

**Asintóticas para frecuencias altas de ondas
atrapadas por sierras submarinas**

Tesis que presenta

ANA MAGNOLIA MARIN RAMIREZ

para obtener el grado de Doctora en Matemáticas.

Director de Tesis:

DR. PETR ZHEVANDROV BOLSHAKOVA.

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS.

UNIVERSIDAD MICHOACANA

DE

SAN NICOLÁS DE HIDALGO.

Morelia, Michoacán,

Octubre de 2005.

Índice general

Introducción	IV
1. Teoremas de existencia y unicidad	1
1.1. Introducción	1
1.2. Análisis espectral del operador A	7
1.3. El espectro esencial	10
1.4. Principios de comparación	15
2. Asintótica del valor propio	32
2.1. Introducción	32
2.2. Formulación matemática y resultado principal	33
2.3. Reducción al fondo y a la superficie libre	34

2.4. Solución del sistema de ecuaciones	
integrales	51
2.5. Asintótica del número β	63
Bibliografía	67

Introducción

Desde el primer trabajo de Ursell [1] en 1951, se conoce que en el caso de sierras submarinas ocurre el fenómeno de ondas guiadas para ondas de agua.

Jones, en el período inicial del desarrollo del análisis funcional moderno, obtuvo el primer resultado matemático concerniente al problema que tratamos aquí. Usando análisis espectral para el operador de Laplace en dominios no acotados con varias condiciones de frontera, mostró los teoremas de comparación, de los cuales se obtienen resultados esenciales en la teoría de ondas de gravedad, como son la existencia de un número finito de modos guiados para un cierto valor de k .

Dentro del marco de la teoría espectral, Garipov en 1965 (Ver [2]) obtuvo el primer resultado general de existencia. El mostró que para k suficiente-

mente grande, en el caso de las sierras submarinas, existe una onda guiada bajo el único supuesto que la función $h(x)$ (fondo) presenta un mínimo local estricto. Este modo, conocido como el modo fundamental, fue estudiado con más detalle por Grimshaw en 1974 con particular atención a bajas frecuencias. Debido a los diferentes teoremas de comparación dados por Jones, Grimshaw obtuvo cotas superiores e inferiores para la relación de dispersión de este modo y una condición necesaria para la existencia de estas ondas, para cualquier valor de k . También obtuvo usando ecuaciones integrales, la relación de dispersión de las ondas guiadas para el caso del escalón.

Este caso específico, fue tratado para profundidades grandes por Evans y McIver, usando una aproximación ligeramente diferente, demostraron que el modo fundamental fue el único para pequeños y grandes valores de k . Mas aún, en relación a el trabajo inicial de Jones, ellos con ayuda de resultados numéricos, obtuvieron mejores estimaciones para el número de onda guiada, para cierto valor de k .

En 1987, Ursell con argumentos más sencillos, obtuvo los mismos resultados que Jones y Garipov. En particular el uso el así llamado teorema de Kelvin,

el cual es una versión del principio min-max, usado en este trabajo.

A.S. Bonnet-Ben Dhia y P. Joly [5] en 1993, mostraron que a alta frecuencia existe un único modo atrapado, el cual se propaga en la dirección de la sierra, también obtuvieron algunas estimaciones para la frecuencia de este modo.

En este trabajo nos concentramos al problema de ondas atrapadas por sierras submarinas, y nuestro interés es construir la asintótica de esta frecuencia, para valores grandes de k , donde k es el número de onda que se propaga en la dirección de la sierra.

En torno a este trabajo esta muy relacionado el problema de ondas de agua atrapadas por una sierra submarina de pequeña altura, el cual es tratado en [7] por P. Zhevandrov y A. Merzon en el 2003, donde una cercanía al problema de ondas de agua y pequeñas perturbaciones de la ecuación de Schrödinger en dimensión uno es establecida. Después este problema ha sido estudiado por diferentes autores (mencionamos por ejemplo [8, 9, 10], en el contexto de ondas de agua, [11]).

Este trabajo se desarrolla en dos capítulos, en el primero usamos las técnicas de Bonnet Ben Dhia y Patrick Joly, para demostrar la existencia y unicidad de la onda guiada para valores grandes de k y en el segundo, usamos teoría potencial para reducir el problema inicial a un sistema de dos ecuaciones integrales, cuya solución la encontramos utilizando una técnica similar a la de P. Zhevandrov y A. Merzon [7], la cual nos lleva a encontrar la asíntota de esta frecuencia.

Observamos que con respecto al trabajo de P. Zhevandrov y A. Merzon la asíntota se vuelve exponencial, i.e., la distancia de la frecuencia de la onda atrapada a la mínima frecuencia del espectro continuo, es exponencialmente pequeña en k . Lo cual hace ver el problema complicado desde el punto de vista de expansiones asíntóticas, pero, en realidad construimos una expansión exacta la cual es convergente y no presenta dificultades.

Capítulo 1

Teoremas de existencia y unicidad de ondas atrapadas por sierras submarinas

1.1. Introducción

Consideremos el modelo matemático descrito con ayuda de las ecuaciones que gobiernan desplazamientos pequeños asociados con el flujo irrotacional de un fluido incompresible perfecto. Estas ecuaciones se deducen de la linealización

de las ecuaciones de la dinámica clásica para un fluido, las cuales son validas para la descripción de ondas de agua. Supongamos que el fluido ocupa un dominio cilindrico $\Omega \times \mathbb{R}$, donde Ω esta definido como sigue:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -h(x) < y < 0\}, \quad (1.1.1)$$

donde,

$$h(x) = h_0 + V(x), \quad (1.1.2)$$

es una función positiva, con $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ que alcanza un mínimo en el interior del soporte de $V(x)$.

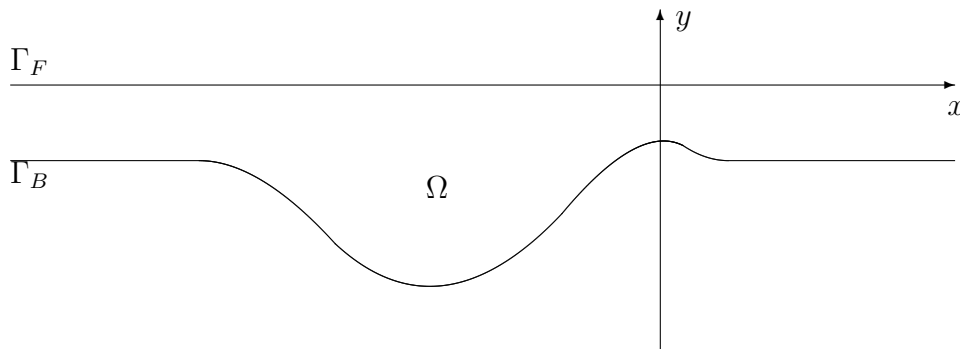


Figura 1.1: Dominio Ω

Denotemos por (x, y) un punto arbitrario del dominio. La dirección $y < 0$

indica la profundidad. Descompongamos la frontera de Ω de la siguiente manera:

$$\partial\Omega = \Gamma_F \cup \Gamma_B,$$

donde $\Gamma_F = \{(x, y) : y = 0\}$ es la superficie libre y $\Gamma_B = \partial\Omega - \Gamma_F$ es la base del oceano, (Ver figura 1.1). Consideremos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = \omega^2\phi, & \text{en } \Gamma_F, \\ \frac{\partial\phi}{\partial \vec{n}} = 0, & \text{en } \Gamma_B. \end{array} \right. \quad (1.1.3)$$

Aqui $\phi \in H^1(\Omega)$ es el potencial de velocidad, H^1 es el espacio de Sobolev estandar de funciones con energía finita, k es un parámetro, $h(x)$ es el fondo, x y y son las coordenadas horizontal y vertical, respectivamente, ω es la frecuencia y al mismo tiempo el parámetro espectral. Utilizaremos la siguiente notación:

$$h^- = \min_{x \in \mathbb{R}} h(x) \quad (1.1.4)$$

$$h_0 = h(x), \text{ para } x \notin \text{supp } V(x).$$

Más aún, denotemos por $\omega_0 := \omega_0(k)$ la única solución de la ecuación transcendental

$$k \tanh kh_0 = \omega^2, \quad k > 0. \quad (1.1.5)$$

En el presente capítulo demostraremos el siguiente resultado: Si $0 < h^- < h_0$, existe una onda atrapada a alta frecuencia. (Ver sección 1.4). Consideremos el siguiente problema auxiliar:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} = \varphi, & \text{en } \Gamma_F, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} = 0, & \text{en } \Gamma_B. \end{array} \right. \quad (1.1.6)$$

Lema 1.1.1. *Dada $\varphi \in L_2(\Gamma_F)$, existe una única $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que ϕ es una solución generalizada de (1.1.6) y satisface las siguientes desigualdades:*

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq \text{Const} \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)}, \quad (1.1.7)$$

$$\|\phi|_{\Gamma_F}\|_{L_2(\Gamma_F)} \leq \text{Const} \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)}. \quad (1.1.8)$$

Demostración. Sean $\varphi \in L_2(\Gamma_F)$ y ϕ una solución de (1.1.6) entonces para cualesquiera $\psi \in H^1(\Omega)$ tenemos que aplicando el Teorema de la Divergencia,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\Delta\phi\psi + \nabla\phi\nabla\psi] dx dy &= \int_{\Omega} \text{div}(\psi\nabla\phi) dx dy \\ &= \int_{\Gamma_F} \frac{\partial\phi}{\partial y} \psi d\sigma + \int_{\Gamma_B} \frac{\partial\phi}{\partial n} \psi d\sigma. \end{aligned}$$

Luego de (1.1.6),

$$\int_{\Omega} [k^2 \phi \psi + \nabla \phi \nabla \psi] dx dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \psi(x, 0) dx. \quad (1.1.9)$$

Haciendo el cambio de variable $x' = \frac{x}{\varepsilon}$ y $y' = \frac{y}{\varepsilon}$ donde $\varepsilon = 1/k$. Por tanto la ecuación anterior la podemos escribir como sigue:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} [k^2 \phi(\varepsilon x', \varepsilon y') \psi(\varepsilon x', \varepsilon y') + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_{(x', y')} \phi(\varepsilon x', \varepsilon y') \nabla_{(x', y')} \psi(\varepsilon x', \varepsilon y')] dx' dy' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varepsilon \varphi(\varepsilon x') \psi(\varepsilon x', 0) dx'. \end{aligned}$$

Renombrando $\varepsilon x'$ por x , $\varepsilon y'$ por y , Ω' por Ω y Γ'_F por Γ_F tenemos la siguiente ecuación,

$$B[\phi, \psi] = (\varphi, \psi). \quad (1.1.10)$$

Donde,

$$B[\phi, \psi] = \int_{\Omega} [k^2 \phi \psi + \nabla \phi \nabla \psi] dx dy \quad \text{y} \quad (\varphi, \psi) = \varepsilon \int_{\Gamma_F} \varphi \psi d\sigma. \quad (1.1.11)$$

Definamos el funcional lineal

$$\begin{aligned} f : H^1(\Omega) &\mapsto \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto \varepsilon \int_{\Gamma_F} \varphi \psi d\sigma. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Dado que $\psi \in H^1(\Omega)$ y de la desigualdad de Cauchy Schwarz f es acotado.

En efecto:

$$\left| \varepsilon \int_{\Gamma_F} \varphi \psi d\sigma \right| \leq C \|\psi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Del Teorema de Representación de Riesz, dado que f es lineal y acotado, existe un único elemento $\phi_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $f(\psi) = (\phi_0, \psi)_{H^1(\Omega)}$, para todo $\psi \in H^1(\Omega)$, es decir,

$$\varepsilon \int_{\Gamma_F} \varphi \psi d\sigma = (\phi_0, \psi)_{H^1(\Omega)}. \quad (1.1.13)$$

Lo cual muestra que existe una única $\phi_0 \in H^1(\Omega)$ tal que ϕ_0 es una solución generalizada de (1.1.6). Resta demostrar que ϕ_0 satisface (1.1.7) y (1.1.8).

De (1.1.13) y de la definición de producto interno en $H^1(\Omega)$,

$$\varepsilon \int_{\Gamma_F} \varphi \psi d\sigma = \int_{\Omega} (\phi_0 \psi + \nabla \phi_0 \nabla \psi) dx dy \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

En particular para $\psi = \phi_0$, tenemos:

$$\varepsilon \int_{\Gamma_F} \varphi \phi_0 d\sigma = \int_{\Omega} (\phi_0^2 + |\nabla \phi_0|^2) dx dy = \|\phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (1.1.14)$$

Usando la Desigualdad de Schwarz

$$\varepsilon \int_{\Gamma_F} \varphi \phi_0 d\sigma \leq \varepsilon \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)} \|\phi_0\|_{L_2(\Gamma_F)} \leq C \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)} \|\phi_0\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.1.15)$$

Por tanto de (1.1.15) y de (1.1.14), tenemos,

$$\|\phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)} \|\phi_0\|_{H^1(\Omega)}.$$

En consecuencia

$$\|\phi_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)}.$$

Lo que muestra (1.1.7). Para (1.1.8) tenemos de (1.1.15) y de (1.1.7)

$$\|\phi_0|_{\Gamma_F}\|_{L_2(\Gamma_F)} \leq C\|\phi_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)}.$$

Lo cual muestra (1.1.8) y en consecuencia el Lema. \square

1.2. Análisis espectral del operador A

En esta sección hacemos un análisis cualitativo y encontramos una cota inferior del espectro del operador A que definimos a continuación. Sea k un entero, $k \geq 1$, definamos el operador acotado A como sigue

$$\begin{aligned} A : L_2(\Gamma_F) &: \longmapsto L_2(\Gamma_F) \\ \varphi &\longmapsto A\varphi = \phi|_{\Gamma_F}. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Donde ϕ es la solución correspondiente a φ , según el lema (1.1.1).

