Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Instituto de Física y Matemáticas

Producto de Espacios Topológicos Secuencialmente Compactos

T E S I N A

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

David Medina González
Director: Dr. Ulises Ariet Ramos García

Morelia, Michoacán - agosto de 2024

Resumen

En este trabajo se exploran algunos de los avances que hay para la resolución del problema de Scarborough-Stone (S-S), el cual pregunta si todo producto topológico de espacios secuencialmente compactos es también secuencialmente compacto. Este problema existe prácticamente desde que se definieron las primeras nociones de compacidad en matemáticas. Comenzamos con una sección dedicada a exponer algunas de las definiciones y resultados básicos que son necesarios para comprender este trabajo. Luego, se exponen algunos de los resultados pertinentes a la resolución del problema, así como el método usual para responder de manera negativa a modificaciones de la pregunta de Scarborough-Stone. Después, seguimos la construcción realizada por E. K. van Douwen en la cual responde de manera negativa a la pregunta de S-S suponiendo una hipótesis independiente a ZFC. Finalmente, se exponen algunas de nuestras ideas e intentos para responder de manera negativa a la pregunta de S-S para el caso de grupos topológicos.

Palabras clave: topología general, teoría de conjuntos, combinatoria infinita, grupos topológicos, sucesiónes

Abstract

In this work, we explore some of the advances made in the resolution of the Scarborough-Stone (S-S) problem, which asks if every topological product of sequentially compact spaces is also sequentially compact. This problem has been around practically since the definition of the first notions of compacity in mathematics. We begin with a section dedicated to expose some of the definitions and results needed to understand this work. Then, we expose some of the relevant results to de resolution of the problem, as well as the usual method to respond negatively to the S-S question. Afterward, we continue the construction made by E. K. van Douwen in which he responds negatively to the S-S question, assuming a hypothesis independent of ZFC. Finally, we show some of our ideas and attempts to respond negatively to the S-S question in the case of topological groups.

Agradecimientos

Quiero agradecer primero a mi madre Cecilia por todos sus sacrificios. Así mismo, agradezco a mi familia por el constante apoyo. También, se agradece a mis amigos y pareja por la compañía y los buenos ratos.

Agradecimientos especiales a mi asesor de tesina el Dr. Ulises Ariet Ramos García por su paciencia y apoyo. También, se agradece a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH) y a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), que proporcionaron los medios para este posgrado. Así mismo, se agradece a la comunidad del Centro de Ciencias Matemáticas (CCM); estudiantes, profesores y administrativos. Todos ellos fueron necesarios a la hora de proporcionar el ambiente ideal para la investigación.

Agradecimientos al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo económico proporcionado mientras cursaba el programa de maestría del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas (PCCM).

Se agradece a Overleaf ya que fue en esta plataforma donde se realizó esta tesina.

De antemano se agradece al jurado dispuesto por el Comité Académico Conjunto (CAC), con el propósito de revisar este trabajo.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN108122.

¡Gracias!

Índice

Introducción

Desde que A. N. Tychonoff probó que el producto de espacios topológicos compactos es también un espacio topológico compacto ([20]), los matemáticos se han preguntado por la veracidad de versiones análogas del resultado, para las muchas otras versiones de compacidad, así como sus restricciones a diversas clases de espacios topológicos. Resulta que en la mayoría de casos estas propiedades no se mantienen bajo el producto. Tal es el caso de los espacios topológicos numerablemente compactos; J. Novák en [13] y H. Terasaka en [19] produjeron ejemplos de dos espacios topológicos numerablemente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto. Más de sesenta años después, en [10] M. Hrušák, J. van Mill, U. A. Ramos-García y S. Shelah probaron la existencia de dos grupos topológicos numerablemente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto, resolviendo así un problema clásico formulado por W. W. Comfort en 1966. Por otro lado, en algunos casos el teorema análogo fue verdadero: en [5] ([6]) se probó el teorema de Comfort-Ross el cuál dice que el producto de grupos topológicos pseudocompactos es pseudocompacto.

Se sabe que el producto de espacios topológicos secuencialmente compactos no necesariamente es secuencialmente compacto (e.g., el producto de $\mathfrak{c}$ copias de $\{0, 1\}$ con la topología discreta). Como todo espacio topológico secuencialmente compacto es numerablemente compacto, no fue raro que en 1966, C. T. Scarborough y A. H. Stone plantearan en su artículo [18] la siguiente pregunta:

Problema (Scarborough-Stone) ¿Es el producto de espacios secuencialmente compactos siempre numerablemente compacto?

A pesar de que el problema de Scarborough-Stone es una pregunta natural acerca de nociones relativamente simples de compacidad y que ya va más de medio siglo desde su concepción, no ha sido resuelto por completo. El problema ha sido replanteado muchas veces a lo largo de los años (e.g., [7, 22, 23, 24]) y se han obtenido algunos resultados parciales. En [22], J. E. Vaughan muestra, asumiendo $\diamondsuit$ (resp., CH), que hay familias de espacios perfectamente normales (resp., Tychonoff) secuencialmente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto. Asumiendo CH, M. Rajagopalan y R. Grant Woods también construyen en [17] una familia de espacios de Tychonoff secuencialmente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto usando una técnica distinta a la de Vaughan. Esto muestra que la respuesta negativa al problema es relativamente consistente con ZFC para espacios con un nivel de separabilidad de hasta T_6 (perfectamente normal).

En [15] P. J. Nyikos y J. E. Vaughan dan a conocer dos construcciones en ZFC de familias de espacios Hausdorff secuencialmente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto; De esta manera queda claro que la respuesta al problema de Scarborough-Stone es negativa para el caso de espacios Hausdorff. Más adelante, en [14], P. J. Nyikos, L. Soukup y B. Veličković muestran que, asumiendo PFA (Proper Forcing Axiom), el producto arbitrario de espacios T_5 (hereditariamente normales) numerablemente compactos es numerablemente compacto. Se sigue que el problema de Scarborough-Stone para espacios T_5 es independiente de ZFC. En conclusión, el problema en cuestión sólo ha sido resuelto completamente para espacios T_2 y T_5.

Aunque aún falta mucho para resolver completamente el problema de Scarborough-Stone, a lo largo de los años ha habido avances constantes para restricciones del problema orientadas a la separabilidad de los espacios en cuestión. Poco o nada se sabe para otro tipo de restricciones como por ejemplo la restricción a espacios homogéneos. Este es el caso de la versión del problema para grupos topológicos que, como se menciona en [24], no ha recibido mucha atención por parte de la comunidad matemática. Dicha versión es la siguiente:

Problema (S-S para grupos) ¿Es el producto de grupos topológicos secuencialmente compactos siempre numerablemente compacto?

Esta pregunta ha sido planteada en [23, 24] y es la que se estuvo atacando mientras se elaboraba este trabajo. Si bien no se logra aún una respuesta parcial significativa, las observaciones en este trabajo exponen algunas de las dificultades a la hora de intentar construcciones similares a las ya existentes en la literatura con respecto al problema general de S-S.

