



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**ESTUDIO TEÓRICO-NUMÉRICO DE UNA GUÍA DE ONDAS DE
CRISTAL FONÓNICO EN 3D**

TESIS

Para obtener el grado de

DOCTORA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

Presenta:

MARÍA CLAUDIA GUILLÉN GALLEGOS

ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica
HÉCTOR IGOR PÉREZ AGUILAR

Morelia, Michoacán, Agosto de 2019.

RESUMEN

El presente trabajo centra su interés en el análisis de la respuesta acústica de estructuras cristalinas, como son las guías de onda de cristal fonónico. Los cristales fonónicos son nuevos materiales periódicos sintéticos utilizados en el control y la manipulación de la propagación de ondas elásticas y/o acústicas. Desarrollamos y aplicamos métodos de elementos de frontera en problemas con geometrías confinantes, verificando que los resultados fueran consistentes con su respectiva contraparte óptica. Estas técnicas numéricas se les conocen como el Método Integral de Superficie Numérica (NSIM) y el Método de la Función de Green Periódica. Un detalle de interés, es la aparición de bandas prohibidas (bandgaps) de la estructura propuesta para diferentes valores de los radios de las inclusiones esféricas y la obtención de bandgaps o modos discretos para un rango de frecuencias determinado, cuando la fracción de llenado es grande.

Referente a la respuesta acústica del mismo sistema pero truncado, se analizó en primera instancia el esparcimiento de una onda plana por una esfera de radio unitario de superficies suave y dura, respectivamente. Los diagramas de amplitud de presión, de los patrones de esparcimiento y de intensidad muestran que la dispersión es dominante en los casos estudiados.

Palabras Clave: Bandas prohibidas, Esparcimiento, Respuesta acústica, Método Integral de Superficie Numérica, Método de la Función de Green Periódica.

ABSTRACT

The present work focuses its interest on the analysis of the acoustic response of crystalline structures, such as phononic crystal waveguides. Phononic crystals are new synthetic periodic materials used in the control and manipulation of the propagation of elastic and / or acoustic waves. We developed and applied boundary element methods in problems with confining geometries, verifying that the results were consistent with their respective optical counterparts. These numerical techniques are known as the Numerical Surface Integral Method (NSIM) and the Periodic Green Function Method. A detail of interest is the appearance of bandgaps of the proposed structure for different values of the radii of the spherical inclusions and the obtaining of bandgaps or discrete modes for a certain frequency range, when the filling fraction is large.

Concerning the acoustic response of the same system but truncated, the scattering of a plane wave was analyzed in the first instance by a sphere of unitary radius of soft and hard surfaces, respectively. The magnitude of diagrams of pressure amplitude, scattering patterns and intensity show that dispersion is dominant in the cases studied.

Keywords: (Bandgaps, Scattering, Acoustic response, Numerical Surface Integral Method, Periodic Green Function Method).

Dedicatoria

Fuiste el mejor tiempo perdido, un sueño que terminó antes de comenzar.

Desvelos llenos de insomnio... Un veneno, tan vílmente endulzado.

Un grito desesperado que poco a poco, se transformó en silencio.

Dolor que sin piedad... Se llevó, una gran parte de mí.

La piedra con la que tropecé, un sinfín de ocasiones... Por absoluta, voluntad propia.

Ideas persistentes que en mi mente, me atormentaron como sublime y cruel castigo.

Me mentía a mí misma, cada instante... Convirtiéndote, en innegable perdición.

Sólo un adiós, en defensa propia... Luz muriendo, en el abismo del olvido.

Esperanza que murió antes de llegar, camino destinado a terminar.

Creí que en ti, lo tenía todo... Hoy, en mi vida, ya no eres nada.

Agradecimientos

A todos los que han formado parte de mi vida, por un breve instante o de manera temporal... Pues me han enseñado la nobleza, la bondad y el amor verdadero.

Porque cada uno de ustedes ha dejado una huella profunda en mí... Estando siempre a mi lado, en un destino hasta ahora incierto.

Simplemente quiero expresarles, el más profundo agradecimiento... Por ayudarme a descubrir toda la sabiduría oculta, dentro del alma humana.

Reconocimientos

El camino de mi vida se ha cruzado con el de innumerables personas, quienes innegablemente, me ayudaron a concretar mis estudios de posgrado. Sin duda, resultaría muy extensa la mención detallada, de cada una de ellas. Por ende, sólo reseñaré en forma concisa a todas aquéllas que siguieron de cerca, la realización de este trabajo, destacándose por sus valiosas contribuciones.

A los Drs. Héctor Pérez y Alberto Mendoza... Guía y asesoría invaluable.

A los Drs. Yesenia Arredondo, Luis Villaseñor, Fernando Iguazú y Francisco Domínguez... Oportuno seguimiento de la investigación.

A Hugo... Apoyo incondicional.

A Herme, Alicia y Brenda... Divertida complicidad.

A Yuritzi y Tania... Grata compañía y solidaridad.

A Thalía, Adriana e Irma... Una sincera amistad.

A Marce, Cathy y Ella... Pláticas, sin igual.

Al M.C. Gabriel Arroyo... Por alentarme, a nunca rendirme.

A mis compañeros y colegas del posgrado... Ambiente ameno de colaboración.

A mi familia... Infinita confianza.

A mi futuro esposo... Amor irremplazable.

A Mónica, Chayo, Yeni, Marisol, Gaby... Presencia incomparable.

A los profesores del doctorado... Superación profesional.

Al personal de la facultad de fismat... Confortable estadía, a lo largo de estos años.

Al CONACyT... Recurso económico de una beca.

Contenido

	Página
Resumen	i
Abstract	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Reconocimientos	v
Contenido	vi
Lista de Figuras	viii
I. INTRODUCCIÓN	1
II. PROPIEDADES GENERALES	9
II.1. Consideraciones preliminares	9
III. FRECUENCIAS DE VIBRACIÓN EN CAVIDADES	27
III.1. Descripción del Método Integral de Superficie Numérica	27
III.1.1. Ecuación de Helmholtz	29
III.1.2. Función de Green para la ecuación de Helmholtz	31
III.1.3. Representación integral de la ecuación de Helmholtz	31
III.1.4. Ecuaciones integrales: problemas exteriores e interiores	33
III.1.5. Discretización de las ecuaciones integrales	35
III.1.6. Modos de vibración numéricos en cavidades	40
III.1.7. Modos de vibración analíticos en cavidades	41
III.1.8. Modos de vibración en cavidades en 2D y 3D	43
III.1.9. Cavidades en 2D	44
III.1.10. Cavidades en 3D	49
IV. ESTRUCTURAS DE BANDAS EN GUÍAS DE ONDAS FONÓNICAS	56
IV.1. Descripción del NSIM para calcular estructuras de bandas fonónicas	56
IV.2. Descripción analítica para el cálculo de estructuras de bandas fonónicas	62
IV.3. Estructuras de Bandas Fonónicas: NSIM	63
IV.3.1. Estructuras de bandas de una PnCW sin inclusiones	63
IV.3.2. Estructuras de bandas de una PnCW con inclusiones	66
IV.4. Descripción del Método de la Función de Green Periódica	68
IV.5. Estructuras de Bandas Fonónicas: PGFM	73

Contenido (continuación)

	Página
IV.5.1. Estructuras de bandas de una PnCW sin inclusiones	73
IV.5.2. Estructuras de bandas de una PnCW con inclusiones	75
V. RESPUESTA ACÚSTICA DE ESFERAS SUAVES Y DURAS	79
V.1. Formulación del problema	79
V.2. Esparcimiento de una esfera acústica: modelo teórico	83
V.3. Esparcimiento de una esfera acústica: modelo numérico	87
V.3.1. Campo cercano y campo lejano: condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann	89
V.4. Resultados	91
V.4.1. Amplitud de presión de una esfera acústica suave y dura . . .	92
V.4.2. Patrones de esparcimiento de una esfera acústica suave y dura	96
V.4.3. Intensidad de esparcimiento de una esfera acústica rígida . .	102
V.5. Respuesta acústica de una esfera suave y dura	103
VI. CONCLUSIONES	108
REFERENCIAS	112
A. Ecuación de estado	115
B. Ecuación de continuidad	117
C. Ecuación de fuerza	119

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Contraparte acústica de la fotónica y los dispositivos fotónicos (Ibiza, 2013).	11
2	Rango de frecuencias del espectro sónico (Liu, 2000).	12
3	PnC de tamaño milimétrico (Miyashita, 2005).	12
4	Sistemas periódicos en 1, 2 y 3 dimensiones (Penec, 2004).	13
5	Sistema de agujeros de aire en una oblea de silicio (Gupta, 2014).	14
6	(A) Tipos de configuraciones bidimensionales para dispersores cilíndricos, distribuidos con un parámetro de red a . (B) Cuadrada, (C) Triangular (Ibiza, 2013).	14
7	Estructura de bandas de una red cuadrada de cilindros rígidos de radio r , un parámetro de red a , y una fracción de llenado $f \simeq 64.8\%$ (Sliwa, 2005).	15
8	Corte transversal sobre el plano de periodicidad definiendo la obtención de una celda unitaria (Ibiza, 2013).	16
9	Tabla comparativa de parámetros (Kress, 2001).	17
10	Nivel de presión sonora (dB) a 280 kHz considerando un cristal de sonido compuesto de 15 columnas de dispersores de acero (Ibiza, 2013).	19
11	Escultura de Eusebio Sempere (1923-1985) (Yang, 2004).	20
12	Diseño experimental de un 3DPnC (Lucklum, 2014).	21
13	Transductor ultrasónico a 550 KHz (Romero, 2012).	22
14	Estructuras de bandas de un cristal 2D, con una red cuadrada de dispersores cilíndricos rígidos, $a = 0.15$ m, y (A) $r = 0.0001$ m, (B) $r = 0.03$ m y (C) $r = 0.07$ m (Ibiza, 2013).	23
15	Estructura de bandas del cristal de sonido (red cuadrada, dispersores de $r = 1.2$ mm y parámetro de red $a = 2.6$ mm). (Bringuier, 2011).	24
16	(a) Propagación acústica de una frecuencia no recíproca en una cadena granular (Fitzgerald, 2018). (b) Dinámica no lineal e ingeniería de materiales (Buczynski, 2004).	25

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página
17 (a) Propagación acústica de una frecuencia no recíproca en una cadena granular (Fitzgerald, 2018). (b) Dinámica no lineal e ingeniería de materiales (Buczynski, 2004).	26
18 Descripción gráfica de la 3DPnCW formada por cuatro superficies acústicas planas paralelas y un arreglo de inclusiones esféricas de radios r_s periódicamente en la dirección x	28
19 Sistema curvilíneo en una geometría de dos regiones (interior y exterior). La posición del observador está indicada por \mathbf{r} y \mathbf{r}' denota la posición de la fuente. Dicho vector se extiende bajo integración por la superficie.	33
20 Región de integración involucrada en las Ecs. (35) y (37).	36
21 Vectores curvilíneos base y sus primeras derivadas sobre la superficie paramétrica propuesta.	38
22 (a) Cavidad cúbica de dimensión ($D_x = D_y = D_z = D$), cuya arista está situada en el origen del sistema cartesiano de coordenadas. (b) Cavidad esférica de radio r_s . Ambos parámetros (D y r_s) son tomados como factores de normalización, en estos casos particulares.	41
23 Perfiles representativos para el caso de (a) una cavidad cuadrada en 2D, cuya arista es de dimensión π . (c) una cavidad rectangular de lados $D_x = \pi$, $D_y = 4\pi$. (b) y (d) Modos normales presentes en el rango de las frecuencias de vibración correspondientes a los casos (a) y (c), respectivamente.	44
24 Perfiles representativos en 2D para el caso de una (a) cavidad circular, cuyo radio es $r_c = \pi$ y (c) perfil anterior con inclusión circular $r_{c_{int}} = 0.2\pi$. (b) y (d) Modos normales de vibración correspondientes a los casos (a) y (c).	46
25 (a) Perfil en 2D de una cavidad cuadrada cuya arista D es de dimensión π , con una inclusión circular de radio $r_c = 0.2\pi$. (b) Modos normales asociados para las frecuencias de vibración correspondientes.	48
26 (a) Perfil en 3D de una estructura cúbica cuya arista D es de dimensión π . (b) Modos normales de vibración para la frecuencia reducida $\bar{\omega}$	49
27 (a) Perfil en 3D de una estructura cúbica de dimensión π , conteniendo una inclusión cúbica adicional de arista 0.2π . (b) Modos normales de vibración para la frecuencia reducida $\bar{\omega}$	50

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página
28 (a) Perfil en 3D de una estructura esférica de radio π . (b) Modos normales de vibración para la frecuencia reducida $\bar{\omega}$	51
29 (a) Perfil en 3D de una esfera de radio $r_s = \pi$ con inclusión esférica, $r_{s_{int}} = 0.2\pi$. (b) Modos normales de vibración para la frecuencia reducida $\bar{\omega}$	53
30 (a) Perfil en 3D de una estructura cúbica de arista π con inclusión esférica, $r_s = 0.2\pi$. (b) Modos normales de vibración para la frecuencia reducida $\bar{\omega}$	54
31 Descripción gráfica de una guía de ondas en 3D, periódica en la dirección x y formada por cuatro superficies acústicas planas paralelas a la dirección longitudinal de la PnCW. Las superficies planas S_j ($j = 1, 2, 3, 4$) representan los lados de la celda cúbica unitaria vacía.	57
32 Descripción gráfica de la 3DPnCW formada por cuatro superficies acústicas planas paralelas a la dirección longitudinal y un arreglo de inclusiones esféricas de radios r_s periódicamente en la dirección x . Las superficies planas S_j ($j = 1, 2, 3, 4$) representan los lados de la celda cúbica unitaria, y S_0 la superficie de la esfera.	60
33 Estructuras de bandas de una guía de ondas vacía en 3D con superficies suaves, bajo la condición de frontera de Dirichlet. La distancia entre las paredes es $b = 2$. Modelos analíticos (círculos azules) y numéricos (puntos rojos) son comparados: (a) NSIM-DET, (b) NSIM-SVD.	64
34 Estructuras de bandas de una guía de ondas vacía en (a) 2D y (b) 3D con superficies suaves, bajo la condición de frontera de Dirichlet. La distancia entre las paredes es $b = 2$. Modelos analíticos (círculos azules) y numéricos (puntos rojos) son comparados.	65
35 Celda unitaria de una guía de ondas rectangular bidimensional conteniendo un arreglo periódico unidimensional de inclusiones circulares cilíndricas con radio (a) $r_c = 0.112099$, (b) $r_c = 1.227992$, (c) $r_c = 1.622709$. (d)-(f) Diagramas de bandas fonónicas de la PnCW bidimensional usando nuestro método numérico (2DNSIM), bajo condición de frontera de Dirichlet. La distancia entre las superficies planas de la guía de onda rectangular es $b = 2\pi$	66

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
36	Celda unitaria de una guía de ondas rectangular tridimensional que contiene un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas con radios (a) $r_s = 0.083995$, (b) $r_s = 1.286778$, (c) $r_s = 1.525618$. (d)-(f) Diagramas de bandas fonónicas, de la PnCW tridimensional usando nuestro método numérico (3DNSIM), bajo condición de frontera de Dirichlet. La distancia entre las superficies planas de la guía de onda rectangular en 3D es $b = 2\pi$	67
37	Descripción gráfica de la 3DPnCW formada por cuatro superficies acústicas planas paralelas a la dirección longitudinal y un arreglo de inclusiones esféricas de radios r_s periódicamente en la dirección x . Las superficies planas S_{jl} ($j = 1, 2, 3, 4$) representan los lados de la l -ésima celda cúbica, y S_{5l} la superficie de la esfera.	69
38	Estructuras de bandas de una guía de ondas vacía en (a) 2D y (b) 3D con superficies suaves, bajo la condición de frontera de Dirichlet. La distancia entre las paredes es $b = 2$. Modelos analíticos (círculos azules) y numéricos (puntos rojos) son comparados.	74
39	Estructuras de bandas de una guía de ondas vacía en (a) 2D y (b) 3D con superficies rígidas, bajo la condición de frontera de Neumann. La distancia entre las paredes es $b = 2$. Modelos analíticos (cruces azules) y numéricos (puntos rojos) son comparados.	75
40	Celda unitaria de una guía de ondas rectangular bidimensional conteniendo un arreglo periódico unidimensional de inclusiones circulares cilíndricas con radio (a) $r_c = 0.112099$, (b) $r_c = 0.868321$, (c) $r_c = 1.227992$, (d) $r_c = 1.622709$. Diagramas de bandas fonónicas, de la PnCW bidimensional usando nuestro método numérico (2DPGFM), bajo condiciones de frontera de (e)-(h) Dirichlet y de (i)-(l) Neumann. La distancia entre las superficies planas de la guía de onda rectangular es $b = 2\pi$	76
41	Celda unitaria de una guía de ondas rectangular tridimensional que contiene un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas con radios (a) $r_s = 0.083995$, (b) $r_s = 0.892234$, (c) $r_s = 1.286778$, (d) $r_s = 1.525618$. Diagramas de bandas fonónicas, de la PnCW tridimensional usando nuestro método numérico (3DPGFM), bajo condiciones de frontera de (e)-(h) Dirichlet y de (i)-(l) Neumann. La distancia entre las superficies planas de la guía de onda rectangular en 3D es $b = 2\pi$	77

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
42	Diagrama de contorno de la presión de sonido, calculada sobre la superficie del campo con un radio exterior de $10r_s$, siendo r_s el radio unitario de la esfera (Ginsberg, 2018).	81
43	Diagrama de contorno de la derivada de la presión superficial del sonido, determinado bajo los mismos parámetros anteriores (Ginsberg, 2018).	82
44	Esquema general del esparcimiento acústico sobre la dirección perpendicular a la superficie de un dispersor esférico, con una impedancia real.	82
45	Esparcimiento acústico de una onda plana incidente por una esfera en coordenadas polares. Sea r , la distancia para un punto arbitrario y medido desde el centro del objeto de radio r_s ; donde θ_s es el ángulo de esparcimiento respecto al eje de propagación acústica en el plano yz . . .	84
46	Descripción esquemática de la geometría del campo lejano sobre una superficie esférica, tal que θ_s representa el ángulo de dispersión observable.	88
47	Distribución angular de las amplitudes de presión para una esfera suave de radio unitario, como función del ángulo de esparcimiento θ_s y para $ka = 1$, mediante los métodos analíticos y numéricos: (a) FMM (Coustyx), (b) NSIM (Guel <i>et al.</i> , 2016).	93
48	Distribución angular de las amplitudes de presión para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 2$, mediante los métodos analíticos y numéricos: (a) FMM (Coustyx), (b) NSIM (Guel <i>et al.</i> , 2016).	94
49	Distribución angular de las amplitudes de presión para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 3$. Se validan los métodos analíticos y numéricos: (a) CMM (Lee, 2015), (b) NSIM (Guel <i>et al.</i> , 2016).	96
50	Patrones de esparcimiento de campo lejano para una esfera suave de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 1.5$, mediante métodos: analítico (a) Series de Fourier (Kress, 2001) y numérico (b) NSIM (Guel <i>et al.</i> , 2016).	97
51	Patrones de esparcimiento de campo lejano para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 1$, mediante métodos analítico (a) HIE (Partridge, 1993) y numéricos: (b) MMC (Lee, 2015) y (c) NSIM (Guel <i>et al.</i> , 2016).	98

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
52	Patrones de esparcimiento de campo lejano para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 0.2$, mediante métodos analítico: (a) KHIT (Ginsberg, 2018), y numérico: (b) NSIM (Guel <i>et al.</i> , 2016).	99
53	Patrones de esparcimiento de campo lejano para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 2, 4$ y 8 , mediante métodos analítico ((a)-(c)) HIE (Partridge, 1993) y numérico ((d)-(f)) NSIM (Guel <i>et al.</i> , 2016).	100
54	Patrones de esparcimiento de campo lejano para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 1, 3$ y 6 , mediante métodos numéricos: (a) CMM (Lee, 2015), ((b) - (d)) NSIM (Guel <i>et al.</i> , 2016).	101
55	Diagrama polar para la intensidad de esparcimiento analítico (Morse, 1948)-numérica (Guel <i>et al.</i> , 2016), como función de θ_s y en la región del campo lejano, para una esfera dura de radio unitario con el valor de $ka = 3$.	102
56	Respuesta acústica por un esparcidor esférico unitario. Reflectancia y Transmitancia para una superficie de tipo suave ((a) y (c)) y dura ((b) y (d)), respectivamente. Modelo analítico (líneas rojas) y NSIM (círculos azules) son comparados.	106
57	(a) Perfil de una esfera acústica suave unitaria. (b) Reflectancia, (c) Transmitancia y (d) Balance de energía ($R + T$) como función de la frecuencia reducida $\bar{\omega}$.	107
58	(a) Perfil de una esfera acústica dura unitaria. (b) Reflectancia, (c) Transmitancia y (d) Balance de energía ($R + T$) como función de la frecuencia reducida $\bar{\omega}$.	107
59	Flujo de masa en la dirección x por un elemento de volumen dV fijo.	117
60	Pequeño cubo de aire, parte de un medio gaseoso en el que la presión sonora aumenta en la dirección x . El tamaño de los puntos indica la magnitud de p , en cada lugar.	120

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

Las ciencias e ingenierías han sido parte fundamental en el desarrollo industrial y tecnológico. En años recientes, el advenimiento de la economía global obliga a preparar profesionistas para trabajar en un ambiente competitivo sin fronteras, donde se desarrollan innovaciones cada vez más espectaculares. Sin olvidar que la mayor parte del avance científico que se genera, busca girar en función de satisfacer eficazmente alguna necesidad presente en nuestra vida cotidiana.

Entre tantas líneas de generación del conocimiento, las de las estructuras cristalinas periódicas tienen un empuje considerable actualmente en países desarrollados, por la tecnología tan innovadora que resulta de su estudio. Por consiguiente, la comunidad científica ha incursionado en la tarea de desarrollar nuevos enfoques basados en esta perspectiva particular, en un intento por consolidar con éxito una aplicación esencialmente fonónica.

El esparcimiento de ondas que interaccionan con objetos compuestos de materiales que tienen ciertas propiedades físicas engloban una gran cantidad de fenómenos en electromagnetismo, óptica, acústica, mecánica cuántica, etc. La idea de una estructura

periódica de un material o cristal fonónico (PnC¹) (en una, dos o tres dimensiones), es de mucha importancia en acústica.

El concepto de PnC es demasiado reciente para que haya causado un impacto significativo en la vida cotidiana. De hecho, podríamos decir que su nacimiento se remonta a principios de la década de 1990, con la publicación de los trabajos de Sigalas y Economou (Ibiza, 2013) en la Universidad de Heraklion, en Creta (Grecia), y por Kushwaha, Halevi, Dobrzynski y Djafari-Rouhani en la Universidad de Lille en Francia. Cabe mencionar que, en su momento, se propusieron las siguientes ideas (aunque de manera puramente especulativa).

La primera aplicación sugerida por Kushwaha y sus colegas fue el aislamiento acústico. Por la analogía con las regiones que aparecen en los cristales semiconductores, se hacen presentes rangos de frecuencias en los que las ondas no pueden propagarse, denominados bandas prohibidas (bandgaps). Para todas las frecuencias contenidas en un bandgap completo, un PnC se comporta como un escudo acústico, reflejando todas las ondas incidentes. Por ende, es perfectamente posible concebir barreras insonorizadas para autopistas, de acuerdo con este principio. De ahí que, las periodicidades involucradas debían ser del orden del metro, y el reto de diseño equivalía a la reducción de esta dimensión, mientras se aseguraba que el rango de frecuencias del bandgap permanecía suficientemente bajo; considerando que el oído humano es sensible a las frecuencias entre 20 y 20,000 Hz, típicamente.

Una segunda aplicación de los PnCs, tal vez menos intuitiva, es la realización de rompeolas. De hecho, las olas sobre los mares y océanos pueden ser entendidas como ondas que se propagan sobre la superficie del agua. Cuando las olas golpean un obstáculo, son parcialmente dispersadas en todas direcciones. Las interferencias que resultan de

¹Por sus siglas en inglés, Phononic Crystal.

la dispersión múltiple en una red periódica de obstáculos podrían, por lo tanto, dar lugar a una reducción importante de la amplitud de las olas que alcanzan la orilla. Hu y Chan (Ibiza, 2013), de la Technology University de Hong-Kong, propusieron en 2005 usar estas estructuras para focalizar las olas hacia una planta con el fin de convertir la energía mecánica en energía eléctrica.

Por otro lado, las guías de onda de cristal fonónico (PnCWs²), así como PnCs y cristales sónicos, han generado varias décadas después un creciente interés científico como medio para controlar la dispersión de ondas en aplicaciones tecnológicas diversas (Romero, 2012). Algunos ejemplos de actualidad son:

a) Diodos sónicos. Se ha fabricado un PnC unidimensional de 1 mm de espesor, que se comporta como un diodo para ultrasonidos (megahercios) (Yeh, 2013).

b) Capas de camuflaje (o “invisibilidad”) acústicas. Existen, tanto diseños bidimensionales para ultrasonidos, como tridimensionales para frecuencias audibles (aunque sólo para objetos de tamaño milimétrico) (Berkowitz, 2018; Porter *et al.*, 2015; Casadei, 2014; Gupta, 2014; Miyashita, 2005).

c) Dispositivos optoacústicos. En el desarrollo de prototipos, se acoplan fonones y fotones. De ahí que, una cavidad óptica también puede ser considerada acústica, siendo que un modo óptico localizado de forma espacial se puede acoplar a uno acústico, también localizado. Usando un material con una estructura periódica con un espaciado de 150 nm, ello permite localizar fotones de 500 THz y fonones de 20 GHz (Maldovan, 2011).

Junto con el desarrollo de tecnologías micro y nanoscópica, se pueden fabricar PnCs más pequeños utilizando procesos similares a los de la microelectrónica. Para periodicidades de unas pocas micras o menos, aparecen bandgaps en las frecuencias en los

²Por sus siglas en inglés, Phononic Crystal Waveguides.

pocos cientos de MHz hasta un rango de pocos GHz (exactamente dentro del campo de las comunicaciones inalámbricas). Por ende, las mayores expectativas de PnCs son referidas a su capacidad para guiar ondas acústicas altamente eficientes (sin pérdidas), mediante la remoción de dispersores a lo largo de la dirección de propagación.

Existe diversidad de trabajos publicados en torno a este tema, cuyo estudio se enfoca en estructuras para cristales fonónicos bidimensionales (2DPnC³) referidas a un plano transversal sobre un arreglo periódico de cilindros, cuya longitud se considera infinita (Gupta, 2014; Lucklum, 2014; Cicek, 2013; Ibiza, 2013; Yeh, 2013; Romero, 2012; Bringuier, 2011; Sz-Chin, 2011; Miyashita, 2005; Sliwa, 2005; Pennec, 2004; Khelif, 2003a,b). En cambio, para sistemas de cristales fonónicos tridimensionales (3DPnC⁴), características importantes como la estructura de resonancia por vibraciones, la refracción negativa y aislamiento del sonido son usados en aplicaciones como barreras sónicas, dispositivos de sonar bajo el agua, capas de protección contra golpes, evaluación no destructiva de sólidos, lentes acústicas, imagen médica ultrasónica y quirúrgica, entre otros; que han estimulado trabajos recientes para estudios prácticos en 3D (Berkowitz, 2018; Cui *et al.*, 2018; Fitzgerald, 2018; Guel *et al.*, 2016; Lee, 2015; Porter *et al.*, 2015; Vuylsteke, 2014; Turley, 2006; Yang, 2004; Kress, 2001; Liu, 2000; Partridge, 1993).

Siguiendo este punto de vista, las guías de ondas acústicas construidas en cristales artificiales es un tema que está vigente hoy en día, no sólo teórica sino también experimentalmente. Sobretudo en lo concerniente a estructuras bidimensionales, no sólo porque se construyen de forma relativamente más sencilla que los 3DPnCs, sino porque tienen propiedades útiles en la práctica (Miyashita, 2005). De ahí que, se tiene el potencial de impactar dramáticamente una variedad de escenarios, tales como la robótica, infraestructuras civiles y sistemas de defensa, entre otros (Casadei, 2014).

³Por sus siglas en inglés, Two-Dimensional Phononic Crystal.

⁴Por sus siglas en inglés, Three-Dimensional Phononic Crystal.

Hoy en día, un factor de interés radica en que los modelos matemáticos de procesos reales requieren de modo innegable el uso de la computadora, dado que las soluciones analíticas son escasas o inexistentes, en los casos de mayor interés. En dichas circunstancias, la solución numérica del modelo propuesto resulta imprescindible.

Dentro del marco teórico existente, varios métodos de cálculo teórico-numérico pudieran aplicarse para obtener la estructura de bandas, incluyéndose entre ellos: el método de expansión de ondas planas (PWE⁵), el cual es válido para estructuras periódicas de tamaño infinito y el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD⁶), aplicable a estructuras arbitrarias de tamaño finito (Miyashita, 2005). Asimismo, se contemplan el método de la matriz de transferencia (TMM⁷), la teoría de dispersión múltiple (MST⁸) y el método de elemento finito (FEM⁹)(Vuylsteke, 2014). Todos estos métodos tienen ventajas y desventajas muy particulares en función de la geometría del sistema que se pretende analizar, ofreciéndose diversas opciones en herramientas de ingeniería, diseño, análisis y simulación de cualquier problema físico. Ante la incertidumbre ya existente sobre qué modelo deberá elegirse finalmente, la respuesta indicada dependerá desde luego de la información específica que se desea obtener y por ende, predecir las consecuencias derivadas del arquetipo establecido.

En este sentido, considerando nuestro tema de interés, resulta por demás alentador la existencia de un precedente confiable en manos de un grupo de investigadores pertenecientes tanto a la FCFM-UMSNH, así como de otras instituciones que ya tienen certera experiencia en el tema, los cuales han desarrollado técnicas numéricas que les han permitido modelar anteriormente este tipo de sistemas y, más aún, innovar el es-

⁵Por sus siglas en inglés, Plane-Wave Expansion.

⁶Por sus siglas en inglés, Finite-Difference Time-Domain.

⁷Por sus siglas en inglés, Transfer Matrix Method.

⁸Por sus siglas en inglés, Multiple Scattering Theory.

⁹Por sus siglas en inglés, Finite Element Method.

tudio de PnCWs cuya periodicidad se presenta en la geometría y no en las propiedades del material. Estas técnicas que han sido desarrolladas para sistemas en 1D y 2D, se les conocen como el Método Integral de Superficie Numérica (NSIM¹⁰) y el Método de la Función de Green Periódica (PGFM¹¹).

Aunque en los últimos años han sido reportados avances teóricos de la propagación acústica a través de guías de onda, dichos estudios poseen referencias de apoyo que no son demasiado extensas. El objetivo central de esta tesis es realizar algunas aportaciones adicionales en la dirección de algunos tópicos sobresalientes, centrando nuestro interés en el análisis de la respuesta acústica de estructuras cristalinas, como son las PnCWs.

Nuestro tema de estudio consiste en sistemas formados por guías de ondas acústicas rectangulares en 3D, los cuales contienen a su vez, estructuras periódicas de inclusiones esféricas. Existen diversas contribuciones en la literatura referentes a métodos para estudiar PnCs, pero no para modelar PnCWs infinitas o truncadas. Desarrollamos y aplicamos métodos de elementos de frontera (BEMs¹²) en dicho problema con geometrías confinantes, donde se pueden considerar superficies de orden superior, objetos irregulares o rugosidades aleatorias. Por lo que, los resultados que hemos generado son novedosos, ya que el trabajo realizado es completamente original.

Para el caso finito, preliminarmente se obtuvieron resultados del esparcimiento acústico y de la reflectancia de un centro esparcidor esférico. Este es un estudio que posee una abundante referencia bibliográfica, mediante BEMs que poseen ventajas y desventajas inherentemente asociadas. Lo anterior, nos da la pauta para implementar un análisis teórico y una técnica comparativa de simulación numérica propia, dando pie a poder modelar una PnCW truncada como trabajo futuro.

¹⁰Por sus siglas en inglés, Numerical Surface Integral Method.

¹¹Por sus siglas en inglés, Periodic Green's Function Method.

¹²Por sus siglas en inglés, Boundary Element Method.

Más aún, la respuesta acústica de estructuras cristalinas como son las PnCWs, muestran que es posible establecer una correspondencia biunívoca que podría relacionar los valores de la reflectancia del sistema finito con las regiones de bandgaps que sabemos se hacen presentes en dichas estructuras periódicas; permitiéndonos referir con respecto a la PnCW, un estudio comparativo (como tema a futuro) entre los casos finito e infinito, respectivamente. Por ende, se ha sentado un precedente importante en el modo de implementar técnicas numéricas rigurosas para el estudio de un 2DPnC inmerso en una 3DPnC, cuya periodicidad del sistema se enfocaría ahora en dos de las tres direcciones posibles.

Esta investigación está motivada por la necesidad de alternativas de creación de estructuras cristalinas, para el bloqueo y/o la transmisión de frecuencias en forma puramente sónica y capaces de guiar, radiar o dispersar ondas acústicas con numerosas aplicaciones tecnológicas tales como circuitos de microondas, antenas leaky, subrefletores dicróicos, entre otros dispositivos.

Estructura de la tesis

En el capítulo II se hace énfasis en lo concerniente a las propiedades acústicas y las características generales que servirán como punto de partida, para establecer la técnica de modelado adecuada del sistema físico. En el tercer capítulo, se introduce la teoría básica del NSIM para analizar las frecuencias de vibración en cavidades, presentándose las predicciones analíticas y los resultados numéricos correspondientes. Asimismo, el capítulo IV hace referencia nuevamente al modelo teórico presentado en el capítulo III, pero aplicable al cálculo preliminar de las estructuras de bandas fonónicas en guías de ondas periódicas y bajo condiciones de frontera de Dirichlet. Además, se incluye un nuevo marco teórico al presentar el PGFM para obtener simulaciones con un mayor grado de precisión de las estructuras de bandas del perfil propuesto; estableciéndose a

su vez, un comparativo para los casos donde se consideran superficies suaves y cuya finalidad es mejorar la precisión de los cálculos, con vías a poder realizar el tratamiento especial de la condición de frontera de Neumann. Los resultados obtenidos muestran un grado de concordancia aceptable y permiten establecer pautas, para el diseño experimental de dispositivos de filtrado acústico. Adicionalmente, el capítulo V hace referencia a la respuesta acústica de una esfera con superficies suave y dura, que es el principio de las PnCWs (en este caso, de dimensión finita); determinándose los diagramas de esparcimiento acústico y modelando como consecuencia, la reflectividad del sistema. Por último, en el capítulo VI se hace mención de las conclusiones más sobresalientes de la investigación realizada. Finalmente, se incluye la bibliografía correspondiente y algunos anexos de interés en el apartado de los apéndices.

Capítulo II

PROPIEDADES GENERALES

En el capítulo anterior, se hizo una mención concisa de los antecedentes relacionados con nuestro tema de estudio. Ahora, presentamos una revisión de las definiciones conceptuales de mayor relevancia para caracterizar el problema de interés, desde sus bases más elementales.

II.1. Consideraciones preliminares

Un cristal es un sólido homogéneo formado en su interior por átomos, moléculas o iones (Kittel y McEuen, 1976), constituyendo lo que se denomina un arreglo cristalino; éste está formado a su vez por una red cristalina con adición a una base atómica particular. Cristales simples pueden describirse por la llamada red de Bravais, formada por el conjunto discreto e infinito de puntos asociados al cristal. Dada la periodicidad que se hace presente, la información de solamente un periodo es suficiente para definir toda la estructura básica, la cual se le conoce como celda unitaria. Esta unidad primordial es una sección del cristal que puede ser trasladada usando todos los vectores de la red de Bravais para llenar todo el espacio del cristal.