Lema 1.2.1. *El Operador A es lineal, acotado y simétrico.*

Demostración. Dadas φ_1 y φ_2 en Γ_F existen ϕ_1 y ϕ_2 en $H^1(\Omega)$ soluciones

generalizadas de (1.1.6) y tales que

$$A\varphi_1 = \phi_1|_{\Gamma_F} \text{ y } A\varphi_2 = \phi_2|_{\Gamma_F}. \quad (1.2.2)$$

Veamos primero que A es lineal. En efecto, de (1.2.2), de la linealidad del operador derivada normal y Laplaciano tenemos que para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi_1 + \lambda\phi_2$ satisface (1.1.6) y por tanto, $A(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = A(\varphi_1) + \lambda A(\varphi_2)$. Así A es lineal. De (1.1.8) se tiene que A es acotado. Veamos ahora que es simétrico. En efecto de (1.2.2) y de la fórmula de Green

$$\int_{\Omega} (\phi_1 \Delta \phi_2 - \phi_2 \Delta \phi_1) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial \vec{n}} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \vec{n}} \right) ds.$$

De la descomposición de la frontera de Ω , sumando y restando en el lado izquierdo de la igualdad anterior $k^2\phi_1\phi_2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\phi_1(\Delta \phi_2 - k^2 \phi_2) - \phi_2(\Delta \phi_1 - k^2 \phi_1)] dx dy &= \int_{\Gamma_F} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial \vec{n}} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \vec{n}} \right) ds \\ &+ \int_{\Gamma_B} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial \vec{n}} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \vec{n}} \right) ds. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior y de (1.1.6) tenemos que,

$$0 = \int_{\Gamma_F} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial \vec{n}} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \vec{n}} \right) ds.$$

De (1.1.6) y sustituyendo en la ecuación anterior (1.2.2) obtenemos,

$$\int_{\Gamma_F} A\varphi_1\varphi_2 ds = \int_{\Gamma_F} A\varphi_2\varphi_1 ds.$$

Por tanto A es simétrico. \square

Lema 1.2.2. *El operador A es Autoadjunto.*

Demostración. Del Lema 1.2.1 A es acotado y simétrico y como

$D(A) = L_2(\Gamma_F)$ entonces A es autoadjunto. \square

(1.1.3) y (1.1.6) se relacionan de la siguiente manera: Dada $\varphi \in L_2(\Gamma_F)$ existe $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que satisface (1.1.6) y

$$\varphi = \omega^2 \phi|_{\Gamma_F} \quad \text{y} \quad A\varphi = \phi|_{\Gamma_F}, \quad \text{es decir,} \quad \omega^{-2}\varphi = A\varphi.$$

Por tanto,

$$(A\varphi, \varphi) = \omega^2 \int_{\mathbb{R}} \phi^2(x, 0) dx. \quad (1.2.3)$$

Donde (\cdot, \cdot) denota el producto interno en $L_2(\Gamma_F)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (A\varphi, \varphi) &= (\omega^{-2}\varphi, \varphi) = \omega^{-2}(\omega^2\phi(x, 0), \omega^2\phi(x, 0)) \\ &= \omega^2(\phi(x, 0), \phi(x, 0)) = \omega^2 \int_{\mathbb{R}} \phi^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Denotemos por $\sigma(A)$ el espectro del operador A . Del Lemma 1.2.2, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos $\lambda \in \rho(A)$ (Conjunto Resolvente), entonces para toda $\xi \in \text{Ran}(A - \lambda I)$, existe una $\varphi \in D(A) = L_2(\Gamma_F)$, tal que $(A - \lambda I)\varphi = \xi$. De

(1.2.3),

$$\begin{aligned} ((A - \lambda I)\varphi, \varphi) &= (A\varphi, \varphi) + (-\lambda)(\varphi, \varphi) = (\omega^{-2} + (-\lambda))(\varphi, \varphi) \\ &\geq (-\lambda)\|\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)}^2. \end{aligned}$$

Donde (\cdot, \cdot) denota el producto interno en $L_2(\Gamma_F)$. Por tanto, $N(A - \lambda I) = \{0\}$, siempre que $(-\lambda) > 0$, es decir, $(A - \lambda I)$ es una biyección y $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, siempre que $(-\lambda) > 0$. De la desigualdad de Schwartz,

$$-\lambda\|\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)}^2 \leq \|(A - \lambda I)\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)}\|\varphi\|_{L_2(\Gamma_F)}.$$

Llamando $(A - \lambda I)\varphi = \xi$, tenemos

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\xi\|_{L_2(\Gamma_F)} \leq (-\lambda)^{-1}\|\xi\|_{L_2(\Gamma_F)}.$$

Lo cual significa que $(A - \lambda I)^{-1}$ es acotada siempre que $-\lambda > 0$. Es decir $\lambda \in \mathbb{R}$ pertenece al conjunto resolvente de A siempre que $-\lambda > 0$, entonces

$$\sigma(A) \subset [0, \infty). \quad (1.2.4)$$

1.3. El espectro esencial

Determinaremos ahora el espectro esencial del operador A . Primero demostraremos el siguiente Teorema.

Teorema 1.3.1. *Se cumple que $[0, (k \tanh kh_0)^{-1}] \subset \sigma_{ess}(A)$.*

Demostración. Dado que el espectro esencial es un conjunto cerrado (Ver [16]), es suficiente demostrar la siguiente inclusión

$$(0, (k \tanh kh_0)^{-1}) \subset \sigma_{ess}(A).$$

Sea $0 < \sigma < (k \tanh kh_0)^{-1}$, consideremos la sucesión de funciones $\varphi_n(x) \in L_2(\Gamma_F)$ dada por

$$\varphi_n(x) = \psi_{ny}(x, 0), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.3.1)$$

donde

$$\psi_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{n}} \theta\left(\frac{y}{n}\right) \eta\left(\frac{x}{n}\right) e^{\frac{|y|}{\sigma}} e^{-i\tau|x|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

con $\tau = \sqrt{k^2 + \sigma}$. Además, $\psi_n(x, y) \in H^1(\Omega)$ satisface (1.1.6), $\theta, \eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ son tales que $0 \leq \theta(y), \eta(x) \leq 1$ con $\theta(0), \theta'(0) \neq 0$ y

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \text{ ó } x \geq 3 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Para demostrar que $\sigma \in \sigma_{ess}(A)$ de la definición de espectro esencial (ver [17], páginas 144 y 228), es suficiente mostrar que $\sigma \in C\sigma(A)$, es decir $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface:

$$\text{i) } \|\varphi_n\|_{L_2(\Gamma_F)} > 0,$$

ii) $\varphi_n \in D(A)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A\varphi_n + \sigma\varphi_n\|_{L_2(\Gamma_F)} = 0$.

De (1.3.1) y (1.3.2) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_F} |\varphi_n(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} |\psi_{ny}(x, 0)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \eta^2\left(\frac{x}{n}\right) \left| \frac{1}{\sigma} \theta(0) + \frac{1}{n} \theta'(0) \right|^2 dx \\ &= \left| \frac{1}{\sigma} \theta(0) + \frac{1}{n} \theta'(0) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(u) du \\ &> 0 \end{aligned}$$

que prueba i) y garantiza que $\varphi_n \in L_2(\Gamma_F)$. De (1.3.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\varphi_n - \sigma\varphi_n\|_{L_2(\Gamma_F)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi_n(x, 0) - \sigma\psi_{ny}(x, 0)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{n} \theta'(0) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \eta^2\left(\frac{x}{n}\right) dx \right)^{1/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{n} \theta'(0) \left(\int_{\mathbb{R}} \eta^2(u) du \right)^{1/2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así se demuestra ii). □

Ahora demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 1.3.2. *Se cumple que* $\sigma_{ess}(A) = [0, (k \tanh(kh_0))^{-1}]$.

Demostración. Del Teorema 1.3.1 es suficiente mostrar la siguiente inclusión

$$\sigma_{ess}(A) \subset [0, (k \tanh(kh_0))^{-1}].$$

Sea $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$, entonces existe una sucesión $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del $D(A)$ tal que

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_{L_2(\Gamma_F)} &= 1, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ A\varphi_n - \lambda\varphi_n &\rightarrow 0, & \text{fuertemente en } L_2(\Gamma_F), \\ \varphi_n &\rightharpoonup 0, & \text{débilmente en } L_2(\Gamma_F). \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Sumando y restando $(k \tanh(kh_0))^{-1}(\varphi_n, \varphi_n)$ tenemos que,

$$(A\varphi_n, \varphi_n) - (k \tanh(kh_0))^{-1}(\varphi_n, \varphi_n) = p(k; \varphi_n, \varphi_n),$$

donde,

$$p(k; \varphi_n, \varphi_n) = (A\varphi_n - (k \tanh(kh_0))^{-1}\varphi_n, \varphi_n)$$

entonces

$$(A\varphi_n, \varphi_n) - (k \tanh(kh_0))^{-1}\|\varphi_n\|^2 = p(k; \varphi_n, \varphi_n). \quad (1.3.4)$$

De (1.3.3), $\varphi_n \rightharpoonup 0$, débilmente en $L_2(\Gamma_F)$, es decir, para toda $\psi \in L_2(\Gamma_F)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi \varphi_n(x) dx \rightarrow 0.$$

Así que tomando:

$$\psi = A\varphi_n - (k \tanh(kh_0))^{-1}\varphi_n,$$

tenemos que $p(k; \varphi_n, \varphi_n) < 0$ y $p(k; \varphi_n, \varphi_n) \rightarrow 0$ cuando, $n \rightarrow \infty$. entonces,

$$(A\varphi_n, \varphi_n) - (k \tanh(kh_0))^{-1} \|\varphi_n\|^2 < 0.$$

De (1.3.3)

$$|(A\varphi_n - \lambda\varphi_n, \varphi_n)| = |(A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda|$$

es decir

$$(A\varphi_n, \varphi_n) \rightarrow \lambda \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Por tanto, $\lambda - (k \tanh(kh_0))^{-1} < 0$. Entonces, $\lambda \in [0, (k \tanh(kh_0))^{-1}]$. Lo cual completa la demostración del Teorema. \square

Denotemos por $\sigma_d(A)$ al conjunto de valores propios del operador A que no pertenecen al espectro esencial $\sigma_{ess}(A)$. De (1.2.4) y del Teorema 1.3.2 deducimos que:

$$\sigma_d(A) \subset ((k \tanh(kh_0))^{-1}, +\infty). \quad (1.3.5)$$

En lo que sigue denotemos por

$$N := N(k) \quad \text{el número de valores propios de } \sigma_d(A) \quad (1.3.6)$$

cada uno de ellos contado un número de veces igual a su multiplicidad. Decimos que N es el número de modos guiados para un cierto valor de k .

1.4. Principios de comparación

En esta sección establecemos que existe una única onda atrapada a alta frecuencia cuando,

$$0 < h^- < h_0, \quad (1.4.1)$$

utilizando algunos criterios de comparación. Los cuales pueden ser deducidos directamente del principio minimax y nos dan estimatimaciones cuantitativas para las funciones $S_m := S_m(k)$ que definimos a continuación. Definamos:

$$S_1 = \sup_{\varphi \in L_2(\Gamma_F), \varphi \neq 0} \frac{(A\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_F}^2}. \quad (1.4.2)$$

Y para cada entero $m > 1$,

$$S_m = \inf_{V \in \mathcal{V}_{m-1}(\Gamma_F)} \sup_{\varphi \in V^\perp, \varphi \neq 0} \frac{(A\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_F}^2}, \quad (1.4.3)$$

donde $(A\varphi, \varphi)$ esta definida en (1.2.3). $\mathcal{V}_m(\Gamma_F)$ denota el conjunto de todos los subespacios de dimensión m de $L_2(\Gamma_F)$ y para $V \subset L_2(\Gamma_F)$

$$V^\perp = \left\{ \Psi \in L_2(\Gamma_F); \int_{\mathbb{R}} \Psi \xi dx = 0 \quad \forall \xi \in V \right\}$$

Podemos usar la siguiente fórmula equivalente:

$$S_m = \sup_{V \in \mathcal{V}_m(\Gamma_F)} \inf_{\varphi \in V, \varphi \neq 0} \frac{(A\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_F}^2}, \quad (1.4.4)$$

Lema 1.4.1. Sean $h(x)$ y $\tilde{h}(x)$ funciones positivas que satisfacen (1.1.2)

tales que

$$\tilde{h}(x) \leq h(x) \quad (1.4.5)$$

entonces

$$S_m \leq \tilde{S}_m, \quad \forall m \geq 1.$$

Más aun, si $\tilde{h} = h$, cuando $x \notin [-x_0, x_0]$, entonces $\tilde{N} \geq N$, donde x_0 es tal que $\text{Supp } h \subset [-x_0, x_0]$.

