



# Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

---

## Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Control y Sincronización del Sistema  
Van Der Pol - Duffing

T E S I S

que para obtener el título de:  
Maestro en Ciencias en Ingeniería Física

P r e s e n t a :

Ulises Uriostegui Legorreta

Asesores:

Doctor Eduardo Salvador Tututi Hernández

Maestro en Ciencias en Física Gabriel Arroyo Correa

*Morelia Michoacán, Agosto 2015*

*A mis padres*

# Agradecimientos

Nada hubiera sido posible sin mis padres, a ustedes más que a nadie agradezco este momento y con quienes quiero compartir mi alegría ya que son la base de mi persona y el apoyo con el cual espero siempre contar. A mi mamá, por darme la vida y educarme en mis primeros años, te deseo siempre lo mejor y espero estar ahí cuando lo necesites. A mi papá, eres la persona a quien más admiro y en verdad te agradezco todo el apoyo.

Durante mi estancia en Morelia conocí a muchas personas que estuvieron ahí cuando las necesitaba, a mis amigos de la facultad sólo por mencionar a los más cercanos; Gabino, David, Gabriela, Rogelio, Jenifer y a todos mis amigos de maestría, vaya que sin ustedes estos casi 2 años hubiesen sido muy aburridos. A mi novia Mirna; gracias por todas las cosas que hemos compartido juntos, los cuidados cuando andaba enfermo y tu paciencia.

A mis asesores de tesis; Dr. Eduardo Salvador Tutiti Hernández, quien además de haber sido excelente profesor durante la carrera, haya confiado en mí para realizar esta tesis, gracias por tu paciencia, consejos, correcciones, explicaciones. M.C. Gabriel Arroyo Correa, quien me brindo excelentes consejos para poder desarrollar esta tesis en tiempo y forma. Gracias por todo esto no hubiera sido posible sin ustedes.

Finalmente, quiero agradecer al Dr. Fernando Iguazu, Dr. Alberto Mendoza y al Dr. Isidro Aranda, por el haber aceptado ser sinodales para el examen recepcional, así también por haberse tomado el tiempo necesario para la lectura de la tesis y por sus valiosos comentarios y consejos.



# Contents

<b>Agradecimientos</b>	<b>i</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>1 Dinámica no lineal de los osciladores de Van Der Pol y de Duffing</b>	<b>1</b>
1.1 Oscilador Van Der Pol . . . . .	1
1.1.1 Análisis . . . . .	2
1.2 Oscilador Duffing . . . . .	11
1.2.1 Análisis . . . . .	13
<b>2 Control y sincronización de sistemas caóticos</b>	<b>19</b>
2.1 Introducción . . . . .	19
2.2 Métodos de control caos . . . . .	20
2.2.1 Control a través de un parámetro accesible del sistema. . . . .	21
2.2.2 Control por modificación de la estructura del sistema. . . . .	21
2.2.3 Control por inyección de señales externas. . . . .	22
2.3 El problema general de la sincronización . . . . .	23
2.4 Sincronización de sistemas caóticos . . . . .	23
2.4.1 Métodos de sincronización . . . . .	24
2.4.2 Sincronización Completa o idéntica SC (complete or identical synchronization) . . . . .	27
2.4.3 La configuración Pécora y Carroll (PC) . . . . .	27
2.4.4 Configuración APD (active-passive decomposition method). . .	28
2.4.5 Sincronización en un sistema no idéntico de baja dimensión. . .	29
<b>3 SISTEMA VAN DER POL-DUFFING</b>	<b>31</b>
3.1 Introducción . . . . .	31
3.2 Sistema Van Der Pol-Duffing . . . . .	32
3.3 Análisis de estabilidad . . . . .	33
3.3.1 Bifurcación y el inicio del caos . . . . .	34
3.4 Implementación del circuito analógico . . . . .	41

## CONTENTS

---

3.4.1	Diseño del simulador analógico . . . . .	42
3.4.2	Observaciones experimentales . . . . .	43
3.5	Sistema Van Der Pol-Duffing forzado . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>53</b>

# Resumen

Palabras Claves: Oscilador Van Der Pol, Duffing, Caos, Circuitos Caóticos, Dinámica No Lineal.

La tesis trata sobre el caos y su aplicación a la ingeniería de los sistemas de comunicaciones. Dentro del amplio espectro de problemas que se investigan actualmente en esta área, este trabajo aporta resultados originales especialmente en el caso de los sistemas analógicos basados en la sincronización caótica. Se investigan estos sistemas no sólo desde el punto de vista teórico, sino también desde el punto de vista experimental y de la implementación. En el primer capítulo se analiza la dinámica de los osciladores de Van Der Pol y Duffing. Para conocer más a detalle su estabilidad, puntos de equilibrio y dinámica que presentan al variar los parámetros de los osciladores. En el segundo capítulo se describen métodos de control y sincronización más importantes que dan el soporte teórico para la comprensión del presente trabajo y se realiza una revisión de las técnicas de control y sincronización para, posteriormente, aplicarlas a resolver el sistema Van Der Pol-Duffing. En el tercer capítulo se aborda el problema de control y sincronización del sistema Van Der Pol-Duffing mediante los esquemas unidireccional y bidireccional, para así, lograr resolver la sincronización completa de dos osciladores distintos. Finalmente el cuarto capítulo contiene una discusión detallada de los resultados y conclusiones referentes al capítulo tres.

## Abstract

The thesis deals with chaos and its application to engineering communications systems. Within the broad spectrum of problems currently investigating in this area, this study provides original results especially in the case of analog systems based on chaotic synchronization. These systems are investigated not only from the theoretical standpoint, but also from the experimental point of view and implementation. In the first chapter the dynamics of oscillators Van Der Pol and Duffing be analyzed. For more detail its stability and dynamic equilibrium points having varying parameters oscillators. In chapter two most important methods of control and synchronization which give theoretical support for the understanding of this study and a review of the techniques of control and synchronization is performed to then apply them to solve the system described Van Der Pol-Duffing. In the third chapter the problem of system control and synchronization Van Der Pol-Duffing by the unidirectional and bidirectional schemes in order to achieve full synchronization solve two different oscillators are

## CHAPTER 0. RESUMEN

---

addressed. Finally, the fourth chapter contains a detailed discussion of the results and conclusions concerning the chapter three.

---

---

# Dinámica no lineal de los osciladores de Van Der Pol y de Duffing

## 1.1 Oscilador Van Der Pol

El oscilador de Van Der Pol fue descrito por el ingeniero y físico Balthasar Van Der Pol mientras trabajaba en Philips [1]. Van der Pol encontró oscilaciones estables que llamó oscilaciones de relajación [2], conocidas en la actualidad como ciclos límite en circuitos que usaban válvulas de vacío. Cuando esos circuitos se hacen funcionar cerca del ciclo límite entran en acoplamiento y la señal entra en fase con la corriente. Van Der Pol y su colega, Van Der Mark, informaron en el número de septiembre de 1927 de Nature [3] que, para determinadas frecuencias aparecía un ruido irregular, siempre cerca de las frecuencias de acoplamiento. Fue uno de los primeros descubrimientos experimentales de la Teoría del caos [4].

La ecuación de Van Der Pol tiene una larga historia en la Física y Biología. Por ejemplo, en Biología, Fitzhugh [5] y Nagumo [6] aplicaron la ecuación a un campo bidimensional en el modelo de FitzHugh-Nagumo para describir el potencial de acción de las neuronas. También se ha usado en sismología para modelar el comportamiento de dos placas en una falla [7]. Aunque se conoce mejor a Van Der Pol por su trabajo con circuitos eléctricos, descubrió una amplia variedad de sistemas que presentan oscilaciones: el arpa eólica, un martillo neumático, el rechinado de un cuchillo en un plato, el ondear de una bandera al viento, el ocasional zumbido de una llave de agua, la recurrencia periódica de epidemias y crisis económicas y, por último, el latido del corazón.[8] Van Der Pol agrupó varios fenómenos en una sola categoría de sistemas que presentan oscilaciones periódicas.

El oscilador de Van Der Pol es un sistema dinámico consistente en un circuito eléctrico no lineal utilizado a principios del siglo pasado. De hecho, Van Der Pol fue precursor de los primeros radios comerciales cuando propuso su modelo en 1920 siendo ingeniero de Philips Company (Netherlands). Este oscilador con amortiguamiento no lineal está descrito por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden homogénea:

## CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.1)$$

### 1.1.1 Análisis

Las ecuaciones de equilibrio que rigen el comportamiento de ciertos circuitos no lineales autónomos pueden aproximarse por una ecuación diferencial denominada ecuación de Van Der Pol.

Este oscilador con amortiguamiento no lineal está descrito por la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.2)$$

donde  $x$  es la variable dinámica y  $\mu$  el parámetro que indica la no linealidad y la fuerza de amortiguamiento.

Podemos ver que cuando  $\mu = 0$  el oscilador se comporta como un oscilador armónico simple sin embargo, conforme aumenta el valor de  $\mu$  las formas de onda resultantes se asemejan a las de un oscilador de relajación. A medida que aumente  $\mu$ , el circuito es más inestable, con lo que las variables abandonarán la vecindad de origen con mayor rapidez [9]. Para poder entender mejor el comportamiento de este oscilador es necesario empezar por resolver la ecuación.

Cuando  $x \ll 1$ , el término cuadrático  $x^2$  es despreciable y la ecuación del sistema se convierte en una ecuación diferencial lineal con amortiguamiento negativo  $-\mu$ , así

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu + \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.3)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden se puede representar, como un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu y - x \end{aligned}$$

Los puntos  $x^*$  para las cuales  $x^* = F(x^*) = 0$  se conocen como puntos fijos o críticos. Calculando el punto fijo del sistema, se tiene como punto fijo  $P(x = 0, y = 0)$ .

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ \mu y - x &= 0 \end{aligned}$$

# CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

Si se tiene un sistema dinámico lineal  $\dot{X} = AX$ , es fácil conocer qué tipo de punto fijo presenta dicho sistema; simplemente se calculan los eigenvalores  $\lambda$  a partir de la ecuación característica del sistema  $\det(A - \lambda I) = 0$  y se analiza la relación que hay entre los eigenvalores.

Los valores propios de una matriz están dados por su ecuación característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que para 2 dimensiones es

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(A) + \det(A) = 0 \tag{1.4}$$

entonces:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{[\text{Tr}(A)]^2 - 4\det(A)}}{2} \tag{1.5}$$

por lo que los valores propios dependen de la traza y del determinante de la matriz A [10].

Podemos hacer un diagrama general por medio del discriminante de la Ec. 1.4, graficando  $\text{Tr}(A)$  vs  $\det(A)$ , de donde tenemos las relaciones  $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$  y  $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$

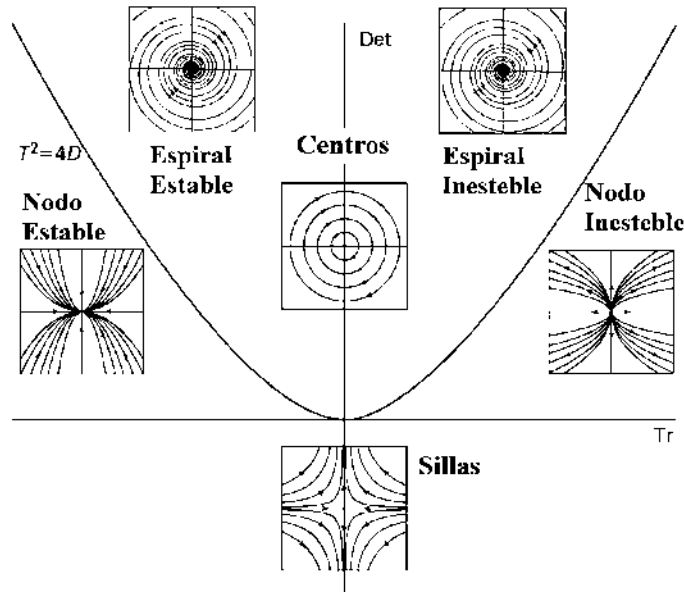


Figure 1.1: Clasificación de puntos fijos.

La matriz que corresponde al sistema lineal es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

## CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

Donde  $Tr(A) = \mu$  y  $det(A) = 1 > 0$ , de esta manera, como se puede observar en el diagrama de bifurcación traza-determinante Fig. 1.1, no tendremos puntos Silla y el punto fijo  $P(x = 0, y = 0)$  es inestable (espirales inestables  $0 < \varepsilon < 2$  y nodos inestables para  $\varepsilon \geq 2$ ) Fig. 1.2. Por lo tanto cuando  $x$  es pequeño el sistema es inestable al rededor del punto fijo.

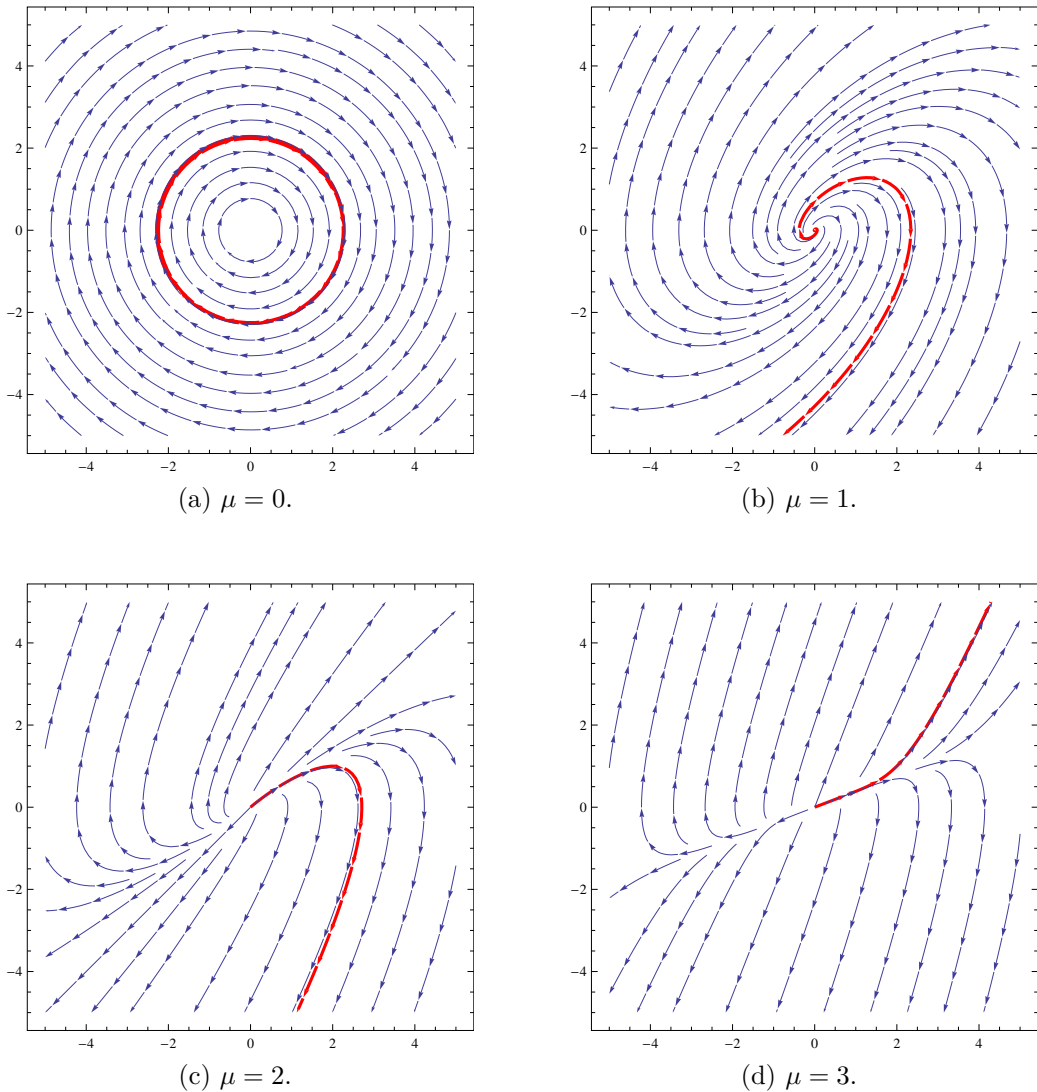


Figure 1.2: Diagrama de fase del sistema para ciertos valores de  $\mu$ .

Para el caso cuando  $x$  es grande, el termino  $x^2$  es el dominante y el amortiguamiento es positivo. Por consiguiente, se espera que el comportamiento esté restringido a alguna área alrededor del punto fijo. El sistema de Van Der Pol satisface el Teorema de Liénard [9], ya que de la Ec. 1.1 tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y - x\end{aligned}$$

donde  $f(x) = -\mu(1 - x^2)$  y  $g(x) = x$ , ambas funciones cumplen el Teorema de Liénard.

Ecuación de Liénard

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \tag{1.6}$$

**Teorema 1.1.1 (Teorema de Liénard)** *Si  $f(x)$  y  $g(x)$  satisfacen las siguientes propiedades*

- $f(x)$  y  $g(x)$  son continuamente diferenciables para todo  $x$
- $g(-x) = -g(x)$  para todo  $x$  ( $g(x)$  es una función impar)
- $g(x) > 0$  para todo  $x > 0$
- $f(-x) = f(x)$  para todo  $x$  ( $f(x)$  es una función par)
- la función impar  $F(x) = \int_0^x f(u)du$  tiene exactamente un cero positivo en  $x = a$ , es negativa para  $0 < x < a$ , es positiva y no decreciente para  $x > a$ , y  $F(x) \rightarrow \infty$ , cuando  $x \rightarrow \infty$

*entonces el sistema tiene un único ciclo límite estable en torno al origen del espacio fase.*

El sistema original correspondiente tiene una única trayectoria cerrada que rodea al origen y a ella tienden en espiral todas las demás trayectorias, asegurándose con esto que hay un ciclo límite estable en el espacio fase. Por lo tanto, el sistema Van Der Pol es un sistema Liénard.