La forma general de la red de vectores fundamentales para el caso en 3D, esta dada de la siguiente manera: \mathbf{R} se puede definir como $\mathbf{R} = \{l\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + n\mathbf{a}_3\}$, donde $l, m, n \in \mathbb{Z}$ y $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son los vectores fundamentales. Para el caso tridimensional, el paralelepípedo definido por los vectores \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$) forma la celda primitiva, que es un tipo particular de celda unitaria. La traslación de la celda unitaria siguiendo los vectores \mathbf{a}_i en el espacio produce la red del sistema periódico. Dado que la periodicidad se lleva a cabo en el espacio directo, la red \mathbf{R} se denomina red del espacio directo o red directa. Asociada con la red directa, se define la red recíproca y puede utilizarse para una mejor comprensión de las propiedades físicas de estos sistemas. Matemáticamente, consideramos el conjunto de puntos \mathbf{R} que constituyen una red de Bravais y una onda plana $e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}$, donde \mathbf{G} es el vector de la red recíproca definido como $\mathbf{G} = \{l\mathbf{b}_1 + m\mathbf{b}_2 + n\mathbf{b}_3\}$, donde $l, m, n \in \mathbb{Z}$ y $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son la base de los vectores de la red recíproca primitiva. Si la onda plana tiene la misma periodicidad que la red de Bravais, entonces se satisface la condición: $e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} = 1$ si $\mathbf{G}\cdot\mathbf{r} = 2\pi n$, donde $\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}$ es una relación de ortogonalidad entre las proyecciones de los vectores fundamentales de las redes duales del espacio cristalino directo y recíproco. Así, podemos describir la red recíproca como el conjunto de todos los vectores de \mathbf{G} que satisfacen esta identidad, para todas las posiciones del punto de la red de vectores \mathbf{R} . Los vectores de la celda primitiva en la red recíproca se definen a partir de los vectores de la red directa, a través de la siguiente expresión:

$$\mathbf{b}_i = 2\pi \frac{\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \varepsilon_{ijk} \quad (1)$$

donde ε_{ijk} es el símbolo antisimétrico de Levi-Civita.

A cada red de Bravais de un cristal simple en el espacio real le corresponde otra red de Bravais en un espacio recíproco (físicamente, es el espacio de los vectores de onda). Esto es importante para nosotros, ya que podemos aplicar el método de Wigner-Seitz para obtener la primera zona de Brillouin sobre la red recíproca. Esta zona es

importante en la descripción de la estructura de bandas correspondiente al cristal que estemos estudiando.

El concepto de PnCs para ondas acústicas aparece años después del concepto análogo de cristales fotónicos (PCs¹) para ondas ópticas y electromagnéticas (1987). Los PCs y PnCs comparten muchas analogías, entre las cuales figura el hecho de que ambas estructuras periódicas actúan sobre la propagación de ondas, desde el punto de vista de la física clásica.

En una partícula o descripción mecánico cuántica, el fonón es la vibración elástica primaria de la materia; así como el fotón, es la partícula elemental de la luz. Tales estructuras han permanecido vigentes como tema de investigación de vanguardia en las últimas décadas, como se muestra en la Fig. 1.

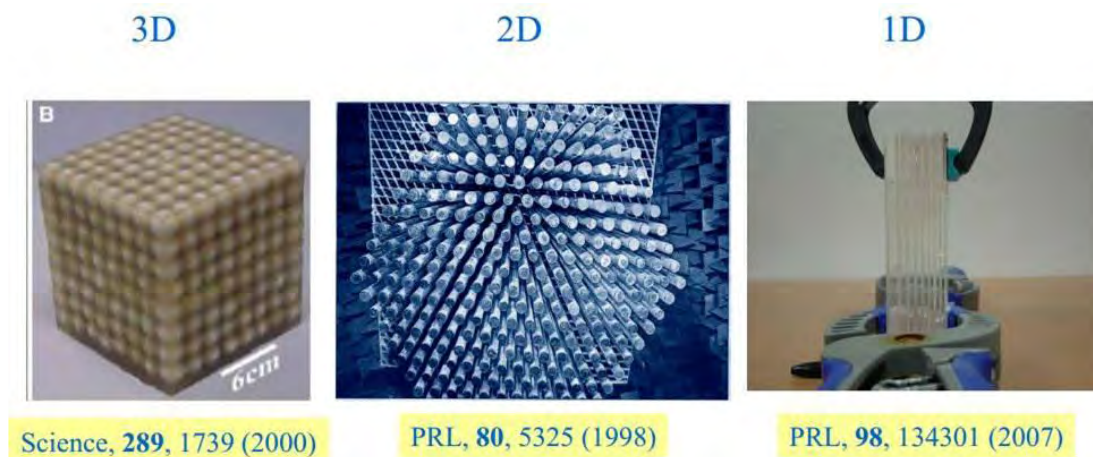


Figura 1. Contraparte acústica de la fotónica y los dispositivos fotónicos (Ibiza, 2013).

El origen del PnC se debe mucho a la cristalografía. Ésta es la ciencia que examina la disposición de los átomos en sólidos, con énfasis en la estructura atómica o molecular y su relación con las propiedades físicas y químicas. Dichas estructuras artificiales microestructuradas, permiten cubrir gran parte del espectro sónico continuo y están

¹Por sus siglas en inglés, Photonic Crystal.

diseñadas para controlar la propagación de ondas mediante una disposición periódica de dispersores con dimensiones y periodos comparables a la longitud de onda, como se muestra en la Fig. 2.

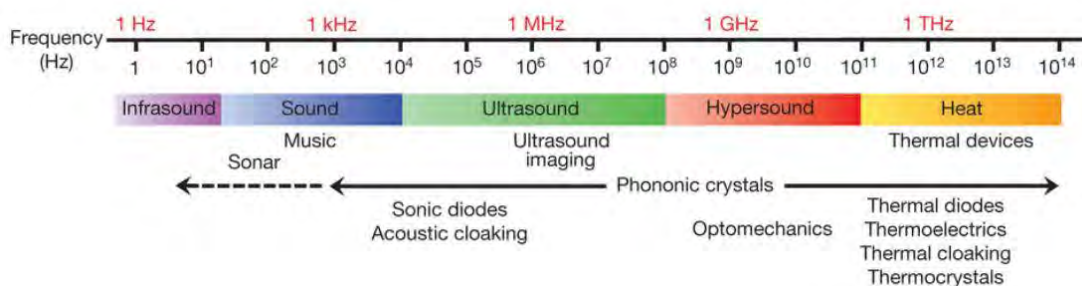


Figura 2. Rango de frecuencias del espectro sónico (Liu, 2000).

Las dimensiones que intervienen en los PnCs, van desde unos pocos metros hasta un centenar de nanómetros, como se muestra en la Fig. 3.

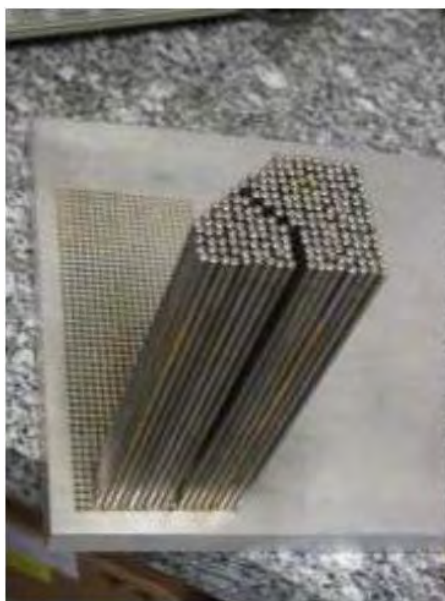


Figura 3. PnC de tamaño milimétrico (Miyashita, 2005).

A esta escala, la materia aparece como continua y las leyes de la mecánica clásica son aplicables y empleadas como regla general.

La distribución periódica infinita de una base material en un medio con propiedades físicas diferentes, constituye un sistema periódico. En la Fig. 4, se muestran ejemplos reales de sistemas en 1D (presentan la periodicidad en una sola dirección); en 2D, cuya periodicidad aparece en dos direcciones (siendo homogénea o invariante en la tercera dimensión) y, por último, el caso 3D (su comportamiento es repetitivo, en las tres dimensiones del espacio).

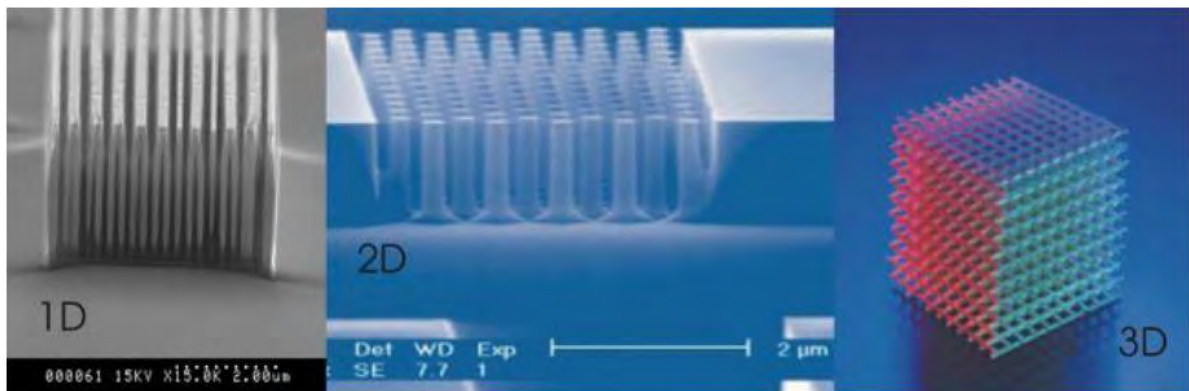


Figura 4. Sistemas periódicos en 1, 2 y 3 dimensiones (Pennec, 2004).

El concepto de sistema periódico es una abstracción matemática que implica la existencia de una estructura discreta en un medio infinito. Sin embargo, en la naturaleza no se pueden encontrar tales sistemas; no obstante, algunos ejemplos pueden llegar a simularlos aproximadamente. Es el caso de cristales truncados formados por muchos puntos, pero con fronteras en el dominio finito.

Un PnC simple está formado por dos medios físicos. Cuando uno de los dos medios que forman el sistema periódico es un fluido y el otro es un medio elástico o rígido, el PnC se denomina cristal de sonido. Un ejemplo de este tipo de estructura diseñada experimentalmente, se muestra en la Fig. 5.

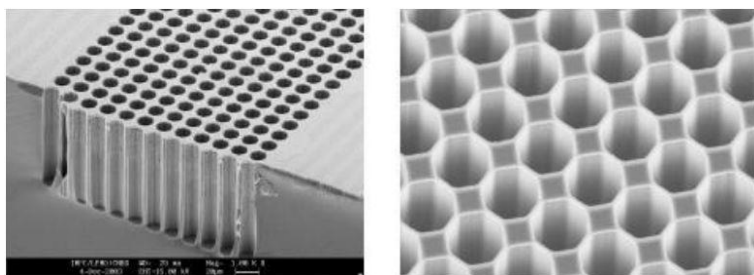


Figura 5. Sistema de agujeros de aire en una oblea de silicio (Gupta, 2014).

Usando la teoría de grupos se ha demostrado que existe un único sistema periódico de una dimensión, cinco de dos dimensiones y catorce de tres dimensiones. Esto determina la representación matemática de las redes de Bravais, en cada caso particular. En la exploración de las posibilidades que ofrece la elección de la disposición periódica de los materiales que componen a los dispersores y la forma de los mismos, se prefieren geometrías beneficiosas para la difusión isotrópica; por ejemplo, cilindros o esferas.

Para un 2DPnC, los dispersores son cilindros que pueden estar dispuestos en un diseño particular, tal como se muestra en la Fig. 6.

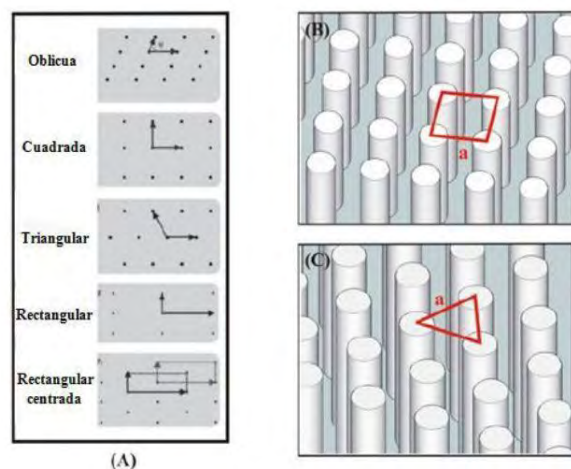


Figura 6. (A) Tipos de configuraciones bidimensionales para dispersores cilíndricos, distribuidos con un parámetro de red a . (B) Cuadrada, (C) Triangular (Ibiza, 2013).

El parámetro de red es crucial en tales sistemas periódicos, ya que define la relación entre las propiedades geométricas y físicas con las características de propagación que se hacen presentes. Una vez que el parámetro de red y el tamaño de los dispersores son conocidos, se puede definir la fracción de llenado (filling fraction, f) como el cociente entre el volumen ocupado por los dispersores y el volumen total ocupado por la celda unitaria, como muestra la Fig. 7.

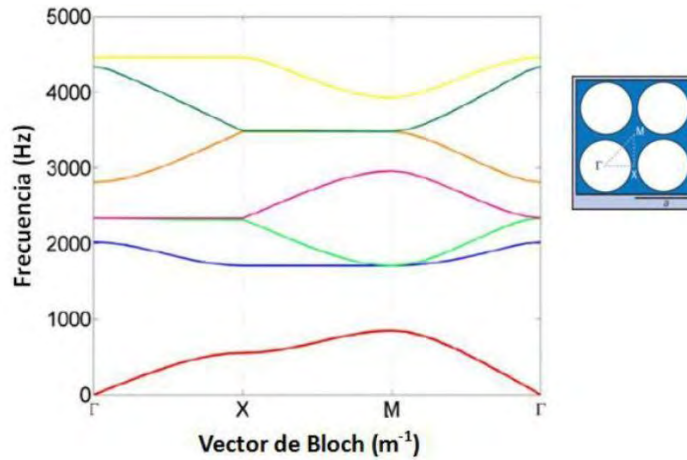


Figura 7. Estructura de bandas de una red cuadrada de cilindros rígidos de radio r , un parámetro de red a , y una fracción de llenado $f \simeq 64.8\%$ (Sliwa, 2005).

Si se consideran dispersores cilíndricos con radio r_0 y parámetro de red a , la fracción de llenado para una red cuadrada y triangular serán respectivamente:

$$f_{\square} = \frac{\pi r_0^2}{a^2}, \quad (2)$$

$$f_{\Delta} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{3}a^2}. \quad (3)$$

Las consideraciones tomadas en cuenta, a la hora de desarrollar el perfil del modelo de simulación en 2D, es asumir que la simetría cilíndrica de los dispersores hace posible el análisis del cristal de sonido en un plano de dos dimensiones. La propagación de ondas, es entonces reducida básicamente a un problema bidimensional, asumiendo que

los campos no tienen dependencia con una cierta dirección de homogeneidad (puede ser la dirección z).

Siguiendo esta aseveración, la geometría permite reducir los dispersores cilíndricos a perfiles vistos como círculos. Con lo anterior, se simplifica el diseño a un sistema de dos dimensiones (2D) y como consecuencia, la posibilidad de reducir enormemente el costo computacional de las simulaciones (ver la Fig. 8).

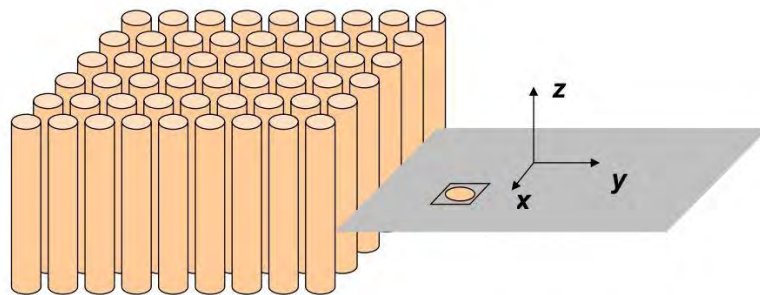


Figura 8. Corte transversal sobre el plano de periodicidad definiendo la obtención de una celda unitaria (Ibiza, 2013).

Los dispersores hechos de materiales como el acero o el plomo, tienen una impedancia acústica (resistencia al paso del sonido) mucho más alta, que la del fluido en el cual están dispuestos (un medio ligero, tal como el aire o el agua), como puede notarse en la tabla de la Fig. 9.

Cabe mencionar que, los casos idealizados constituyen 2 tipos de medios materiales diferentes: una superficie dura, como aquella que se caracteriza por tener una impedancia acústica infinita (rigidez extrema); mientras que la superficie suave, se considera como la que posee cierta impedancia finita. La frontera entre dos materiales de diferentes impedancias se denomina interfase acústica. Cuando el sonido choca contra esta barrera con una incidencia normal, parte de la energía del sonido es reflejada y parte es transmitida, a través de dicha limitante.

ULTRASONIDO				
MATERIAL	PESO ESPECIFICO (gr/cm ³)	VELOCIDAD DE ONDAS LONGITUDINALES (m/seg)	VELOCIDAD DE ONDAS TRANSVERSALES (m/seg)	IMPEDANCIA ACUSTICA "Z" (g/cm ² xseg)
ALUMINIO	2,7	6.300	3.080	169 x 10 ⁴
COBRE 110	8,9	4.700	2.260	418 x 10 ⁴
LATON 70-30	8,53	3.830	2.050	327 x 10 ⁴
MAGNESIO	1,76	5.740	3.100	101 x 10 ⁴
PLOMO	11,34	2.160	700	245 x 10 ⁴
ACERO				
AL CARBONO	7,85	5.940	3.240	466 x 10 ⁴
INOX. 302	7,9	5.660	3.120	447 x 10 ⁴
AIRE	0,00129	331	-.-	0,004 x 10 ⁴
ACEITE	0,87	1.240	-.-	15 x 10 ⁴
AGUA	1,0	1.490	-.-	14,9 x 10 ⁴
GOMA	1,2	2.300	-.-	28 x 10 ⁴
PLEXIGLAS	1,18	2.670	1.120	32 x 10 ⁴
CUARZO	2,65	5.730	-.-	152 x 10 ⁴

Figura 9. Tabla comparativa de parámetros (Kress, 2001).

El concepto de impedancia es importante para la comprensión de la respuesta de una onda de sonido que se propaga de un medio ligero, a uno mucho más denso. Cuando la onda entra en contacto con un medio de impedancia alta, provoca que una parte importante de la onda sea reflejada. La energía acústica es absorbida por materiales suaves, a diferencia de ser reflejada por materiales duros. Una ventana abierta es un ejemplo de absorción del sonido del 100%; es decir, sin reflejo. Mientras que los baños tienen superficies reflectantes duras y por ende, propiedades muy bajas para anular la intensidad de las vibraciones.

La impedancia acústica Z es una propiedad característica del medio y del tipo de onda que se propaga, definida como la razón de la presión acústica p y la velocidad de vibración u de las moléculas en un punto específico (nótese que no se está haciendo

referencia, a la velocidad del sonido c_l); i.e.

$$Z = \frac{p}{u}. \quad (4)$$

Para ondas planas, se obtiene:

$$Z = \pm \rho_0 c_l, \quad (5)$$

donde ρ_0 es la densidad y c_l es la velocidad del sonido. Además, el signo de más o menos dependerá de si la propagación ocurre en la dirección positiva o negativa. El término $\rho_0 c_l$ tiene a menudo mayor importancia como propiedad característica del medio que la que tienen ρ_0 o c_l , individualmente. Por esta razón, $\rho_0 c_l$ se conoce como impedancia característica (resistencia) del medio correspondiente.

Aún cuando para ondas planas progresivas la impedancia acústica específica es una cantidad real; esto no es cierto, para el caso de ondas estacionarias u ondas divergentes. En general, se encontrará que Z es compleja:

$$Z = r + ix, \quad (6)$$

donde r y x se denominan *resistencia* y *reactancia acústica específica* del medio para el tipo de onda particular que se considera.

La impedancia de un medio para ondas acústicas es análoga al índice de refracción n de un medio para ondas de luz; al factor $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ en un medio dieléctrico para ondas electromagnéticas y a la impedancia característica Z_o de una línea de transmisión eléctrica.

Volviendo nuestro interés a la Fig. 7, nótese que ésta presenta algunas propiedades interesantes de los medios periódicos. El contraste de impedancias entre los dispersores y el medio es un factor muy importante, dado que el ancho de banda depende de él, en gran medida. Por ende, a mayor contraste de impedancias entre el medio y los dispersores, mayor anchura de las bandas se hace presente dentro de la estructura.

Un cristal de sonido compuesto por dispersores rígidos observa gran atenuación, dando origen al bandgap resultante. El medio en donde están inmersos los dispersores, se considera elástico lineal y se define mediante su densidad y velocidad del sonido. La propagación del sonido a través de los dispersores tiene lugar a través de oscilaciones elásticas de pequeña amplitud; estas oscilaciones se definen como ondas elásticas. Cuando un tren de ondas se propaga en el medio, los dispersores generan reflexiones que interfieren con las vibraciones incidentes. Según la frecuencia de las mismas y del espaciamiento entre los difusores, estas interferencias pueden ser constructivas o destructivas; en cuyo caso, la onda es encapsulada en el interior del cristal sin llegar a atravesarlo, como muestra la Fig. 10.

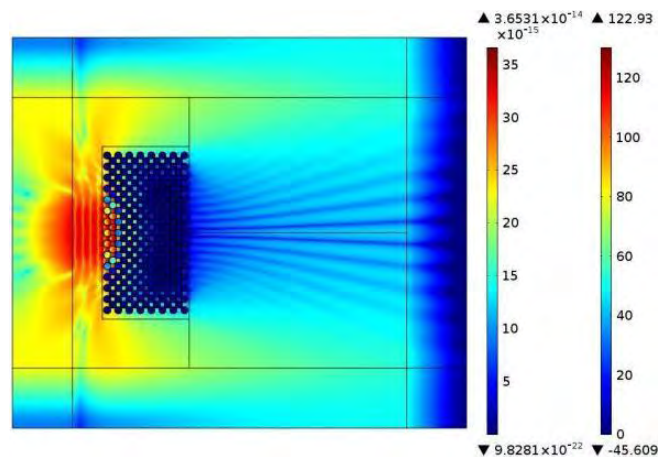


Figura 10. Nivel de presión sonora (dB) a 280 kHz considerando un cristal de sonido compuesto de 15 columnas de dispersores de acero (Ibiza, 2013).

El rango de frecuencias bloqueadas por el medio, en las que aparece este efecto, es el bandgap. Las simulaciones considerando dispersores bidimensionales de impedancia infinita (i.e. duros), se realizan asumiendo que el modelo de análisis no tiene interacción acústica-sólido (fenómeno multifísico donde la presión del fluido provoca una carga del fluido en el dominio sólido, y la aceleración estructural afecta el dominio fluido como una aceleración normal, a través del contorno fluido-sólido).

Un ejemplo de 3DPnC es la estructura minimalista localizada en un parque de la capital española en Madrid, como muestra la Fig. 11.



Figura 11. Escultura de Eusebio Sempere (1923-1985) (Yang, 2004).

Básicamente, es una disposición periódica en dos dimensiones de tubos de acero. En 1995, Francisco Meseguer y sus colegas determinaron experimentalmente, sus propiedades de filtrado aural. Sus mediciones mostraron que la atenuación que se produce a ciertas frecuencias, es un fenómeno que no puede ser explicado por la absorción, ya que los tubos de acero son extremadamente rígidos y se comportan como dispersores muy eficientes para las ondas de sonido. La causa puede determinarse en la interferencia múltiple de ondas sonoras dispersadas por los tubos de acero. Debido a la distribución periódica, estas interferencias pueden ser tanto constructivas como destructivas, dependiendo de la frecuencia de las ondas. Cuanto mayor sea el número de periodos, mayor grosor tendrá el PnC y por ende, se incrementará la atenuación.

Sistemas representados por arreglos de esferas pesadas (acero o plomo), inmersas en un medio ligero (aire, agua o epoxi) imitando la estructura del diamante, son ejemplos experimentales de 3DPnC (ver la Fig. 12). En este caso particular, el concepto de bandgap puede entenderse considerando la interferencia de ondas múltiplemente dispersadas dentro de la estructura tridimensional.



Figura 12. Diseño experimental de un 3DPnC (Lucklum, 2014).

En el caso de un dispersor aislado, la fracción de la onda que incide sobre el objeto se dispersa por todo el espacio, pero parece proceder de una única fuente. Cuando un conjunto de dispersores se coloca periódicamente, las ondas son fuertemente dispersadas de un obstáculo a otro, y terminan llenando todo el espacio disponible y propagándose en todas las direcciones posibles. Las ondas interfieren constructivamente o destructivamente en función de su frecuencia y de la geometría del PnC. Un bandgap aparece cuando las ondas dispersadas interfieren destructivamente en una dirección dada, de tal manera que su superposición disminuye exponencialmente cuando se atraviesa el cristal. Las características intrínsecas a este tipo de cristales tienen efectos sobre la propagación del sonido a determinadas frecuencias. Un fenómeno especialmente importante es el de focalización del sonido con la presencia de ondas evanescentes dentro de la estructura periódica, como muestra la Fig. 13.

La idea fundamental propuesta por Kushwaha y sus colegas de la Universidad de Lille en 1993 (Ibiza, 2013), es que el bandgap puede existir sea cual sea la dirección de propagación, lo que se denomina como una banda prohibida completa. Una serie de reglas han sido derivadas por los investigadores en los últimos quince años, para especificar las condiciones bajo las cuales se pueden observar fenómenos de bandgap.

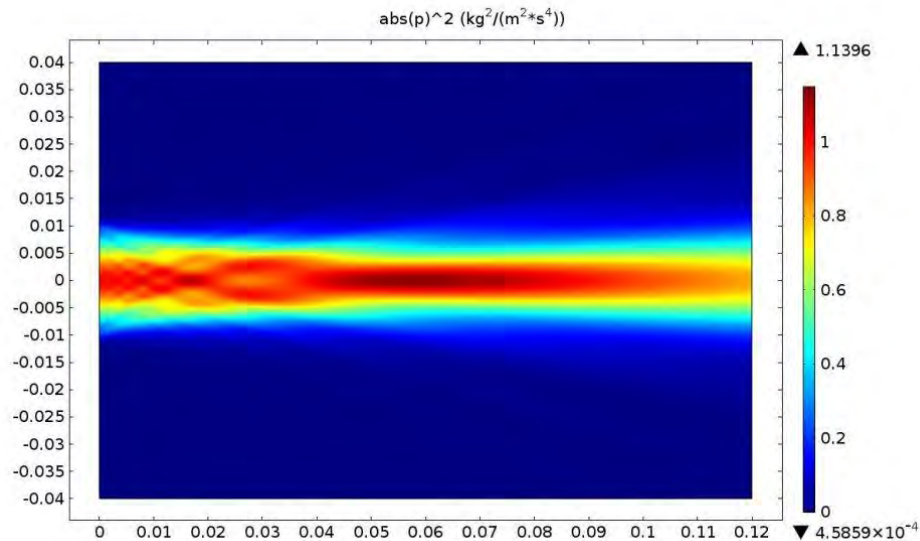


Figura 13. Transductor ultrasónico a 550 KHz (Romero, 2012).

Como regla general, aparecen cuando la longitud de onda (*i.e.* el ciclo de repetición de la onda), es del orden del periodo espacial de la estructura. Un PnC que posee un bandgap completo sería un espejo perfecto, reflejando todas las ondas incidentes. En efecto, las ondas que incidan en el PnC no podrían propagarse a través de él. En cualquier caso, estas extraordinarias propiedades son sólo ciertas para las frecuencias comprendidas en la banda prohibida completa. Para otras frecuencias, las interferencias destructivas están equilibradas con las constructivas de manera que las ondas pueden transmitirse al menos parcialmente. Lo anterior, propicia la formación de bandgaps parciales, como se muestra en la Fig. 14.

La diferencia de velocidad acústica y el contraste de densidades entre los dispersores; así como el medio de propagación en el que se encuentran inmersos y un tamaño adecuado para las geometrías involucradas, son los parámetros que determinan principalmente el ancho del bandgap y sus características distintivas, frente a otros medios materiales (ver la Fig. 15).

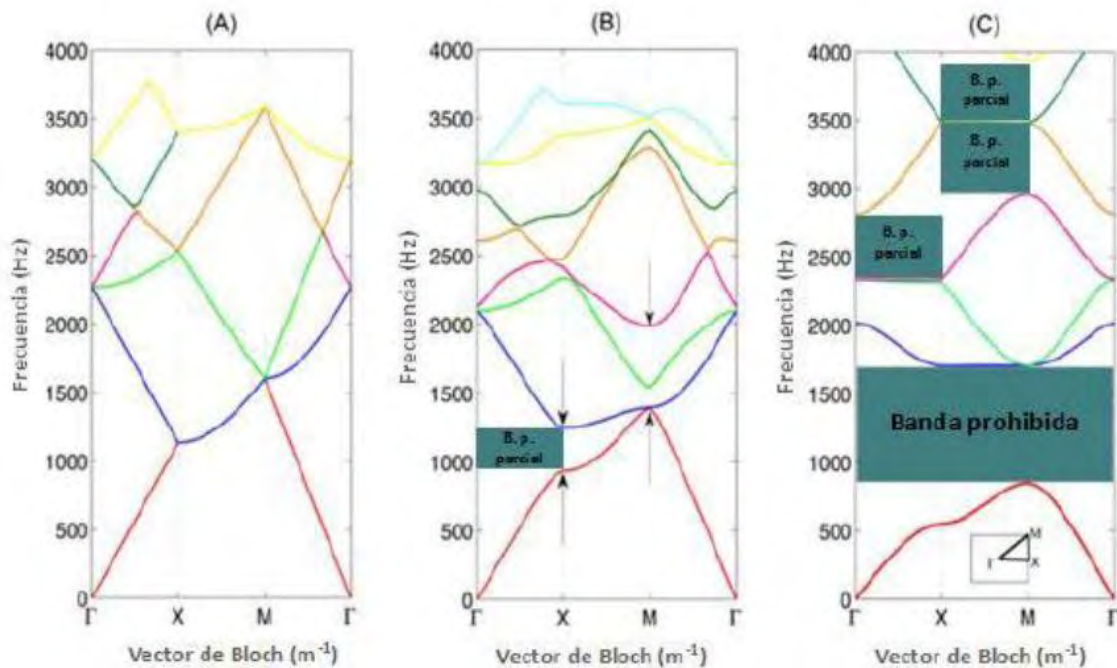


Figura 14. Estructuras de bandas de un cristal 2D, con una red cuadrada de dispersores cilíndricos rígidos, $a = 0.15$ m, y (A) $r = 0.0001$ m, (B) $r = 0.03$ m y (C) $r = 0.07$ m (Ibiza, 2013).

El esparcimiento acústico es el fenómeno central para una serie de aplicaciones, desde ultrasonidos biomédicos hasta pesca y sonar naval. La dispersión monoestática es el concepto principal para la ecografía biomédica, en el que el dispositivo que genera la señal de sondeo también detecta la señal dispersada por una región heterogénea, como un tumor. Las imágenes ultrasónicas para diagnósticos médicos son el análogo acústico de nuestro sentido visual, ya que se basan en el contraste. El análisis de estos temas, ha generado interés para la aplicación en simulaciones numéricas, como se muestra en la Fig. 16(a). Las aplicaciones de los sistemas de sonar naval se basan en medidas de esparcimiento tanto monoestáticas como biestáticas. En particular, la radiación por una esfera es un tópico que ha sido estudiado por diversos enfoques teóricos basados en BEMs, con inherentes ventajas y desventajas asociadas (ver Fig. 16(b), a continuación).

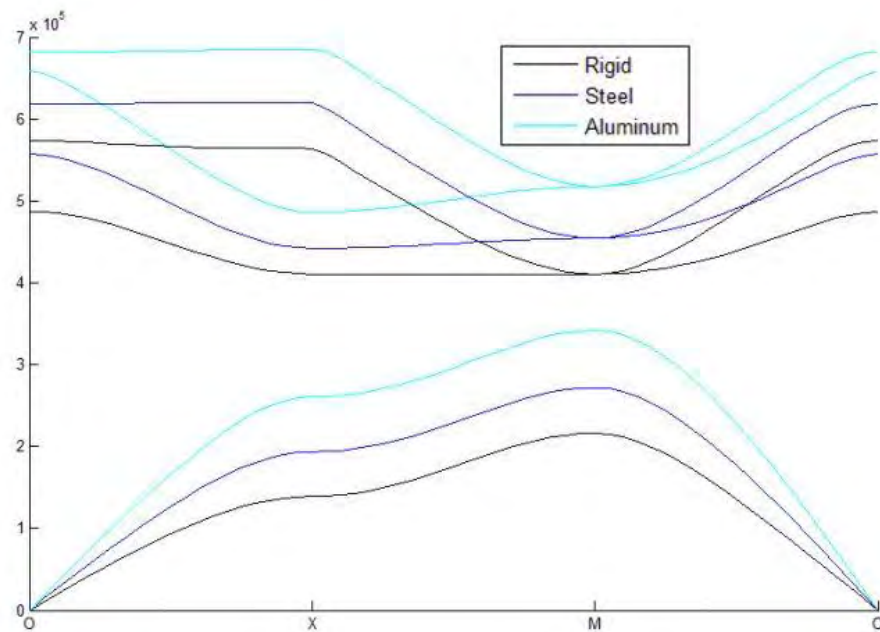


Figura 15. Estructura de bandas del cristal de sonido (red cuadrada, dispersores de $r = 1.2$ mm y parámetro de red $a = 2.6$ mm). (Bringuier, 2011).

Una guía sónica es cualquier tipo de estructura física que permite la conducción de vibraciones acústicas. En la Fig. 17(a), se muestra un esquema de diversos arreglos de guías de ondas. El diseño de las PnCWs es muy flexible, lo cual permite la manipulación estructural y la obtención de propiedades de dispersión deseables, como se muestra en la Fig. 17(b). Este tipo de sistemas es la motivación de este proyecto de investigación. Serán estudiados mediante métodos numéricos y desarrollados, en los siguientes capítulos.

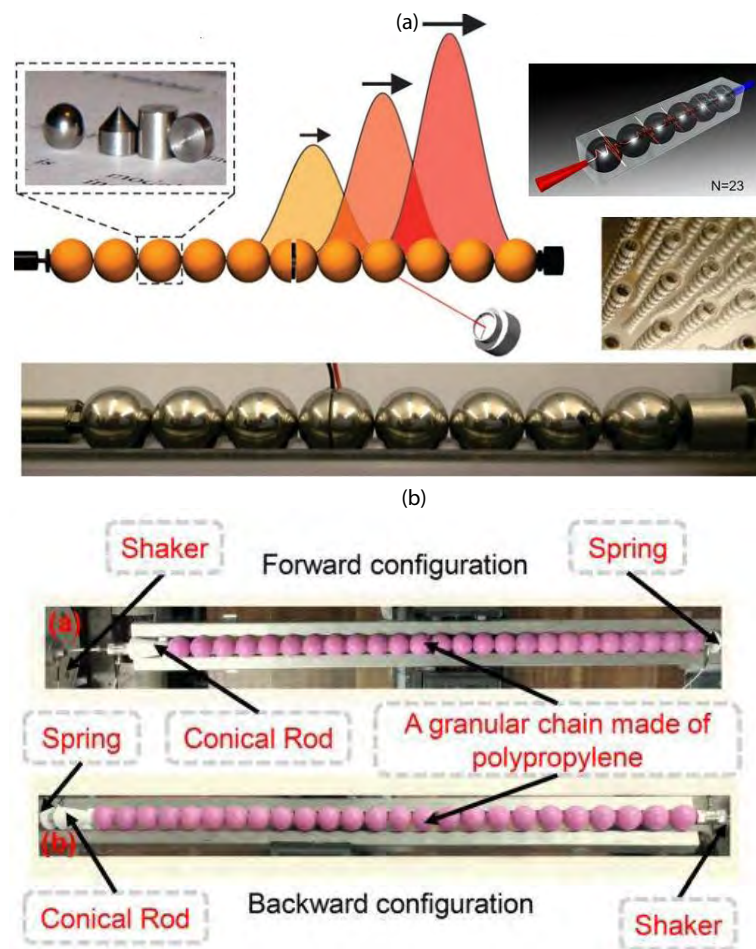


Figura 16. (a) Propagación acústica de una frecuencia no recíproca en una cadena granular (Fitzgerald, 2018). (b) Dinámica no lineal e ingeniería de materiales (Buczynski, 2004).