Sea $\tilde{\Omega}$ el dominio asociado a \tilde{h} . De 1.4.5

$$\tilde{\Omega} \subset \Omega, \quad (1.4.6)$$

donde Ω esta definida en (1.1.1). De manera similar como en la definición de operador A en (1.2.1), podemos definir el operador \tilde{A} , asociado al problema (1.1.6), para el dominio $\tilde{\Omega}$, correspondiente a la función \tilde{h} . Luego, dada $\varphi \in L_2(\Gamma_F)$, del Lema 1.1.1, existe $\phi \in H^1(\Omega)$, que satisface (1.1.6) con $A\varphi = \phi|_{y=0}$. Igualmente, existe $\tilde{\phi} \in H^1(\tilde{\Omega})$, que satisface el siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{\phi} - k^2 \tilde{\phi} = 0, & \text{en } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{n}} = \varphi, & \text{en } \Gamma_F, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{n}} = 0, & \text{en } y = -\tilde{h}. \end{array} \right. , \quad (1.4.7)$$

y es tal que $\tilde{A}\varphi = \tilde{\phi}|_{y=0}$.

Lema 1.4.2. *Dada $\varphi \in L_2\Gamma_F$, se tiene*

$$(A\varphi, \varphi) \leq (\tilde{A}\varphi, \varphi)$$

Demostración. Sea

$$I = \int_{\Omega-\tilde{\Omega}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} ds + \int_{\partial \tilde{\Omega}} (\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial \vec{n}} ds + \int_{\partial \Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} ds - \int_{\partial \tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \vec{n}} ds$$

Sean, \vec{n}_1, \vec{n}_3 los vectores normales exteriores a las funciones h y \tilde{h} respectivamente y $\vec{n}_2 = -\vec{n}_3$, entonces \vec{n}_1 y \vec{n}_2 son los vectores normales exteriores correspondientes a $\partial(\tilde{\Omega} - \Omega)$. De (1.1.6) se tiene que $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_1} = 0$. Por tanto, usando notaciones obvias,

$$I_1 = \int_{\Omega-\tilde{\Omega}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} ds = \int_{\Gamma_B} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_1} ds + \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_2} ds = \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_2} ds.$$

De (1.1.6) y (1.4.7) se tiene que $\tilde{\phi}_y|_{y=0} = \phi_y|_{y=0} = \varphi$, luego

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\partial \tilde{\Omega}} (\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial \vec{n}} ds \\ &= \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} (\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial \vec{n}_3} ds + \int_{\mathbb{R}} \left((\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx \\ &= \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} (\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial \vec{n}_3} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \phi \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \vec{n}_3} d\sigma - \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \tilde{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_3} \sigma - \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \phi \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \vec{n}_3} d\sigma + \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_3} d\sigma \\
&= - \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \tilde{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_3} \sigma + \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_3} d\sigma \\
&= - \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \tilde{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_3} \sigma - \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_2} d\sigma,
\end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} ds = \int_{\mathbb{R}} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) \varphi(x) dx$$

y

$$I_4 = - \int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \vec{n}} ds = - \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(x, 0) \varphi(x) dx.$$

Entonces de I_1 , I_2 , I_3 y I_4 , se tiene que

$$I = - \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \tilde{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_3} d\sigma + \int_{\mathbb{R}} \phi|_{y=0} \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}|_{y=0} \varphi(x) dx$$

De (1.1.6), (1.4.7) y (1.4.6) se tiene que, $\Delta \tilde{\phi} - k^2 \tilde{\phi} = 0$ y $\Delta \phi - k^2 \phi = 0$ en $\tilde{\Omega}$, entonces, aplicando el teorema de Green se tiene

$$0 = \int_{\tilde{\Omega}} [\Delta \phi \tilde{\phi} - \Delta \tilde{\phi} \phi] dx dy = \int_{\partial\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \tilde{\phi} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \vec{n}} \phi \right) ds. \quad (1.4.8)$$

Dado que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{n}} ds &= \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}|_{y=0} \varphi(x) dx, \\ \int_{\partial\tilde{\Omega}} \phi \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{n}} ds &= \int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \phi \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma + \int_{\mathbb{R}} \phi|_{y=0} \varphi(x) dx,\end{aligned}$$

luego de (1.4.8) se tiene que

$$\int_{\Gamma_{\tilde{B}}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}|_{y=0} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi|_{y=0} \tilde{\varphi}(x) dx$$

Reemplazando la igualdad anterior en I , se tiene que $I = 0$. Dado que

$$\int_{\partial(\tilde{\Omega}-\Omega)} \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} ds = \int_{\Omega-\tilde{\Omega}} (\phi \nabla\phi + \nabla\phi \nabla\phi) dx dy = \int_{\Omega-\tilde{\Omega}} (k^2\phi^2 + |\nabla\phi|^2) dx dy \geq 0$$

y dado que $\Delta(\tilde{\phi} - \phi) - k^2(\tilde{\phi} - \phi) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\partial\tilde{\Omega}} (\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial\tilde{n}} ds &= \int_{\partial\tilde{\Omega}} [(\tilde{\phi} - \phi)\Delta(\tilde{\phi} - \phi) + \nabla(\tilde{\phi} - \phi)\nabla(\tilde{\phi} - \phi)] dx dy \\ &= \int_{\partial\tilde{\Omega}} [k^2(\tilde{\phi} - \phi)^2 + |\nabla(\tilde{\phi} - \phi)|^2] \geq 0.\end{aligned}$$

Luego de I se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} ds &\leq \int_{\Omega-\tilde{\Omega}} \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} ds + \int_{\tilde{\Omega}} (\phi - \tilde{\phi}) \frac{\partial(\phi - \tilde{\phi})}{\partial n} ds + \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} ds \\ &= \int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial n} ds.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} ds \leq \int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial n} ds.$$

Es decir

$$\int_{\mathbb{R}} \phi|_{y=0} \varphi(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}|_{y=0} \varphi(x) dx.$$

De lo cual se tiene $(A\varphi, \varphi) \leq (\tilde{A}\varphi, \varphi)$. Con lo cual queda demostrado el Lema. \square

Ahora demostraremos el Lema (1.4.1)

Demostración. Del Lema 1.4.2, se tiene que $(A\varphi, \varphi) \leq (\tilde{A}\varphi, \varphi)$. Supongamos que φ_1 es una la función propia correspondiente a S_1 , entonces

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(A\varphi_1, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} \leq \frac{(\tilde{A}\varphi_1, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} \\ &\leq \sup_{\varphi \in L_2(\Gamma_F), \varphi \neq 0} \frac{(\tilde{A}\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2} = \tilde{S}_1. \end{aligned}$$

De manera analoga se concluye que $S_m \leq \tilde{S}_m$, de (1.3.6), se tiene que $N \leq \tilde{N}$.

Asi concluye la demostración del Lema (1.4.1). \square

Los dos principios de comparación que establecemos son consecuencias particulares de los resultados de Jones [3]. Sea

$$\Omega_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -h(x) < y < 0, -x_0 \leq x \leq x_0\}. \quad (1.4.9)$$

Definamos $A^D : L_2(\Gamma_{F_i}) \mapsto L_2(\Gamma_{F_i}^D)$, como $A^D\varphi = \phi(x, 0)$ donde, $\Gamma_{F_i} = \Gamma_F|_{[-x_0, x_0]}$ y $\phi \in H^1(\Omega_i)$ satisface,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ \phi = \varphi, & \text{en } \Gamma_{F_i}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} = 0, & \text{en } y = -h(x) \\ \phi = 0, & \text{en } x = \pm x_0. \end{array} \right. \quad (1.4.10)$$

El espectro de A^D consta de una sucesión de valores propios S_m^D para la cual usaremos la siguiente expresión

$$S_m^D = \sup_{V \in \mathcal{V}_m^D(\Gamma_F)} \inf_{\varphi \in V, \varphi \neq 0} \frac{(A\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2}, \quad (1.4.11)$$

donde \mathcal{V}_m^D denota el conjunto de todos los subespacios m -dimensionales de $L_2^D(\Gamma_{F_i}) = \{\varphi \in L_2(\Gamma_{F_i}) : \varphi|_{x=\pm x_0} = 0\}$. De manera similar, consideremos el operador A^N , $A^N : L_2(\Gamma_{F_i}) \mapsto L_2(\Gamma_{F_i}^N)$, como $A^N\varphi = \phi(x, 0)$ donde, $\phi \in H^1(\Omega_i)$ satisface,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ \phi = \varphi, & \text{en } \Gamma_{F_i}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} = 0, & \text{en } y = -h(x) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, & \text{en } x = \pm x_0. \end{array} \right. \quad (1.4.12)$$

El espectro de A^N , consta de una sucesión de valores propios, la cual deno-

taremos por $(S_m^N)_{m \geq 1}$, y la expresaremos como:

$$S_1^N = \sup_{\varphi \in L_2(\Gamma_{F_i}), \varphi \neq 0} \frac{(A\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2}. \quad (1.4.13)$$

Y para cada entero $m > 1$,

$$S_m^N = \inf_{V \in \mathcal{V}_{m-1}^N(\Gamma_{F_i})} \sup_{\varphi \in V^\perp, \varphi \neq 0} \frac{(A\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2}, \quad (1.4.14)$$

donde \mathcal{V}_{m-1}^N denota el conjunto de todos los subespacios de dimensión m de $L_2(\Gamma_{F_i})$, con

$$V^\perp = \{\varphi \in L_2(\Gamma_{F_i}) : \int_{\Gamma_{F_i}} \varphi \psi dx = 0, \quad \forall \psi \in V\}.$$

Con esta notación tenemos la siguiente proposición

Proposición 1.4.3.

$$\max(S_m^N, \omega_0^{-2}) \geq S_m \geq S_m^D, \quad \forall m \geq 1. \quad (1.4.15)$$

Entonces,

(i) Si $S_m^D > \omega_0^{-2}$, entonces $N \geq m$,

(ii) Si $S_m^N \leq \omega_0^{-2}$, entonces $N < m$,

Demostración. El espacio $L_2^D(\Gamma_{F_i})$, definido antes puede ser considerado un subespacio de $L_2(\Gamma_F)$, dado que cada función de $L_2^D(\Gamma_{F_i})$ puede ser trivialmente extendida a una función de $L_2(\Gamma_F)$. Por tanto, tenemos $\mathcal{V}_m^D \subset \mathcal{V}_m(\Gamma_F)$

para todo $m \geq 1$ y deducimos de (1.4.4) y (1.4.11), que $S_m \geq S_m^D$. De otro lado, de la fórmula (1.4.3), tenemos

$$S_m = \inf_{V \in \mathcal{V}_{m-1}(\Gamma_F)} \sup_{\varphi \in V^\perp, \varphi \neq 0} \frac{(A_i \varphi, \varphi) + (A_e \varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2 + \|\varphi\|_{\Gamma_{F_e}}^2},$$

donde, $\Gamma_{F_e} = \Gamma_F \setminus \Gamma_{F_i}$, $A_e \varphi = A|_{\Gamma_{F_e}} \varphi$ y $(A_e \varphi, \varphi) = \int_{\mathbb{R} - [-x_0, x_0]} \phi(x, 0) \varphi(x) dx$.