Usando la transformación de Liénard

$$y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{\dot{x}}{\mu} \tag{1.7}$$

se obtiene

$$\dot{x} = \mu\left(x - \frac{x^3}{3} - y\right) \tag{1.8}$$

derivando la Ec. 1.7 y despejando  $x$  de la Ec. 1.1.

$$\dot{y} = \dot{x}(1 - x^2) - \frac{\ddot{x}}{\mu} \tag{1.9}$$

## CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

$$\frac{\dot{x}}{\mu} = -\frac{\ddot{x}}{\mu} + (1 - x^2)\dot{x} \quad (1.10)$$

igualando las Ecs 1.9 y 1.10

$$\dot{y} = \frac{x}{\mu} \quad (1.11)$$

Por lo tanto la Ec. 1.1 puede reescribirse como

$$\dot{x} = \mu\left(x - \frac{x^3}{3} - y\right) \quad (1.12)$$

$$\dot{y} = \frac{x}{\mu} \quad (1.13)$$

Cuando  $\mu \ll 1$ , es conveniente reescribir la Ec. 1.1 como

$$\dot{x} = \mu\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - y \quad (1.14)$$

$$\dot{y} = x \quad (1.15)$$

Siguiendo los mismos pasos anteriores para el cálculo de puntos fijos y así encontrar la matriz asociada al sistema. Tenemos nuevamente el punto fijo  $P(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} \mu\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - y &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Consideremos las Ecs. 1.14 y 1.15. Si hacemos  $f = \mu\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - y$ ,  $g = x$  y derivamos parcialmente cada una de ellas con respecto a  $x$  y  $y$  obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu(1 - x^2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

La matriz Jacobiana del sistema evaluada en el punto fijo  $P(0, 0)$  para  $\mu \ll 1$ :

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos  $Tr(J) = \mu$ ,  $det(J) = 1$ , por lo que alrededor del punto de equilibrio se obtienen espirales inestables. El punto de equilibrio en estas condiciones resultó ser, una vez más, inestable (repulsor) Fig. 1.3.

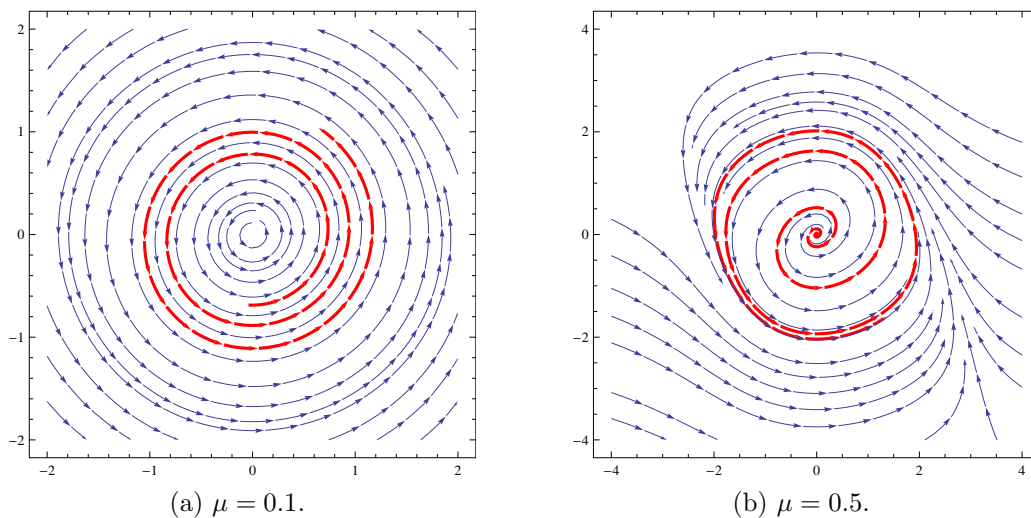


Figure 1.3: Diagrama de fase del sistema para ciertos valores de  $\mu$ .

En el caso límite, para  $\mu = 0$  (amortiguamiento nulo) el sistema es lineal, preserva la energía y se tiene que la matriz del sistema es

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde la  $Tr(\mathbf{B}) = 0$ ,  $det(\mathbf{B}) = 1$ . Para este caso se obtienen centros Fig. 1.4.

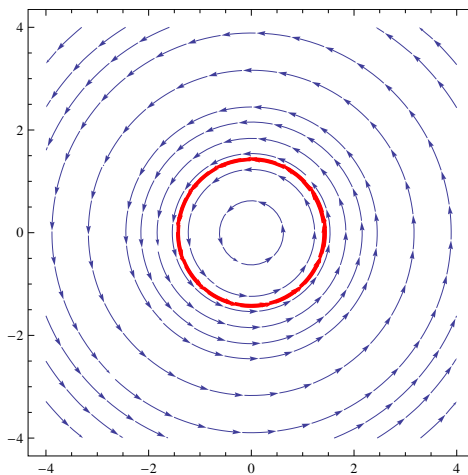


Figure 1.4: Diagrama de fase del sistema para  $\mu = 0$ .

El polinomio característico es  $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ , los valores propios son  $\lambda = \pm i$ . Para  $\lambda_1 = i$ :

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

Para  $\lambda_1 = i$  se tiene que,  $y = -ix$ , por lo tanto el vector propio asociado es

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Para  $\lambda_1 = -i$  se tiene que,  $y = ix$ , por lo tanto el vector propio asociado es

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución del sistema en terminos de los vectores propios se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\text{cost} + i\text{sent}) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\text{cost} - i\text{sent})$$

de modo que

$$x = D\text{cost} + E\text{sent} \tag{1.16}$$

$$y = D\text{sent} - E\text{cost} \tag{1.17}$$

Para obtener la solución aproximada para pequeños valores de  $\mu$  ( $\mu \ll 1$ ) se consideran nuevas variables  $(u, v)$ , que rotan con la solución sin perturbarla, es decir

$$\begin{aligned} x &= x\text{cost} + y\text{sent} \\ y &= -x\text{sent} + y\text{cost} \end{aligned}$$

Sustituyendolas en las Ecs 1.14 y 1.15 se obtiene

$$\dot{u} = \mu \left( u\text{cost} - v\text{sent} - \frac{1}{3}(u\text{cost} - v\text{sent})^3 \right) \text{cost} \tag{1.18}$$

$$\dot{v} = -\mu \left( u\text{cost} - v\text{sent} - \frac{1}{3}(u\text{cost} - v\text{sent})^3 \right) \text{sent} \tag{1.19}$$

Como  $\dot{u}$  y  $\dot{v}$  son  $O(\mu)$ , la velocidad cambiante de  $u$  y  $v$  es mucho menor que la de  $\text{cost}$  y  $\text{sent}$ . Entonces se puede aplicar la teoría del promedio a las Ecs 1.18 y 1.19. Integrando los miembros derechos de estas ecuaciones con respecto a  $t$  desde 0 a  $T = 2\pi$  y manteniendo fijas a  $u$  y  $v$  se obtiene

$$\dot{u} = \frac{\mu}{8} u ((4 - (u^2 + v^2))) \tag{1.20}$$

$$\dot{v} = \frac{\mu}{8} v ((4 - (u^2 + v^2))) \tag{1.21}$$

Para mostrar que el sistema tiene un ciclo límite hacemos un cambio de variables

**CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING**

---

$$r^2 = u^2 + v^2 \tag{1.22}$$

derivando

$$r\dot{r} = u\dot{u} + v\dot{v}$$

Sustituyendo las Ecs. 1.20 y 1.21 en la Ec. 1.22 y usando  $r^2 = u^2 + v^2$

$$r\dot{r} = \frac{\mu}{8}u^2 ((4 - (u^2 + v^2))) + \frac{\mu}{8}v^2 ((4 - (u^2 + v^2)))$$

se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{r} = \frac{\mu}{8}r(4 - r^2) \tag{1.23}$$

Si  $2 < r$ ,  $\dot{r} < 0$  el nodo es pozo o atractor pero esto no podria suceder porque en casos anteriores, se demostró que el punto crítico es un punto repulsor. Para  $r = 2$  se tiene un equilibrio estable del sistema. Por lo tanto, el sistema original de las Ecs 1.14 y 1.15 tiene un ciclo límite con  $r = 2$  para pequeños valores de  $\mu$  Fig. 1.5.

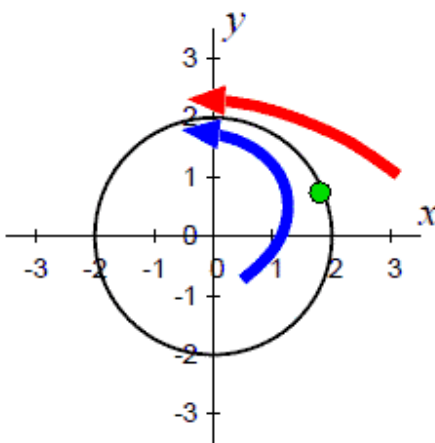


Figure 1.5: Flujos del oscilador de Van Der Pol para  $\mu \ll 1$ .

Cuando  $\mu \gg 1$ , es conveniente usar las Ecs 1.12 y 1.13. En este caso, si hacemos  $f = \mu(x - \frac{x^3}{3} - y)$ ,  $g = \frac{x}{\mu}$  y derivamos parcialmente cada una de ellas con respecto a  $x$ , y con respecto a  $y$  obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu(1 - x^2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\mu$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

La matriz Jacobiana del sistema evaluando en el punto fijo  $P(0,0)$  para  $\mu \gg 1$ :

## CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu & -\mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos  $Tr(J) = \mu$ ,  $det(J) = 1$ , por lo que el punto de equilibrio es un nodo inestable, es decir, está expulsando sus trayectorias. Una vez mas se demuestra que el punto de equilibrio del sistema es repulsor Fig 1.6.

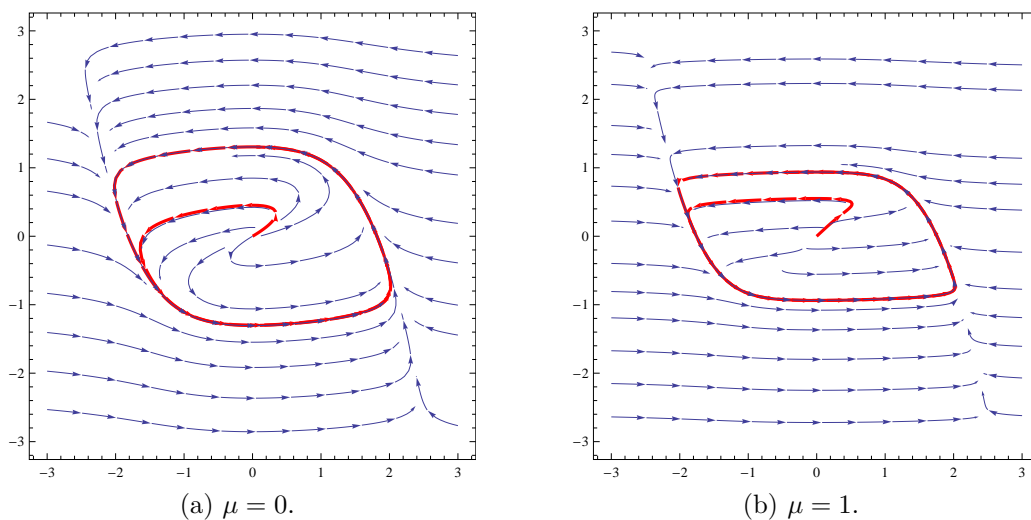


Figure 1.6: Diagrama de fase del sistema para ciertos valores de  $\mu$ .

En los términos que describe Kanamaru[11] cuando el sistema está fuera de la curva

$$y = x - \frac{x^3}{3}$$

se obtiene la relación  $|\dot{x}| \gg |\dot{y}| = O(1/\mu)$ . Entonces el sistema se mueve rápidamente en dirección horizontal.

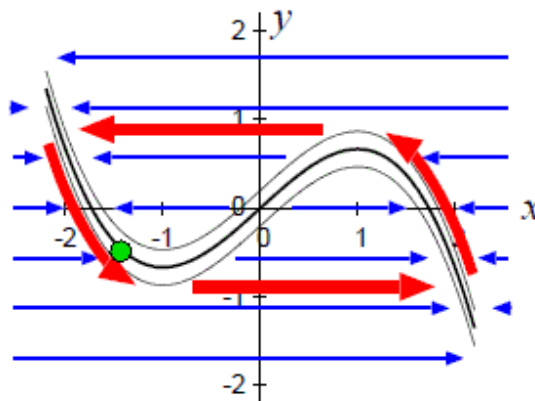


Figure 1.7: Flujos del oscilador de Van Der Pol para  $\mu \gg 1$ .

Cuando el sistema entra en la región donde  $|x - x^3/3 - y| = O(1/2)$ ,  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  son comparables porque ambas son  $O(1/\mu)$ . Entonces el sistema discurre despacio a lo largo de la curva y, eventualmente, sale de esta región como se muestra en la Fig.1.7. Se puede observar que el sistema tiene un ciclo límite estable.

También se ha observado que el periodo de oscilación está determinado en especial por el tiempo durante el cual el sistema permanece alrededor de la función cúbica, donde ambas  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  son  $O(1/\mu)$ . Por tanto, el periodo de oscilación estimado es aproximadamente  $T \propto \mu$ .

Cuando Van Der Pol, en 1927, desarrolló la Ec. 1.1 con un circuito eléctrico formado por dos resistencias  $R$  y  $r$ , un capacitor  $C$ , una inductancia y un tetrodo, el periodo de oscilación determinado en el circuito fue  $\mu = RC$ . Como  $RC$  es la constante del tiempo de relajación en un circuito  $RC$ , Van Der Pol nombró a esta oscilación como oscilación de relajación. Las características de la oscilación de relajación son el comportamiento asintótico lento y el salto discontinuo repentino hacia otro valor. Usando unas cuantas oscilaciones de relajación, Van Der Pol y Van Der Mark modelaron la actividad eléctrica del corazón en 1928.

## 1.2 Oscilador Duffing

La ecuación de Duffing, lleva el nombre del ingeniero eléctrico Alemán Georg Duffing en 1918, ha sido ampliamente utilizado en física, economía, ingeniería y muchos otros fenómenos físicos. Dada su característica de oscilación y la naturaleza caótica, muchos científicos se inspiran en esta ecuación diferencial no lineal debido a su naturaleza de replicar una dinámica similar en nuestro mundo natural. Esta ecuación, junto con la de Van Der Pol, se ha convertido en uno de los ejemplos más comunes de los sistemas

## CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

no lineales en los libros de textos y artículos de investigación[12].

La ecuación de Duffing es una ecuación diferencial para modelar un oscilador de doble pozo tal como el sistema mecánico magneto-elástico. Este sistema consiste en una viga colocada verticalmente entre dos imanes con el extremo superior fijo y el extremo inferior libre para oscilar.

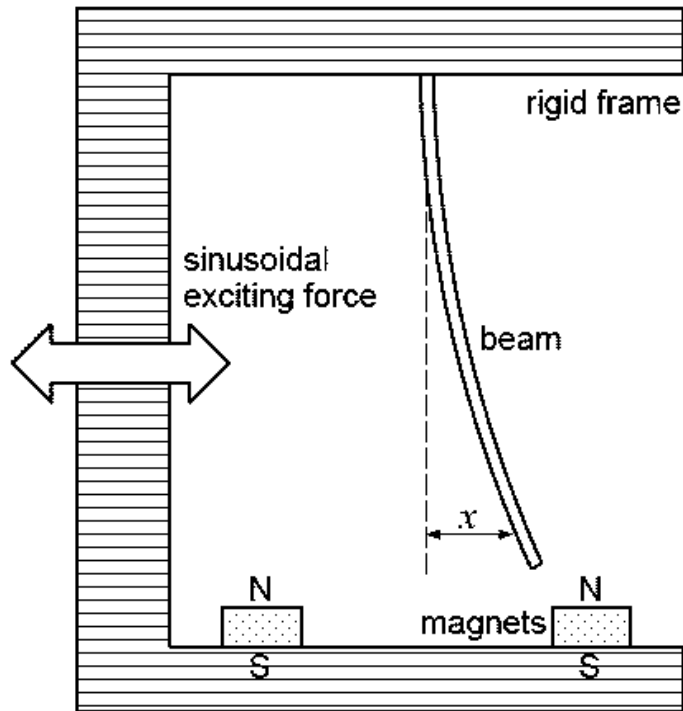


Figure 1.8: Sistema físico que representa el oscilador de Duffing.

La viga será atraída a uno de los dos imanes y dada una cierta velocidad oscilará sobre ese imán hasta que la fricción lo pare. Cada uno de los imanes crea un punto fijo donde la viga puede venir a parar sobre ese imán y permanecer en equilibrio. Sin embargo, cuando el sistema entero es sacudido por una fuerza periódica, la viga puede saltar hacia atrás de un imán a otro de una manera aparentemente al azar [13]. Dependiendo de que tan grande sea la fuerza que sacude no puede haber puntos fijos estables y ningún ciclo fijo estable en el sistema. Este sistema se puede modelar matemáticamente por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (1.24)$$

Según lo demostrado por Moon y Colmes (1979)[14], esta ecuación se conoce como la ecuación de Duffing.

### 1.2.1 Análisis

Iniciemos nuestro estudio considerando la ecuación de Duffing como un oscilador no lineal que describe el movimiento de una partícula clásica dentro de un potencial de la forma

$$V(x) = -A\frac{x^2}{2} + B\frac{x^4}{4} \quad (1.25)$$

con  $A > 0$  y  $B > 0$ . Se trata de un potencial de doble pozo al estar formado por dos mínimos simétricos respecto a una barrera de potencial centrada en  $x = 0$ . Este potencial se conoce como potencial de Duffing [15]. Si elegimos  $A = B = 1$  los mínimos se encontrarán en  $x = \pm 1$ , y tendrán un potencial de  $V = 1/4$ .

La fuerza correspondiente a este potencial es

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} = Ax - Bx^3$$

A través de las leyes de la dinámica clásica, el movimiento de la partícula encerrada en nuestro doble pozo vendrá determinado por la ecuación  $F = ma$  y si tomamos la masa de la partícula igual a la unidad, la ecuación diferencial que determina el movimiento de partícula queda de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Ax - Bx^3 \quad (1.26)$$

Para resolver esta ecuación diferencial de forma numérica usamos Mathematica y representemos la solución en el espacio de fase.