En la primera sección se expone la notación que será utilizada y se disponen algunas definiciones que serán fundamentales en este escrito. En la segunda sección se presenta el método comúnmente utilizado para resolver problemas del tipo Scarborough-Stone, el cuál será el que se pretende seguir para intentar responder la versión de grupos del problema. Esta consiste en construir un espacio secuencialmente compacto no p-compacto para un $p \in \omega^*$ dado. En la tercera sección se sigue la construcción dada por E. K. van Douwen en [21]. La construcción asume $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ y se hace sobre $\mathfrak{c}$ de manera recursiva. Obtiene finalmente un espacio secuencialmente compacto no p-compacto y de Tychonoff. Este procedimiento sirve como base y motivación para nuestro acercamiento al problema. En la cuarta sección se muestran algunas de las propuestas, observaciones y dificultades que se presentaron al intentar una construcción de un grupo topológico booleano secuencialmente compacto no p-compacto.

1. Notación y Definiciones

Dados dos conjuntos A y B, escribiremos A^B para referirnos al conjunto de funciones de B a A y $A \,\Delta\, B$ para referirnos a la diferencia simétrica de A en B, es decir, el conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dado un conjunto A y κ un cardinal, escribiremos $[A]^\kappa$ (resp., $[A]^{<\kappa}$) para referirnos a la familia de subconjuntos de A que tienen cardinalidad κ (resp., menor que κ).

A partir de aquí escribiremos espacio en vez de espacio topológico. Dado un espacio X, $A \subset X$ y un punto $x \in X$, denotaremos por $\mathcal{V}_x$ al conjunto de vecindades de x en X y $\overline{A}$ al conjunto cerrado $\subset$-mínimo que contiene a A cuando no sea necesario señalar en qué topología. También denotamos por $\mathcal{V}_x^\circ$ al conjunto de vecindades abiertas de x en X. A menos que se diga otra cosa, el símbolo κ denotará un cardinal. Dada una familia $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de espacios topológicos y $\beta < \kappa$, la función $\pi_\beta : \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ denotará la proyección natural. Todos los espacios serán Hausdorff a menos que se indique otra cosa.

Denotaremos por $g \restriction A$ a la restricción de una función f a un subconjunto A de su dominio. Sea $f : n \longrightarrow A$ una función con $n \in \omega$ y sea x un conjunto. Se denotará por $(f^\frown x) : n+1 \longrightarrow A \cup \{x\}$ a la función tal que $(f^\frown x) \restriction n = f$ y $(f^\frown x)(n) = x$.

Para términos utilizados y no definidos aquí que sean afines a las áreas de Topología General y Teoría de Conjuntos, puede consultar [8, 9].

Sean $f, g \in \omega^\omega$. Escribimos $f \leq^* g$ si el conjunto $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ es finito.

Definición 1.

(1) *Sea $\mathcal{A} \subset \omega^\omega$ una familia de funciones. Decimos que $\mathcal{A}$ es* unbounded *si no existe $f \in \omega^\omega$ tal que $(\forall g \in \mathcal{A})\,(g \leq^* f)$.*

(2) *Se denota por $\mathfrak{b}$ a la mínima cardinalidad que puede tener una familia $\mathcal{A} \subset \omega^\omega$ unbounded.*

Sean A y B conjuntos, escribimos $A \subset^* B$ si $A \setminus B$ es un conjunto finito. Esta relación es claramente un orden. Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos, decimos que B es pseudointersección de $\mathcal{A}$ si $B \subset^* A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Definición 2.

(1) *Una* torre *es una familia $\mathcal{A} \subset [\omega]^\omega$ que no tiene pseudointersección infinita y que es bien ordenada por $\subset^*$.*

(2) *Se denota por $\mathfrak{t}$ a la mínima cardinalidad que puede tener una torre.*

Tanto $\mathfrak{b}$ como $\mathfrak{t}$ fueron presentados junto con otros cuatro cardinales por van Douwen en [21]; él atribuye $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{t}$ a F. Rothberger. Ambos cardinales son regulares, menor o iguales que $\mathfrak{c}$ y no numerables. Para más información acerca de este y otros cardinales invariantes del continuo puede consultar [4, 21].

Recordemos que un espacio es *numerablemente compacto* si toda sucesión tiene al menos un punto de acumulación. Un espacio X es *secuencialmente compacto* si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente. Note que todo espacio secuencialmente compacto es numerablemente compacto y todo espacio primero numerable y numerablemente compacto es secuencialmente compacto.

Se denotará por ω^* al espacio de ultrafiltros libres en ω.

Definición 3 (A. R. Bernstein [2]). *Sean $p \in \omega^*$, X un espacio y $N : \omega \to X$ una sucesión. Decimos que $x \in X$ es* p-límite *de N si para toda vecindad U de x se tiene que $\{n \in \omega : N(n) \in U\} \in p$.*

Definición 4 (A. R. Bernstein [2]). *Sea $p \in \omega^*$. Un espacio X se llama* p-compacto *si toda sucesión en X tiene p-límite en X.*

Escribiremos grupo en vez de grupo algebraico. Dado un grupo $\langle G, \cdot \rangle$ (resp., $\langle G, + \rangle$ cuando el grupo sea abeliano), denotaremos por 1_G (resp., 0_G) al elemento neutro.

Sean $\langle G, \cdot \rangle$ un grupo; A, B subconjuntos de G y $g \in G$. Denotaremos por $A \cdot B$, $g \cdot A$, $A \cdot g$ y A^{-1} a los conjuntos $\{a \cdot b : a \in A \wedge b \in B\}$, $\{g\} \cdot A$, $A \cdot \{g\}$ y $\{a^{-1} : a \in A\}$ respectivamente.

Definición 5. *Decimos que un grupo $\langle G, \cdot \rangle$ es* booleano *si para todo $g \in G$ se tiene que $g \cdot g = 1_G$.*

Definición 6. *Sea $\langle G, \tau \rangle$ un espacio topológico y sea $(\cdot) : G \times G \longrightarrow G$ una función. Decimos que $\langle G, \cdot, \tau \rangle$ es grupo topológico si $\langle G, \cdot \rangle$ es un grupo y tanto $(\cdot)$ como $()^{-1}$, la función en G^G que manda a cada elemento a su inverso, son funciones continuas.*

Escribiremos $\langle G, \cdot \rangle$ en vez de $\langle G, \cdot, \tau \rangle$ cuando no haya riesgo de confusión. Para más información acerca de grupos topológicos puede consultar [1]. Un grupo topológico es booleano si es un grupo algebraico booleano.

2. El método clásico

Antes que nada vale la pena exponer un resultado mostrado en [18]. Este fue el primer paso hacia la solución del problema de Scarborough-Stone.

Aunque el teorema original sólo prueba que el producto de a lo más $\aleph_1$ espacios secuencialmente compactos es numerablemente compacto, la demostración de la siguiente versión es prácticamente la misma.

Teorema 1 (Scarborough-Stone [18]). *Sea $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de espacios secuencialmente compactos. Si $\kappa \leq \mathfrak{t}$ (resp., $\kappa < \mathfrak{t}$), entonces $X = \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ es numerablemente compacto (resp., secuencialmente compacto).*

Demostración. Sea $\{s(n) : n < \omega\}$ una sucesión de elementos de X. Comenzamos construyendo por inducción transfinita para cada $\alpha \in \kappa$, un conjunto $N(\alpha) \in [\omega]^\omega$ tal que

(1) La sucesión $\{\pi_\alpha(s(n)) : n \in N(\alpha)\} \subset X_\alpha$ converge a algún $x_\alpha \in X_\alpha$;

(2) Siempre que $\beta < \alpha$, se tiene que $N(\alpha) \subset^* N(\beta)$.