Dado que

$$(A_e \varphi, \varphi) \leq \omega_0^{-2} \|\varphi\|_{\Gamma_{F_e}}^2, \quad (1.4.16)$$

entonces. Si $\max(S_m^N, \omega_0^{-2}) = \omega_0^{-2}$, entonces $(A_i \varphi, \varphi) \leq \omega_0^{-2} \|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2$, luego

$$\frac{(A_i \varphi, \varphi) + (A_e \varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2 + \|\varphi\|_{\Gamma_{F_e}}^2} \leq \omega_0^{-2}$$

Por tanto, $S_m \leq \omega_0^{-2}$. Si $\max(S_m^N, \omega_0^{-2}) = S_m^N$, entonces $(A_i \varphi, \varphi) \geq \omega_0^{-2} \|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2$, de (1.4.16), entonces

$$\frac{(A_i \varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2} \geq \omega_0^{-2} \geq \frac{(A_e \varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_{F_e}}^2}$$

Luego,

$$(A_i \varphi, \varphi) [\|\varphi\|_{\Gamma_{F_e}}^2 + \|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2] \geq [(A_i \varphi, \varphi) + (A_e \varphi, \varphi)] \|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 S_m^N &\geq \inf_{V \in \mathcal{V}_{m-1}^N(\Gamma_{F_i})} \sup_{\varphi \in V^\perp, \varphi \neq 0} \frac{(A_i \varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2} \\
 &\geq \inf_{V \in \mathcal{V}_{m-1}^N(\Gamma_{F_i})} \sup_{\varphi \in V^\perp, \varphi \neq 0} \frac{(A_i \varphi, \varphi) + (A_e \varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\Gamma_{F_e}}^2 + \|\varphi\|_{\Gamma_{F_i}}^2} \\
 &= S_m
 \end{aligned}$$

Así se obtiene la desigualdad (1.4.15). Las desigualdades (i) y (ii) son así consecuencias del principio Minimax. En efecto, Si $S_m^D > \omega_0^{-2}$, entonces $S_m \geq S_m^D > \omega_0^{-2}$ y $N \geq m$ y así se obtiene (i). Ahora para (ii), si, $S_m^N \leq \omega_0^{-2}$, entonces $\max(S_m^N, \omega_0^{-2}) = \omega_0^{-2} \geq S_m$, en consecuencia $N < m$ \square

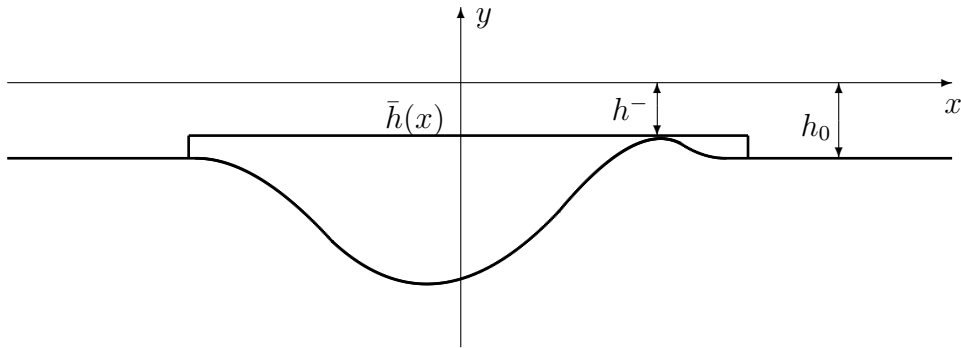


Figura 1.2: Escalón

De la proposición anterior podemos obtener estimaciones cuantitativas para el caso del escalón (Ver Figura 1.2), en efecto, si escogemos la función \bar{h} como

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h^-, & \text{si } x \in [-x_0, x_0] \\ h_0, & \text{si } x \notin [-x_0, x_0], \end{cases}$$

entonces $2x_0$ es la anchura del escalón y $\bar{\Omega}_i$ es un rectángulo de base $2x_0$ y altura h^- sobre la sierra.

De manera similar a como se definieron los operadores A^D y A^N , para la función h en el dominio Ω , podemos definir \bar{A}^D y \bar{A}^N , para la función \bar{h} , correspondiente al dominio $\bar{\Omega}$. En efecto, definamos

$$\begin{aligned} \bar{A}^D : L_2(\Gamma_{\bar{F}_i}) &\longmapsto L_2(\Gamma_{\bar{F}_i}), \\ \bar{A}^D \varphi &= \phi(x, 0) \end{aligned}$$

donde, $\Gamma_{\bar{F}_i} = \Gamma_{\bar{F}|_{[-x_0, x_0]}}$ con $\phi \in H^1(\bar{\Omega}_i)$ tal que,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi - k^2 \phi = 0, & \text{en } \bar{\Omega}_i, \\ \phi = \varphi, & \text{en } \Gamma_{\bar{F}_i}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} = 0, & \text{en } y = -\bar{h}(x) \\ \phi = 0, & \text{en } x = \pm x_0. \end{array} \right. \quad (1.4.17)$$

Definamos

$$\begin{aligned}\bar{A}^N : L_2(\Gamma_{\bar{F}_i}) &\longmapsto L_2(\Gamma_{\bar{F}_i}), \\ \bar{A}^N \varphi &= \phi(x, 0)\end{aligned}$$

donde, $\Gamma_{\bar{F}_i} = \Gamma_{\bar{F}|_{[-x_0, x_0]}}$ con $\phi \in H^1(\bar{\Omega}_i)$ tal que,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi - k^2 \phi = 0, & \text{en } \bar{\Omega}_i, \\ \phi = \varphi, & \text{en } \Gamma_{\bar{F}_i}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} = 0, & \text{en } y = -\bar{h}(x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, & \text{en } x = \pm x_0. \end{array} \right. \quad (1.4.18)$$

Lema 1.4.4. *El espectro de \bar{A}^D consta de la sucesión \bar{S}_m^D de valores propios, tales que $\bar{S}_0^D = \omega_-^{-2}$, donde ω_-^{-2} es la única solución de $\omega^{-2}k \tanh(kh^-) = 1$.*

Demostración. Dada $\varphi \in L_2(\Gamma_{\bar{F}_i})$, existe $\phi \in H^1(\bar{\Omega}_i)$ que satisface el problema (1.4.17). Usando el método de Separación de variables podemos suponer que $\phi(x, y) = F(x)G(y)$, para algunas funciones F y G , luego tomando λ como constante de separación tenemos que

$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = -\frac{k^2 F(x) - F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad \text{ó} \quad -\frac{G''(y)}{G(y)} = -\frac{k^2 F(x) - F''(x)}{F(x)} = -\lambda.$$

Imponiendo las condiciones de frontera obtenemos los siguientes problemas:

$$(a) \begin{cases} -G''(y) = \lambda G(y), \\ G'(0) = \omega^2 G(0), \\ G'(-h^-) = 0. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} F''(x) = (\lambda + k^2)F(y), \\ F(-x_0) = F(x_0) = 0, \end{cases} \quad (1.4.19)$$

$$(c) \begin{cases} G''(y) = \lambda G(y), \\ G'(0) = \omega^2 G(0), \\ G'(-h^-) = 0. \end{cases} \quad (d) \begin{cases} F''(x) = (-\lambda + k^2)F(y), \\ F(-x_0) = F(x_0) = 0, \end{cases} \quad (1.4.20)$$

De (1.4.19-(a)), se tiene que

$$G(y) = -\frac{A \cos(\sqrt{\lambda}(y + h^-))}{\sin(\sqrt{\lambda}h^-)}. \quad (1.4.21)$$

De (1.4.19-(b)), se tienen los siguientes casos

1. Si $\lambda + k^2 > 0$, entonces $F(x) = 0$.
2. Si $\lambda + k^2 = 0$, entonces $F(x) = Cte$. Por tanto de 1.4.21,

$$\phi(x, y) = -\frac{C \cos(\sqrt{\lambda}(y + h^-))}{\sin(\sqrt{\lambda}h^-)}$$

Puesto que $\phi_y(x, 0) = \omega^2 \phi(x, 0)$ encontramos que cuando $\lambda + k^2 = 0$,

tenemos la siguiente relación

$$\omega^{-2} = -\frac{\cot(ikh^-)}{ik} = -\frac{\cot(kh^-)}{k}, \quad (1.4.22)$$

3. Si $\lambda + k^2 < 0$, entonces

$$F(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{|\lambda + k^2|x}) & \text{si } \sqrt{|\lambda + k^2|x_0} = \frac{\pi}{2} + m\pi, \\ C_1 \sin(\sqrt{|\lambda + k^2|x}) & \text{si } \sqrt{|\lambda + k^2|x_0} = m\pi, \end{cases}$$

por tanto, de (1.4.21),

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -\frac{C \cos(\sqrt{\lambda}(y+h^-)) \cos(\sqrt{|\lambda+k^2|x})}{\sin(\sqrt{\lambda}h^-)} & \text{si } \sqrt{|\lambda + k^2|x_0} = \frac{\pi}{2} + m\pi, \\ -\frac{C \cos(\sqrt{\lambda}(y+h^-)) \sin(\sqrt{|\lambda+k^2|x})}{\sin(\sqrt{\lambda}h^-)} & \text{si } \sqrt{|\lambda + k^2|x_0} = m\pi, \end{cases}$$

Puesto que $\phi_y(x, 0) = \omega^2 \phi(x, 0)$ encontramos que cuando $\lambda + k^2 < 0$, tenemos la siguiente relación

$$\omega^{-2} = -\frac{\cot(\sqrt{\lambda}h^-)}{\sqrt{\lambda}}, \quad (1.4.23)$$

con

$$\sqrt{|\lambda + k^2|x_0} = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \text{ó} \quad \sqrt{|\lambda + k^2|x_0} = m\pi$$

De (1.4.20-(c)), se tiene que

$$G(y) = \frac{C \cosh(\sqrt{\lambda}(y + h^-))}{\cosh(\sqrt{\lambda}h^-)}. \quad (1.4.24)$$

De (1.4.20-(d)), se tienen los siguientes casos

1. Si $-\lambda + k^2 > 0$, entonces $F(x) = 0$.
2. Si $-\lambda + k^2 = 0$, entonces $F(x) = Cte$. Por tanto de 1.4.24,

$$\phi(x, y) = -\frac{C \cosh(\sqrt{\lambda}(y + h^-))}{\cosh(\sqrt{\lambda}h^-)}$$

Puesto que $\phi_y(x, 0) = \omega^2 \phi(x, 0)$ encontramos que cuando $-\lambda + k^2 = 0$, tenemos la siguiente relación

$$1 = \omega^{-2} k \tanh(kh^-), \quad (1.4.25)$$

3. Si $-\lambda + k^2 < 0$, entonces

$$F(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{\lambda - k^2}x) & \text{si } \sqrt{\lambda - k^2}x_0 = \frac{\pi}{2} + m\pi, \\ C_1 \sin(\sqrt{\lambda - k^2}x) & \text{si } \sqrt{\lambda - k^2}x_0 = m\pi, \end{cases}$$

por tanto, de (1.4.24)

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -\frac{C \cosh(\sqrt{\lambda}(y+h^-)) \cos(\sqrt{\lambda-k^2}x)}{\cosh(\sqrt{\lambda}h^-)} & \text{si } \sqrt{\lambda - k^2}x_0 = \frac{\pi}{2} + m\pi, \\ -\frac{C \cosh(\sqrt{\lambda}(y+h^-)) \sin(\sqrt{\lambda+k^2}x)}{\cosh(\sqrt{\lambda}h^-)} & \text{si } \sqrt{\lambda - k^2}x_0 = m\pi, \end{cases}$$

Puesto que $\phi_y(x, 0) = \omega^2 \phi(x, 0)$ encontramos que cuando $-\lambda + k^2 < 0$, tenemos la siguiente relación

$$1 = \omega^{-2} \sqrt{\lambda} \tanh(\sqrt{\lambda} h^-), \quad (1.4.26)$$

con

$$\sqrt{\lambda - k^2} x_0 = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \text{ó} \quad \sqrt{\lambda - k^2} x_0 = m\pi$$

Luego de (1.4.22), (1.4.23), (1.4.25) y (1.4.26) la sucesión de valores propios

\bar{S}_m^D , viene dada por \bar{S}_0^D es igual a ω_-^{-2} , el cual satisface $\omega^{-2} k \tanh(kh^-) = 1$ y

$\bar{S}_m^D = \omega_m^{-2}(k)$, $m \geq 1$, es la única solución de la ecuación $1 = \omega^{-2} \mu_m \tanh(\mu_m h^-)$,

con $\mu_m = \sqrt{\lambda_m}$ escogido reordenando las sucesiones

$$-\lambda_m + k^2 < 0 \text{ y } (\sqrt{\lambda_m k^2} x_0 = \frac{\pi}{2} + m\pi \text{ ó } \sqrt{\lambda_m - k^2} x_0 = m\pi).$$

□

Igual como en la demostración del Lema 1.4.4, se muestra que el espectro

de \bar{A}^N consta de una sucesión de valores propios \bar{S}_m^N , con $\bar{S}_0^N = \omega_-^{-2}$, el cual

satisface $\omega^{-2} k \tanh(kh^-) = 1$. Más aún $\bar{S}_m^N = \bar{S}_m^D$.

Teorema 1.4.5. *Si $0 < h^- < h_0$, entonces existe un sólo modo guiado.*

Demostración. Dado que $0 < h^- < h_0$ tenemos que $\omega_o^{-2} < \omega_-^{-2}$. Por tanto

existen por lo menos m valores propios ξ_m entre ω_o^{-2} , ω_-^{-2} , así $\tilde{S}_m^D = \tilde{S}_m^N$,

$\bar{S}_m^D > \omega_o^{-2}$ y $\text{bar}S_m^N \leq S_J$ con $J \geq m + 1$, para todo $m \geq 1$. Por tanto de la proposición 1.4.3, tenemos que $m \leq \bar{N} < m + 1$. y dado que cuando $k \rightarrow \infty$, la distancia $d = \omega_-^{-2} - \omega_o^{-2}$ tiende a cero entonces m a lo mas es igual a 1. Ahora aplicando el Lema 1.4.1 a las funciones $\bar{h}(x)$ y $h(x)$, tenemos que $\bar{N} \geq N$ y en consecuencia $N=1$. Lo cual demuestra que existe un sólo modo guiado. \square

Capítulo 2

Asintótica del valor propio

2.1. Introducción

En el capítulo anterior se mostró que para frecuencias altas, en el caso del problema de ondas de agua atrapadas por una sierra submarina existe un único modo atrapado el cual se propaga a lo largo de la sierra. Nuestro interés en el presente capítulo es construir la asintótica de esta frecuencia, para valores grandes de k , donde k es el número de onda.