Una guía sónica es cualquier tipo de estructura física que permite la conducción de vibraciones acústicas. En la Fig. 17(a), se muestra un esquema de diversos arreglos de guías de ondas. El diseño de las PnCWs es muy flexible, lo cual permite la manipulación estructural y la obtención de propiedades de dispersión deseables, como se muestra en la Fig. 17(b). Este tipo de sistemas es la motivación de este proyecto de investigación. Serán estudiados mediante métodos numéricos y desarrollados, en los siguientes capítulos.

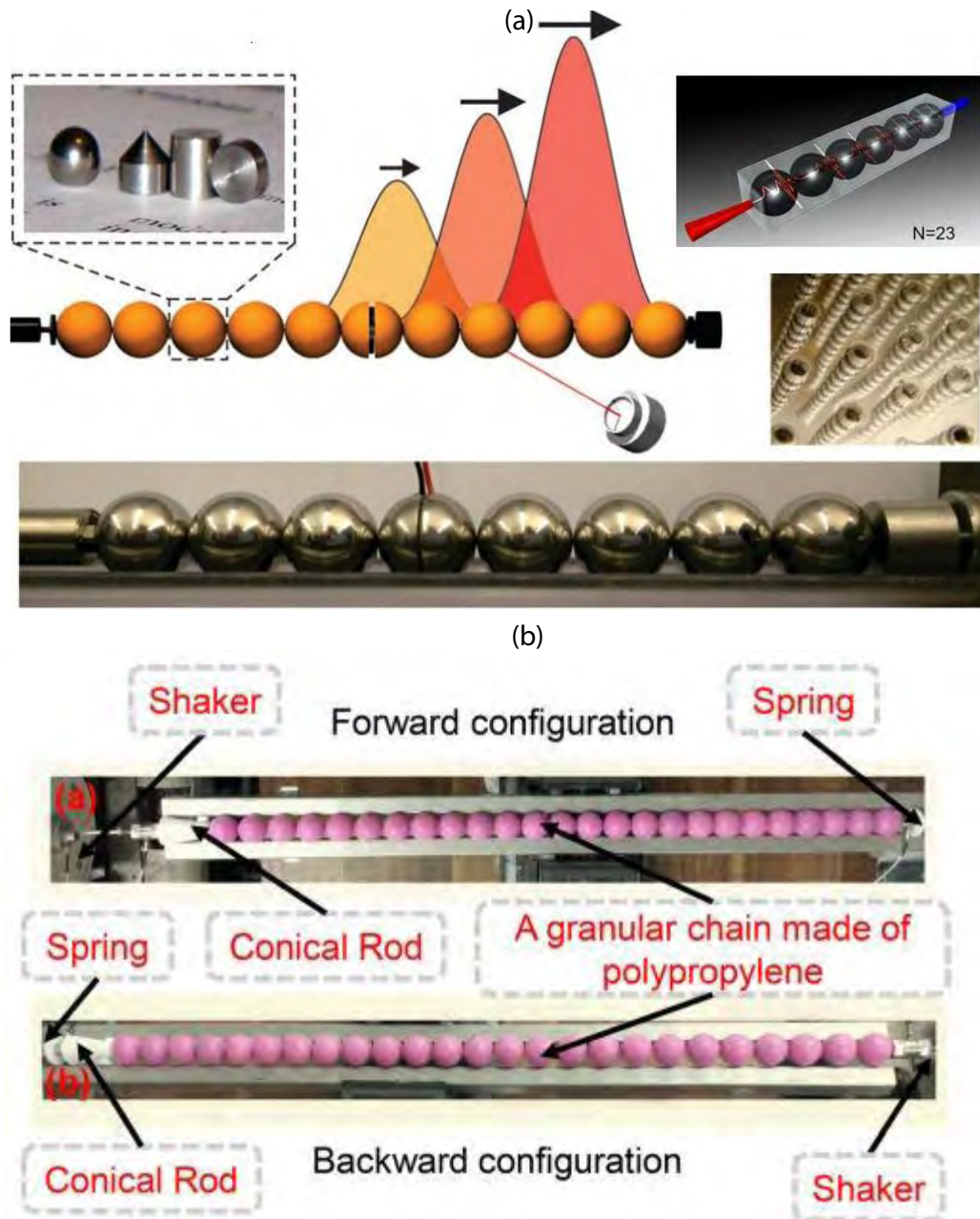


Figura 17. (a) Propagación acústica de una frecuencia no recíproca en una cadena granular (Fitzgerald, 2018). (b) Dinámica no lineal e ingeniería de materiales (Buczynski, 2004).

Capítulo III

FRECUENCIAS DE VIBRACIÓN EN CAVIDADES

En el capítulo anterior se presentaron algunas de las nociones generales que sirven para describir el panorama global de nuestro tema de estudio. En este capítulo se presenta el NSIM, un método numérico riguroso que ha permitido el análisis de los sistemas acústicos que sentaron las bases para este trabajo de investigación. Este método nos permitirá calcular las frecuencias de vibración para una PnCW.

III.1. Descripción del Método Integral de Superficie Numérica

El NSIM está basado en resolver numéricamente la Ecuación de Helmholtz. Considera el segundo teorema integral de Green, de donde se obtiene un sistema de ecuaciones integrales acopladas que involucran como incógnitas el campo de presión y su derivada normal. Dichas variables serán evaluadas en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema permite pasar de un sistema de ecuaciones integrales a un sistema de ecuaciones algebraico, cuya solución determina las funciones fuente.

Esta metodología implica ecuaciones independientes del tiempo, al considerar campos armónicos y usando la técnica de separación de variables. Dado que la implementación del método involucra sólo un número limitado de puntos de muestreo a lo largo de las superficies del sistema considerado (casos infinito y truncado, respectivamente), ello permite optimizar el uso de recursos computacionales. Una noción más general de la teoría involucrada puede analizarse a cabalidad a partir de la Ref. (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006).

El NSIM ha sido desarrollado y aplicado con anterioridad para el estudio de 2DPCs con geometrías y propiedades físicas particulares, como son el cálculo de las estructuras de bandas de un 2DPC infinito y la respuesta electromagnética de un 2DPC finito (Mendoza-Suárez *et al.*, 2007). Cabe mencionar que, dicha metodología se puede aplicar a medios conductores, dieléctricos y metamateriales (LHMs¹).

Sin embargo, como nuestro objetivo es para sistemas en 3D, el diseño del sistema propuesto para el estudio de una 3DPnCW, detallando las superficies periódicas y el arreglo de inclusiones contenido en su interior, puede verse en la Fig. 18.

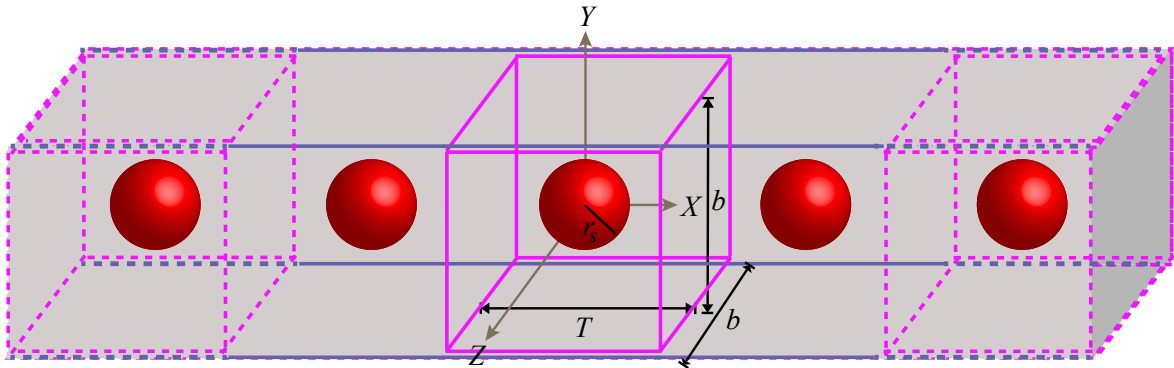


Figura 18. Descripción gráfica de la 3DPnCW formada por cuatro superficies acústicas planas paralelas y un arreglo de inclusiones esféricas de radios r_s periódicamente en la dirección x .

¹Por sus siglas en inglés, Left-Handed Metamaterials.

Daremos primero una descripción desde el punto de vista acústico para llegar a la ecuación diferencial que modelará nuestro problema de estudio mediante el NSIM. Para iniciar con dicha metodología, vamos a obtener la ecuación de onda para nuestro sistema propuesto. Para ello, revisaremos la versión normalizada de las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento de las ondas de sonido.

III.1.1. Ecuación de Helmholtz

Asumimos que cada punto en un medio continuo (líquido o gas), está sujeto a fuerzas que varían con el tiempo. El movimiento del fluido queda determinado por la velocidad con que fluye en cada dirección. La ecuación de onda se obtiene a partir de expresiones básicas de la mecánica de fluidos y de la termodinámica, relacionadas estrechamente entre sí y que establecen tres ecuaciones fundamentales en acústica. Nos referimos a las Ecs. (159), (163) y (169) de los apéndices A, B y C. Éstas denotan la ecuación de estado, la ecuación de continuidad linealizada y la ecuación de fuerza no viscosa, respectivamente. Éstas deberán combinarse para obtener una única ecuación diferencial con una variable dependiente y donde la velocidad de la partícula podrá ser eliminada.

A partir de la Ec. (169), puede verse que \mathbf{u} es un vector que satisface la ecuación de onda vectorial; es decir, cada una de las componentes satisface la ecuación de onda escalar. De manera que el problema puede resolverse para el campo de velocidades del fluido \mathbf{u} , en la forma del gradiente de un campo escalar. Lo anterior, nos permite referir precisamente una función escalar ϕ , llamada potencial de velocidad:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi, \quad (7)$$

donde

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left(e^{-i\omega t} p(\mathbf{r}) \right), \quad (8)$$

para la dependencia temporal como una función armónica de la frecuencia ω , \mathbf{r} es el punto de observación del sistema y $p(\mathbf{r})$ es el campo de presiones.

Aplicándole la divergencia a la Ec. (169), se obtiene

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) = -\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (9)$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano tridimensional.

Después, calculando la derivada temporal de la Ec. (163) y utilizando $\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})/\partial t = \nabla \cdot (\partial \mathbf{u}/\partial t)$, se obtiene

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

que combinando con la Ec. (9), se puede reescribir como

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Usando la ecuación de estado (Ec. (159)) para eliminar a s , se obtiene una función de la presión exclusivamente:

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) = \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r})}{\partial t^2}, \quad (12)$$

donde la velocidad longitudinal c_l de la onda en el medio acústico, es determinada por

$$c_l = \sqrt{B/\rho_0}, \quad (13)$$

siendo B el módulo adiabático de volumen y ρ_0 es la densidad de equilibrio constante del fluido. La Ec. (12) es denominada la ecuación de onda sonora homogénea de presiones.

Introduciendo la representación compleja dada por la Ec. (8) en la Ec. (12), se tiene que

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = 0, \quad (14)$$

donde $k^2 = \left(\frac{\omega}{c_l}\right)^2$ es la magnitud del vector de onda.

III.1.2. Función de Green para la ecuación de Helmholtz

Para resolver la Ec. (14), vamos a considerar una fuente puntual situada en el punto de integración \mathbf{r}' , mediante una función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (15)$$

donde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ físicamente representa un propagador del campo acústico debido a una fuente de sonido puntual y $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es el funcional delta de Dirac.

Una solución de la Ec. (15) está representada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (16)$$

denominada función de Green en el espacio libre para la Ecuación de Helmholtz en 3D, donde R es la magnitud de $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

III.1.3. Representación integral de la ecuación de Helmholtz

Haremos uso del segundo teorema integral de Green para las funciones $p(\mathbf{r})$ y $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, multiplicando la Ec. (14) por $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y la Ec. (15) por $-p(\mathbf{r})$. Sumando las ecuaciones restantes e integrando sobre un volumen cerrado V , que a su vez está limitado por una superficie S , obtenemos:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla p(\mathbf{r}) - p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_V p(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv, \quad (17)$$

siendo dS el diferencial de área y dv el diferencial de volumen a considerar.

Dado que la derivada normal está definida como $\partial p(\mathbf{r}) / \partial n = \nabla p(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ y $\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') / \partial n = \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}$, entonces la Ec. (17) se puede reescribir como:

$$\oint_S \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} - p(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS = p(\mathbf{r}') \theta(\mathbf{r}') - p^{inc}(\mathbf{r}'), \quad (18)$$

donde $p^{inc}(\mathbf{r}')$ representa un campo incidente para un problema exterior. Notemos que en la Ec. (18), la integral de superficie se ha representado mediante el producto del campo de presión acústica por la función escalón, definida como $\theta(\mathbf{r}') = 1$, si $\mathbf{r}' \in V$ y $\theta(\mathbf{r}') = 0$, en el caso contrario.

Si consideramos la convención de que \mathbf{r} representa la posición del observador, que es donde se mide el campo, podemos entonces intercambiar las variables \mathbf{r} y \mathbf{r}' en la Ec. (18),

$$\oint_S \left[G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}')}{\partial n'} - p(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right] dS' = p(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{r}) - p^{inc}(\mathbf{r}), \quad (19)$$

de manera que, ahora \mathbf{r}' se desplaza sobre las superficies y la derivada normal $\partial/\partial n'$ va hacia afuera de la superficie S .

Tomando la definición de la derivada normal para la función de Green:

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}), \quad (20)$$

$$= \gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{R}, \quad (21)$$

tal que $\hat{\mathbf{n}}'$ es la normal exterior a la superficie en \mathbf{r}' . Además,

$$\gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} (R^{-3} - ikR^{-2}) e^{ikR}. \quad (22)$$

En la Ec. (19), la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y su derivada normal $\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial n'$ son variables conocidas. El potencial $p(\mathbf{r}')$ y su derivada normal $\partial p(\mathbf{r}')/\partial n'$ constituyen las incógnitas a ser determinadas y que deberán satisfacer las condiciones de contorno sobre una interfaz, *i.e.*

$$p^{(1)} = p^{(2)}, \quad (23)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial n'} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial n'}, \quad (24)$$

donde ρ_1 y ρ_2 representan las densidades de los medios acústicos correspondientes.

Algunas veces, las condiciones están dadas como (Burton, 1971)

$$p(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}'), \quad (25)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}')}{\partial n'} = g(\mathbf{r}'), \quad (26)$$

para $\mathbf{r}' \in S$ y donde $f(\mathbf{r}')$ y $g(\mathbf{r}')$ son funciones regulares arbitrarias que definen las condiciones de frontera Dirichlet y Neumann correspondientes.

Para garantizar un campo de esparcimiento que emane, la condición de radiación de Sommerfeld debe ser satisfecha, i.e.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0. \quad (27)$$

III.1.4. Ecuaciones integrales: problemas exteriores e interiores

A continuación vamos a describir el NSIM para problemas exteriores o interiores con el objetivo de aplicarlo a los diferentes tipos de sistemas de estudio considerados.

Sea una superficie cerrada S' que encierra el volumen V_1 , con un campo escalar incidente externo $p^{inc}(\mathbf{r})$ en la región V_2 , como se muestra en la Fig. 19.

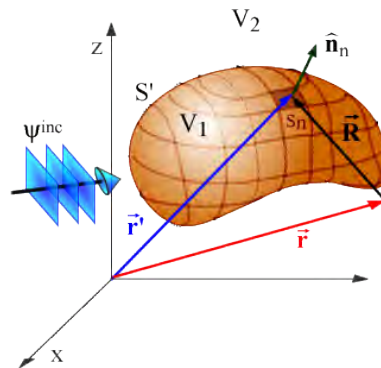


Figura 19. Sistema curvilíneo en una geometría de dos regiones (interior y exterior). La posición del observador está indicada por \mathbf{r} y \mathbf{r}' denota la posición de la fuente. Dicho vector se extiende bajo integración por la superficie.

Asumiendo que la normal apunta hacia afuera de S' , se considera la convención de que la integral de superficie es positiva si la normal apunta hacia afuera y es negativa en el caso opuesto. Si dividimos la superficie en pequeños elementos de superficie S_n , los cuales son regiones rectangulares, la ecuación integral para este medio será

$$\sum_{n=1}^N \int_{S_n} G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p^{(2)}(\mathbf{r}')}{\partial n'} dS' - \sum_{n=1}^N \int_{S_n} p^{(2)}(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' = p^{(2)}(\mathbf{r}) - p^{inc}(\mathbf{r}). \quad (28)$$

Una ecuación similar es válida para el caso de un problema interior, donde V_1 es la región encerrada por la superficie S' (normal hacia afuera) como

$$\sum_{n=1}^N \int_{S_n} G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{r}')}{\partial n'} dS' - \sum_{n=1}^N \int_{S_n} p^{(1)}(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' = 0. \quad (29)$$

Hemos agregado el índice superior entre paréntesis a las funciones para distinguir el problema al considerar las propiedades del medio acústico en cada caso: ρ_1, k_1 y ρ_2, k_2 , respectivamente.

Si asumimos que los elementos de la superficie son suficientemente pequeños para garantizar que el campo de presiones y su derivada normal sean aproximadamente constantes a lo largo de S_n , entonces, las funciones desconocidas se pueden eliminar de las integrales para obtener

$$-\sum_{n=1}^N \Phi_n^{(2)} \int_{S_n} G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' + \sum_{n=1}^N p_n^{(2)} \int_{S_n} \frac{\partial G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \approx p^{inc}(\mathbf{r}), \quad (30)$$

en el caso de un problema exterior o

$$\sum_{n=1}^N \Phi_n^{(1)} \int_{S_n} G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \sum_{n=1}^N p_n^{(1)} \int_{S_n} \frac{\partial G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \approx 0, \quad (31)$$

para el caso de un problema interior.

En ambos casos, ($j = 1, 2$)

$$p_n^{(j)} = p^{(j)}(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n}, \quad (32)$$

$$\Phi_n^{(j)} = \left. \frac{\partial p^{(j)}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n}, \quad (33)$$

siendo \mathbf{r}_n , un vector que apunta al centroide de S_n .

En las ecuaciones integrales para las funciones fuente, se define $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}'_m + \zeta \hat{\mathbf{n}}_m$, donde ζ es un número infinitesimal positivo y $m = 1, 2, \dots, N$.

III.1.5. Discretización de las ecuaciones integrales

Consideremos una representación paramétrica de las integrales que aparecen en las Ecs. (30) y (31) en términos de las longitudes de arco s_u , y s_v (ver apéndice en (Guel *et al.*, 2016)). La parametrización puede ser expresada por la función del vector, clase C^2 , $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(s_u, s_v)$. Estas longitudes de arco corresponden a las direcciones ortogonales del sistema curvilíneo (ortogonal) propuesto para representar las superficies en cuestión. Debido a este hecho, los pequeños elementos de superficie, S_n tienen forma rectangular, por lo que $dS' = ds_u ds_v$.

Tales integrales definen elementos de matriz, L_{mn} y N_{mn} , expresados como

$$L_{mn} = \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \int_{S_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'_m + \zeta \hat{\mathbf{n}}_m} dS', \quad (34)$$

$$= \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \int_{s_{v_n} - \frac{\Delta s_v}{2}}^{s_{v_n} + \frac{\Delta s_v}{2}} \int_{s_{u_n} - \frac{\Delta s_u}{2}}^{s_{u_n} + \frac{\Delta s_u}{2}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'_m + \zeta \hat{\mathbf{n}}_m} ds_u ds_v, \quad (35)$$

$$N_{mn} = \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \int_{S_n} \gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'_m + \zeta \hat{\mathbf{n}}_m} dS', \quad (36)$$

$$= \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \int_{s_{v_n} - \frac{\Delta s_v}{2}}^{s_{v_n} + \frac{\Delta s_v}{2}} \int_{s_{u_n} - \frac{\Delta s_u}{2}}^{s_{u_n} + \frac{\Delta s_u}{2}} \gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'_m + \zeta \hat{\mathbf{n}}_m} ds_u ds_v. \quad (37)$$

La región de integración involucrada en las Ecs. (35) y (37) es rectangular, con un punto central (s_{u_n}, s_{v_n}) y lados de longitud pequeña Δs_u y Δs_v , como se muestra en la Fig. 20.

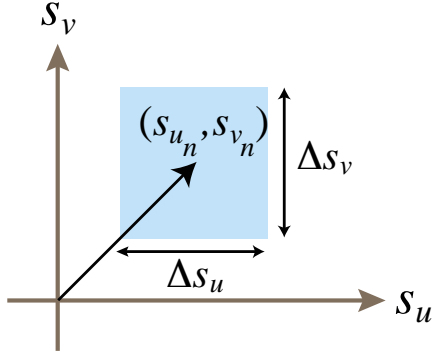


Figura 20. Región de integración involucrada en las Ecs. (35) y (37).

En el caso de que $m \neq n$, los integrandos no poseen singularidades para s_{u_n} y s_{v_n} dentro del rango de integración. Por lo tanto, podemos aproximar L_{mn} y N_{mn} por

$$L_{mn} \approx \frac{\Delta s^2}{4\pi} \frac{e^{ikR_{mn}}}{R_{mn}}, \quad (38)$$

$$N_{mn} \approx \frac{\Delta s^2}{4\pi} \frac{e^{ikR_{mn}}}{R_{mn}} \left(-\frac{1}{R_{mn}^2} + \frac{ik}{R_{mn}} \right) \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \mathbf{R}_{mn}, \quad (39)$$

donde el vector \mathbf{R}_{mn} es definido por $\mathbf{R}_{mn} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n$; su magnitud, por $R_{mn} = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|$ y hemos asumido que $\Delta s_u = \Delta s_v = \Delta s$, por simplicidad.

Para evaluar los elementos de las matrices diagonales L_{mn} y N_{mn} , debemos tener en cuenta explícitamente las singularidades de los integrandos en las Ecs. (35) y (37) para los argumentos coincidentes. Haciendo el cambio de variables: $\eta = s_u - s_{u_n}$, y $\xi = s_v - s_{v_n}$, nos lleva a que

$$L_{nn} = \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \int_{\frac{\Delta s_v}{2}}^{\frac{\Delta s_v}{2}} \int_{\frac{\Delta s_u}{2}}^{\frac{\Delta s_u}{2}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'_m+\zeta\hat{\mathbf{n}}_m} d\eta d\xi, \quad (40)$$

$$N_{nn} = \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \int_{\frac{\Delta s_v}{2}}^{\frac{\Delta s_v}{2}} \int_{\frac{\Delta s_u}{2}}^{\frac{\Delta s_u}{2}} \gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'_m+\zeta\hat{\mathbf{n}}_m} d\eta d\xi. \quad (41)$$

Note que las variables η y ξ son pequeñas, entonces los integrandos se pueden expandir usando un desarrollo en serie de potencias de Taylor.

Consideremos el vector de posición \mathbf{r}' que denota un punto en la superficie S' , como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(s_u, s_v) &= \mathbf{r}'(\eta + s_{u_n}, \xi + s_{v_n}) \\ &= \mathbf{r}'_n + \eta \left. \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0, \xi=0} + \xi \left. \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi} \right|_{\eta=0, \xi=0} + \frac{1}{2} \eta^2 \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0, \xi=0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \xi^2 \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial \xi^2} \right|_{\eta=0, \xi=0} + \frac{1}{2} \eta \xi \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial \eta \partial \xi} \right|_{\eta=0, \xi=0} + \frac{1}{2} \xi \eta \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{\eta=0, \xi=0} + \dots, \end{aligned} \quad (42)$$

expandido en una serie de Taylor alrededor del punto \mathbf{r}'_n .

Dado que, $\left. \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0, \xi=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial s_u} \right|_{s_{u_n}, s_{v_n}}$ y $\left. \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi} \right|_{\eta=0, \xi=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial s_v} \right|_{s_{u_n}, s_{v_n}}$ podemos identificar desde la geometría diferencial, los vectores tangentes a la superficie S' ,

$$\widehat{\mathbf{t}}_{u_n} = \widehat{\mathbf{t}}_u \Big|_{s_{u_n}, s_{v_n}} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial s_u} \right|_{s_{u_n}, s_{v_n}} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0, \xi=0}, \quad (43)$$

$$\widehat{\mathbf{t}}_{v_n} = \widehat{\mathbf{t}}_v \Big|_{s_{u_n}, s_{v_n}} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial s_v} \right|_{s_{u_n}, s_{v_n}} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi} \right|_{\eta=0, \xi=0}, \quad (44)$$

y los vectores de curvatura, respectivamente

$$\mathbf{t}'_{u_n} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial s_u^2} \right|_{s_{u_n}, s_{v_n}} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0, \xi=0}, \quad (45)$$

$$\mathbf{t}'_{v_n} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial s_v^2} \right|_{s_{u_n}, s_{v_n}} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial \xi^2} \right|_{\eta=0, \xi=0}, \quad (46)$$

que en general, no son unitarios.

Definiremos por notación abreviada, los vectores

$$\mathbf{t}'_{uv_n} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial s_u \partial s_v} \right|_{s_{u_n}, s_{v_n}} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial \eta \partial \xi} \right|_{\eta=0, \xi=0}, \quad (47)$$

$$\mathbf{t}'_{vu_n} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial s_v \partial s_u} \right|_{s_{u_n}, s_{v_n}} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{\eta=0, \xi=0}. \quad (48)$$

Estos vectores ($\widehat{\mathbf{n}}$, $\widehat{\mathbf{t}}_u$, $\widehat{\mathbf{t}}_v$, $\widehat{\mathbf{t}}'_u$, y $\widehat{\mathbf{t}}'_v$, respectivamente) se ilustran en la Fig. 21, para una superficie esférica. De ahí que, podemos expresar las siguientes aproximaciones a primer orden:

$$\mathbf{r}' \approx \mathbf{r}'_n + \widehat{\mathbf{t}}_{u_n} \eta + \widehat{\mathbf{t}}_{v_n} \xi + \dots \quad (49)$$

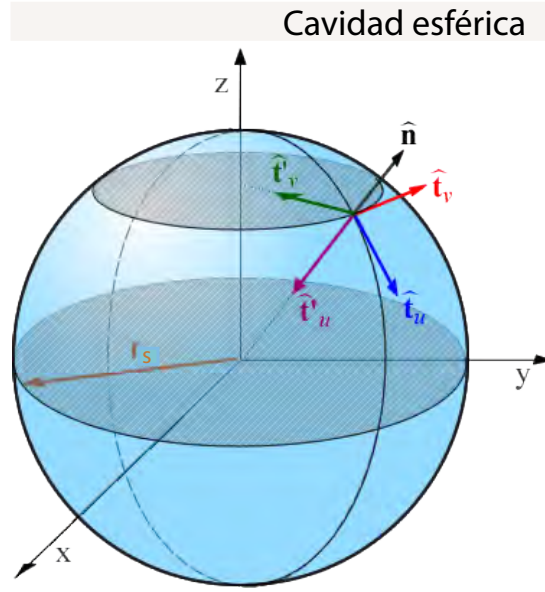


Figura 21. Vectores curvilíneos base y sus primeras derivadas sobre la superficie paramétrica propuesta.

De esta forma, se construye el vector

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \approx \zeta \hat{\mathbf{n}}_n + \eta \hat{\mathbf{t}}_{u_n} + \xi \hat{\mathbf{t}}_{v_n}, \quad (50)$$

donde $\hat{\mathbf{t}}_{u_n}$ y $\hat{\mathbf{t}}_{v_n}$ son los vectores tangentes a la superficie y $\hat{\mathbf{n}}_n$ la normal, que constituyen en conjunto una base ortonormal. Con estas consideraciones, la magnitud de este vector R , está dada por

$$R = (\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2)^{1/2}. \quad (51)$$

Si ahora consideramos la expansión de los vectores tangentes alrededor de \mathbf{r}_n , hasta primer orden,

$$\hat{\mathbf{t}}_u = \hat{\mathbf{t}}_{u_n} + \mathbf{t}'_{u_n} \eta + \mathbf{t}'_{uv_n} \xi + \dots, \quad (52)$$

$$\hat{\mathbf{t}}_v = \hat{\mathbf{t}}_{v_n} + \mathbf{t}'_{v_n} \xi + \mathbf{t}'_{vu_n} \eta + \dots, \quad (53)$$

el vector normal se puede expresar en una aproximación de primer orden como

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}}_u \times \hat{\mathbf{t}}_v, \quad (54)$$

$$\approx (1 - \tau_{uv}\eta - \tau_{vu}\xi) \hat{\mathbf{n}}_n + (-\tau_{nu}\eta - \tau_{un}\xi) \hat{\mathbf{t}}_{u_n} + (-\tau_{nv}\xi - \tau_{vn}\eta) \hat{\mathbf{t}}_{v_n}, \quad (55)$$

donde los factores τ_{ij} con $i, j = u, v, n$ han sido definidos (ver el apéndice en (Guel *et al.*, 2016)). Vale la pena notar que estos factores, que están involucrados en los productos de los vectores base y sus primeras derivadas, deben ser evaluados en el punto \mathbf{r}'_n .

Con estos resultados podemos calcular el producto

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{R} \approx \zeta - \zeta\tau_{uv}\eta - \zeta\tau_{vu}\xi - \tau_{un}\eta\xi + \tau_{nu}\eta^2 + \tau_{nv}^2\xi^2, \quad (56)$$

que aparece en uno de los integrandos.

Ahora, consideremos la expansión de Taylor de la función exponencial presente en la función de Green

$$G(R) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} R^{m-1}. \quad (57)$$

De manera similar,

$$\gamma(R) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1-m}{m!} (ik)^m R^{m-3}. \quad (58)$$

Con estos resultados, las integrales que constituyen los elementos diagonales de la matriz $m = n$, pueden ser calculados directamente, obteniéndose

$$L_{nn} \approx \frac{\Delta s}{4\pi} \left[\left(2 \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right) + ik^2 \Delta s \right], \quad (59)$$

$$N_{nn} \approx \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} (\tau_{nu} + \tau_{nv}) \left[\left(\ln \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right) + \frac{ik^3}{3} \Delta s \right]. \quad (60)$$

Los elementos de la matriz fueron expresados en términos cuadráticos del parámetro pequeño Δs y los factores τ_{nu} y τ_{nv} que dependen de los vectores de curvatura (ver apéndice en (Guel *et al.*, 2016)) dados por $\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \partial^2 \mathbf{r}' / \partial s_u^2|_{s_{un}, s_{vn}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \partial^2 \mathbf{r}' / \partial s_v^2|_{s_{un}, s_{vn}}$, respectivamente. Las Ecs. (38), (39), (59) y (60) proporcionan los elementos de matriz para cualquier elección de los índices m y n .

III.1.6. Modos de vibración numéricos en cavidades

Para validar el método anteriormente propuesto, vamos a considerar un par de problemas que involucran dos diferentes cavidades con dos tipos de superficies que implican la condición de frontera para superficies perfectamente suaves. Sin embargo, también se pueden tratar mediante la condición de frontera para superficies perfectamente duras.

A partir de la Ec. (31), se obtiene el sistema lineal algebraico homogéneo,

$$\sum_{n=1}^N L_{mn}^{(1)} \Phi_n^{(1)} - \sum_{n=1}^N N_{mn}^{(1)} p_n^{(1)} = 0. \quad (61)$$

Para una superficie suave, la condición de frontera de Dirichlet $p(\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \in S} = 0$, cancela el segundo término de la Ec. (61). Ello nos permite analizar únicamente estos elementos de matriz,

$$\sum_{n=1}^N L_{mn}^{(1)} \Phi_n^{(1)} = 0. \quad (62)$$

Al resolver el sistema lineal homogéneo, se puede demostrar que los modos de la cavidad pueden calcularse encontrando el mínimo del determinante (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006) definido como

$$\Delta(\omega) = \ln(|\det(L_{mn}^{(1)})|). \quad (63)$$

Por otro lado, para una superficie dura, la condición de frontera de Neumann cancela el primer término de la Ec. (61). Nuestro sistema a resolver, ahora se transforma en

$$\sum_{n=1}^N N_{mn}^{(1)} p_n^{(1)} = 0. \quad (64)$$

Este procedimiento permite verificar los elementos de matriz complementarios independientemente, siguiendo el mismo criterio de encontrar el mínimo del determinante,

$$\Delta(\omega) = \ln(|\det(N_{mn}^{(1)})|). \quad (65)$$

Para el estudio de modos en cavidades con geometrías simétricas, elegimos por simplicidad las formas cúbica y esférica, donde la ecuación de Helmholtz tiene soluciones analíticas bien conocidas.

III.1.7. Modos de vibración analíticos en cavidades

Los dos tipos de cavidades que vamos a considerar son: la cavidad cúbica y la esférica. Debido a sus simetrías podemos calcular los modos acústicos de manera analítica como enseguida se describirá. Esto nos permitirá posteriormente hacer un comparativo con los resultados numéricos.

(a) Cavidad cúbica

En el caso de una cavidad cúbica con lados de longitud ($D_x = D_y = D_z = D$) y una esquina situada en el origen del sistema cartesiano de coordenadas (ver Fig. 22(a)), la resolución de la ecuación de Helmholtz nos permite demostrar que el espectro de frecuencias se puede obtener a partir de la siguiente relación (Arfken, 2013):

$$k = \frac{\omega}{c_l} = \frac{\pi}{D} (l^2 + m^2 + n^2)^{1/2}, \quad (66)$$

donde k es la magnitud del vector de onda.

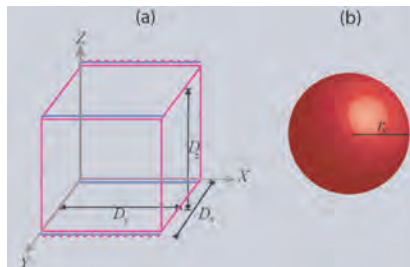


Figura 22. (a) Cavidad cúbica de dimensión ($D_x = D_y = D_z = D$), cuya arista está situada en el origen del sistema cartesiano de coordenadas. (b) Cavidad esférica de radio r_s . Ambos parámetros (D y r_s) son tomados como factores de normalización, en estos casos particulares.

Cuando nos referimos a las condiciones de frontera de Dirichlet son

$$p(0, y, z) = p(D, y, z) = 0, \quad (67)$$

$$p(x, 0, z) = p(x, D, z) = 0, \quad (68)$$

$$p(x, y, 0) = p(x, y, D) = 0, \quad (69)$$

con $l, m, n = 1, 2, 3, \dots$

En cambio, las condiciones de frontera de Neumann son

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n'} \right|_{(0,y,z)} = \left. \frac{\partial p}{\partial n'} \right|_{(D,y,z)} = 0, \quad (70)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n'} \right|_{(x,0,z)} = \left. \frac{\partial p}{\partial n'} \right|_{(x,D,z)} = 0, \quad (71)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n'} \right|_{(x,y,0)} = \left. \frac{\partial p}{\partial n'} \right|_{(x,y,D)} = 0, \quad (72)$$

siendo $l, m, n = 0, 1, 2, \dots$

Expresando la frecuencia en unidades reducidas $\bar{\omega} = \omega 2\pi c_l / D$, con D como un parámetro de normalización en este caso y resolviendo para una cavidad cúbica, el espectro correspondiente es:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} (l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (73)$$

Es importante tener en cuenta que en ambos casos, analítico y numérico, la posición de los modos en el esquema de frecuencia reducida es independiente del tamaño de la cavidad. Esto es muy conveniente, al momento de implementar las simulaciones con los algoritmos programados.

(b) Cavidad esférica

Al referir el caso de una cavidad esférica (ver Fig. 22(b)), podemos mostrar que también es posible referir una relación analítica (Arfken, 2013):

$$\bar{\omega} = \frac{\alpha_{l_i}}{2\pi}, \quad (74)$$

donde hemos tomado el radio de la esfera r_s como un parámetro de normalización. Nótese que α_{l_i} representa la raíz i -ésima de las funciones esféricas de Bessel de orden l , cuando las condiciones de contorno son las indicadas en las Ecs. (67) - (69). Las primeras raíces de estas funciones son $\alpha_{01} = \pi$, $\alpha_{02} = 2\pi$, $\alpha_{11} = 4.4934$, $\alpha_{12} = 7.7253$, $\alpha_{21} = 5.7635$, $\alpha_{22} = 9.0950$, $\alpha_{30} = 6.9879, \dots$

Cuando la derivada del campo escalar está involucrada, las condiciones de frontera que deben ser tomadas en cuenta son las que se dan en la Ec. (70) - (72). Estas condiciones implican que estos modos se dan en términos de las raíces de la primera derivada de las funciones esféricas de Bessel: $\alpha_{11} = 2.0816$, $\alpha_{21} = 3.3421$, $\alpha_{01} = 4.4934$, $\alpha_{31} = 4.5141$, $\alpha_{41} = 5.6467$, $\alpha_{12} = 5.9404, \dots$

Es importante observar que la cavidad cúbica nos permite analizar en detalle cada integral por separado de las condiciones de contorno correspondientes, ya que los términos que implican curvaturas son cero; *i.e.* $\tau_{nu} = \tau_{nv} = 0$. Por otro lado, en el caso de la cavidad esférica, además de los términos de la expansión ya considerados, los términos τ_{nu} , τ_{nv} desempeñan un papel fundamental en los elementos de matriz N_{mn} .

