



.....  
Universidad Michoacana  
de San Nicolás de Hidalgo  
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas  
UNAM-UMSNH  
.....

# Soluciones de la ecuación de Bring-Jerrard

.....

Tesina  
Para obtener el título de:  
**Maestro en Ciencias Matemáticas**  
.....

Presenta:  
**Ana Cristina Chávez Cáliz**

Asesor:  
**Dr. Jorge Luis López López**

*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH*  
.....

*Morelia, Mich., mayo del 2016*



# Índice

<b>1. La curva de soluciones de la ecuación de Bring-Jerrard.</b>	<b>7</b>
<b>2. El gran dodecaedro.</b>	<b>12</b>
<b>3. Uniformización.</b>	<b>14</b>
3.1. Ecuaciones de grado 3. . . . .	14
3.2. Ecuaciones de grado 4. . . . .	16
3.3. Ecuaciones de grado 5. . . . .	16
<b>4. Geometría de ecuaciones.</b>	<b>19</b>
<b>5. Anexo.</b>	<b>24</b>

# Soluciones a las ecuaciones de Bring-Jerrard.

## Resumen.

La demostración más popular de que las ecuaciones de grado cinco no son solubles por radicales fue dada por Evariste Galois, y usa una de las teorías más significativas para el álgebra: la teoría de Galois. En la presente tesina, deseamos dar argumentos geométricos para convencer por qué las ecuaciones de grado cinco no pueden solucionarse mediante una fórmula con radicales. Este aspecto es bien conocido desde 1888, con el libro de Klein *Lectures on the ikosahedron, and the solution of equations of the fifth degree*. La principal referencia para esta tesina es el trabajo de Green *On the analytic solution of the equation of fifth degree*.

Solucionando ecuaciones de grado a lo más tres (que son solubles mediante una fórmula con radicales), encontrar las soluciones de cualquier ecuación de grado cinco equivale a encontrar las soluciones de una ecuación de la forma  $z^5 + az + b = 0$ ; esta familia de ecuaciones es conocida con el nombre de *ecuaciones de Bring-Jerrard*.

Dado este hecho, es entonces deseable estudiar las soluciones de las ecuaciones de Bring-Jerrard.

En esta tesina, vemos que la curva de soluciones compleja tiene una estructura natural de superficie de Riemann de género 4. Es un hecho notable que la curva de soluciones resulte ser uno de los poliedros estrellados de Kepler-Poisson (el *gran dodecaedro*).

Usando la estructura de superficie de Riemann de la curva de soluciones, podemos notar que solucionar una ecuación de grado 5 equivale a encontrar una uniformización para la curva compleja de género 4. El teorema de Uniformización garantiza la existencia de dicha función, pero el teorema no dice cómo obtenerla. La historia es diferente para las ecuaciones de grado 3 y 4, ya que en estos casos, la curva compleja de soluciones es simplemente la esfera de Riemann, por lo que no es necesario recurrir al teorema de Uniformización.

Finalmente en la sección 4, cambiamos el enfoque y nos limitamos a ecuaciones donde  $a$  y  $b$  son números reales. Estudiamos el espacio de ecuaciones, y damos una idea geométrica de cómo, dados  $a$  y  $b$  reales, encontrar las soluciones reales de la ecuación  $x^5 + ax + b = 0$ .

**Palabras clave:** Ecuaciones de grado cinco, soluciones, Bring-Jerrard, gran dodecaedro, Teorema de Uniformización.

# Soluciones de la ecuación de Bring-Jerrard. (*Solutions of the Bring-Jerrard equation*)

## Abstract

The most popular proof about fifth degree equation not soluble by radicals was given by Evariste Galois, and uses one of the most significant theories for the algebra. In this thesis, we want to give geometric arguments to convince why fifth degree equations can not be solved by radicals. This aspect is well known since 1888, with Klein's book *Lectures on the ikosahedron, and the solution of equations of the fifth degree*. The main reference for this thesis is the work of Green *On the analytic solution of the equation of fifth degree*.

Solving equations of degree at most three (which are soluble by radicals), finding the solutions of any equation of fifth degree equates to find the solutions of an equation of the form  $z^5 + az + b = 0$ ; this family of equations is known under the name of *Bring-Jerrard equations*.

Given this fact, it is then desirable to study the solutions of the Bring-Jerrard equations.

In this thesis, we see that the complex curve of solutions has a natural Riemann surface structure of genus 4. It is a remarkable fact that the solutions curve prove to be one of the Kepler-Poisson polyhedron (the *great dodecahedron*).

Using the structure of Riemann surface of the solutions curve, we can see that address the solution of an equation of fifth degree equivalent to finding an uniformization of the complex curve of genus 4. Uniformization theorem ensures the existence of the function, but the theorem does not say how to obtain it. The story is different for equations of degree 3 and 4, since in these cases, the complex curve of solutions is simply the Riemann sphere, so it is not necessary to appeal to the Uniformization theorem.

In the last part, we changed the focus of the thesis and we just work with equations where the coefficients  $a$  and  $b$  are real numbers. We study the equations' space and we give a geometric idea of how given  $a$  and  $b$ , find real solutions of the equation  $x^5 + ax + b = 0$ .

“The mathematician’s patterns, like the painter’s or the poet’s, must be *beautiful*; the ideas, like the colors or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.”  
*G. H. Hardy.*

Dedico la presente tesina a mis maestros de vida y quienes me proveen de fortaleza:  
mi familia, Héctor y mis amigos.  
Y por supuesto: a los que físicamente no están, pero que permanecen en espíritu.

## Agradecimientos

A mi asesor, Jorge Luis López: gracias Jorge por tu infinita paciencia, consejos, apoyo, confianza y amistad invaluable. Infinitas gracias por el tiempo y esfuerzo que has invertido en mi formación: por guiarme siempre hacia la solución elegante (académica y personalmente).

Al Dr. Jesús Muciño por revisar esta tesina y enriquecerla con sus comentarios y observaciones. Aprovecho la oportunidad para agradecerle los consejos y los regaños, porque cada uno de ellos ha influenciado fuertemente en mi y me han hecho una mejor alumna (o al menos eso creo).

Al resto de la mesa de jurado: Noé Bárcenas, Rita Jimenez y Ahtziri Gonzalez por aceptar formar parte del jurado y estar al pendiente del desarrollo de esta tesina.

Por último, a CONACyT por apoyar mis estudios de maestría e impulsar mi desarrollo académico.

## Introducción.

Cuando hablamos de ecuaciones de grado cinco, el método más popular para probar que dichas ecuaciones no son solubles por radicales, es el algebraico (usando la teoría de Galois). El objetivo de esta tesina es dar un enfoque geométrico y ver qué obstrucciones presentan estas ecuaciones. Este aspecto geométrico era bien conocido desde Klein con su libro *Lectures on the ikosahedron, and the solution of equations of the fifth degree* [9], y es retomado por Green en *On the analytic solution of the equation of fifth degree* [6]. Éste último es la base principal de la tesina.