2.2. Formulación matemática y resultado

principal

Consideremos como en el capítulo uno la capa de agua $\Omega = \{-h(x) < y < 0\}$, (Ver 1.1.1), donde y es la coordenada vertical, x la horizontal ortogonal a la dirección de la sierra, $y = -h(x)$ como en (1.1.2) describe el fondo. Buscamos el potencial de velocidad en la forma $\exp\{i(\omega t - kz)\}\phi(x, y)$, donde z es la coordenada horizontal a lo largo de la sierra, ω es la frecuencia y k el número de onda. Consideremos el siguiente problema para la función ϕ

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega \\ \phi_y = \lambda\phi(x), & \text{en } \Gamma_F \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, & \text{en } \Gamma_B. \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

Aquí $\lambda = \omega^2/g$. Soluciones de este problema para el espacio $H^1(\Omega)$ son llamadas ondas atrapadas y existen solo para ciertos valores de λ con k fijo. Igual como en el capítulo anterior, suponemos que el fondo es plano ($h(x) = h_0$), para $|x| \geq x_0$ y h es una función C_0^∞ que tiene exactamente un mínimo global no degenerado en $x = 0$, es decir $h''(x) > 0$. (Esta última condición es solo por simplicidad), ver Fig 1 para la geometría del problema. Como se mostró en el capítulo anterior, el espectro continuo de (2.2.1) coincide con el

del fondo plano y representa el rayo $\lambda \in [k \tanh(kh_0), \infty)$. De los resultados del capítulo anterior se sigue que existe un único valor propio λ por debajo del espectro esencial para valores grandes de k . Nuestro interés es construir una asintótica de esta frecuencia. El resultado principal es enunciado como sigue

Teorema 2.2.1. *El único valor propio $\lambda(k)$ de (2.2.1) tiene la forma*

$$\lambda(k) = k \tanh(kh_0) - \beta^2, \quad (2.2.2)$$

donde

$$\beta = k \sqrt{\frac{\pi}{2h''(0)}} e^{-2kh(0)} (1 + O(k^{-1})) \quad (2.2.3)$$

En el resto del capítulo se desarrolla la demostración del del teorema anterior.

2.3. Reducción al fondo y a la superficie libre

El primer paso es usar teoría potencial para reducir el problema (2.2.1) a un sistema de dos ecuaciones integrales en términos de las funciones $\tilde{\varphi}$ y θ , donde $\varphi(x) = \phi(x, 0)$ y $\theta(x) = \phi(x, -h(x))$. Para este fin consideremos

$B_\rho = B_\rho(\xi, \eta)$ la bola de radio ρ y centro en $(\xi, \eta) \in \Omega$ y $K_0(kr)$ la función de Macdonald con

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (2.3.1)$$

Dado que $-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)$ es la solución fundamental para el operador $\Delta - k^2$ entonces

$$\Delta\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right) - k^2\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right) = 0, \quad \text{en } \Omega \setminus B_\rho,$$

y en consecuencia

$$0 = \int_{\Omega \setminus B_\rho} \left\{ -\frac{1}{2\pi}K_0(kr)[\Delta\phi - k^2\phi] - \phi\left[\Delta\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right) - k^2\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right)\right] \right\} dx dy.$$

Usando la fórmula $E\Delta\phi = \text{div}(E\nabla\phi) - \nabla E\nabla\phi$ se tiene que la ecuación anterior se puede escribir como sigue

$$0 = \int_{\Omega \setminus B_\rho} \left\{ \text{div}\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\nabla\phi\right) - \text{div}\left(\phi\nabla\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right)\right) \right\} dx dy.$$

Aplicando el teorema de la divergencia concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_F} \left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\nabla\phi\right) \cdot \vec{n}_F ds - \int_{\Gamma_F} \left(\phi\nabla\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right)\right) \cdot \vec{n}_F ds \quad (2.3.2) \\ &+ \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} \left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\nabla\phi\right) \cdot \vec{n}_\rho ds - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} \left(\phi\nabla\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right)\right) \cdot \vec{n}_\rho ds \\ &+ \int_{\Gamma_B} \left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\nabla\phi\right) \cdot \vec{n}_B ds - \int_{\Gamma_B} \left(\phi\nabla\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right)\right) \cdot \vec{n}_B ds. \end{aligned}$$

Para reescribir la ecuación (2.3.2), tenemos en cuenta el resultado del siguiente lema

Lema 2.3.1. *Se cumplen las siguientes igualdades*

$$(a) \int_{\Gamma_F} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \nabla \phi\right) \cdot \vec{n}_F ds = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \varphi(x) dx$$

$$(b) \int_{\Gamma_F} (\phi \nabla(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr))) \cdot \vec{n}_F ds = \frac{k\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} dx$$

$$(c) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \nabla \phi\right) \cdot \vec{n}_\rho ds = 0$$

$$(d) -\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} (\phi \nabla(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr))) \cdot \vec{n}_\rho ds = \phi(\xi, \eta)$$

$$(e) \int_{\Gamma_B} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \nabla \phi\right) \cdot \vec{n}_B ds = 0$$

$$(f) \int_{\Gamma_B} (\phi \nabla(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr))) \cdot \vec{n}_B ds = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(x)[h'(x)(x-\xi) - h(x) - \eta] K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x)+\eta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x)+\eta)^2}} dx$$

Demostración. Para demostrar el ítem (a), tenemos en cuenta que $\vec{n}_F = (0, 1)$ y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_F} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \nabla \phi\right) \cdot \vec{n}_F ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr)\right) \Big|_{y=0} \nabla \phi \cdot (0, 1) dx \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Lo que demuestra (a). Para demostrar (b) tenemos en cuenta que $\vec{n}_F = (0, 1)$

y

$$\nabla(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr)) = -\frac{k}{2\pi} K_0'(kr) \left(\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r}\right).$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_F} (\phi \nabla (-\frac{1}{2\pi} K_0(kr))) \cdot \vec{n}_F ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, 0) \left(-\frac{k}{2\pi} K'_0(kr) \left(\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r} \right) \cdot (0, 1) \right) \Big|_{y=0} dx \\ &= \frac{k\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x) K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} dx, \end{aligned}$$

donde r está definida en (2.3.1). Así obtenemos (b). Para demostrar (c)

tomamos $r = \rho$, y usando el hecho que $K_0(k\rho) \approx -\ln(k\rho)$ tenemos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \nabla \phi \right) \cdot \vec{n}_\rho ds \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \ln(k\rho) 2\pi \rho \sup_{\partial B_\epsilon} |\nabla \phi| = 0.$$

Lo que muestra (c). Para demostrar (d) basta mostrar que

$$\phi \nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \right) \cdot \vec{n}_\rho = -\phi(x, y) \frac{1}{2\pi \rho},$$

en efecto,

$$\begin{aligned} \phi \nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \right) \cdot \vec{n}_\rho &= \phi(x, y) \left(-\frac{k}{2\pi} K'_0(kr) (x-\xi, y-\eta) \right) \cdot \left(-\frac{1}{r} (x-\xi, y-\eta) \right) \\ &= \phi(x, y) \frac{k}{2\pi} K'_0(kr). \end{aligned}$$

Tomando $r = \rho$, la parametrización de ∂B_ρ $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\rho \cos t +$

$\xi, \rho \cos t + \eta)$ y teniendo en cuenta que $K_0(kx) \simeq -\ln(x)$, para argumentos

pequeños se tiene

$$\begin{aligned}\phi \nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \right) \cdot \vec{n}_\rho &= \phi(\rho \cos t + \xi, \rho \cos t + \eta) \cdot \frac{k}{2\pi} K'_0(k\rho) \\ &= -\frac{1}{2\pi\rho} \phi(\rho \cos t + \xi, \rho \cos t + \eta).\end{aligned}$$

Dado que $\|\alpha'(s)\| = \rho$ y $ds = \rho dt$, entonces

$$-\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} \left(\phi \nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \right) \right) \cdot \vec{n}_\rho ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\xi, \eta) dt = \phi(\xi, \eta).$$

Lo que muestra el ítem (d). (e) es inmediata de la condición de impermeabilidad en el problema (2.2.1) puesto que $\nabla \phi \vec{n}_B = \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(x, -h(x)) = 0$. Para demostrar (f) tenemos en cuenta (2.3.1) y

$$\vec{n}_B = \frac{-(h'(x), 1)}{\sqrt{1 + h'(x)^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + h'(x)^2} dx,$$

para concluir que

$$\begin{aligned}\nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \right) \cdot \vec{n}_B &= \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} K_0(kr) \left(\frac{x - \xi}{r}, \frac{x - \xi}{r} \right) \right) \cdot \left(\frac{-(h'(x), 1)}{\sqrt{1 + h'(x)^2}} \right) \\ &= \frac{k}{2\pi r} K'_0(kr) \frac{h'(x)(x - \xi) + y - \eta}{\sqrt{1 + h'(x)^2}}.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_B} (\phi \nabla (-\frac{1}{2\pi} K_0(kr))) \cdot \vec{n}_B ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, -h(x)) \left(\frac{k}{2\pi r} K_0'(kr) \frac{h'(x)(x-\xi) + y - \eta}{\sqrt{1+h'(x)^2}} \right) \Big|_{y=-h(x)} dx \\
&= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(x)[h'(x)(x-\xi) - h(x) - \eta] K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2}) dx}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2}}.
\end{aligned}$$

Así queda demostrado (f) y en consecuencia el lema. \square

Del lema (2.3.1) tenemos que tomando el límite cuando $\rho \rightarrow 0$ en (2.3.2)

obtenemos

$$\begin{aligned}
\phi(\xi, \eta) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \varphi(x) dx \\
&+ \frac{k\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} \varphi(x) dx \\
&+ \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2}} \\
&\times [h'(x)(x-\xi) - h(x) - \eta] \theta(x) dx, \quad (\xi, \eta) \in \Omega.
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Lema 2.3.2. Tomando los límites cuando $\eta \rightarrow 0$ en cada uno de los términos

de la ecuación (2.3.3) obtenemos la siguiente ecuación integral

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k|x-\xi|)\varphi(x)dx + \frac{1}{2}\varphi(\xi) \\ &+ \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2}} [h'(x)(x-\xi) - h(x)]\theta(x)dx. \end{aligned}$$

Demostración. Basta demostrar

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}} \varphi(x)dx = \frac{1}{2}\varphi(\xi). \quad (2.3.4)$$

En efecto, Usando la siguiente representación integral para $K'_0(kx)$

$$K'_0(z) = -K_1(z)$$

y

$$K_1(kx) = \frac{x}{k} \int_0^{\infty} \frac{\cos(kt)}{(x^2+t^2)^{3/2}} dt, \quad (2.3.5)$$

(Ver [12], pág 376). Tomando $x = \sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}$ tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{-k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta \varphi(x) K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}} dx \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\eta \varphi(x) \cos(kt) dt}{(t^2 + (x-\xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} dx \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \int_0^{\infty} \cos(kt) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\varphi(\xi) + \psi(x)) dx}{(t^2 + (x-\xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} dt. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Donde $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(\xi)$. Dado que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta\varphi(\xi)dx}{(t^2 + (x - \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} &= \varphi(\xi) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \frac{\eta dx}{(x^2 + \alpha^2)^{3/2}} \\ &= \varphi(\xi) \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\eta x}{\alpha^2(x^2 + \alpha^2)^{1/2}} \Big|_{-b}^b \\ &= \frac{2\eta\varphi(\xi)}{(t^2 + \eta^2)}. \end{aligned}$$

Donde $\alpha^2 = t^2 + \eta^2$. Luego de (2.3.6) se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos(kt) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta\varphi(\xi)dx}{(t^2 + (x - \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} dt &= \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta \cos(kt)\varphi(\xi)}{t^2 + \eta^2} dt \\ &= -\frac{1}{2}\varphi(\xi). \end{aligned}$$

Para completar la demostración basta mostrar que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} I(\eta) = 0. \quad (2.3.7)$$

Donde

$$I(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos(kt) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta\psi(x)dx}{(t^2 + (x - \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} dt.$$

Debemos establecer que para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|I(\eta)| < \epsilon$,

siempre que $\eta < \delta$. Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Escribiendo I como

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

donde,

$$I_1(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^a \eta \psi(x) \int_0^{\infty} \frac{\cos(kt) dt}{(t^2 + (x - \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} dx,$$

$$I_2(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{\infty} \eta \psi(x) \int_0^{\infty} \frac{\cos(kt) dt}{(t^2 + (x - \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} dx,$$

$$I_3(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \eta \psi(x) \int_0^{\infty} \frac{\cos(kt) dt}{(t^2 + (x - \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} dx.$$