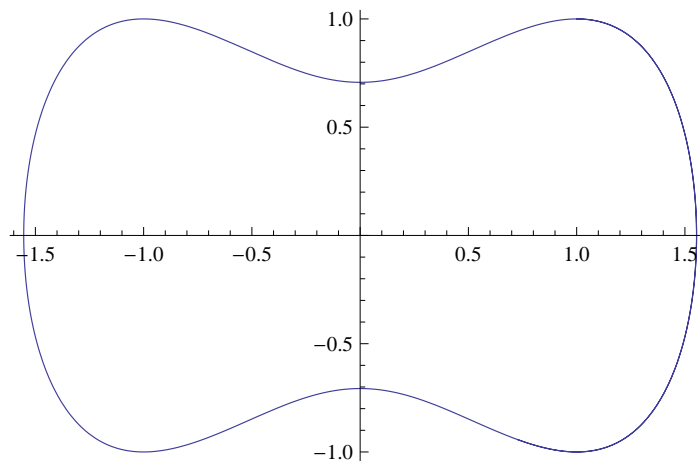


Figure 1.9: Trayectoria cerrada del sistema de Duffing.

## CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

Cuando la partícula está situada sobre el mínimo de la derecha en  $x = 1$  y tiene una velocidad inicial igual a 1, esta velocidad es suficiente para hacer que la partícula supere la barrera de potencial en  $x = 0$  pase al pozo de la izquierda y vuelva a superar la barrera de potencial y despues retorne al seno de la derecha y así continúa oscilando indefinidamente. Esto siempre se ocurrirá si la velocidad inicial de la partícula es mayor que  $1/\sqrt{2}$ , lo cual se puede verificar si se iguala la energía de la barrera de potencial a la energía cinética inicial de la partícula que parte de uno de los mínimos.

Como vemos la trayectoria de la partícula es cerrada y su movimiento es periódico, y esto era de esperarse, puesto que no existe en el oscilador ningún término disipativo que impida la conservación de la energía.

Hay muchas maneras de analizar la ecuación de Duffing, cada una en función de los valores que se asignan a los diferentes parámetros. Analizaremos el caso no forzado ( $\gamma = 0$ ) con valores de  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$  de la Ec. 1.24, presentado por Wiggins (1990)[16] y se presentara un análisis.

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = 0 \quad (1.27)$$

Rescribiendo la ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones de primer orden correspondiente a la Ec. 1.27 es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y \end{aligned}$$

el primer paso en este análisis es identificar y clasificar todos los puntos fijos del sistema.

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x - x^3 - \delta y &= 0 \end{aligned}$$

los puntos fijos de este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas estan dadas por

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 0 &= x(1-x)(1+x) \end{aligned}$$

Calculando los puntos fijos del sistema, se tienen como puntos fijos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  como se muestra en la Fig. 1.10.

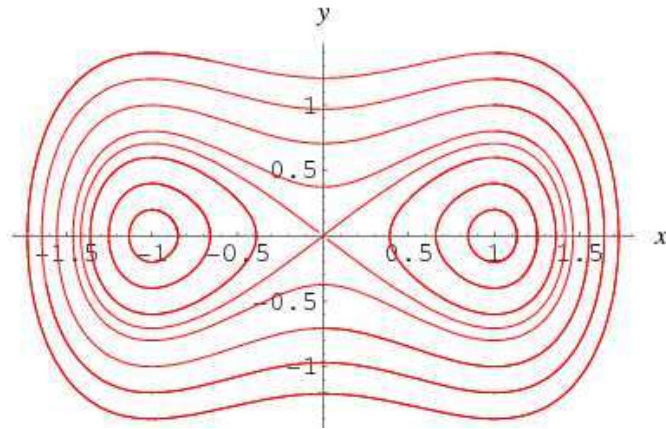


Figure 1.10: Puntos fijos del sistema de Duffing.

Analizaremos la estabilidad de los puntos fijos linealizando el sistema de ecuaciones diferenciales del sistema.

$$\ddot{x} = \dot{y} = x - x^3 - \delta y$$

$$\ddot{y} = \dot{x} - 3x^2\dot{x} - \delta y = (1 - 3x^2)\dot{x} - \delta y$$

Tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Ahora, vamos a analizar el polinomio característico para cada punto fijo con la forma generalizada de la ecuación característica para determinar la estabilidad.

Para el punto fijo  $P(0,0)$ , se tiene

$$\mathbf{C}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta \end{pmatrix}$$

teniendo como polinomio característico  $\lambda^2 + \delta\lambda - 1 = 0$  para el punto fijo  $P(0,0)$ , donde  $Tr(C) = -\delta$  y  $det(C) = -1$ , de esta manera como se puede observar en el diagrama de bifrucación traza-determinante Fig. 1.1, la clasificación de este punto fijo se limita a un punto silla debido a que el  $det(C) = -1$ .

Para los puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$

$$\mathbf{C}_{(\pm 1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\delta \end{pmatrix}$$

## CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

Del mismo modo para este par de puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$  se tiene como polinomio característico  $\lambda^2 + \delta\lambda + 2 = 0$ , donde  $Tr(C) = -\delta$  y  $det(C) = 2$ . A diferencia del caso anterior, tenemos que el  $det(C) = 2$ , dando como resultado una variedad de clasificación que se le asocia al valor de  $\delta$ , teniendo como resultado 3 casos diferentes.

1. Caso (i)

Si  $\delta > 0$ , esto implica que  $Tr(C) < 0$  y  $det(C) = 2$ , por lo tanto este par de puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$  corresponden a puntos estables.

2. Caso (ii)

Si  $\delta = 0$ , esto implica que  $Tr(C) = 0$  y  $det(C) = 2$ , por lo tanto este par de puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$  corresponden a dinámica centro.

3. Caso(iii)

Si  $\delta < 0$ , esto implica que  $Tr(C) > 0$  y  $det(C) = 2$ , por lo tanto este par de puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$  corresponden a puntos inestables.

Se ha descubierto que para ciertos valores de  $\delta$  hay una transición en la dinámica del sistema dependiendo del parámetro de amortiguamiento *delta*. Esto demostrado en el análisis de la ecuación de Duffing (con  $\gamma = 0$ ), donde dos de los tres puntos fijos cambian de ser estables a inestables, dependiendo del valor de  $\delta$ . En particular cuando el amortiguamiento es positivo ( $\delta > 0$ ), el sistema sigue una trayectoria en espiral estable. A la inversa, cuando el amortiguamiento es negativo ( $\delta < 0$ ), las espirales del sistema son inestables en los puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$ .

Sabemos que el oscilador Duffing corresponde a un modelo de oscilador forzado, por este motivo vamos a complicar el movimiento de la partícula que se mueve sometida al potencial de Duffing introduciendo amortiguamiento (rozamiento) y una fuerza motriz externa periódica. (Si sólo introdujeramos amortiguamiento, el comportamiento no sería muy divertido: al final la partícula acabaría siempre quieta sobre uno de los dos pozos de potencial). La ecuación del movimiento es ahora

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = \gamma\cos(\omega t) \tag{1.28}$$

donde  $\delta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\gamma$  es magnitud (amplitud) de la fuerza motriz cuya frecuencia de oscilación es  $\omega$ . Veremos que a medida que la fuerza externa va aumentando en su magnitud, el movimiento de la partícula se irá haciendo más complejo hasta convertirse en caótico. Fijaremos  $\delta = 0.1$  y  $\omega = 1.4$  en todo lo que sigue, y empezaremos con la amplitud de la fuerza externa  $\gamma = 0.1$  (veremos que esto hace que estemos fuera del régimen caótico). En la Fig. 1.11 se muestra el aspecto que toma la trayectoria en el espacio fase para condiciones iniciales del sistema  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ .

## CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

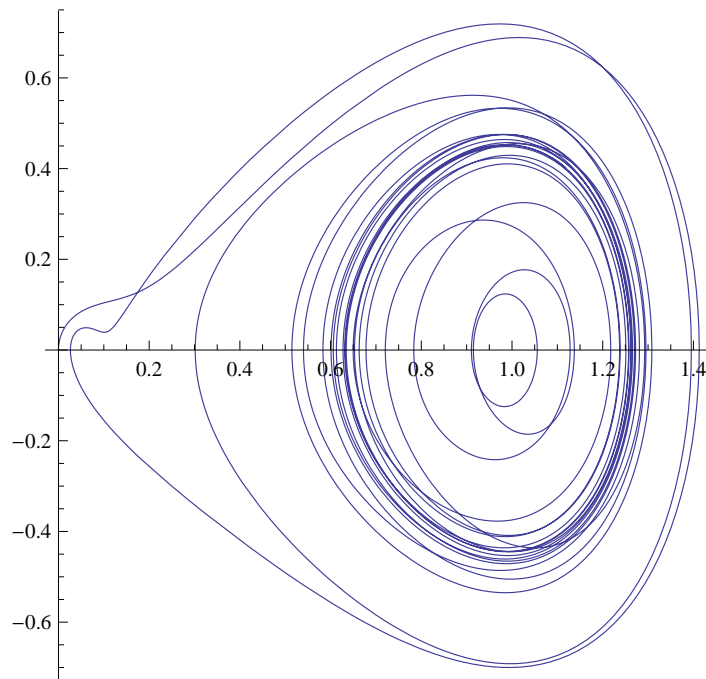


Figure 1.11: Espacio fase para un valor de  $\gamma = 0.1$ .

Ahora veremos cómo cambian las trayectorias en el espacio fase cuando se aumenta la amplitud de la fuerza motriz. En la Fig 1.12 se muestra la dinámica para el valor de  $\gamma = 0.35$ , donde se puede observar que para este valor de  $\gamma$ , el sistema ya presenta caos.

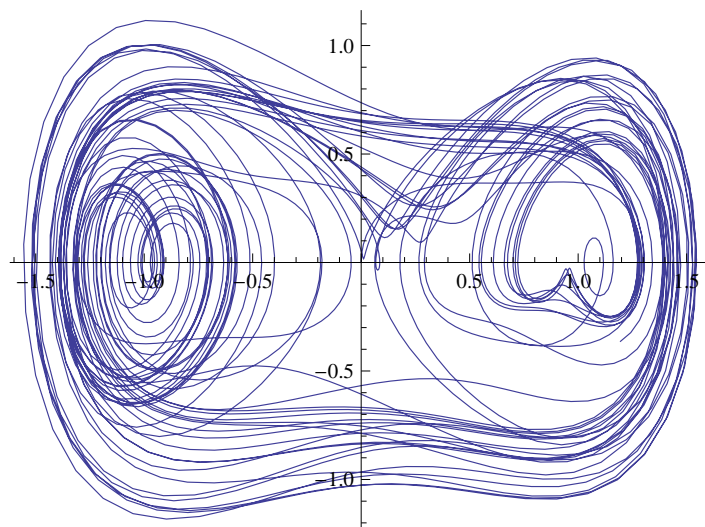


Figure 1.12: Espacio fase para un valor de  $\gamma = 0.35$ .

La ecuación de Duffing puede tomar diferentes dinámicas en el espacio fase, de-

---

## CHAPTER 1. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

pendiendo de la elección de los parámetros. A pesar de esta gran variedad, el sistema puede ser diseñado para generar trayectorias que presenten una transición de órbitas periódicas a comportamiento caótico. La ecuación de Duffing se ha utilizado en los campos de la ingeniería, economía, física, crecimiento de la población y la genética, por nencionar algunos, teniendo la ecuación un gran reto en la exploración de los diferentes parámetros que influyen en la dinámica global del sistema.

---

---

# Control y sincronización de sistemas caóticos

## 2.1 Introducción

El comportamiento caótico de un sistema dinámico puede ser indeseable, como en el caso de las fibrilaciones cardíacas, en la predicción de fenómenos climáticos, o en problemas ocasionados por la desincronización, etc.; aunque también puede ser deseable, como en los procesos de mezclado o de transferencia de calor. Por ese motivo el “control del caos” ha sido uno de los tópicos de interés en los últimos años [17-19]. Obviamente siempre es posible controlar el caos utilizando grandes perturbaciones, pero el punto importante es obtener una técnica de control eficiente, que requiera una energía de control mínima. Es decir debe constituir sólo una pequeña perturbación del sistema dinámico.

Otro tópico de gran importancia, en función de sus aplicaciones, y estrechamente relacionado al “control del caos” es la “sincronización de sistemas caóticos”. La posibilidad que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera sincronizada y coherente no es obvia, debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo Pecora y Carroll [20] demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de modo tal que sus oscilaciones se sincronicen. El estudio de la sincronización ha dado origen al surgimiento de nuevos métodos para controlar un sistema caótico [21]. En este sentido se han obtenido logros importantes en lo referente a estrategias para controlar arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos [22-24].

El presente capítulo tiene como finalidad describir métodos de control y sincronización de sistemas caóticos ya que constituye uno de los métodos principales para la obtención de un sistema de comunicaciones analógicas seguras. Sin embargo, por razones de complejidad, se hará referencia en este capítulo, a algunos de los métodos más utilizados para el control de sistemas caóticos.

## 2.2 Métodos de control caos

El objetivo básico del control de un sistema caótico es forzarlo a seguir una determinada trayectoria. Obviamente el objetivo específico varía en función de cada aplicación particular, aunque el más común es lograr que el movimiento caótico se transforme en periódico. No obstante, recientemente se han presentado aplicaciones donde el estado final deseado del sistema es también de características caóticas; es decir el problema de control, en ese caso, consiste en transformar un comportamiento caótico indeseado, en otro comportamiento también caótico, pero cuyas propiedades pueden fijarse de alguna manera. De hecho la sincronización caótica utilizada en los sistemas de comunicaciones puede pensarse como un método de control de este tipo. También es importante el estudio del proceso inverso, donde se trata que un sistema que inicialmente es periódico cambie su comportamiento a caótico. En este caso el método de control se conoce como de *anti-control* del caos.

Sea el sistema dinámico alineal  $n - dimensional$  de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p, t) \quad (2.1)$$

donde las componentes del vector  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  son las  $n$  variables de estado, en tanto que  $p$  es un parámetro externo o de control cuyo propósito es modificar la dinámica del sistema mediante la mínima perturbación posible. En lo que sigue se supone que para el valor elegido de este parámetro,  $x(t)$  es una solución caótica de la Ec. 2.1.

Los métodos de control del caos generalmente utilizan dos propiedades fundamentales de los sistemas caóticos: la sensibilidad a las condiciones iniciales, y la existencia de infinitas órbitas periódicas inestables embebidas en el atractor (estable).

Si  $x(t)$  es la trayectoria del sistema, sin aplicar el control, y  $g(t)$  es la trayectoria deseada, el propósito del control puede expresarse matemáticamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t) - g(t)\| = 0 \quad (2.2)$$

en donde  $\tilde{x}(t)$  es la trayectoria modificada por el sistema de control.

Según la aplicación particular  $g(t)$  puede ser una de las soluciones inestables existente en el propio sistema, o bien una señal externa que se desea imponer. En base a las distintas estrategias utilizadas para influenciar la dinámica del sistema pueden distinguirse cuatro tipos distintos de control que se describen a continuación.

### 2.2.1 Control a través de un parámetro accesible del sistema.

El estudio de la influencia de las variaciones de los parámetros en el comportamiento asintótico del sistema es el objeto de la teoría de bifurcaciones [15]. Si el propósito del control es suprimir oscilaciones caóticas y obtener comportamiento regular, éste es el método más simple. En efecto, en el caso de los circuitos electrónicos, basta con modificar el valor de uno de los componentes pasivos (resistencias o capacitores). La principal desventaja del método es que pueden requerirse variaciones grandes en los valores de los parámetros, para lograr el comportamiento deseado. Por otro lado, el método es difícil de aplicar en la etapa de diseño, donde existen pocas herramientas de simulación que cuenten con la posibilidad de realizar un análisis de bifurcaciones, y aún existiendo esa posibilidad, se requiere una descripción del problema en una forma matemática cerrada (ecuaciones diferenciales o en diferencias) que no siempre se puede obtener en forma simple.

Otra alternativa es hacer variable el parámetro de control aplicando una pequeña perturbación de una frecuencia adecuada. Es decir se sustituye en la Ec. 2.1 a  $p$  por  $p + \eta \cos \Omega t$  [25]. Merece mencionarse especialmente el método Ott-Grebogi-Yorke (OGY), propuesto en 1990, que se basa en aprovechar la existencia de un número infinito de órbitas periódicas inestables, embebidas en el atractor caótico. Aplicando pequeñas perturbaciones temporales al parámetro  $p$  (Ec. 2.1), se busca estabilizar la trayectoria caótica haciendo que el sistema siga la órbita periódica seleccionada. Para determinar los valores de las perturbaciones se necesitan conocer los autovalores y autovectores de la órbita inestable; información que no está disponible si no se cuenta con el modelo matemático del sistema. Pero los datos necesarios pueden obtenerse a partir de las órbitas reconstruidas en el espacio de fases por el método “embebimiento por retraso temporal”, que transforma una serie temporal de las mediciones de una variable del sistema, en una trayectoria (vectorial) en el espacio de estados. Una ventaja adicional del método OGY es la flexibilidad de poder elegir la órbita periódica que se va a controlar.

El método OGY se ha utilizado para controlar sistemas dinámicos, sistemas Hamiltonianos (conservativos), transitorios caóticos y dispersiones (scattering) caóticas. Cuando esta técnica se aplica a un circuito físico real, el principal problema se encuentra en los errores introducidos por el ruido, la cuantificación de los conversores (A/D y D/A) y los efectos de redondeo en los cálculos. Se encontró que el método es muy sensible al nivel de ruido, ya que las señales de control pequeñas pueden quedar enmascaradas por el mismo, imposibilitando cualquier intento para modificar el comportamiento en la forma deseada.

### 2.2.2 Control por modificación de la estructura del sistema.

Uno de estos métodos es de la absorción de oscilaciones que se basa en una técnica usual en la ingeniería mecánica, donde se utilizan dispositivos que absorben las vibra-

ciones indeseadas (tal es el caso de los amortiguadores o las mesas diseñadas para una máquina-herramienta). Para su implementación se acopla el sistema caótico principal a un nuevo sistema (controlador) más simple y de parámetros fácilmente modificables. En el caso de un sistema electrónico el elemento absorbente puede ser tan simple como un capacitor adicional puesto en paralelo o un circuito tanque LC [26].

### 2.2.3 Control por inyección de señales externas.

Ejemplos de estos métodos son la estimulación resonante que consiste en la perturbación con señales aperiódicas [27-29]; el agregado de una segunda fuerza externa periódica [30]; el empleo de un término que contemple una débil polarización constante adicional [31], o la adición de un nivel adecuado de ruido externo que, se ha demostrado, puede ayudar a eliminar el comportamiento extraño de un atractor caótico [32-33].