Supongamos que ya hemos construido $N(\gamma)$ para $\gamma < \alpha$. Se tienen tres casos:

Caso 1. $\alpha = 0$. Hacemos que $N(0)$ sea cualquier subconjunto infinito de ω para el cual $\{\pi_0(s(n)) : n \in N(0)\}$ converja. Este subconjunto existe ya que X_0 es secuencialmente compacto.

Caso 2. $\alpha = \beta + 1$. La sucesión $\{\pi_\alpha(s(n)) : n \in N(\beta)\} \subset X_\alpha$ tiene una subsucesión convergente $\{\pi_\alpha(n) : n \in A\}$ para algún subconjunto infinito $A \subset N(\beta)$. Hacemos que $N(\alpha)$ sea A.

Caso 3. α es ordinal límite. Como $\alpha < \kappa \leq \mathfrak{t}$, la familia $\{N(\gamma) : \gamma < \alpha\}$ no es una torre. Se sigue que dicha familia tiene una pseudointersección $A \in [\omega]^\omega$; en otras palabras, $(\forall \gamma < \alpha)(A \subset^* N(\gamma))$. Como X_α es secuencialmente compacto, podemos encontrar un subconjunto infinito $N(\alpha) \subset A$ de tal manera que $\{\pi_\alpha(s(n)) : n \in A\}$ es una sucesión convergente. Claramente $N(\alpha)$ cumple lo deseado.

Defina $x \in X$ tal que $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$.

Afirmación: x es punto de acumulación de $\{s(n) : n < \omega\}$.

En efecto. Considere una vecindad abierta básica de x en la topología del producto; es decir, una de la forma $\bigcap_{\gamma\in F} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ donde $F \subset \kappa$ es finito y U_γ es vecindad abierta de x_γ en X_γ para cada $\gamma \in F$. Sea $\beta = \max F$. Como para todo $\gamma \in F$ se tiene que $N(\beta) \subset^* N(\gamma)$ y $\{\pi_\gamma(s(n)) : n \in N(\gamma)\}$ converge a x_γ, debe pasar que $(\forall \gamma \in F)\,(\{\pi_\gamma(s(n)) : n \in N(\beta)\}$ converge a $x_\gamma)$. Esto significa que $\{s(n) : n < \omega\} \cap \bigcap_{\gamma\in F} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ es infinito y queda probada la afirmación.

Para el caso en el que $\kappa < \mathfrak{t}$, la familia $\{N(\alpha) : \alpha < \kappa\}$ no puede ser una torre por lo que tiene una pseudointersección infinita $B \in [\omega]^\omega$.

Afirmación: $\{s(n) : n \in B\}$ *converge a* x.
Como antes, consideramos una vecindad abierta básica de x de la forma $\bigcap_{\gamma\in F} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ y debido a que $B \subset^* N(\gamma)$ para cada $\gamma \in F$, se tiene que $(\forall\gamma \in F)\,(\{\pi_\gamma(s(n)) : n \in B\}$ converge a x_γ en $X_\gamma)$. Se sigue que para cada $\gamma \in F$ el conjunto $\{s(n) : n \in B\} \setminus \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ es finito y por lo tanto $\{s(n) : n \in B\} \setminus \bigcap_{\gamma\in F} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ también.

□

Este teorema nos indica que si queremos dar un ejemplo de una familia de espacios secuencialmente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto tendría que ser una familia de cardinalidad estrictamente mayor que $\mathfrak{t}$. Más aún, como hay modelos de ZFC en los que $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$ (e.g., aquellos en los que se cumple CH), dar dicho ejemplo requeriría una familia de cardinalidad mayor que la del continuo.

En [2], Bernstein define a los espacios p-compactos (para $p \in \omega^*$) y prueba el siguiente teorema:

Teorema 2 (A. R. Bernstein [2])**.** *Sea* $p \in \omega^*$. *Entonces, el producto de una familia de espacios* p*-compactos es* p*-compacto.*

El reciproco del teorema también es cierto, es decir, si un producto de espacios $X = \prod_{i\in I} X_i$ es p-compacto entonces cada X_i también lo es. Es claro que si un espacio es p-compacto para algún $p \in \omega^*$ entonces también es numerablemente compacto. Estos dos hechos dejan claro que para que un producto de espacios $X = \prod_{i\in I} X_i$ no sea numerablemente compacto debe pasar que para cada $p \in \omega^*$, al menos uno de los espacios X_i no sea p-compacto. Es probable que sea por esta razón que en [24], Vaughan haga las siguientes observaciones:

Definición 7 (J. E. Vaughan [24])**.** *Una familia de parejas* $\{(X_\alpha, s_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ *donde* X_α *es un espacio y* s_α *es una sucesión en* X_α *se llama* SS-familia *si para todo* $p \in \omega^*$ *existe* $\alpha < \kappa$ *tal que* s_α *no tiene* p*-límite.*

Lema 3 (Folklore)**.** *Un producto* $\prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ *no es numerablemente compacto si y sólo si para cada* $\alpha < \kappa$ *hay una sucesión* s_α *en* X_α *tal que* $\{(X_\alpha, s_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ *es una* SS*-familia.*

Demostración. Veamos la suficiencia por contrapositiva. Supóngase que para cada $\alpha < \kappa$ logramos elegir s_α sucesión en X_α tal que $\{(X_\alpha, s_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ es SS-familia. Defina S como la sucesión en $X := \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ que satisface $\pi_\alpha(S(n)) = s_\alpha(n)$ para cada $n \in \omega$ y cada $\alpha < \kappa$. Supóngase que S tiene punto de acumulación $x \in X$.

Sea $p = \{A \subset \omega : (\exists U \in \mathcal{V}_x)\,(A = \{n \in \omega : S(n) \in U\})\}$. Se tiene que $p \in \omega^*$ y que x es p-límite de S. Pero esto implica que x_α es p-límite de s_α para cada $\alpha < \kappa$. Una contradicción.

Recíprocamente, supóngase que X no es numerablemente compacto. Entonces, X contiene una sucesión S sin puntos de acumulación en X. Esta sucesión no puede tener p-límite para cualquier $p \in \omega^*$. Para cada $\alpha < \kappa$ hacemos que s_α sea la sucesión tal que $s_\alpha(n) = \pi_\alpha(S(n))$ para cada $n \in \omega$. Fijemos $p \in \omega^*$. Se afirma que s_α no tiene p-límite para algún $\alpha < \kappa$. Supóngase que s_α tiene p-límite x_α para cada $\alpha < \kappa$. Sea $x \in X$ tal que $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$. Si U_α es vecindad abierta de x_α, entonces $\{n \in \omega : S(n) \in \pi_\alpha^{-1}[U]\} = \{n \in \omega : s_\alpha(n) \in U\} \in p$. Se sigue que si $W := \bigcap_{\beta \in F} \pi_\beta^{-1}[U_\beta]$ con $F \in [\kappa]^{<\omega}$ es una vecindad básica de x, entonces $\{n \in \omega : S(n) \in W\} = \bigcap_{\beta \in F}\{n \in \omega : s_\beta(n) \in \pi_\beta^{-1}[U_\beta]\} \in p$. Por lo tanto, x es p-límite de S; Una contradicción. Se sigue que $\{(X_\alpha, s_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ es una SS-familia.

