = |a \cap b| \leq 2$ para toda $a \in \alpha$ y $b \in \beta$.

Por otro lado, toda componente conexa de $S \setminus \alpha$ (y $S \setminus \beta$, respectivamente) es una superficie de tipo finito. Así, toda componente conexa de $S \setminus (\alpha \cup \beta)$ es un polígono finito, más aún, tienen a los más seis lados. Aquí termina la primera parte de la prueba.

Segunda Parte: Consideremos a $p \in S$ como un punto marcado. Sea $m \in \mathbb{N}$ y tomemos una multicurva finita δ en S tal que la componente conexa Q de $S \setminus \delta$ que contiene al punto p es homeomorfa a S_0^{m+2} , i.e., la superficie con género cero y con $m + 2$ ponchaduras. En Q escogemos las curvas azules y rojas como es mostrado en la Figura 4.21, y las llamamos α' y β' , respectivamente. Notemos que la componente conexa de $Q \setminus (\alpha' \cup \beta')$ que contiene al punto p es un polígono con $2m$ lados, i.e., es un $2m$ -polígono.

La idea es extender las multicurvas α' y β' a multicurvas α and β , respectivamente, de tal manera que satisfagan todas las propiedades deseadas. Consideramos dos casos: (i) m es par y (ii) m es impar.

(i) m es par. Sin pérdida de generalidad supongamos que $S \setminus \alpha'$ tiene dos componentes conexas. Sea F la componente conexa de $S \setminus \alpha'$ que no contiene el punto p . Entonces la cerradura de F en S , $\bar{F}$, es una superficie de tipo topológico infinito con $b > 0$ componentes de frontera. Además, $\bar{F} \cap \beta'$ es una colección finita de arcos esenciales en F disjuntos a pares con puntos finales en $\partial \bar{F}$, más aún, los puntos finales de un arco en $\bar{F} \cap \beta'$ están en una componente conexa común de $\partial \bar{F}$.

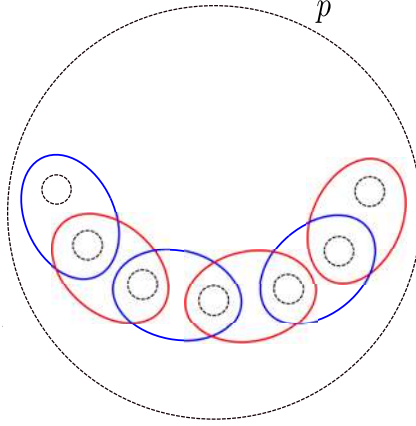


Figura 4.21: Las curvas α' (azules) y β' (rojas) en Q que contiene a p como punto marcado.

Denotamos con θ_F a la colección de arcos en $\bar{F} \cap \beta'$, y declaramos δ_F como el conjunto de curvas en δ contenidas en F .

Afirmación: Existe un par de multicurvas α''_F and β''_F que llenan F , satisfacen los incisos (1) y (2) del Teorema y tales que $\theta_F \cap \beta''_F = \emptyset$.

Asumiendo la afirmación anterior tenemos que $\alpha := \alpha' \cup (\bigcup \alpha''_F)$ y $\beta := \beta' \cup (\bigcup \beta''_F)$ son las multicurvas que deseamos.

Dividimos la prueba de la afirmación en dos casos: $b = 1$ y $b > 1$. Para el caso $b = 1$ identificamos dos subcasos a considerar:

- *F es de tipo finito.* En este caso no es difícil construir el par de multicurvas α'' y β'' como se desea. Para una construcción explícita siga las siguientes líneas. De lo contrario puede pasar al siguiente caso. Procedemos por inducción sobre la complejidad de $\bar{F}$, $\kappa(\bar{F}) = 3g + n - 2$.

Caso base: Si $\kappa(\bar{F}) = 0$ entonces $\bar{F}$ es homeomorfa a $S^2_{0,1}$ y $\alpha''_F = \beta''_F = \emptyset$. Si $\kappa(\bar{F}) = 1$ entonces $\bar{F}$ es homeomorfa o bien a $S^3_{0,1}$ ó a $S^0_{1,1}$. En cualquier caso, hacemos $\beta''_F = \emptyset$ y escogemos α''_F (curvas azules) como en la Figura 4.22.