III.1.8. Modos de vibración en cavidades en 2D y 3D

Para validar el método propuesto, al menos en los casos en que existen soluciones analíticas, compararemos los resultados numéricos obtenidos por medio de nuestro método con los resultados analíticos correspondientes, tomando como ejemplo cavidades altamente simétricas bajo la condición de frontera de Dirichlet (Arfken, 2013). La validación la haremos tanto para sistemas en 2D, como para sistemas en 3D.

III.1.9. Cavidades en 2D

Considérese una cavidad bidimensional cuadrada ($D_x = D_y = D$) cuya arista es de dimensión π y una cavidad de tipo rectangular, con valores respectivos $D_x = \pi$, $D_y = 4\pi$ (ver Figs. 23(a) y 23(c), respectivamente). Se han calculado numéricamente los determinantes $\Delta(\bar{\omega})$ en función del rango de frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in (0, 3]$, como se muestran en las Figs. 23(b) y 23(d). Se consideró un muestreo de 400 puntos para el diseño de la Fig. 23(a) y 600 puntos, en la Fig. 23(c); ambos perfiles, con una discretización de $\Delta s = \pi/20$.

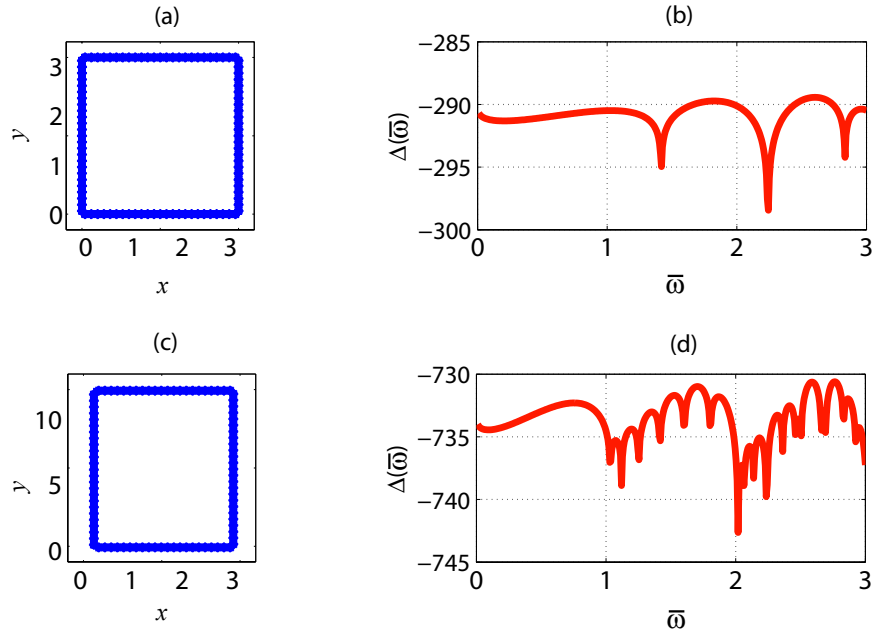


Figura 23. Perfiles representativos para el caso de (a) una cavidad cuadrada en 2D, cuya arista es de dimensión π . (c) una cavidad rectangular de lados $D_x = \pi$, $D_y = 4\pi$. (b) y (d) Modos normales presentes en el rango de las frecuencias de vibración correspondientes a los casos (a) y (c), respectivamente.

En las Figs. 23(b) y 23(d) el determinante de las cavidades (cuadrada y rectangular, respectivamente), involucra a los elementos de matriz L_{mn} del sistema dado por la Ec. (63). Los valores mínimos representados como depresiones o picos invertidos, denotan la posición de los modos resonantes. Nótese la abundante presencia de los mismos en

la Fig. 23(d) respecto a la Fig. 23(b).

Analíticamente, el espectro de frecuencias para una cavidad cuadrada tiene soluciones definidas por la Ec. (66), válidas únicamente para $l, m = 1, 2, 3, \dots$, y $n = 0$ para la condición de frontera de Dirichlet. Las Ecs. (67) y (68) establecen las siguientes restricciones, en el caso 2D:

$$p(0, y) = p(D, y) = 0 = p(x, 0) = p(x, D). \quad (75)$$

En la Tabla 1, se muestra un comparativo de las frecuencias propias obtenidas para una cavidad cuadrada, determinadas analítica ($\bar{\omega}_a$) y numéricamente ($\bar{\omega}_{Lmn}$) en unidades reducidas de la frecuencia ω . En este punto, pudimos validar la certeza de nuestros cálculos numéricos a través de los datos analíticos que reporta la literatura (Arfken, 2013).

Tabla 1. Resultados analítico-numéricos de los modos en una cavidad cuadrada.

Cavidad cuadrada						
$p(\mathbf{r}') _{\mathbf{r}' \in S} = 0$						
$\bar{\omega}_a$	1.414	2.236	2.828	3.162	3.605	4.242
$\bar{\omega}_{Lmn}$	1.417	2.236	2.835	3.171	3.612	4.126

A partir de la Fig. 23(b), podemos comparar la posición de los picos invertidos que representan los modos de vibración numérica $\bar{\omega}_{Lmn}$ y analíticamente $\bar{\omega}_a$ referidos en la Tabla 1, mostrando entre ambos un grado de concordancia aceptable.

En las Figs. 24(a) y 24(c) se han considerado los perfiles de una cavidad circular bidimensional, cuyo radio es $r_c = \pi$; así como la misma cavidad circular conteniendo ahora una inclusión también circular, $r_{cint} = 0.2\pi$. Nuevamente, se han calculado numéricamente los determinantes $\Delta(\bar{\omega})$ en función del rango de frecuencias de vibración

reducidas $\bar{\omega} \in (0, 3]$, como se muestra en las Figs. 24(b) y 24(d). Se consideró un muestreo de 300 puntos para el diseño de la Fig. 24(a) y 400 puntos, en la Fig. 24(c); ambos perfiles, con una discretización de $\Delta s = \pi/15$.

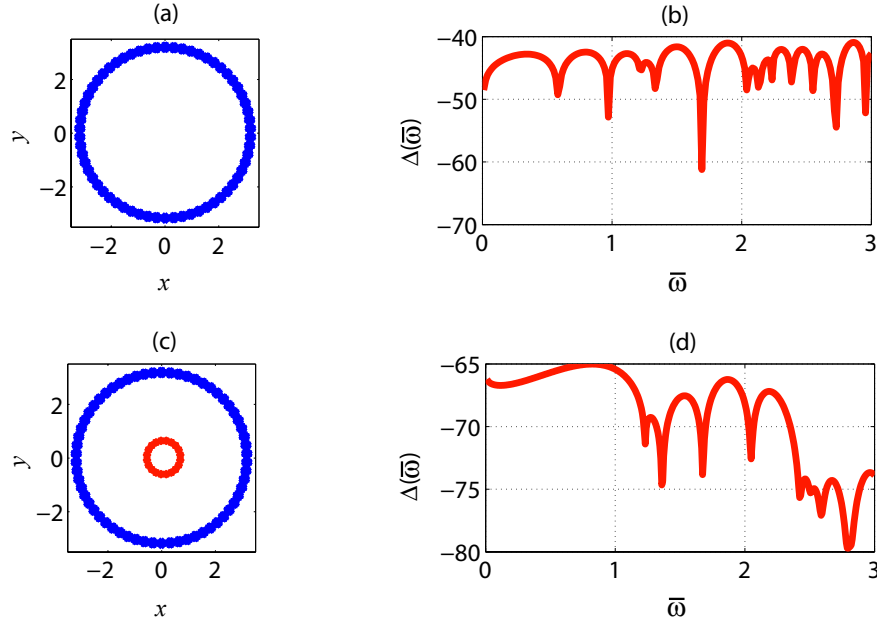


Figura 24. Perfiles representativos en 2D para el caso de una (a) cavidad circular, cuyo radio es $r_c = \pi$ y (c) perfil anterior con inclusión circular $r_{c_{int}} = 0.2\pi$. (b) y (d) Modos normales de vibración correspondientes a los casos (a) y (c).

En las Figs. 24(b) y 24(d) el determinante de las cavidades (circular y doble circular, respectivamente), involucra nuevamente a los elementos de matriz L_{mn} del sistema dado. Los valores mínimos representados como picos invertidos de las curvas, denotan una vez más, la posición de los modos resonantes. Es notoria la tendencia en las Figs. 24(b) y 24(d), respecto a los valores de las frecuencias reducidas $\bar{\omega}$. De ahí que, la presencia de la inclusión circular (Fig. 24(c)) origina la modificación en la forma y los cambios en las posiciones de los mínimos reduciendo el número de modos en comparación con la cavidad circular sin inclusiones (Fig. 24(a)).

Analíticamente, el espectro de frecuencias para una cavidad circular tiene soluciones definidas por (Arfken, 2013):

$$\bar{\omega} = \frac{J_n(x)}{2\pi}. \quad (76)$$

Nótese que $J_n(x)$ representa la raíz n -ésima de las funciones de Bessel para $n = 0, 1, 2, \dots$. Las primeras raíces de estas funciones son $J_1 = 2.4048$, $J_2 = 3.8317$, $J_3 = 5.1356$, $J_4 = 5.5201$, $J_5 = 6.3802$, $J_6 = 7.0156, \dots$

En la Tabla 2, se muestra un comparativo de las frecuencias propias obtenidas para una cavidad circular, determinadas analítica ($\bar{\omega}_a$) y numéricamente ($\bar{\omega}_{L_{mn}}$) en unidades reducidas de la frecuencia ω . En este punto, pudimos validar la certeza de nuestros cálculos numéricos a través de los datos analíticos que reporta la literatura (Arfken, 2013).

Tabla 2. Resultados analítico-numéricos de los modos en una cavidad circular.

Cavidad circular						
$p(\mathbf{r}') _{\mathbf{r}' \in S} = 0$						
$\bar{\omega}_a$	0.586	0.972	1.337	1.692	2.041	2.387
$\bar{\omega}_{L_{mn}}$	0.581	0.971	1.332	1.693	2.038	2.384

Tomando como referencia la Fig. 24(b), podemos comparar nuevamente la posición de los picos invertidos que representan los modos de vibración numérica $\bar{\omega}_{L_{mn}}$ y los valores analíticos $\bar{\omega}_a$ referidos en la Tabla 2, mostrando entre ambos un grado de concordancia aceptable.

Finalmente, la Fig. 25(a) muestra una cavidad cuadrada en 2D cuya arista D es de dimensión π y que posee una inclusión circular de radio $r_c = 0.2\pi$, en su interior. Se han calculado numéricamente los determinantes $\Delta(\bar{\omega})$ en función del rango de frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in (0, 3]$ (ver Fig. 25(b)). Se consideró un muestreo de 100 puntos

para el diseño del perfil cuadrado y 50 puntos para el modelado de la circunferencia, en la Fig. 25(a). Ambos perfiles fueron simulados numéricamente con una discretización de $\Delta s = \pi/10$.

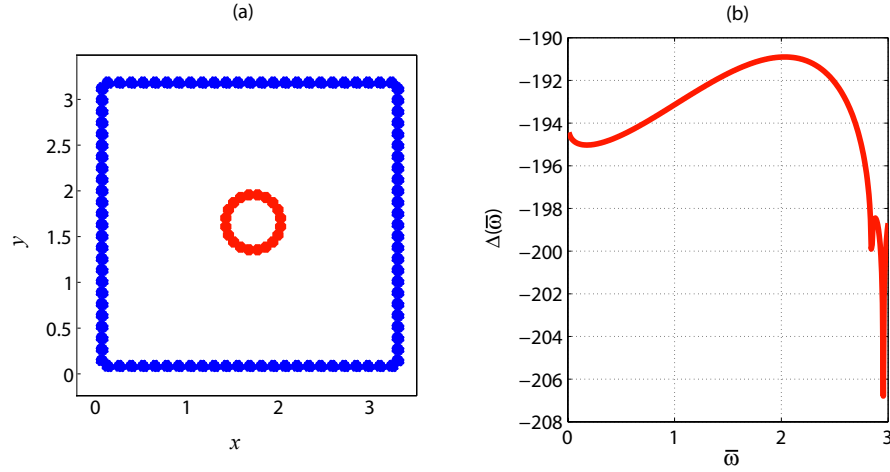


Figura 25. (a) Perfil en 2D de una cavidad cuadrada cuya arista D es de dimensión π , con una inclusión circular de radio $r_c = 0.2\pi$. (b) Modos normales asociados para las frecuencias de vibración correspondientes.

En la Fig. 25(b) observamos que solamente dos modos aparecen en el intervalo considerado: $\bar{\omega}_1 = 2.884$ y $\bar{\omega}_2 = 2.972$. Atribuimos nuevamente a la presencia de la inclusión circular en el interior del perfil recto (Fig. 25(a)), como la causa que origina la modificación en la forma y las posiciones de los mínimos reduciendo el número de modos en comparación con la cavidad cuadrada sin inclusiones: $\bar{\omega}_1 = 1.417$, $\bar{\omega}_2 = 2.236$, y $\bar{\omega}_3 = 2.835$ (Fig. 23(b)).

Cabe mencionar que, para el caso de perfiles como el de las Figs. 24(c) y 25(a), en la que se hacen presentes varias combinaciones de geometrías distintas, no existen resultados analíticos con los que puedan compararse los datos numéricos obtenidos.

III.1.10. Cavidades en 3D

Considérese una cavidad tridimensional cúbica, cuya arista D es de dimensión π (ver Fig. 26(a)). Se calcularon numéricamente los determinantes $\Delta(\bar{\omega})$ en función del rango de frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in (0, 2]$, como se muestra en la Fig. 26(b). Tomamos un muestreo de 600 puntos para el mallado con una discretización de $\Delta s = \pi/10$.

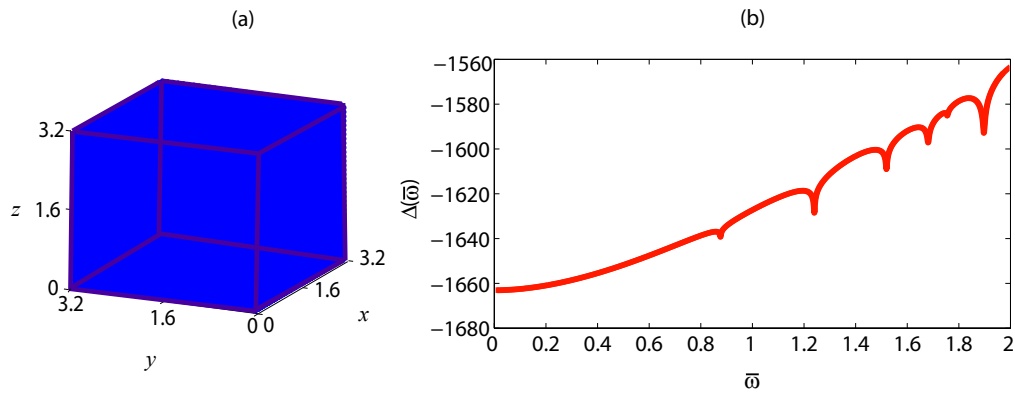


Figura 26. (a) Perfil en 3D de una estructura cúbica cuya arista D es de dimensión π . (b) Modos normales de vibración para la frecuencia reducida $\bar{\omega}$.

En la Fig. 26(b), el determinante involucra los elementos de matriz L_{mn} del sistema dado por la Ec. (63). Los valores mínimos representados como picos invertidos, denotan la posición de los modos resonantes. Nótese la abundante presencia de los mismos y la tendencia que se hace presente.

Analíticamente, el espectro de frecuencias para una cavidad cúbica tiene soluciones definidas por la Ec. (66). Las Ecs. (67) - (69) establecen las restricciones en el caso 3D, aplicables en este tipo de condición de frontera.

En la Tabla 3, se muestra un comparativo de las frecuencias de vibración obtenidas para una cavidad cúbica, determinadas analítica ($\bar{\omega}_a$) y numéricamente ($\bar{\omega}_{L_{mn}}$) en unidades reducidas de la frecuencia ω . En este punto, pudimos validar la certeza de

nuestros cálculos numéricos a través de los datos analíticos que reporta la literatura (Arfken, 2013).

Tabla 3. Resultados analítico-numéricos de los modos en una cavidad cúbica.

Cavidad cúbica						
$p(\mathbf{r}') _{\mathbf{r}' \in S} = 0$						
$\bar{\omega}_a$	0.866	1.225	1.500	1.658	1.732	1.871
$\bar{\omega}_{L_{mn}}$	0.871	1.234	1.516	1.678	1.758	1.899

A partir de la Fig. 26(b), podemos comparar la posición de los picos invertidos que representan los modos de vibración numérica $\bar{\omega}_{L_{mn}}$ y los valores analíticos $\bar{\omega}_a$ referidos en la Tabla 3, mostrando entre ambos un grado de concordancia aceptable.

En la Fig. 27(a) se ha considerado el perfil de una cavidad cúbica tridimensional cuya arista D es de dimensión π , conteniendo una inclusión también cúbica ($D_{int} = 0.2\pi$). Nuevamente, se han calculado numéricamente los determinantes $\Delta(\bar{\omega})$ en función del rango de frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in (0, 2]$, como muestra la Fig. 27(b). Tomamos un muestreo de 1200 puntos totales para el mallado (600 puntos tanto para el cubo interno, como el externo) con una discretización de $\Delta s = \pi/10$.

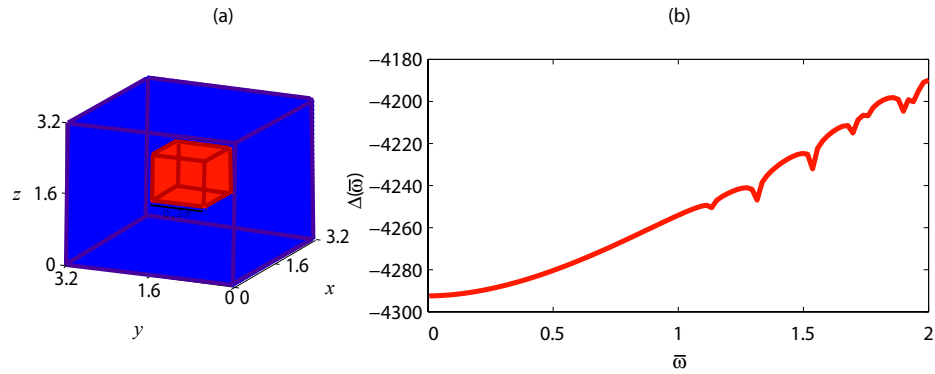


Figura 27. (a) Perfil en 3D de una estructura cúbica de dimensión π , conteniendo una inclusión cúbica adicional de arista 0.2π . (b) Modos normales de vibración para la frecuencia reducida $\bar{\omega}$.

En la Fig. 27(b), el determinante involucra nuevamente a los elementos de matriz L_{mn} del sistema dado por la Ec. (63). Es notoria la tendencia de las curvas respecto a los valores de las frecuencias reducidas $\bar{\omega}$, con formas más pronunciadas y definidas en la Fig. 26(b) respecto a la Fig. 27(b). De ahí que, la presencia de la inclusión cúbica pequeña (Fig. 27(a)) origina los cambios en las posiciones de los mínimos aumentando ligeramente el número de modos (Fig. 26(b)), en comparación con la cavidad cúbica sin inclusión interna (Fig. 26(a)).

Cabe mencionar que, aunque la presencia de algunos de estos mínimos es casi imperceptible en la Fig. 27(b) ($\bar{\omega} = 1.837$, por citar un ejemplo), es posible mejorar la precisión de los mismos a través de un proceso de discretización más fino en las simulaciones numéricas.

Considérese ahora una cavidad tridimensional esférica, de radio $r_s = \pi$ (ver Fig. 28(a)). Se calcularon los determinantes $\Delta(\bar{\omega})$ en función del rango de frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in (0, 2]$, como se muestra en la Fig. 28(b). Tomamos un muestreo de 1222 puntos para el mallado con una discretización de $\Delta s = \pi/10$. En la Fig. 28(b), el determinante involucra los elementos de matriz L_{mn} del sistema propuesto.

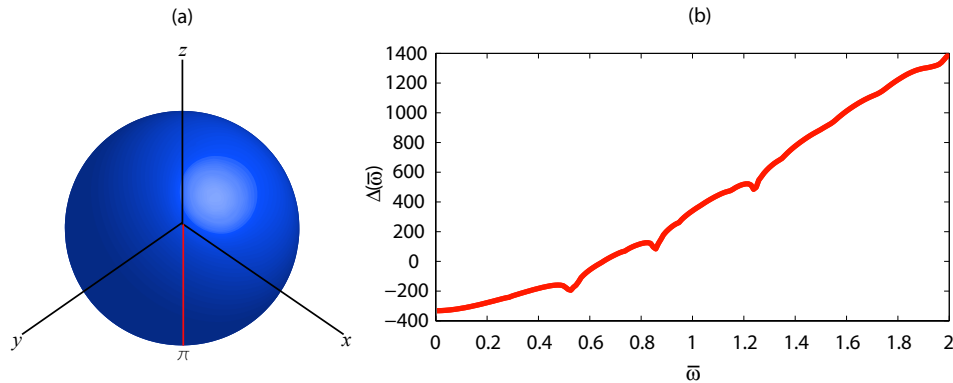


Figura 28. (a) Perfil en 3D de una estructura esférica de radio π . (b) Modos normales de vibración para la frecuencia reducida $\bar{\omega}$.

Nótese una evidente ausencia de los mismos y la tendencia que se hace presente para este tipo de geometría, a diferencia de la presentada con anterioridad en la Fig. 26(b), para una cavidad con forma cúbica.

Analíticamente, el espectro de frecuencias para una cavidad esférica tiene soluciones definidas por la Ec. (74) y las Ecs. (67) - (69) establecen las restricciones en el caso 3D, aplicables en este tipo de condición de frontera.

En la Tabla 4, se muestra un comparativo de las frecuencias de vibración obtenidas para una cavidad esférica, determinadas analítica ($\bar{\omega}_a$) y numéricamente ($\bar{\omega}_{Lmn}$) en unidades reducidas de la frecuencia ω . En este punto, pudimos validar la certeza de nuestros cálculos numéricos a través de los datos analíticos que reporta la literatura (Arfken, 2013).

Tabla 4. Resultados analítico-numéricos de los modos en una cavidad esférica.

Cavidad esférica			
$p(\mathbf{r}') _{\mathbf{r}' \in S} = 0$			
$\bar{\omega}_a$	0.500	0.897	1.230
$\bar{\omega}_{Lmn}$	0.526	0.857	1.238

A partir de la Fig. 28(b), podemos comparar la posición de los picos invertidos que representan los modos de vibración numérica $\bar{\omega}_{Lmn}$ y los valores analíticos $\bar{\omega}_a$ referidos en la Tabla 4, mostrando entre ambos un grado de concordancia aceptable. Los resultados numéricos que se muestran en las Figs. 26(b) y 28(b), se compararon con los valores reportados en estudios recientes (Guel *et al.*, 2016).

La inexactitud de los datos numéricos obtenidos en relación a los cálculos analíticos correspondientes, se origina en el parámetro de discretización implementado. En este punto, se hace necesario implementar mayor tiempo de cómputo para lograr más precisión en los órdenes de magnitud referidos con anterioridad.

En la Fig. 29(a) se ha considerado el perfil de una cavidad esférica tridimensional ($r_s = \pi$) conteniendo una inclusión también esférica ($r_{s_{int}} = 0.2\pi$). Nuevamente, se han calculado numéricamente los determinantes $\Delta(\bar{\omega})$ en función del rango de frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in (0, 2]$, como muestra la Fig. 29(b). Tomamos un muestreo de 2444 puntos totales para el mallado (1200 puntos tanto para la esfera interna, como la externa) con una discretización de $\Delta s = \pi/10$.

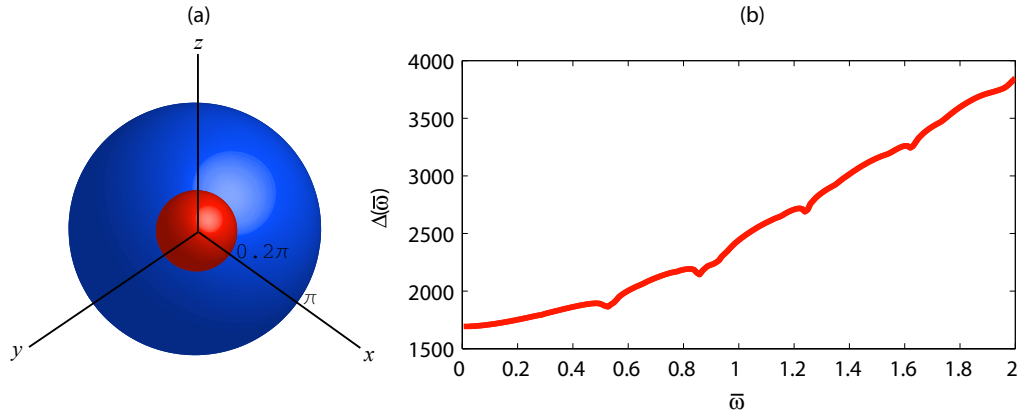


Figura 29. (a) Perfil en 3D de una esfera de radio $r_s = \pi$ con inclusión esférica, $r_{s_{int}} = 0.2\pi$. (b) Modos normales de vibración para la frecuencia reducida $\bar{\omega}$.

En la Fig. 29(b), el determinante involucra nuevamente a los elementos de matriz L_{mn} del sistema dado. Es notoria la tendencia de las curvas respecto a los valores de las frecuencias reducidas $\bar{\omega}$, con formas más pronunciadas y definidas en la Fig. 28(b) respecto a la Fig. 29(b). De ahí que, la presencia de la inclusión esférica pequeña (Fig. 29(a)) incrementa ligeramente el número de modos, sin originar cambios tan notables en las posiciones de los mínimos (Fig. 28(b)), en comparación con la cavidad esférica sin inclusión interna (Fig. 28(a)).

Cabe mencionar que, aunque la presencia de algunos de estos mínimos es casi imperceptible en la Fig. 29(b) ($\bar{\omega} = 1.638$, por citar un ejemplo), de igual manera confiamos en la posibilidad de mejorar la precisión de los mismos a través de un proceso de discretización más minucioso en la simulación numérica. Nótese que en el caso de la Fig.

29(b), el modelado de la cavidad esférica interna se muestreó con un mayor número de puntos, a diferencia de la densidad que se hace presente en la inclusión de la Fig. 27(b).

Finalmente, la Fig. 30(a) representa el perfil de una cavidad tridimensional cúbica y cuya arista D es de dimensión π , conteniendo una inclusión en la forma de una cavidad tridimensional esférica, de radio $r_s = 0.2\pi$. Calculamos numéricamente los determinantes $\Delta(\bar{\omega})$ en función del rango de frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in (0, 2]$, como muestra la Fig. 30(b). Tomamos un muestreo de 1822 puntos totales para la simulación (600 puntos para el mallado de la cavidad cúbica y una densidad de 1222 puntos para la cavidad esférica) con una discretización de $\Delta s = \pi/10$.

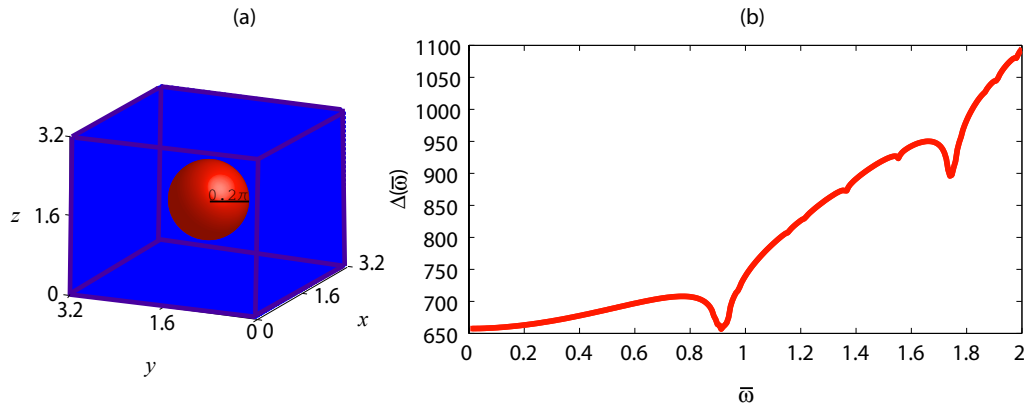


Figura 30. (a) Perfil en 3D de una estructura cúbica de arista π con inclusión esférica, $r_s = 0.2\pi$. (b) Modos normales de vibración para la frecuencia reducida $\bar{\omega}$.

En la Fig. 30(b), el determinante involucra nuevamente a los elementos de matriz L_{mn} . Cabe mencionar que, aunque la presencia de algunos de estos mínimos es casi imperceptible en la Fig. 30(b) ($\bar{\omega} = 1.376$, por citar un ejemplo), confiamos en la posibilidad de mejorar la precisión de los mismos a través de un proceso de discretización más fino en la simulación numérica. Nótese que en el caso de la Fig. 30(a), el modelado de la cavidad cúbica externa se muestreó con un menor número de puntos, a diferencia de la densidad que se hace presente en la forma de la inclusión dada por la cavidad de tipo esférica.

Más aún, es notoria la tendencia de las curvas respecto a los valores de las frecuencias reducidas $\bar{\omega}$, con formas más pronunciadas y definidas en la Fig. 30(b) respecto a la Fig. 27(b) y 29(b). De ahí que, el tipo de inclusión interna (Figs. 27(a) y 30(a)) cambia el número de modos y origina distintas posiciones de los mínimos (Fig. 27(b) y 30(b)); así como el mismo comparativo se hace presente, en relación a las Figs. 29(a) y 30(a), al modificar la forma de la cavidad externa. De ahí que sea posible establecer, que las distintas geometrías en cada uno de los perfiles origina tales peculiaridades.

La contribución de nuestro estudio reside en el desarrollo de un procedimiento que nos permita analizar los modos de resonancia en cavidades cerradas, probándose los elementos de matriz en distintas configuraciones. Por la dificultad que se tiene al configurar estos factores, se hace necesario ajustar el número de términos adecuados para obtener un grado de precisión con las expansiones involucradas. No obstante, se tiene la confianza del método numérico propuesto para obtener buenos resultados en este tipo de sistemas, ya que ha sido validado paso a paso, en cada uno de los casos más particulares.

Capítulo IV

ESTRUCTURAS DE BANDAS EN GUÍAS DE ONDAS FONÓNICAS

En este capítulo, se implementa el NSIM para el cálculo de las estructuras de bandas de una 3DPnCW formada por placas plano-paralelas con superficies rígidas y suaves, en cuyo interior se encuentra un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas. La ventaja de analizar este tipo de problemas es el menor costo de recurso computacional, en relación a considerar el sistema de dimensión finita. La implementación del NSIM bajo la condición de frontera de Dirichlet, presenta ciertas limitaciones en el grado de precisión de resultados preliminares. No obstante, estos sirvieron como base para introducir una aproximación teórico-numérica más concisa y exitosa en el tratamiento de la condición de frontera de Neumann: el PGFM.

IV.1. Descripción del NSIM para calcular estructuras de bandas fonónicas

El análisis propuesto a continuación (Villa-Villa *et al.*, 2017), ha sido desarrollado para el estudio de sistemas acústicos en problemas interiores y exteriores sobre geometrías

que involucran regiones homogéneas múltiples. Dicha metodología va en función de adaptar los métodos integrales ya existentes, con el tratamiento especial del nuevo sistema de ecuaciones a resolver.

La Fig. 31 muestra una celda vacía cúbica de una guía de ondas tridimensional, periódica en la dirección x y formada por cuatro superficies acústicas planas paralelas a la dirección longitudinal de la PnCW. Este sistema posee simetría a lo largo de una de las tres direcciones independientes del sistema cartesiano. Vamos a determinar las estructuras de bandas utilizando NSIM bajo la condición de frontera de Dirichlet.

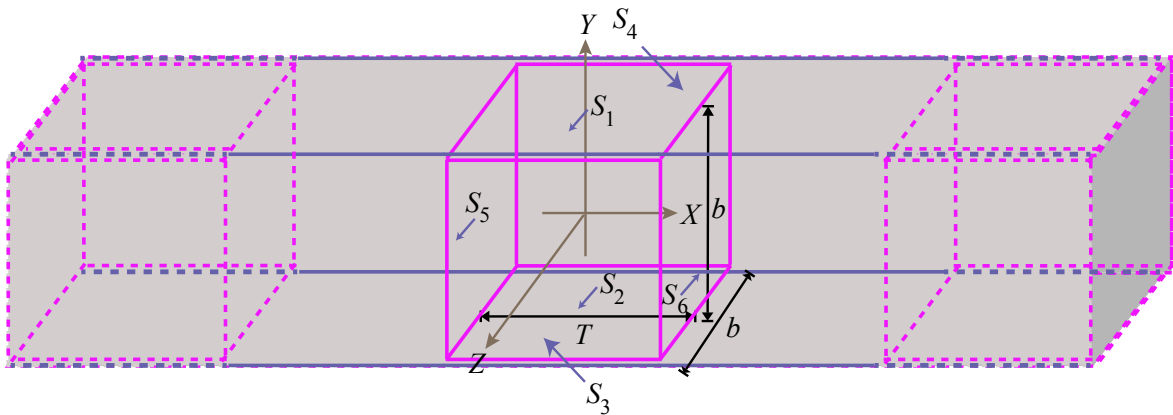


Figura 31. Descripción gráfica de una guía de ondas en 3D, periódica en la dirección x y formada por cuatro superficies acústicas planas paralelas a la dirección longitudinal de la PnCW. Las superficies planas S_j ($j = 1, 2, 3, 4$) representan los lados de la celda cúbica unitaria vacía.

Deberá entonces expresarse un sistema de ecuaciones integrales para un conjunto de términos que representan las caras del cubo, denotadas por subíndices para un sistema análogo a la Ec. (61) y donde la presión acústica p se anulará en las 4 placas paralelas a la dirección longitudinal de la PnCW. En cambio, las 2 caras transversales a la dirección longitudinal de la guía corresponden a la periodicidad del sistema considerado y determinan las regiones donde aplicaremos las condiciones de Bloch, para los campos en los límites de la celda unitaria.

Para resolverlo numéricamente, consideramos como base que se repetirá infinitamente la celda cúbica centrada en el origen con superficies $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ y efectuamos un muestreo $x = x_n, y = y_n$ y $z = z_n$, a lo largo de cada plano. Nótese que los puntos (x_n, y_n, z_n) delimitados por las superficies paralelas, deben ser correspondientes entre sí. Por lo tanto, cada superficie tiene asociada un número específico de puntos: $S_1 = S_2 = N_y; S_3 = S_4 = N_z; S_5 = S_6 = N_x$.

Por lo tanto, a partir de la Ec. (31) se obtiene el sistema de ecuaciones algebraico, en la forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_y} L_{mn1}^{(1)} \Phi_{n1}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_y} L_{mn2}^{(1)} \Phi_{n2}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_z} L_{mn3}^{(1)} \Phi_{n3}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_z} L_{mn4}^{(1)} \Phi_{n4}^{(1)} \\ & + \sum_{n=1}^{N_x} L_{mn5}^{(1)} \Phi_{n5}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_x} L_{mn6}^{(1)} \Phi_{n6}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_x} N_{mn5}^{(1)} p_{n5}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_x} N_{mn6}^{(1)} p_{n6}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (77)$$

donde $m = 1, \dots, N$; siendo $N = 2(2N_x + N_y + N_z)$.

