



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Y

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNAM- UMSNH

**Categoría de Biconjuntos con
Estructura Aditiva y funtores en
Biconjuntos**

TESIS

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta:

JESÚS TADEO IBARRA TACHO

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALBERTO GERARDO RAGGI CARDENAS

MORELIA MICHOACÁN – FEBRERO DE 2014

Categoría de biconjuntos con
estructura aditiva y funtores en
biconjuntos

Jesús Tadeo Ibarra Tacho

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Anillos de Burnside	1
1.2. Biconjuntos	6
1.3. Funtores de Mackey	11
2. Categoría de biconjuntos generalizada	15
2.1. Definición de la categoría \mathcal{C}_R	15
2.2. Propiedades básicas	24
2.3. Estructura aditiva de \mathcal{C}_R	30
3. Funtores a R-módulos	41
3.1. Funtores globales	41
3.2. Funtores locales	44
3.3. Haces vectoriales sobre G -conjuntos	46
3.4. Haces fibrados sobre G -conjuntos	54

Resumen

Abstract.

We define for a commutative ring R , an additive category \mathcal{C}_R such that contains a full subcategory \mathcal{D}_R and for every finite group G , subcategories $\mathcal{S}_{G,R}$, with \mathcal{D}_R equivalent to the biset category, $\mathcal{S}_{G,R}$ equivalent to the $\text{Span}_R(G\text{-set})$ and \mathcal{C}_R equivalent to $\text{Add}\mathcal{D}$. We prove that $\text{Fun}_R(\mathcal{C}, R\text{-mod})$ is equivalent to the biset functors category while $\text{Fun}_R(\mathcal{S}_G, R\text{-mod})$ is equivalent to the Mackey functors category over G . For X a G -set we give an explicit construction of the representation functor valued on ${}_G X$ as the Grothendieck group of Vector bundles over X .

Resumen.

Definimos para un anillo conmutativo R , una categoría aditiva \mathcal{C}_R tal que contiene una subcategoría plena \mathcal{D}_R y para cada grupo finito G , construimos subcategorías $\mathcal{S}_{G,R}$ tales que \mathcal{D}_R es equivalente a la categoría de biconjuntos, $\mathcal{S}_{G,R}$ es equivalente a $\text{Span}_R(G\text{-set})$ y \mathcal{C}_R es equivalente a $\text{Add}\mathcal{D}$. Demostremos que $\text{Fun}_R(\mathcal{C}, R\text{-mod})$ es equivalente a la categoría de biconjuntos mientras que $\text{Fun}_R(\mathcal{S}_G, R\text{-mod})$ es equivalente a la categoría de funtores de Mackey sobre G . Para X un G -conjunto, damos una construcción del funtor de representaciones valuado en ${}_G X$ como el grupo de Grothendieck de los haces vectoriales sobre X .

Palabras clave

Funtor en biconjuntos, Funtor de Mackey, grupos finitos, teoría de representaciones, haces vectoriales sobre G -conjuntos.

Introducción

Tanto los funtores de Mackey, definidos global o localmente, así como los funtores en biconjuntos aparecen naturalmente en el estudio de las representaciones modulares de grupos finitos, cohomología de grupos, topología algebraica, entre otras áreas. Estos funtores permiten generalizar las nociones de inducción, restricción, deflación, inflación y conjugación.

En [3] se definen los funtores en biconjuntos así como los funtores de Mackey globales a partir de ciertas subcategorías de la categoría de biconjuntos. Cuando hablemos de funtor de Mackey siempre nos referiremos a un funtor de Mackey de Dress (ver definición 1.19) a menos que se diga lo contrario. Para ciertos propósitos, la definición de funtor de Mackey de Dress es más apropiada que la definición de funtor de Mackey de Green, en el contexto de Green, dado un grupo finito G un funtor de Mackey sobre G será una colección de R -módulos $M(H)$ y una colección de morfismos

$$\begin{aligned}i_H^G &: M(H) \rightarrow M(G) \\r_H^G &: M(G) \rightarrow M(H) \\c_{g,H} &: M(H) \rightarrow M({}^gH)\end{aligned}$$

que satisfacen ciertas propiedades (ver [4], definición 1.1.1, página 5). La definición de funtor de Mackey de Dress puede ser más conveniente en ocasiones puesto que la definición de funtor de Mackey de Dress es funtorial mientras que la definición de Green no lo es, pero en la definición de Green se extienden de manera explícita las nociones de inducción, restricción y conjugación y es más clásica. Las demostraciones de algunos hechos con la definición de Dress pueden ser más sencillas, como por ejemplo, en la estructura monoidal para la categoría dominio y para la estructura monoidal en la categoría de funtores.

Un hecho muy importante a tener en cuenta es que los funtores de biconjuntos no generalizan a los funtores de Mackey propiamente, generalizan a los funtores de Mackey sobre G donde para todo $g \in G$ y todo $H \leq G$

$$c_{g,H} : M(H) \rightarrow M({}^gH)$$

es la identidad para todo $g \in C_G(H)$, es decir, los funtores de Mackey donde el centralizador de H en G actúa trivialmente en $M(H)$, para todo $g \in G$ y para todo $H \leq G$. En la definición de funtor de Mackey de Green pedimos que $c_{g,H} : M(H) \rightarrow M({}^gH)$ sea la identidad para todo $h \in H$ pero no necesariamente se tiene la identidad para elementos del centralizador de H en G , esto se puede apreciar en funtores de Mackey clásicos como por ejemplo FP_V para un kG -módulo fijo, $FP_V(H) = V^H$, el k -espacio vectorial de puntos fijos. Otro ejemplo donde el centralizador no actúa trivialmente es el álgebra de Mackey μ_G visto como funtor de Mackey.

El estudio de los funtores de Mackey que pueden ser expresados como funtores de biconjuntos fue hecho por Hambleton, Taylor y Williams en [11] y en [6] encontramos una reformulación que no depende de representantes.

La categoría de biconjuntos es una categoría preaditiva y tomando la subcategoría formada por los biconjuntos ${}_H G_G$, ${}_G G_H$ y ${}_H H_{c_{g,H}}$ y sus composiciones para cada grupo finito G , cada subgrupo $H \leq G$ y cada elemento $g \in G$, obtenemos una definición funtorial de funtor de Mackey global. Podemos encontrar una mejor explicación de esto en [3]. El problema es que solo recuperamos los funtores de Mackey donde los centralizadores actúan trivialmente y no es fácil identificar una subcategoría equivalente a la de funtores de Mackey de Dress.

La aportación de esta tesis es el estudio de los funtores de biconjuntos desde el punto de vista de Dress, definidos en una categoría dominio lo suficientemente pequeña, en este caso resulta ser la aditivización de la categoría de biconjuntos y los objetos de la categoría dominio pueden verse como sumas directas formales finitas de la categoría dominio. El problema de encontrar una definición global de funtor de Mackey con biconjuntos es estudiado en [9] usando 2-categorías. Nuestra definición es diferente (por ejemplo, la categoría dominio de Nakaoka es más grande, ésta tiene un objeto inicial (G, \emptyset) para cada grupo G y un objeto terminal $(1, 1/1)$ los cuales no son isomorfos). Para recuperar los funtores de Mackey se toman ciertas propiedades adicionales. En nuestro caso tenemos una categoría aditiva R -lineal con objeto cero (G, \emptyset) para cada grupo G y además, dentro de la tesis vemos que es la categoría aditiva más pequeña que contiene a la categoría de biconjuntos.

En el capítulo 1 damos una pequeña introducción a los funtores en biconjuntos y a los funtores de Mackey, así como establecemos nuestra notación. Para una versión extendida de esto consultar [3] y [4]. En el capítulo 2 definimos nuestra categoría dominio \mathcal{C} y probamos propiedades básicas de la categoría. En capítulo 3 estudiamos la estructura aditiva de \mathcal{C} , con la cual identificamos las clases de isomorfismo en \mathcal{C} y con esto identificamos a \mathcal{C} con $Add(\mathcal{D})$ donde \mathcal{D} es una subcategoría de \mathcal{C} equivalente a la categoría de biconjuntos. Para cada grupo finito G identificamos categorías S_G equiva-

lentes al $\text{Span}(G - \text{Set})$ con lo que identificamos sus categorías de funtores respectivas con la categoría de funtores de Mackey de Dress.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Anillos de Burnside

Tanto el anillo de Burnside de un grupo finito como el de un G -conjunto son importantes en la teoría de representaciones de grupos finitos. El anillo de Burnside será usado de manera fundamental en la definición de morfismos en las categorías de biconjuntos y $\text{Span}(G - \text{Set})$. El mismo anillo de Burnside es un funtor en biconjuntos y, además es el objeto inicial de la categoría de funtores en biconjuntos.