Pyragas [34] propuso la interesante idea de realimentar una de las variables del vector de estados, utilizando una señal de control proporcional a la diferencia entre esa variable y su copia retardada. La ecuación diferencial para la variable elegida resulta:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x(t)) + K[x_i(t) - x_i(t - \tau)] \quad (2.3)$$

Empleando el método de Pyragas se han podido obtener diferentes tipos de comportamiento, conforme a los valores del retardo  $\tau$  y del factor lineal  $K$ .

Técnicas clásicas de Ingeniería de control.

Se ha trabajado mucho en técnicas de control clásico, proporcional integral (PI), proporcional integral derivativo (PID), lineal, alineal, estocástico, etc. Huberman y Lumer [35], por ejemplo, propusieron llevar un sistema de un estado  $x$  a un estado deseado  $x_s$ , modificando dinámicamente el valor del parámetro de control  $p$ , por medio de la ecuación:

$$\frac{dp}{dt} = \varepsilon G(x - x_s) \quad \varepsilon \ll 1 \quad (2.4)$$

donde  $\varepsilon$  es un parámetro que ajusta la dureza del control y  $G$  es una función lineal o no lineal de la diferencia entre ambos estados. Este método, conocido como Algoritmo de Control Adaptativo (Adaptive Control Algorithm - ACA), no requiere señales externas ni el acceso a los parámetros internos y la acción de control es inmune a pequeñas variaciones en los valores de los parámetros. Su principal desventaja es que no se conoce a priori cuál es la meta que se debe alcanzar, sino que se trabaja por “prueba y error”.

## 2.3 El problema general de la sincronización

La sincronización de señales periódicas es un fenómeno bien conocido en Física, Ingeniería y muchas otras disciplinas científicas. En su acepción tradicional, se dice que dos señales periódicas están sincronizadas cuando sus períodos son conmensurables. Una de las formas de lograr esta sincronización es mediante el empleo de fuerzas externas, como sucede en el caso de las comunicaciones electrónicas, donde se utiliza un oscilador patrón, de frecuencia muy estable (oscilador a cristal), pero de baja potencia como sincronismo de varios osciladores de inferior calidad y de mayor potencia [36].

La sincronización de osciladores, desacoplados entre sí, resulta, en esencia, más simple que el alterar el sincronismo natural que se establece cuando osciladores casi idénticos se acoplan entre sí, constituyendo un sistema más robusto [37]. Pero aún el problema más sencillo de varios osciladores independientes entre sí, sincronizados por una única señal periódica externa, presenta una estructura de resonancias múltiples muy compleja [38-41].

La posibilidad de que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera sincronizada y coherente no es obvia debido a la conocida dependencia sensible con las condiciones iniciales. Sin embargo Pecora y Carroll [20] demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de modo tal que sus oscilaciones (que no tiene por qué ser periódicas) se sincronicen. Esta sincronización puede ser idéntica (las señales correspondientes en ambos sistemas coinciden exactamente) o bien generalizada (existe una relación funcional fija entre las variables de uno y otro sistema). En ambos casos, la sincronización es un proceso asintótico. También es posible lograr una sincronización de fase [42], que es una noción más débil y de alguna forma equivalente a la sincronización usual en señales periódicas.

La sincronización y el control son temas estrechamente vinculados. A partir de técnicas de sincronización se han podido inferir nuevos métodos para controlar sistemas caóticos [21] y se han obtenido logros importantes en el control de arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos [22-24].

Ha habido un amplio desarrollo en la aplicación de técnicas de sincronización a sistemas de comunicaciones [43-45]. Algunas de las más utilizadas se describen a continuación.

## 2.4 Sincronización de sistemas caóticos

Los fenómenos caóticos se presentan en muchos sistemas naturales y en dispositivos artificiales. Muchos trabajos de investigación se han centrado principalmente en el descubrimiento y caracterización del caos. Recientemente, se han propuesto varias ideas

## CHAPTER 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

y técnicas para utilizar las características del caos para alcanzar ciertos objetivos. La sincronía de caos se ha empleado para incrementar la potencia de lasers, sincronizar circuitos electrónicos, controlar oscilaciones en reacciones químicas, estabilizar el ritmo cardíaco en animales y para seguridad en las comunicaciones mediante la codificación de información. Las aplicaciones del caos en diferentes campos de la ciencia y tecnología tienen su base en dos problemas, que son el control del caos y la sincronización en sistemas caóticos.

La sincronización de sistemas caóticos es el problema que se abordará en este trabajo de tesis; por tanto, se tratará de proporcionar una explicación más detallada del mismo.

La posibilidad de que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera coherente y sincronizada no es obvia. Una de las principales características asociadas al comportamiento caótico, es la sensibilidad a condiciones iniciales. De lo anterior se pudiera concluir que la sincronización de sistemas caóticos no es factible, porque en sistemas reales no es posible reproducir exactamente condiciones iniciales idénticas. Así, incluso una desviación infinitesimal en los parámetros o de las condiciones iniciales eventualmente dará lugar a la divergencia de trayectorias. En este contexto, el hecho de alcanzar sincronía de sistemas caóticos, pueden considerarse como un problema fascinante e importante.

### 2.4.1 Métodos de sincronización

La sincronización, que puede ser entendida como el ajuste de ritmos entre dos o más osciladores debido a sus interacciones, es un fenómeno presente tanto en sistemas naturales como artificiales y es un típico ejemplo de auto-organización. El análisis del fenómeno de sincronización de sistemas dinámicos ha sido objeto de un área de investigación muy activa desde su primera observación por el científico holandés Christian Huygens en 1673 quien observó sincronización en dos péndulos acoplados.

El estudio sistemático moderno, tanto experimental como teórico, de este fenómeno fue iniciado por Edward Appleton, Balthasar Van der Pol y Andronov y Vitt que observaron sincronización en generadores eléctricos. Cobra popularidad hace aproximadamente 20 años, tiempo en el cual se produjeron diversidad de artículos y libros que tratan de una u otra manera sobre la sincronización en sistemas que van desde los biológicos tales como luciérnagas, grillos, cigarras, hormigas, sistemas ecológicos, diferentes comportamientos en poblaciones humanas, células cardíacas, neuronas en el sistema nervioso y en la relación fisiológica entre el corazón y pulmones, pasando por sistemas químicos (osciladores bioquímicos) y llegando a sistemas artificiales como circuitos electrónicos, etc.

Los grandes trabajos sobre la sincronización del caos se atribuyen a Fujisaka, Picovsky y Afraimovich [46-47] y a Pecora y Carroll [20] quienes presentaron los primeros ejemplos sobre la sincronización unidireccional de sistemas caóticos acoplados [48]. Sin embargo, tras el trabajo de Pecora y Carroll, se ha mostrado que dos comportamientos caóticos imprevisibles, que inicialmente evolucionan sobre trayectorias diferentes, pueden fundirse en una única trayectoria común si se acoplan adecuadamente. El desarrollo de los sistemas de comunicaciones utilizando caos nació a partir de esa idea y se ha afianzado, a través de trabajos fundamentales de un número importante de investigadores.

Los circuitos se presentan como una herramienta de una gran utilidad para estudiar una gran variedad de procesos, actuando como complemento entre el experimento en sí y la simulación numérica por computadora. Entre las ventajas que ofrece la simulación con circuitos se encuentran tanto el alto grado de desarrollo de componentes electrónicos como el bajo costo de los dispositivos. Y son varios los ejemplos de circuitos electrónicos utilizados para el estudio de Caos; el sistema de Lorenz, Rössler y Chua, por mencionar solo algunos.

El significado de sincronización de caos se refiere al proceso en el que se involucran dos (o varios) sistemas caóticos (equivalentes o no equivalentes) ajustando sus propiedades para que tiendan a un comportamiento común (periódico o ruidoso) [49]. Este fenómeno de sincronización inicialmente hace que los sistemas evolucionen sobre atractores diferentes para que finalmente puedan lograr empatar, acoplarse y coincidir en una misma trayectoria [50, 51]. Es sorprendente que la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema.

Hay que destacar que hay una gran variedad de esquemas de acoplamiento que conducen al régimen de sincronización. Dependiendo de la configuración particular del acoplamiento, podemos distinguir dos casos principales: acoplamiento unidireccional y acoplamiento bidireccional.

### 1. Acoplamiento unidireccional.

El sistema global está formado por dos subsistemas acoplados según una configuración de tipo maestro-esclavo Fig. 2.1. Eso implica que el comportamiento del sistema esclavo depende del comportamiento del sistema maestro, mientras que este último no se ve influido por el comportamiento del sistema esclavo. Como resultado, el sistema esclavo se encuentra forzado a seguir la dinámica (o una función propia de la dinámica) del maestro. Dicho de otro modo, cuando la evolución de uno de los dos sistemas no es alterada por el acoplamiento la configuración resultante es un acoplamiento unidireccional.

## CHAPTER 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

### 2. Acoplamiento bidireccional.

Aquí ambos subsistemas son acoplados con otro, o cuando los dos subsistemas son conectados de tal forma que sus trayectorias están mutuamente influenciadas por el comportamiento del otro. Esta situación ocurre en fisiología, entre el sistema cardiaco y el respiratorio, también se da en láseres con retroalimentación.

Es sorprendente que la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema.

Cuando las condiciones iniciales en los sistemas caóticos, al tener la mas mínima variación en el sistema, provoca que se obtengan resultados y evolucione en un sistema más complejo que al que originalmente se tenía, esto hace que a simple vista sea difícil la sincronización en sistemas caóticos reales, ya que en la práctica no es posible igualar las condiciones iniciales o hacer dos sistemas totalmente idénticos, para poder lograr la sincronización; se pueden crear sistemas muy parecidos pero siempre existirá un margen de error.

En telecomunicaciones la sincronización brinda comunicaciones seguras [52]. Existen dos formas principales de acoplamiento, de forma unidireccional la cual consiste en sistemas Maestro-Esclavo (Master -Slave) ver figura 1.1, donde el maestro es el sistema guía o de referencia y el esclavo es el sistema guiado el cual es dependiente del maestro. En el caso de ser bidireccional ambos sistemas interactúan entre sí y están acoplados uno con el otro creando una sincronización mutua.



Figure 2.1: Esquema de sincronización.

La sincronización entre dos sistema, se consigue cuando uno de los sistemas modifica su comportamiento y sigue la trayectoria del otro sistema, o ambos oscilan en una nueva trayectoria común [53]. El acoplamiento podrá ser de dos tipos difusivo o conductivo [54, 55].

La aparición y la robustez de los estados de sincronización ha sido establecida mediante diferentes esquemas de acoplamiento, tales como el método de Pecora y Carroll [20], la realimentación negativa [56], acoplamiento esporádico [57], descomposición

activa-pasiva [58-59].

En el contexto de sistemas caóticos acoplados, diferentes clases de sincronización han sido estudiadas recientemente. Sincronización idéntica ó completa, sincronización en fase, sincronización de retardo, sincronización generalizada, sincronización de retardo intermitente, sincronización de fase imperfecta, y finalmente la casi sincronización [50-57].

### 2.4.2 Sincronización Completa o idéntica SC (complete or identical synchronization)

Cuando uno trata con sistemas idénticos acoplados, la sincronización aparece como la igualdad de las variables de estado, mientras que evoluciona en el tiempo. Para el acoplamiento, debemos distinguir entre dos diferentes situaciones. Cuando la evolución de uno de los sistemas acoplados es inalterada por el acoplamiento, tenemos como resultado el acoplamiento unidireccional o maestro-esclavo. Por el contrario nos referimos a un acoplamiento bidireccional cuando ambos sistemas son conectados de manera tal que influyen mutuamente en su comportamiento. Dentro de esta clasificación la apariencia y robustez de los estados de sincronización ha sido establecida por medio de varios esquemas de acoplamiento diferentes, como el de Pecora y Carroll [20,56,57], la retroalimentación negativa [58], la conducción esporádica [59], la descomposición activa- pasiva, el acoplamiento difusivo y algunos otros métodos híbridos.

### 2.4.3 La configuración Pécora y Carroll (PC)

Iniciamos considerando un sistema caótico cuya evolución temporal está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{z} = F(z) \tag{2.5}$$

Aquí  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  es un vector de estado  $n$ -dimensional definiendo un vector de campo  $F : R^n \rightarrow R^n$ . El esquema PC consiste al suponer un sistema dinámico de Ec.1., y descomponiendo el maestro en tres subsistemas.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v) \\ \dot{v} &= g(u, v) \quad \text{Maestro} \\ \dot{w} &= h(u, w) \quad \text{Esclavo} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Donde  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ ,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_l)$  y  $n = m + k + l$ . El primer subsistema de Ec.1.6 define el sistema maestro, considerando el segundo subsistema de Ec.1.6 que representa el sistema esclavo, su evolución es guiada por la

trayectoria del maestro utilizando la señal  $u$ .

Así la sincronización completa es definida como una identidad entre las trayectorias del sistema respuesta  $w$  y una réplica  $w'$  de esta  $w' = h(u, w')$  para la misma señal de conducción caótica  $u(t)$ . La existencia de CS implica que la respuesta del sistema es asintóticamente estable ( $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , siendo  $e(t)$  el error sincronización dado por  $e(t) = \|w - w'\|$ ). En otras palabras, el sistema olvida sus condiciones iniciales, evolucionando en un atractor caótico. Este tipo de sincronización se puede lograr siempre que los exponentes de Lyapunov del sistema esclavo bajo las órdenes del maestro (los exponentes condicionales de Lyapunov) sean negativas, es decir el sistema es conservativo. Como condición se cumple solo si  $u$  es una señal de sincronización.

### 2.4.4 Configuración APD (active-passive decomposition method).

Este método se considera un sistema caótico autónomo y es rescrito como un sistema no autónomo.

$$\dot{x} = f(x, s(t)) \quad (2.7)$$

En donde  $s(t)$  es la señal de conducción  $s = h(x)$  o  $\dot{s} = h(x, s)$ , y  $f : R^n \rightarrow R^n$ . La sincronización completa se refiere a la relación entre el sistema Ec. 1.7 y una réplica (el sistema de respuesta) que es conducida por la misma señal  $s(t)$ . Cabe mencionar que esta última afirmación no excluye un comportamiento caótico de  $s(t)$ , ya que es conducido por una señal caótica  $s(t)$ .

Para poder ilustrar mejor esta configuración, L. Kokarev y U. Parlitz [59] analizaron el sistema propuesto por Lorenz.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + s(t) \\ \dot{y} &= 28x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - 2.66z \end{aligned} \quad (2.8)$$

Conducido por  $s = h(x) = 10$  y, se puede comprobar mediante el uso de los exponentes de Lyapunov que el sistema se sincroniza con su copia para todos los tipos considerados de la señal de conducción  $s(t)$ .

En comparación con la configuración PC que solo puede lograr sincronizarse un numero finito de formas para un sistema caótico dado, APD permite elegir libremente la señal de conducción  $s(t)$ , o alternativamente la función  $h(x)$  lo que la hace muy poderosa y en general extrema flexibilidad en aplicaciones.

### 2.4.5 Sincronización en un sistema no idéntico de baja dimensión.

Hoy en día una de las áreas de investigación de sistemas dinámicos es poder sincronizar sistemas no idénticos, llegar a sincronizar este tipo de sistemas es un gran reto, ya que implica aplicar teorías de control. La parte fundamental de la tesis es llegar a sincronizar los osciladores Van Der pol y Duffing, ya que estos osciladores presentan dinámica muy diferente entre sí. Se ha visto que cuando sistemas caóticos idénticos son acoplados con una fuerza de acoplamiento lo suficientemente fuerte, se puede alcanzar la sincronización completa, siguiendo una misma trayectoria caótica. La sincronización en este caso es asociada con la transición de los exponentes de Lyapunov de valores positivos a negativos. Sin embargo, sistemas experimentales y cada vez más reales, a menudo no son completamente idénticos, especialmente si existen discrepancias en los parámetros de los sistemas. Es por ello que la sincronización completamente idéntica no se puede esperar en los sistemas que no son completamente idénticos por que no existe una relación  $x = y$ , al ver una sincronización completa se vería una línea recta a 45 grados al observar las señales  $x$  vs  $y$ . Para sistemas caóticos que no son idénticos se pueden sincronizar completamente para tener la relación  $x = y$ , mediante forzamientos de señales periódicas y diseñando sistemas de control apropiados para los sistemas a sincronizar.

## CHAPTER 2. CONTROL Y SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

---

---

# SISTEMA VAN DER POL-DUFFING

## 3.1 Introducción

El oscilador de Van Der Pol y el oscilador de Duffing amortiguado se destacan como paradigmas de osciladores no lineales. El primero es el prototipo de ciclo límite, mientras que el último es el prototipo del atractor extraño. Los extensos estudios dedicados al oscilador Van Der Pol han revelado que posee un rico comportamiento dinámico especialmente cuando presentó a una excitación sinusoidal. El oscilador de Van Der Pol con un pozo doble de potencial exhibe ricos y sorprendentes estructuras de bifurcación con un importante número de estados, el mar caótico que contiene muchas islas de los estados periódicos y las transiciones del caos a estados normales que se producen a través de diversas vías: período de duplicidad, caos transitoria y cuasi-periodicidad.

Para el oscilador de Duffing, su régimen autónomo conduce a oscilaciones amortiguadas mientras que en la presencia de una fuerza externa sinusoidal, demuestra histéresis, multiestabilidad, período de duplicación, y los escenarios intermitentes al caos.

Un modelo de osciladores acoplados de diferentes atractores podría servir como un buen modelo para los sistemas reales en la naturaleza [60]. Tal sistema acoplado exhibe algunos fenómenos como la histéresis, fenómenos resonantes y antiresonante que se pueden encontrar en la física, biológica, económica, o sistemas electromecánicos. En cuanto a la unión entre un oscilador de Van Der Pol y el oscilador Duffing, tres esquemas básicos se pueden enumerar: acoplamiento giroscópico (acoplamiento a través de la aceleración), acoplamiento disipativo (acoplamiento a través de la velocidad), y el acoplamiento elástico (acoplamiento a través de soluciones).

En este Capítulo vamos a analizar la dinámica que presentan determinados osciladores electrónicos del tipo Van Der Pol-Duffing. El primero de ellos es una versión propuesta recientemente [60], donde no se llega a la sincronización del sistema. El segundo sistema se hace una acoplamiento similar para llegar a sincronizar al sistema mediante forzamiento externo y un tipo de acoplamiento elástico y disipativo.