$\square$

El Lema 3 nos dice que dar una respuesta negativa al problema de Scarborough-Stone es equivalente a construir una SS-familia de espacios secuencialmente compactos. Una manera de lograr esto es encontrando un método para construir un espacio X_p secuencialmente compacto que no sea p-compacto para cada $p \in \omega^*$. Estos hechos ya habían sido observados por otros autores (e.g. [13, 17, 21]) que a su vez atacaron el problema de esta manera; el método clásico.

3. Construcción de Ostaszewski

En 1976, A. J. Ostaszewski publica en [16] una notable construcción de un espacio no compacto, hereditariamente separable, perfectamente normal y numerablemente compacto asumiendo $\diamondsuit$. Después, la construcción fue modificada por J. E. Vaughan en [22] para contestar de manera negativa la pregunta de Scarborough-Stone asumiendo CH. En esta sección se expone la construcción presentada por E. K. van Douwen en [21], en la cuál nota que la hipótesis CH puede ser debilitada a $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Esta construcción nos servirá de guía para intentar responder el problema de S-S para grupos .

Para lograr el contraejemplo, dado un $p \in \omega^*$, van Douwen construye sobre el conjunto $\mathfrak{c}$ un espacio secuencialmente compacto no p-compacto. Este espacio es primero numerable, numerablemente compacto (por lo tanto secuencialmente compacto) y localmente compacto.

A continuación un debilitamiento de normalidad que es útil para la construcción.

Definición 8 (R. L. Moore [12])**.** *Decimos que un espacio X tiene la propiedad* D *si para todo subconjunto numerable cerrado y discreto Y, existe una familia $\{U_y : y \in Y\}$ tal que*

(1) $(\forall y \in Y)\,(U_y \in \mathcal{V}_y^\circ)$;

(2) $(\forall x \in X)\,(\exists V \in \mathcal{V}_x)\,(|\{y \in Y : V \cap U_y \neq \emptyset\}| < \aleph_0)$.

Note que en la definición podemos suponer sin pérdida de generalidad que las vecindades U_y son ajenas entre sí. Esto porque Y es un subconjunto discreto.

Lema 4 (E. K. van Douwen [21])**.** *Sean X un espacio regular y $Y \in [X]^\omega$ un subconjunto cerrado discreto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Existe una familia $\{U_y : y \in Y\}$ tal que $U_y \in \mathcal{V}_y^\circ$ y para todo $x \in X$, existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $|\{y \in Y : U_y \cap W \neq \emptyset\}| < \aleph_0$.*

(b) $(\forall U \subset X \text{ abierto})\,(Y \subset U \Rightarrow (\exists W \subset X \text{ abierto})\,(Y \subset W \subset \overline{W} \subset U))$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Suponga que los elementos de $\{U_y : y \in Y\}$ son ajenos entre sí. Sea $U \subset X$ abierto con $Y \subset U$. Para cada $y \in Y$ escogemos una vecindad cerrada W_y de y con $W_y \subset U \cap U_y$. Entonces, $\bigcup_{y\in Y} W_y$ es vecindad de Y contenida en U.
Afirmación: $\bigcup_{y\in Y} W_y$ es un subconjunto cerrado de X.
En efecto. Sea $x \in X \setminus \bigcup_{y\in Y} W_y$. Si x está en U_z para algún $z \in Y$, entonces podemos hallar una vecindad V de x contenida en U_z tal que $V \cap W_z = \emptyset$ y como $U_z \cap U_y = \emptyset$ para $y \in Y \setminus \{z\}$, se sigue que $V \cap \bigcup_{y\in Y} W_y = \emptyset$. Por otro lado, si $x \in X \setminus \bigcup_{y\in Y} U_y$, entonces hay una vecindad V de x que interseca a una cantidad finita de elementos de $\{U_y : y \in Y\}$. Basta considerar una vecindad U de x contenida en V tal que $U \cap W_y = \emptyset$ para aquellos $y \in Y$ tales que $V \cap U_y \neq \emptyset$.

(b)$\Rightarrow$(a). Comenzamos dándole a Y un orden $<$ de manera que $\langle Y, < \rangle$ sea un conjunto bien ordenado con tipo de orden ω. Para cada $y \in Y$ elija de manera recursiva una vecindad abierta V_y de y tal que $V_y \cap V_z = \emptyset$ para cada $z < y$ $(z \in Y)$ y $\{z \in Y : z > y\} \cap \overline{V_y} = \emptyset$. Esta vecindad siempre existe debido a que el espacio es regular. Note que las vecindades son ajenas entre sí. Sea W un conjunto abierto en X tal que $Y \subset W \subset \overline{W} \subset \bigcup_{y\in Y} V_y$. Para cada $y \in Y$ definimos $U_y = V_y \cap W$. Veamos que esta familia cumple lo deseado. Sea $x \in X$. Si $x \notin \overline{W}$ entonces x tiene una vecindad U tal que

$U \cap W = \emptyset$. Se sigue que $U \cap U_y = \emptyset$ para cada $y \in \omega$. Por otro lado, si $x \in \overline{W}$ entonces $x \in U_y$ para algún $y \in \omega$; Esta vecindad cumple lo que se busca.

□

Esta equivalencia nos es útil para demostrar el siguiente teorema clave para la construcción.

Teorema 5 (E. K. van Douwen [21])**.** *Sea X un espacio regular primero numerable. Si $|X| < \mathfrak{b}$ entonces X tiene la propiedad* D.

Demostración. Supóngase que $|X| < \mathfrak{b}$. Sea $Y \subset X$ un subconjunto numerable y cerrado. Sea U una vecindad abierta de Y. Por simplicidad, vamos a pensar que $Y = \omega$. Para cada $k \in \omega$, elegimos una base de vecindades abiertas $\{B_{k,n} : n \in \omega\}$ de k tal que $(\forall n \in \omega)(B_{k,n+1} \subset B_{k,n})$ y $\overline{B_{k,0}} \subset U$.

Para cada $f \in \omega^\omega$ definimos $B(f) = \bigcup_{k\in\omega} B_{k,f(k)}$. Note que la familia $\{B(f) : f \in \omega^\omega\}$ es base de vecindades de $Y \subset X$, es decir, para todo subconjunto abierto V de X que contenga a Y existe $f \in \omega^\omega$ tal que $B(f) \subset V$. Para cada $x \in X \setminus U$ elegimos $f_x \in \omega^\omega$ tal que $x \notin \overline{B(f_x)}$. Este f_x siempre existe por cómo se elijieron los $B_{k,0}$. Como $|X \setminus U| \leq |X| < \mathfrak{b}$, existe $g \in \omega^\omega$ tal que $(\forall x \in X \setminus U)(f_x \leq_* g)$. Se afirma que $\overline{B(g)} \subset U$. En efecto, si $x \in X \setminus U$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $(\forall n \in \omega)(n \geq m \Rightarrow f_x(n) \leq g(n))$. Se sigue que

$$\overline{B(g)} \subset \overline{\bigcup_{k\in m} B_{k,0} \cup B(f_x)} = \bigcup_{k\in m} \overline{B_{k,0}} \cup \overline{B(f_x)}.$$

Como x no puede estar en ninguno de los uniendos del lado derecho de la ecuación, $x \notin \overline{B(g)}$.