Solucionando ecuaciones de grado a lo más tres (que son solubles mediante una fórmula con radicales), encontrar las soluciones de cualquier ecuación de grado cinco equivale a encontrar las soluciones de una ecuación de la forma

$$z^5 + az + b = 0.$$

Esta familia de ecuaciones es conocida con el nombre de *ecuaciones de Bring-Jerrard*. Este hecho, parece ser, fue probado por primera vez con todo detalle por Cayley en 1861 en [1] (página 575). Si se busca una idea más moderna, también puede consultarse [6].

Dado este hecho, es entonces deseable estudiar las soluciones de las ecuaciones de Bring-Jerrard. En esta tesina, estudiamos a dicho conjunto de soluciones desde varios puntos de vista.

En la sección 1, vemos que el conjunto de soluciones complejas tiene una estructura natural de superficie de Riemann de género 4. Es un hecho notable que el conjunto de soluciones resulte ser una cubierta del *gran dodecaedro* (uno de los poliedros de Kepler-Poinsot). Este hecho es probado por Green y forma parte del contenido de la sección 2.

Con ayuda de la estructura descrita en la sección 1, en la sección 3 usamos el Teorema de Uniformización para ver que las soluciones de las ecuaciones de Bring-Jerrard dependen holomorfamente de los coeficientes  $a$  y  $b$ . También aplicamos esta misma aproximación a la curva de soluciones de ecuaciones de grado tres y cuatro. El tratamiento dado para ecuaciones de grado cinco se aleja del trabajo hecho por Green, mientras que para ecuaciones de grado tres y cuatro, no tenemos conocimiento de que una aproximación así se haya hecho en otro trabajo.

Finalmente en la sección 4, cambiamos el enfoque y nos limitamos a ecuaciones donde  $a$  y  $b$  son números reales. Estudiamos el espacio de ecuaciones, y damos una idea geométrica de cómo, dados  $a$  y  $b$  reales, encontrar las soluciones reales de la ecuación  $x^5 + ax + b = 0$ . Los textos [8] y [4] (lectura 8) sirven como referencia para esta parte de la tesina.



**Proposición 1.**  $\mathcal{V}$  es superficie de Riemann compacta.

*Demostración.* Como  $\mathcal{S}$  es variedad afín compleja de dimensión 2, entonces  $\mathcal{V}$  es variedad proyectiva compleja de dimensión 1 (ver [7], capítulo 1, sección 9). Y como  $\mathcal{S}$  es conjunto de nivel en  $\mathbb{C}^5$ , entonces  $\mathcal{V}$  es un cerrado en  $\mathbb{C}P^4$ . Como  $\mathbb{C}P^4$  es compacto, se concluye que  $\mathcal{V}$  es compacta.  $\square$

Notemos que si  $\zeta$  es raíz de la ecuación  $z^5 + az + b = 0$  y  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , entonces  $\lambda\zeta$  es raíz de la ecuación  $z^5 + a\lambda^4z + b\lambda^5 = 0$ . Luego, es natural también introducir la siguiente relación de equivalencia:

**Definición 1.** Dadas dos ecuaciones  $z^5 + az + b = 0$ ,  $z^5 + cz + d = 0$ , decimos que son **equivalentes** si y sólo si existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que  $c = a\lambda^4$  y  $d = b\lambda^5$ .

Las anteriores relaciones de equivalencia nos permiten definir la siguiente función  $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  mediante

$$\pi[z_1 : \dots : z_5] = \frac{\sigma_4(z_1, \dots, z_5)^5}{\sigma_5(z_1, \dots, z_5)^4}.$$

**Proposición 2.** Si  $(z_1, \dots, z_5)$  son las raíces de la ecuación  $z^5 + az + b = 0$  y  $(w_1, \dots, w_5)$  son las raíces de  $z^5 + cz + d = 0$ , entonces  $\pi([z_1 : \dots : z_5]) = \pi([w_1 : \dots : w_5])$  si y sólo si  $z^5 + az + b = 0$  es equivalente a  $z^5 + cz + d = 0$ .

*Demostración.*  $\Leftarrow$  Si las ecuaciones  $z^5 + az + b = 0$  y  $z^5 + cz + d = 0$  son equivalentes, entonces existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que  $c = a\lambda^4$  y  $d = b\lambda^5$ . Luego, como  $z_1, \dots, z_5$  son raíces de la ecuación  $z^5 + az + b = 0$ , por observación (1), tenemos que  $a = \sigma_4(z_1, \dots, z_5)$  y  $b = \sigma_5(z_1, \dots, z_5)$ . Análogamente,  $c = \sigma_4(w_1, \dots, w_5)$  y  $d = \sigma_5(w_1, \dots, w_5)$ . Pero

$$\pi([w_1 : \dots : w_5]) = \frac{\sigma_4(w_1, \dots, w_5)^5}{\sigma_5(w_1, \dots, w_5)^4} = \frac{c^5}{d^4} = \frac{(a\lambda^4)^5}{(b\lambda^5)^4} = \frac{a^5}{b^4} = \frac{\sigma_4(z_1, \dots, z_5)^5}{\sigma_5(z_1, \dots, z_5)^4} =$$

$$= \pi([z_1 : \dots : z_5]).$$

$\Rightarrow$ ] Usando la notación de arriba para  $a, b, c$ , y  $d$ , notemos que si  $a = 0$ , eso implica que  $c = 0$ , y entonces  $b$  y  $d$  no son cero. Luego las ecuaciones  $z^5 + b = 0$  y  $z^5 + d = 0$  son equivalentes, usando  $\lambda$  una raíz quinta de  $d/b$ :  $d = b(d/b) = b\lambda^5$ .

Supongamos entonces que  $a \neq 0$  (y por lo tanto,  $c \neq 0$ ). Notemos que las ecuaciones  $z^5 + az + b = 0$  y  $z^5 + z + b\lambda_1^5 = 0$  son equivalentes, donde  $\lambda_1$  es una raíz cuarta de  $1/a$ . También son equivalentes las ecuaciones  $z^5 + cz + d = 0$  y  $z^5 + z + d\lambda_2^5 = 0$ , donde  $\lambda_2$  es una raíz cuarta de  $1/c$ .

Definiendo  $b' = b\lambda_1^5$  y  $d' = d\lambda_2^5$ , basta verificar que las ecuaciones  $z^5 + z + b' = 0$  y  $z^5 + z + d' = 0$  son equivalentes.

Por  $\Leftarrow$ ], tenemos que  $a^5/b^4 = 1/(b')^4$ , y  $c^5/d^4 = 1/(d')^4$ , y por hipótesis,  $1/(b')^4 = a^5/b^4 = c^5/d^4 = 1/(d')^4$ , de donde  $(d')^4 = (b')^4$ .