Dado G un grupo finito y X un G -conjunto denotamos por ${}_G X$ a X . Como constantemente tomaremos valores distintos, tanto de X como de G , ${}_G X$ denotará también a la pareja (G, X) con G un grupo finito y X un G -conjunto.

Dado $g \in G$ y $x \in X$, la órbita de x , denotada por $\mathcal{O}_G(x)$ es el siguiente subconjunto de X

$$\{gx : g \in G\}.$$

El estabilizador de x en G , denotado por G_x es el siguiente subgrupo de G

$$\{g \in G : gx = x\}.$$

Un G -conjunto X es transitivo si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}_G(x) = X$.

Dados X, Y G -conjuntos, un morfismo de G -conjuntos es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(gx) = gf(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $g \in G$.

Notemos que $\mathcal{O}_G(x) \cong G/G_x$ como G -conjuntos por medio del isomorfismo $ax \mapsto aG_x$ donde G/G_x denota el G -conjunto de clases laterales izquierdas con la acción traslación. De esta forma, dado que todo G -conjunto es unión disjunta de transitivos, entonces todo G -conjunto X es isomorfo a la suma de clases laterales izquierdas, es decir,

$$X \cong \bigsqcup_{x \in [G \setminus X]} G/G_x.$$

Observación 1.1. Dado G un grupo finito y $H, K \leq G$ es fácil ver que $G/H \cong G/K$ sí y sólo sí $H =_G K$ donde $H =_G K$ denota que H es G -conjugado a K . Usando lo anterior y fijando un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G podemos escribir todo G -conjunto de manera única como

$$\bigsqcup_{H \in [s(G)]} n_H G/H$$

donde n_H son enteros no negativos.

Dado G un grupo finito y X un G -conjunto, $s(G)$ denota el conjunto de subgrupos de G , $[s(G)]$ denota un conjunto de representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de G , $G \setminus X$ denota el conjunto de G -órbitas de X y $[G \setminus X]$ denota un conjunto de representantes de las órbitas de X .

Dado R un anillo conmutativo con 1, denotamos por $R - Mod$ a la categoría de R -módulos izquierdos y denotamos por $R - mod$ a la categoría de módulos izquierdos finitamente generados. Definiremos las categorías de biconjuntos con coeficientes en R y para G un grupo finito fijo la categoría $Span_{G,R}$ usando el anillo de Burnside de un grupo finito y el anillo de Burnside de un G -conjunto respectivamente.

Definición 1.2. Sea G un grupo finito, definimos el anillo de Burnside de G como el grupo de Grothendieck de la categoría $G - set$ de G -conjuntos finitos. Lo denotaremos por $B(G)$. Sea R un anillo conmutativo con 1, definimos el anillo de Burnside en G con coeficientes en R , denotado por $RB(G)$, como $R \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$.

Notemos que $B(G)$ es un anillo con el producto definido por el producto cartesiano de G -conjuntos, bilinealmente extendido, i.e. sean $a, b \in B(G)$ y fijando un conjunto de representantes $[s(G)]$, a partir de la observación 1.1 vemos que

$$B(G) \cong \bigoplus_{H \in [s(G)]} \mathbb{Z}_{G/H}$$

donde cada $\mathbb{Z}_{G/H}$ es isomorfo a los enteros como grupo abeliano.

En isomorfismo entre $B(G)$ y $\bigoplus_H \mathbb{Z}_{G/H}$ sólo es un isomorfismo al nivel de grupos abelianos. De esta forma,

$$a = \sum_{H \in [s(G)]} n_H G/H$$

$$b = \sum_{H \in [s(G)]} m_H G/H.$$

Donde n_H, m_H son números enteros. Como $X \times (Y_1 \sqcup Y_2) = (X \times Y_1) \sqcup (X \times Y_2)$, entonces el producto definido por

$$ab = \sum_{(H,K) \in [s(G)] \times [s(G)]} n_H m_K (G/H \times G/K)$$

le da a $B(G)$ estructura de anillo.

Ejemplo 1.3. Para el grupo trivial (denotado por 1) el anillo de Burnside está generado por el G -conjunto trivial $1/1$ como grupos abelianos, de manera que $B(1) \cong \mathbb{Z}$ como grupos abelianos, este isomorfismo es de anillos puesto que $1/1 \times 1/1 \cong 1/1$ como 1-conjuntos.

Definición 1.4. Sea X un G -conjunto, definimos el anillo de Burnside de X como el grupo de Grothendieck de la categoría de G -set \downarrow_X de parejas (T, φ) , T un G -conjunto finito y $\varphi : T \rightarrow X$ un morfismo de G -conjuntos. Lo denotaremos por $B({}_G X)$. Sea R un anillo conmutativo con 1, definimos el anillo de Burnside en ${}_G X$ con coeficientes en R , denotado como $RB({}_G X)$ como $R \otimes_{\mathbb{Z}} B({}_G X)$

Notemos que $B({}_G X)$ es un anillo con el producto fibrado de morfismos de G -conjuntos, extendido bilinealmente.

La relación entre los anillos de Burnside es la siguiente.

Proposición 1.5. Sea G un grupo finito y X un G -conjunto, entonces $\eta : B({}_G X) \cong \prod_{x \in [G \backslash X]} B(G_x)$, $\eta(U, \varphi) = \prod_x \varphi^{-1}(x)$ es un isomorfismo de anillos.

Demostración. ■ η está bien definida.

Sean $(U, \varphi), (U', \varphi') \in B({}_G X)$ con U, U' G -conjuntos y sea $\alpha : U \rightarrow U'$ isomorfismo de G -conjuntos tal que

$$\varphi = \varphi' \alpha$$

Entonces

$$\alpha|_{\varphi^{-1}(x)} : \varphi^{-1}(x) \rightarrow \varphi'^{-1}(x)$$

es un isomorfismo de G_x -conjuntos con inversa $\alpha_{|\varphi^{-1}(x)}^{-1}$ por lo tanto,
 $\eta(U, \varphi) = \eta(U', \varphi')$

- η define un morfismo de grupos abelianos.

Lo que tenemos que probar es que dados $(U, \varphi), (V, \psi) \in B(GX)$ con U, V G -conjuntos, $\eta((U, \varphi) + (V, \psi)) = \eta(U, \varphi) + \eta(V, \psi)$.

Esto se cumple pues para $\varphi \sqcup \psi : U \sqcup V \rightarrow X$ tenemos que $(\varphi \sqcup \psi)^{-1}(x) = \varphi^{-1}(x) \sqcup \psi^{-1}(x)$.

- $\eta(1_{B(GX)}) = 1_{\prod_x B(G_x)}$.

La unidad de $B(GX)$ es el elemento $(X, 1_X)$ con $1_X : X \rightarrow X$ la identidad pues para (U, φ) el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & X \\ 1_U \downarrow & & \downarrow 1_X \\ U & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

es un diagrama de producto fibrado.

Tenemos que $1_X^{-1}(x) = \{x\}$, el G_x conjunto trivial, por lo tanto,

$$\eta(X, 1_X) = \prod_{x \in [G \setminus X]} G_x \circ = 1_{\oplus B(G_x)}$$

- Es biyectiva. El morfismo $\zeta : \prod_{x \in [G \setminus X]} B(G_x) \rightarrow B(GX)$ definido por

$$\zeta \left(\prod_x T_x \right) = \left(\bigsqcup_x i_{G_x}^G T_x, \varphi_\zeta \right)$$

Donde $i_{G_x}^G T_x$ es la inducción de G_x en G del G_x -conjunto T_x , es decir, es el G -conjunto de G_x -órbitas de $G \times T_x$ para la acción de G_x en $G \times T_x$ definida por

$$a(g, t) = (ga^{-1}, at)$$

Denotaremos la G_x -órbita de (g, t) por $[g, t]$.