## 3.2 Sistema Van Der Pol-Duffing

La dinámica de un sistema que consta de un oscilador Van Der Pol elásticamente y simétricamente acoplado a un oscilador de Duffing se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x - K(y - x) = 0 \quad (3.1)$$

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} - y + \varepsilon y^3 - K(x - y) = 0 \quad (3.2)$$

donde  $\mu$  y  $\varepsilon$  son parámetros positivos que controlan la no linealidad del sistema, el parámetro  $\alpha$  para la disipación, mientras que  $K$  representa la fuerza de acoplamiento. Expresado en la forma:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \frac{\partial U_1(x)}{\partial x} - K(y - x) = 0 \quad (3.3)$$

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \frac{\partial U_2(y)}{\partial y} + \varepsilon y^3 - K(x - y) = 0 \quad (3.4)$$

donde  $U_1(x)$  y  $U_2(y)$  son las funciones potenciales de cada oscilador del sistema de Ecs 3.1 y 3.2, representan un pozo simple el oscilador Van Der Pol acoplado un pozo doble del oscilador de Duffing. Una representación grafica de los potenciales  $U_1(x)$  y  $U_2(y)$  se muestra en la Fig. 3.1, se puede observar que hay dos mínimos locales (pozo doble) en  $y = \pm 1/\sqrt{\varepsilon}$  y un máximo local en  $y = 0$  para  $U_2(y)$ ,  $U_1(x)$  tiene un único mínimo (pozo simple) en  $y = 0$ .

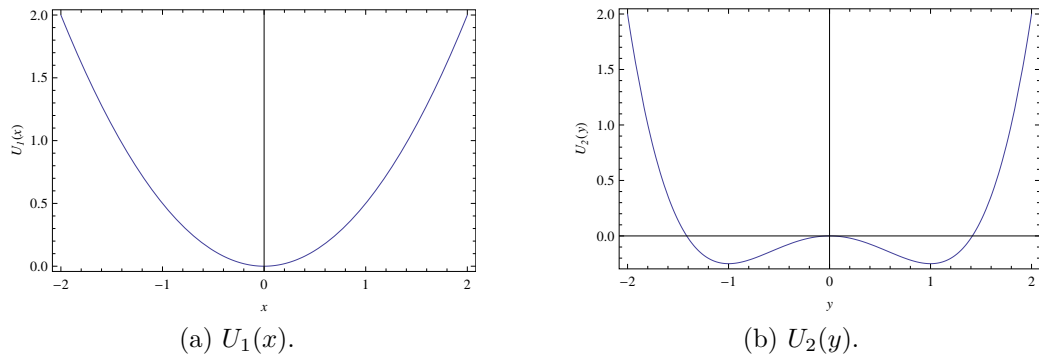


Figure 3.1: Gráficas de las funciones potenciales  $U_1(x)$  y  $U_2(y)$  correspondiente a los osciladores Van Der Pol y Duffing ( $\varepsilon = 1$ ).

Recordando del Capitulo 1 que el oscilador de Van Der Pol se caracteriza por ser un oscilador con amortiguamiento no lineal, mientras que el oscilador de Duffing describe el movimiento de una partícula clásica en un doble pozo de potencial. Haciendo un

cambio de variables  $\dot{x} = u$  y  $\dot{y} = v$ , del sistema de Ecs. 3.1 y 3.2 puede reescribirse como un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x} = u \tag{3.5}$$

$$\dot{u} = \mu(1 - x^2)u - x + K(y - x)$$

$$\dot{y} = v \tag{3.6}$$

$$\dot{v} = -\alpha v + y - \varepsilon y^3 + K(x - y)$$

Para  $K = 0$ , ambos osciladores están desacoplados: el Van Der Pol presenta un atractor ciclo límite, mientras que el oscilador de Duffing experimenta un movimiento oscilatorio amortiguado. El acoplamiento empleado en el sistema es una retroalimentación lineal que puede ser visto como una perturbación de cada oscilador por una señal proporcional a la diferencia de su posición. Las Ecs 3.5 y 3.6 admiten una interesante simetría que es revelante para las investigaciones de la dinámica de sistemas.

sea  $(x(t), u(t), y(t), v(t))^T$  solución de las Ecs 3.5 y 3.6 para los parámetros  $\alpha, \mu, K$ , y  $\varepsilon$ , entonces  $(-x(t), -u(t), -y(t), -v(t))^T$  es también una solución para los mismos parámetros establecidos. Esto implica que los atractores en el espacio fase tienen que ser simétricos respecto al origen; de lo contrario deben aparecer en parejas, a restablecer la simetría exacta del sistema.

### 3.3 Análisis de estabilidad

Los puntos fijos del sistema Van Der Pol-Duffing acoplado son calculados mediante las Ecs. 3.5 y 3.6 igualando a cero el lado derecho, por lo tanto las soluciones son  $E_0 = (0, 0, 0, 0)^T$ ,  $E_1 = (a, 0, b, 0)^T$  y  $E_2 = (-a, 0, -b, 0)^T$ , donde a y b se definen como:

$$a = \frac{K}{(1 + K)\sqrt{\varepsilon(a + K)}} \tag{3.7}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(a + K)}} \tag{3.8}$$

Teniendo en cuenta que  $E_1$  y  $E_2$  son simétricas con respecto al origen; también comparten las mismas propiedades de estabilidad. La matriz Jacobiana evaluada en cualquier punto fijo  $(x_0, u_0, y_0, v_0)^T$  puede ser calculada.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 - K - 2\mu u_0 x_0 & \mu(1 - x_0^2) & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K & 0 & 1 - K - 3\varepsilon y_0^2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la estabilidad del punto fijo  $(x_0, u_0, y_0, v_0)^T$  se determina de acuerdo a la parte real de las raíces de la siguiente ecuación característica  $\det(J - \lambda I) = 0$ .

$$\lambda^4 + A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0 \quad (3.9)$$

donde

$$A_0 = -1 + 3\varepsilon y_0^2(1 + K) + 2\mu u_0 x_0(-1 + K + 3\varepsilon y_0^2) \quad (3.10)$$

$$A_1 = \alpha(1 + K + 2\mu u_0 x_0) + \mu(1 - K - 3\varepsilon y_0^2)(1 - x_0^2) \quad (3.11)$$

$$A_2 = 3\varepsilon y_0^2 + 2(K + \mu u_0 x_0) - \alpha\mu(1 - x_0^2) \quad (3.12)$$

$$A_3 = \alpha - \mu(1 - x_0^2) \quad (3.13)$$

Un conjunto de condiciones son necesarias y suficientes para todas las raíces de las Ecs. 3.10-3.13, la obtener las partes reales negativas propuesta por Routh-Hurwitz expresado por las siguientes ecuaciones.

$$A_i > 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (3.14)$$

$$A_3 A_2 - A_1 > 0 \quad (3.15)$$

$$A_3(A_1 A_2 - A_0 A_3) - A_1^2 >= 0 \quad (3.16)$$

El origen del sistema  $E_0 = (0, 0, 0, 0)^T$  es siempre inestable independiente de los parámetros del sistema dado que  $A_0 = -1$ . Fijando los parámetros  $\alpha = 0.5$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $\varepsilon = 0.3$  y  $K = 0.5$ , implica que  $a$  y  $b$  tengan los siguientes valores:  $(a, b) = (0.4969, 1.4907)$ . Por lo tanto los valores propios asociados a  $E_0$  son  $(0.3675 \pm 1.1939i, 0.6120, -1.0471)$ , mientras que los valores propios relacionados con  $E_1$  y  $E_2$  son  $(0.2075 \pm 1.1658i, -0.1563 \pm 1.1840i)$ . Obviamente para estos valores de parámetros del sistema fijados, tanto  $E_0, E_1$  y  $E_2$  son puntos sillars.

### 3.3.1 Bifurcación y el inicio del caos

Analizaremos el comportamiento del sistema acoplado con respecto a los cuatro parámetros  $(\mu, \alpha, \varepsilon$  y  $K)$ , nos concentraremos en fijar tres parámetros del sistema y haremos variar el cuarto parámetro, con la finalidad de obtener los diagramas del bifurcación y ver las regiones donde se presenta en caos en el sistema Van Der Pol-Duffing, para este objetivo las Ecs. 3.5 y 3.6 se resuelven numéricamente utilizando el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden, para definir rutas hacia el caos en nuestro sistema. Los diagramas de bifurcación teniendo como parámetro de control  $\varepsilon$ , se obtienen mediante el trazo de los máximos de  $x(t)$  y  $y(t)$  en términos de  $\varepsilon$  como parámetro de control que se varió

en pequeños pasos, fijando  $\alpha = 0.5$ ,  $\mu = 0.8$  y  $K = 0.5$ .

Las estructuras de bifurcación incluyen periodo de duplicación, simetría de ruptura y pequeñas regiones de periodicidad en dominios caótico. En los diagramas de difurcación para  $\varepsilon$  (Figs. 3.2 y 3.3) observamos que el sistema acoplado manifiesta un ciclo límite para valores pequeños, así como también para grandes valores de  $\varepsilon$ . Los cálculos de los diagramas de bifurcación se han hecho con las mismas condiciones iniciales:  $x(0) = 0.8$ ,  $y(0) = 2.0$ ,  $u(0) = 0$  y  $v(0) = 0$ .

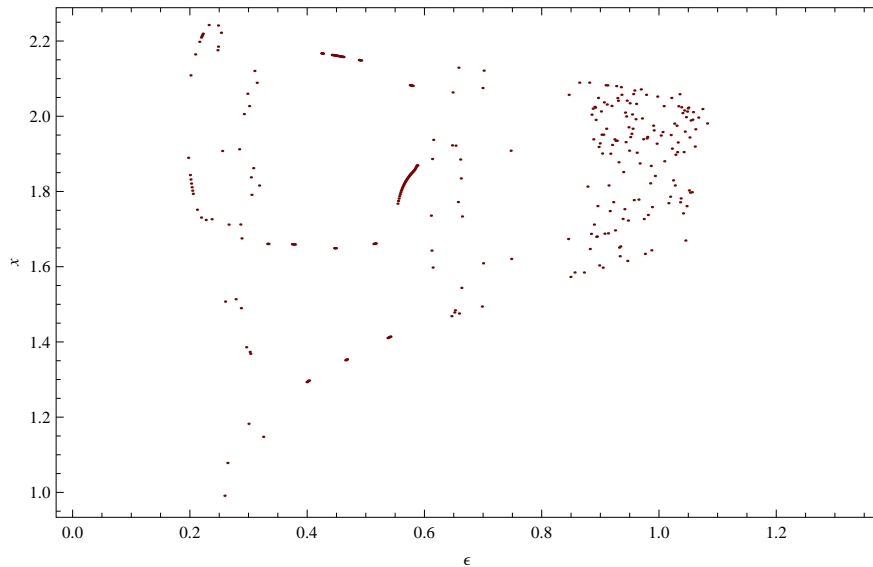


Figure 3.2: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenada  $x$  en términos del parámetro de control  $\varepsilon$ .

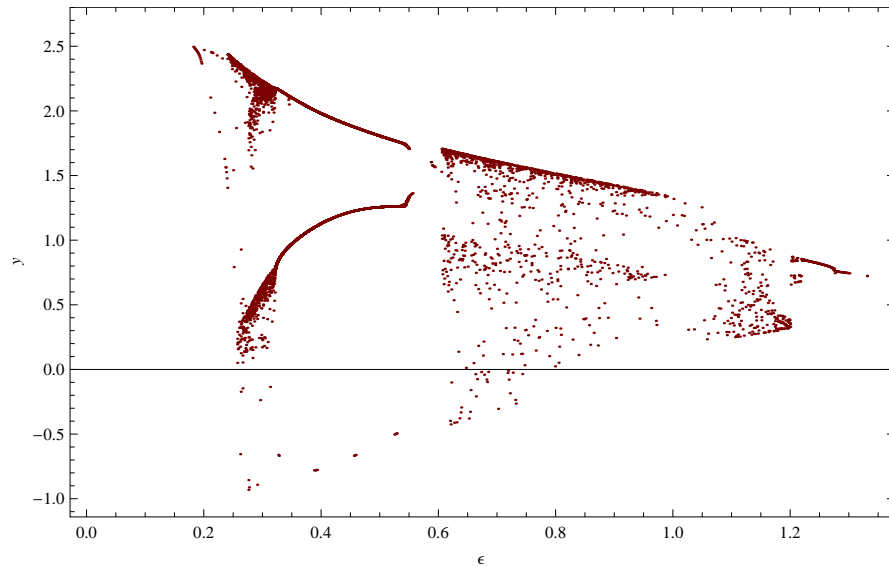


Figure 3.3: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenada  $y$  en términos del parámetro de control  $\epsilon$ .

El segundo parámetro de control  $\alpha$  que presenta el oscilador de Duffing se utilizara como control del sistema Van Der Pol-Duffing, los diagramas de bifurcación se obtienen mediante el trazo de los maximos de  $x(t)$  y  $y(t)$  en términos de  $\alpha$  como se muestran en las Figs. 3.4 y 3.5, fijando  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 0.4$  y  $K = 0.5$ .

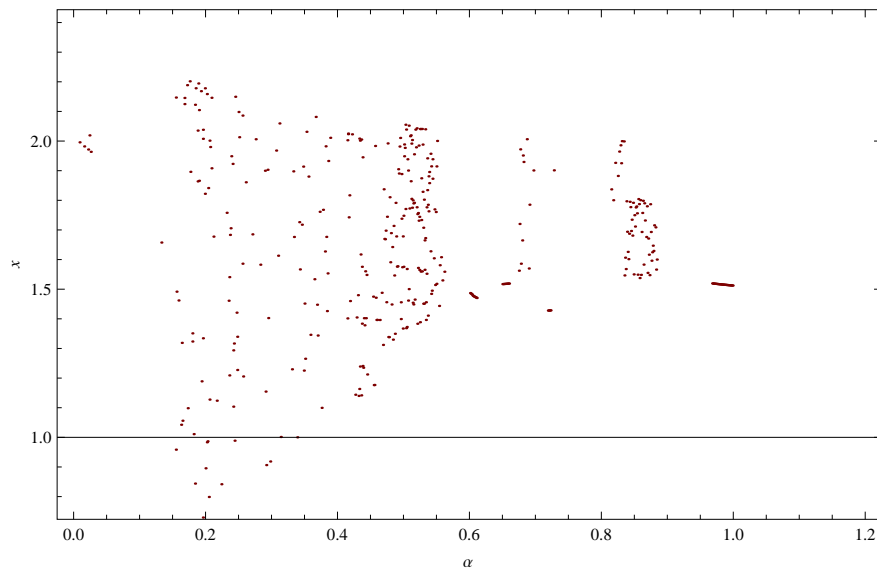


Figure 3.4: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenada  $x$  en términos del parámetro de control  $\alpha$ .

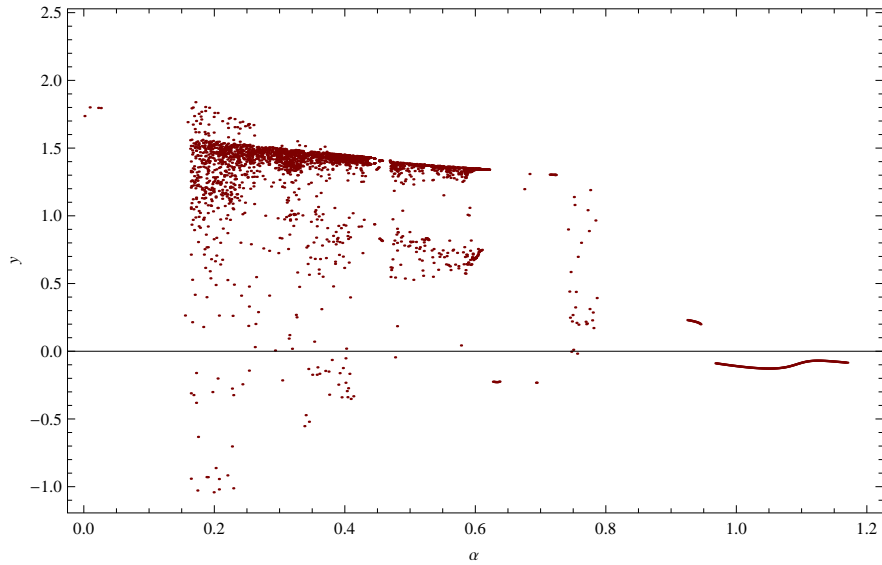


Figure 3.5: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenada  $y$  en términos del parámetro de control  $\alpha$ .

El oscilador de Van Der Pol solo tiene un parámetro de control  $\mu$ , para este caso los 3 parámetros  $\varepsilon$ ,  $K$  y  $\alpha$  se fijaron a 0.5. Los diagramas de bifurcación teniendo como parámetro de control  $\mu$ , se obtienen mediante el trazo de los maximos de  $x(t)$  y  $y(t)$  en términos de  $\varepsilon$  como parámetro de control que se varió en pequeños pasos, en las Figs. 3.6 y 3.7 se observa que la transición al caos es mas notoria para valores grandes de  $\mu$ , y para valores pequeños de  $\mu$  hay una bifurcación de periodo 3.

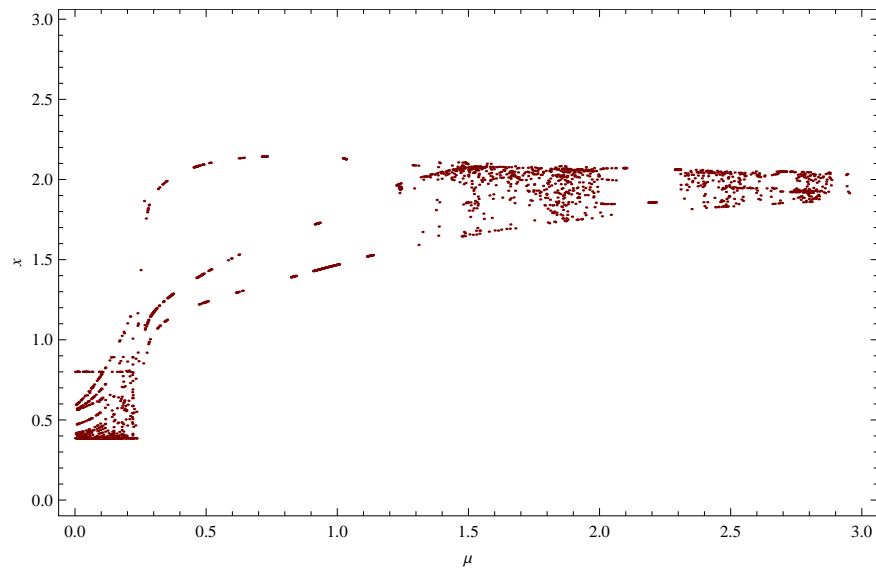


Figure 3.6: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenada  $x$  en términos del parámetro de control  $\mu$ .