□

Note que en la demostración del teorema se prueba que todo subconjunto numerable y cerrado de X satisface las afirmaciones de (b) en el Lema 4. Que un espacio satisfaga esto es una propiedad más fuerte que tener la propiedad D (la cual únicamente pide que se cumplan dichas afirmaciones para subconjuntos cerrados, numerables y discretos); A un espacio que cumple esto se le conoce como *espacio pseudonormal.* Note que si hablamos de espacios regulares, se tiene que: normal ⇒pseudonormal⇒ propiedad D.

Cabe mencionar que hay espacios regulares primero numerables de tamaño $\mathfrak{b}$ que no tienen la propiedad D. En [21] (Teorema 12.2, pag. 156) van Douwen da el siguiente ejemplo:

Sea $B \subset \omega^\omega$ una familia unbounded de cardinalidad $\mathfrak{b}$ que está bien ordenada por $<^*$ (algunos llaman a este tipo de familia *escalera*). El espacio es $X := (\omega \times \omega) \cup B \cup \omega$ con base de topología

$$(\omega\times\omega)\cup\{\{f\}\cup(f\setminus F) : f \in B \wedge F \in [X\setminus\{f\}]^{<\omega}\}\cup\{k\cup(\omega\setminus n)) : k, n \in \omega\}.$$

Con esta topología no existen dos abiertos ajenos que separen a los subconjuntos cerrados ω y B.

Lema 6. *Existe una función suprayectiva $M : \mathfrak{c} \setminus \omega \to [\mathfrak{c}]^\omega$ de tal manera que $(\forall \alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega)(M(\alpha) \subset \alpha)$.*

Demostración. Por simplicidad, de aquí en adelante escribiremos M_α en vez de $M(\alpha)$. Como $|[\mathfrak{c}]^\omega \times \mathfrak{c}| = \mathfrak{c} = |\mathfrak{c} \setminus \omega|$, existe una función $f : \mathfrak{c} \setminus \omega \to [\mathfrak{c}]^\omega$ tal que $(\forall N \in [\mathfrak{c}]^\omega)(|\{\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega : f[\alpha] = N\}| = \mathfrak{c})$. Definimos M tal que $M_\alpha = f(\alpha)$ si $f(\alpha) \subset \alpha$ y $M_\alpha = \omega$ en otro caso. Para ver que esta función es suprayectiva, considere $N \in [\mathfrak{c}]^\omega$. Como $\mathfrak{c}$ es un cardinal regular, se tiene que $\sup(N) < \mathfrak{c}$. Por definición de f, existe $\alpha \in f^{-1}[N]$ con $\alpha > \sup(N)$. Se sigue que $M_\alpha = N$.

□

Lema 7. *Todo espacio topológico numerable, Hausdorff y compacto es primero numerable.*

Demostración. Recuerde que todo espacio Hausdorff y compacto es regular. Sea X un espacio Hausdorff y compacto. Sea $x \in X$, enumeramos $X \setminus \{x\} = \{x_n : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$ elija V_n vecindad abierta de x que no contenga a x_n y de tal manera que $V_n \subset \overline{V_n} \subset V_{n-1}$. Veamos que $\{V_n : n \in \omega\}$ es base de vecindades de x. Sea U una vecindad abierta de x. Como $\bigcap_{n\in\omega} V_n = \bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n} = \{x\} \subset U$ se tiene que $\bigcap_{n\in\omega}(\overline{V_n} \setminus U) = \emptyset$. Como el espacio es compacto y los $\overline{V_n} \setminus U$ forman una sucesión $\subset$-decreciente de conjuntos cerrados, existe $k \in \omega$ tal que $\overline{V_k} \setminus U = \emptyset$. Se sigue que $\overline{V_k} \subset U$.

□

Teorema 8 (E. K. van Douwen [21])**.** *Sea $p \in \omega^*$. Suponiendo $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, existe un espacio de Tychonoff, secuencialmente compacto y no p-compacto.*

Demostración. El espacio se construye sobre $\mathfrak{c}$ y la sucesión que no tendrá p-límite será $\omega \subset \mathfrak{c}$ con su orden usual, es decir, la sucesión $\langle n : n < \omega\rangle$. Para esto es suficiente que se cumpla que

$$(\forall x \in \mathfrak{c})(\exists P \in p)(x \notin \overline{P}).$$

En efecto, si x tiene una vecindad V tal que $V \cap P = \emptyset$ entonces $V \cap \omega$ no puede pertenecer al ultrafiltro y así x no puede ser p-límite de la sucesión.

Fijemos M una función como la del Lema 6. Para cada $\alpha < \mathfrak{c} + 1$ se construye recursivamente una topología τ_α sobre α de tal manera que

(1) $\langle \alpha, \tau_\alpha \rangle$ es un espacio Hausdorff en el que todo elemento tiene una vecindad abierta, numerable y compacta;

(2) $(\forall \beta < \alpha)(\langle \beta, \tau_\beta \rangle$ es un subespacio abierto de $\langle \alpha, \tau_\alpha \rangle)$;

(3) $(\forall \beta \in \alpha \setminus \omega)(M_\beta$ tiene punto de acumulación en $\langle \alpha, \tau_\alpha \rangle)$;

(4) $(\forall \beta \in \alpha \setminus \omega)(\exists P \in p)(\beta \notin \mathrm{Cl}_{\tau_\alpha}(P))$.

Note que por el Lema 7 y (1), cada $\langle \alpha, \tau_\alpha \rangle$ es primero numerable.

Para $n \in \omega$ hacemos que τ_n sea la topología discreta. Ahora supóngase que ya hemos construido τ_β para $\beta < \alpha$ donde $\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega$. Se tienen dos casos:

Caso 1. α es un ordinal límite. Como $(\forall \beta < \alpha)(\forall \gamma < \beta)(\tau_\gamma \subset \tau_\beta)$, $\bigcup_{\beta < \alpha} \tau_\beta$ es base de una topología sobre α la cuál será τ_α. Claramente τ_α cumple (1), (2), (3) y (4).

Caso 2. α es un ordinal sucesor, digamos $\alpha = \eta + 1$. Si M_η tiene punto de acumulación en $\langle \eta, \tau_\eta \rangle$ entonces hacemos que τ_α sea la topología generada por $\tau_\eta \cup \{\eta\}$. Es claro que en este caso se cumple lo deseado. En el caso de que M_η sea cerrado y discreto en $\langle \eta, \tau_\eta \rangle$, por el Teorema 5, $\langle \eta, \tau_\eta \rangle$ tiene la propiedad D; Existe una familia $\{U_\beta : \beta \in M_\eta\}$ que cumple:

(a) $(\forall \beta \in M_\eta)(U_\beta$ es vecindad abierta de β en $\tau_\eta)$

(b) $(\forall \gamma < \eta)(\exists U$ vecindad de $\gamma)(|\{\beta < \eta : U \cap U_\beta \neq \emptyset\}| < \aleph_0)$.