Para la integral I_3 . Sea

$$M(a) = \max_{-a \leq x \leq a} |\psi(x)|.$$

Entonces haciendo un cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \frac{M(a)}{2\pi} \left| \int_{-a}^a \int_0^{\infty} \frac{\eta \cos(kt) dt}{(t^2 + (x - \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} dx \right| \\ &\leq \frac{M(a)}{2\pi} \left| \int_0^{\infty} \cos(kt) \eta \int_{-a-\xi}^{a-\xi} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^{3/2}} dt \right| \\ &\leq \frac{M(a)}{2\pi} \left| \int_0^{\infty} \cos(kt) \eta \left(\frac{x}{\alpha^2(x^2 + \alpha^2)^{1/2}} \Big|_{-a-\xi}^{a-\xi} \right) dt \right| \\ &\leq \frac{M(a)}{\pi} \left| \int_0^{\infty} \frac{\cos(kt) \eta}{t^2 + \eta^2} dt \right|. \end{aligned}$$

Donde $\alpha^2 = t^2 + \eta^2$. Dado que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(kt)\eta}{t^2 + \eta^2} dt \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \quad \text{cuando} \quad \eta \rightarrow 0.$$

Entonces debido a que $\psi(\xi) = 0$ y $\psi(x)$ es continua en $x = \xi$, tenemos que $\lim_{a \rightarrow \xi} M(a) = 0$. Consecuentemente, para todo $\epsilon > 0$, existe a suficientemente pequeño tal que $|I_3| < \frac{\epsilon}{2}$ y esto se cumple independiente de M . Para demostrar que $|I_1 + I_2|$ es suficientemente pequeño cuando $\eta \rightarrow 0$, observamos que $\varphi(x)$ es acotada y $|\psi(x)| < |\varphi(x)| + |\varphi(\xi)|$ lo cual implica que $|\psi(x)|$ es acotada en $-\infty < x < \infty$. Sea $C > 0$ tal que $|\psi(x)| < C$, entonces

$$\begin{aligned} |I_1 + I_2| &\leq \frac{C}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^a + \int_a^{\infty} \right] \left(\int_0^{\infty} \frac{\eta \cos(kt) dt dx}{(t^2 + (x - \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} \right) \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} - \int_a^a \right] \left(\int_0^{\infty} \frac{\eta \cos(kt) dt dx}{(t^2 + (x - \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} \right) \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \cos(kt) \left[\int_{-\infty}^{\infty} - \int_a^a \right] \left(\frac{\eta dx}{(t^2 + (x - \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} \right) \right\} dt \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\eta \cos(kt)}{\alpha^2} \left[2 - \left(\frac{a - \xi}{[(a - \xi)^2 + \alpha^2]^{1/2}} + \frac{a + \xi}{[(a - \xi)^2 + \alpha^2]^{1/2}} \right) \right] \right\} dt. \end{aligned}$$

Donde $\alpha^2 = t^2 + \eta^2$. Puesto que la última desigualdad tiende a cero, cuando $\eta \rightarrow 0$, para a fijo. Por tanto podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $|I_1 + I_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$, siempre que $\eta < \delta$. En consecuencia,

$$|I| = |I_1 + I_2 + I_3| \leq |I_1 + I_2| + |I_3| < \epsilon.$$

Lo que muestra (2.3.7) y consecuentemente se demuestra (2.3.4). Dado que los otros límites cuando $\eta \rightarrow 0$ en (2.3.3) se obtienen de manera inmediata el lema queda demostrado. \square

Lema 2.3.3. *Tomando los límites cuando $\eta \rightarrow -h(\xi)$ en cada uno de los términos de la ecuación (2.3.3) obtenemos la siguiente ecuación integral*

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h(\xi)^2}) dx \\ &\quad - \frac{kh(\xi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h(\xi)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + h(\xi)^2}} dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\theta(\xi) + \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(x)[h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}} \\ &\quad \times K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}) dx \end{aligned}$$

Demostración. En los tres primeros términos el límite es inmediato, así que es suficiente demostrar

$$\begin{aligned} &\lim_{\eta \rightarrow -h(\xi)} \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(x)[h'(x)(x-\xi) - h(x) - \eta] K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2}} dx \\ &= \frac{1}{2}\theta(\xi) + \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(x)[h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}} dx \\ &\quad \times K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}) dx. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

En efecto, tomando $\eta = -h(x) + \epsilon$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow -h(x)} \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2}} \\ \times [h'(x)(x-\xi) - h(x) - \eta]\theta(x)dx \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (J_1(\xi, \epsilon) + J_2(\xi, \epsilon)), \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

donde

$$\begin{aligned} J_1(\xi, \epsilon) &= \frac{-\epsilon k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(x)K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi) + \epsilon)^2})dx}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi) + \epsilon)^2}} \\ J_2(\xi, \epsilon) &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi) + \epsilon)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi) + \epsilon)^2}} \\ &\times [h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))]\theta(x)dx. \end{aligned}$$

Procediendo como en la demostración de la ecuación (2.3.4) se obtiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} J_1(\xi, \epsilon) = \frac{1}{2}\theta(\xi).$$

Ahora tomamos el siguiente límite

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} J_2(\xi, \epsilon) &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(x)[h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}} \\ &\times K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2})dx. \end{aligned}$$

De (2.3.9) y de los dos límites anteriores se obtiene la demotración del lema.

□

De los lemas (2.3.2) y (2.3.3) tenemos que tomando los límites cuando $\eta \rightarrow 0$

y cuando $\eta \rightarrow -h(\xi)$ en cada uno de los términos de la ecuación (2.3.3)

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones integrales

$$\begin{aligned} \pi\varphi(\xi) = & \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k|x - \xi|)\varphi(x)dx \\ & + k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x - \xi)^2 + h(x)^2})}{\sqrt{(x - \xi)^2 + h(x)^2}} [h'(x)(x - \xi) - h(x)]\theta(x)dx \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

$$\begin{aligned} \pi\theta(\xi) = & \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x - \xi)^2 + h(\xi)^2})\varphi(x)dx \\ & - kh(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x - \xi)^2 + h(\xi)^2})}{\sqrt{(x - \xi)^2 + h(\xi)^2}}\varphi(x)dx \\ & + \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x - \xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2})}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}} \\ & \times [h'(x)(x - \xi) - (h(x) - h(\xi))]\theta(x)dx. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Usando la fórmula (Ver [12]) $K'_0(z) = -K_1(z)$, tenemos el siguiente lema

Lema 2.3.4. *Tenemos las siguientes Transformadas de Fourier de $\xi \rightarrow p$.*

i)

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p}(K_0(k|\xi|))(p) = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + p^2}}$$

ii)

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right) (p) = \frac{\pi}{kh_0} e^{-h_0\sqrt{k^2+p^2}}$$

iii)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\theta(x)h'(x)(x-\xi)K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h(x)^2})dx}{\sqrt{(x-\xi)^2 + h(x)^2}} \right) (p) \\ = \frac{i\pi p}{\sqrt{k^2+p^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)e^{ipx}e^{-h(x)\sqrt{k^2+p^2}}h'(x)dx \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\theta(x)h(x)K_1(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h(x)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + h(x)^2}} dx \right) (p) \\ = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)e^{ipx}e^{-h(x)\sqrt{k^2+p^2}} dx \end{aligned}$$

Demostración. Para i) Dado que Melher en 1870 demostró que (Ver [12],p.

376)

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1+t^2}} dt, \quad x > 0$$

en consecuencia $K_0(kx) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xu)}{\sqrt{k^2+u^2}} du$, y dado que

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{k^2+x^2}} \right) (\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x} dx}{\sqrt{k^2+x^2}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(x\xi) dx}{\sqrt{k^2+x^2}} = 2K_0(k\xi)$$

Luego tomando de nuevo Transformada de Fourier $\xi \rightarrow x$ tenemos

$$\frac{2\pi}{\sqrt{(-x)^2 + k^2}} = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} \left(\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + k^2}} \right) \right) = 2\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} (K_0(k\xi)).$$

Así queda demostrado *i*). Demostremos ahora *ii*), en efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right) (p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip\xi} K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos(p\xi) + i \sin(p\xi)) K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(p\xi) K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi. \end{aligned}$$

Usando $J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x$ (Ver [13], pag 54), tenemos que

$$\cos(\xi p) = \frac{J_{-1/2}(p\xi) \sqrt{\pi p \xi}}{\sqrt{2}}.$$

Entonces,

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right) (p) = \sqrt{2\pi p} \int_0^{\infty} \frac{J_{-1/2}(p\xi) K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2}) \xi^{1/2}}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi.$$

Ahora usamos la siguiente fórmula (Ver [13], pag 416)

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{\mu}(bt) K_{\nu}(a\sqrt{t^2 + z^2})}{(t^2 + z^2)^{\frac{1}{2}\nu}} t^{\mu+1} dt = \frac{b^{\mu}}{a^{\nu}} \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{z} \right)^{\nu-\mu-1} K_{\nu-\mu-1}(z\sqrt{a^2 + b^2}).$$

Por tanto, tomando $\mu = -1/2$, $\nu = 1$, $t = \xi$, $z = h_0$, $b = p$ y $a = k$ tenemos

que

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right) (p) = \frac{\sqrt{2\pi}}{k} \left(\frac{\sqrt{k^2 + p^2}}{h_0} \right)^{1/2} K_{1/2}(h_0\sqrt{k^2 + p^2}).$$

De ([13], pág 80), tenemos que $K_{1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}$. Así se obtiene *ii*). Para

demostrar *iii*) usamos *ii*) y el hecho de que $K_0'(x) = -K_1(x)$ (Ver [12], pág

376) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\theta(x)h'(x)(x-\xi)K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2})dx}{\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2}} \right) (p) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} k\theta(x)h'(x)\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\frac{(\xi-x)K_1(k\sqrt{(\xi-x)^2+h(x)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2}} \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} k\theta(x)h'(x)e^{ipx}\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\frac{\xi K_1(k\sqrt{\xi^2+h(x)^2})}{\sqrt{\xi^2+h(x)^2}} \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} k\theta(x)h'(x)e^{ipx} \left(-i\frac{d}{dp}\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2+h(x)^2})}{\sqrt{\xi^2+h(x)^2}} \right) \right) dx \\
&= \frac{i\pi p}{\sqrt{k^2+p^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)e^{ipx}e^{-h(x)\sqrt{k^2+p^2}}h'(x)dx.
\end{aligned}$$

Así obtenemos *iii*) Para demostrar *iv*) procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\theta(x)h(x)K_1(k\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2}} dx \right) (p) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} k\theta(x)\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\frac{h(x)K_1(k\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2}} \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} k\theta(x)h(x)e^{ipx}\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left(\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2+h(x)^2})}{\sqrt{\xi^2+h(x)^2}} \right) dx \\
&= \pi \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)e^{ipx}e^{-h(x)\sqrt{k^2+p^2}} dx.
\end{aligned}$$

Así queda demostrado *iv*). □

Para aplicar las técnicas de [7] a (2.3.10) y (2.3.11) es necesario pasar a la

transformada de Fourier $\tilde{\varphi}$ de la función φ . Entonces usando los resultados del lemma (2.3.4), tenemos que tomando transformada de Fourier en la ecuación de (2.3.10) obtenemos el nuevo sistema

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(p) &= \frac{\lambda}{\tau(p)}\tilde{\varphi} + \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)e^{ipx} \left(1 + \frac{iph'(x)}{\tau(p)}\right) e^{-h(x)\tau(p)} dx, \\ \pi\theta(\xi) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x} K_0(k\sqrt{\varsigma(x,\xi)}) dx \tilde{\varphi}(p') dp' \\ &\quad - \frac{kh(\xi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x} \frac{K_0'(k\sqrt{\varsigma(x,\xi)}) dx}{\sqrt{\varsigma(x,\xi)}} \tilde{\varphi}(p') dp' \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kK_0'(k\sqrt{\varrho(x,\xi)})}{\pi\sqrt{\varrho(x,\xi)}} [h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))] \theta(x) dx,\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}\tau(p) &:= \sqrt{k^2 + p^2} \\ \varsigma(x,\xi) &:= (x-\xi)^2 + h^2(\xi) \\ \varrho(x,\xi) &:= (x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2.\end{aligned}\tag{2.3.12}$$

Reescribiendo el sistema anterior como sigue

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau}\right)\tilde{\varphi}(p) = (\hat{M}_1\theta)(p)\tag{2.3.13}$$

$$(\theta - \hat{M}_3\theta)(\xi) = (\hat{M}_2\tilde{\varphi})(\xi)\tag{2.3.14}$$

donde

$$\begin{aligned} (\hat{M}_1\theta)(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_1(p, x)\theta(x)dx, \\ (\hat{M}_2\tilde{\varphi})(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_2(p', \xi)\tilde{\varphi}(p')dp', \\ (\hat{M}_3\theta)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_3(x, \xi)\theta(x)dx, \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

con

$$\begin{aligned} M_1(p, x) &= e^{ipx} \left(1 + \frac{iph'(x)}{\tau(p)} \right) e^{-h(x)\tau(p)}, \\ M_2(p', \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x} \left(\lambda K_0(k\sqrt{\varsigma(x, \xi)}) - \frac{kh(\xi)K'_0(k\sqrt{\varsigma(x, \xi)})}{\sqrt{\varsigma(x, \xi)}} \right) dx \\ M_3(x, \xi) &= \frac{kK'_0(k\sqrt{\varrho(x, \xi)})}{\pi\sqrt{\varrho(x, \xi)}} [h'(x)(x - \xi) - (h(x) - h(\xi))], \end{aligned}$$

donde $\tau(p)$, $\varsigma(x, \xi)$, y $\varrho(x, \xi)$, están definidas en (2.3.12). Obviamente una solución de (2.3.13)-(2.3.14) por medio de (2.3.3) es una solución de (2.2.1).