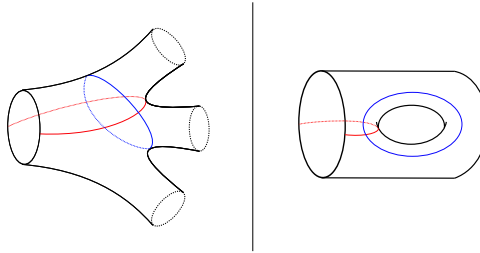


Figura 4.22: En ambos casos, θ_F es el arco esencial en color rojo y α''_F es la curva esencial en color azul.

Supongamos que la afirmación es cierta para $k-1 \geq \kappa(\bar{F}) > 1$, y demostramos la afirmación para $\kappa(\bar{F}) = k$. Tenemos que $|\delta_F| \in \{1, 2\}$ pues las curvas en δ_F acotan un pantalón P en F . Sea $F_1 := F \setminus \bar{P}$ y $\bar{F}_1$ su cerradura en $\bar{F}$. Dado que $\kappa(\bar{F}) > 1$, tenemos que $F_1 \neq \emptyset$. Además, $\partial \bar{F}_1$ es igual a la unión de todas las curvas en δ_F , y θ_F está contenida en $\bar{P}$.

Caso $|\delta_F| = 1$. En este caso $\kappa(\bar{F}_1) = \kappa(\bar{F}) - 1$. Escogemos una curva esencial γ en F tal que su intersección geométrica con la única curva en A_F es exactamente dos, véase la Figura

The diagram shows a surface F that resembles a tube or a neck of a bottle. A blue curve, labeled γ , runs along the length of the tube. A red curve, labeled δ_F , is shown as a cross-section of the tube. A point on the boundary of the tube is labeled θ_F . The surface is depicted with a dashed line to indicate its continuation.

Caso $|\delta_F| = 2$. Llamemos δ_1, δ_2 a las dos curvas en δ_F

Ahora supongamos que F_1 es conexa. Entonces F_1 tiene género mayor que cero. Sea γ una curva separadora (no necesariamente esencial) en F_1 que acota una subsuperficie W de $\bar{F}$ homeomorfa a $S_{1,1}^1$ y tal que contiene en su interior a las curvas δ_1 y δ_2 , véase la Figura 4.24 (Derecha). Tenemos que $\bar{F} \setminus \gamma := W \sqcup F_2$. En W elegimos la curva no separadora γ' tal que $i(\gamma', \delta_1) = i(\gamma', \delta_2) = 1$. Si γ es esencial en F_1 , tomamos γ'' en F_1 de tal manera que $i(\gamma'', \gamma) = 2$. Notemos que $\kappa(\bar{F}_2) = 3(g-1) + n - 2 < \kappa(\bar{F})$. Definamos θ_{F_2} como el único arco esencial contenido en $\bar{F}_2 \cap \gamma''$. De nuevo, por hipótesis de inducción, existe un par de multicurvas α''_{F_2} y β''_{F_2} que llenan F_2 y tal que $\beta''_{F_2} \cap \theta_{F_2} = \emptyset$, donde $\theta_{F_2} := F_2 \cap \delta$. Por lo tanto $\alpha''_F := \{\gamma, \gamma'\} \cup \alpha''_{F_2}$ y $\beta''_F := \{\gamma''\} \cup \delta_F \cup \beta''_{F_2}$ satisfacen lo que queríamos.

- Ahora, consideremos el caso $\mathbf{b} > 1$. Sea γ la curva separadora en $\bar{F}$ que acota una subsuperficie W homeomorfa a $S^1_{0,\mathbf{b}}$. Hacemos $\bar{F} \setminus \gamma := W \sqcup F_1$, y definimos θ_{F_1} como el conjunto de arcos en $\bar{F}_1$ contenidos en $\theta_F \cap \bar{F}_1$. Sean η_1 y η_2 dos curvas en F_1 (no necesariamente esenciales) tal que γ, η_1 y η_2 acotan un pantalón P en F_1 . Si un elemento de θ_F intersecta esencialmente a alguna η_i , reemplazamos este elemento por un arco con los mismos puntos finales completamente contenida en P . Después de hacer estos reemplazos, asumimos que θ_F no intersecta a $\eta_1 \cup \eta_2$, véase la Figura 4.25. Así, $\theta_F \subseteq \bar{P}$. Como $\bar{F}_1$ tiene una componente de frontera, por el Caso $\mathbf{b} = 1$