Si  $b' = r_1 e^{i\theta_1}$  y  $d' = r_2 e^{i\theta_2}$ , como  $(d')^4 = (b')^4$ , entonces  $r_1 = r_2$  y  $4i(\theta_1 - \theta_2) = 2\pi ni$ , y así  $\theta_1 = \pi n/2 + \theta_2$ .

$$\text{Luego } b' = r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i(\pi n/2 + \theta_2)} = r_2 e^{i\theta_2} e^{i\pi n/2} = d' e^{i\pi n/2}.$$

Entonces  $z^5 + z + b' = z^5 + z + d' e^{i\pi n/2} = z^5 + (e^{i\pi n/2})^4 z + (e^{i\pi n/2})^5 d' \sim z^5 + z + d'$ .  $\square$

Gracias a esta Proposición, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.** *La función  $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es un cubriente 120 a 1, con tres valores de ramificación:*

1. Uno en  $-5^5/4^4$  con 60 preimágenes de orden 2.
2. Otro en  $\infty$  con 30 preimágenes de orden 4.
3. Y uno más en 0 con 24 preimágenes de orden 5.

*Demostración.* La función  $\pi$  es cubriente 120 a 1, ya que por la Proposición 2, la imagen de dos puntos  $[z_1 : \dots : z_5]$ ,  $[w_1 : \dots : w_5]$  bajo la función son iguales si y sólo si son soluciones de ecuaciones equivalentes. Luego cada punto en  $\hat{\mathbb{C}}$  tiene  $|\mathcal{S}_5| = 120$  preimágenes, donde  $\mathcal{S}_5$  es el grupo de permutaciones de 5 elementos.

Por otro lado, un punto  $[z_1 : \dots : z_5] \in \mathcal{V}$  es de ramificación si y sólo si existe  $\tau \in \mathcal{S}_5$  y  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tales que  $(z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(5)}) = \lambda(z_1, \dots, z_5)$ . Notemos que:

$$|(z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(5)})| = |\lambda(z_1, \dots, z_5)| = |\lambda| |(z_1, \dots, z_5)|$$

lo cual implica que  $|\lambda| = 1$ . Partimos entonces en dos casos:

Caso 1. Si  $\lambda = 1$ , como las ecuaciones que estamos considerando no pueden tener más de una raíz doble (ver Lema 2 del Anexo), entonces existen exactamente dos subíndices  $i, j \in \{1, \dots, 5\}$  tales que  $z_i = z_j$ .

Si  $\zeta$  es una raíz doble de la ecuación  $z^5 + az + b = 0$ , es porque  $\zeta$  también es raíz de la derivada, es decir, de  $5z^4 + a$ . Luego,  $5\zeta^4 + a = 0$  lo cual implica que  $\zeta^4 = -a/5$ .

Por otro lado, sabemos que  $\zeta^5 + a\zeta + b = 0$  así que:

$$0 = \zeta^5 + a\zeta + b = \zeta^4\zeta + a\zeta + b = \frac{-a}{5}\zeta + a\zeta + b = \frac{4a}{5}\zeta + b$$

De donde  $b = -4a\zeta/5$ , por lo que

$$\pi([\zeta : \zeta : z_1 : z_2 : z_3]) = \frac{a^5}{b^4} = \frac{a^5}{(-\frac{4a}{5}\zeta)^4} = \frac{5^4 a^5}{4^4 a^4 \zeta^4} = \frac{5^4 a^5}{4^4 a^4 \frac{-a}{5}} = -\frac{5^5}{4^4}.$$

En este caso, obtenemos que  $\pi([\zeta : \zeta : z_1 : z_2 : z_3]) = -5^5/4^4$  y entonces  $-5^5/4^4$  tiene 60 preimágenes de orden 2.

Caso 2. Si  $\lambda = e^{i\theta}$  con  $\theta \neq 2\pi k$ , entonces para cada subíndice  $i$ , se satisface  $z_{\tau(i)} = \lambda z_i$ .

- a) Si existe un subíndice  $i$  tal que  $z_{\tau(i)} = 0$  (digamos  $z_{\tau(1)} = 0$ ), por el Lema 3 del Anexo, el resto de las raíces  $z_{\tau(i)} = \lambda z_i$  son distintas de 0, y por lo tanto módulo dividir por  $z_2$ , podemos suponer que  $z_2 = 1$ . Luego  $z_{\tau(1)} = 0 = z_1$  y  $z_{\tau(2)} = \lambda$ . Por otro lado,  $z_{\tau^2(2)} = z_{\tau(\tau(2))} = \lambda z_{\tau(2)} = \lambda^2$ . En general, tenemos que  $z_{\tau^j(2)} = \lambda^j$ . Como  $\tau(1) = 1$ ,  $\tau$  mueve 4 puntos a manera de rotación, de donde  $\text{ord}(\tau)$  es 2 o 4. Si  $\text{ord}(\tau) = 2$  entonces  $\lambda = e^{i\pi}$  por lo que  $[z_1 : \dots : z_5] = [0 : 1 : -1 : z : -z]$ , pero por la ecuación (3) del inicio de la sección, tenemos que  $2 + 2z^2 = 0$  y entonces  $z = \pm i$ . Si  $\text{ord}(\tau) = 4$  entonces  $\lambda$  es una raíz cuarta primitiva de la unidad y  $[z_1 : \dots : z_5] = [0 : 1 : \lambda : -1 : -\lambda]$  (notemos que este caso incluye cuando  $\text{ord}(\tau) = 2$ ). Obtenemos  $\pi([0 : 1 : i : -1 : i]) = \infty$  y entonces  $\infty$  tiene 30 preimágenes de orden 4.
- b) Si  $z_{\tau(1)} \neq 0$ , dividiendo entre  $\lambda z_{\tau(1)} = z_1$ , podemos suponer que  $z_1 = 1$ . Como  $\tau$  mueve los cinco puntos como lo hace una rotación,  $\text{ord}(\tau) = 5$  y así  $\lambda$  es una raíz primitiva quinta de la unidad. Luego  $[z_1 : \dots : z_5] = [1 : \lambda : \lambda^2 : \lambda^3 : \lambda^4]$ . En este caso, obtenemos que  $\pi([1 : \lambda : \lambda^2 : \lambda^3 : \lambda^4]) = 0$  y entonces 0 tiene 24 preimágenes de orden 5.

□

**Cololario 1.** *La superficie de Riemann  $\mathcal{V}$  tiene género 4.*

*Demostración.* Es inmediato en el contexto de la Fórmula de Riemann-Hurwitz (ver la sección 1.2.6 del libro [5]) a partir del Teorema anterior, ya que  $2 - 2g = \chi(\mathcal{V}) = V - A + C = (24 + 30 + 60) - (3 \times 120) + (2 \times 120) = -6$  por lo que  $g = 4$ . □

**Cololario 2.** *Existe una función cubriente  $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  que es 60 a 1, con tres valores de ramificación: dos con 12 preimágenes quintuples y uno con 30 preimágenes dobles.*

*Demostración.* Consideremos la proyección  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{A}_5$  que es 60 a 1. Al igual que en la demostración del Teorema 1,  $(z_1, \dots, z_5) \in \mathcal{V}$  es de ramificación si y sólo si existe  $\tau \in \mathcal{A}_5$  y  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tales que  $(z_1, \dots, z_5) = \lambda(z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(5)})$ . De nuevo se distinguen tres casos:

1.  $\lambda = 1$ .

Para este caso, observamos que  $\tau = (1, 2) \notin \mathcal{A}_5$ , por lo que el punto  $(\zeta, \zeta, z_1, z_2, z_3)$  no es de ramificación.

2.  $\lambda = e^{i\theta}$  y  $z_1 = 0$ .