Para distinguir los puntos correspondientes a cada una de las caras de la celda cúbica en las funciones del campo de presión y de los elementos de matriz, hemos agregado la dependencia de $n(j)$, $j = 1, 2, \dots, 6$. Además, hemos incorporado el superíndice para indicar las propiedades del medio formado por la celda unitaria y asumimos que las normales van hacia afuera de la superficie en todas partes.

Aplicando la condición de periodicidad en la forma $(x_n + k_{B_x}, y_n, z_n)$, las funciones fuente de las caras S_5 y S_6 de la celda unitaria se pueden expresar como:

$$p_{n5}^{(1)} = e^{-ik_{B_x}T} p_{n6}^{(1)}, \quad (78)$$

$$\Phi_{n5}^{(1)} = -e^{-ik_{B_x}T} \Phi_{n6}^{(1)}, \quad (79)$$

siendo k_{B_x} la magnitud del vector de onda de Bloch en la dirección x .

Sustituyendo las Ecs. (78) y (79) en la Ec. (77), se obtiene el sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_y} L_{mn1}^{(1)} \Phi_{n1}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_y} L_{mn2}^{(1)} \Phi_{n2}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_z} L_{mn3}^{(1)} \Phi_{n3}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_z} L_{mn4}^{(1)} \Phi_{n4}^{(1)} \\ & + \sum_{n=1}^{N_x} \left[L_{mn5}^{(1)} - e^{-ik_{B_x} T} L_{mn6}^{(1)} \right] \Phi_{n6}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_x} \left[N_{mn5}^{(1)} + e^{-ik_{B_x} T} N_{mn6}^{(1)} \right] p_{n6}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (80)$$

La forma explícita de los elementos de matriz no diagonales L_{mn} y N_{mn} , está dada como (Guel *et al.*, 2016):

$$L_{mn} = \frac{\Delta s^2}{4\pi} \frac{e^{ik_{B_x} r_{mn}}}{r_{mn}}, \quad (81)$$

$$N_{mn} = \frac{\Delta s^2}{4\pi} e^{ik_{B_x} r_{mn}} \left(-\frac{1}{r_{mn}^3} + \frac{ik_{B_x}}{r_{mn}^2} \right) \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \mathbf{r}_{mn}, \quad (82)$$

donde Δs es el cambio en la longitud de arco de las coordenadas curvilíneas ortogonales sobre la representación paramétrica del sistema; el vector de posición \mathbf{r}_{mn} está definido por $\mathbf{r}_{mn} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n$ y su magnitud por $r_{mn} = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|$. Asimismo, los elementos de matriz diagonales L_{nn} y N_{nn} son

$$L_{nn} = \frac{\Delta s}{4\pi} \left[\left(2 \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right) + \frac{ik_{B_x} \Delta s^2}{4\pi} \right] - \frac{k_{B_x}^2 \Delta s^3}{48\pi} \left(2\sqrt{2} + \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right), \quad (83)$$

$$N_{nn} = \frac{1}{2} + (\tau_{nu} + \tau_{nv}) \left[\frac{\Delta s}{8} + \frac{\Delta s^2}{32} \left(\frac{1}{k_{B_x}^2} + ik_{B_x} \right) \right]. \quad (84)$$

siendo τ_{nu} y τ_{nv} los vectores de curvatura del sistema, expresados a través del vector normal $\hat{\mathbf{n}}_n$ por las primeras y segundas derivadas del vector de posición en cada punto de las superficies involucradas, respecto al cambio en la longitud de arco Δs .

Finalmente, la estructura de bandas se determinará mediante el cálculo de los valores mínimos del determinante del sistema, en forma análoga al análisis que se realizó para el estudio de las frecuencias de vibración en cavidades. La diferencia es que ahora, para el cálculo de las estructuras de bandas, se efectuará una variación adicional respecto a la magnitud del vector de onda de Bloch k_{B_x} , dentro de un rango de particular interés.

Es costumbre introducir cantidades adimensionales: un vector de Bloch reducido $\bar{k}_B = (P/2\pi)k_{B_x}$ y una frecuencia reducida $\bar{\omega} = (T/2\pi c_l)\omega$. Nuestros resultados serán representados más adelante, en términos de esas cantidades.

Ahora vamos a considerar una celda unitaria con una inclusión esférica de radio r_s (que es nuestro problema de estudio) centrada en el origen dentro del cubo (ver Fig. 32). Por simplicidad, consideramos que el campo de presiones también se anula en la superficie del dispersor. La esfera tiene asociada un número específico de puntos N_s y es denotada como la superficie S_0 .

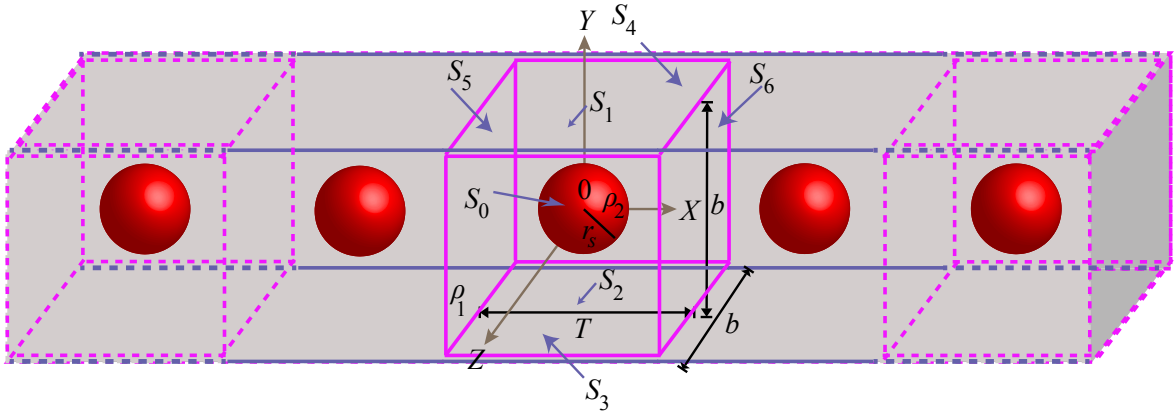


Figura 32. Descripción gráfica de la 3DPnCW formada por cuatro superficies acústicas planas paralelas a la dirección longitudinal y un arreglo de inclusiones esféricas de radios r_s periódicamente en la dirección x . Las superficies planas S_j ($j = 1, 2, 3, 4$) representan los lados de la celda cúbica unitaria, y S_0 la superficie de la esfera.

Mediante un procedimiento análogo al aplicado para la Ec. (80), se obtiene un

sistema de ecuaciones lineales homogéneo, ante la presencia de la inclusión esférica:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{N_y} L_{mn1}^{(1)} \Phi_{n1}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_y} L_{mn2}^{(1)} \Phi_{n2}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_z} L_{mn3}^{(1)} \Phi_{n3}^{(1)} \\
& + \sum_{n=1}^{N_z} L_{mn4}^{(1)} \Phi_{n4}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_s} L_{mn0}^{(1)} \Phi_{n0}^{(1)} \\
& + \sum_{n=1}^{N_x} \left[L_{mn5}^{(1)} - e^{-ik_{B_x}T} L_{mn6}^{(1)} \right] \Phi_{n6}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_x} \left[N_{mn5}^{(1)} + e^{-ik_{B_x}T} N_{mn6}^{(1)} \right] p_{n6}^{(1)} = 0, \quad (85)
\end{aligned}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \sum_{n=1}^{N_s} L_{mn0}^{(2)} \Phi_{n0}^{(2)} = 0. \quad (86)$$

donde ρ_1 y ρ_2 representan las densidades de los medios correspondientes.

La Ecs. (85) y (86) constituyen un sistema lineal homogéneo de ecuaciones que tiene una matriz representativa M , que depende de la frecuencia ω y del vector de Bloch k_{B_x} . Por lo tanto, una solución no trivial puede ser obtenida si el determinante asociado a M y representado por la función

$$D(k_{B_x}, \omega) = \ln(|\det(M)|), \quad (87)$$

es cero. Lo anterior, garantiza la obtención de soluciones linealmente independientes entre sí. Numéricamente, la Ec. (87) presenta puntos mínimos locales que, aunque no implican ceros del determinante, nos dan la relación de dispersión $\omega = \omega(k_{B_x})$ que se desea obtener.

Nótese que una desventaja al considerar estructuras en las que se hacen presentes varias combinaciones de geometrías distintas (tal como es el caso de la celda cúbica con inclusión esférica), es que no existen resultados analíticos con los que puedan compararse los datos numéricos obtenidos.

Por otro lado, a manera de garantizar una aproximación más concisa y sujeta a la concordancia con los resultados teóricos que son la base de nuestro estudio, se utilizó una herramienta de cálculo adicional para resolver la matriz del sistema: el método numérico

de Descomposición de Valores Singulares (SVD¹). Sin embargo, como lo anterior trae como consecuencia un incremento considerable del tiempo en la ejecución de los códigos, únicamente recurrimos a su implementación en aquellos casos en los que lo consideramos absolutamente necesario.

IV.2. Descripción analítica para el cálculo de estructuras de bandas fonónicas

Centrando nuestra atención en una celda cúbica vacía (sin inclusiones), la estructura de bandas puede ser calculada al considerar el vector de onda en un medio periódico:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c_l} |\mathbf{k}_B + \mathbf{G}|, \quad (88)$$

el cual puede ser expresado en términos de la frecuencia reducida,

$$\bar{\omega} = \frac{T}{2\pi} |k_{B_x} + G|. \quad (89)$$

En este caso, T es el parámetro de red de la celda unitaria; k_{B_x} es el vector de Bloch unidimensional y \mathbf{G} representa los vectores de la red recíproca,

$$\mathbf{G} = \frac{2\pi}{T} (l\hat{\mathbf{i}} + m\hat{\mathbf{j}} + n\hat{\mathbf{k}}), \quad (90)$$

con $l, m, n \in \mathbb{Z}$.

Analíticamente dicha estructura de bandas en 3D periódicamente en una sola dirección, puede ser obtenida a través de la relación de dispersión (Arfken, 2013):

$$\bar{\omega}(k_{B_x}) = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\left(k_{B_x} - \frac{2\pi}{T}l\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}m\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}n\right)^2}, \quad (91)$$

¹Por sus siglas en inglés, Singular Value Decomposition.

para $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, 2N$ y $m, n = 1, 2, \dots, N$ (en el caso de superficies acústicas suaves). Siendo la magnitud del vector de Bloch dentro de la primera zona de Brillouin, $-\pi/T \leq k_{B_x} \leq \pi/T$. La distancia entre las superficies planas se denota por el parámetro b .

IV.3. Estructuras de Bandas Fonónicas: NSIM

En esta sección, un estudio numérico preliminar del sistema propuesto es presentado. El análisis de los casos límite es importante para verificar la precisión de la técnica numérica NSIM en la obtención de resultados sobre las estructuras de bandas, bajo la condición de frontera de Dirichlet.

IV.3.1. Estructuras de bandas de una PnCW sin inclusiones

Una comparación preliminar entre los resultados analíticos y los correspondientes cálculos numéricos de la guía de onda vacía en 3D con paredes planas suaves (ver Ec. (104)), resolviendo la matriz del sistema a través de la función determinante (3DNSIM-DET) [Ec. (87)] y mediante la implementación de la herramienta de cálculo adicional (3DNSIM-SVD), se muestran en las Figs. 33(a) y 33(b) respectivamente. En estos ejemplos, la distancia entre las superficies planas es $b = 2\pi$. Se implementó una discretización de $\Delta s = (T/\bar{\omega}_{m\acute{a}x})/20 = 0.1571$, en el rango de frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in (0, 2]$. Los datos analíticos se muestran a través de las curvas en círculos azules y los numéricos por las líneas sólidas formadas a través de los puntos rojos.

En ambas Figs. 33(a) y 33(b), se consideró un muestreo de 782 puntos para el modelado. Sin embargo, un tiempo de cómputo de 2.7 hrs corresponde al asociado para la Fig. 33(a), mientras que 3.1 hrs fueron necesarias para el cálculo numérico en la Fig. 33(b).

Las estructuras de bandas obtenidas por ambas técnicas en la Fig. 33, muestran discrepancias entre las diversas aproximaciones para el caso 3D y bajo la condición de frontera de Dirichlet.

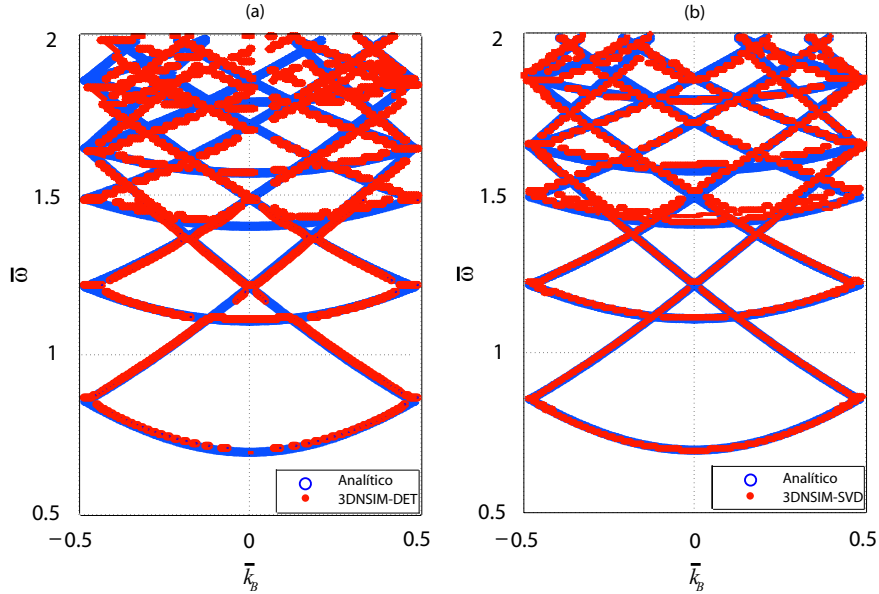


Figura 33. Estructuras de bandas de una guía de ondas vacía en 3D con superficies suaves, bajo la condición de frontera de Dirichlet. La distancia entre las paredes es $b = 2$. Modelos analíticos (círculos azules) y numéricos (puntos rojos) son comparados: (a) NSIM-DET, (b) NSIM-SVD.

El resultado numérico mostrado en la Fig. 33(b) brinda un mayor grado de confiabilidad, respecto al mostrado en la Fig. 33(a). Resulta notorio para nosotros tales discrepancias, dado que la resolución de la matriz del sistema de ecuaciones a través de la Ec. (87), en el caso de estructuras bidimensionales proporciona un excelente grado de concordancia en el estudio de problemas sobre 2DPnCW. De ahí que, a manera de garantizar una aproximación más concisa en la totalidad de los cálculos generados a continuación, se implementará únicamente SVD en la obtención de todos los resultados relacionados con 3DPnCW.

Una comparación entre los resultados analíticos y los correspondientes cálculos numéricos de las guías de onda vacías en 2D y 3D respectivamente, con paredes planas

suaves (ver Ec. (104)) se muestran en la Fig. 34. En este ejemplo, se implementan los mismos parámetros referidos con anterioridad. Los datos analíticos se muestran nuevamente a través de las curvas en círculos azules y los numéricos, por las líneas sólidas formadas a través de los puntos rojos.

En la Fig. 34(a), se consideró un muestreo de 469 puntos y un tiempo de cómputo de 2.5 hrs; por otro lado, en la Fig. 34(b): 782 puntos y un tiempo de cómputo de 3.1 hrs en el cálculo de las estructuras de bandas numéricas en 2D y 3D, respectivamente. Las estructuras de bandas calculadas por ambos métodos en la Fig. 34, muestran una buena concordancia en los casos 2D y 3D para la condición de frontera de Dirichlet.

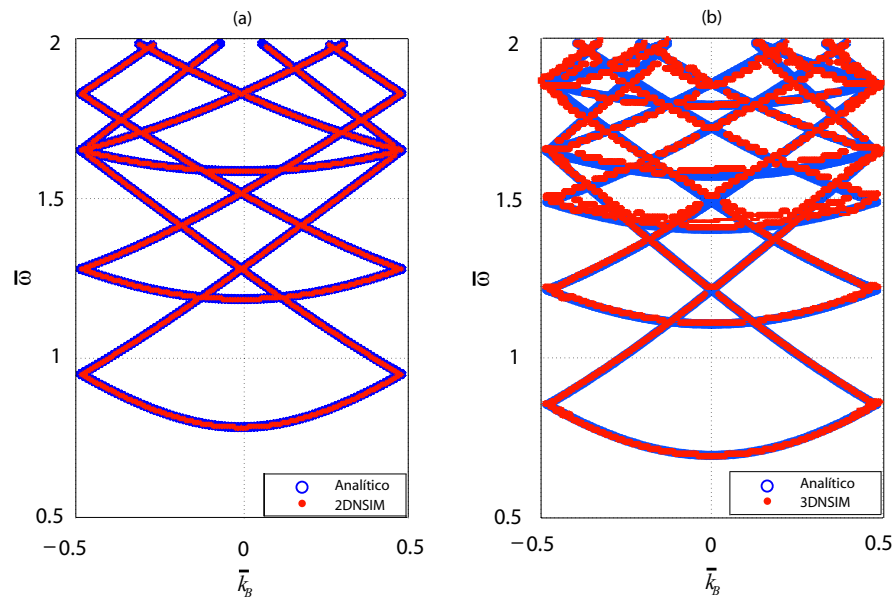


Figura 34. Estructuras de bandas de una guía de ondas vacía en (a) 2D y (b) 3D con superficies suaves, bajo la condición de frontera de Dirichlet. La distancia entre las paredes es $b = 2$. Modelos analíticos (círculos azules) y numéricos (puntos rojos) son comparados.

Los resultados mostrados en la Fig. 34 brindan cierto grado de confiabilidad en diversos cálculos posteriores, donde ahora consideramos una guía de ondas rectangular en la forma de 2DPnCW y 3DPnCW, con un arreglo interno periódico de inclusiones en la dirección x .

Reiterando que se implementó SVD en la obtención de todos los resultados en 3D presentados a continuación, el tiempo en la ejecución de los códigos fue un aspecto que dejamos de priorizar.

IV.3.2. Estructuras de bandas de una PnCW con inclusiones

Para este propósito, tres diferentes configuraciones son consideradas en la Fig. 35, cuyos radios de las circunferencias son $r_c = 0.112099$ (Fig. 35(a)), $r_c = 1.227992$ (Fig. 35(b)) y $r_c = 1.622709$ (Fig. 35(c)). Estos valores de los radios serán tomados en cuenta para el caso 3D. Usando el 2DNSIM, mostramos las estructuras de bandas fonónicas en las Figs. 35(d) - 35(f) bajo condición de frontera de Dirichlet. Los parámetros para evaluar las integrales en estos ejemplos fueron elegidos como $\Delta_{square} = (T/\bar{\omega}_{m\acute{a}x})/15 = 0.2094$, para la celda cuadrada y $\Delta_{circle} = (T/\bar{\omega}_{m\acute{a}x})/25 = 0.1256$ para la inclusión circular cilíndrica, en el intervalo de las frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in [1, 2]$.

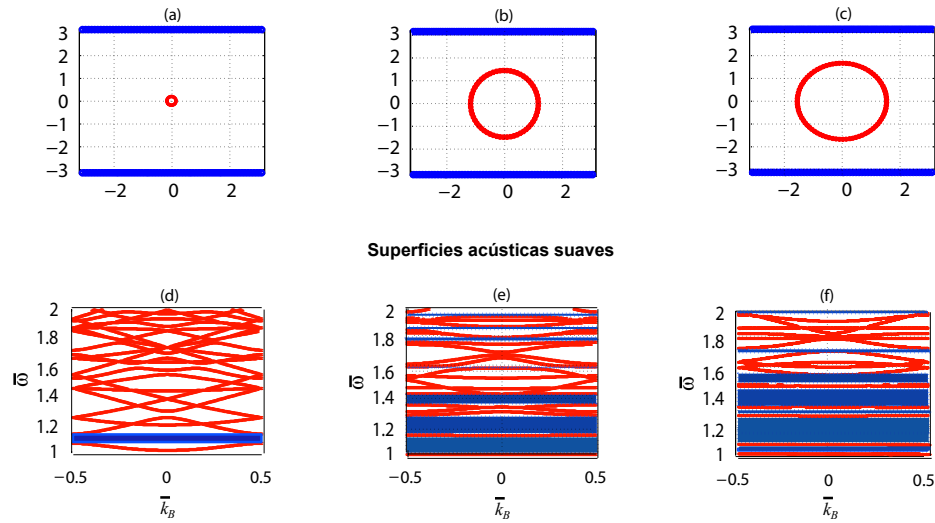


Figura 35. Celda unitaria de una guía de ondas rectangular bidimensional conteniendo un arreglo periódico unidimensional de inclusiones circulares cilíndricas con radio (a) $r_c = 0.112099$, (b) $r_c = 1.227992$, (c) $r_c = 1.622709$. (d)-(f) Diagramas de bandas fonónicas de la PnCW bidimensional usando nuestro método numérico (2DNSIM), bajo condición de frontera de Dirichlet. La distancia entre las superficies planas de la guía de onda rectangular es $b = 2\pi$.

A través de un razonamiento análogo, tres diferentes configuraciones son consideradas con los radios de las esferas: $r_s = 0.083995$ (Fig. 36(a)), $r_s = 1.286778$ (Fig. 36(b)) y $r_s = 1.525618$ (Fig. 36(c)). Usando el 3DNSIM, mostramos las estructuras de bandas fonónicas en las Figs. 36(d) - 36(f) bajo la condición de frontera de Dirichlet. Los parámetros para evaluar las integrales en estos ejemplos fueron elegidos como $\Delta_{s_{cube}} = (P/\bar{\omega}_{m\acute{a}x})/10 = 0.3141$ para la celda cúbica y $\Delta_{s_{sphere}} = (P/\bar{\omega}_{m\acute{a}x})/60 = 0.0524$ para la inclusión esférica, en el intervalo de las frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in [1, 2]$.

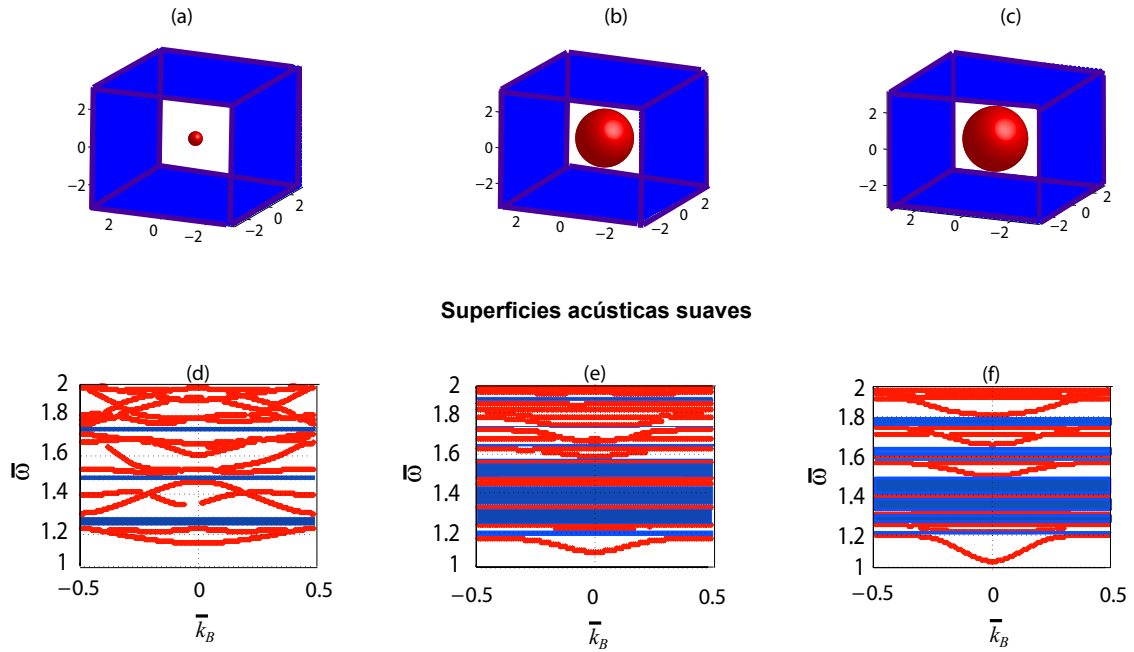


Figura 36. Celda unitaria de una guía de ondas rectangular tridimensional que contiene un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas con radios (a) $r_s = 0.083995$, (b) $r_s = 1.286778$, (c) $r_s = 1.525618$. (d)-(f) Diagramas de bandas fonónicas, de la PnCW tridimensional usando nuestro método numérico (3DNSIM), bajo condición de frontera de Dirichlet. La distancia entre las superficies planas de la guía de onda rectangular en 3D es $b = 2\pi$.

Nótese en las Figs. 35(d) - 35(f) y 36(d) - 36(f), la aparición de bandas prohibidas parciales, bandas prohibidas completas (barras azules) o una combinación de ambas, para algunos rangos de frecuencias bajas de las estructuras propuestas por los perfiles

en las Figs. 35(a) - 35(c) y 36(a) - 36(c), con diferentes valores de los radios (o fracciones de llenado de la celda unitaria).

Más aún, en condición de frontera de Dirichlet como se muestra en las Figs. 35(e) - 35(f) y 36(e) - 36(f), fue posible obtener modos discretos para algunos rangos de frecuencias, cuando la fracción de llenado de la celda unitaria aumenta. Lo anterior, es un indicativo de que la guía de onda de cristal fonónico actúa como un filtro unimodal cuando el valor del radio de la inclusión es grande. Estas propiedades podrían representar un interés notable desde un punto de vista tecnológico.

Cabe mencionar que, también se implementaron los elementos teóricos pertinentes para realizar el tratamiento especial de la condición de frontera de Neumann y así poder determinar, las estructuras de bandas fonónicas del sistema infinito. Sin embargo, los cálculos preliminares obtenidos demostraron ser incorrectos. Lo anterior, debido a que no mostraron con claridad la ubicación de las frecuencias posibles.

Por ello, se hizo necesario desarrollar una nueva técnica integral numérica para estudiar el sistema propuesto, basada en el uso de funciones de Green periódicas: el PGFM, la cual es descrita a continuación.

IV.4. Descripción del Método de la Función de Green Periódica

En esta sección, introducimos un método numérico para calcular estructuras de bandas fonónicas de una 3DPnCW formada por cuatro paredes rígidas planas que contienen un arreglo periódico de esferas suaves o duras, en una sola dirección. Consideramos que todas las superficies involucradas son acústicas y que el medio entre las paredes y las esferas es aire. Véase en la Fig. 37, la geometría del sistema tridimensional propuesto.

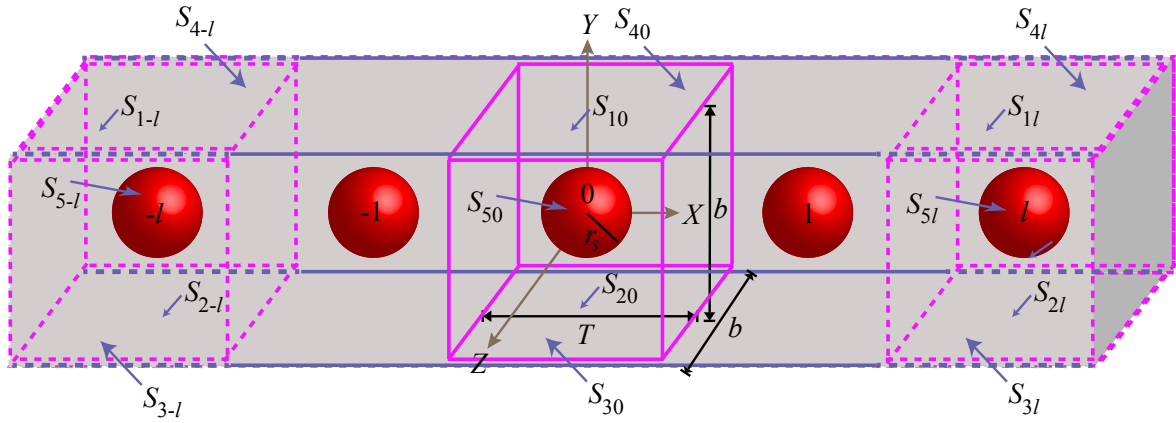


Figura 37. Descripción gráfica de la 3DPnCW formada por cuatro superficies acústicas planas paralelas a la dirección longitudinal y un arreglo de inclusiones esféricas de radios r_s periódicamente en la dirección x . Las superficies planas S_{jl} ($j = 1, 2, 3, 4$) representan los lados de la l -ésima celda cúbica, y S_{5l} la superficie de la esfera.

Sea T el periodo de la guía de onda en la dirección x , b es la distancia entre las paredes planas y r_s es el radio de la esfera. Las superficies planas son denotadas por S_{jl} ($j = 1, 2, 3, 4$) y S_{5l} representa la superficie de la esfera, con $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Un cierto valor de l representa una celda unitaria de la estructura periódica interna de la guía de ondas. Así, para $l = 0$ corresponde a la celda unitaria cuyo centro es el origen del sistema de coordenadas cartesiano considerado. Además, el símbolo S_l es considerado para representar todas las superficie asociadas a la l -ésima celda unitaria.

Para iniciar el estudio del sistema propuesto, consideramos como punto de partida la ecuación de Helmholtz (Ec. (14)). Como nuestro problema es encontrar las estructuras de bandas del sistema propuesto, usaremos un método integral que puede ser formulado con una Función de Green Periódica para la ecuación de Helmholtz, bajo condiciones de frontera de Dirichlet o de Neumann. La periodicidad en la dirección x de la 3DPnCW es considerada (ver Fig. 37). Debido a esta propiedad el teorema de Bloch puede ser aplicado.

Esto hace posible el obtener las dos relaciones de periodicidad siguientes:

$$p_l(x + lT, y, z) = e^{ik_{B_x}lT} p_0(x, y, z) \quad (92)$$

y

$$\frac{\partial p_l(x + lT, y, z)}{\partial n} = e^{ik_{B_x}lT} \frac{\partial p_0(x, y, z)}{\partial n}, \quad (93)$$

donde k_{B_x} es el vector de Bloch unidimensional a lo largo de la dirección de propagación del eje x .

A fin de poder determinar la estructura de bandas, la relación de dispersión debe ser determinada por $\omega = \omega(k_{B_x})$. Para hacer esto, vamos a considerar una función de Green en 3D dada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{i\frac{\omega}{c_l}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (94)$$

con la interpretación usual: \mathbf{r} y \mathbf{r}' son los puntos de observación e integración, respectivamente. La función de Green es una solución para

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \left(\frac{\omega}{c_l}\right)^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (95)$$

Considerando la geometría mostrada en la Fig. 37 y aplicando la segunda identidad de Green en 3D para la onda de presión y la función de Green (en la región compuesta por aire), podemos obtener la expresión

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_l} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} p_l(\mathbf{r}') \right] dS' = \theta(\mathbf{r}) p_0(\mathbf{r}), \quad (96)$$

con

$$\theta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V_0, \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin V_0. \end{cases} \quad (97)$$

dS' es el elemento de área, $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal exterior a la región de integración, V_0 es el volumen de la celda unitaria con $l = 0$ y los puntos de integración \mathbf{r}' están infinitesimalmente separados desde las superficies S_{jl} .

Vamos a considerar una versión numérica del lado izquierdo de la Ec. (96) tomando un muestreo de pequeñas superficies denotadas por ΔS_l^n , sobre la correspondiente superficie de integración S_l , con $n = 1, 2, \dots, N$, tal que

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_l} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} p_l(\mathbf{r}') \right] dS' \approx \quad (98)$$

$$\sum_{n=1}^N q_n \left(\frac{1}{4\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta S_l^n} e^{ik_{B_x} lT} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right) - \sum_{n=1}^N p_n \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_l^n} e^{ik_{B_x} lT} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \right), \quad (99)$$

siendo p_n y q_n los valores numéricos de la presión $p_0(\mathbf{r}')$ y su derivada normal $\partial p_0(\mathbf{r}')/\partial n'$ evaluadas en el n -ésimo punto central, denotado por \mathbf{R}_n de las pequeñas superficies ΔS_l^n . En esta última expresión las relaciones de periodicidad, Ecs. (92) y (93), son usadas. Esto es conveniente para seleccionar N puntos de observación $\mathbf{R}_n + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_n)$, con ε una cantidad infinitesimal positiva. De este modo, la diferencia $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, nunca será cero. Finalmente, la Ec. (96) puede ser escrita en forma de un sistema de ecuaciones algebraico lineal, que es homogéneo:

$$\sum_{n=1}^N \mathcal{L}_{mn}(k_{B_x}, \omega) q_n - \sum_{n=1}^N \mathcal{N}_{mn}(k_{B_x}, \omega) p_n = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (100)$$

donde los elementos de matriz $\mathcal{L}_{mn}(k_{B_x}, \omega)$ y $\mathcal{N}_{mn}(k_{B_x}, \omega)$, que dependen del vector de Bloch y la frecuencia, están dados por

$$\mathcal{L}_{mn}(k_{B_x}, \omega) = \sum_{l=-N_L}^{N_L} e^{ik_{B_x} lT} L_{mn}^l(\omega)$$

y

$$\mathcal{N}_{mn}(k_{B_x}, \omega) = \sum_{l=-N_L}^{N_L} e^{ik_{B_x} lT} N_{mn}^l(\omega), \quad (101)$$

siendo N_L el valor máximo del índice l , numéricamente considerado. Este número entero positivo representa una forma simple para truncar las series dando resultados precisos, por supuesto, si N_L es suficientemente grande.

Adicionalmente, en las dos últimas expresiones los elementos de matriz $L_{mn}^l(\omega)$ y $N_{mn}^l(\omega)$ son definidos por los límites

$$L_{mn}^l(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Delta S_l^n} \frac{e^{i\frac{\omega}{c_l}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_m+\varepsilon\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_m)} dS' \quad (102)$$

y

$$N_{mn}^l(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Delta S_l^n} e^{i\frac{\omega}{c_l}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - i\frac{\omega}{c_l} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right) (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_m+\varepsilon\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_m)} dS', \quad (103)$$

donde la función de Green (Ec. (94)) y su derivada normal son usadas.

Para el sistema propuesto, superficies acústicas suaves son consideradas teóricamente en este trabajo. En este caso, es bien sabido que la presión acústica es cero sobre las superficies (condición de frontera de Dirichlet). Esto lleva a $p_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots, N$, en la Ec. (100), así un sistema de ecuaciones reducidas es obtenido,

$$\sum_{n=1}^N \mathcal{L}_{mn}(k_{B_x}, \omega) q_n = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (104)$$

Para superficies acústicas rígidas, la derivada normal de la presión acústica es cero (condición de frontera de Neumann). Esto lleva a $q_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots, N$, en la Ec. (100), de este modo obteniendo la expresión

$$\sum_{n=1}^N \mathcal{N}_{mn}(k_{B_x}, \omega) p_n = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (105)$$

El sistema de ecuaciones lineales obtenido tiene una matriz representativa asociada, $M(k_{B_x}, \omega) = \mathcal{L}_{mn}(k_{B_x}, \omega)$ o $\mathcal{N}_{mn}(k_{B_x}, \omega)$, que depende del vector de Bloch k_{B_x} y la frecuencia ω . Ya que el sistema de ecuaciones es homogéneo, una solución no trivial puede ser obtenida si el determinante de tal matriz es cero. A fin de determinar la estructura de bandas, definimos la función

$$D(k_{B_x}, \omega) = \ln(|\det(M(k_{B_x}, \omega))|), \quad (106)$$

la cual numéricamente presenta puntos mínimos locales y nos darán la relación de dispersión numérica $\omega = \omega(k_{B_x})$. De este modo, la estructura de bandas de la 3DPnCW puede ser calculada.

IV.5. Estructuras de Bandas Fonónicas: PGFM

En esta sección, un estudio numérico del sistema propuesto es presentado nuevamente. El análisis de los casos límite (superficies acústicas suaves y duras), se hace necesario para establecer un comparativo y verificar el grado de precisión del método numérico PGFM respecto al NSIM, el cual es usado para complementar los resultados de este trabajo.