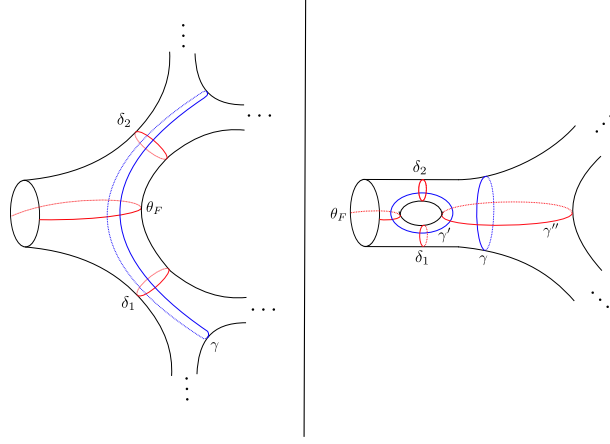


Figura 4.24: (Izquierda) F_1 no es conexa. (Derecha) F_1 es conexa.

arriba, existe un par de multicurvas α''_{F_1} y β''_{F_1} que llenan F_1 y tal que $\theta_{F_1} \cap \beta''_{F_1} = \emptyset$. Finalmente, definimos $\alpha''_F := \{\gamma\} \cup \alpha''_{F_1}$ y $\beta''_F := \beta''_{F_2}$.

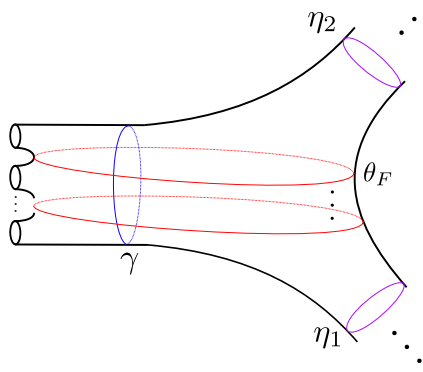


Figura 4.25: Caso $b > 1$.

(ii) m es impar. Sin pérdida de generalidad supongamos que las curvas en α' encierran todas las ponchaduras de Q excepto una. Entonces añadimos las curvas α_1 y β_1 a α' y β' respectivamente como en la Figura 4.26. Finalmente, para cada componente conexa de $S \setminus \alpha'$ que no contiene al punto p aplicamos el caso anterior.

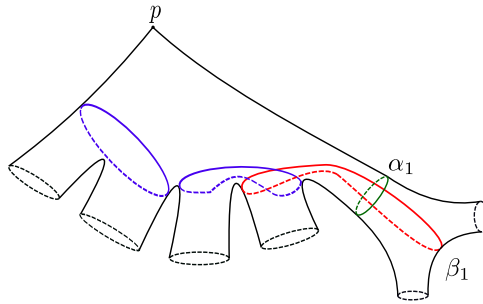


Figura 4.26: Caso m impar.

Aquí termina la demostración de la segunda parte y por lo tanto del Teorema 4.1.2. $\square$

Nota 4.6.6. Existe una cantidad no numerable de pares de multicurvas que llenan S como en el Teorema 4.1.2. Los argumentos son análogos a los usados en la demostración del Lema 2.2.8.

4.7. Multicurvas y la construcción de Hooper-Thurston-Veech

En esta sección estudiamos los pares de multicurvas que llenan una superficie de tipo infinito y enunciamos el contexto general en donde es válido la construcción de Hooper-Thurston-Veech.

Sean $\alpha := \{\alpha_i\}_{i \in I}$ y $\beta := \{\beta_j\}_{j \in J}$ dos multicurvas cuya unión llena una superficie S de tipo infinito. Abusando de la notación, denotamos con $\alpha \cup \beta$ al conjunto $(\bigcup_{i \geq 1} \alpha_i) \cup (\bigcup_{j \geq 1} \beta_j)$ y con $\alpha \cap \beta$ al conjunto $(\bigcup_{i \geq 1} \alpha_i) \cap (\bigcup_{j \geq 1} \beta_j)$. Por simplicidad, consideremos las ponchaduras de S como puntos marcados en la superficie. De esta manera, toda componente complementaria de $\alpha \cup \beta$ en S es un disco o un disco con un punto marcado en su interior.

Recordemos algunas consideraciones usadas en la demostración del Teorema 4.3.8. Consideramos $\alpha \cup \beta \subset S$ como un grafo encajado en S cuyo conjunto de vértices es $\alpha \cap \beta$ y con conjunto de aristas la colección de arcos en $\alpha \cup \beta \setminus (\alpha \cap \beta)$. Al grafo $\alpha \cup \beta$ le asociamos su *grafo dual* denotado por $(\alpha \cup \beta)^* \subset S$: para cada componente conexa D de $S \setminus (\alpha \cup \beta)$, sea $p_D \in D$ el punto marcado de D si D es un disco con punto marcado en su interior, en otro caso, tomamos $p_D \in D$ un punto en el interior de D . El conjunto de vértices de $(\alpha \cup \beta)^*$ es el conjunto $\{p_D : D \text{ es componente conexa de } S \setminus (\alpha \cup \beta)\}$. Luego, por cada arista e del grafo $\alpha \cup \beta$ asignamos la única arista $e^* \in E((\alpha \cup \beta)^*)$ transversal a e que conecta los vértices de las componentes conexas de $S \setminus (\alpha \cup \beta)$ adyacentes a e (posiblemente la misma), véase la Figura 4.27.