En este caso,  $\tau = (2, 3)(4, 5) \in \mathcal{A}_5$  con  $ord(\tau) = 2$ , y la imagen de  $(0, 1, i, -1, i)$  en  $\mathcal{V}/\mathcal{A}_5$  sigue teniendo  $60/2 = 30$  preimágenes.

3.  $\lambda = e^{i\theta}$  y todo  $z_i \neq 0$ .

Obtenemos  $\tau = (1, 2, 3, 4, 5) \in \mathcal{A}_5$  y entonces  $ord(\tau) = 5$  de donde tenemos dos valores de ramificación  $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4)$ , y  $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^4, \lambda^3)$ . Las imágenes de cada uno en  $\mathcal{V}/\mathcal{A}_5$  tienen  $60/5 = 12$  preimágenes.

Para ver que  $\mathcal{V}/\mathcal{A}_5 = \hat{C}$  usamos una variante de Riemann-Hurwitz: tenemos que  $2 - 2g = \chi(\mathcal{V}/\mathcal{A}_5) = V - A + C = (2 + 1 + 1) - (3 \times 2) + (2 \times 2) = 2$  entonces  $g = 0$ .  $\square$

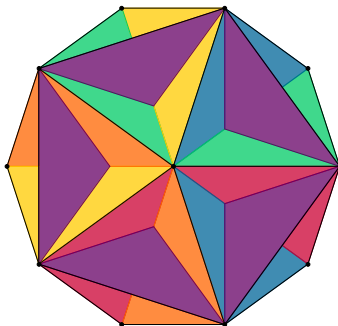


Figura 1: El gran dodecaedro.

## 2. El gran dodecaedro.

Johannes Kepler y Louis Poinsot describieron 4 sólidos regulares estrellados (conocidos como poliedros de Kepler-Poinsot (ver [3], pág. 96)). Dentro de estos cuatro, se encuentra el llamado **gran dodecaedro**, el cual se construye a partir de los vértices de un icosaedro regular. Para cada vértice en el icosaedro, consideramos los cinco vértices adyacentes a él y el pentágono regular que tiene por vértices estos últimos. Todos estos pentágonos conforman las caras del gran dodecaedro.

Así, el gran dodecaedro (que denotaremos de ahora en adelante por  $\mathcal{V}^\#$ ) es un poliedro estrellado con 12 vértices, 30 aristas y 12 caras pentagonales, como se ilustra en la Figura 1.

$\mathcal{V}^\#$  tiene estructura de superficie de Riemann si consideramos la estructura que hereda de la función  $\varphi$  que proyecta a  $\mathcal{V}^\#$  a la esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , recordando que  $\hat{\mathbb{C}}$  se identifica con  $\mathbb{S}^2$  mediante la proyección estereográfica.  $\varphi$  es una función cubriente 3 a 1 con 12 puntos de ramificación en los vértices del poliedro.

Mas aún, usando  $\varphi$  podemos calcular la característica de Euler de  $\mathcal{V}^\#$ :  $2 - 2g = \chi(\mathcal{V}^\#) = 12 \times 2 - 30 \times 3 + 20 \times 3 = -6$ , lo cual implica que  $\mathcal{V}^\#$  también tiene género 4.

Además, podemos hacer actuar el grupo de rotaciones del icosaedro en  $\mathcal{V}^\#$ , que es isomorfo a  $\mathcal{A}_5$  (este hecho puede consultarse en [3], pág. 50). Una región fundamental de la acción de  $\mathcal{A}_5$  en  $\mathcal{V}^\#$  se ilustra en la Figura 2, contenida en una de las caras de  $\mathcal{V}^\#$ . Casi todos los puntos de  $\mathcal{V}^\#$  tienen una órbita de orden 60, excepto los 12 vértices ( $\bullet$ ), los centros de las 12 caras ( $\circ$ ) y los centros de las 30 aristas ( $\times$ ).

Esto implica que  $\mathcal{V}^\#/\mathcal{A}_5 \cong \hat{\mathbb{C}}$  con tres valores de ramificación: dos con 12 preimágenes de orden 5 (correspondientes a los vértices y centros de cada cara), y uno con 30 preimágenes de orden 2 (los centros de cada arista).

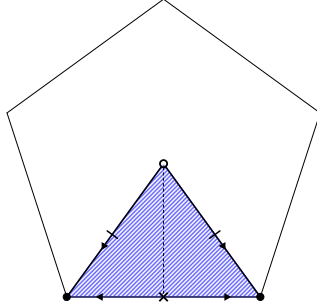


Figura 2: Una región fundamental para la acción de  $\mathcal{A}_5$  en  $\mathcal{V}^\#$  contenida en una de las caras del poliedro.

**Teorema 2.** *Las superficies  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{V}^\#$  son iguales como superficies de Riemann.*

*Demostración.* Puesto que las transformaciones de Möbius mandan cualesquiera tres puntos distintos en cualesquiera otros tres, mediante una de ellas podemos hacer que los tres valores críticos  $a_1, a_2$  y  $a_3$  de cada cubierta coincidan.

Para probar que  $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\#$ , hay que ver que las representaciones de modronomía  $\rho_1, \rho_2 : \pi_1(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}) \rightarrow \mathcal{S}_{60}$  son iguales (ver la sección 2.7.2 de [5], pág. 152).

Pero por simetría de las acciones que se consideran en  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{V}^\#$ , podemos considerar las representaciones  $\sigma_1, \sigma_2 : \pi_1(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}) \rightarrow \mathcal{A}_5$  y probar que son iguales (es decir, el morfismo es único si  $\rho(\alpha_1)$  y  $\rho(\alpha_2)$  son de orden 5 y  $\rho(\alpha_3)$  es de orden 2).

Consideremos  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  generadores de  $\pi_1(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\})$  tales que  $\alpha_i$  sólo le da una vuelta a la singularidad  $a_i$  para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Los generadores satisfacen que  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = e$ , el orden de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  es 5 y el orden de  $\alpha_3$  es 2. Como  $\alpha_3 \in \mathcal{A}_5$ ,  $\alpha_3 = (23)(45)$ . Además  $\alpha_2$  y  $\alpha_1^{-1} = \alpha_2\alpha_3$  son 5-ciclos.

Sin pérdida de generalidad,  $\alpha_2(1) = 2$ . Si  $\alpha_2(2) = 3$ , entonces  $\alpha_1^{-1}(3) = \alpha_2\alpha_3(3) = \alpha_2(2) = 3$ , que no puede ser, así que podemos suponer  $\alpha_2(2) = 4$ . Si  $\alpha_2(4) = 5$ , entonces  $\alpha_1^{-1}(5) = \alpha_2\alpha_3(5) = \alpha_2(4) = 5$ , que no puede ser, por lo que  $\alpha_2(4) = 3$ , y  $\alpha_2(3) = 5$ .