IV.5.1. Estructuras de bandas de una PnCW sin inclusiones

Una comparación entre los resultados analíticos (Ec. (91)) y los correspondientes cálculos numéricos de las guías de onda vacías en 2D y 3D respectivamente, con paredes planas suaves (Ec. (104)) se muestran en la Fig. 38. En estos ejemplos, la distancia entre las superficies planas es $b = 2\pi$, implementándose una discretización de $\Delta s = (T/\bar{\omega}_{máx})/20$ en el intervalo de las frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in [0.5, 2]$. Para este caso, el valor máximo del índice l fue de $N_L = 31$. Los datos analíticos se muestran a través de las curvas en círculos azules y los numéricos por las líneas sólidas formadas a través de los puntos rojos.

En la Fig. 38(a), se consideró un muestreo de 1280 puntos y un tiempo de cómputo de 13.5 hrs; por otro lado, en la Fig. 38(b), 3600 puntos y un tiempo de cómputo de 32.9 hrs en el cálculo de las estructuras de bandas numéricas en 2D y 3D, respectivamente.

Las estructuras de bandas calculadas por ambos métodos en la Fig. (38), muestran una buena concordancia en los casos 2D y 3D para la condición de frontera de Dirichlet (Guillén *et al.*, 2019).

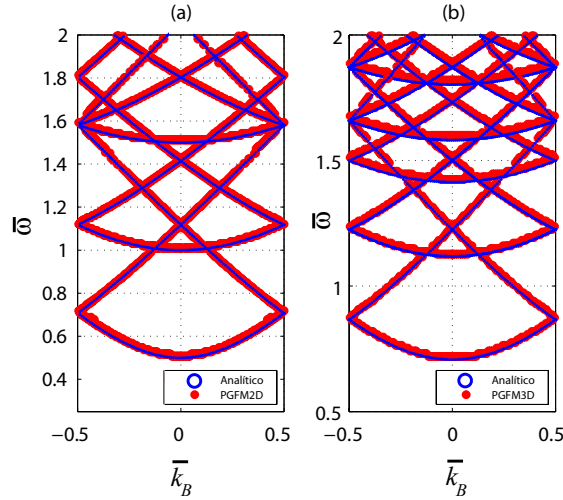


Figura 38. Estructuras de bandas de una guía de ondas vacía en (a) 2D y (b) 3D con superficies suaves, bajo la condición de frontera de Dirichlet. La distancia entre las paredes es $b = 2$. Modelos analíticos (círculos azules) y numéricos (puntos rojos) son comparados.

Del mismo modo, se efectúa una comparación entre los resultados analíticos (Ec. (91), donde $n, q = 0, 1, 2, \dots, N$) y los correspondientes cálculos numéricos de las guías de onda vacías 2D y 3D, respectivamente con paredes planas rígidas (ver Ec. (105)) como se muestra en la Fig. 39. Fueron considerados los mismos parámetros de simulación anteriores. Nuevamente, los datos analíticos se muestran a través de las curvas en cruces azules y los numéricos, por las líneas sólidas formadas a través de los puntos rojos.

En la Fig. 39(a), se consideró un muestreo de 1740 puntos y un tiempo de cómputo de 19.2 hrs; en cambio, en la Fig. 39(b): 5638 puntos y un tiempo de cómputo de 83.6 hrs en el cálculo de las estructuras de bandas numéricas 2D y 3D, respectivamente. Las estructuras de bandas calculadas por ambos métodos en la Fig. (39), muestran una buena concordancia en los casos 2D y 3D para la condición de frontera de Neumann (Guillén *et al.*, 2019).

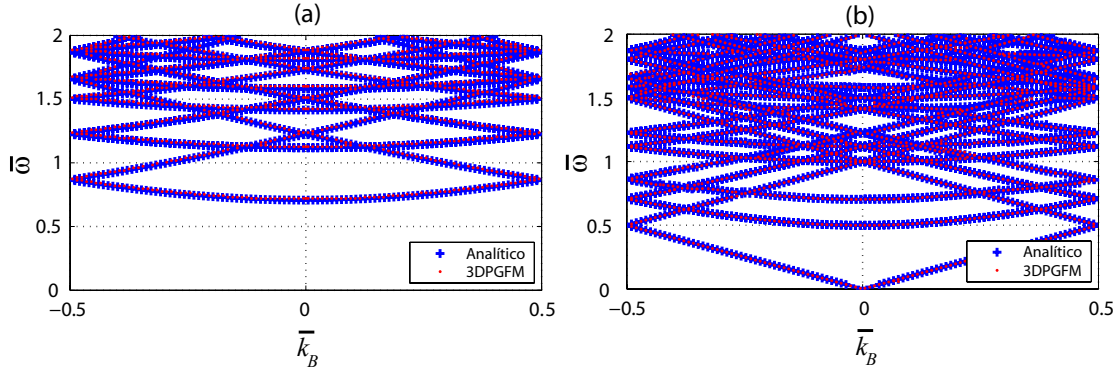


Figura 39. Estructuras de bandas de una guía de ondas vacía en (a) 2D y (b) 3D con superficies rígidas, bajo la condición de frontera de Neumann. La distancia entre las paredes es $b = 2$. Modelos analíticos (cruces azules) y numéricos (puntos rojos) son comparados.

Los resultados mostrados en las Figs. 38 y 39 brindan confiabilidad para obtener precisión en cálculos posteriores, en los cuales ahora consideraremos una guía de ondas rectangular en 2DPnCW y 3DPnCW con un arreglo interno periódico de inclusiones en la dirección x .

IV.5.2. Estructuras de bandas de una PnCW con inclusiones

Para este propósito, cuatro diferentes configuraciones son consideradas en la Fig. 40, cuyos radios de las circunferencias son $r_c = 0.112099$ (Fig. 40(a)), $r_c = 0.868321$ (Fig. 40(b)), $r_c = 1.227992$ (Fig. 40(c)) y $r_c = 1.622709$ (Fig. 40(d)). Estos valores de los radios serán tomados en cuenta para el caso 3D. Usando el Método de la Función de Green Periódica bidimensional (2DPGFM), mostramos las estructuras de bandas fonónicas en las Figs. 40(e) - 40(h) bajo condición de frontera de Dirichlet y en las Figs. 40(i) - 40(l) para la condición de frontera de Neumann, respectivamente. Los parámetros para evaluar las integrales en estos ejemplos fueron elegidos como $\Delta_{square} = (T/\bar{\omega}_{m\acute{a}x})/15 = 0.2094$, para la celda cuadrada y $\Delta_{circle} = (T/\bar{\omega}_{m\acute{a}x})/25 = 0.1256$, para la inclusión circular cilíndrica. Consideramos los intervalos de las frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in [0.5, 2]$ (Figs. 40(e) - 40(h)) y $\bar{\omega} \in [0.01, 2]$ (Figs. 40(i) - 40(l)).

Para este caso, el valor máximo del índice l fue de $N_L = 101$ (Guillén *et al.*, 2019).

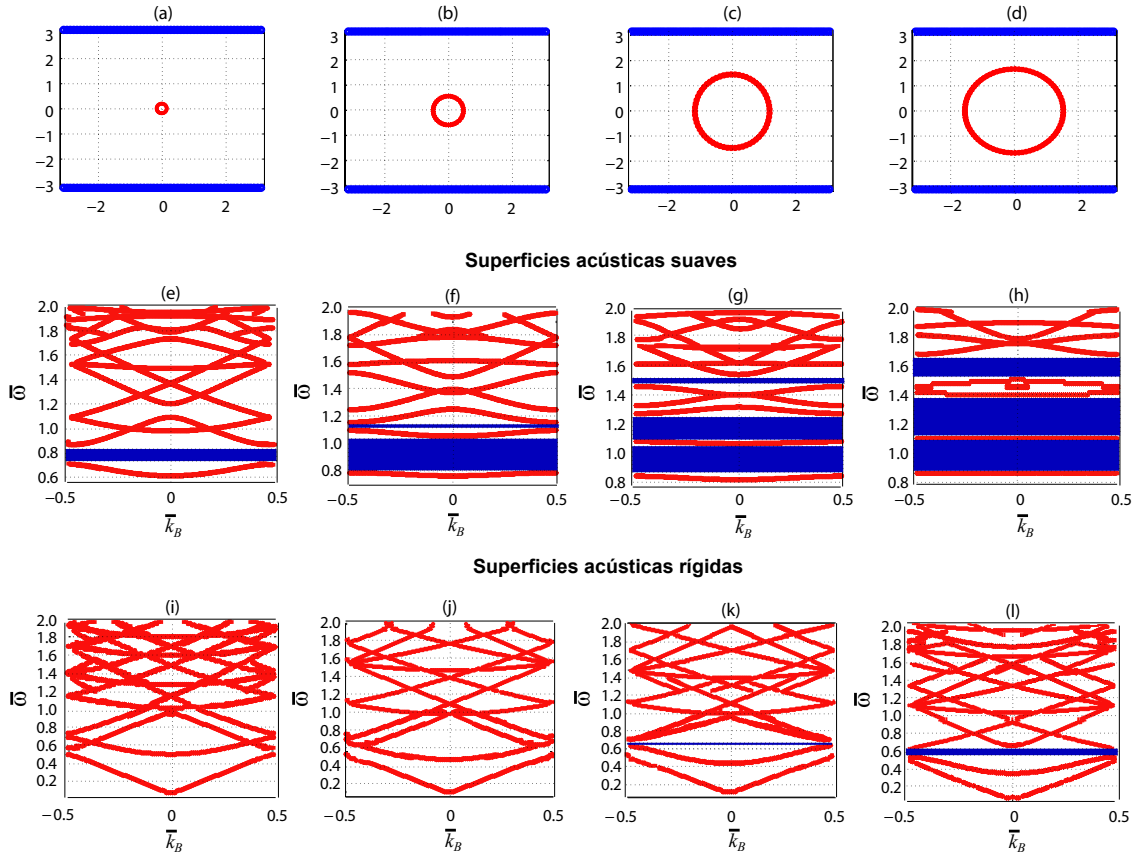


Figura 40. Celda unitaria de una guía de ondas rectangular bidimensional conteniendo un arreglo periódico unidimensional de inclusiones circulares cilíndricas con radio (a) $r_c = 0.112099$, (b) $r_c = 0.868321$, (c) $r_c = 1.227992$, (d) $r_c = 1.622709$. Diagramas de bandas fonónicas, de la PnCW bidimensional usando nuestro método numérico (2DPGFM), bajo condiciones de frontera de (e)-(h) Dirichlet y de (i)-(l) Neumann. La distancia entre las superficies planas de la guía de onda rectangular es $b = 2\pi$.

A través de un razonamiento análogo, cuatro diferentes configuraciones son consideradas con los radios de las esferas: $r_s = 0.083995$ (Fig. 41(a)), $r_s = 0.892234$ (Fig. 41(b)), $r_s = 1.286778$ (Fig. 41(c)) y $r_s = 1.525618$ (Fig. 41(d)). Usando el Método de la Función de Green Periódica tridimensional (3DPGFM), mostramos las estructuras de bandas fonónicas en las Figs. 41(e) - 41(h) bajo la condición de frontera de Dirichlet y en las Figs. 41(i) - 41(l), para la condición de frontera de Neumann, respectivamente.

Los parámetros para evaluar las integrales en estos ejemplos fueron elegidos como $\Delta s_{cube} = (P/\bar{\omega}_{m\acute{a}x})/10 = 0.3141$ para la celda cúbica y $\Delta s_{sphere} = (P/\bar{\omega}_{m\acute{a}x})/60 = 0.0524$ para la inclusión esférica. Consideramos los intervalos de las frecuencias de vibración reducidas $\bar{\omega} \in [0.5, 2]$ (Figs. 41(e) - 41(h)) y $\bar{\omega} \in [0.01, 2]$ (Figs. 41(i) - 41(l)). Para este caso, el valor máximo del índice l fue de $N_L = 301$ (Guillén *et al.*, 2019).

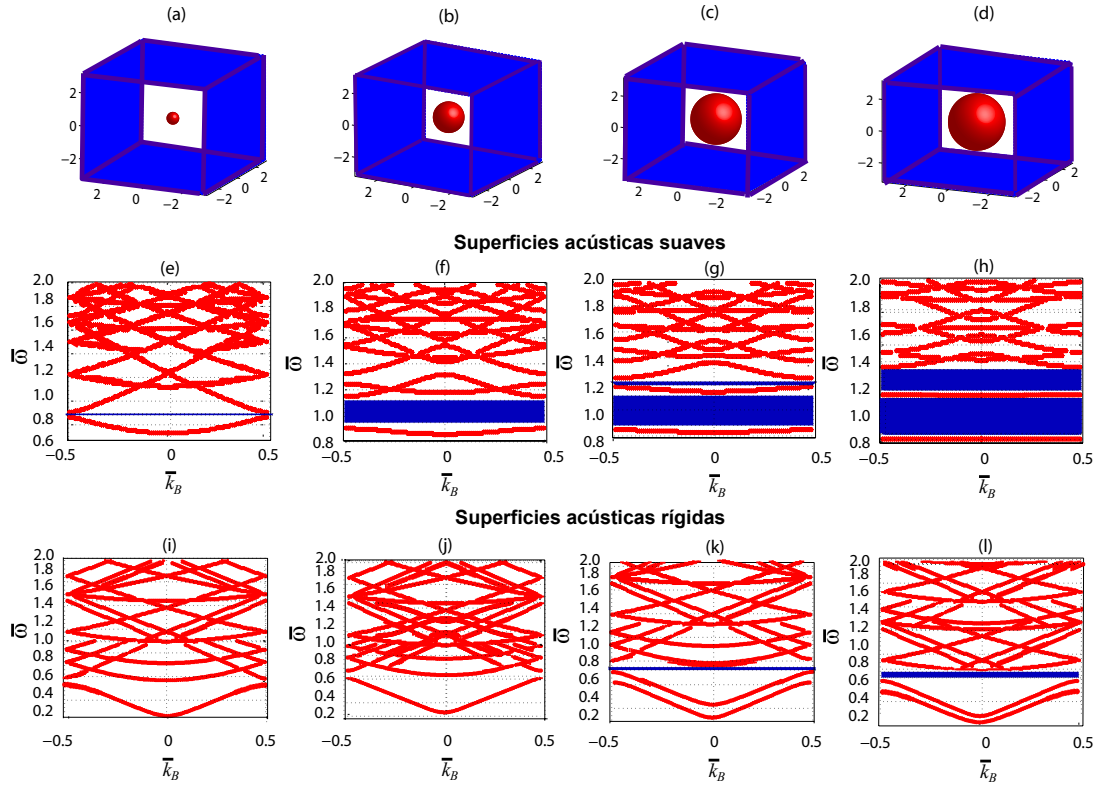


Figura 41. Celda unitaria de una guía de ondas rectangular tridimensional que contiene un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas con radios (a) $r_s = 0.083995$, (b) $r_s = 0.892234$, (c) $r_s = 1.286778$, (d) $r_s = 1.525618$. Diagramas de bandas fonónicas, de la PnCW tridimensional usando nuestro método numérico (3DPGFM), bajo condiciones de frontera de (e)-(h) Dirichlet y de (i)-(l) Neumann. La distancia entre las superficies planas de la guía de onda rectangular en 3D es $b = 2\pi$.

Nótese en las Figs. 40(e) - 40(g) y 41(e) - 41(g) la aparición de bandas prohibidas de las estructuras propuestas para diferentes valores de los radios (o fracciones de llenado de la celda unitaria). Además, en condiciones de frontera de Dirichlet como se muestra en las Figs. 40(h) y 41(h), fue posible obtener modos discretos para algunos rangos de

frecuencia, lo cual indica que la guía de ondas de cristal fonónico actúa como un filtro unimodal cuando la fracción de llenado es grande. Estas propiedades presentan notable interés desde un punto de vista tecnológico, como previamente ya se había mencionado.

Por último, en condiciones de frontera de Neumann como se muestra en las Figs. 40(i) - 40(l) y 41(i) - 41(l), es posible obtener: bandas prohibidas parciales, bandas prohibidas completas o una combinación de ambas, para algunos rangos de frecuencias bajas cuando la fracción de llenado es grande.

Capítulo V

RESPUESTA ACÚSTICA DE ESFERAS SUAVES Y DURAS

En el capítulo anterior, se presentó un desarrollo descriptivo que permitió la obtención de las estructuras de bandas para una PnCW. En este capítulo se presenta nuevamente el NSIM, método numérico riguroso que ahora hemos aplicado en el cálculo de la respuesta acústica de una inclusión esférica con superficies rígidas y suaves. Esto permite ser el antecedente para el estudio numérico de una PnCW truncada ya que la inclusión esférica constituye parte de la celda unitaria. Primeramente se da una descripción teórica para poder hacer un comparativo de la amplitud de presión, de los patrones de esparcimiento, de la intensidad de esparcimiento y de la reflectancia o transmitancia de las esferas acústicas con los resultados numéricos obtenidos.

V.1. Formulación del problema

El análisis del esparcimiento está estrechamente relacionado con la descripción de la radiación acústica y se realiza en el dominio de las frecuencias. El parámetro clave es la longitud de onda en relación con el tamaño de la región de esparcimiento. En el caso de bajas frecuencias, resultados se derivan del teorema integral Kirchhoff-Helmholtz;

mientras que la acústica geométrica es el enfoque a considerar, para el estudio de altas frecuencias. Ambas formulaciones conllevan la aplicación juiciosa de aproximaciones bien justificadas.

Considerar un rango de frecuencias intermedias en el cual las dimensiones del objeto son comparables a la longitud de onda, constituye por sí misma, una situación más complicada. Hay pocos objetos que pueden llegar a involucrar un estudio analítico del campo esparcido en una frecuencia arbitraria. Afortunadamente, la esfera es susceptible de investigaciones científicas y es una de las formas geométricas más utilizadas. No obstante, rara vez encontraremos esferas que ejemplifiquen sistemas acústicos reales. Como ocurre al implementarse modelos simplificados, la disponibilidad de las soluciones nos ayudará a comprender su validez. Por ende, para un estudio más preciso sobre un objeto de dispersión arbitrario se debe implementar un trabajo experimental exhaustivo y/o análisis de tipo numérico considerable, a través de múltiples simulaciones computacionales.

La descripción general del problema de esparcimiento propone un cuerpo de tamaño finito que está rodeado por un medio fluido, cuya extensión es infinita. Independientemente, se genera una señal que encuentra al otro cuerpo, como un obstáculo para su propagación. Luego, un detector permite percibir la modificación de dicha perturbación incidente, lo cual es lo que caracteriza el fenómeno. La reflexión es un aspecto del proceso, pero otros factores físicos también están involucrados. Por ejemplo, en la dispersión mutua los campos interactúan entre sí, por la presencia del esparcidor. Un análisis de este tipo de sistemas en su totalidad, es bastante complicado y requiere de un conocimiento previo, enfocado exclusivamente sobre un único objeto. Este último es un modelo aceptable, si la distancia existente desde la fuente es mayor que la longitud de la onda acústica y la dimensión, lo suficientemente grande porque el campo lejano de

cualquiera de las ondas dispersadas eventualmente decaerá inversamente con respecto a ese valor. En consecuencia, habrá un efecto casi imperceptible desde el esparcidor.

El análisis por un cuerpo inamovible es bastante complicado si la longitud de onda es comparable al tamaño del cuerpo. Restringir nuestra consideración a situaciones en las que el cuerpo es pequeño nos permite caracterizar la naturaleza general del campo disperso. Formularemos una descripción que explique el efecto de eliminar las restricciones contra el movimiento; así como el hecho de que el cuerpo dispersado a menudo se sumerge en un fluido sin soporte, como en el caso de una gota de lluvia.

Recordemos que, en la teoría acústica se consideran dos casos especiales idealizados de objetos: suaves y duros (referidos a valores de impedancias extremas). Ante la presencia de un esparcidor suave, las ondas de presión se anulan sobre la superficie como muestra la Fig. 42, para una esfera de radio unitario r_s .

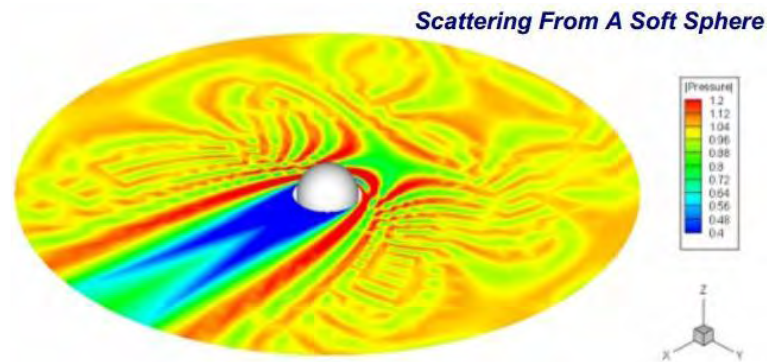


Figura 42. Diagrama de contorno de la presión de sonido, calculada sobre la superficie del campo con un radio exterior de $10r_s$, siendo r_s el radio unitario de la esfera (Ginsberg, 2018).

La Fig. 43 involucra la presencia de un dispersor duro, donde la componente normal de la velocidad es cero sobre la superficie (i.e. la derivada normal de la onda de presión superficial, se cancela). Las Figs. 42 y 43 establecen condiciones límite distintas, dadas a través de las Ecs. (25) y (26), referidas con anterioridad.

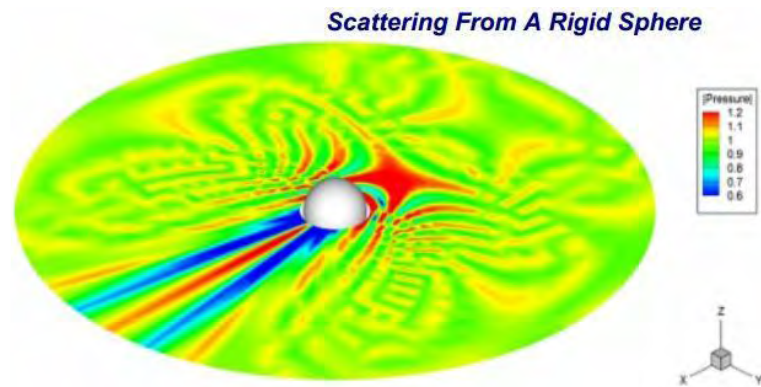


Figura 43. Diagrama de contorno de la derivada de la presión superficial del sonido, determinado bajo los mismos parámetros anteriores (Ginsberg, 2018).

Para la impedancia acústica Z , el límite cuando ésta tiende a 0 corresponde a un objeto de tipo suave (pressure release). Mientras que el límite cuando Z tiende a ∞ , corresponde a un dispersor duro. Para un problema realista, en su descripción involucra a aquéllos tipos de materiales que poseen un valor de impedancia correspondiente (ver Fig. 44). Es decir, se consideran características intermedias entre ambos tipos de condiciones de frontera idealizadas (Ecs. (25) y (26)) en el modelo propuesto.

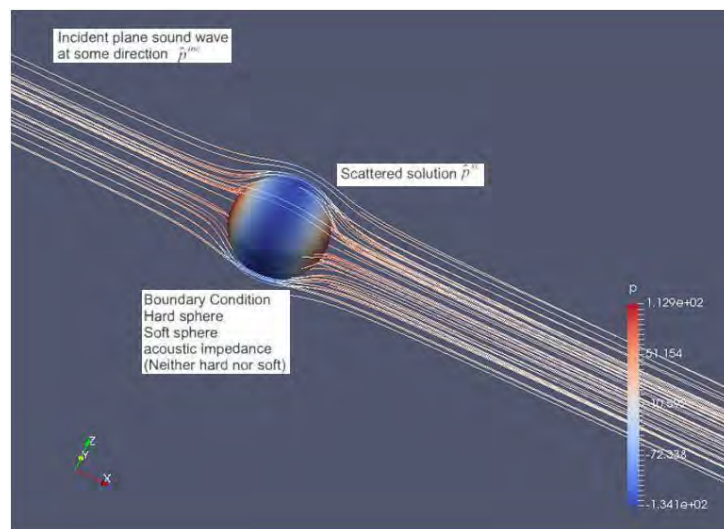


Figura 44. Esquema general del esparcimiento acústico sobre la dirección perpendicular a la superficie de un dispersor esférico, con una impedancia real.

V.2. Esparcimiento de una esfera acústica: modelo teórico

Nuestro interés es determinar la solución de esparcimiento para el caso de una onda plana incidente y condiciones de frontera sin pérdidas sobre la esfera. Para ello, usaremos la expansión en términos de armónicos esféricos para resolver la ecuación propuesta. Para iniciar el estudio del sistema propuesto, consideramos como punto de partida la ecuación de Helmholtz (Ec. (14)).

Considerando la dependencia temporal en la Ec. (8) para una función armónica de la frecuencia ω , en función de la dirección de propagación de la onda, la presión incidente puede expresarse como

$$p_{inc}(\mathbf{r}, t) = p_0(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (107)$$

donde p_0 es la amplitud de la onda incidente.

O bien, en coordenadas esféricas (de acuerdo al diagrama de la Fig. 45):

$$p_{inc}(\mathbf{r}, \theta_s) = p_0(\mathbf{r}) e^{i(kr \cos \theta_s)}. \quad (108)$$

La perturbación en el campo de presión p_{inc} originada por el obstáculo, se denomina campo de presión esparcida p_{scatt} , y representa la presión sonora dispersada por la esfera. Por lo tanto, el campo de presión total resultante en presencia del esparcidor, se define por

$$p(\mathbf{r}, \theta_s) = p_{inc}(\mathbf{r}, \theta_s) + p_{scatt}(\mathbf{r}, \theta_s). \quad (109)$$

Aplicando las condiciones de contorno (*i.e.* Ecs. (23) y (24)):

$$p_{soft}^{(inc)} = -p_{soft}^{(scatt)}, \quad (110)$$

$$\frac{\partial p_{hard}^{(inc)}}{\partial n} = -\frac{\partial p_{hard}^{(scatt)}}{\partial n}. \quad (111)$$

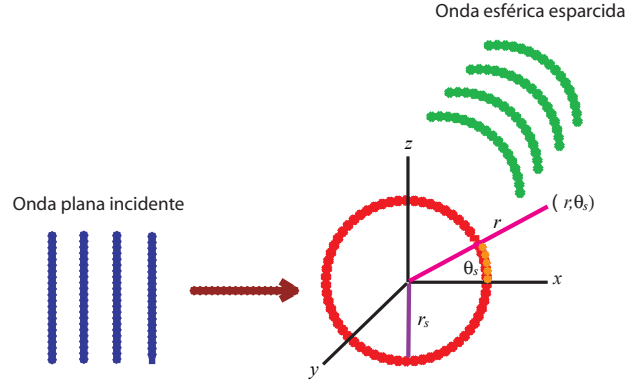


Figura 45. Espacimamiento acústico de una onda plana incidente por una esfera en coordenadas polares. Sea r , la distancia para un punto arbitrario y medido desde el centro del objeto de radio r_s ; donde θ_s es el ángulo de espacimamiento respecto al eje de propagación acústica en el plano yz .

La Ec. (108) se puede escribir en términos de una serie de armónicos esféricos como

$$p_{inc}(r, \theta_s) = p_0 \sum_{n=0}^N (2n+1) (i)^n j_n(kr) P_n(\cos \theta_s), \quad (112)$$

donde $i = \sqrt{-1}$, $j_n(kr)$ son las funciones de Bessel esféricas y $P_n(\cos \theta_s)$ los polinomios de Legendre, ambos de orden n .

La función asociada para el espacimamiento $p_{scatt}(\mathbf{r})$ deberá satisfacer la ecuación de onda de Helmholtz, así como la condición de radiación de Sommerfeld. Por lo tanto, se puede representar de la siguiente manera:

$$p_{scatt}(r, \theta_s) = \sum_{n=0}^N A_n h_n(kr) P_n(\cos \theta_s), \quad (113)$$

donde h_n es la función de Hankel esférica de primera clase de orden n y A_n es un coeficiente de interés.

El análisis tomando como referencia un espacidor con superficie de tipo suave para determinar la forma de A_n , considera que la presión de la onda esparcida en la superficie de la esfera es opuesta a la presión de la onda incidente; de modo que, la presión superficial total es cero:

$$p_{inc}(r, \theta_s) + p_{scatt}(r, \theta_s) = 0, \quad (114)$$

en $r = a$.

Por lo tanto, el coeficiente

$$A_n = -p_0 (2n + 1) i^n \frac{j_n(ka)}{h_n(ka)}. \quad (115)$$

Al combinar las Ecs. (113) y (115), se tiene que:

$$p_{scatt}(r, \theta_s) = -p_0 \sum_{n=0}^N \frac{(2n + 1) (i)^n j_n(ka) h_n(kr) P_n(\cos \theta_s)}{h_n(ka)}. \quad (116)$$

La función de Hankel esférica $h_n(kr)$ puede ser aproximada por $\frac{e^{ikr}}{kr} i^{-(n+1)}$ para $kr \gg n^2 + 1$, permitiendo reescribir la Ec. (116) en la forma

$$p_{scatt}(r, \theta_s) = \frac{ip_0}{kr} e^{ikr} \sum_{n=0}^N \frac{(2n + 1) (i)^n j_n(ka) P_n(\cos \theta_s)}{h_n(ka)}. \quad (117)$$

Ahora, si consideramos una superficie de tipo duro, el coeficiente A_n se determina a partir del ajuste de la derivada normal de la presión esparcida en la superficie de la esfera, para que sea opuesta a la derivada normal de la presión incidente. Por ende,

$$\frac{\partial p_{inc}(r, \theta_s)}{\partial r} + \frac{\partial p_{scatt}(r, \theta_s)}{\partial r} = 0, \quad (118)$$

en $r = a$.

Por lo tanto, para este caso el coeficiente

$$A_n = -p_0 (2n + 1) i^n \frac{n j_{n-1}(ka) - (n + 1) j_{n+1}(ka)}{n h_{n-1}(ka) - (n + 1) h_{n+1}(ka)}. \quad (119)$$

Al combinar, las Ecs. (113) y (119) obtenemos:

$$p_{scatt}(r, \theta_s) = -p_0 \sum_{n=0}^N \frac{(2n + 1) (i)^n j'_n(ka) h_n(kr) P_n(\cos \theta_s)}{h'_n(ka)}, \quad (120)$$

donde $j'_n(ka)$ y $h'_n(ka)$ son las derivadas de las funciones de Bessel modificadas y de Hankel esféricas de orden n , respectivamente. Mediante un razonamiento análogo al aplicado a la Ec. (116) para $h_n(kr)$, se tiene que la Ec. (120) se puede reescribir como

$$p_{scatt}(r, \theta_s) = \frac{ip_0}{kr} e^{ikr} \sum_{n=0}^N \frac{(2n + 1) (i)^n j'_n(ka) P_n(\cos \theta_s)}{h'_n(ka)}. \quad (121)$$

En el cálculo del campo cercano (distancias r próximas a la fuente), se toman como referencias las Ecs. (116) o (120) (dependiendo qué tipo de superficie se considere). Mientras que para determinar el campo lejano (*i.e.* distancias r alejadas de la misma), se aplican las Ecs. (117) o (121).

La sección transversal de esparcimiento, se define como:

$$\sigma(\theta_s) \frac{e^{ikr}}{r} = p_{scatt}(r, \theta_s), \quad (122)$$

donde θ_s es el ángulo de esparcimiento acústico y que cumple la relación:

$$I(\theta_s) = |\sigma(\theta_s)|^2, \quad (123)$$

para la intensidad angular de esparcimiento I .

Las componentes radial y transversal del vector de intensidad, están definidas por

$$I_r(\mathbf{r}, \theta_s) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [p(\mathbf{r}, \theta_s) u_r^*(\mathbf{r}, \theta_s)], \quad (124)$$

$$I_{\theta_s}(\mathbf{r}, \theta_s) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [p(\mathbf{r}, \theta_s) u_{\theta_s}^*(\mathbf{r}, \theta_s)], \quad (125)$$

donde Re y $*$ denotan la parte real y compleja conjugada, respectivamente. Así, la magnitud del vector intensidad está dado por:

$$I = [I_r^2(\mathbf{r}, \theta_s) + I_{\theta_s}^2(\mathbf{r}, \theta_s)]^{1/2}, \quad (126)$$

tal que $\theta_s = \arctan[z/x]$ y $r = [x^2 + z^2]^{1/2}$.

Asimismo, u_r y u_{θ_s} corresponden a las componentes de la velocidad para el campo de presión p :

$$u_r = \left(\frac{1}{\rho c} \right) \left(\frac{-i}{k} \right) \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (127)$$

$$u_{\theta_s} = \left(\frac{1}{\rho c} \right) \left(\frac{-i}{kr} \right) \frac{\partial p}{\partial \theta_s}, \quad (128)$$

determinadas a partir de la ecuación de Euler (ver apéndice C).

La intensidad esparcida en su forma analítica (para el campo cercano y lejano, respectivamente), es referida como (Morse, 1948):

$$I_s \simeq \frac{I_0}{k^2 r^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} (2m+1)(2n+1) \sin \delta_m \sin \delta_n \cos(\delta_m - \delta_n) P_m(\cos \theta_s) P_n(\cos \theta_s),$$

$$\simeq \frac{16\pi^4 \nu^4 r_s^6 I}{9c^4 r^2} (1 - 3 \cos \theta_s)^2, \quad (kr_s \ll 1) \quad (129)$$

$$\simeq \frac{r_s^2 I_0}{4r^2} \left[1 + \cot^2 \left(\frac{\theta_s}{2} \right) J_1^2(kr_s \sin \theta_s) \right], \quad (kr_s \gg 1) \quad (130)$$

donde r_s es el radio de la esfera; I_0 es la intensidad del sonido correspondiente; r es la distancia de un punto arbitrario desde el origen; $k = \frac{\omega}{c_l} = \frac{2\pi}{\lambda}$ el número de onda asociado; θ_s , δ_m y δ_n son el ángulo y cambios de fase para el esparcimiento; J_1 la función de Bessel de primer orden; P_m y P_n son las funciones de Legendre en coordenadas esféricas de orden m y n , respectivamente.

V.3. Esparcimiento de una esfera acústica: modelo numérico

El análisis propuesto a continuación (Guel *et al.*, 2016) ha sido desarrollado con anterioridad para el estudio de sistemas acústicos en problemas interiores y exteriores sobre geometrías que involucran regiones homogéneas múltiples. Mediante las Ecs. (30) y (31), respectivamente y a través de la Fig. 19, se describen la superficie y el volumen a considerar, en cada caso particular. Dicha metodología va en función de adaptar los métodos integrales ya existentes con las condiciones de frontera idealizadas, en el tratamiento especial del nuevo sistema de ecuaciones a resolver para el perfil de dimensión finita.

Para el cálculo del esparcimiento acústico por una esfera, consideremos un campo escalar incidente que excita el sistema. En este caso, la Ec. (30) puede expresarse como

$$-\sum_{n=1}^N L_{mn}^{(2)} \Phi_n^{(2)} + \sum_{n=1}^N N_{mn}^{(2)} p_n^{(2)} = p_m^{inc}, \quad (131)$$

donde $p_m^{inc} = p^{inc}(\mathbf{r}_m)$.

La onda incidente representa una onda plana viajando a lo largo de la dirección positiva del eje x , como puede verse en la Fig. 46.

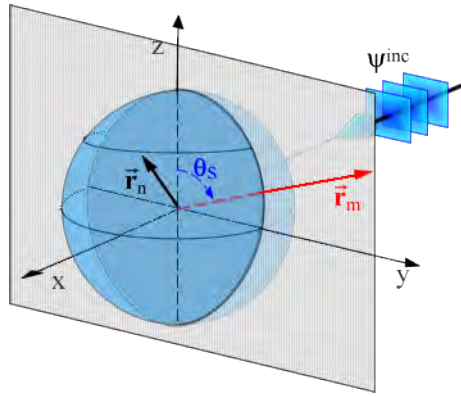


Figura 46. Descripción esquemática de la geometría del campo lejano sobre una superficie esférica, tal que θ_s representa el ángulo de dispersión observable.

Si nosotros representamos el vector \mathbf{r} en coordenadas cartesianas, entonces

$$p^{inc}(x, y, z) = e^{ik_2 x}. \quad (132)$$

Considerando el caso de superficies acústicas que son perfectamente suaves o perfectamente duras, tenemos la condición de frontera de Dirichlet $p_n^{(2)} = 0$ y la condición frontera de Neumann, $\Phi_n^{(2)} = 0$, respectivamente.