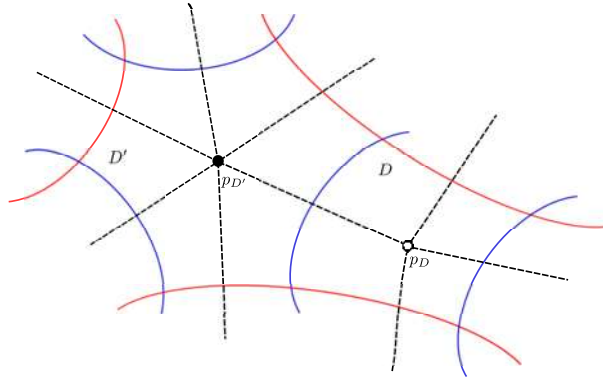


Figura 4.27: El grafo $\alpha \cup \beta$ está representado en línea continua (curvas azules y rojas) y el grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ está representado en línea discontinua negra.

Como $\alpha \cup \beta$ llena S , cada punto en $\alpha \cap \beta$ está contenido en un único cuadrilátero topológico de $S \setminus (\alpha \cup \beta)^*$. Para cada $v \in \alpha \cap \beta$ sea R_v la cerradura en S del cuadrilátero en $S \setminus (\alpha \cup \beta)^*$ que contiene a v en su interior. Definamos el conjunto $S_\diamond \subseteq S$ como la unión de todos los cuadriláteros topológicos R_v con $v \in \alpha \cap \beta$. En general, $S_\diamond$ no es una superficie, pues el grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ puede contener vértices de grado infinito. Para convencerse de lo anterior considere los ejemplos de abajo. En lo que sigue, $N(\alpha \cup \beta)$ denota a la vecindad regular de $\alpha \cup \beta$ en S tal que coincide con la unión disjunta de las vecindades regulares de las curvas en $\alpha \cup \beta$.

Ejemplo 4.7.1 (Grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ es localmente finito). Sean α (curvas azules) y β (curvas rojas) las multicurvas en el monstruo del lago Ness que se muestran en la Figura 4.28. En este

caso todo vértice del grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ tiene grado finito, pues, toda componente conexa de $S \setminus N(\alpha \cup \beta)$ es un polígono con un número finito de lados. La Figura 4.29 muestra cómo se ven localmente los grafos $\alpha \cup \beta$ y $(\alpha \cup \beta)^*$. En particular, $(\alpha \cup \beta)^*$ define una descomposición celular de S por cuadr l teros topológicos y $S_\diamond$ coincide con S .

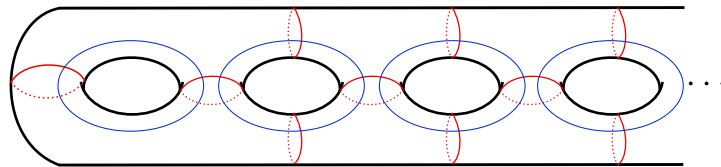


Figura 4.28

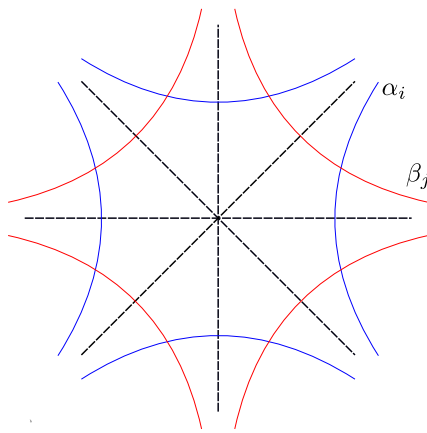


Figura 4.29: Grafos $\alpha \cup \beta$ y $(\alpha \cup \beta)^*$ localmente.