Esto significa que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{A}_5$  están totalmente determinados por el tipo de valores de ramificación, por lo que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son iguales, y así  $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\#$ .  $\square$

### 3. Uniformización.

Dada la ecuación  $z^5 + az + b = 0$ , consideramos el cociente  $w = a^5/b^4$ . Si tuviéramos una expresión local de  $\pi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{V}$ , podríamos considerar un punto  $[z_1 : \dots : z_5] \in \pi^{-1}(w)$  y un representante  $(z_1, \dots, z_5)$ . Podría suceder, en principio, que dicho punto no corresponda con el conjunto de soluciones de nuestra ecuación inicial; sin embargo, sí es el conjunto solución de una ecuación  $z^5 + a'z + b' = 0$  equivalente a la original  $z^5 + az + b = 0$ .

Observemos que  $a'$  y  $b'$  se expresan en función de  $z_1, \dots, z_5$ . Por otro lado, como  $z^5 + a'z + b' = 0$  es equivalente a  $z^5 + az + b = 0$ , debe existir  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  de tal suerte que  $a = a'\lambda^4$  y  $b = b'\lambda^5$ . Luego, el conjunto solución a la ecuación inicial es  $\lambda(z_1, z_2, \dots, z_5)$ .

Así, encontrar las soluciones de una ecuación de grado cinco, se reduce a conocer la expresión de  $\pi^{-1}$ . A continuación, analizaremos los casos para las ecuaciones de grado tres, cuatro y cinco.

#### 3.1. Ecuaciones de grado 3.

Considerando las soluciones de las ecuaciones de la forma  $z^3 + az + b = 0$ , la curva de soluciones para este caso satisface la ecuación:

$$\sum_{i=1}^3 z_i = 0. \quad (5)$$

Este conjunto tiene una estructura de variedad compleja de dimensión 2, por lo que al proyectivizar, obtenemos una superficie compleja de dimensión 1, a la que llamaremos  $\mathcal{V}_3$ .

Podemos definir la función  $\pi_3 : \mathcal{V}_3 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

$$\pi_3([z_1 : z_2 : z_3]) = \frac{\sigma_2(z_1, z_2, z_3)^3}{\sigma_3(z_1, z_2, z_3)^2}$$

, y observar que esta función es un cubriente 6 a 1 de  $\hat{\mathbb{C}}$  con tres valores de ramificación  $c_1, c_2$  y  $c_3$ ;

1.  $c_1 = -3^3/2^2$  con 3 preimágenes de orden 2.
2.  $c_2 = \infty$  con 3 preimágenes de orden 2.
3.  $c_3 = 0$  con 2 preimágenes de orden 3.

Esto implica que la curva de soluciones  $\mathcal{V}_3$  para las ecuaciones de grado tres, satisface que  $\chi(\mathcal{V}_3) = 3+3+2-3 \times 6+2 \times 6 = 2$  y así  $\mathcal{V}_3$  es la esfera de Riemann.

Proyectando  $\mathcal{V}_3$  y  $\hat{\mathbb{C}}$  estereográficamente, salvo cambios de coordenadas, obtenemos la Figura 3 para  $\pi_3$ .

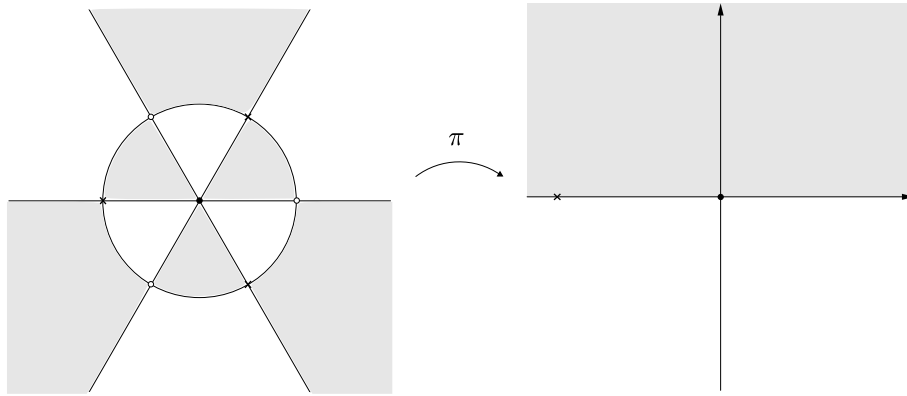


Figura 3: Los puntos marcados con  $\bullet$  en el dibujo de la izquierda representan las preimágenes de 0, los marcados con  $\circ$  las preimágenes de  $\infty$  y los marcados con  $\times$  las preimágenes de  $-3^3/2^2$ .

Para dar una fórmula de  $\pi_3^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{V}_3$ , basta dar un biholomorfismo  $f : \mathbb{H} \rightarrow T$ , con  $T$  alguno de los triángulos sombreados y que mande 0,  $\infty$  y  $-3^3/2^2$  a los correspondientes vértices de  $T$ .

Dicha  $f$  existe gracias al Teorema de la aplicación de Riemann ([2], capítulo 10, pág 214, Teorema 10-6). Y de hecho, podemos decir explícitamente cuál es la función  $f$  que buscamos:

La función  $z^3$  envía el triángulo  $T$  al medio círculo superior  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ . Así 0 y 1 quedan fijos, y la imagen de  $e^{\pi i/3}$  es  $-1$ .

Luego, se aplica la función  $z + 1/z$  para mandar el medio círculo superior al semiplano inferior  $\{(x, y) \mid y < 0\}$ . La imagen de 0 es  $\infty$ , de 1 es 2 y de  $-1$  es  $-2$ .

Después usamos la traslación  $z - 2$ : la imagen de 2 es 0, de  $-2$  es  $-4$  e  $\infty$  se queda fijo.

La función  $1/z$  manda el semiplano inferior al superior, intercambia  $\infty$  y 0, y a  $-4$  lo manda a  $-1/4$ . Finalmente se dilata por  $3^3$ , para mandar los vértices a donde queríamos.

Al definir  $f$  como la inversa de la composición de las funciones anteriores, se satisface lo requerido.

Luego, usando el Principio de Reflexión de Schwartz ([2], capítulo 11), la función  $f$  puede extenderse a todo  $\hat{\mathbb{C}}$ , produciendo  $\pi_3^{-1}$ .

### 3.2. Ecuaciones de grado 4.

Considerando las soluciones de las ecuaciones de la forma  $z^4 + az + b = 0$ , la curva de soluciones para este caso satisface el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^4 z_i = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^4 z_i^2 = 0 \quad (7)$$

El conjunto de soluciones  $\mathcal{V}_4$  tiene una estructura de variedad compleja de dimensión 2, por lo que al proyectivizar, obtenemos una superficie compleja de dimensión 1.

Podemos definir la función  $\pi_4 : \mathcal{V}_4 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ,

$$\pi_4([z_1 : \dots : z_4]) = \frac{\sigma_3(z_1, \dots, z_4)^4}{-\sigma_4(z_1, \dots, z_4)^3}$$

, y observar que esta función es un cubriente 24 a 1 de  $\hat{\mathbb{C}}$  con tres valores de ramificación:

1. Uno en  $4^4/3^3$  con 12 preimágenes de orden 2.
2. Otro en  $\infty$  con 8 preimágenes de orden 3.
3. Y uno más en 0 con 6 preimágenes de orden 4.