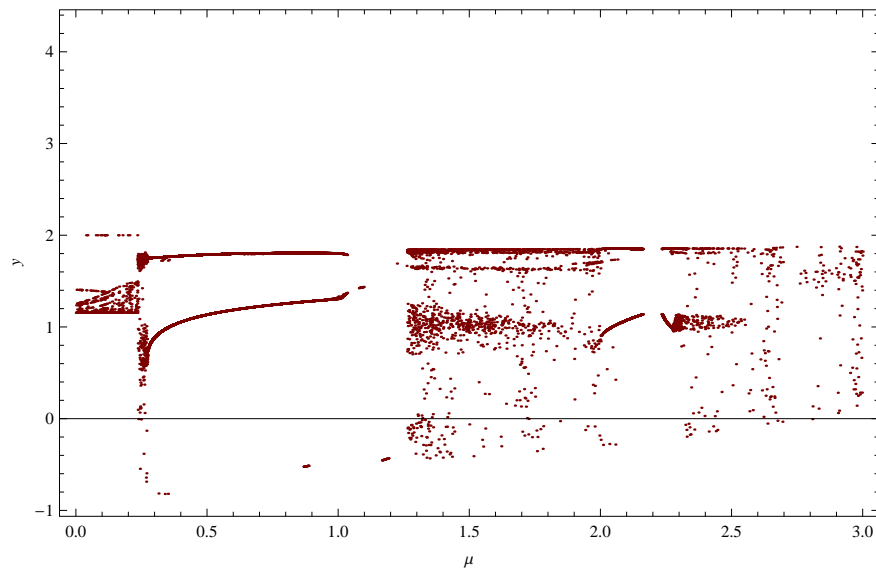


Figure 3.7: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenada  $y$  en términos del parámetro de control  $\mu$ .

Para investigar la dinámica del sistema acoplado Van Der Pol-Duffing, se dibuja un diagrama de bifurcación. El diagrama de bifurcación, como se muestran en las Figs 3.8 y 3.9, se señala para amplitudes máximas de  $x$  e  $y$  contra el acoplamiento  $K$ . Los cálculos se han hecho para los valores fijos de  $\mu = 0.8$ ,  $\alpha = 0.5$  y  $\varepsilon = 1$ . El

sistema acoplado desarrolla algunas regiones periódicos y caóticos si la constante  $K$  de acoplamiento es variado, teniendo ciclo límite para valores grandes y pequeños de  $K$ .

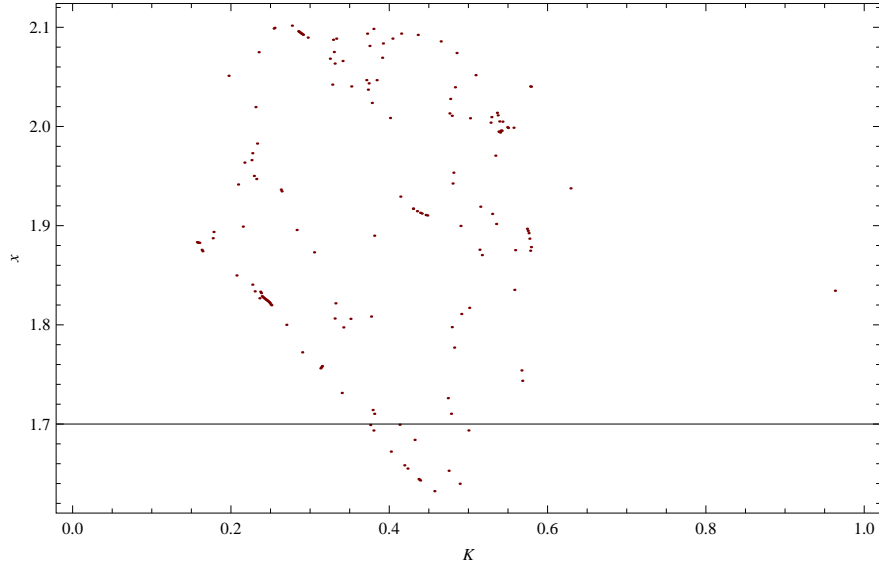


Figure 3.8: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenada  $x$  en términos del parámetro de control  $K$ .

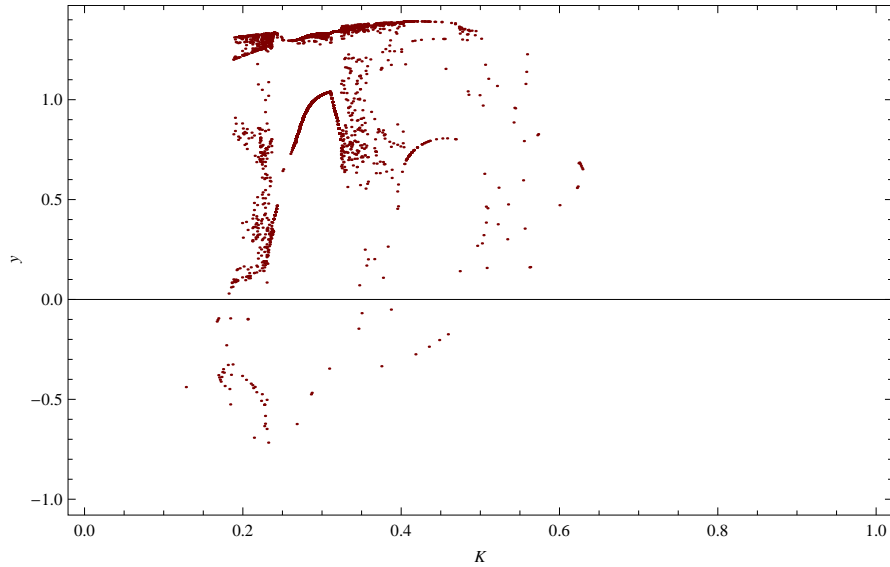


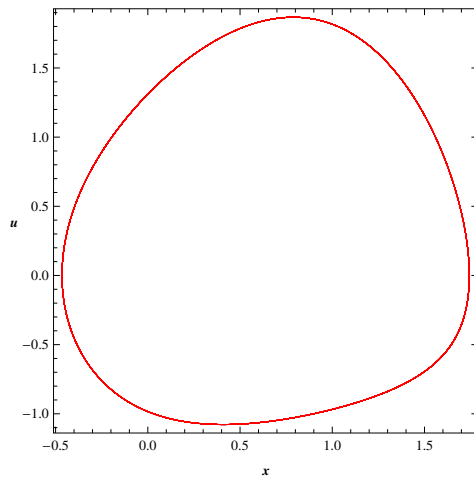
Figure 3.9: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenada  $y$  en términos del parámetro de control  $K$ .

Algunos retratos de fase se observan en las Fig 3.10-3.13. haciendo variar el parámetro  $\varepsilon$ , muestran estados típicos del sistema. Observamos que el sistema acoplado

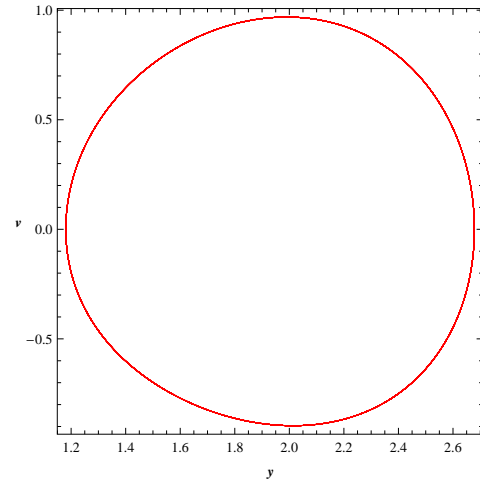
### CHAPTER 3. SISTEMA VAN DER POL-DUFFING

---

muestra un comportamiento ciclo límite simple para valores pequeños como para grandes valores de  $\varepsilon$ , también presentando periodo-2, periodo-3 y caos, estas transiciones se pueden observar en los diagramas de bifurcación.

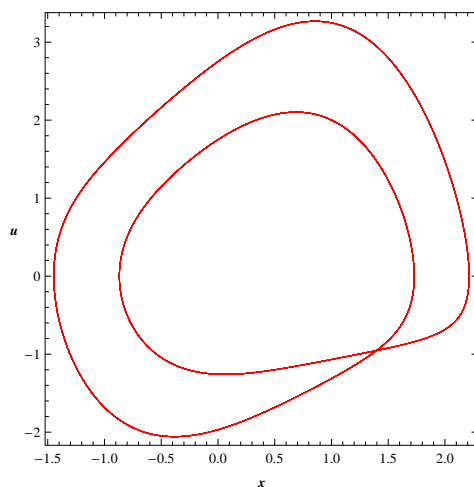


(a) Oscilador forzado de Van Der Pol.

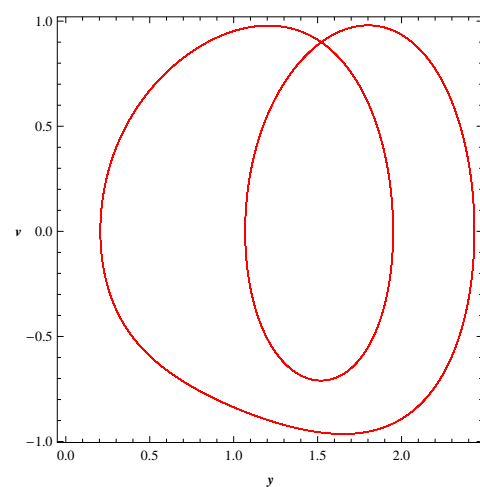


(b) Oscilador forzado de Duffing.

Figure 3.10: Dinámica de los osciladores Van Der Pol y Duffing  $\varepsilon = 0.15$ .



(a) Oscilador forzado de Van Der Pol.



(b) Oscilador forzado de Duffing.

Figure 3.11: Dinámica de los osciladores Van Der Pol y Duffing  $\varepsilon = 0.22$ .

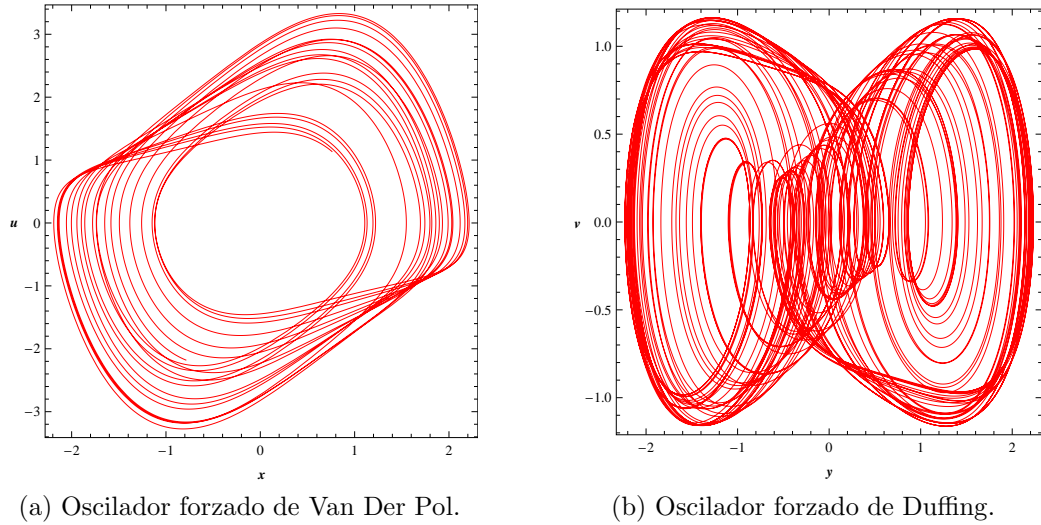


Figure 3.12: Dinámica de los osciladores Van Der Pol y Duffing  $\varepsilon = 0.30$ .

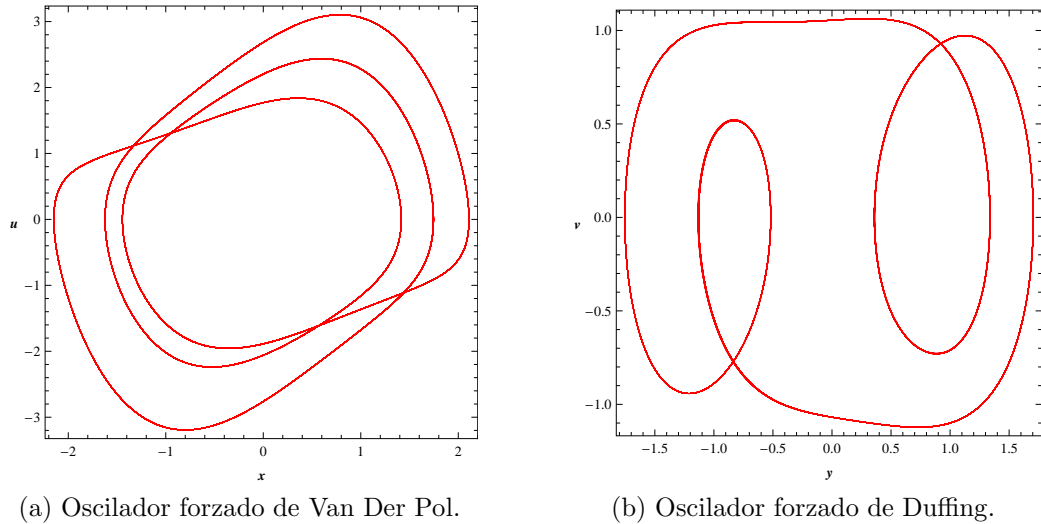


Figure 3.13: Dinámica de los osciladores Van Der Pol y Duffing  $\varepsilon = 0.55$ .

### 3.4 Implementación del circuito analógico

La implementación de la computadora analógica es una herramienta necesaria para escanear el rango de parámetros a fin de encontrar los valores adecuados de los parámetros para una simulación numérica.

Otra ventaja de este enfoque en comparación con el cálculo numérico es que no hay necesidad de esperar largos periodos para encontrar las regiones de interés. Esto puede servir para justificar el creciente interés dedicado a este tipo de aplicación para

el análisis de sistemas no lineales y caóticos. El objetivo de esta sección es el diseño de un circuito analógico apropiado para la investigación del modelo descrito por las Ecs. 3.5 y 3.6 con el fin de validar y apoyar a los resultados teóricos. Las rutas hacia el caos en el sistema son investigados experimentalmente; retratos de fase numéricos son comparados con los experimentales.

### 3.4.1 Diseño del simulador analógico

La Fig. 3.10 es un diagrama esquemático del circuito electrónico Van Der Pol-Duffing. Los multiplicadores electrónicos son las versiones analógicos AD633JN de los AD633, multiplicadores de voltaje. Se utilizan para implementar los términos no lineales de nuestro sistema. Los integradores son amplificadores operacionales (TL081) con condensadores de retroalimentación. Las sumatorias se obtienen utilizando amplificadores operacionales con resistencias de retroalimentación y resistencias de entrada. Las salidas del circuito se puede mostrar directamente en un osciloscopio para observar el retraso de fase. Para el oscilador de Van Der Pol, los retratos de fase se obtienen de las salidas  $U_1A$  para  $X$  y de  $U_1B$  para  $Y$ . El mismo procedimiento se aplica al oscilador de Duffing y los retratos de fase se obtienen de las salidas  $U_2D$  para  $X$  y de  $U_3A$  para  $Y$ . Se puede demostrar que el voltaje en  $X$  (salida de  $U_1A$ ) e  $Y$  (salida de  $U_2D$ ) se describen por el conjunto de ecuaciones diferencial no lineal acopladas 3.5 y 3.6. En términos de los componentes del circuito, los parámetros de las Ecs. 3.5 y 3.6 se definen como sigue:

$$\alpha = \frac{1}{10^4 R_{14} C_3}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10^{10} R_{12} R_{18} C_3 C_4}$$

$$\mu = \frac{R_3}{10^6 R_2 R_6 C_1}$$

$$K = \frac{R_{10}}{R_9}$$

Estas definiciones tienen en cuenta las siguientes relaciones críticas entre resistencias y condensadores:

$$R_7 = 100R_6$$

$$R_1 R_8 C_1 C_2 = R_{11} R_{18} C_3 C_4$$

$$R_1 R_5 C_1 C_2 = 10^{-8}$$

$$R_{13} R_{18} C_3 C_4 = 10^{-8}$$

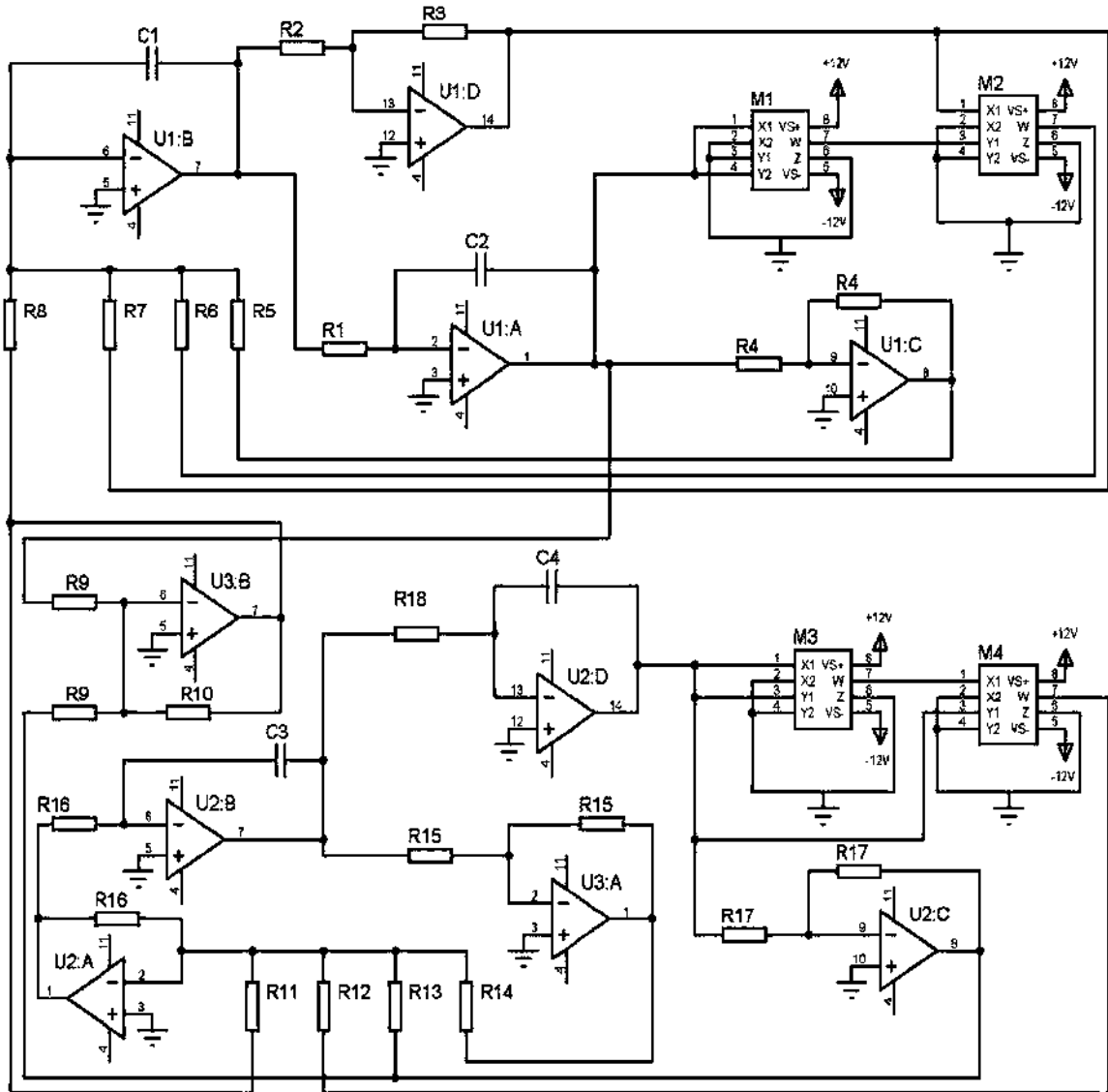


Figure 3.14: Diagrama esquemático del circuito electrónico Van Der Pol-Duffing.