2.4. Solución del sistema de ecuaciones integrales

Consideremos la ecuación (2.3.14). Recordemos lo siguiente (Ver, por ejemplo, [15])

Lema 2.4.1. *Sea*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x, y)| dx < M, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |K(x, y)| dy < M.$$

Entonces

$$\|\hat{K}u\|_{L_2} \leq M \|u\|_{L_2},$$

donde

$$\hat{K}u = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)u(y)dy.$$

No es difícil ver que usando las expresiones asintóticas de $K_1(x)$ para valores pequeños y grandes de x , que el núcleo \hat{M}_3 en (2.3.15) satisface las condiciones del lema 2.4.1 con $M = Ck^{-1/2}$, donde C es una constante. En efecto, consideremos el siguiente lema

Lema 2.4.2. *De la definición de $M_3(x, \xi)$, dada en (2.3.15), se sigue que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |M_3(x, \xi)| dx < Ck^{-1/2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |M_3(x, \xi)| d\xi < Ck^{-1/2}.$$

Donde C es una constante.

Demostración. Para $\delta > 0$, dividimos el intervalo de integración en los dominios $k|x - \xi| < \delta$ y $k|x - \xi| > \delta$. En el primer dominio usamos la asintótica

de $K'_0(z) \simeq 1/z$ y en el segundo la asintótica de $K'_0(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}$, en efecto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |M_3(x, \xi)| dx &= \left\{ \int_{k|x-\xi| < \delta} + \int_{k|x-\xi| > \delta} \right\} |M_3(x, \xi)| dx \\ &= \int_{k|x-\xi| < \delta} \frac{|h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))|}{\varrho(x, \xi)} dx \\ &\quad + \int_{k|x-\xi| > \delta} \frac{\sqrt{\pi k} e^{-k\sqrt{\varrho(x, \xi)}}}{\sqrt{2}(\varrho(x, \xi))^{3/4}} |h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))| dx, \end{aligned}$$

donde $\varrho(x, \xi)$ esta definido en (2.3.12). Dado que cuando $k|x - \xi| < \delta$, $h'(x)(x - \xi) - (h(x) - h(\xi)) = O((x - \xi)^2)$ y como $\varrho(x, \xi) = O((x - \xi)^2)$, por lo tanto el integrando en este caso es acotado, y como el tamaño del dominio es del orden de $1/k$, la integral a lo largo del mismo es del orden de $1/k$.

Cuando $k|x - \xi| > \delta$, de la definición de $\varrho(x, \xi)$

$$\frac{|h'(x)(x - \xi) - (h(x) - h(\xi))|}{(\varrho(x, \xi))^{3/4}} \leq C \quad \text{y} \quad \sqrt{\varrho(x, \xi)} > |x - \xi|,$$

por lo tanto el integrando es menor que $C\sqrt{k}e^{-k|x-\xi|}$. La integral de esta expresión sobre el dominio $k|x-\xi| > \delta$ es del orden de $1/\sqrt{k}$, luego se concluye la primera desigualdad, de manera similar se concluye la otra desigualdad y por tanto la demostración del lema. \square

Es decir el núcleo del operador \hat{M}_3 satisface el lema (2.4.1) y por tanto

podemos invertir el operador $(1 - \hat{M}_3)$ en (2.3.14) usando las series de Neumann para encontrar la solución θ en términos de $\tilde{\varphi}$

$$\theta(\xi) = [(1 - \hat{M}_3)^{-1}(\hat{M}_2\tilde{\varphi})](\xi), \quad (2.4.1)$$

con $(1 - \hat{M}_3)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{M}_3^n$. Sustituyendo (2.4.1) en (2.3.13), obtenemos una ecuación para $\tilde{\varphi}$

$$L(p)\tilde{\varphi} = \hat{M}_4\tilde{\varphi},$$

donde,

$$L(p) = 1 - \frac{\lambda}{\tau(p)} \quad (2.4.2)$$

y

$$(\hat{M}_4\tilde{\varphi})(p) = (\hat{M}_1(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{M}_3^n(\hat{M}_2\tilde{\varphi})(\xi)))(p) = \int M_4(p, p')\tilde{\varphi}(p')dp', \quad (2.4.3)$$

con

$$\begin{aligned} M_4(p, p') &= \int_{-\infty}^{\infty} M_1(p, x)M_2(p', x)dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_3(t_n, x) \int_{-\infty}^{\infty} M_3(t_n, t_{n-1}) \times \cdots \times \int_{-\infty}^{\infty} M_3(t_2, t_1) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} M_1(p, x)M_2(t_1, p')dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 dx. \end{aligned}$$

Vemos que para λ en la forma $\lambda = k \tanh(kh_0) - \beta^2$, $\beta \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, y haciendo una sustitución como en (cf. [7])

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{A(p)}{L(p)}.$$

obtenemos la ecuación

$$A(p) = \hat{M}_4\left(\frac{A}{L}\right)(p) = \int_{\mathbb{R}} M_4(p, p') \frac{A(p')}{L(p')} dp'. \quad (2.4.4)$$

Lema 2.4.3. $L(p) = 0$ para $p = p_{\pm} = \frac{i\sqrt{2}\beta}{\sqrt{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{1/2}\beta^3)$, donde $L(p)$ esta definido en (2.4.2) y $\varepsilon = 1/k$.

Demostración. Supongamos que cuando $p \rightarrow 0$, la expansión de Taylor de $\tau(p) - k$ en el punto $p = 0$ en potencias de p , esta dada por

$$\tau(p) - k = \ell_1 p^2 + \ell_2 p^4 + \ell_3 p^6 \cdots + \ell_n p^{2n} + \tilde{\ell}_{n+1}(p) p^{2(n+1)}, \quad (2.4.5)$$

donde

$$\ell_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \ell_2 = -\frac{\varepsilon^3}{8} \quad \ell_3 = \frac{3\varepsilon^5}{16}, \quad (2.4.6)$$

con $\ell_1 > 0$, y $|\tilde{\ell}_{n+1}(p)| \leq C$ para p suficientemente pequeño. Ahora usando (2.4.5), podemos escribir una expansión en β para la solución de la ecuación $L(p) = 0$. La cual esta dada por el Teorema de la función Implícita. Escogiendo la raíz de la solución con parte imaginaria positiva y denotando esta solución por p_+ , obtenemos

$$p_+ = \beta[p_1 + \beta^2 p_3 + \cdots + \beta^n p_n + \beta^{n+1} P_{n+1}(\beta)]$$

donde

$$p_1 = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad |P_{n+1}(\beta)| \leq C.$$

De la expansión anterior se tiene que $L(p)$ se anula para

$$p_+ = i\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\beta + O(\varepsilon^{1/2}\beta^3) \quad (2.4.7)$$

□

Supongamos que $A(p)$ es analítica en una banda que contiene al eje real, cambiando el contorno de integración en (2.4.4) por:

$$\gamma = (-\infty, -1] \cup \{x + iy : x^2 + y^2 = 1, |x| \leq 1, y > 0\} \cup [1, +\infty)$$

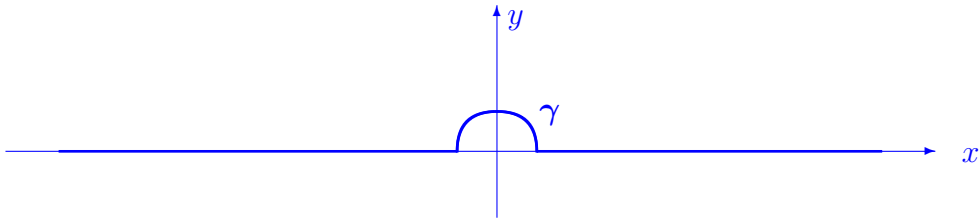


Figura 2.1: Cambio de Contorno

Necesitamos aplicar el Teorema del Residuo en (2.4.4) llamemos

$$R(p) = 2\pi i \frac{M_4(p, p_+)A(p_+)}{\frac{d}{dp}L(p)|_{p=p_+}} \quad (2.4.8)$$

Lema 2.4.4. *La función $R(p)$ tiene la siguiente representación*

$$R(p) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\beta\varepsilon^{3/2}} M_4(p, p_+)A(p_+).$$

Demostración. De (2.4.2) y (2.4.5) se sigue que para valores pequeños de p , $L(p)$ tiene la siguiente expansión asintótica

$$L(p) = \varepsilon \left(\ell_1 p^2 + 3\ell_2 p^4 + \cdots + L_n p^{2n} + L_{n+1}(p) p^{2(n+1)} \right),$$

donde, ℓ_1 está definido en (2.4.6) y $|L_{n+1}(p)| \leq C$. De la expansión anterior tenemos que

$$L'(p) = \varepsilon p \left(2\ell_1 + 12\ell_2 p^2 + \cdots + \tilde{L}_n p^{2(n+1)} + \tilde{L}_{n+1}(p) p^{2(n+2)} \right),$$

donde, $|\tilde{L}_{n+1}(p)| \leq C$ para p suficientemente pequeño. De la expansión de $L'(p)$ y (2.4.7) se sigue que $L'(p_+)$ tiene la siguiente expansión

$$L'(p_+) = \varepsilon\beta \left[L'_0 + \beta^2 L'_2 + \cdots + \beta^n L'_n(\varepsilon) + \beta^{n+1} L'_{n+1}(\beta, \varepsilon) \right], \quad (2.4.9)$$

donde

$$L'_0 = 2i\sqrt{\ell_1} = i\sqrt{2\varepsilon}, \quad (2.4.10)$$

donde ℓ_1 esta definida de (2.4.6) y $|L'_{n+1}(\beta, \varepsilon)| \leq C$ para ε suficientemente pequeño. Usando la serie geométrica y de (2.4.9) se sigue que

$$\frac{1}{L'(p_+)} = \frac{1}{\varepsilon\beta L'_0} \left\{ 1 - \beta^2 \frac{L'_2}{L'_0} - \dots - \beta^n P_n(\varepsilon) + \beta^{n+1} P_{n+1}(\beta, \varepsilon) \right\}, \quad (2.4.11)$$

$|P_{n+1}(\beta, \varepsilon)| \leq C$ para ε suficientemente pequeño. Entonces tomando el primer término de (2.4.11) y reemplazandolo en (2.4.8) se obtiene la conclusión del lema. \square

Del lema 2.4.4 tenemos que aplicando el Teorema del Residuo en la integral del lado derecho de (2.4.4) obtenemos

$$A(p) = \frac{\sqrt{2} \pi M_4(p, p_+) A(p_+)}{\beta \varepsilon^{3/2}} + \int_{\gamma} \frac{M_4(p, p') A(p')}{L(p')} dp'.$$

Reescribiendo la ecuación integral anterior como

$$(1 - \hat{M}_5) A(p) = \frac{2\pi M_4(p, p_+) A(p_+)}{\beta \sqrt{2} \varepsilon^{3/2}}, \quad (2.4.12)$$

donde,

$$\hat{M}_5 A(p) = \int_{\gamma} \frac{M_4(p, p') A(p')}{L(p')} dp'.$$

Lema 2.4.5. *Para valores grandes de k , tenemos la siguiente desigualdad*

$$|M_4(p, p')| \leq \frac{C \sqrt{\pi} e^{-(k+\tau(p))h(0)}}{\sqrt{2V''(0)(k+\tau(p))(1+|p'|^2)^n}}.$$

Demostración. De (2.4.3) y del lema 2.4.2 tenemos que

$$|M_4(p, p')| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} M_1(p, x)M_2(p', x)dx \right|. \quad (2.4.13)$$