Ejemplo 4.7.2 (Grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ no es localmente finito). Consideremos las multicurvas α (curvas azules) y β (curvas rojas) en el monstruo del lago Ness S como en la Figura 4.30. Notemos que el grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ tiene solamente un vértice p el cual tiene grado infinito, equivalentemente, $S \setminus N(\alpha \cup \beta)$ es conexo. Sea $D := S \setminus N(\alpha \cup \beta)$. Entonces el interior de D es homeomorfo un disco y D tiene dos fines. En la Figura 4.31 se muestra la forma de D y parte del grafo $(\alpha \cup \beta)^*$. En este caso, $S_\diamond$ no es una superficie, pues el punto $p \in (\alpha \cup \beta)^*$ no tiene una vecindad abierta en $S_\diamond$ homeomorfa a un abierto del plano Euclidiano. Sin embargo, $S_\diamond$ es denso en S .

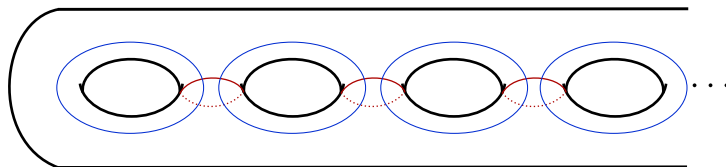


Figura 4.30

Ejemplo 4.7.3 (Componentes conexas de $S \setminus N(\alpha \cup \beta)$ con más de dos fines). Sean α y β el par de multicurvas mostradas en la Figura 4.32 en la superficie S de tipo infinito con exactamente

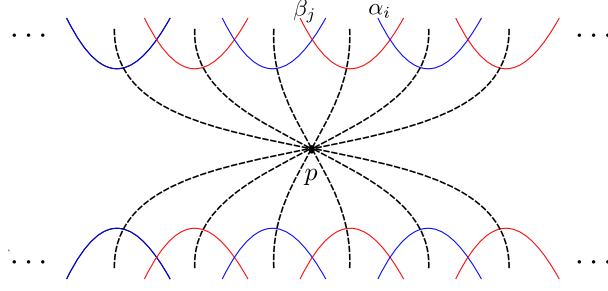


Figura 4.31: El grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ está mostrado en línea discontinua. La vecindad en $S_\diamond$ del punto $p \in S_\diamond$ no es homeomorfa a un abierto del plano Euclidiano.

cuatro fines todos ellos acumulados por género. Como puede observarse, $(\alpha \cup \beta)^*$ tiene solo un vértice p con grado infinito y la correspondiente componente complementaria D de $N(\alpha \cup \beta)$ en S tiene 4 fines. No es complicado generalizar este ejemplo para producir ejemplos en donde D tenga la cantidad finita de fines que se desee.

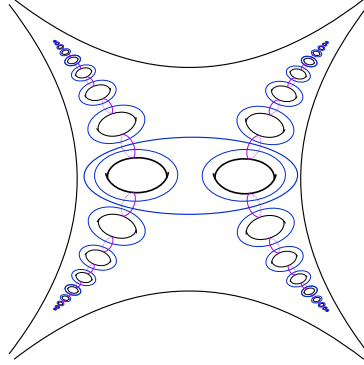


Figura 4.32: Pares de multicurvas en la superficie con cuatro fines que son acumulados por género con una componente conexa D' de $S \setminus N(\alpha \cup \beta)$ con 4 fines.

La siguiente proposición sigue directamente.

Proposición 4.7.4. *Sean α y β un par de multicurvas que llenan una superficie de tipo infinito S . Entonces el grafo dual $(\alpha \cup \beta)^*$ define una descomposición celular de S^* por cuadriláteros topológicos si y solo si $(\alpha \cup \beta)^*$ es un grafo localmente finito.*

Denotamos por $S_\diamond^*$ a la superficie que se obtiene de $S_\diamond$ al eliminar todos los vértices de $(\alpha \cup \beta)^*$ que tienen grado infinito. El siguiente teorema es la versión general de la construcción de Hooper-Thurston-Veech para la superficie $S_\diamond^*$. La demostración es análoga a la del Teorema 4.3.8.