El morfismo φ_ζ está definido como

$$\varphi_\zeta[g, t_x] = gx \text{ para } t_x \in T_x$$

Veamos que $\zeta\eta$ es la identidad

$$\zeta\eta(U, \varphi) = \zeta \left(\prod_{x \in [G \setminus X]} \varphi^{-1}(x) \right) \quad (1.1)$$

$$= \left(\bigsqcup_{x \in G \setminus X} G \times_{G_x} \varphi^{-1}(x), \varphi_\zeta \right) \quad (1.2)$$

Tomando $\xi : \left(\bigsqcup_{x \in G \setminus X} G \times_{G_x} \varphi^{-1}(x), \varphi_\zeta \right) \rightarrow (U, \varphi)$ definida como

$$\xi[g, u]_x = gu$$

y con inversa γ definida como

$$\gamma(u) = [a, a^{-1}u]_x$$

para $\varphi(u) = ax$ con $x \in [G \setminus X]$. γ está bien definida puesto que $[G \setminus X]$ es un conjunto de representantes de las órbitas.

De esta forma el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{x \in [G \setminus X]} i_{G_x}^G \varphi^{-1}(x) & & \\ \uparrow \gamma & \searrow \varphi_\zeta & \\ U & & X \\ \downarrow \xi & \nearrow \varphi & \end{array}$$

Análogamente, $\eta\zeta(\prod_x T_x) = x$ puesto que si $\varphi_\eta[g, t_x] = x$ entonces $g \in G_x$, por lo tanto, $\varphi_\zeta^{-1}(x) \cong T_x$.

- Veamos que η es un morfismo de anillos. Para $(U, \varphi), (V, \psi)$ generadores en $B(GX)$ y $(W, \varphi\alpha)$ el producto fibrado de (U, φ) y (V, ψ) , es decir,

$$W = \{(v, u) \in V \times U : \psi(v) = \varphi(u)\}$$

con $\alpha(v, u) = u$ y $\beta(v, u) = v$.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\alpha} & U \\ \beta \downarrow & & \downarrow \varphi \\ V & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

De esta forma tenemos que

$$\eta(W, \alpha\varphi) = \prod_x \alpha\varphi^{-1}(x)$$

Mientras que $(v, u) \in \alpha\varphi^{-1}(x)$ si y sólo si $v \in \psi^{-1}(x)$ y $u \in \varphi^{-1}(x)$, por lo que

$$\alpha\varphi^{-1}(x) = \psi^{-1}(x) \times \varphi^{-1}(x)$$

de esta forma $\eta((U, \varphi)(V, \psi)) = \eta(U, \varphi)\eta(V, \psi)$. □

1.2. Biconjuntos

Definición 1.6. Sean G, H grupos finitos, un (H, G) -conjunto U es un $H \times G^{op}$ -conjunto. Lo denotaremos por ${}_H U_G$.

Un (H, G) biconjunto U viene siendo un H -conjunto a la izquierda y un G -conjunto a la derecha tal que las dos acciones son asociativas en el sentido de que $h(ug) = (hu)g$.

Definición 1.7. Dados G, H, K grupos finitos, U un (H, G) biconjunto y V un (K, H) -biconjunto, definimos el (K, G) -biconjunto $V \times_H U$ como $H \backslash (V \times U)$, el conjunto de H -órbitas de $V \times U$ donde la acción de H en $V \times U$ está definida como

$$h(v, u) = (vh^{-1}, hu).$$

La H -órbita de (v, u) será denotada por $[v, u]$.

Proposición 1.8. Dados G, H, K grupos finitos, U un (H, G) biconjunto y V un (K, H) -biconjunto, tenemos que $V \times_H U$ es un (K, G) -biconjunto.

Demostración. Las acciones de K y G vienen dadas por

$$k[v, u]g = [kv, ug]$$

que están bien definidas puesto que para $[v, u] = [vh, h^{-1}u]$ tenemos

$$[kvh, h^{-1}ug] = [kv, ug]$$

Y son acciones de grupo puesto que $(1_K, 1_G)$ actúa trivialmente y dados $(a, b), (c, d) \in K \times G$ tenemos

$$\begin{aligned} c(a[v, u]b)d &= c[av, ub]d \\ &= [cav, ubd] \\ &= ca[v, u]bd \end{aligned}$$

□

Proposición 1.9. Sean G, H, K, L grupos finitos y sean ${}_H U_G, {}_K V_H, {}_L W_K$ biconjuntos, entonces

$$W \times_K (V \times_H U) \cong (W \times_K V) \times_H U$$

como (L, G) biconjuntos.

Demostración. El isomorfismo viene dado por

$$\begin{aligned} \varphi : W \times_K (V \times_H U) &\rightarrow (W \times_K V) \times_H U \\ [w, [v, u]] &\mapsto [[w, v], u] \end{aligned}$$

□

Proposición 1.10. Sean G, H grupos finitos y U un (H, G) biconjunto, entonces

$$\begin{aligned} U \times_G {}_G G_G &\cong U \\ {}_H H_H \times_H U &\cong U \end{aligned}$$

Demostración. El isomorfismo $U \times_G G \rightarrow U$ viene dado por $[u, g] \mapsto ug$ mientras que para $H \times_H U \rightarrow U$ viene dado por $[h, u] \mapsto hu$. □

Ejemplo 1.11 (Biconjuntos básicos). ■ Dado X un G -conjunto, por definición X es un $(G, 1)$ -biconjunto.

- Para $\varphi : H \rightarrow G$ y $\psi : K \rightarrow G$ morfismos de grupos finitos, G tiene estructura de (H, K) -biconjunto dada por

$$h \cdot g \cdot k = \varphi(h)g\psi(k),$$

denotamos este biconjunto por ${}_{H\varphi}G_{\psi K}$.

- Para $H \leq G$, ${}_G G_H$ es llamada la inducción de H en G y es denotada por Ind_H^G
- ${}_H G_G$ es llamada la restricción de G en H y es denotada por Res_H^G
- Para $K \triangleleft G$, ${}_{G/K} (G/K)_G$ es llamada la deflación de G en G/K y es denotada por $\text{Def}_{G/K}^G$.
- ${}_G (G/K)_{G/K}$ es llamada la inflación de G/K en G y es denotada por $\text{Inf}_{G/K}^G$.
- Sean G, L grupos finitos $\varphi : L \rightarrow G$ un isomorfismo de grupos, denotaremos a ${}_G G_{\varphi L}$ por $\text{Iso}(\varphi)$.

Proposición 1.12. Sean G, H, K grupos finitos y ${}_H U_G, {}_H U'_G, {}_K V_H$ biconjuntos, entonces

$$V \times_H (U \sqcup U') = (V \times_H U) \sqcup (V \times_H U')$$

Demostración. Para $[v, u] \in V \times_H (U \sqcup U')$ tenemos que $u \in U$ ó $u \in U'$, por tanto estos (K, G) -biconjuntos son iguales. \square

Observación 1.13. El producto \times_H puede ser bilinealmente extendido a

$$\times_H : B(K \times H^{op}) \times B(H \times G^{op}) \rightarrow B(K \times G^{op})$$

puesto que para $U, U', (H, G)$ -biconjuntos y $V, (K, H)$ -biconjunto,

$$V \times_H (U \sqcup U') \cong (V \times_H U) \sqcup (V \times_H U')$$

como (K, G) -biconjuntos.

Lema 1.14. Sean G, H grupos finitos y sea $L \leq (H \times G)$, definimos los siguientes grupos

- $A = p_1(L) = \{g \in G : \exists h \in H, (g, h) \in L\} \leq G$
- $A_1 = k_1(L) = \{g \in G : (g, 1) \in L\} \triangleleft A$
- $C = p_2(L) = \{h \in H : \exists g \in G, (g, h) \in L\} \leq H$
- $C_1 = p_1(L) = \{h \in H : (1, h) \in L\} \triangleleft C$
- $B = A/A_1$
- $B' = C/C_1$

Entonces $\varphi : B \rightarrow B'$ definida por $\varphi(aA_1) = cC_1$ si $(a, c) \in L$ es un isomorfismo.

Demostración.

$$\varphi(aA_1) = cC_1 \text{ si } (a, c) \in L$$

Si $(g, h), (g, h') \in L$, entonces $(1, h^{-1}h') \in L$ por lo que $h^{-1}h' \in C_1$. De esta forma $hC_1 = h'C_1$ por lo que φ está bien definida.