Esto implica que la curva de soluciones  $\mathcal{V}_4$  para las ecuaciones de grado cuatro, satisface que  $\chi(\mathcal{V}) = 12 + 8 + 6 - 3 \times 24 + 2 \times 24 = 2$  y así  $\mathcal{V}_4$  es también la esfera de Riemann.

De manera análoga, al proyectar estereográficamente  $\mathcal{V}_4$  y  $\hat{\mathbb{C}}$ , salvo un cambio de coordenadas, obtenemos la Figura 4. Al igual que en el caso anterior, usando el Teorema de la aplicación de Riemann y Principio de Reflexión, podemos obtener la expresión para  $\pi_4^{-1}$ .

### 3.3. Ecuaciones de grado 5.

Por otro lado, para las ecuaciones de grado cinco, teníamos que  $\mathcal{V}$  es una superficie de género 4. Más aún, por el Teorema 1,  $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es un cubriente 120 a 1, con tres valores de ramificación:

1. Uno en  $-5^5/4^4$  con 60 preimágenes de orden 2.
2. Otro en  $\infty$  con 30 preimágenes de orden 4.

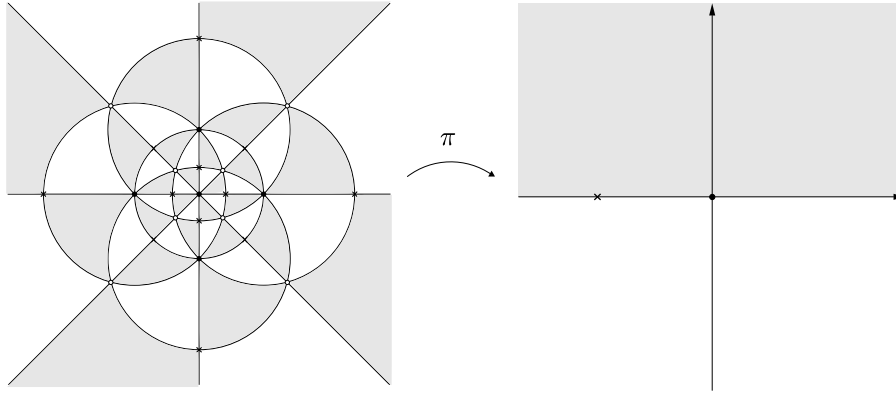


Figura 4: Los puntos marcados con  $\bullet$  en el dibujo de la izquierda representan las preimágenes de 0, los marcados con  $\circ$  las preimágenes de  $\infty$  y los marcados con  $\times$  las preimágenes de  $-4^4/3^3$ .

3. Y uno más en 0 con 24 preimágenes de orden 5.

Consideramos entonces la teselación en el plano hiperbólico generada por las reflexiones sobre los lados de un triángulo hiperbólico con ángulos interiores  $\pi/2$  (correspondiente al valor de ramificación en  $5^5/4^4$  de orden 2),  $\pi/4$  (correspondiente al valor de ramificación en  $\infty$  de orden 4) y  $\pi/5$  (correspondiente al valor de ramificación en 0 de orden 5). Así, tenemos una función  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  y su inversa  $\varphi^{-1}$  se define, igual que antes, consiguiendo un biholomorfismo  $f : \mathbb{H} \rightarrow T$  y extendiendo la función usando Principio de Reflexión de Schwartz. La teselación se ilustra en la Figura 5.

Notemos que esta vez el dominio de la función  $\varphi$  no es biholomorfa a  $\mathcal{V}$ . Sin embargo,  $\mathbb{H}$  es precisamente el cubriente universal de  $\mathcal{V}$ .

Luego:

**Observación 1.** *Dada una uniformización  $\mu : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{V}$ , mediante la composición  $\mu \circ \varphi^{-1}$ , conseguiríamos la inversa de  $\pi$ . Desafortunadamente, aunque el Teorema de Uniformización garantiza la existencia de la función  $\mu$ , no es constructivo.*

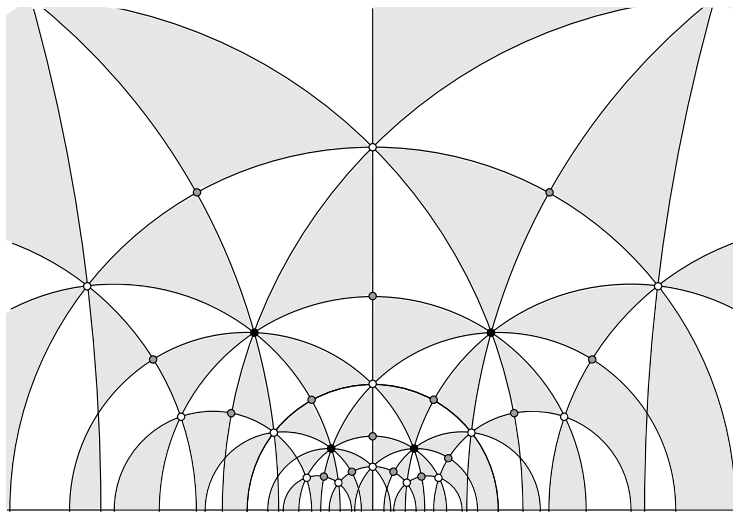


Figura 5: Los vértices marcados con  $\bullet$  corresponden a  $\varphi^{-1}(0)$ , los marcados con  $\circ$  a  $\varphi^{-1}(\infty)$  y el resto corresponden a  $\varphi^{-1}(-5^5/4^4)$ .

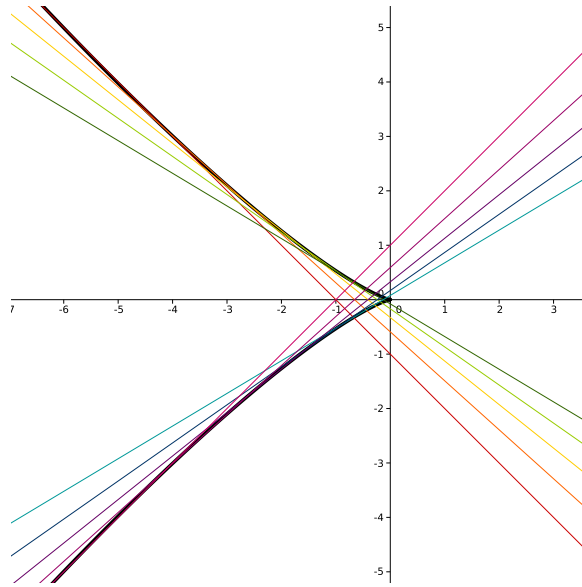


Figura 6: La envolvente de la familia de líneas  $x^5 + ax + b = 0$ .

#### 4. Geometría de ecuaciones.

Cuando vemos la expresión  $x^5 + ax + b = 0$ , pensamos en una ecuación de grado cinco en la variable  $x$  con coeficientes  $a, b$  fijos pero arbitrarios. Esta es una manera de verlo, pero otra forma es pensar en la ecuación  $x^5 + ax + b = 0$  como una ecuación lineal de variables  $a, b$  y coeficientes que dependen de un parámetro  $x$ .