En cada caso, la Ec. (131) se reduce a un sistema inhomogéneo de ecuaciones lineales; entonces para resolverlo, las funciones fuente $\Phi_n^{(2)}$ y $p_n^{(2)}$ pueden ser determinadas para un conjunto \mathbf{r}'_n sobre la superficie S' . Cuando estas fuentes son obtenidas, el campo en cualquier punto \mathbf{r} (exterior al sistema de esparcimiento) puede ser calculado usando la Ec. (19), como se muestra a continuación.

V.3.1. Campo cercano y campo lejano: condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann

En el caso de un problema exterior, podemos encontrar expresiones numéricas para el campo $p(\mathbf{r})$, en cualquier punto de observación \mathbf{r} , siempre que este punto se encuentre al menos infinitesimalmente fuera de la superficie S' .

Primeramente, consideremos la condición de frontera de Dirichlet dada por la Ec. (23). A partir de las Ecs. (16), (19) y (33), obtenemos la expresión

$$p_{scatt}(\mathbf{r}) \equiv p(\mathbf{r}) - p^{inc}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{e^{ik_2 R}}{R} \Phi_n(\mathbf{r}') dS', \quad (133)$$

donde $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ y $p_{scatt}(\mathbf{r})$ representa el campo esparcido.

Expresando los vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' en términos de sus componentes cartesianas, el campo esparcido puede ser aproximado numéricamente por

$$p_{scatt}(x, y, z) = \sum_{n=1}^N \frac{\Delta s^2}{4\pi} \frac{e^{ik_2 \sqrt{(x-x'_n)^2 + (y-y'_n)^2 + (z-z'_n)^2}}}{\sqrt{(x-x'_n)^2 + (y-y'_n)^2 + (z-z'_n)^2}} \Phi_n^{(2)}. \quad (134)$$

En la Ec. (23) asumimos que $\Phi_n^{(2)}$ ha sido también determinado por la solución del sistema lineal dado por la Ec. (131). Con esta expresión, el campo en cualquier distancia desde la superficie del esparcidor puede ser calculado, incluyendo cualquier punto situado en el campo cercano. De ahí que, definimos la intensidad de esparcimiento como

$$I(x, y, z) = |p_{scatt}(x, y, z)|^2. \quad (135)$$

En el caso del campo lejano, vamos a considerar que la posición del observador \mathbf{r} está bastante lejos del sistema dispersante. Es decir, $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'_n|$ para $n = 1, 2, \dots, N$. En este caso, podemos obtener la expresión aproximada

$$R = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n)} \simeq r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'_n, \quad (136)$$

para el denominador de la Ec. (134), y éste es suficiente para considerar el primer término sobre el lado derecho de esta ecuación.

A partir de la Fig. 46, podemos definir

$$\mathbf{r}'_n = x'_n \hat{\mathbf{i}} + y'_n \hat{\mathbf{j}} + z'_n \hat{\mathbf{k}}, \quad (137)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta_s \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta_s \hat{\mathbf{k}}, \quad (138)$$

donde θ_s es el ángulo de esparcimiento sobre el plano yz . Para el campo lejano esparcido, obtenemos

$$p_{scatt}(r, \theta_s) = \sigma(\theta_s) \frac{e^{ik_2 r}}{r}, \quad (139)$$

donde la amplitud angular de esparcimiento $\sigma(\theta_s)$, está dada por

$$\sigma(\theta_s) = \sum_{n=1}^N \frac{\Delta S^2}{4\pi} e^{-ik_2(y'_n \sin \theta_s + z'_n \cos \theta_s)} \Phi_n^{(2)}, \quad (140)$$

y representa el comportamiento angular de la onda esparcida en el campo lejano. A partir de la Ec. (123), la intensidad en la región del campo lejano será

$$I(\theta_s) \propto \left| \sum_{n=1}^N \Phi_n^{(2)} e^{-ik_2(y'_n \sin \theta_s + z'_n \cos \theta_s)} \right|^2. \quad (141)$$

Ahora, vamos a considerar la condición de frontera de Neumann dada por la Ec. (24). Las Ecs. (19), (21) y (22), definen

$$p_{scatt}(\mathbf{r}) \equiv p(\mathbf{r}) - p^{inc}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{e^{ik_2 R}}{R} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{ik_2}{R} \right) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R} p^{(2)}(\mathbf{r}) dS'. \quad (142)$$

Esta integral puede ser calculada con la expresión aproximada:

$$p_{scatt}(x, y, z) = \sum_{n=1}^N \frac{\Delta S^2}{4\pi} \frac{e^{ik_2 R_n}}{R_n} (R_n^{-2} - ik_2 R_n^{-1}) \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \mathbf{R}_n p_n^{(2)}, \quad (143)$$

donde $\mathbf{R}_n = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_n = (x - x'_n, y - y'_n, z - z'_n)$.

La Ec. (143) nos permite obtener el campo esparcido en cualquier distancia desde el esparcidor, habiendo calculado $p_n^{(2)}$ para el sistema lineal dado en la Ec. (131).

El vector normal $\hat{\mathbf{n}}_n$ puede ser determinado, al menos numéricamente, incluso para superficies irregulares.

Para el campo lejano esparcido (ver Ec. (139)), consideramos aproximaciones similares en el caso anterior y despreciamos el término R_n^{-2} como se hace comúnmente en la teoría de la radiación. Finalmente, la amplitud de dispersión $\sigma(\theta_s)$ puede ser calculada a partir de

$$\sigma(\theta_s) = - \sum_{n=1}^N \frac{ik_2 \Delta s^2}{4\pi} e^{-ik_2(y'_n \sin \theta_s + z'_n \cos \theta_s)} (n_{y_n} \sin \theta_s + n_{z_n} \cos \theta_s) p_n^{(2)}. \quad (144)$$

Finalmente, la intensidad en la región del campo lejano será

$$I(\theta_s) \propto \left| \sum_{n=1}^N \left[ik_2 (n_{y_n} \sin \theta_s + n_{z_n} \cos \theta_s) p_n^{(2)} \right] e^{-ik_2(y'_n \sin \theta_s + z'_n \cos \theta_s)} \right|^2. \quad (145)$$

V.4. Resultados

Debemos hacer énfasis especial al mencionar que, el caso de las condiciones de frontera sobre superficies suaves no resulta ser un tema de gran interés para la investigación experimental. Sólo tendría sentido su aplicación, si se contemplara un posible estudio en el área de acústica submarina y que la superficie del dispersor esférico estuviera hecha de un medio gaseoso. Cualquier material sólido incluido en la geometría debería presentar excitación de los modos elásticos. Por lo que, al considerar la propagación a través del aire, ello conduciría a la obtención resultados inusuales y no físicos, haciendo que este enfoque tampoco sea válido en dicho escenario propuesto.

No obstante, es importante para nosotros mostrar que es posible efectuar los cálculos pertinentes para las condiciones de frontera de Dirichlet. Primeramente, para dar continuidad a los gráficos mostrados en capítulos anteriores. Además, porque representa el caso teórico-numérico más simple de estudio y que sirvió como eslabón, para el desarrollo de las condiciones de frontera de Neumann.

Para ello, consideramos una onda plana de amplitud $p_0 = 1$ (propagándose en la dirección $+z$), esparcida por una esfera suave unitaria (*i.e.* $r_s = 1$ m) y centrada en el origen de coordenadas. El fluido que rodea al dispersor es aire (velocidad del sonido $c = 343$ m/s, densidad $\rho_0 = 1.21$ kg/m³ e impedancia acústica $z = \rho_0 c = 415.03$ Rayl). Cabe mencionar el uso en la literatura del parámetro $ka = \frac{2\pi a}{\lambda}$ para designar el número de onda adimensional, donde a representa el radio del centro esparcidor. Siguiendo la convención en la nomenclatura de este trabajo, se tendría que $ka = kr_s$ (dado que a y r_s coinciden en su valor unitario, por simplicidad). Para evitar confusión al hacer uso explícito de las referencias, en adelante usaremos a y r_s indistintamente.

V.4.1. Amplitud de presión de una esfera acústica suave y dura

Como punto de partida para verificar la precisión de la metodología computacional propuesta: NSIM, en la Fig. 47 se muestra el gráfico de la magnitud de la presión sobre un esparcidor esférico de superficie suave (es decir, que se rige bajo la condición de frontera de Dirichlet) en el campo cercano $r = 1.5a$, como función del ángulo de esparcimiento θ_s y para $ka = 1$.

En la Fig. 47(a), los círculos rojos representan la solución analítica y la línea continua denota el resultado numérico propuesto a través del Modelo MultiDomain (Vuylsteke, 2014). Dicha simulación es proporcionada a través del sistema de software interactivo Couxtyx (ANSOL), para una frecuencia $\nu = 54.59$ Hz (es decir, $ka = 1$). Este tipo de herramienta de análisis computacional fundamenta su diseño en el Método Multipolar Rápido (FMM¹).

¹Por sus siglas en inglés, Fast Multipole Method.

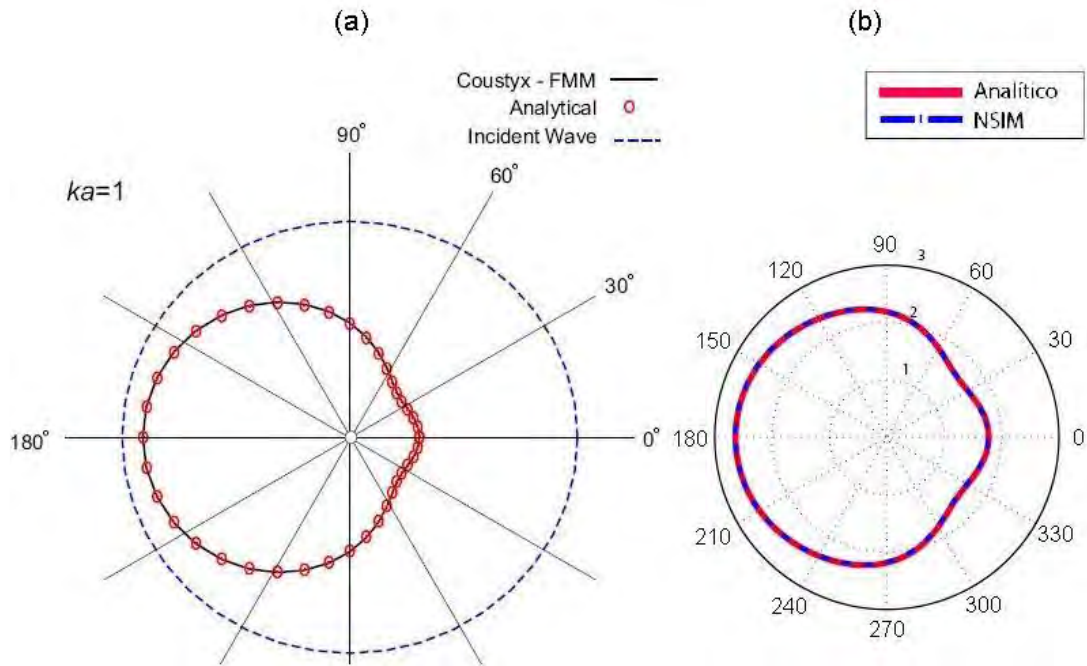


Figura 47. Distribución angular de las amplitudes de presión para una esfera suave de radio unitario, como función del ángulo de esparcimiento θ_s y para $ka = 1$, mediante los métodos analíticos y numéricos: (a) FMM (Coustyx), (b) NSIM (Guel *et al.*, 2016).

Por otro lado, el enfoque analítico validado por comparación está dado en términos de las Ecs. (109), (112) y (120). Cabe mencionar que, las expresiones involucran un desarrollo en serie de potencias. De ahí que, un error viene asociado de manera inherente al truncar los términos de orden superior, tomando en cuenta el análisis de convergencia.

En la Fig. 47(b), la línea continua roja representa la solución analítica, cuyo desarrollo viene referido nuevamente por las expresiones anteriores: Ecs. (109), (112) y (120). La línea discontinua con puntos azules representa la solución dada por el NSIM, a través de las Ecs. (139) y (140). Nótese que las soluciones analítico y numéricas en la Fig. 47, tienen un buen grado de concordancia entre ambos métodos, en relación a la condición de frontera de Dirichlet que se hace presente. El error depende del número de términos de orden superior N involucrados durante el análisis de convergencia y para

el costo computacional implementado: Coustyx-FMM ($N = 20$) y NSIM ($N = 40$).

Mostramos a continuación cálculos adicionales para verificar la precisión de los resultados obtenidos por nuestros métodos con los resultados usando el software de Coustyx-FMM ((Vuylsteke, 2014) y (Guel *et al.*, 2016), respectivamente). Las soluciones analítico y numéricas propuestas del esparcimiento acústico, ahora son para superficies que se rigen bajo la condición de frontera de Neumann.

La Fig. 48 muestra la magnitud de la presión para un esparcidor esférico de superficie dura en el campo cercano con $r = 1.5a$ como función del ángulo de esparcimiento θ y para $\nu = 109.18$ Hz ($ka = 2$). Los resultados se obtuvieron implementando el Modelo MultiDomain (Coustyx-FMM) y bajo las mismos parámetros que el caso anterior.

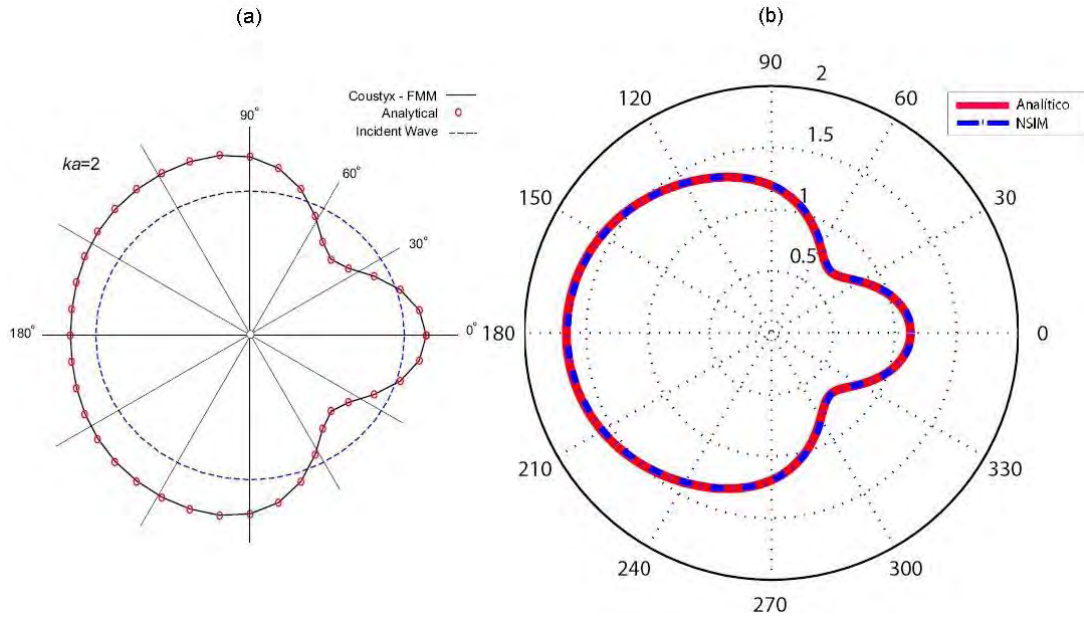


Figura 48. Distribución angular de las amplitudes de presión para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 2$, mediante los métodos analíticos y numéricos: (a) FMM (Coustyx), (b) NSIM (Guel *et al.*, 2016).

En la Fig. 48(a), los puntos rojos representan la solución analítica y la línea continua denota el cálculo numérico. El enfoque analítico validado por comparación, está dado en términos de las Ecs. (109), (112) y (121). En la Fig. 48(b), la línea continua

roja representa la solución analítica, cuyo desarrollo viene referido nuevamente por las expresiones anteriores. La línea discontinua con puntos azules representa la solución dada por el NSIM a través de las Ecs. (139) y (144).

Nótese que las soluciones analítico y numéricas en la Fig. 48, tienen también un buen grado de concordancia para ambos métodos, en relación a la condición de frontera que se hace ahora presente. El error depende del número de términos de orden superior N involucrados durante el análisis de convergencia y para el costo computacional implementado: Coustyx-FMM ($N = 30$) y NSIM ($N = 50$).

Continuando con la validez de nuestros métodos, ahora se hizo el comparativo con el Método Multipolar de Colocación (CMM²) (Lee, 2015). Cabe mencionar que se consideraron diferentes referencias, ya que en cada una toman como el parámetro ka distintos valores para números impares o pares.

La Fig. 49 ilustra nuevamente la magnitud de la presión para un esparcidor esférico de superficie dura en el campo cercano con $r = 1.0a$, como función del ángulo de esparcimiento θ_s y $\nu = 163.77$ Hz ($ka = 3$).

En la Fig. 49(a), los puntos rojos representan la solución analítica propuesta por la Ref. (Martin, 2006; Wu, 2000) y la línea discontinua verde, denota el cálculo numérico. Dicho enfoque analítico utiliza una expansión multipolo para el campo acústico esparcido, formulado en términos de las funciones de Legendre asociadas y de Hankel esféricas, para satisfacer la ecuación de Helmholtz tridimensional en un sistema de coordenadas esféricas. Al combinar el método multipolo, la derivada direccional y la técnica de colocación, se determinan el campo acústico y su derivada normal en el problema del dominio de conexión múltiple, sin error de truncamiento causado por el teorema de la suma.

²Por sus siglas en inglés, Collocation Multipole Method.

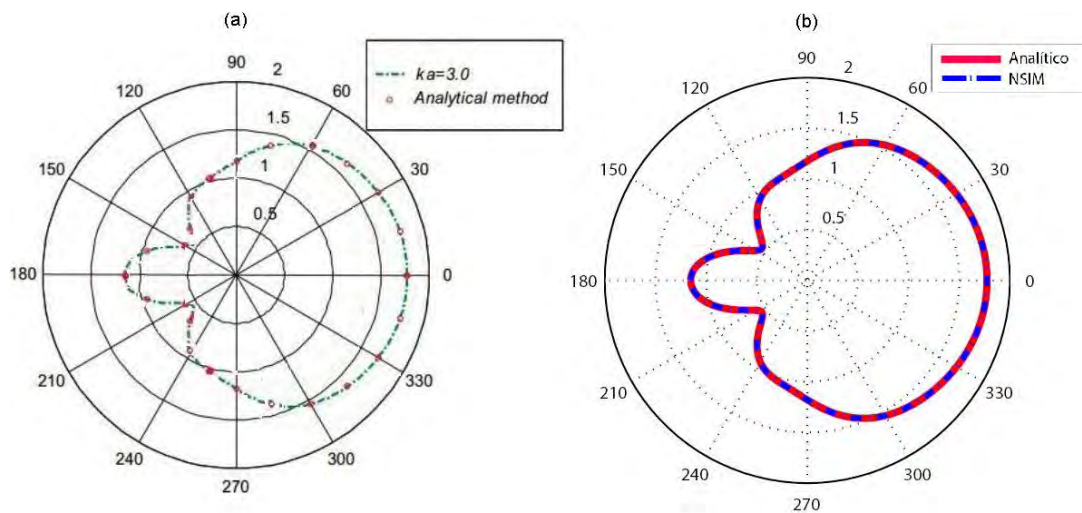


Figura 49. Distribución angular de las amplitudes de presión para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 3$. Se validan los métodos analíticos y numéricos: (a) CMM (Lee, 2015), (b) NSIM (Guel *et al.*, 2016).

En la Fig. 49(b), la línea continua roja representa la solución analítica y la línea discontinua con puntos azules representa la solución dada por el NSIM, bajo las mismas relaciones que se enunciaron previamente. A través de los resultados expuestos por ambos métodos en la Fig. 49, podemos seguir validando en buen grado la precisión entre las soluciones analítico y numéricas propuestas.

De las Figs. 47 - 49 podemos apreciar que la dispersión es dominante en todos los casos. A medida que aumenta el valor de ka , la intensidad del esparcimiento hacia atrás (backward scattering) crece; sin embargo, la del esparcimiento hacia adelante (forward scattering) se atenúa.

V.4.2. Patrones de esparcimiento de una esfera acústica suave y dura

Situándonos ahora en la condición del campo lejano, retomaremos nuevamente el caso de una superficie suave y así, corroborar la validez de nuestros resultados.

La Fig. 50 muestra el patrón de esparcimiento de una esfera acústica suave, como función del ángulo de esparcimiento θ_s y para $\nu = 89.31$ Hz ($ka = 1.5$), implementando como método de comparación la solución analítica (Fig. 50(a)) dada en términos de series de Fourier (Williams, 1999) con nuestra técnica numérica utilizada (NSIM). En la Fig. 50(b), la línea continua roja representa la solución analítica, cuyo desarrollo está dado en términos de las Ec. (120) y (122). La línea discontinua con puntos azules representa la solución dada por el NSIM, a través de la Ec. (140).

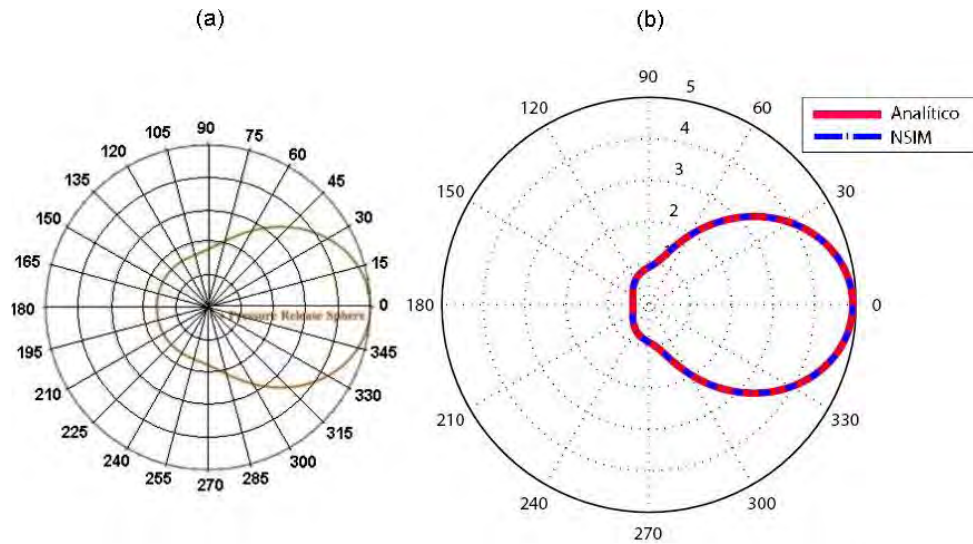


Figura 50. Patrones de esparcimiento de campo lejano para una esfera suave de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 1.5$, mediante métodos: analítico (a) Series de Fourier (Kress, 2001) y numérico (b) NSIM (Guel *et al.*, 2016).

Nótese que las soluciones analítico y numéricas en la Fig. 50, tienen un buen grado de concordancia entre ambos métodos. Las discrepancias se derivan de manera inherente al truncar los términos de orden superior, al efectuar el análisis de convergencia correspondiente y el costo computacional implementado: Series de Fourier ($N = 40$) y NSIM ($N = 50$).

Presentamos cálculos adicionales para los patrones de esparcimiento acústico, considerando ahora superficies que se rigen bajo condiciones de frontera de Neumann.

En la Fig. 51 mostramos los patrones de esparcimiento como función del ángulo θ y $\nu = 54.59$ Hz ($ka = 1$), como un comparativo entre las soluciones analítico: la Ecuación Integral de Helmholtz (HIE³) (Partridge, 1993) [(a)] y numéricas: CMM (Lee, 2015) [(b)] y NSIM (Guel *et al.*, 2016) [(c)].

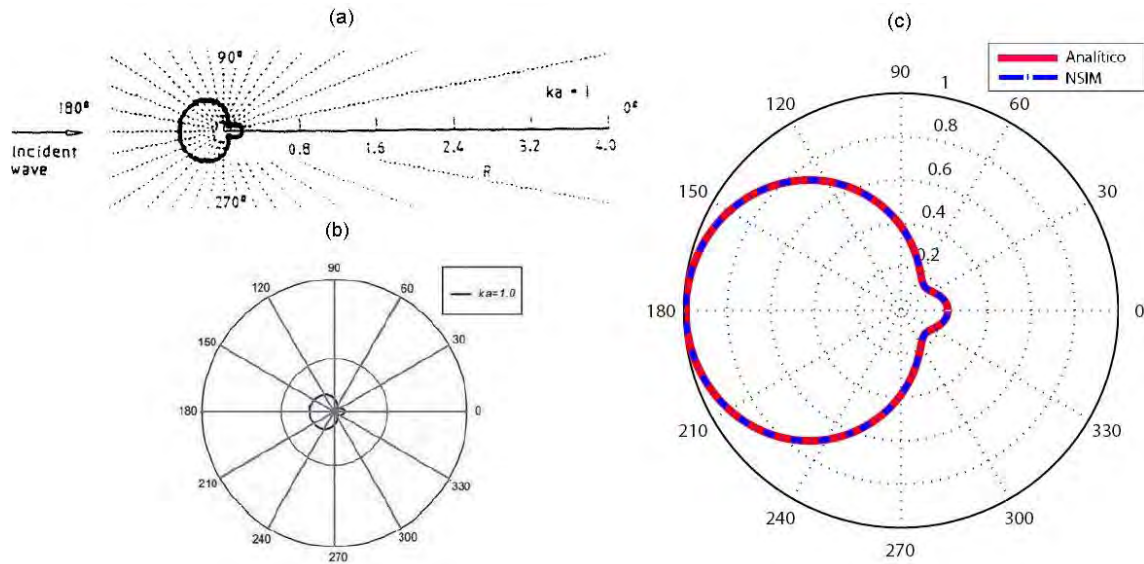


Figura 51. Patrones de esparcimiento de campo lejano para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 1$, mediante métodos analítico (a) HIE (Partridge, 1993) y numéricos: (b) MMC (Lee, 2015) y (c) NSIM (Guel *et al.*, 2016).

En la Fig. 51, podemos notar que existe un grado de concordancia aceptable entre las diversas técnicas que ahí se muestran. Existen limitaciones inherentes en la obtención de los resultados numéricos, sobretudo al momento de su comparación con la contraparte analítica. No obstante, los ejemplos expuestos hasta ahora, nos permiten tener plena confianza en las soluciones que podemos generar con la implementación de nuestra metodología.

La Fig. 52 muestra el patrón de esparcimiento como función del ángulo θ_s y para $\nu = 11.908$ Hz ($ka = 0.2$), implementando un método de comparación analítico: el

³Por sus siglas en inglés, Helmholtz Integral Equation.

Teorema Integral Kirchhoff–Helmholtz (KHIT⁴) (Ginsberg, 2018).

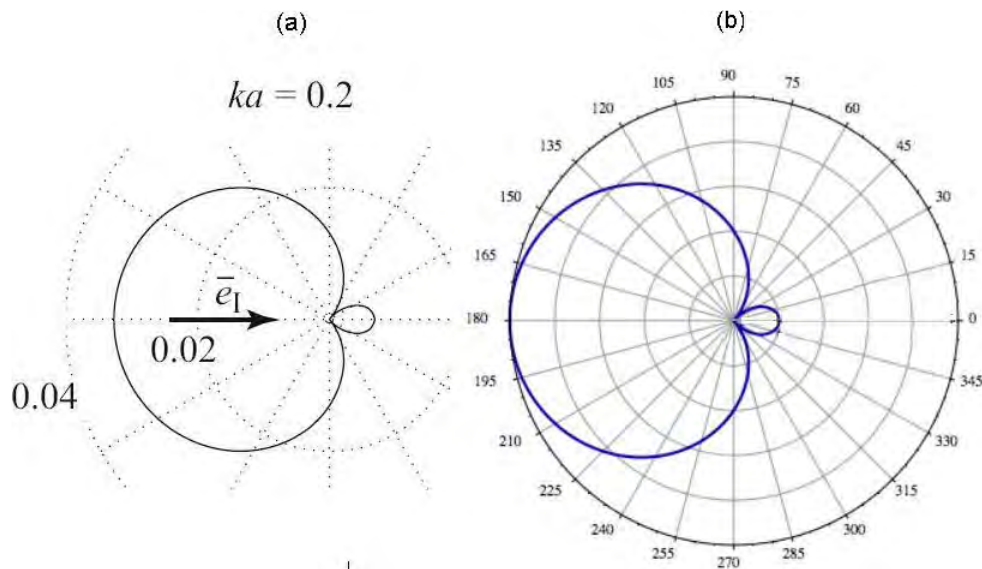


Figura 52. Patrones de esparcimiento de campo lejano para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 0.2$, mediante métodos analítico: (a) KHIT (Ginsberg, 2018), y numérico: (b) NSIM (Guel *et al.*, 2016).

En la Fig. 52(a), la línea continua denota la solución analítica para el valor $ka = 0.2$ en la Ref. (Ginsberg, 2018). En la Fig. 52(b), la línea continua azul representa la solución dada por el NSIM, a través de la Ec. (144). Los resultados expuestos por ambos métodos en la Fig. 52, nos permiten seguir validando con buena precisión, las soluciones analítico y numéricas propuestas.

Apoyándonos en las referencias existentes en la literatura, y por lo previamente mencionado, se hace el comparativo con diferentes valores del parámetro ka (tanto impares como pares). La Fig. 53 muestra diversos patrones de esparcimiento como función del ángulo θ_s , para una esfera dura, considerando los siguientes valores de la frecuencia ν : 109.18 Hz (Figs. 53(a) y 53(d)), 238.16 Hz (Figs. 53(b) y 53(e)) y 476.32 Hz (Figs. 53(c) y 53(f)), implementando el método de comparación analítico HIE (Partridge, 1993) con nuestra técnica numérica (NSIM).

⁴Por sus siglas en inglés, Kirchhoff–Helmholtz Integral Theorem.

En las Figs. 53(a)-53(c), la línea continua negra denota las soluciones analíticas HIE para los valores $ka = 2, 4$ y 8 , respectivamente. Cabe mencionar que el fluido que rodea al dispersor en este estudio sobre recubrimientos anecoicos es agua (velocidad del sonido $c_l = 1500$ m/s y densidad $\rho_0 = 1000$ kg/m).

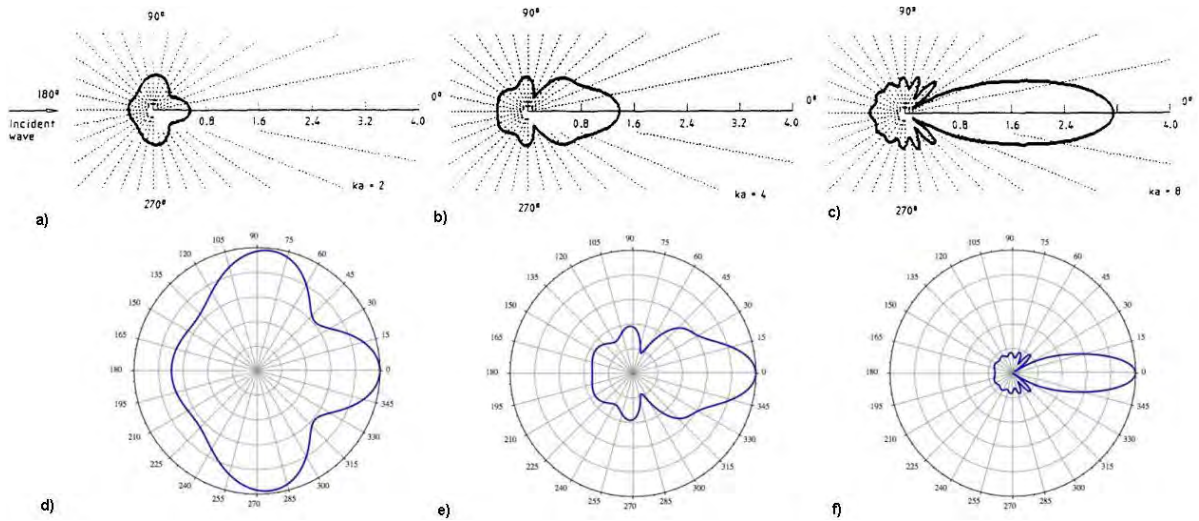


Figura 53. Patrones de esparcimiento de campo lejano para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 2, 4$ y 8 , mediante métodos analítico ((a)-(c)) HIE (Partridge, 1993) y numérico ((d)-(f)) NSIM (Guel *et al.*, 2016).

En las Figs. 53(d) - 53(f), la línea continua azul representa los resultados (dados por los mismos parámetros anteriores) por el NSIM, a través de la Ec. (144). Nótese que a medida que aumenta la frecuencia, los lóbulos laterales se vuelven cada vez más numerosos, la intensidad del esparcimiento hacia adelante (forward scattering) crece, el ancho del haz disminuye y la fluctuación asociada a lo largo del ángulo θ_s es más evidente.

De igual manera se hace el comparativo con la Ref. (Lee, 2015) que usa el CMM para otros valores del parámetro ka . La Fig. 54 ilustra diversos patrones de esparcimiento como función del ángulo θ_s para una esfera dura, considerando los valores siguientes: $\nu = 59.54$ Hz ($ka = 1$) [Figs. 54(a) y 54(b)], 178.62 Hz ($ka = 3$) [Figs. 54(a) y 54(c)] y

357.24 Hz ($ka = 6$) [Figs. 54(a) y 54(d)], implementándose un comparativo únicamente de tipo numérico. En la Fig. 54(a), las líneas discontinuas (en distintos colores) denotan las soluciones numéricas referidas implementando CMM, para los valores $ka = 1, 3$ y 6 , respectivamente. En las Figs. 54(b)-54(d), la línea continua azul representa los resultados (dados por los mismos parámetros anteriores), a través del NSIM.

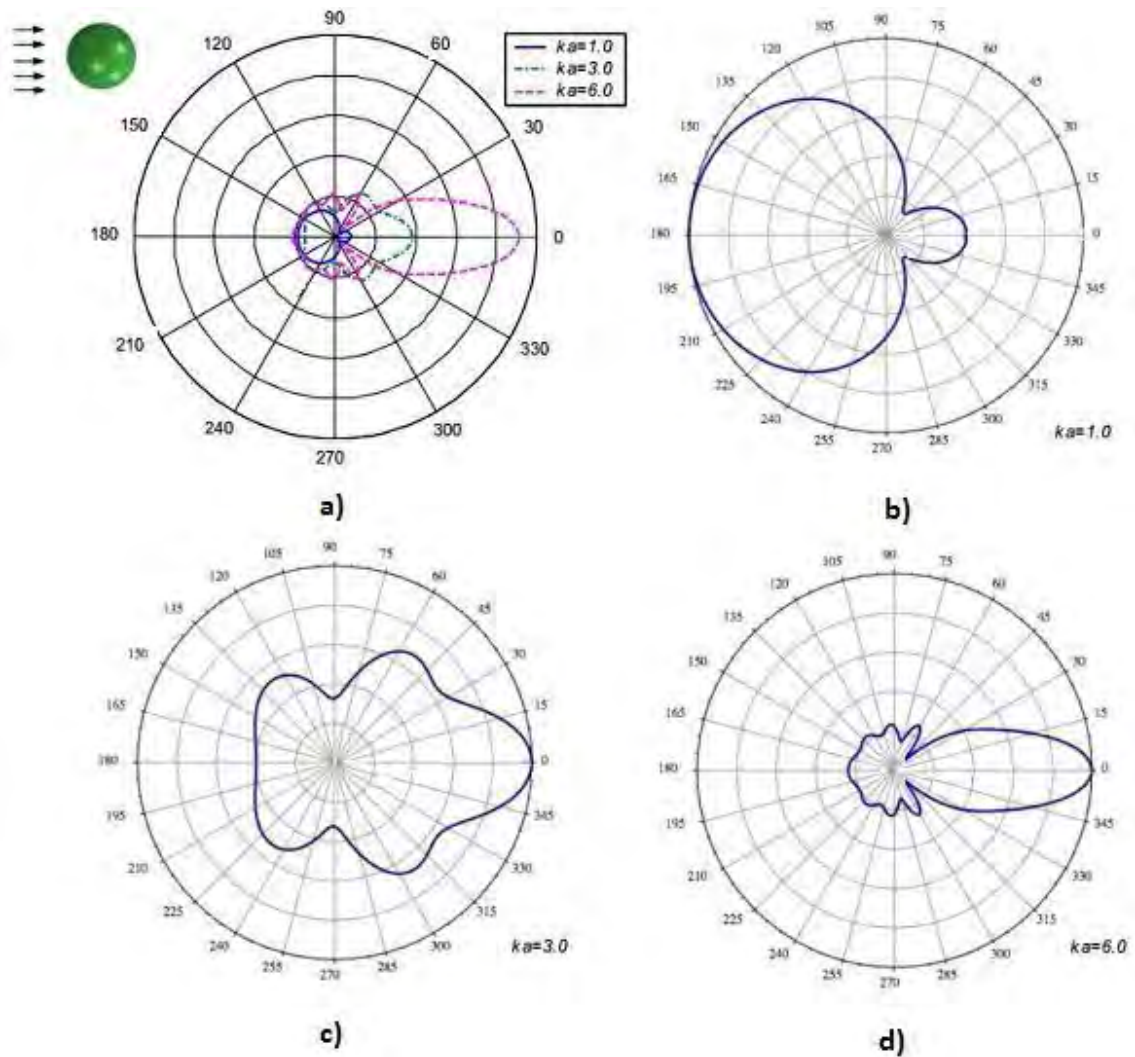


Figura 54. Patrones de esparcimiento de campo lejano para una esfera dura de radio unitario, como función de θ_s y para $ka = 1, 3$ y 6 , mediante métodos numéricos: (a) CMM (Lee, 2015), ((b) - (d)) NSIM (Guel *et al.*, 2016).