Si $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in L$, entonces

$$\varphi(g_1 g_2 A_1) = h_1 h_2 C_1 = h_1 C_1 h_2 C_1$$

Por lo que φ es un homomorfismo.

El núcleo de este morfismo φ es A_1 y φ es suprayectiva ya que si $cC_1 \in C/C_1$ entonces existe $a \in A$ tal que $(a, c) \in L$, por lo que $\varphi(aA_1) = cC_1$. \square

El papel fundamental de los biconjuntos mostrados en el ejemplo 1.11 viene del siguiente teorema

Teorema 1.15 (Descomposición de Bouc). *Sea ${}_G U_H$ un biconjunto transitivo con $U \cong (G \times H)/L$, entonces tenemos que*

$$U \cong \text{Ind}_A^G \times_A \text{Inf}_B^A \times_B \text{Iso}(\varphi^{-1}) \times_{B'} \text{Def}_{B'}^C \times_C \text{Res}_C^H$$

Para

- $A = p_1(L) = \{g \in G : \exists h \in H, (g, h) \in L\}$
- $A_1 = k_1(L) = \{g \in G : (g, 1) \in L\}$
- $C = p_2(L) = \{h \in H : \exists g \in G, (g, h) \in L\}$
- $C_1 = p_1(L) = \{h \in H : (1, h) \in L\} \triangleleft C$
- $B = A/A_1$
- $B' = C/C_1$
- $\varphi : B \rightarrow B'$ es el isomorfismo dado por $aA_1 \mapsto cC_1$ si $(a, c) \in L$.

Demostración. Definimos

$$\psi : (G \times H)/L \rightarrow {}_G G_A \times_A A B_B \times_B B B_{B'} \times_{B'} B'_C \times_C C H_H$$

como $\psi((g, h)L) = [g, 1, 1, 1, h^{-1}]$.

- ψ está bien definida.
- Sean $(l_1, l_2) \in L$ entonces $l_1 \in A$ y $l_2 \in C$ y $\varphi^{-1}(l_2^{-1}C_1) = l_1^{-1}A_1$, por lo que

$$\begin{aligned} \psi((gl_1, hl_2)L) &= [gl_1, A_1, A_1, C_1, l_2^{-1}h^{-1}] \\ &= [g, l_1A_1, A_1, l_2^{-1}C_1, h^{-1}] \\ &= [g, A_1, l_1A_1, l_2^{-1}C_1, 1, h^{-1}] \\ &= [g, A_1, (l_1A_1)(l_1^{-1}A_1), C_1, 1, h^{-1}] \\ &= [g, 1_B, 1_B, 1_{B'}, h^{-1}] \end{aligned}$$

- ψ es de (G, H) - biconjuntos.

Sean $(a, c), (g, h) \in G \times H$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \psi(g \cdot (a, c)L \cdot h) &= \varphi((g, h^{-1}) \cdot (a, c)L) \\
 &= \varphi((ga, h^{-1}c)L) \\
 &= [ga, 1, 1, 1, c^{-1}h] \\
 &= g[a, 1, 1, 1, c^{-1}]h \\
 &= g \cdot \varphi((a, c)L) \cdot h
 \end{aligned}$$

- ψ es invertible. Sea

$$\eta : {}_G G_A \times_A A_B \times_B B_{B'} \times_{B'} B'_C \times_C C H_H \rightarrow (G \times H)/L$$

definida por

$$\eta[g, a_1 A_1, a_2 A_1, c C_1, h] = (ga_1 a_2, h^{-1} c^{-1})L$$

Entonces η es la inversa de ψ .

□

A la descomposición de un biconjunto transitivo como producto de biconjuntos básicos le llamaremos descomposición de Bouc.

Definición 1.16. Sea R un anillo conmutativo, definimos la categoría de biconjuntos con coeficientes en R , denotada por Ω_R como la categoría con objetos grupos finitos y para G, H grupos finitos,

$$\text{Hom}_{\Omega_R}(G, H) = RB(H \times G^{op}) = R \otimes_{\mathbb{Z}} B(H \times G^{op}).$$

Para G, H, K grupos finitos, la composición

$$\circ : RB(K \times H^{op}) \times RB(H \times G^{op}) \rightarrow RB(K \times G^{op})$$

está dada por \times_H .

Notemos que las clases de isomorfismo de Ω_R son las mismas que de Gr donde Gr denota a la categoría de grupos finitos.

Proposición 1.17. Sean G, H grupos finitos, entonces $G \cong H$ en Gr sí y sólo sí $G \cong H$ en Ω_R

Demostración. Supongamos que $\varphi : G \rightarrow H$ es un isomorfismo de grupos, entonces ${}_H\text{Iso}(\varphi)_G$ es un isomorfismo de G en H en la categoría Ω_R con inversa ${}_G\text{Iso}(\varphi^{-1})_H$.

Supongamos que □

Definición 1.18. *Definimos la categoría de funtores en biconjuntos con valores en la categoría $R - \text{Mod}$ de módulos sobre R como la categoría de funtores R -lineales $\text{Fun}_R(\Omega_R, R - \text{Mod})$.*

1.3. Funtores de Mackey

En esta sección veremos dos definiciones de functor de Mackey y su equivalencia.

Definición 1.19 (Dress). *Sea R un anillo conmutativo y G un grupo finito, un functor de Mackey sobre G es un functor bivalente de G -set en $R - \text{Mod}$, es decir, $M = (M_*, M^*)$ donde M_* es un functor covariante de G -set en $R - \text{Mod}$, M^* es un functor contravariante de G -set en $R - \text{Mod}$ con las siguientes propiedades:*

1. $M_*(X) = M^*(X)$ para todo G -conjunto X (denotaremos el valor común de M_* y M^* en X como $M(X)$).
2. (Aditividad) Para X, Y G -conjuntos, sean $i_X : X \rightarrow X \sqcup Y$, $i_Y : Y \rightarrow X \sqcup Y$ las inclusiones respectivas, entonces el morfismo $M^*(i_X) \oplus M^*(i_Y)$ es un isomorfismo de $M(X \sqcup Y)$ en $M(X) \oplus M(Y)$ con inversa $M_*(i_X) \oplus M_*(i_Y)$

$$M(X \sqcup Y) \xrightarrow{M^*(i_X) \oplus M^*(i_Y)} M(X) \oplus M(Y) \xrightarrow{M_*(i_X) \oplus M_*(i_Y)} M(X \sqcup Y)$$

3. Sea

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & & \downarrow c \\ Z & \xrightarrow{d} & T \end{array}$$

un diagrama de producto fibrado en G -set, entonces

$$M_*(b)M^*(a) = M^*(d)M_*(c)$$

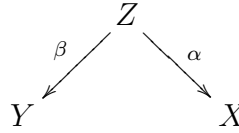
Un morfismo de funtores de Mackey $f : M \rightarrow N$ es una transformación natural de funtores bivariantes, es decir, $f = \{f_X\}_X$, $f_X : M(X) \rightarrow N(X)$ el siguiente diagrama conmuta para X, Y G -conjuntos y $a : X \rightarrow Y$, $b : Y \rightarrow X$ morfismos de G -conjuntos.

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xrightarrow{f_X} & N(X) \\ M^*(b) \uparrow & & \downarrow M_*(a) \\ M(Y) & \xrightarrow{f_Y} & N(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & M^*(b) \uparrow \\ & & \downarrow N_*(a) \end{array}$$

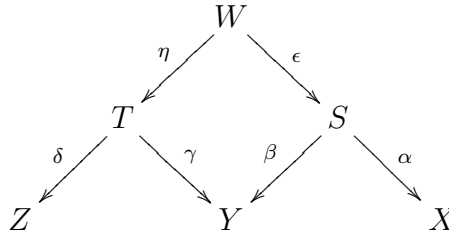
la composición de morfismos es la composición de funtores.