Luego, las ecuaciones  $b = -xa - x^5$  describen una familia de rectas a un parámetro en el plano  $(a, b)$ , como se ilustra en la Figura 6.

Deseamos encontrar la ecuación de la envolvente de dicha familia de rectas:

Un punto  $(\alpha, \beta)$  forma parte de la envolvente si y sólo si:

1.  $(\alpha, \beta)$  está en la recta  $\ell = \{b = -xa - x^5\}$  para algún  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Y al considerar la familia de rectas  $\ell_n = \{b = -a(x + 1/n) - (x + 1/n)^5\}$ , y la sucesión de puntos  $(a_n, b_n) = \ell \cap \ell_n$ , sucede que  $(\alpha, \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n)$ .

Notemos que

$$0 = \left(x + \frac{1}{n}\right)^5 + a\left(x + \frac{1}{n}\right) + b = (x^5 + ax + b) + \frac{1}{n}(5x^4 + a) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos las siguientes ecuaciones:

$$(a_n, b_n) \in \ell \text{ si y sólo si } x^5 + a_n x + b_n = 0. \quad (8)$$

$(a_n, b_n) \in \ell_n$  si y sólo si

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^5 + a\left(x + \frac{1}{n}\right) + b = (x^5 + ax + b) + \frac{1}{n}(5x^4 + a) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0. \quad (9)$$

Multiplicando la ecuación (9) por  $n$ , y tomando en cuenta la ecuación (8) tenemos que  $5x^4 + a_n + O\left(\frac{1}{n}\right) = 0$  así que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 5x^4 + a_n + O\left(\frac{1}{n}\right) = 5x^4 + \alpha = 0$ .

Recordamos que  $(\alpha, \beta) \in \ell$  entonces  $0 = x \cdot x^4 + \alpha x + \beta = -\alpha x/5 + \alpha x + \beta = 4\alpha x/5 + \beta$  de donde  $\beta = -4\alpha x/5$ , elevando a la cuarta,  $\beta^4 = 4^4 \alpha^4 x^4/5^4$ .

Por lo tanto,  $\beta^4 = -4^4 \alpha^5/5^5$ . Entonces la ecuación de la envolvente es  $b^4 = -4^4 \alpha^5/5^5$ .

Obtenemos así la siguiente proposición:

**Proposición 3.** *Las ecuaciones correspondientes a los puntos  $(a, b)$  que se encuentran a la izquierda de la envolvente  $b = -4^4 \alpha^5/5^5$  tienen tres raíces reales. Las ecuaciones correspondientes a los puntos  $(a, b)$  que se encuentran a la derecha de la envolvente tienen una raíz real. Las ecuaciones correspondientes a los puntos  $(a, b)$  que pertenecen a la envolvente tienen dos raíces reales, una de ellas de multiplicidad dos.*

Recordemos que un polinomio real tiene una cantidad par de raíces complejas, por lo que nuestro polinomio  $x^5 + ax + b = 0$  puede tener, en principio 1, 3 o 5 raíces reales (contando con multiplicidad). Sin embargo la Proposición anterior reafirma la Observación 2 del Anexo: No existe ecuación de la forma  $z^5 + az + b = 0$  con  $a$  y  $b$  no simultáneamente cero tal que sus cinco soluciones sean todas reales.

*Demostración.* Parametrizamos la envolvente, asignando a cada punto de la envolvente el valor  $x$  que corresponde a la ecuación  $b = -xa - x^5$  que es tangente a la envolvente en dicho punto, como se observa en la Figura 7 (observemos que dicho valor  $x$  corresponde a menos la pendiente de la recta que es tangente en ese punto).

Dado un punto  $(a_0, b_0)$ , consideremos  $x_0$  tal que la recta  $b = -x_0 a - x_0^5$  es tangente a la envolvente y pasa por  $(a_0, b_0)$ . Esto último implica que  $b_0 = x_0 a_0 - x_0^5$ , por lo que podemos concluir que  $x_0$  es una solución a la ecuación  $x^5 + a_0 x + b_0 = 0$ .

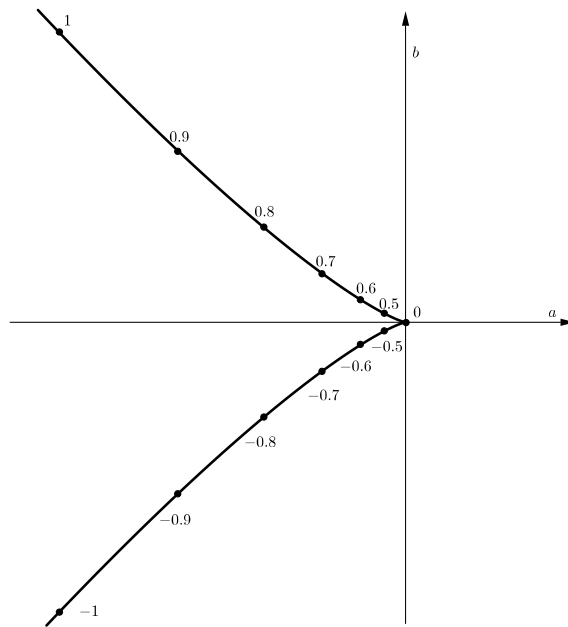


Figura 7: La envolvente  $b = -4^4 a^5 / 5^5$  junto con algunos valores de  $x$  que vamos asignando a cada punto de la curva. Observemos que cada valor  $x$  corresponde con menos la pendiente de la recta tangente en ese punto.

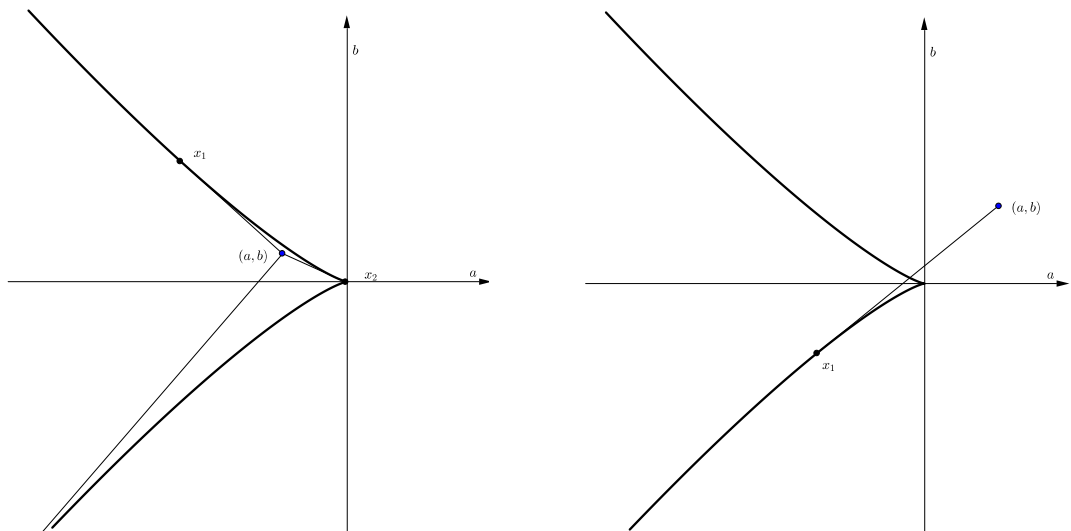


Figura 8: Soluciones reales  $x_i$  a la ecuación  $x^5 + ax + b = 0$ .