### 3.4.2 Observaciones experimentales

Ahora nos centramos en el estudio experimental de nuestro sistema. Los efectos de no linealidad cúbica (es decir, el parámetro  $\varepsilon$ ) en la dinámica del sistema se analiza

### CHAPTER 3. SISTEMA VAN DER POL-DUFFING

---

mediante el control de una sola resistencia ( $R_{12}$ ) mientras se mantiene el resto de los componentes electrónicos valores constantes. Se seleccionan los siguientes valores de los componentes de circuitos:  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1nF$ ,  $R_1 = R_8 = R_{11} = 100k\Omega$ ,  $R_2 = 33k\Omega$ ,  $R_3 = 26,4k\Omega$ ,  $R_4 = R_{15} = R_{17} = 68k\Omega$ ,  $R_5 = 100k\Omega$ ,  $R_6 = 1k\Omega$ ,  $R_7 = 100k\Omega$ ,  $R_9 = 12k\Omega$ ,  $R_{10} = 6k\Omega$ ,  $R_{13} = 100k\Omega$ ,  $R_{14} = 200k\Omega$ ,  $R_{16} = R_{18} = 100k\Omega$ . La elección de estos valores se justifica por nuestro deseo de utilizar los mismos conjuntos de parámetros del sistema para ambos estudios numéricos y experimentales. Cuando el control de la resistencia de control  $R_{12}$ , se encuentra que el circuito electrónico exhibe un comportamiento dinámico rico y complejo. Proporcionamos en la Figs. 3.15-3.18 muestra algunos retrasos de fase obtenidos experimentalmente. Tenga en cuenta que las imágenes de la Figs. 3.15-3.18 están muy cerca de los retratos de fase calculados numéricamente (ver Figs. 3.). Además de las Figs. 3.15-3.18, se puede ver que el circuito experimental presenta las mismas estructuras de bifurcación como los obtenidos numéricamente.

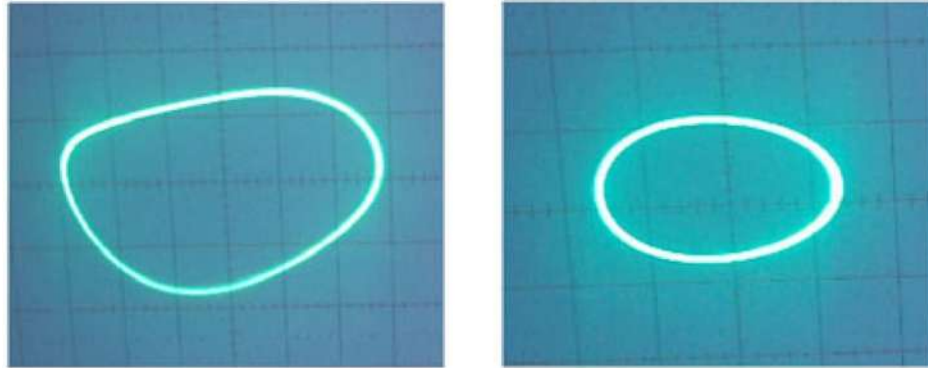


Figure 3.15: Espacio fase experimental del sistema Periodo-1,  $R_{12} = 6665\Omega$ .

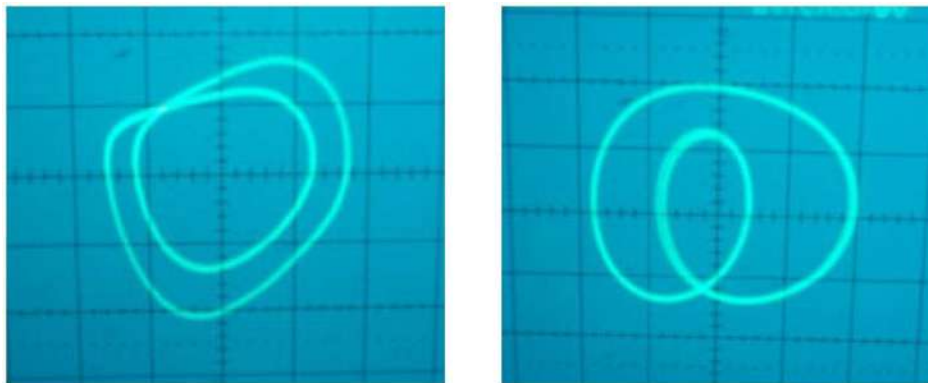


Figure 3.16: Espacio fase experimental del sistema Periodo-2,  $R_{12} = 4545\Omega$ .

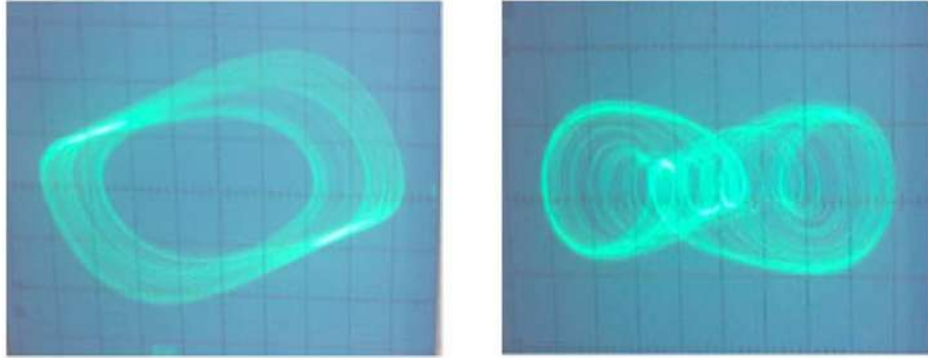


Figure 3.17: Espacio fase experimental del sistema región caótica,  $R_{12} = 3330\Omega$ .

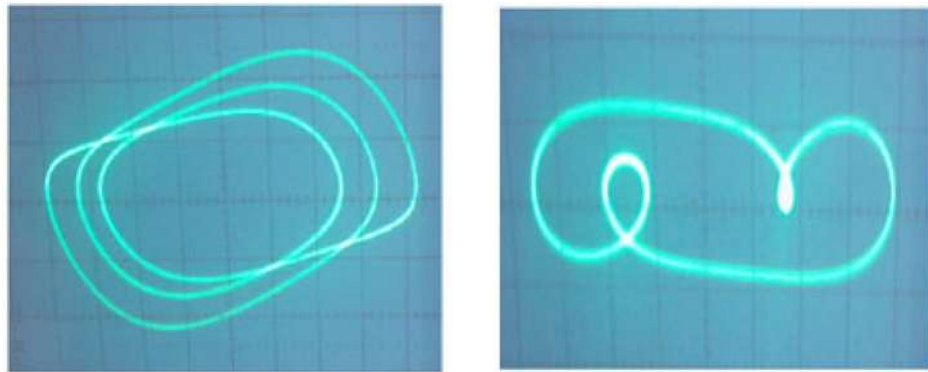


Figure 3.18: Espacio fase experimental del sistema Periodo-3,  $R_{12} = 1820\Omega$ .

Con este tipo de acoplamiento [60], no es posible llegar a la sincronización completa. Para llegar a sincronizar se tendría que ver al sistema Van Der Pol-Duffing como uno solo de 4-Dimensión y acoplarlo con otro sistemas identico, como se analiza en el artículo [60].

### 3.5 Sistema Van Der Pol-Duffing forzado

Esta sección se forzara a los osciladores Van Der Pol y Duffing para llevarlos a estados caoticos sin estar acoplados para posteriormente acoplarlos mediante la diferencias de posiciones y velocidades. Como se vio anteriormente no se pudo acoplar al sistemas Van Der Pol-Duffing solo utilizando la diferencias de posición.

El nuevo acoplamiento que se utilizara para el sistema Van Der Pol-Duffing forzado se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales.

$$\dot{x} = u + K(y - x) \tag{3.17}$$

$$\dot{u} = \mu(1 - x^2)u - x + A_1 \cos w_1 t + K(v - u)$$

$$\dot{y} = v + G(y - x) \tag{3.18}$$

$$\dot{v} = -\alpha v + y - \varepsilon y^3 + A_2 \cos w_2 t + G(v - u)$$

Para  $K = 0$  y  $G = 0$ , ambos osciladores están desacoplados: el Van Der Pol forzado presenta un atractor ciclo límite, mientras que el oscilador de Duffing forzado experimenta un movimiento oscilatorio amortiguado con forzamiento externo. El acoplamiento empleado en el sistema es una retroalimentación lineal que puede ser visto como una perturbación de cada oscilador por una señal proporcional a la diferencia de su posición y velocidad.

Los parámetros de acoplamiento se fijan  $K = 0$  y  $G = 0$  para llevar a los osciladores Van Der Pol y Duffing por separado a sistemas caóticos iniciales. Posteriormente se fijaran los parámetros del oscilador Van Der Pol y Duffing forzados con  $\mu = 0.8$ ,  $\alpha = 0.25$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $A_1 = 1$ ,  $W_1 = 0.4$ ,  $A_2 = 0.3$  y  $W_2 = 1$ . En la Fig. 3.19 se observa la dinámica de los osciladores forzados con condiciones iniciales:  $x(0) = 0.8$ ,  $y(0) = 2.0$ ,  $u(0) = 0$  y  $v(0) = 0$ .

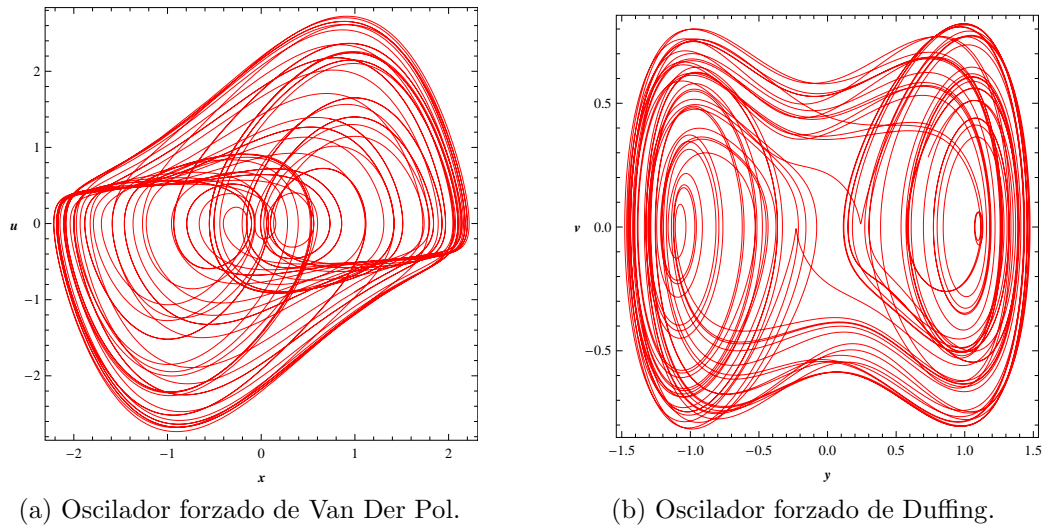
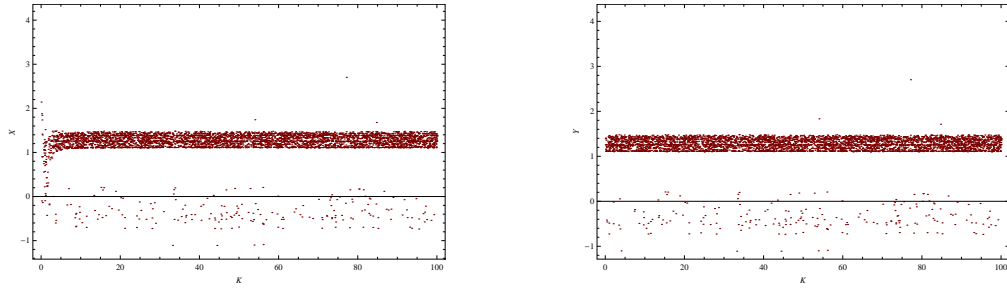


Figure 3.19: Dinámica de los osciladores Van Der Pol y Duffing en una región caótica.

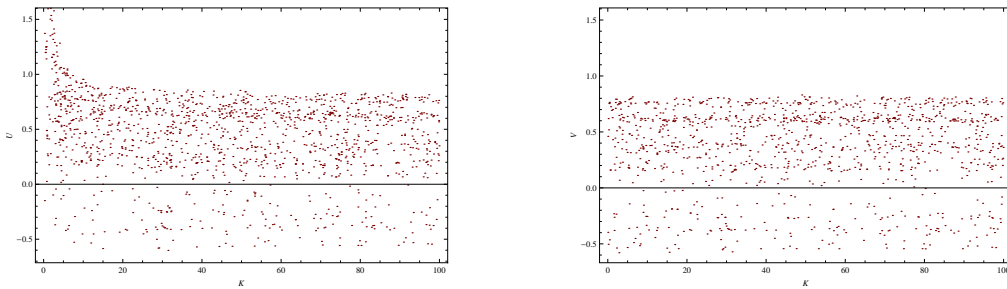
Llevando a los osciladores a una región caótica ambos, veremos su comportamiento haciendo  $G = 0$ , y tendremos como variable de acoplamiento  $K$  que sera nuestro control. Para este caso se tendra un acoplamiento unidireccional por lo que Duffing actuara como el sistema Maestro y Van Der Pol como el sistema Esclavo. Los diagramas de bifurcación teniendo como parámetro de control  $K$ , se obtienen mediante el trazo

de los maximos de  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$  y  $v(t)$  en términos de  $K$  como parámetro de control que se varió en pequeños pasos de 0 – 100.



(a) Diagrama de bifurcación  $x(t)$  vs  $K$ . (b) Diagrama de bifurcación  $y(t)$  vs  $K$

Figure 3.20: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  en términos del parámetro de control  $K$ .



(a) Diagrama de bifurcación  $u(t)$  vs  $K$ . (b) Diagrama de bifurcación  $v(t)$  vs  $K$

Figure 3.21: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenadas  $u(t)$  y  $v(t)$  en términos del parámetro de control  $K$ .

Como se puede observar en la Fig. 3.20 los diagramas de difurcación de de  $x(t)$  e  $y(t)$  en términos de  $K$  son muy similares, como también en la Fig. 3.21 muestra el diagrama de difurcación de de  $u(t)$  y  $v(t)$ , esto significa para ciertos valores de  $K$ , el sistema Van Der Pol-Duffing forzado se acoplan de manera unidireccional, tambien se puede observar que la sincronización se realiza en los canales  $x - y$  como en los canales  $u - v$ . En ambos existe la sincronización completa, pero para cuestiones practicas envio de información el canal  $x - y$  es mas amplio el rango del parámetro  $K$ .

En la Fig. 3.22 se toma el valor de  $K = 20$ , y se puede observar que ya se logra una sincronizacion en los canales  $x - y$ , y la dinámica Van Der Pol es afectada ya por Duffing.

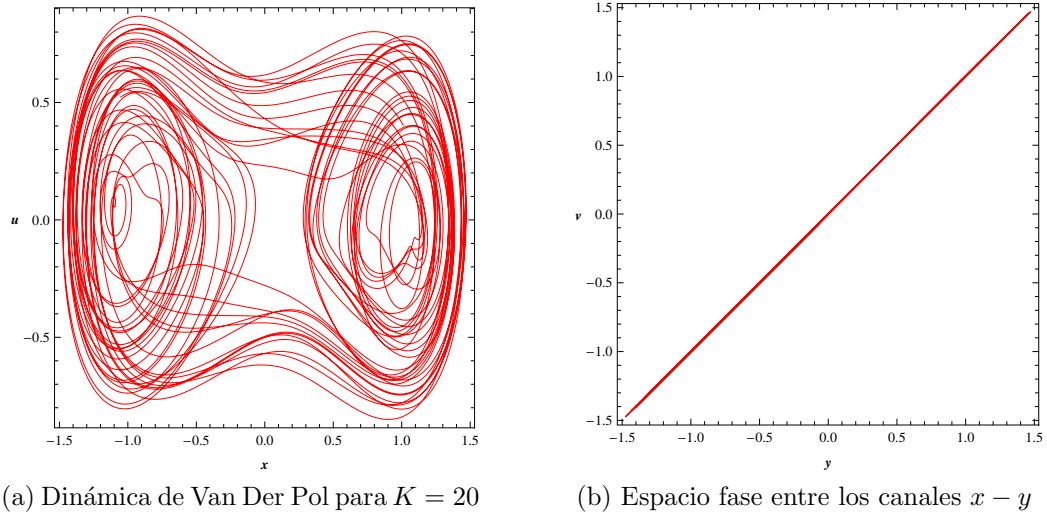


Figure 3.22: Sincronización Van Der Pol-Duffing para  $K = 20$ .