En esta sección denotaremos la categoría de funtores de Mackey de esta definición por $Dress_R(G)$

Definición 1.20. Sea G un grupo finito y sea R un anillo conmutativo, definimos la categoría $Span_{G,R}$ como $R \otimes Span(G - set)$ donde $Span(G - set)$ es la categoría con objetos G -conjuntos finitos y para X, Y G -conjuntos, $Hom_{Span_G}(X, Y) = B(G(Y \times X))$. Para X, Y, Z G -conjuntos, $B(Y \times X)$ es generado por $(S, \beta \times \alpha)$



Para $(T, \delta \times \gamma) : Y \rightarrow Z$ la composición $(T, \delta \times \gamma)(S, \beta \times \alpha)$ está definida por el producto fibrado de β y γ .



$$(W, \delta\eta \times \alpha\epsilon).$$

Observación 1.21. Para $\langle {}_G T, \varphi \rangle \in Span(G - set)$, el morfismo de G -conjuntos $\pi : T \rightarrow {}_G(Y \times X)$ es igual a $b \times a$ donde a, b son las proyecciones

de φ , es decir,

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\varphi} & Y \times X & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ & & \pi_Y \downarrow & & \\ & & Y & & \end{array}$$

$$a = \pi_X \varphi$$

$$b = \pi_Y \varphi$$

de forma que $\varphi = (t) = b \times a(t) = (b(t), a(t))$. por lo que podemos denotar a los elementos de $\text{Span}(G - \text{set})$ que son de la forma $\langle T, b \times a \rangle$ como $\langle T, a, b \rangle$ donde $a : T \rightarrow X$, $b : T \rightarrow Y$ y a, b son morfismos de G -conjuntos.

Definición 1.22 (Lindner). definimos la categoría de funtores de Mackey sobre G con coeficientes en R como la categoría de funtores R -lineales

$$\text{Fun}_R(\text{Span}_{G,R}, R - \text{Mod}).$$

La denotaremos por $\text{Mack}_R(G)$

Teorema 1.23. Sea G un grupo finito y R un anillo conmutativo, entonces

$$\text{Dress}_R(G) \cong \text{Mack}_R(G)$$

Demostración. Sea $\eta : \text{Dress}_R(G) \rightarrow \text{Mack}_R(G)$ el functor definido en objetos como $\eta(M)(X) = M(X)$. Para $(T, b \times a) : X \rightarrow Y$

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ b \swarrow & & \searrow a \\ Y & & X \end{array}$$

definimos $\eta(M) \langle T, a, b \rangle : M(X) \rightarrow M(Y)$ como $\eta(M) \langle T, a, b \rangle = M_*(a)M^*(b)$

Definimos η en un morfismo $f : M \rightarrow N$, como $\eta(f)_X = f_X$.

- $\eta(M)$ es un functor de $S_{G,R}$ en $R - \text{Mod}$ pues para $(T, b \times a), (S, d \times c)$ generadores de $B_G(Y \times X)$ y $B(Z \times Y)$ respectivamente tenemos que

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & f \swarrow & & \searrow e & \\ & S & & T & \\ d \swarrow & & c \searrow & b \swarrow & \searrow a \\ Z & & Y & & X \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\eta(M)(S, d \times c)(T, b \times a) &= \eta(M)(W, df \times ae) = M_*(df)M^*(ae) \\
&= M_*(d)M_*(f)M^*(e)M^*(a) \\
&= M_*(d)M^*(c)M_*(b)M^*(a) \\
&= \eta(M)(S, d \times c)\eta(M)(T, b \times a)
\end{aligned}$$

- Por definición η es fiel y pleno. Para ver que η es denso, Sea F un funtor en $Mack_R(G)$ y $\rho(F)$ el funtor en $Dress_R(G)$ definido por $\rho(F)$ en objetos como $\rho(T)(X) = T(X)$ y $\rho(F)$ en morfismos

$$\begin{aligned}
\rho(F)_*(a) &= F(X, a \times 1_X) \\
\rho(F)^*(a) &= F(X, 1_X \times a)
\end{aligned}$$

Para $a : X \rightarrow Y$ de G -conjuntos.

Entonces $\eta(\rho(F)) = F$.

Sea f una transformación natural entre funtores en $Dress_R(G)$, entonces $f : M \rightarrow N$ es una transformación natural entre funtores en $Mack_R(G)$

□

Capítulo 2

Categoría de biconjuntos generalizada

2.1. Definición de la categoría \mathcal{C}_R

En el presente capítulo definimos nuestra categoría de biconjuntos generalizada. Esta categoría será denotada por \mathcal{C}_R . Probaremos propiedades básicas e identificaremos ciertas clases de isomorfismo en \mathcal{C}_R , más específicamente, dado G un grupo finito y $H \leq G$, damos un isomorfismo explícito entre $(G, G/H)$ y $(H, H/H)$ que usaremos en la sección de estructura aditiva para identificar todas las clases de isomorfismo en \mathcal{C}_R y finalmente identificar a \mathcal{C}_R con $Add(\mathcal{D}_R)$.

Definición 2.1. Sea R un anillo conmutativo con 1, definimos la categoría $\mathcal{C} = \mathcal{C}_R$ con objetos

$$\text{ob}\mathcal{C}_R = \{(G, X) : G \text{ es un grupo finito, } X \text{ es un } G\text{-conjunto}\}$$

(G, X) será denotado por ${}_G X$.

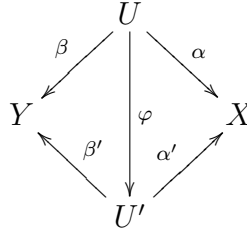
Para ${}_G X, {}_H Y \in \text{ob}\mathcal{C}_R$ definimos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_G X, {}_H Y)$ como

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_G X, {}_H Y) = RB({}_H \times G^{\text{op}} Y \times X).$$

Un morfismo entre ${}_G X$ y ${}_H Y$ es una combinación R lineal de clases de equivalencia de (U, α, β) , donde ${}_H U_G$ es un (H, G) -biconjunto, $\alpha : U \rightarrow X$, $\beta : U \rightarrow Y$ son funciones tales que $\alpha(hug) = g^{-1}\alpha(u)$, $\beta(hug) = h\beta(u)$ para cada $h \in H$, $g \in G$ y $u \in U$.

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \beta \swarrow & & \searrow \alpha \\ Y & & X \end{array}$$

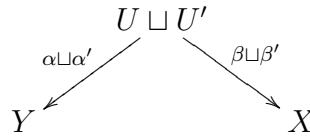
$(U, \alpha, \beta) \simeq (U', \alpha', \beta')$ si existe $\varphi : U \rightarrow U'$ isomorfismo de biconjuntos que hace conmutar el siguiente diagrama:



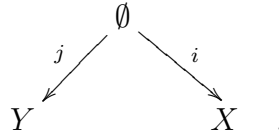
Denotaremos las clases de equivalencia de (U, α, β) por $\langle U, \alpha, \beta \rangle$.

La suma en parejas de morfismos $\langle U, \alpha, \beta \rangle, \langle U', \alpha', \beta' \rangle$, de (G, X) a (H, Y) está dada por

$$\langle U, \alpha, \beta \rangle + \langle U', \alpha', \beta' \rangle = \langle U \sqcup U', \alpha \sqcup \alpha', \beta \sqcup \beta' \rangle$$



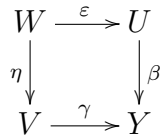
Para ${}_G X, {}_H Y \in \text{ob} \mathcal{C}$, el morfismo cero viene dado por $\langle \emptyset, i, j \rangle$ donde i, j son los únicos morfismos del vacío en X y Y respectivamente.

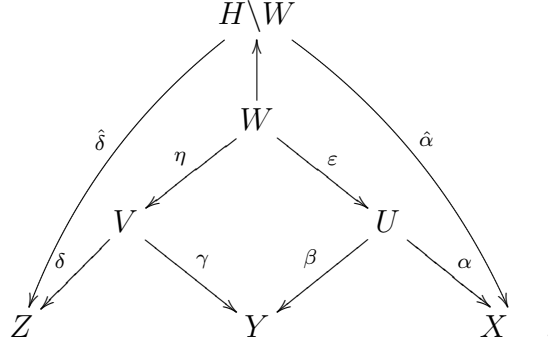


La regla de composición en \mathcal{C} , para morfismos de la forma

$$(G, X) \xrightarrow{\langle U, \alpha, \beta \rangle} (H, Y) \xrightarrow{\langle V, \gamma, \delta \rangle} (K, Z)$$

está dada por las H -órbitas del producto fibrado de β y γ (como H -morfismos).