Para los puntos  $(a, b)$  a la izquierda de la envolvente, existen tres rectas tangentes a la envolvente que pasan por  $(a, b)$ ; los puntos a la derecha de la envolvente sólo tienen una recta tangente a la envolvente que pasan por ellos; mientras que para los puntos en la envolvente existen dos rectas tangentes que pasan por dichos puntos, como se ilustra en las Figuras 8 y 9.

□

Luego, si se desea encontrar las soluciones reales a la ecuación  $x^5 + a_0x + b_0 = 0$ , se debe de encontrar menos las pendientes de las rectas tangentes a la curva  $b = -4^4a^5/5^5$  que pasan por el punto  $(a_0, b_0)$ .

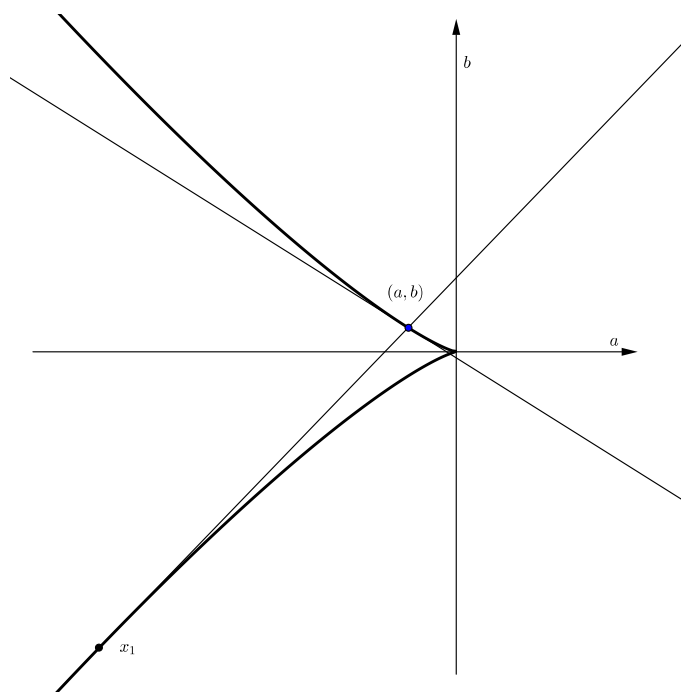


Figura 9: Si  $(a, b)$  pertenece a la envolvente, hay dos rectas tangentes que pasan por  $(a, b)$ .

## 5. Anexo.

El objetivo de este anexo es probar algunas propiedades que satisfacen las raíces de las ecuaciones de la forma  $z^5 + az + b = 0$  con  $a, b \in \mathbb{C}$  no simultáneamente iguales a 0. La mayor parte de las demostraciones son cuentas explícitas, por lo que en muchos casos sólo daremos una idea de las cuentas que deben realizarse.

**Lema 1.**  $(z_1, z_2, \dots, z_5) \in \mathcal{S}$  si y sólo si satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^5 z_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^5 z_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^5 z_i^3 &= 0.\end{aligned}$$

*Demostración.*  $(z_1, \dots, z_5) \in \mathcal{S}$  si y sólo si existen  $a, b \in \mathbb{C}$  tales que  $\prod_{i=1}^5 (z - z_i) = z^5 + az + b$ .

Eso significa que el coeficiente de  $z^4$  tiene que ser 0, por lo que

$$\sum_i z_i = 0 \tag{10}$$

obteniendo así la primera ecuación.

También el coeficiente de  $z^3$  debe anularse, de donde  $\sigma_2(z_1, \dots, z_5) := \sum_{i < j} z_i z_j = 0$ . Junto con la ecuación 10, tenemos:

$$\begin{aligned}0 &= \left( \sum_i z_i \right)^2 = \sum_i z_i^2 + 2 \sum_{i < j} z_i z_j \text{ si y sólo si} \\ &\sum_i z_i^2 = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Finalmente, como también el coeficiente de  $z^2$  es 0, entonces  $\sigma_3(z_1, \dots, z_5) := \sum_{i < j < k} z_i z_j z_k = 0$ . Usando las ecuaciones 10 y 11 obtenemos una ecuación equivalente:

$$0 = \left( \sum_i z_i \right)^3 = \sum_i z_i^3 + 3 \left( \sum_i z_i^2 \left( \sum_{j \neq i} z_j \right) \right) + 6 \left( \sum_{i < j < k} z_i z_j z_k \right) \text{ si y sólo si}$$

$$\sum_i z_i^3 = 0. \quad (12)$$

□

**Lema 2.** *Una ecuación de la forma  $z^5 + az + b = 0$  con  $a$  y  $b$  no simultáneamente cero, tiene a lo más una raíz de multiplicidad 2.*

**Lema 3.** *Si 0 es una raíz de una ecuación de la forma  $z^5 + az + b = 0$  con  $a$  y  $b$  no simultáneamente cero, entonces el resto de las raíces son distintas de 0.*

Para demostrar ambos lemas, se considera el sistema de ecuaciones del Lema 1 según el caso. Resolviendo el sistema, obtenemos que sólo tiene solución si todo  $z_i = 0$ . Pero eso significaría que  $a = b = 0$ , lo cual no puede ser.

**Observación 2.** *No existe ecuación de la forma  $z^5 + az + b = 0$  con  $a$  y  $b$  no simultáneamente cero tal que sus cinco soluciones sean todas reales.*

Las soluciones de una ecuación de dicha forma deben satisfacer el sistema de ecuaciones descrito en el Lema 1. Pero si todas las soluciones son reales, su cuadrado es positivo, y entonces para satisfacer la ecuación (11) del sistema, es necesario que todas las soluciones sean 0.

## Referencias

- [1] Cayley Arthur, *On Tschirnhausen's Transformation*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 152 (1861) 561-578.
- [2] Cohn Harver, *Conformal mapping on Riemann Surfaces*, Dover Publications Inc., 1967
- [3] Coxeter Harold S. M., *Regular polytopes*, Dover Publications, 1973.
- [4] Fuchs Dimitry, Tabachnikov Serge, *Mathematical Omnibus. Thirty Lectures on Classic Mathematics*, American Mathematical Society, 2007.
- [5] Gironde Ernesto, González-Diez Gabino, *Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d'Enfants*, The London Mathematical Society, Student Texts 79, Cambridge University Press, 2012.
- [6] Green Mark L., *On the analytic solution of the equation of fifth degree*. *Compositio Mathematica*, 37 (1978), no. 3, 233-241.
- [7] Griffiths Phillip A. *Introduction to Algebraic Curves*, American Mathematical Society vol. 76 1989.
- [8] Katz Gabriel, *How tangents solve algebraic equations, or a remarkable geometry of discriminant varieties*, *Expositiones Mathematicae*, 21 (2003) 219-261.
- [9] Klein Felix, *Lectures on the ikosahedron, and the solution of equations of the fifth degree*, London: Trübner & CO., Ludgate Hill, 1888.