Ahora se tomara  $K = 0$ , y tendremos como variable de acoplamiento  $G$  que sera nuestro control. Para este caso se tendra un acoplamiento unidireccional por lo que Van Der Pol actuara como el sistema Maestro y Duffing como el sistema Esclavo. Los diagramas de bifurcación teniendo como parámetro de control  $K$ , se obtienen mediante el trazo de los maximos de  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$  y  $v(t)$  en términos de  $G$  como parámetro de control que se varió en pequeños pasos de  $0 - 100$ .

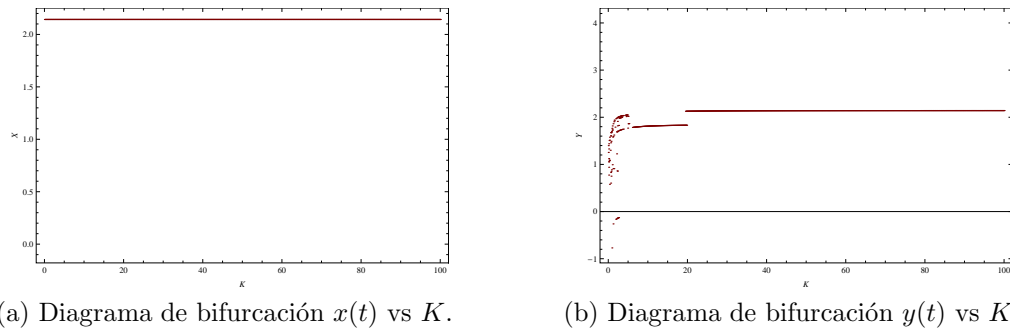


Figure 3.23: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  en términos del parámetro de control  $K$ .

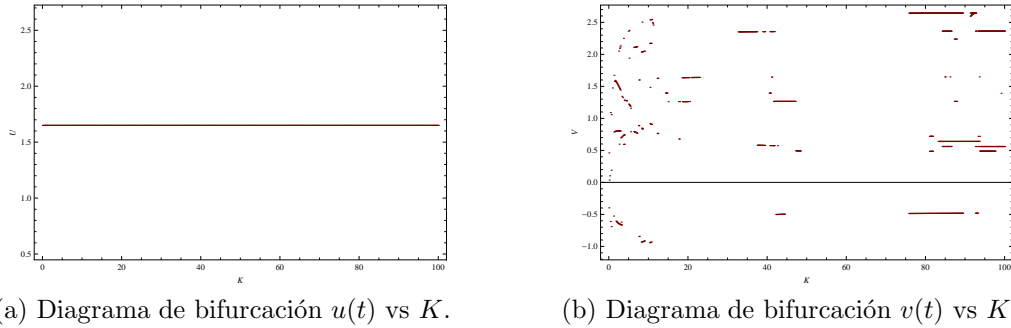


Figure 3.24: Diagrama de bifurcación del sistema de la cordenadas  $u(t)$  y  $v(t)$  en términos del parámetro de control  $K$ .

Como se puede observar en la Fig. 3.23 los diagramas de difurcación de de  $x(t)$  y  $y(t)$  en términos de  $G$  son similares para cierto valor de  $G$ , como también en la Fig. 3.24 muestra el diagrama de difurcación de de  $u(t)$  y  $v(t)$  muy parecidos, esto significa que también para ciertos valores de  $G$ , el sistema Van Der Pol-Duffing forzado se acoplan de manera unidireccional, se puede observar que la sincronización se realiza en los canales  $x - y$  como en los canales  $u - v$ . En ambos existe la sincronización completa, pero para cuestiones practicas envio de información el canal  $x - y$  es mas amplio el rango del parámetro  $G$ .

En la Fig. 3.25 se puede observar como es afectada la dinámica de Duffing, llegando a la sincronización variando el parámetro de control  $K$ .

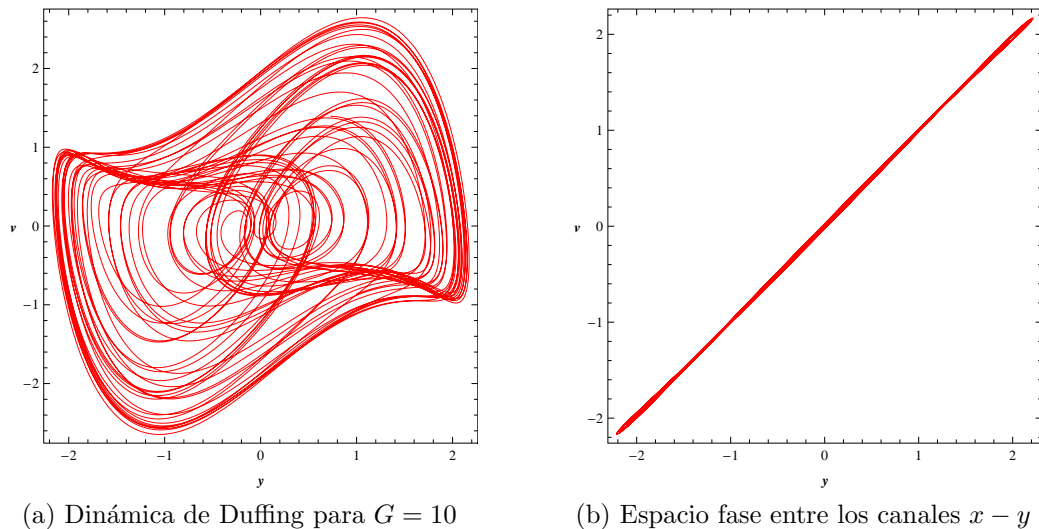


Figure 3.25: Sincronización Van Der Pol-Duffing para  $G = 10$ .

Cuando los parámetros de acoplamiento  $K \neq 0$  y  $G \neq 0$ , se tiene un acoplamiento bidireccional, entre ambos sistemas, una cuestión interesante a resolver es como debe ser la relación entre  $K$  y  $G$ , para ver quien actua como Maestro y Esclavo. Lo que se

### CHAPTER 3. SISTEMA VAN DER POL-DUFFING

---

hizo de manera numerica que para ciertos valores de  $K$  y  $G$  se observo la influencia quien actuaba como Maestro y Esclavo.

---

---

## Conclusiones

Esta tesis está basada en el estudio de los osciladores dinámicos no lineales que en los últimos años ha tenido gran interés por parte de la comunidad científica. Los sistemas no lineales pueden presentar inestabilidades que en ocasiones conducen a un comportamiento no periódico conocido con el nombre de caos determinista. En particular, los osciladores de Van Der Pol y Duffing, ha sido sistemas utilizados en todos los capítulos expuestos aquí, debido a las ventajas que presenta cuando se comparan con sistemas reales.

Es importante volver a mencionar que todos los resultados obtenidos en esta tesis están basados en simulaciones numéricas (utilizando el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden) de las ecuaciones que describen la dinámica del sistema Van Der Pol-Duffing.

Abordamos el problema del control y la sincronización del caos en el sistema Van Der Pol- Duffing. En los capítulos 2 hemos presentado las técnicas necesarias para la obtención del control del sistema Van Der Pol-Duffing y la sincronización entre dos de ellos respectivamente.

En el Capítulo 3 vimos dos acoplamientos diferentes, el primero un oscilador Van Der Pol elásticamente y simétricamente acoplado a un oscilador de Duffing, mediante la diferencias de sus posiciones. Este sistema se analizaron los 4 parámetros de control para encontrar rutas hacia el caos y analizar si era posible tener una sincronización entre ambos osciladores, por lo que dicho sistema no fue posible sincronizarlo. El sistema Van Der Pol-Duffing solo es posible acoplarlo con otro sistema similar Van Der Pol-Duffing, teniendo sistemas hipercaóticos de dimensión 4 []. El segundo acoplamiento propuesto no se conoce en la literatura, el método implementado era llevar a estados caóticos ambos sistemas Van Der Pol y Duffing forzados ambos, para después mediante acoplamientos de diferencias de posición y velocidades, llevarlos a sincronizar. Se observaron que mediante este tipo de acoplamiento propuesto ambos sistemas tienen dinámica diferente, por lo que se pudo lograr la sincronización unidireccional y bidireccional. En el área de comunicación es un resultado muy importante ya que se planteó una manera distinta a la que actualmente existe en la literatura para poder sincronizar

## CHAPTER 4. CONCLUSIONES

---

estos osciladores de Van Der Pol y Duffing.

Finalmente queremos mencionar que los objetivos de esta tesis se han cubierto de manera satisfactoria. Y también queremos mencionar que este trabajo también puede ser utilizado de utilidad para trabajos futuros en la línea del control y la sincronización.

# Bibliography

- [1] Cartwright, M.L., "Balthazar van der Pol", J. London Math. Soc., 35, 367-376, (1960).
- [2] Van der Pol, B., "On relaxation-oscillations", The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. J. of Sci., 2(7), 978-992 (1927).
- [3] Van der Pol, B. and Van der Mark, J., "Frequency demultiplication", Nature, 120, 363-364, (1927).
- [4] Kanamaru, T., "Van der Pol oscillator", Scholarpedia, 2(1), 2202, (2007).
- [5] FitzHugh, R., "Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes", Biophysics J, 1, 445-466, (1961).
- [6] Nagumo, J., Arimoto, S. and Yoshizawa, S. "An active pulse transmission line simulating nerve axon", Proc. IRE, 50, 2061-2070, (1962).
- [7] Cartwright, J., Eguiluz, V., Hernandez-Garcia, E. and Piro, O., "Dynamics of elastic excitable media", Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 9, 2197-2202, (1999).
- [8] Borrelli, Robert y Courtney Coleman, Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelación, México, Oxford University Press, 2002.
- [9] Hubbard, John H. y Beverly H. West, Differential equations: a dynamical systems approach, Nueva York, Springer-Verlag, 1995.
- [10] Wiggins, Stephen, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos
- [11] Kanamaru, Takashi, "Van der Pol oscillator", en Scholarpedia, 2(1), 2202, 2007, disponible en <http://www.scholarpedia.org/article/VanderPol>.
- [12] Bender, C.M.; Orszag, S.A. (1999), Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory, Springer, pp. 545-551, ISBN 9780387989310.

## CHAPTER 4. BIBLIOGRAPHY

---

- [13] Addison, P.S. (1997), *Fractals and Chaos: An illustrated course*, CRC Press, pp. 147–148, ISBN 9780849384431
- [14] J. Holmes and D.A. Rand , The bifurcations of Duffing’s equation: An application of catastrophe theory, *Journal of Sound and Vibration*, 44, 237-253, 1976.
- [15] Ott, E. *Chaos in Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press, 1993.
- [16] Wiggins, S. ”Application to the Dynamics of the Damped, Forced Duffing Oscillator.” §1.2E in *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag, pp. 5-6, 10, 23, 26-32, 44-45, 50-51, and 153-175, 1990.
- [17] Murali K. Lakshmanan, M. [1994], “Drive-response scenario of chaos synchronization in identical nonlinear systems”, *Physical Review E* 49(6), 4882-4885.
- [18] Ogorzalek, M. J. [1989], “Order and chaos in third-order RC ladder network with nonlinear feedback”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 36(9), 1221-1230
- [19] Ott, E., Grebogi, C. Yorke, J. [1990], “Controlling Chaos”, *Physical Review Letters* 64(11), 1196-1199.
- [20] Pecora, L. M., Carroll, T. L. [1990], “Synchronization in chaotic systems”, *Physical Review Letters* 64(8), 821-824.
- [21] Lourenco, C., Babloyantz, A. [1994], “Control of Chaos in Networks with Delay: A Model for Synchronization of Cortical Tissue”, *Neural Computation* 6(6), 1141-1154.
- [22] Hunt, E. R. Johnson, G. [1993], “Keeping chaos at bay”, *IEEE Spectrum* Nov. 1993, 32-36.
- [23] Newell, T. C., Alsing, P. M., Gavrielides, A. Kovanis, V. [1994], “Synchronization of Chaotic Diode Resonators by Occasional Proportional Feedback”, *Physical Review Letters* 72(11), 1647-165.
- [24] Babloyantz, A., Lourenco, C., Sepulchre, J. A. [1995], “Control of chaos in delay differential equations, in a network of oscillators and in model cortex”, *Physica D* 86(1-2), 274-283.
- [25] Lakshmanan, M. Murali, K. [1996], *Chaos in Nonlinear Oscillators: Controlling and Synchronization*, World Scientific Serires on Nonlinear Science 13, Singapore.
- [26] Kapitaniak, T., Kocarev, L. J. Chua, L. O. [1993], “Controlling Chaos Without Feedback and Control Signals”, *International Journal Of Bifurcation And Chaos* 3, 459-468

- [27] Jackson, E. A. [1990], “The Entrainment and Migration Controls of Multiple-attractor Systems”, *Physics Letters A* 151(9), 478-484. “On the Control of Complex Dynamic Systems”, *Physica D* 50, 341- 366. “Controls of Dynamic Flows with Attractors”, *Physical Review A* 44(8), 4839-4853, [1991].
- [28] Jackson, E. A. Hubler, A. [1990], “Periodic Entrainment of Chaotic Logistic Map Dynamics”, *Physica D* 44(3), 407-420.
- [29] Jackson, E. A. Kodgeorgiou, A. [1991]. “Entrainment and Migration Controls of Two-dimensional Maps”, *Physica D* 54(3), 253-26.
- [30] Wiesenfeld, K. McNamara, B. [1986], “Small signal amplification in bifurcating dynamical systems”, *Physical Review A* 33, 629-642.
- [31] Murali, K., Lakshmanan, M. Chua, L. O. [1995], ”Controlling and synchronization of chaos in the simplest dissipative nonautonomous circuit”, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 5, 563-571.
- [32] Rajasekar, S. Lakshmanan, M. [1993], ”Algorithms for controlling chaotic motion: Application for the BVP oscillator,” *Physica D* 67, 282-300.
- [33] Arizmendi, C. M., Fereydoon Family, Salas-Brito, A. L. [2001], “Quenched disorder effects on deterministic inertia ratchets”, *Physical Review E*, 63(6), 1104-1110.
- [34] Pyragas, K. [1992], “Continuous control of chaos by self-controlling feedback”, *Physics Letters A* 170, 421-428.
- [35] Huberman, B. A. Lumer, E. [1990], “Dynamics of adaptive systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 37(4), 547-550.
- [36] Cartwright, M. L. [1948], “Forced oscillations in nearly sinusoidal systems”, *Journal of the Institute of Electrical Engineering* 95, 223-227.
- [37] Carroll, T. L., Heagy, J., Pecora, L. M. [1994], “Synchronization and desynchronization in pulse coupled relaxation oscillators”, *Physics Letters A*, 186(3), 225-229.
- [38] González, D. L. Piro, O. [1983], “Chaos in a Nonlinear Driven Oscillator with Exact Solution”, *Physical Review Letters* 50(12), 870-872.
- [39] Arizmendi, C. M., Larrondo, H. A., Sánchez, J. R. Piro, O. [1984], “Bifurcaciones y Caos en un Oscilador Electrónico No Lineal”, 69a. Reunión Nacional de la AFA, Buenos Aires.
- [40] Larrondo, H. A., Avalos, D. R. Laura, P. A. [1996], “Dynamics of a kicked oscillator with a delay in its parametric feedback loop: an analytical study”, *Nonlinear Dynamics* 11, 407-419.

## CHAPTER 4. BIBLIOGRAPHY

---

- [41] Campbell, A., González, A., González, D. L., Piro, O. Larrondo, H. A. [1989], “Isochrones and the dynamics of kicked oscillators”, *Physica A* 155, 565-584.
- [42] Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S. Kurths, J. [1996], “Phase Synchronization of Chaotic Oscillators”, *Physical Review Letters* 76(11), 1804-1807.
- [43] Carroll, T. L. [2001], “Noise-Robust Synchronized Chaotic Communications”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 48(12), 1519-1522.
- [44] Williams, C. [2001], “Chaotic Communications Over Radio Channels”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 48(12), 1394-1404.
- [45] Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S. Volkovskii, A. R. [2001], “Digital Communication Using Chaotic-Pulse-Position Modulation”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 48(12), 1436-1444.
- [46] Fujisaka H and Yamada T. Stability theory of synchronized motions in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics* 69: 32-46. 1983.
- [47] V.S. Afraimovich, N.N. Verichev, M.I. Rabinovich, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Radiofizika* 1986.
- [48] Abdelmalik Moujahid “La Sincronización como Fenómeno Natural”, pp3-5.
- [49] Boccaletti S. et al. The Synchronization of chaotic systems. *Physics Reports* 366. 1– 101 . 2002.
- [50] Pecora LM and Carroll TL. Synchronization in Chaotic Systems. *Phys. Rev. Lett.* 64: 821-824. 1990.
- [51] Fujisaka H and Yamada T. Stability theory of synchronized motions in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics* 69: 32-46. 1983.
- [52] Kevin M. Cuomo, Alan V. Oppenheim Steven H. Strigatz, “Sincronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 40, NO 10, pp 626-633, 1993.
- [53] Kapitaniak, T., Chua, L.O.; “Strange nonchaotic trajectories on torus,” *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, vol. 7, (no. 2): 423-429. 1997.
- [54] M.A. Matías and J. Güémez, Stabilization of chaos by proportional pulses in the system variables, *Physical Review Letters*, 72, 1455-1458, 1994. Lorenz, Edward. (1995). *The Essence of Chaos*. University Of Washington Press, Seattle.

## CHAPTER 4. BIBLIOGRAPHY

---

- [55] Lorenz, Edward. The Essence of Chaos. University Of Washington Press, Seattle. 1995.
- [56] T. Kapitaniak, Phys. Rev. E 50 1994.
- [57] R.E. Amritkar, N. Gupte, Phys. Rev. E 47.1993.
- [58] L. Kocarev, U. Parlitz, Phys. Rev. Lett. 74 .1995.
- [59] U. Parlitz, L. Kocarev, T. Stojanovski, H. Preckel, Phys. Rev. E 53. 1996.
- [60] J. Kengne· J.C. Chedjou· G. Kenne· K. Kyamakya · G.H. Kom. Nonlinear Dyn (2012) 70:2163–2173 DOI 10.1007/s11071-012-0607-8