Nótese en la Fig. 54 un comportamiento análogo al caso anteriormente referido por la Fig. 53, en el que la dispersión es dominante en todos los casos. Cuando el valor de ka se incrementa, se genera una región afilada tras la sombra frontal del objeto y que decrece gradualmente, mientras que los pliegues posteriores se concentran en la zona del origen. Por ende, los resultados propuestos aún representan la tendencia esperada para problemas de radiación acústica.

V.4.3. Intensidad de esparcimiento de una esfera acústica rígida

La Fig. 55 representa un comparativo para la intensidad de esparcimiento analítico-numérica, como función de θ_s y en la región del campo lejano, para una esfera dura de radio unitario con el valor $\nu = 178.62$ Hz ($ka = 3$). El cálculo analítico (línea continua roja) y numérico (línea discontinua azul) se hizo a partir de las relaciones propuestas por las Ecs. (130) y (145).

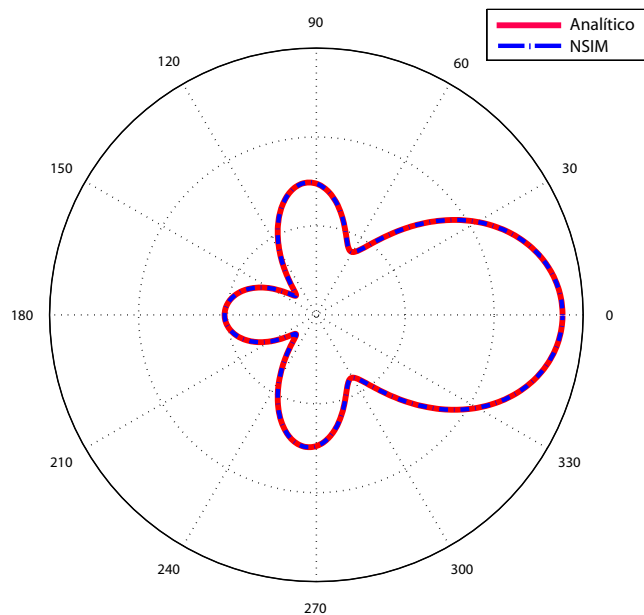


Figura 55. Diagrama polar para la intensidad de esparcimiento analítico (Morse, 1948)-numérica (Guel *et al.*, 2016), como función de θ_s y en la región del campo lejano, para una esfera dura de radio unitario con el valor de $ka = 3$.

Resultados numéricos adicionales fueron obtenidos para los casos $ka = 2, 4$ y 8 , respectivamente en (Guel *et al.*, 2016). Éstos fueron comparados a su vez, con la Ref. (Junger, Feit, 2004), observándose una buena concordancia con su contraparte analítica.

V.5. Respuesta acústica de una esfera suave y dura

En esta sección, un estudio numérico preliminar del sistema propuesto es presentado. El análisis de los casos límite es importante para verificar la precisión del método numérico NSIM, en la obtención de resultados sobre la respuesta acústica para una esfera de superficies suave y dura, respectivamente. Se efectuó el cálculo numérico para determinar la reflectancia y transmitancia del sistema, como función de la frecuencia de la onda acústica incidente.

Considerando la Ec. (109) generalizada al caso 3D, para describir el campo de presión de amplitud $p(r, \theta_s, \phi)$ establecido por una fuente arbitraria. La distribución de la intensidad en el campo lejano es

$$I(r, \theta_s, \phi) = \frac{1}{2\rho_0 c_l} p^2(r, \theta_s, \phi). \quad (146)$$

Así, la potencia total radiada se obtiene integrando la intensidad sobre una superficie que encierra a la fuente,

$$\Pi(r, \theta_s, \phi) = \frac{1}{2\rho_0 c_l} \int_{4\pi} p^2(r, \theta_s, \phi) r^2 d\Omega, \quad (147)$$

donde $d\Omega$ denota el diferencial del ángulo sólido.

Por otro lado, la radiación en el campo lejano de una fuente lineal continua, puede expresarse como

$$p(r, \theta_s, \phi) = p(r)H(\theta_s, \phi). \quad (148)$$

El término con dependencia angular es llamado factor direccional y siempre está normalizado para que un valor máximo sea la unidad. Las direcciones para las cuales $H = 1$, determinan el eje de propagación acústico.

La Ec. (148) refiere el procedimiento de separar la expresión para la presión en un factor que depende únicamente del ángulo y en otro que depende sólo de la distancia a la fuente. Es una práctica común para describir los campos sonoros de fuentes complicadas.

Notando que r es una constante para la integración, la Ec. (147) se puede reescribir como:

$$\Pi(\theta_s, \phi) = \frac{1}{2\rho_0 c} r^2 p^2(r) \int_{4\pi} H^2(\theta_s, \phi) d\Omega. \quad (149)$$

Para una fuente simple que genera la misma potencia acústica, la amplitud de presión $p(r)$ está dada por

$$\Pi(r) = \frac{1}{2\rho_0 c} 4\pi r^2 p^2(r). \quad (150)$$

Para la misma potencia acústica, la fuente direccional tendrá mayor intensidad a una distancia r sobre el eje acústico que la fuente simple. De ahí que, la potencia esparcida en reflexión $\Pi(\theta_s)$ es

$$\Pi(\theta_s) = 4\pi r^2 \sum_{i=1}^{N_{\theta_s}} |\sigma(\theta_s)|^2 \Delta\theta_s, \quad (151)$$

donde $\sigma(\theta_s) = \Pi(\theta_s)/I(\theta_s)$ es la sección transversal de dispersión y N_{θ_s} es el número de ángulos de esparcimiento θ_s , a considerar.

El coeficiente de reflexión diferencial $\partial R/\partial\theta_s$ es una sección eficaz de esparcimiento. Dicha amplitud representa la fracción de la energía total incidente sobre la superficie que es dispersada en un intervalo angular $d\theta_s$ alrededor de la dirección de esparcimiento y definida por el ángulo de dispersión θ_s .

Es decir, es la razón entre el flujo total esparcido y el flujo total:

$$\frac{\partial R}{\partial \theta_s} = \frac{\Pi(\theta_s)}{\Pi}. \quad (152)$$

A partir de la definición de la potencia para el caso de ondas planas,

$$\Pi = \frac{1}{2\rho_0 c} p^2(r) \cos \theta_s, \quad (153)$$

el diferencial de la reflectancia es

$$dR(\theta_s) = \frac{8\pi r^2 \rho_0 c}{p^2(r) \cos \theta_s} |\sigma(\theta_s)|^2 \Delta \theta_s. \quad (154)$$

Por lo tanto, integrando sobre el ángulo de esparcimiento, la reflectancia total es:

$$R(\theta_s) = \frac{8\pi r^2 \rho_0 c}{p^2(r) \cos \theta_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sigma(\theta_s)|^2 d\theta_s. \quad (155)$$

Para validar el método anteriormente propuesto para determinar la respuesta acústica, la Fig. 56 muestra una comparación preliminar entre los resultados analíticos (líneas rojas) y los correspondientes cálculos numéricos (círculos azules) del esparcador esférico para superficies equiparables con aquéllas de tipo suave (ver Ec. (104)) y dura (ver Ec. (105)), respectivamente. Cabe mencionar que, se consideraron materiales reales cuya impedancia acústica con respecto a la del medio de propagación, pudieran ser comparables.

Los resultados numéricos en la Fig. 56 tienen una buena correspondencia con las soluciones analíticas propuestas. Validamos el cumplimiento de la condición necesaria $R + T = 1$, brindando cierto grado de confiabilidad en la obtención numérica de cálculos posteriores. Sin embargo, no es posible garantizar por ahora que la condición de suficiencia también se hace presente. Preliminarmente, podemos observar que las propiedades reflectivas (Figs. 56(a) y 56(b)) y transmitivas (Figs. 56(c) y 56(d)) en función de la frecuencia reducida $\bar{\omega}$, se ven afectadas por el tipo de superficie.

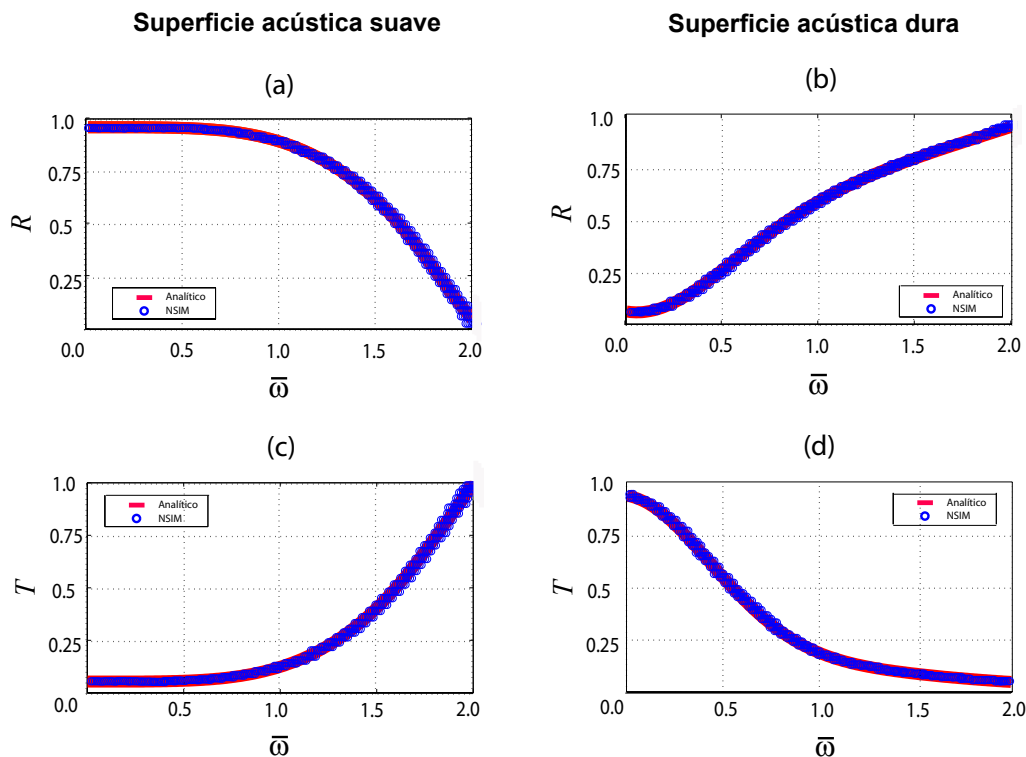


Figura 56. Respuesta acústica por un esparcidor esférico unitario. Reflectancia y Transmancia para una superficie de tipo suave ((a) y (c)) y dura ((b) y (d)), respectivamente. Modelo analítico (líneas rojas) y NSIM (círculos azules) son comparados.

A continuación, las Figs. 57 (esferas acústicas suaves) y 58 (esferas acústicas duras) muestran los resultados obtenidos de la respuesta acústica para diversos tipos de superficies inmersas en aire y en agua, en función de la frecuencia reducida $\bar{\omega}$. Se consideraron materiales reales de la esfera cuya impedancia acústica, con respecto a la del medio de propagación fueran comparables.

El comportamiento que se hace presente, permite caracterizar el diseño de sistemas con cualidades muy específicas. Por ende, una tendencia de posible interés es la caracterización de materiales con geometrías arbitrarias y complejas, a pesar de la existencia en la actualidad de una tecnología bien desarrollada.

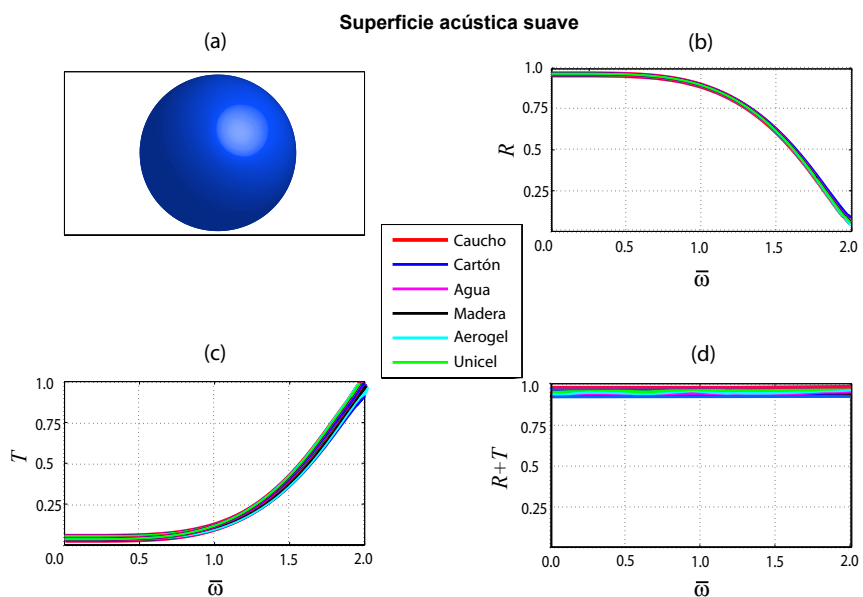


Figura 57. (a) Perfil de una esfera acústica suave unitaria. (b) Reflectancia, (c) Transmitancia y (d) Balance de energía ($R + T$) como función de la frecuencia reducida $\bar{\omega}$.

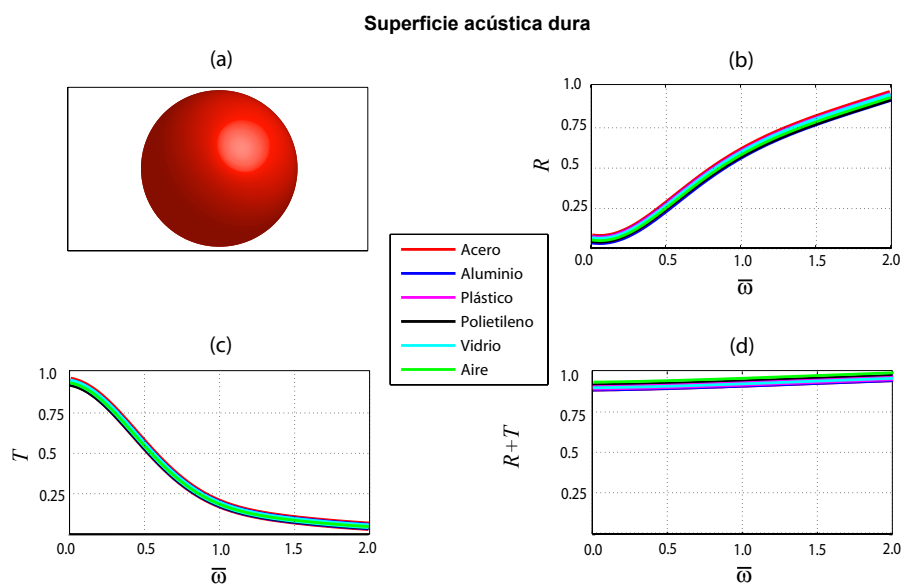


Figura 58. (a) Perfil de una esfera acústica dura unitaria. (b) Reflectancia, (c) Transmitancia y (d) Balance de energía ($R + T$) como función de la frecuencia reducida $\bar{\omega}$.

Capítulo VI

CONCLUSIONES

El presente trabajo ha desarrollado un estudio teórico y numérico de la respuesta acústica de una guía de ondas de cristal fonónico tridimensional (3DPnCW), periódicamente en una sola dirección y con superficies suaves y duras, respectivamente. Se ha considerado un PnC, en la forma de un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas sólidas. A continuación, se hace referencia a un breve resumen de los resultados obtenidos y por consiguiente, podemos enunciar las ideas clave a modo de conclusión.

Aplicamos una técnica numérica rigurosa para calcular los modos normales de vibración de una guía de ondas de cristal fonónico bidimensional (2DPnCW) y para una 3DPnCW. Esta técnica se le conoce como el NSIM. Dicha metodología del tipo BEM, constituye una enorme ventaja al considerar sólo puntos limitados de muestreo para reducir eficientemente los tiempos computacionales empleados. Basándonos en los resultados obtenidos, fue posible establecer cierto grado de precisión entre los resultados analíticos y numéricos, los cuales se hacen presentes en los casos de guías de onda en 2D y cavidades en 3D.

A su vez, nos fue posible implementar el procedimiento anteriormente referido para calcular preliminarmente la estructura de bandas de una 3DPnCW, periódicamente en una sola dirección. Dicha técnica tiene como punto de partida el segundo teorema integral de Green, permitiendo obtener consecuentemente un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el campo de presión y su derivada normal, evaluados en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea cuya solución determina las funciones fuente, con las que se pueden calcular las estructuras de bandas fonónicas. Los resultados obtenidos se implementaron para la condición de frontera de Dirichlet (impedancia nula), correspondiente a una superficie de tipo suave.

Posteriormente, se mejoró la precisión de dichos cálculos con el uso de funciones de Green periódicas, con vías a poder realizar el tratamiento especial de la condición de frontera de Neumann y poder determinar con éxito, las estructuras de bandas fonónicas del sistema infinito. Por lo tanto, se hizo necesario implementar una nueva técnica integral numérica para estudiar el sistema propuesto: el PGFM. Para verificar el grado de precisión alcanzado, determinamos las estructuras de bandas de la 2DPnCW. Una vez que los cálculos fueron confiables, se analizó cuidadosamente la 3DPnCW y se obtuvieron los resultados numéricos esperados; ambos sistemas, bajo la condición de frontera de Dirichlet y sobretodo la referida con anterioridad, como nuestra principal prioridad: la condición de frontera de Neumann. Un detalle interesante que surge a raíz de la investigación, fue la aparición de bandas prohibidas (bandgaps) de la estructura propuesta, para diferentes valores de los radios (o fracciones de llenado). Particularmente para el caso de superficies suaves, fue posible obtener modos discretos para algunos rangos de frecuencia, lo cual indica que la PnCW actúa como un filtro unimodal cuando la fracción de llenado de la celda unitaria es grande.

Para nosotros, estas propiedades podrían representar cierto grado de interés desde un punto de vista tecnológico. En cambio, para superficies duras se hacen presentes bandgaps cuando el tamaño de la inclusión es grande. Esto permite analizar el control de la onda de sonido a lo largo de la PnCW, en función de la delimitación en las posiciones de los bandgaps; así como el poder establecer regiones bien definidas, al realizar variaciones en torno a los parámetros que constituyen el perfil propuesto. Por ende, podemos concluir que el ancho del bandgap, depende en gran medida del contraste de impedancias entre los dispersores y el medio en el cual se encuentran inmersos; es decir, a mayor contraste de impedancias y tamaño de las inclusiones, mayor es el ancho de la banda prohibida.

Referente a la respuesta acústica del mismo sistema pero truncado, se analizó en primera instancia el esparcimiento de una onda plana por una esfera de radio unitario de superficie suave y dura, respectivamente. Se consideraron materiales reales cuyas impedancias acústicas, fueran comparables a los ideales. Determinamos la distribución angular de las amplitudes de presión en el campo cercano y los patrones de esparcimiento de campo lejano, como función del ángulo de dispersión y para distintos valores del número de onda adimensional ka . Los diagramas de amplitud de presión, de los patrones de esparcimiento y de intensidad muestran que la dispersión es dominante en los casos estudiados. A medida que aumenta el valor de la frecuencia, la fluctuación asociada a lo largo del ángulo de esparcimiento se hace más evidente y los lóbulos laterales en los gráficos, se vuelven cada vez más numerosos. Lo anterior, nos permite validar un grado de precisión aceptable entre las soluciones analítico y numéricas propuestas para la sección transversal de dispersión. Finalmente, con la integración de dicho factor para la obtención del coeficiente diferencial, se calculó la reflectancia y transmitancia del sistema propuesto.

Los resultados muestran que las propiedades reflectivas y transmitivas se ven afectadas por el tipo de superficie considerada y que relacionan el tipo de comportamiento que se esperaría cuando la perturbación acústica entra en contacto con un medio de impedancia baja (alta), provocando que una parte importante de la onda se transmita (refleje). Estas propiedades exhiben cierto interés desde un punto de vista tecnológico. Dicho análisis preliminar de la respuesta acústica de estructuras cristalinas como son las PnCWs, muestran que es posible establecer una correspondencia biunívoca que podría relacionar, en un trabajo futuro, los valores de la reflectancia del sistema finito con las regiones de las bandas prohibidas que sabemos se hacen presentes en dichas estructuras periódicas; permitiéndonos una pauta para referir (con respecto a la PnCW): un comparativo entre los casos finito e infinito, respectivamente. Lo anterior, ha permitido establecer un precedente importante en el modo de implementar técnicas numéricas rigurosas para el estudio de un cristal fonónico bidimensional inmerso en una 3DPnCW, cuya periodicidad se extendería en dos direcciones.

Referencias

- Arfken, G. (2013). *Mathematical methods for physicists*. 7th edition. USA: *Academics Press Inc.*
- Berkowitz, R. (2018). Quieting a room with metamaterial wall panels. *Physics today*, **66**(22): 11–17.
- Bringuier, S. (2011). Phase and controlling phononic crystals: Realization of acoustic boolean logic gates. *J. Acoust. Soc. Am.*, **130**(4): 1919–1925.
- Buczynski, R. (2004). Photonic crystal fibers. *Proceedings of the XXXIII International School of Semiconducting Compounds. Acta Phy. Pol. A*, **106**: 141–167.
- Burton, A. (1971). The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **323**: 201–210.
- Casadei, F. (2014). Harnessing fluid structure interactions to desing self regulating acoustic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, **115**: 034907(1)–(6).
- Cicek, A. (2013). Acoustic waveguiding by pliable conduits with axial cross sections as linear waveguides in two dimensional sonic crystals. *J. Acoust. Soc. Am.*, **134**(5): 13–18.
- Cui, J.-G., Yang, T., y Chen, L.-Q. (2018). Frequency-preserved non-reciprocal acoustic propagation in a granular chain. *Appl. Phys. Lett.*, **112**: 181904(1)–(4).
- Fitzgerald, R. (2018). A granular acoustic diode. *Physics today*, **69**(37): 24–29.
- Ginsberg, J. (2018). *Acoustics-a textbook for engineers and physicists. Springer International Publishing II: Applications*, páginas 1–689.
- Guel, J., Villa-Villa, F., Mendoza-Suárez, A., y Pérez-Aguilar, H. (2016). Acoustic scattering of 3d complex systems having random rough surfaces by scalar integral equations. *Archives of acoustics*, **41**(4): 461–472.
- Guillén, C., Alva, H., Pérez, H., Mendoza, A., y Villa, F. (2019). Phononic band structure of an acoustic waveguide that behaves as a phononic crystal. *Results in Physics*, **12**: 1111–1118.
- Gupta, A. (2014). A review on sonic crystal, its applications and numerical analysis techniques. *Acoustical Physics India*, **60**(2): 223–234.
- Ibiza, T. (2013). Estudio numérico de la focalización de ondas evanescentes con una estructura periódica. *Universidad Politécnica de Valencia. Trabajo de Grado*, páginas 1–68.

- Khelif, A. (2003a). Transmission and dispersion relations of perfect and defect containing waveguide structures in phononic band gap materials. *P.R.B.*, **68**: 1–8.
- Khelif, A. (2003b). Two dimensional phononic crystal with tunable narrow pass band and application to a waveguide with selective frequency. *Journal of Applied Physics*, **94**(3): 1308–1311.
- Kress, R. (2001). Acoustic scattering, in scattering. scattering and inverse scattering in pure and applied science. *Academic Press, London*.
- Lee, W.-M. (2015). Three-dimensional acoustic scattering by multiple spheres using collocation multipole method. *International Journal of Solids and Structures*, **63**: 39–49.
- Liu, Z. (2000). Locally resonant sonic materials. *Science*, **289**: 173(4)–(6).
- Lucklum, R. (2014). Phononics crystals and metamaterials, promising new sensor platforms. *Institute for Micro and Sensor Systems, Germany*, **87**: 40–45.
- Maldovan, M. (2011). Sound and heat revolutions in phononics. *Nature*, **503**: 209–217.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2006). Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and two dimensional photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**(10): 2249–2256.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2007). Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive lefthanded materials and dielectrics in the unit cell. *J. Opt. Soc. Am. B*, **24**(12): 3091–3098.
- Miyashita, T. (2005). Sonics crystals and sonic wave-guides. *Ryukoku University, Japan. Sci. Technol.*, **16**: R47–R63.
- Morse, P. (1948). Vibration and sound. *McGraw-Hill Book Company, New York*.
- Partridge, C. J. (1993). Sound wave scattering from a rigid sphere. *MRL Technical Report*, **91**(9): 1–49.
- Pennec, Y. (2004). Tunable filtering and demultiplexing in phononic crystals with hollow cylinders. *Phys. Rev. E.*, **69**: 046608(1)–(6).
- Porter, M. A., Kevrekidis, P. G., y Daraio, C. (2015). Granular crystals: Nonlinear dynamics meets materials engineering. *Physics Today*, **68**(11): 44–49.
- Romero, V. (2012). Theoretical and experimental evidence of level repulsion states and evanescent modes in sonic crystal stubbed waveguides. *Optical Society of America*, **11**: 267–276.

- Sliwa, I. (2005). Phononic band gap width control through structural and material parameters in two dimensional phononic crystals. *Acta Phy. Pol. A.*, **108**(6): 1–15.
- Sz-Chin, S. (2011). Tunable phononic crystals with anisotropic inclusions. *Phys. Rev. B.*, **83**: 174303(1)–(9).
- Turley, S. (2006). Acoustic scattering from a sphere. *Internal Hughes Research Laboratory Notes*.
- Villa-Villa, F., Mendoza-Suárez, A., y Pérez-Aguilar, H. (2017). The locally corrected nystrom method applied to 3d scalar wave in acoustic cavities using curvilinear coordinates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **79**: 110–118.
- Vuylsteke, X. (2014). Development of a reference method based on the fast multipole boundary element method for sound propagation problems in urban environments: formalism, improvements and applications. *Physics, Université Paris-Est*.
- Yang, S. (2004). Focusing of sound in a 3d phononic crystal. *Phys. Rev. Letters*, **93**: 024301(1)–(4).
- Yeh, J. Y. (2013). Application and analysis of phononic crystal energy harvesting devices. *J. Eng. Technol. Educ.*, **10**: 18–26.

Apéndice A

ECUACIÓN DE ESTADO

En este apéndice se obtendrá la ecuación de estado para un fluido, la cual relaciona las fuerzas restauradoras internas con las deformaciones correspondientes. Se buscará una relación lineal la cual, aunque simplifica el desarrollo, restringe el grado de la deformación. Para medios fluidos, debe relacionar tres cantidades físicas que describen el comportamiento termodinámico.

Por otro lado, se encuentra experimentalmente que los procesos acústicos son casi adiabáticos: hay un intercambio insignificante de energía térmica entre las partículas del fluido. En estas condiciones, la entropía (y no la temperatura) permanece casi constante.

Usando la ley de los gases perfectos, se obtiene la ecuación de estado adiabática:

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (156)$$

donde \mathfrak{P} es la presión instantánea en cualquier punto y \mathfrak{P}_0 es la presión de equilibrio constante en el fluido. Además, ρ es la densidad del medio, ρ_0 es la densidad de equilibrio constante y $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ es la razón de los calores específicos a presión y volumen constantes, también llamada coeficiente adiabático.

Dada la Ec. (156), se escribe una expansión de Taylor, alrededor de $\rho = \rho_0$,

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_o + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots, \quad (157)$$

tal que, para $(\rho - \rho_0)$ con un valor pequeño,

$$\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_o \doteq B \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right), \quad (158)$$

donde $B = \rho_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$ es el módulo adiabático de volumen.

En términos de la presión acústica y la condensación s ,

$$p \doteq Bs. \quad (159)$$

La Ec. (156) se denomina la *ecuación de estado*, donde $p = \mathfrak{P} - \mathfrak{P}_o$ es la sobrepresión o presión acústica en cualquier punto y $s = (\rho - \rho_0) / \rho_0$ es la condensación en cualquier punto, cuya restricción esencial es que su valor sea pequeño; i.e. $|s| \ll 1$.

Apéndice B

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En este apéndice se obtendrá la ecuación de continuidad, para relacionar el movimiento de un fluido respecto a su compresión o dilatación. Se buscará establecer una relación funcional entre la velocidad de la partícula \mathbf{u} y la densidad instantánea, ρ .

A partir de la Fig. 59, podemos notar que la rapidez neta $(\partial\rho/\partial t) dV$ con que la masa $\rho\mathbf{u}$ fluye en el volumen dV a través de su superficie, debe ser igual a la rapidez con que aumenta la masa dentro del volumen; i.e. $\partial(\rho\mathbf{u})/\partial V$.

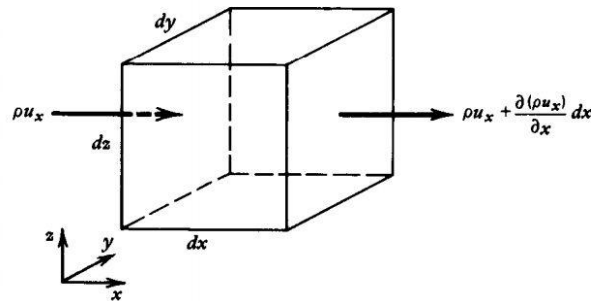


Figura 59. Flujo de masa en la dirección x por un elemento de volumen dV fijo.

Nótese que el flujo neto de masa asociado a la dirección x , es

$$\left\{ \rho u_x - \left[\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx \right] \right\} dy dz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV. \quad (160)$$

Expresiones similares son obtenidas en las direcciones y y z , de tal manera que el flujo total corresponde a

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] dV \equiv -[\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] dV. \quad (161)$$

Cabe mencionar que, la rapidez con que la masa aumenta en el volumen es $(\partial\rho/\partial t) dV$. De ahí que, el flujo neto debe ser igual a dicha rapidez de aumento. Por ende, se obtiene una ecuación no lineal en las variables acústicas ρ y \mathbf{u} :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (162)$$

La Ec. (162) se denomina la *ecuación de continuidad*. Ésta no es una relación lineal: el segundo término implica el producto de la velocidad de la partícula \mathbf{u} y la densidad instantánea ρ . Sin embargo, podemos expresar la densidad instantánea ρ en la forma $\rho = \rho_0(1 + s)$, usando el hecho de que la densidad media ρ_0 es una constante en el espacio y en el tiempo; suponiéndose además, que la condensación cumple la restricción $|s| \ll 1$.

De ahí que, la Ec. (162) se convierte en

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (163)$$

denominada la *ecuación de continuidad linealizada*.

Integrando la Ec. (163) respecto al tiempo, se tiene que

$$\int \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) = cte. \quad (164)$$

Nótese que la constante de integración debe ser cero, si no hay perturbación acústica.

Apéndice C

ECUACIÓN DE FUERZA

En este apéndice se obtendrá la ecuación de Euler del movimiento en un fluido, la cual permite representar el caso más realista de un fluido con viscosidad (introduciendo una constante positiva que mide las fuerzas de fricción en el interior) y que está sujeto a un campo de fuerzas externas \mathbf{f} (que actúan como una fuente para la perturbación), variando con el tiempo en cada dirección.

Un volumen de gas situado en un medio homogéneo encerrado en una caja cúbica con paredes flexibles e ingravidas, se muestra en la Fig. 60. La presión sonora aumenta de izquierda a derecha con la velocidad espacial en la forma del ∇p .

Supongamos que los lados de la caja están completamente libres de fricción; es decir, que es despreciable todo arrastre viscoso entre las partículas de gas dentro de la caja y las de afuera. Luego, las únicas fuerzas que actúan sobre el gas interior son las debidas a la presión ejercida sobre las paredes de la caja.

Así, la diferencia entre las fuerzas que actúan sobre dos caras opuestas de la caja cúbica es igual a la velocidad de variación de la fuerza con la distancia, multiplicada por la distancia incremental entre las dos caras.

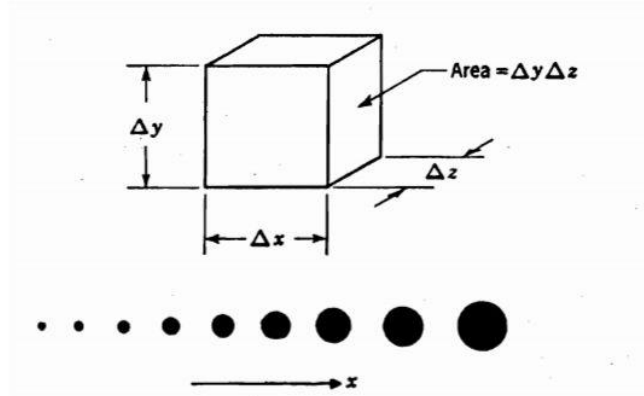


Figura 60. Pequeño cubo de aire, parte de un medio gaseoso en el que la presión sonora aumenta en la dirección x . El tamaño de los puntos indica la magnitud de p , en cada lugar.

Por consiguiente, la fuerza que actúa acelerando la caja en dirección positiva es

$$-\hat{\mathbf{i}}[(\partial p/\partial x)\Delta x]\Delta y\Delta z - \hat{\mathbf{j}}[(\partial p/\partial y)\Delta y]\Delta x\Delta z - \hat{\mathbf{k}}[(\partial p/\partial z)\Delta z]\Delta x\Delta y. \quad (165)$$

Al dividir la Ec. (165) por $V = \Delta x\Delta y\Delta z$, nos proporciona la fuerza por unidad de volumen que acelera a la caja,

$$-\nabla p = f/V. \quad (166)$$

Por la segunda ley de Newton, el miembro derecho de la Ec. (166) es igual a la velocidad de variación de la cantidad de movimiento por unidad de volumen de la caja. Por ende,

$$-\nabla p = f/V = M/V(D\mathbf{u}/Dt) = \rho(D\mathbf{u}/Dt), \quad (167)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad vectorial media del gas dentro de la caja, ρ_0 es la densidad media del gas en la caja y $M = \rho V$ es la masa total del gas en la caja. Además, D/Dt no es una simple derivada parcial, sino que representa la velocidad total de variación de la velocidad de un volumen muy pequeño de gas en la caja, independientemente de su posición; es decir,

$$D\mathbf{u}/Dt = \partial\mathbf{u}/\partial t + u_x\partial\mathbf{u}/\partial x + u_y\partial\mathbf{u}/\partial y + u_z\partial\mathbf{u}/\partial z, \quad (168)$$

donde u_x, u_y, u_z son las componentes de la velocidad vectorial de las partículas, \mathbf{u} .

En la Ec. (168), si la velocidad vectorial \mathbf{u} de las partículas es lo suficientemente pequeña, la velocidad de variación de la cantidad de movimiento de las partículas en la caja puede tomarse como aproximadamente igual a la velocidad de variación de la cantidad de movimiento en un punto fijo; i.e. $D\mathbf{u}/Dt \doteq \partial\mathbf{u}/\partial t$.

Finalmente, la densidad instantánea ρ puede tomarse como la densidad media ρ_0 .

Por lo tanto,

$$-\nabla p \doteq \rho_0 \partial\mathbf{u}/\partial t, \quad (169)$$

denominada la *ecuación de fuerza no viscosa*, válida para procesos acústicos de pequeña amplitud.