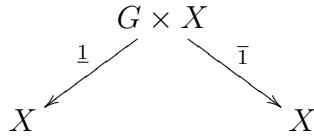


donde $\hat{\delta}, \hat{\alpha}$ están definidos como $\hat{\delta}([v, u]) = \delta(v)$, $\hat{\alpha}([v, u]) = \alpha(u)$ donde

$$H \setminus W = \{[v, u] \in V \times_H U : \gamma(v) = \beta(u)\}$$

bilinealmente extendido a \mathcal{C} .

Para $(G, X) \in \text{ob}\mathcal{C}$, el morfismo identidad está dado por $\langle G \times X, \bar{\mathbb{1}}, \underline{\mathbb{1}} \rangle$



Donde ${}_G G \times X_G$ es el (G, G) -biconjunto dado por la acción

$$a(g, x)b = (agb, ax)$$

$\underline{\mathbb{1}}, \bar{\mathbb{1}} : G \times X \rightarrow X$ están dados por

$$\bar{\mathbb{1}}(g, x) = g^{-1}x$$

$$\underline{\mathbb{1}}(g, x) = x$$

Observación 2.2. Notemos que para ${}_G X, {}_H Y \in \text{ob}\mathcal{C}_R$ los elementos de $RB({}_H \times_G Y \times X)$ son combinaciones R -lineales de clases de isomorfismo de parejas (U, τ) donde U es un (H, G) biconjunto y $\tau : U \rightarrow Y \times X$ es un morfismo de $H \times G$ -biconjuntos. Tomando p_X y p_Y como las proyecciones $p_X : Y \times X \rightarrow X$ y $p_Y : Y \times X \rightarrow Y$ respectivamente obtenemos α y β a partir de τ que cumplen con las propiedades $\alpha(hug) = g^{-1}\alpha(u)$ y $\beta(hug) = h\beta(u)$ como $\alpha := p_X \tau$ y $\beta = p_Y \tau$, es decir, $\tau = \beta \times \alpha$.

Definición 2.3. Sean ${}_G T, {}_G X$ G -conjuntos y $f : T \rightarrow X$ morfismo de G -conjuntos, definimos $\bar{f} : G \times T \rightarrow X$ $((G \times A)_G)^\circ \rightarrow B$ y $\underline{f} : {}_G(G \times A) \rightarrow B$ como

$$\bar{f}(g, t) = g^{-1}f(t)$$

$$\underline{f}(g, t) = f(t)$$

de manera que si $\langle T, a, b \rangle \in \text{Span}(G\text{-set})$, donde

$$\begin{aligned} a : T &\rightarrow X \\ b : T &\rightarrow Y \end{aligned}$$

son morfismos de G -conjuntos, entonces $\langle G \times T, \bar{a}, \bar{b} \rangle \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_G X, {}_H Y)$. El morfismo identidad $1_{G \times T}$ está definido de esta forma.

Observación 2.4. Sea G un grupo finito, ${}_G \circ$ denotará a $(G, G/G) \in \text{ob}\mathcal{C}$. Sean G, H grupos finitos, notemos que por definición

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_G \circ, {}_H \circ) \cong \text{RB}(H \times G^{\text{op}})$$

como R -módulos puesto que para un morfismo $\langle U, \alpha, \beta \rangle : {}_G \circ \rightarrow {}_H \circ$ tenemos que α y β son constantes. Si denotamos como p_G a la función constante $p_G : U \rightarrow G/G$, entonces $\langle U, \alpha, \beta \rangle = \langle U, p_G, p_H \rangle$ y la clase de equivalencia de $\langle U, \alpha, \beta \rangle$ está en correspondencia con la clase de isomorfismo de U como (H, G) -biconjuntos.

Proposición 2.5. \mathcal{C}_R es una categoría preaditiva.

Demostración. Probaremos primero que \simeq es una relación de equivalencia.

Reflexiva : Sea (U, α, β) como antes, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

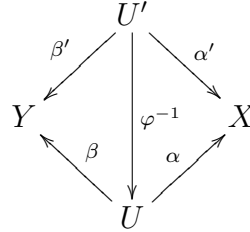
$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \beta \swarrow & & \searrow \alpha \\ Y & & X \\ \beta \swarrow & & \searrow \alpha \\ & U & \end{array}$$

entonces $(U, \alpha, \beta) \simeq (U, \alpha, \beta)$

- Simétrica: Sea $(U, \alpha, \beta) \simeq (U', \alpha', \beta')$, entonces existe $\varphi : U \rightarrow U'$ isomorfismo de biconjuntos que hace conmutar el siguiente diagrama:

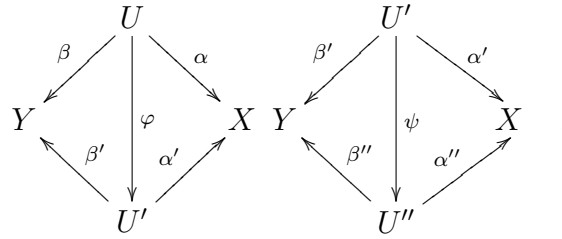
$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \beta \swarrow & & \searrow \alpha \\ Y & & X \\ \beta' \swarrow & & \searrow \alpha' \\ & U' & \end{array}$$

Por lo que φ^{-1} hace conmutar el siguiente diagrama:

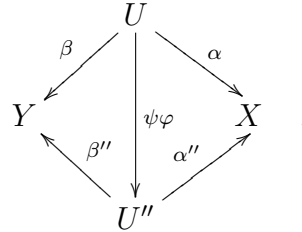


entonces $(U', \alpha', \beta') \simeq (U, \alpha, \beta)$

- Transitiva: Sean $(U, \alpha, \beta) \simeq (U', \alpha', \beta')$ y $(U', \alpha', \beta') \simeq (U'', \alpha'', \beta'')$, con $\varphi : U \rightarrow U'$, $\psi : U' \rightarrow U''$ isomorfismo de biconjuntos que hace conmutar el siguiente diagrama:



Entonces $\psi\varphi$ hace conmutar el siguiente diagrama:



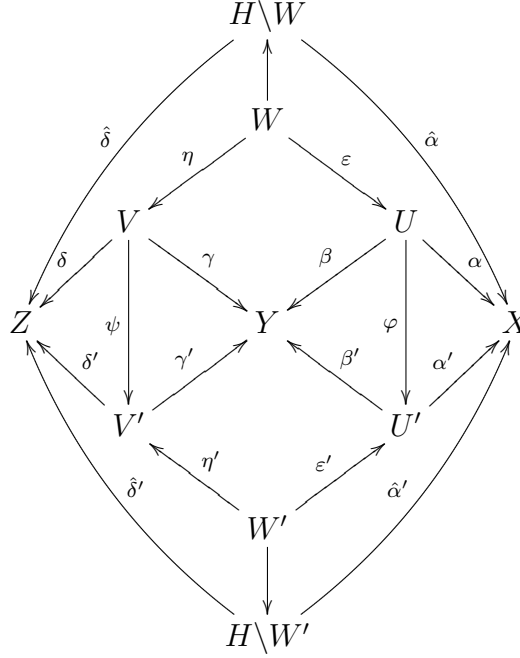
Por lo tanto $(U, \alpha, \beta) \simeq (U'', \alpha'', \beta'')$

Ahora probaremos que la composición está bien definida en \mathcal{C} .

Sean

$$\begin{aligned}
 \langle U, \alpha, \beta \rangle, \langle U', \alpha', \beta' \rangle &\in \text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_G X, {}_H Y) \\
 \langle V, \gamma, \delta \rangle, \langle V', \gamma', \delta' \rangle &\in \text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_H Y, {}_K Z)
 \end{aligned}$$

con $\varphi : (U, \alpha, \beta) \simeq (U', \alpha', \beta')$, $\psi(V, \gamma, \delta) \simeq (V', \gamma', \delta')$ donde $\varphi : U \rightarrow U'$, $\psi : V \rightarrow V'$ son los isomorfismos de (H, G) -biconjuntos y (K, H) -biconjuntos respectivamente que dan la equivalencia. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:



donde

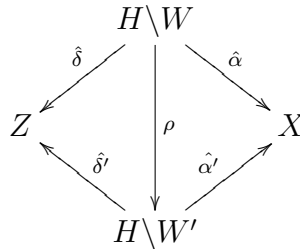
$$W = \{(v, u) \in V \times U : \beta(u) = \gamma(v)\} \quad W' = \{(v, u) \in V' \times U' : \beta'(u) = \gamma'(v)\}$$

La acción de H en W está dada por $h(v, u) = (vh^{-1}, hu)$, por lo que identificar $H \setminus W$ con el subconjunto de $V \times_H U$ definido como

$$\{[v, u] \in V \times_H U : \gamma(v) = \beta(u)\}.$$

La estructura de (K, G) - biconjunto de $H \setminus W$ es la estructura de $V \times_H U$ restringida a $H \setminus W$.