Además, por (1), podemos suponer que para cada $\beta \in M_\eta$ el subconjunto U_β es numerable y compacto en τ_η. Sean H y I dos subconjuntos infinitos ajenos de M_η. Se sigue que $\bigcup_{\beta \in H} U_\beta \cap \bigcup_{\beta \in I} U_\beta = \emptyset$ y por lo tanto su traza en ω es ajena. Como p es ultrafiltro, existe $J \in \{H, I\}$ tal que $\omega \cap \bigcup_{\beta \in J} U_\beta \notin p$. Definimos

$$\mathcal{B} = \{\{\eta\} \cup \bigcup_{\beta \in J \setminus F} U_\beta \ : F \in [J]^{<\omega}\}.$$

Hacemos que τ_α sea la topología generada por la base $\tau_\eta \cup \mathcal{B}$. Es claro que $\langle \eta, \tau_\eta \rangle$ es subespacio abierto de $\langle \alpha, \tau_\alpha \rangle$ y $\mathcal{B}$ es base de vecindades de η en τ_α. Como $\{U_\beta : \beta \in M_\eta\}$ satisface (b), se tiene que el espacio $\langle \alpha, \tau_\alpha \rangle$ es Hausdorff. Por construcción, cualquier elemento de $\mathcal{B}$ es numerable y compacto en τ_α; Se cumple (1). Además, η es punto de acumulación de M_η y $P = \omega \setminus \bigcup_{\beta\in J} U_\beta$ está en el ultrafiltro p por lo que $\eta \notin \overline{P}$.

Por construcción ((3) y (4)), el espacio $\langle \mathfrak{c}, \tau_\mathfrak{c} \rangle$ es secuencialmente compacto no p-compacto. Por (1), el espacio es Hausdorff y localmente compacto; Es de Tychonoff ([9], Teorema 7.28).

$\square$

El espacio construido en el teorema anterior no necesariamente es separable. Sin embargo podemos obtener una versión separable considerando la cerradura de ω en dicho espacio.

Cabe mencionar que hay más construcciones de espacios secuencialmente compactos no p-compactos al estilo de Ostaszewski (e.g., [15]) sin embargo son bastante similares en el proceso por lo que se optó por omitirlos.

4. Scarborough-Stone para grupos

En esta sección se explora la pregunta de Scarborough-Stone para el caso de grupos topológicos. Específicamente se busca construir un grupo topológico secuencialmente compacto que no sea p-compacto para un $p \in \omega^*$ fijo.

Recordemos que un grupo algebraico es booleano si todos sus elementos tienen orden dos. También, todo grupo booleano $\langle G, \cdot \rangle$ es abeliano, libre e isomorfo a $\langle [\dim G]^{<\omega}, \Delta \rangle$ donde Δ es la diferencia simétrica de conjuntos. Es por esto último que la construcción se pretende hacer, sin pérdida de generalidad, sobre el grupo $\langle [\mathfrak{c}]^{<\omega}, \Delta \rangle$. Por simplicidad, escribiremos $+$ en vez de Δ.

A continuación un par de observaciones bien conocidas que se usarán para construir la topología.

Teorema 9 (Folklore)**.** *Sean $\langle G, \cdot \rangle$ un grupo y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G que satisface las siguientes propiedades:*

(1) $\bigcap \mathcal{U} = \{0_G\}$*;*

(2) $(\forall U, V \in \mathcal{U})\,(\exists W \in \mathcal{U})\,(W \subset U \cap V)$*;*

(3) $(\forall U \in \mathcal{U})\,(\forall x \in U)\,(\exists V \in \mathcal{U})\,(V \cdot x \subset U)$*;*

(4) $(\forall U \in \mathcal{U})\,(\exists V \in \mathcal{U})\,(V \cdot V \subset U)$*;*

(5) $(\forall U \in \mathcal{U})\,(\forall x \in G)\,(\exists V \in \mathcal{U})\,(x \cdot V \cdot x^{-1} \subset U)$*;*

(6) $(\forall U \in \mathcal{U})\,(\exists V \in \mathcal{U})\,(V^{-1} \subset U)$.

Entonces, la familia $\mathcal{B} = \{g \cdot U : g \in G \wedge U \in \mathcal{U}\}$ es base de una topología Hausdorff τ sobre G con la que $\langle G, \cdot\rangle$ es grupo topológico. En este caso diremos que la topología de $\langle G, \cdot, \tau\rangle$ está generada por $\mathcal{U}$.

Note que si el grupo en cuestión es booleano entonces se pueden omitir (5) y (6). Dada una familia $\mathcal{S}$ de subgrupos de un grupo $\langle G, \cdot\rangle$, podemos definir $\mathcal{U}_{\mathcal{S}} = \{\bigcap F : F \in [\mathcal{S}]^{<\omega}\}$. Esta familia cumple trivialmente las condiciones (2)-(6) por lo que para construir un grupo topológico de esta manera, sólo se necesita asegurar la condición (1).

Sea $\langle G, \cdot, \tau\rangle$ un grupo topológico. Diremos que $\langle G, \cdot, \tau\rangle$ (resp., τ) está *generada por homomorfismos* si existe $\mathcal{F}$ una familia de homomorfismos que parten de G tal que la topología del grupo está generada por $\{\ker \phi : \phi \in \mathcal{F}\}$.

A partir de aquí, si α es un ordinal, G_α denotará al conjunto $[\alpha]^{<\omega}$. Podemos entonces plantear la pregunta exacta que se estuvo atacando durante la elaboración de este trabajo: Si $G = G_{\mathfrak{c}}$ y $p \in \omega^*$ ¿Existe una familia de homomorfismos $\mathcal{F} \subset 2^G$ que genere un grupo topológico Hausdorff (y en consecuencia Tychonoff) $\langle G, +\rangle$ secuencialmente compacto no p-compacto? Para tratar de responder esta pregunta, primero se elige una sucesión $N \in [G]^\omega$ la cuál será la que no tenga p-límite. Similar a la construcción de Ostaszewski, se optó por elegir $N = \langle \{n\} : n \in \omega\rangle$. Con esta elección, la pregunta puede ser contestada de manera afirmativa si existe una familia de homomorfismos $\mathcal{F} \subset 2^G$ tal que $\mathcal{U} = \{\ker \phi : \phi \in \mathcal{F}\}$ cumple lo siguiente:

(1) $\bigcap \mathcal{U} = \{\emptyset\}$;

(2) $(\forall X \in [G]^\omega)\,(\exists S \in [X]^\omega)\,(\exists x \in G)\,(\forall U \in \mathcal{U})\,(|(S + x) \setminus U| < \aleph_0)$;

(3) $(\forall x \in G)\,(\exists U \in \mathcal{U})\,(\{n \in \omega : \{n\} \in U\} \notin p)$.