Donde M_1 y M_2 estan definidas en (2.3.15). Utilizando el hecho que cuando ν es fijo, $|z|$ es grande y $\mu = 4\nu^2$ tenemos la siguiente expansión asintótica (Ver [12], pág 378)

$$K_\nu(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \frac{\nu-1}{8z} + \frac{(\nu-1)(\nu-9)}{2!(8z)^2} + \dots \right\}, \quad (2.4.14)$$

con ($|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$). Entonces tomando el primer término en (2.4.14) obtenemos que para $z = k\sqrt{\varsigma(t, x)}$, con $\nu = 0$ y $\nu = 1$ respectivamente tenemos que

$$\begin{aligned} K_0(k\sqrt{\varsigma(t, x)}) &\simeq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2k}(\varsigma(t, x))^{1/4}} e^{-k\sqrt{\varsigma(t, x)}} \\ K_1(k\sqrt{\varsigma(t, x)}) &\simeq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2k}(\varsigma(t, x))^{1/4}} e^{-k\sqrt{\varsigma(t, x)}}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Luego de (2.4.15) y de la definición de $M_2(p', x)$ dada en (2.3.15) tenemos que

$$M_2(p', x) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip't} \bar{M}_2(t, x) dt, \quad (2.4.16)$$

donde

$$\bar{M}_2(t, x) = \frac{e^{-k\sqrt{\varsigma(t, x)}}}{\sqrt{2k\pi}} \left\{ \frac{\lambda}{\varsigma(t, x)^{1/4}} + \frac{kh(x)}{\varsigma(t, x)^{3/4}} \right\},$$

con $\varsigma(t, x)$ esta definida en (2.3.12). Dado que $\bar{M}_2(t, x) \in S(\mathbb{R}_t)$, entonces su Transformada de Fourier de $t \rightarrow p'$ también pertenece al espacio de funciones

de Schwartz. Luego existe C tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\begin{aligned} |M_2(p', x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip't} \bar{M}_2(t, x) dt \right| \\ &\leq \frac{C}{(1 + |p'|^2)^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^m}{\partial t^m} \bar{M}_2(t, x) \right| dt. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

De (2.4.16) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left| \frac{\partial^m}{\partial t^m} \bar{M}_2(t, x) \right| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^{1/2} e^{-k\sqrt{\zeta(t,x)}}}{\sqrt{2\pi}(\zeta(t,x))^{1/4}} dt.$$

Utilizando el método de Laplace (Ver [14]) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^{1/2} e^{-k\sqrt{\zeta(t,x)}}}{\sqrt{2\pi}(\zeta(t,x))^{1/4}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-kh(x)}.$$

De la ecuación anterior, (2.4.13) y (2.4.16) tenemos

$$|M_4(p, p')| \leq \frac{C}{\sqrt{2}(1 + |p'|^2)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k+\tau(p))h(x)} \left(1 + \frac{|p|h'(x)}{\tau(p)} \right) dx.$$

Por tanto, usando de nuevo el método de Laplace (Ver [14]) obtenemos que

$$|M_4(p, p')| \leq \frac{C\sqrt{\pi}e^{-(k+\tau(p))h(0)}}{\sqrt{2V''(0)}(k + \tau(p))(1 + |p'|^2)^n}.$$

Así queda demostrado el lema □

Lema 2.4.6. *Para $p \in \gamma$ se tiene que*

$$\left| \frac{1}{L(p)} \right| \leq 6k^2$$

Demostración. De (2.4.2) se tiene que $1/|L(p)| = |\tau(p)| [1/|\tau(p) - \lambda|]$ y

$$\frac{1}{|\tau(p) - \lambda|} \simeq \frac{1}{|\tau(p) - k + \beta^2|} \simeq \frac{1}{|\tau(p) - k|} = \frac{|\tau(p) + k|}{|p|^2} < \frac{|p| + 2k}{|p|^2}.$$

Por tanto

$$\left| \frac{1}{L(p)} \right| \leq (|p| + k) \left(\frac{|p| + 2k}{|p|^2} \right)$$

$$\text{Si } |p| = 1, \quad 1/|L(p)| \leq (1 + 2k)(1 + k) < 6k^2$$

$$\text{Si } |p| > 1, \quad 1/|L(p)| \leq \left(1 + \frac{2k}{p}\right) \left(1 + \frac{k}{p}\right) < 6k^2.$$

Con lo que se completa la demostración del lema. □

Lema 2.4.7. $\|\hat{M}_5\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \|\hat{M}_5\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |(\hat{M}_5 A)(p)|^2 dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{\gamma}^{\infty} \frac{M_4(p, p') A(p')}{L(p')} dp' \right|^2 dp \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\gamma}^{\infty} \left| \frac{M_4(p, p') A(p')}{L(p')} \right| dp' \right)^2 dp. \end{aligned}$$

De los lemas 2.4.5 y 2.4.6 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \left| \frac{M_4(p, p') A(p_+)}{L(p')} \right| dp' \right)^2 dp &\leq \frac{Ck^4 \pi e^{-2kh(0)}}{2V''(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\tau(p)h(0)} dp}{(k + \tau(p))} \left(\int_{\gamma} \frac{|A(p')| dp'}{(1 + |p'|^2)^{2n}} \right)^2 \\ &\leq \frac{Ck^4 \pi e^{-2kh(0)}}{2V''(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\tau(p)h(0)} dp}{(k + \tau(p))}. \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\tau(p)h(0)} dp}{(k + \tau(p))} &\leq \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau(p)h(0)} dp \\ &= \frac{2}{k} \int_1^{\infty} e^{-2\tau(p)h(0)} dp + \frac{2}{k} \int_0^1 e^{-2\tau(p)h(0)} dp \\ &\leq \frac{\tau(1)}{2kh(0)} e^{-2\tau(1)h(0)} + \frac{1}{k} e^{-2kh(0)} \\ &< C e^{-2kh(0)}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \left| \frac{M_4(p, p') A(p_+)}{L(p')} \right| dp' \right)^2 dp \leq \frac{Ck^4 \pi e^{-4kh(0)}}{2V''(0)}.$$

En consecuencia, cuando $k \rightarrow \infty$, $\|\hat{M}_5\| \rightarrow 0$, lo cual concluye la demostración. □

Del resultado del lema (2.4.7) vemos que es posible aplicar de nuevo las series

de Neumann para resolver (2.4.12), y así obtenemos

$$A(p) = (1 - \hat{M}_5)^{-1} \frac{2\pi M_4(p, p_+) A(p_+)}{\beta \sqrt{2} \varepsilon^{3/2}}. \quad (2.4.18)$$

A continuación, mostraremos que efectivamente $A(p)$ es analítica en una banda que contiene al eje real, como lo habíamos supuesto.

Lema 2.4.8. $A(p)$ es analítica en una banda que contiene al eje real

Demostración. De (2.4.18), tenemos que $A(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(p)$, donde

$$a_n(p) = \hat{M}_5^n \left(\frac{2\pi M_4(p, p_+) A(p_+)}{\beta \sqrt{2} \varepsilon^{3/2}} \right)$$

De (2.4.3) y (2.4.12), se tiene que $a_n(p)$ es analítica en una banda que contiene al eje real, y como $\|\hat{M}_5\| < e^{-2kh(0)}$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(p)$ converge uniformemente a $A(p)$, en consecuencia, $A(p)$ es analítica. \square

2.5. Asintótica del número β

Tomando $p = p_+$ en (2.4.18), obtenemos la ecuación para β

$$\beta = \frac{\sqrt{2}\pi}{\varepsilon^{3/2}} (1 - \hat{M}_5)^{-1} M_4(p_+, p_+) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\varepsilon^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{M}_5^n M_4(p_+, p_+) \quad (2.5.1)$$

Lema 2.5.1. Para valores grandes de k se tiene que

$$\beta = k \sqrt{\frac{\pi}{2V''(0)}} e^{-2kh(0)} (1 + O(k^{-1})).$$

Demostración. En efecto, tomando el primer término de la serie de Neumann en (2.5.1), y de (2.4.3) se tiene

$$\beta = \frac{\sqrt{2}\pi}{\varepsilon^{3/2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip+t} \bar{M}_2(t, x) M_1(p_+, x) dt dx (1 + O(k^{-1})). \quad (2.5.2)$$

Con $\frac{1}{\varepsilon} = k$. Dado que $e^{ip+t} \simeq 1$, $\tau(p_+) \simeq k$ y de (2.4.3) tenemos que

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi \varepsilon^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lambda K_0(k\sqrt{\zeta(t, x)}) - \frac{kh(x)K'_0(k\sqrt{\zeta(t, x)})}{\sqrt{\zeta(t, x)}} \right\} \\ &\quad \times e^{ip+x} \left(1 + \frac{ip_+ h'(x)}{\tau(p_+)} \right) e^{-kh(x)} dt dx (1 + O(k^{-1})). \end{aligned}$$

Luego de (2.4.15) tenemos que para valores grandes de k :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi \varepsilon^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\sqrt{\zeta(t, x)}} \left\{ \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{\sqrt{2k}[\zeta(t, x)]^{1/4}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{kh(x)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2k}[\zeta(t, x)]^{3/4}} \right\} \left(1 + \frac{ip_+ h'(x)}{\tau(p_+)} \right) e^{-kh(x)} dt dx (1 + O(k^{-1})). \end{aligned}$$

Utilizando el método de Laplace (Ver [14]) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k\sqrt{\zeta(t, x)}}}{\sqrt{2k}} \left\{ \frac{\lambda}{[\zeta(t, x)]^{1/4}} + \frac{kh(x)}{[\zeta(t, x)]^{3/4}} \right\} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\lambda}{k} + 1 \right) e^{-kh(x)} (1 + O(k^{-1})).$$

Por tanto,

$$\beta = \frac{1}{2\varepsilon^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{k} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{ip_+ h'(x)}{\tau(p)} \right) e^{-2kh(x)} dx (1 + O(k^{-1})). \quad (2.5.3)$$

Aplicando de nuevo el método de Laplace (Ver [14]) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{ip_+ h'(x)}{\tau(p)}\right) e^{-2kh(x)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2kV''(0)}} e^{-2kh(0)} (1 + O(k^{-1})). \quad (2.5.4)$$

Luego de (2.5.3) y de (2.5.4) tenemos que

$$\beta = \frac{1}{2\varepsilon^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{k} + 1\right) \sqrt{\frac{\pi}{2kV''(0)}} e^{-2kh(0)} (1 + O(k^{-1})).$$

Dado que $\lambda \simeq k - \beta^2$ tenemos que $\left(\frac{\lambda}{k} + 1\right) \simeq 2$ y como $k = \frac{1}{\varepsilon}$ tenemos que

$$\beta = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2V''(0)}} e^{-2kh(0)} (1 + O(k^{-1})).$$

Lo que demuestra el lema. □

Y por tanto, se obtiene el resultado del Teorema 2.2.1.

Bibliografía

- [1] F. Ursell, Edge waves on a sloping beach, Proc. Roy Soc. London, Ser. A, **214**, pp. 347-358, (1952).
- [2] M. A. Lavrentiev and B. V. Chabat, “ *Effets Hidrodynamiques et Modelles Mathematiques*”, Editions MIR, 270-289, (1980).
- [3] D. S. Jones, The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains, Proc. Cambridge Phill. Soc., **49**, pp. 668-684, (1953).
- [4] F. Ursell, Mathematical aspects of trapping modes in the theory of surface waves, J. Fluid Mech., Cambridge University Press., **183**, pp. 421-437, (1987).
- [5] A. S. Bonnet-Ben Dhia and P. Joly, Mathematical analysis of guided water waves, SIAM J. Appl. Math., **53**, pp. 1507-1550, (1993).

- [6] A. Merzon and P. Zhevandrov, High-Frequency Asymptotics of edge waves on a beach of nonconstant slope, *SIAM J. Appl. Math.* **59**, pp. 529-546 (1998).
- [7] P. Zhevandrov and A. Merzon, Asymptotics of eigenfunctions in shallow potential wells and related problems, *Amer. Math. Soc. Translations (2)* **208**, pp. 235-284 (2003).
- [8] L. D. Landau and E.M. Lifshitz, “*Quantum Mechanics*”, Pergamon, London (1958).
- [9] B. Simon, The bound state of weakly coupled Schrödinger operator in one and two dimensions. *Ann. Phys. (NY)* **97**, pp. 279-288 (1976).
- [10] R. D. Gadyl'shin, Local perturbations of the Schrödinger operator on the axis, *Theor. Math. Phys.* **132**, pp. 976-982 (2002).
- [11] D. S. Kuznetsov, A spectrum perturbation problem and its applications to waves above an underwater ridge, *Siberian Math. J.* **42**, pp. 668-694 (2001).
- [12] M. Abramowitz and I. A. Stegun, “*Handbook of Mathematical Functions*”, Dover Publ, Inc., New York, (1970).

- [13] G. N. Watson, “*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*”, Cambridge Mathematical Library, (1996).
- [14] F. W. Olver, “*Asymptotics and Special Functions*”, AKP Classics, New York: Academic Press (1974).
- [15] P. Helmos and V. Sunder, “*Bounded Integral Operator on L_2 Space*”, Springer-Verlag, New York (1979).
- [16] T. Kato, “*Perturbation Theory for Linear Operators*”, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, (1976).
- [17] Robert D. Richtmyer, “*Principles of Advanced Mathematical Physics*”, Springer-Verlag, Volume I, New York, (1978).
- [18] D. Evans, N. Kuznetsov, “*Trapped Modes*”. *Advanced in Fluid Mechanics* Southampton. *Comp. Mech. Publ.* **10**, pp. 127-168, (1997).