La función $\rho : H \setminus W \rightarrow H \setminus W'$ dada por $\rho(v, u) = (\psi(v), \varphi(u))$ es el isomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

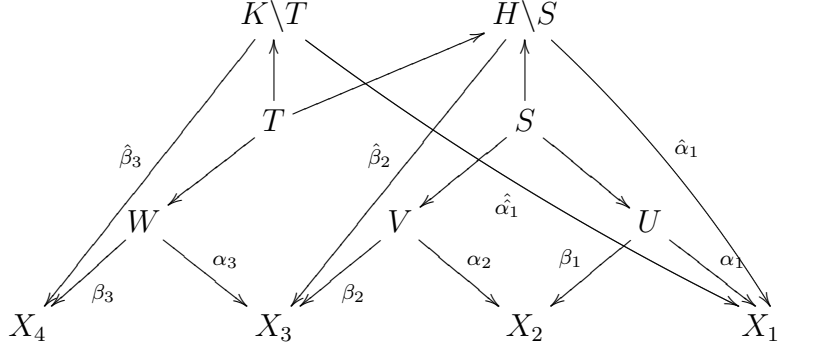


Por lo tanto, la composición de morfismos en \mathcal{C} está bien definida.

La composición es asociativa:

Sea $(G, X_1) \xrightarrow{\langle U, \alpha_1, \beta_1 \rangle} (H, X_2)$, $(H, X_2) \xrightarrow{\langle V, \alpha_2, \beta_2 \rangle} (K, X_3)$, $(K, X_3) \xrightarrow{\langle W, \alpha_3, \beta_3 \rangle} (L, X_4)$

Entonces el siguiente diagrama conmuta para $\langle W, \alpha_3, \beta_3 \rangle \langle V, \alpha_2, \beta_2 \rangle \langle U, \alpha_1, \beta_1 \rangle$



En este caso $\langle W, \alpha_3, \beta_3 \rangle \langle V, \alpha_2, \beta_2 \rangle \langle U, \alpha_1, \beta_1 \rangle = \langle K \setminus T, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_3 \rangle$

donde

$$K \setminus T = \{[w, (v, u)] \in W \times_K (V \times_H U) : \alpha_3(w) = \beta_2(v), \alpha_2(v) = \beta_1(u)\}$$

$$\hat{\beta}_3([w, (v, u)]) = \beta_3(w), \hat{\alpha}_1([w, (v, u)]) = \alpha_1(u)$$

mientras para

$$\langle \langle W, \alpha_3, \beta_3 \rangle \langle V, \alpha_2, \beta_2 \rangle \langle U, \alpha_1, \beta_1 \rangle = \langle H \setminus R, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_4 \rangle,$$

donde el (L, G) -biconjunto

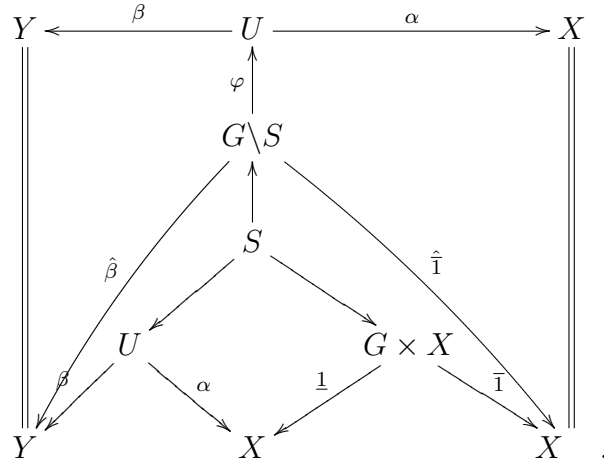
$$H \setminus R = \{[(w, v), u] \in (W \times_K V) \times_H U : \alpha_3(w) = \beta_2(v), \alpha_2(v) = \beta_1(u)\}$$

$$\hat{\beta}_4([(w, v), u]) = \beta_4(w), \hat{\alpha}_1([(w, v), u]) = \alpha_1(u).$$

El isomorfismo $[w, (v, u)] \mapsto [(w, v), u]$ hace la equivalencia en este caso.

El morfismo $\langle G \times X, \bar{1}, \underline{1} \rangle$ es la identidad en (G, X) . Para $\langle U, \alpha, \beta \rangle : (G, X) \rightarrow (H, Y)$

Consideremos la función $\varphi : G \setminus S \rightarrow U$ definida por $\varphi([u, (g, x)]) = ug$. Entonces φ es un isomorfismo de (H, G) -biconjuntos que hace conmutar el siguiente diagrama



- El morfismo φ está bien definido:

Para $[u, (g, x)] = [ur, (r^{-1}(g, x))] = [ur, (r^{-1}g, r^{-1}x)]$ tenemos que

$$\varphi([ur, (r^{-1}g, r^{-1}x)]) = ug$$

- El morfismo φ es un morfismo de (H, G) -biconjuntos.

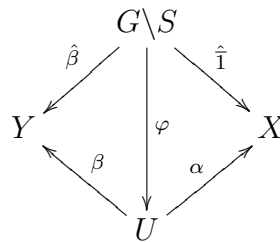
$$G \setminus S = \{[u, (g, x)] \in U \times_G (G \times X) : \alpha(u) = x\}$$

$$\begin{aligned} \varphi(a[u, (g, x)]b) &= \varphi[au, (g, x)]b \\ &= \varphi[au, (gb, x)] \\ &= augb \\ &= a\varphi([u, (g, x)])b \end{aligned}$$

- El morfismo φ es un isomorfismo.

Su inversa está dada por $\psi : u \mapsto [u, (1, \alpha(u))]$.

- El morfismo φ hace conmutar el siguiente diagrama.



$$\begin{aligned} \alpha\varphi([u, (g, \alpha(u))]) &= \alpha(ug) \\ &= g^{-1}\alpha(u) \\ &= \bar{1}(g, \alpha(u)) \quad , \\ \beta\varphi([u, (g, x)]) &= \beta(ug) \\ &= \beta(u) \\ &= \hat{\beta}([u, (g, x)]) \quad . \end{aligned}$$

Se sigue que $\langle U, \alpha, \beta \rangle \langle G \times X, \bar{1}, \underline{1} \rangle = \langle U, \alpha, \beta \rangle$.

Análogamente para $\langle V, \gamma, \delta \rangle : (H, Y) \rightarrow (G, X)$,

$$G \setminus T = \{ [(g, x), v] \in (G \times X) \times_G V : g^{-1}x = \delta(v) \} \quad .$$

Tenemos el isomorfismo $\varepsilon : [(g, \beta(gv)), v] \mapsto gv$ de (G, H) -biconjuntos que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & G \setminus T & \\ \hat{1} \swarrow & \downarrow \varepsilon & \searrow \hat{\gamma} \\ X & & Y \\ \delta \swarrow & & \searrow \gamma \\ & V & \end{array} \quad .$$

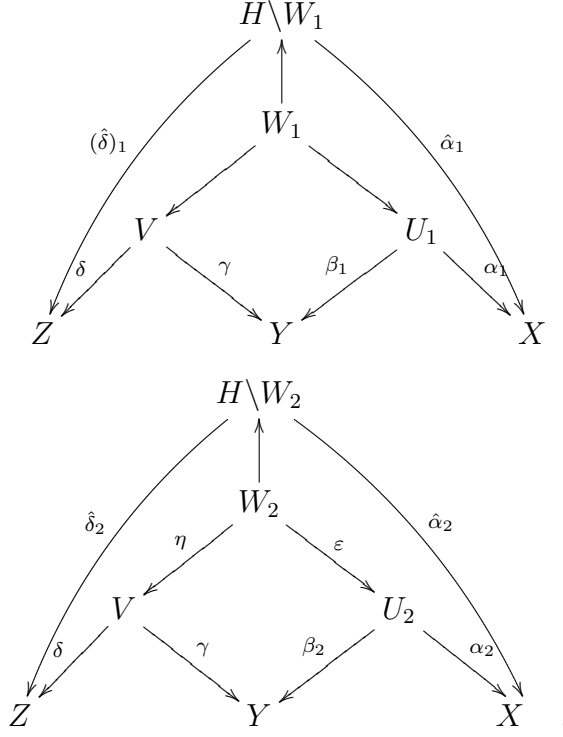
Hemos visto que \mathcal{C}_R es una categoría. Por definición de \mathcal{C}_R cada conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(G \times X, H \times Y)$ es un grupo abeliano.