Como se mencionó antes, la propiedad (1) garantiza que $\langle G, +\rangle$ con la topología generada por $\mathcal{U}$ sea la de un grupo topológico Tychonoff. La propiedad (2) asegura que el grupo topológico sea secuencialmente compacto (en particular, un espacio no discreto). Finalmente, la propiedad (3) garantiza que N no tenga p-límite. Note que (3) es equivalente a $(\forall x \in G)$ $(\exists \mathcal{B} \in [\mathcal{U}]^{<\omega})\,(\{n \in \omega : \{n\} \in \bigcap \mathcal{B}\} \notin p)$.

De manera similar a la construcción de Ostaszewski, se propuso fijar una enumeración $\{M_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega\}$ de todas las sucesiones no triviales de G tal que $(\forall \alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega)\,(M_\alpha \subset G_\alpha)$, además de construir recursivamente una familia de homomorfismos $\{\phi_j : j \in J\} \subset 2^G$ tales que, si τ_α es la topología sobre G_α generada por $\{\phi_j \restriction G_\alpha : j \in J\}$, la familia $\{\tau_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega\}$ cumple lo siguiente:

(a) $(\forall \alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega)\,(M_\alpha$ tiene una subsucesión convergente en $\langle G_{\alpha+1}, \tau_{\alpha+1}\rangle)$;

(b) $(\forall \alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega)\,(N$ no tiene p-límite en $G_\alpha)$.

Es importante notar que $(\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{c} \setminus \omega)\,(\alpha < \beta \implies \tau_\alpha = \tau_\beta \restriction G_\alpha)$ (ver Teorema 8). Para una construcción así, tendremos que comenzar con una familia $\{\phi_j^\omega : j \in J_\omega\} \subset 2^{G_\omega}$ y para cada $\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega$ ir extendiendo cada ϕ_j^α a una familia $\{\phi_i^{\alpha+1} : i \in I_j\}$, es decir, $(\forall i \in I_j)\,(\phi_i^{\alpha+1} \restriction G_\alpha = \phi_j^\alpha)$ y así obtener los homomorfismos $\{\phi_j^{\alpha+1} : j \in J_{\alpha+1}\}$ para $G_{\alpha+1}$. En el caso de que $\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega$ sea un ordinal límite, se tendría que $(\forall \gamma < \alpha)\,(\{\phi_j^\alpha \restriction G_\gamma : j \in J_\alpha\} = \{\phi_j^\gamma : j \in J_\gamma\})$.

Para este tipo de construcciones (ver Teorema 8), usualmente se logra la compacidad secuencial de manera recursiva. Tratando de hacer algo similar, dada una sucesión no trivial $M_\alpha = \langle x_n : n \in \omega\rangle \subset G_\alpha$ sin subsucesiones convergentes, se consigue un conjunto $Y \in [M_\alpha]^\omega$ discreto que se hará converger a un nuevo punto en el siguiente espacio de la recursión. La manera más sencilla de que siempre exista este subespacio discreto es asegurando que para cada $\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega$ se tenga que el espacio G_α sea primero numerable. Esto resulta bastante restrictivo ya que el teorema de G. Birkhoff y S. Kakutani ([3, 11]), nos dice que todo grupo topológico Hausdorff es metrizable si y sólo si es primero numerable. Además, todo espacio metrizable es normal por lo que se tiene que:

Corolario 10. *Sea $\langle G, \cdot\rangle$ un grupo topológico primero numerable. Entonces, G tiene la propiedad* D.

Note que en la construcción de Ostaszewski se requirió que cada subespacio en la recursión tuviera la propiedad D. El corolario implica que, en el caso de grupos topológicos, el resultado análogo al Teorema 5 es cierto sin la necesidad de suponer $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Sin embargo, todo espacio métrico secuencialmente compacto es compacto y por lo tanto p-compacto para cada $p \in \omega^*$ (ver [2]). Esto nos indica que un grupo topológico secuencialmente compacto no p-compacto no puede ser primero numerable. Por esta razón, a diferencia de la construcción de Ostaszewski, ninguno de los subespacios primero numerable G_α puede ser abierto en G. Cabe entonces preguntarse si existe una propiedad adecuada de grupos topológicos que sea más débil que ser primero numerable y que garantice que todo subconjunto numerable que no contenga sucesiones convergentes tenga un subespacio infinito discreto.

Procedemos entonces asegurándonos de que cada G_α sea primero numerable, es decir, que para cada $\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega$ el conjunto $\{\phi_j^\alpha : j \in J\}$ es numerable. Analicemos el primer paso de la construcción, es decir, supongamos que ya tenemos una topología Hausdorff para G_ω definida por

$\{\phi_n^\omega : n \in \omega\} \subset 2^{G_\omega}$ con la cual N no tiene p-límite. Si $M_\omega \in [G_\omega]^\omega$ no tiene subsucesiones convergentes entonces existe $Y \in [M_\alpha]^\omega$ discreto. Necesitamos lograr que algún $\tilde{Y} \in [Y]^\omega$ converja en $\langle G_{\omega+1}, \tau_{\omega+1}\rangle$, digamos a $\{\omega\}$. Note que para lograr esto sin alterar la topología de G_ω se requiere que $(\forall n \in \omega)\,(\phi_n^\omega \restriction \tilde{Y}$ es constante salvo por una cantidad finita de elementos$)$, ya que los homomorfismos con esta topología son continuos. Esto lo podemos garantizar de la siguiente manera. Para cada $n \in \omega$, elegimos recursivamente $Y_n \in [Y]^\omega$ de tal manera que para cada $n \in \omega$

$$Y_{n+1} \subset Y_n \wedge \phi_n^\omega \restriction Y_n \text{ es la función constante con valor } b_n.$$

Ahora, hacemos que $\tilde{Y} \in [Y]^\omega$ sea una pseudointersección de $\{Y_n : n \in \omega\}$.

Para lograr que $\tilde{Y}$ converja a $\{\omega\}$ en $G_{\omega+1}$, simplemente extendemos cada ϕ_n^ω a $\phi_n^{\omega+1} : G_{\omega+1} \to 2$ de tal manera que $\phi_n^{\omega+1} \restriction G_\omega = \phi_n^\omega$ y $\phi_n^{\omega+1}(\{\omega\}) = b_n$. En efecto, si $\tilde{Y}$ no converge a $\{\omega\}$, se tiene que $\tilde{Y} + \{\omega\}$ no converge a $0_G = \emptyset$. Entonces, $(\exists F \in [\omega]^{<\omega})\,((\tilde{Y} + \{\omega\}) \setminus \bigcap_{n\in F} \ker \phi_n^{\omega+1}$ es infinito$)$ por lo que $(\exists n \in \omega)\,((\tilde{Y} + \{\omega\}) \setminus \ker \phi_n^{\omega+1}$ es infinito$)$. Pero esto último implica que $\{y \in \tilde{Y} : \phi_n^{\omega+1}(y) \neq \phi_n^{\omega+1}(\{\omega\})\}$ es infinito; Una contradicción.