Teorema 4.7.5 (Construcción de Hooper-Thurston-Veech). *Sea S una superficie de tipo infinito. Suponga que existe $\alpha := \{\alpha_i\}_{i \in I}$ y $\beta := \{\beta_j\}_{j \in J}$ dos multicurvas cuya unión llena S , y tales que*

- (i) *el grafo de configuración $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ tiene grado finito.*

Entonces se tiene lo siguiente:

1. Para todo $\lambda \geq 2$ existe h una función λ -armónica de $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ que define una estructura plana τ sobre $S_\diamond^*$.
2. La superficie plana $M := M(\alpha, \beta, \lambda, h) := (S_\diamond^*, \tau)$ admite una descomposición en cilindros una horizontal y otra vertical $\mathcal{H} := \{H_i\}_{i \in I}$ y $\mathcal{V} := \{V_j\}_{j \in J}$, respectivamente, donde todos los cilindros tienen módulo $\frac{1}{\lambda}$. Las curvas centrales de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$ son las multicurvas α y β , respectivamente.
3. Los giros de Dehn izquierdos T_α y T_β alrededor de las multicurvas α y β , respectivamente, son automorfismos afines de M y fijan la frontera de los cilindros en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente.
4. El subgrupo de $\text{Mod}(S)$ generado por las clases de isotopía de T_α y T_β es isomorfo a $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle \leq \text{Aff}^+(M)$. Además, $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ es libre de rango 2 y la derivada define una representación fiel $\rho : \langle T_\alpha, T_\beta \rangle \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ dada por:

$$T_\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_\beta \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Si además,

- (ii) la frontera de toda componente de $S \setminus N(\alpha \cup \beta)$ es un polígono con un número finito de lados,

entonces

5. $S_\diamond^* = S$.

Bibliografía

- [AFP17] Javier Aramayona, Ariadna Fossas, and Hugo Parlier. Arc and curve graphs for infinite-type surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(11):4995–5006, 2017.
- [AGK⁺19] Javier Aramayona, Tyrone Ghaswala, Autumn Kent, Alan McLeay, Jing Tao, and Rebecca Winarski. Big Torelli groups: generation and commensuration. *Groups Geom. Dyn.*, 13(4):1373–1399, 2019.
- [ALP⁺11] Daniele Alessandrini, Lixin Liu, Athanase Papadopoulos, Weixu Su, and Zongliang Sun. On Fenchel-Nielsen coordinates on Teichmüller spaces of surfaces of infinite type. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 36(2):621–659, 2011.
- [Aou13] Tarik Aougab. Uniform hyperbolicity of the graphs of curves. *Geom. Topol.*, 17(5):2855–2875, 2013.
- [APV17] Javier Aramayona, Priyam Patel, and Nicholas G. Vlamis. The first integral cohomology of pure mapping class groups. *arXiv preprint arXiv:1711.03132*, 2017.
- [Aro18] Julio Aroca. Two remarks about multicurve graphs on infinite-type surfaces. *Topology Appl.*, 249:83–94, 2018.
- [AV18] Javier Aramayona and Ferrán Valdez. On the geometry of graphs associated to infinite-type surfaces. *Math. Z.*, 289(1-2):309–322, 2018.
- [AV20] Javier Aramayona and Nicholas G. Vlamis. Big mapping class groups: an overview. *arXiv preprint arXiv:2003.07950*, 2020.
- [Bae28] Reinhold Baer. Isotopie von kurven auf orientierbaren, geschlossenen flächen und ihr zusammenhang mit der topologischen deformation der flächen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 159:101–116, 1928.
- [Bav16] Juliette Bavard. Hyperbolicité du graphe des rayons et quasi-morphismes sur un gros groupe modulaire. *Geom. Topol.*, 20(1):491–535, 2016.
- [BBF15] Mladen Bestvina, Ken Bromberg, and Koji Fujiwara. Constructing group actions on quasi-trees and applications to mapping class groups. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, 122(1):1–64, 2015.
- [BDR20] Juliette Bavard, Spencer Dowdall, and Kras Rafi. Isomorphisms Between Big Mapping Class Groups. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (10):3084–3099, 2020.
- [BF02] Mladen Bestvina and Koji Fujiwara. Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups. *Geom. Topol.*, 6:69–89, 2002.
- [BG18] Juliette Bavard and Anthony Genevois. Big mapping class groups are not acylindrically hyperbolic. *Math. Slovaca*, 68(1):71–76, 2018.
- [BMR⁺13] T. Banakh, K. Mine, D. Repovš, K. Sakai, and T. Yagasaki. Detecting topological groups which are (locally) homeomorphic to LF-spaces. *Topology Appl.*, 160(18):2272–2284, 2013.
- [BMSY14] Taras Banakh, Kotaro Mine, Katsuro Sakai, and Tatsuhiko Yagasaki. On homeomorphism groups of non-compact surfaces, endowed with the Whitney topology. *Topology Appl.*, 164:170–181, 2014.
- [Bow08] Brian H. Bowditch. Tight geodesics in the curve complex. *Inventiones mathematicae*, 171(2):281–300, 2008.
- [Bow14] Brian H. Bowditch. Uniform hyperbolicity of the curve graphs. *Pacific J. Math.*, 269(2):269–280, 2014.
- [BW18a] Juliette Bavard and Alden Walker. The Gromov boundary of the ray graph. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(11):7647–7678, 2018.
- [BW18b] Juliette Bavard and Alden Walker. Two simultaneous actions of big mapping class groups. *arXiv preprint arXiv:1806.10272*, 2018.
- [Cal09a] Danny Calegari. Big mapping class groups and dynamics. *Geometry and the imagination, personal blog post*, 2009.
- [Cal09b] Danny Calegari. *scl*, volume 20 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.
- [Cam96] P. J. Cameron. Metric and topological aspects of the symmetric group of countable degree. volume 17, pages 135–142. 1996. *Discrete metric spaces* (Bielefeld, 1994).
- [CB88] Andrew J. Casson and Steven A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, volume 9 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