Las dificultades comienzan al tratar de asegurar que ninguno de los elementos nuevos, es decir aquellos en $G_{\omega+1} \setminus G_\omega$, sea p-límite de N en $G_{\omega+1}$. Como cada elemento de nuevo tiene la forma $g + \{\omega\}$ con $g \in G_\omega$, definimos $n_g = (\max g) + 1$ y notamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} g + \{\omega\} \text{ no es } p\text{-límite de } N &\Leftrightarrow \emptyset \text{ no es } p\text{-límite de } N + g + \{\omega\} \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \omega)\,(\{m \in \omega : \phi_n^{\omega+1}(g + \{\omega\} + \{m\}) = 0\} \notin p) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \omega)\,(\{m \in \omega \setminus n_g : \phi_n^{\omega+1}(g) + \phi_n^{\omega+1}(\{\omega\}) + \phi_n^{\omega+1}(\{m\}) = 0\} \notin p) \end{aligned}$$

El problema recae en que el valor de $\phi_n^{\omega+1}(\{\omega\})$ depende únicamente de la elección de $\tilde{Y}$. Queda entonces la cuestión de que si existe una familia de homomorfismos $\{\phi_n^\omega : n \in \omega\}$ que garantice que para cualquier $Y \in [G_\omega]^\omega$ discreto exista $\tilde{Y} \in [Y]^\omega$ en el cual todos los ϕ_n sean eventualmente constantes y que para cualquier $g \in G_\omega$ se cumpla la última propiedad de la serie de equivalencias antes expuestas. Una posible manera es hacer que haya "suficientes"homomorfismos para que siempre exista $\tilde{Y}$ como antes y que exista $n \in \omega$ tal que $\{m \in \omega : \phi_n^\omega(\{m\}) = 0\} \notin p$ y $\phi_n^\omega(g) = b_n = 0$. Sin embargo es algo que no pudimos conseguir.

Referencias

[1] Alexander Arhangel'skii y Mikhail Tkachenko. *Topological Groups and Related Structures*. Ene. de 2008. ISBN: 978-94-91216-35-0. DOI: `10.2991/978-94-91216-35-0`.

[2] Allen Bernstein. "A new kind of compactness for topological spaces". eng. *Fundamenta Mathematicae* 66.2 (1970), págs. 185-193.

[3] Garrett Birkhoff. "A note on topological groups". eng. *Compositio Mathematica* 3 (1936), págs. 427-430.

[4] Andreas Blass. "Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum". *Handbook of Set Theory*. Ed. por Matthew Foreman y Akihiro Kanamori. Dordrecht: Springer Netherlands, 2010, págs. 395-489. DOI: `10.1007/978-1-4020-5764-9_7`.

[5] W. Comfort y Kenneth Ross. "Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups". *Pacific J. Math* 16 (mar. de 1966). DOI: `10.2140/pjm.1966.16.483`.

[6] W.W. Comfort. "Topological Groups". *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Ed. por Kenneth Kunen y Jerry E. Vaughan. Amsterdam: North-Holland, 1984, págs. 1143-1263. ISBN: 978-0-444-86580-9. DOI: `https://doi.org/10.1016/B978-0-444-86580-9.50027-6`.

[7] Miguel Gaspar-Arreola, Fernando Hernández-Hernández y Michael Hrušák. "Scattered spaces from weak diamonds". *Israel Journal of Mathematics* 225 (abr. de 2018). DOI: `10.1007/s11856-018-1669-1`.

[8] F.H. Hernández. *Curso de topología: un enfoque conjuntista*. Aportaciones matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2021. ISBN: 9786073048767.

[9] F.H. Hernández. *Teoría de conjuntos: una introducción*. Aportaciones matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2003. ISBN: 9789703213924.

[10] M. Hrusak et al. "Countably compact groups without non-trivial convergent sequences". *Trans. Amer. Math. Soc.* 374.2 (2020), págs. 1277-1296.

[11] Shizuo Kakutani. "Über die Metrisation der topologischen Gruppen". *Proceedings of the Imperial Academy* 12.4 (1936), págs. 82-84. DOI: `10.3792/pia/1195580206`.

[12] R.L. Moore. *Foundations of Point Set Theory*. American Mathematical Society. Colloquium publications v. 13, pt. 1. American Mathematical Society, 1932. ISBN: 9780821810132.

[13] J. Novák. “On the Cartesian product of two compact spaces”. eng. *Fundamenta Mathematicae* 40.1 (1953), págs. 106-112.

[14] P. Nyikos, L. Soukup y B. Veličković. “Hereditary normality of γN-spaces”. *Topology and its Applications* 65.1 (1995), págs. 9-19. ISSN: 0166-8641. DOI: `https://doi.org/10.1016/0166-8641(94)00004-M`.

[15] Peter J. Nyikos y Jerry E. Vaughan. “The Scarborough-Stone problem for Hausdorff spaces”. *Topology and its Applications* 44.1 (1992), págs. 309-316. ISSN: 0166-8641. DOI: `https://doi.org/10.1016/0166-8641(92)90103-7`.

[16] A. J. Ostaszewski. “On Countably Compact, Perfectly Normal Spaces”. *J. London Math. Soc.* s2-14.3 (1976), págs. 505-516. DOI: `https://doi.org/10.1112/jlms/s2-14.3.505`.

[17] M. Rajagopalan y R. Grant Woods. “Products of Sequentially Compact Spaces and The V-Process”. *Transactions of the American Mathematical Society* 232 (1977), págs. 245-253. ISSN: 00029947.

[18] C. T. Scarborough y A. H. Stone. “Products of nearly compact spaces”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 124 (1966), págs. 131-147. DOI: `https://doi.org/10.1090/tran/8222`.

[19] Hidetaka Terasaka. “On Cartesian product of compact spaces”. *Osaka Mathematical Journal* 4 (1952), págs. 11-15.

[20] A. Tychonoff. “Über die topologische Erweiterung von Räumen”. *Mathematische Annalen* 102 (1930), págs. 544-561.

[21] Eric K. van Douwen. “The Integers and Topology”. *Handbook of Set-Theoretic Topology.* Ed. por Kenneth KUNEN y Jerry E. VAUGHAN. Amsterdam: North-Holland, 1984, págs. 111-167. ISBN: 978-0-444-86580-9. DOI: `https://doi.org/10.1016/B978-0-444-86580-9.50006-9`.

[22] J. E. Vaughan. “Products of Perfectly Normal, Sequentially Compact Spaces”. *Journal of the London Mathematical Society* s2-14.3 (1976), págs. 517-520. DOI: `https://doi.org/10.1112/jlms/s2-14.3.517`.

[23] J. E. Vaughan. “Small uncountable cardinals and topology”. *Open Problems in Topology.* Ed. por Jan van Mill y G. M. Reed. 1990, págs. 195-218.

[24] Jerry E. Vaughan. “The Scarborough-Stone problem”. *Open Problems in Topology II.* Ed. por Elliott Pearl. 2007, págs. 249-256.

NOMBRE DEL TRABAJO

Producto de Espacios Topológicos Secuencialmente Compactos

AUTOR

David Medina González

RECUENTO DE PALABRAS

7225 Words

RECUENTO DE CARACTERES

33692 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

23 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

832.0KB

FECHA DE ENTREGA

Aug 23, 2024 7:43 AM CST

FECHA DEL INFORME

Aug 23, 2024 7:43 AM CST

8% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 8% Base de datos de Internet
- 7% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de Crossref
- Base de datos de contenido publicado de Crossref
- 0% Base de datos de trabajos entregados