- [CC15] John Cantwell and Lawrence Conlon. Hyperbolic geometry and homotopic homeomorphisms of surfaces. *Geom. Dedicata*, 177:27–42, 2015.
- [CME06] Richard D. Canary, Albert Marden, and David B. A. Epstein. *Fundamentals of hyperbolic manifolds: Selected expositions*, volume 328. Cambridge University Press, 2006.
- [DFV18] Matthew G. Durham, Federica Fanoni, and Nicholas G. Vlamis. Graphs of curves on infinite-type surfaces with mapping class group actions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 68(6):2581–2612, 2018.
- [DHV19] Vincent Delecroix, Pascal Hubert, and Ferrán Valdez. Infinite translation in the wild. *Preprint*, <https://www.labri.fr/perso/vdelecro/infinite-translation-surfaces-in-the-wild.html>, 2019.
- [DK01] James F. Davis and Paul Kirk. *Lecture notes in algebraic topology*, volume 35. American Mathematical Soc., 2001.
- [DM01] Nicolas Ducimetiere (Monod). *Continuous bounded cohomology of locally compact groups*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2001. Thesis (Dr.sc.math.)–Eidgenoessische Technische Hochschule Zuerich (Switzerland).
- [Eps66] D. B. A. Epstein. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Math.*, 115:83–107, 1966.
- [FA19] Louis Funar and Javier Aramayona. Asymptotic mapping class groups of closed surfaces punctured along Cantor sets. *Moscow Math. J.*, 2019.
- [FLP12] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin Poénaru. *Thurston’s work on surfaces*, volume 48 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. Translated from the 1979 French original by Djun M. Kim and Dan Margalit.
- [FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [FN18] Louis Funar and Yurii Neretin. Diffeomorphism groups of tame Cantor sets and Thompson-like groups. *Compos. Math.*, 154(5):1066–1110, 2018.
- [FP15] Ariadna Fossas and Hugo Parlier. Curve graphs on surfaces of infinite type. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 40(2):793–801, 2015.
- [Fri17] Roberto Frigerio. *Bounded cohomology of discrete groups*, volume 227 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [Fuj09] Koji Fujiwara. Quasi-homomorphisms on mapping class groups. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, volume 13 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 241–269. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [GdlH90] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [Gro82] Michael Gromov. Volume and bounded cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (56):5–99 (1983), 1982.
- [Gro87] Michael Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [Har79] W. J. Harvey. Geometric structure of surface mapping class groups. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 255–269. Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1979.
- [Har81] W. J. Harvey. Boundary structure of the modular group. In *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, volume 97 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 245–251. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.
- [HHMV18] Jesús Hernández-Hernández, Israel Morales, and Ferrán Valdez. Isomorphisms between curve graphs of infinite-type surfaces are geometric. *Rocky Mountain J. Math.*, 48(6):1887–1904, 2018.
- [HHMV19] Jesús Hernández-Hernández, Israel Morales, and Ferrán Valdez. The Alexander method for infinite-type surfaces. *Michigan Math. J.*, 68(4):743–753, 2019.
- [HHV17] Jesús Hernández-Hernández and Ferrán Valdez. Automorphism groups of simplicial complexes of infinite-type surfaces. *Publ. Mat.*, 61(1):51–82, 2017.
- [HHW13] W. Patrick Hooper, Pascal Hubert, and Barak Weiss. Dynamics on the infinite staircase. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(9):4341–4347, 2013.
- [HM19a] Michael Handel and Lee Mosher. Second bounded cohomology and wwpd. *arXiv preprint arXiv:1901.01301*, 2019.
- [HM19b] Sebastian Hurtado and Emmanuel Militon. Distortion and Tits alternative in smooth mapping class groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(12):8587–8623, 2019.
- [Hoo15] W. Patrick Hooper. The invariant measures of some infinite interval exchange maps. *Geom. Topol.*, 19(4):1895–2038, 2015.
- [HPW15] Sebastian Hensel, Piotr Przytycki, and Richard C. H. Webb. 1-slim triangles and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(4):755–762, 2015.

- [Hub06] John H. Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006. Teichmüller theory, With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra, With forewords by William Thurston and Clifford Earle.
- [Iva97] Nikolai V. Ivanov. Automorphism of complexes of curves and of Teichmüller spaces. *Internat. Math. Res. Notices*, (14):651–666, 1997.
- [Iva01] Nikolai V. Ivanov. *Handbook of Geometric Topology*, chapter 12 - Mapping Class Groups*, pages 523–633. North-Holland, 2001.
- [Kor96] Mustafa Korkmaz. *Complexes of curves and mapping class groups*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1996. Thesis (Ph.D.)—Michigan State University.
- [Lef25] S. Lefschetz. Book Review: Vorlesungen über Topologie. I. Flächentopologie. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 31(3-4):176, 1925.
- [Lei04] Christopher J. Leininger. On groups generated by two positive multi-twists: Teichmüller curves and lehmmer’s number. *Geometry & Topology*, 8(3):1301–1359, 2004.
- [Lev83] Gilbert Levitt. Foliations and laminations on hyperbolic surfaces. *Topology*, 22(2):119–135, 1983.
- [LL19] Justin Lanier and Marissa Loving. Centers of subgroups of big mapping class groups and the tits alternative. *arXiv preprint arXiv:1904.10060*, 2019.
- [LPRT19] Justin Lanier, Priyam Patel, Anja Randecker, and Jing Tao. Aimpl: Surfaces of infinite type. <http://aimpl.org/genusinfinity>, 2019.
- [Luo00] F. Luo. Automorphisms of complexes of curves. *Topology*, 39(2):283–298, 2000.
- [MKS04] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, and Donald Solitar. *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*. Courier Corporation, 2004.
- [MM99] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1):103–149, 1999.
- [MR19] Kathryn Mann and Kasra Rafi. Large scale geometry of big mapping class groups. *arXiv preprint arXiv:1912.10914*, 2019.
- [MV20] Israel Morales and Ferrán Valdez. Loxodromic elements in big mapping class groups via the Hooper-Thurston-Veech construction. *arXiv preprint arXiv:2003.00102*, 2020.
- [MW89] Bojan Mohar and Wolfgang Woess. A survey on spectra of infinite graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 21(3):209–234, 1989.
- [Olu50] Paul Olum. Obstructions to extensions and homotopies. *Ann. of Math. (2)*, 52:1–50, 1950.
- [Osi18] Denis V. Osin. Groups acting acylindrically on hyperbolic spaces. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures*, pages 919–939. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018.
- [PV18] Priyam Patel and Nicholas G. Vlamis. Algebraic and topological properties of big mapping class groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 18(7):4109–4142, 2018.
- [Ras19] Alexander J. Rasmussen. WWPD elements of big mapping class groups. *arXiv preprint arXiv:1909.06680*, 2019.
- [Ras20] Alexander J. Rasmussen. Uniform hyperbolicity of the graphs of nonseparating curves via bicorn curves. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 148(6):2345–2357, 2020.
- [Ray60] Frank Raymond. The end point compactification of manifolds. *Pacific J. Math.*, 10:947–963, 1960.
- [Ric63] Ian Richards. On the classification of noncompact surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106:259–269, 1963.
- [Ros17] Christian Rosendal. Coarse geometry of topological groups. *preprint*, 2017.
- [Sch06] Saul Schleimer. Notes on the complex of curves. *unpublished notes*, 2006.
- [Sha07] Kenneth J. Shackleton. Combinatorial rigidity in curve complexes and mapping class groups. *Pacific J. Math.*, 230(1):217–232, 2007.
- [Thu88] William P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2):417–431, 1988.
- [TL58] Angus Ellis Taylor and David C. Lay. *Introduction to functional analysis*, volume 2. Wiley New York, 1958.
- [Vee89] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.*, 97(3):553–583, 1989.
- [Vla19] Vlamis, Nicholas G. Notes on the topology of mapping class groups. http://qcpages.qc.cuny.edu/nvlamis/Papers/AIM_Notes.pdf, 2019.
- [Yag00] Tatsuhiko Yagasaki. Homotopy types of homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds. *Topology Appl.*, 108(2):123–136, 2000.