Sea $\langle U_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle, \langle U_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle : (G, X) \rightarrow (H, Y)$,
 $\langle V, \gamma, \delta \rangle : (H, Y) \rightarrow (K, Z)$, probaremos que

$$\begin{aligned} &\langle V, \gamma, \delta \rangle (\langle U_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle + \langle U_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle) \\ &= \langle V, \gamma, \delta \rangle \langle U_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle + \langle V, \gamma, \delta \rangle \langle U_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle \end{aligned}$$

Consideremos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccccc} & & H \setminus W & & \\ & & \uparrow & & \\ & & W & & \\ & \delta \swarrow & \downarrow & \searrow \widehat{\alpha_1 \sqcup \alpha_2} & \\ & V & & U_1 \sqcup U_2 & \\ \delta \swarrow & \downarrow \gamma & \searrow \beta_1 \sqcup \beta_2 & \searrow \alpha_1 \sqcup \alpha_2 & \\ Z & & Y & & X \end{array}$$



donde

$$\begin{aligned} H \setminus W_i &= \{[v, u] \in V \times_H U_i : \gamma(v) = \beta_i(u)\}, i = 1, 2. \\ H \setminus W &= \{[v, u] \in V \times_H (U_1 \sqcup U_2) : \gamma(v) = (\beta_1 \sqcup \beta_2)(u)\} \\ &= H \setminus W_1 \sqcup H \setminus W_2. \end{aligned}$$

Mientras que $\widehat{\alpha_1 \sqcup \alpha_2} = \hat{\alpha}_1 \sqcup \hat{\alpha}_2$.
 $\hat{\delta} = (\hat{\delta})_1 \sqcup (\hat{\delta})_2$.

La distributividad de la composición sobre la suma por derecha se sigue de manera análoga.

Por lo tanto \mathcal{C}_R es una categoría preaditiva. \square

2.2. Propiedades básicas

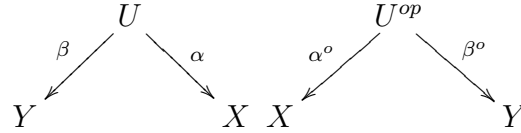
Proposición 2.6. \mathcal{C}_R es una categoría autodual.

Demostración. Lo que haremos será construir un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $F^2 = 1_{\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})}$ de tal forma que F será un isomorfismo de categorías.

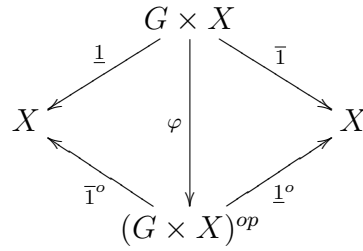
Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ el funtor contravariante definido como identidad en objetos y dado $\langle U, \alpha, \beta \rangle : (G, X) \rightarrow (H, Y)$ morfismo en \mathcal{C} ,

$$F(\langle U, \alpha, \beta \rangle) = \langle U^{op}, \beta^\circ, \alpha^\circ \rangle : (H, Y) \rightarrow (G, X)$$

donde U^{op} es U visto como (G, H) -biconjunto con la acción dada por $g \circ u \circ h = h^{-1}ug^{-1}$. Los morfismos $\alpha^\circ, \beta^\circ$ igual a α y β respectivamente.

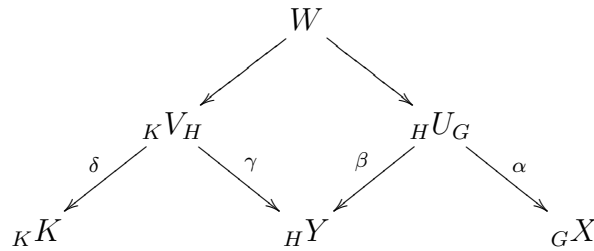


Veamos que $F(1_{(G,X)}) = 1_{(G,X)}$. Sea $\varphi : G \times X \rightarrow (G \times X)^{op}$ definida por $(g, x) \mapsto (g^{-1}, g^{-1}x)$. De esta forma, φ es un isomorfismo de (G, G) -biconjuntos que hace conmutar el siguiente diagrama:

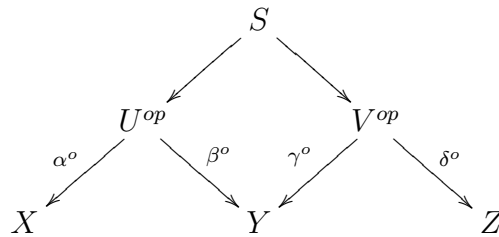


entonces $F(1_{GX}) = \langle (G \times X)^{op}, \underline{1}^\circ, \bar{1}^\circ \rangle = \langle G \times X, \bar{1}, \underline{1} \rangle = 1_{GX}$.

Veamos que $F(\langle V, \gamma, \delta \rangle \langle U, \alpha, \beta \rangle) = F(\langle U, \alpha, \beta \rangle)F(\langle V, \gamma, \delta \rangle)$.



$$F(\langle V, \gamma, \delta \rangle \langle U, \alpha, \beta \rangle) = \langle (H \setminus W)^{op}, \hat{\delta}^\circ, \hat{\alpha}^\circ \rangle$$



$$\begin{aligned} H \setminus S &= \{[u, v] \in U^o \times_H V^o : \beta^o(u) = \gamma^o(v)\} \\ H \setminus W &= \{[v, u] \in V \times_H U : \gamma(v) = \beta^o(u)\} \end{aligned}$$

La función $\varphi : H \setminus S \rightarrow (H \setminus W)^o$ tal que $\varphi([v, u]) = [u, v]$ es un isomorfismo de (K, G) -biconjuntos que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & H \setminus S & \\ \widehat{\alpha}^o \swarrow & \downarrow \varphi & \searrow \widehat{\gamma}^o \\ X & & Z \\ (\hat{\alpha})^o \swarrow & & \searrow (\hat{\gamma})^o \\ & (H \setminus W)^o & \end{array},$$

$$\text{luego } \langle H \setminus S, \widehat{\delta}^o, \widehat{\alpha}^o \rangle = \langle H \setminus W, \widehat{\delta}^o, \widehat{\alpha}^o \rangle.$$

Como $(U^{op})^{op} = U$, tenemos que $F^2 = 1_{Fun\mathcal{C}, \mathcal{C}}$, el morfismo identidad. \square

Lema 2.7. Sea G un grupo finito y sea $H \leq G$, tenemos que

$$(G, G/H) \cong (H, H/H)$$

como objetos en \mathcal{C}

Demostración. El isomorfismo está dado por

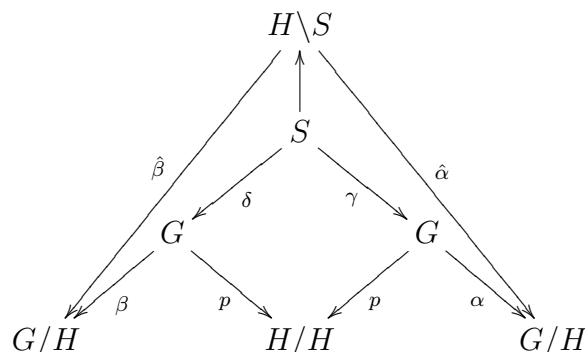
$$\begin{array}{ccc} & {}_H G_G & \\ p \swarrow & & \searrow \alpha \\ H/H & & G/H \end{array}$$

Y su inversa está dada por

$$\begin{array}{ccc} & {}_G G_H & \\ \beta \swarrow & & \searrow p \\ G/H & & H/H \end{array}$$

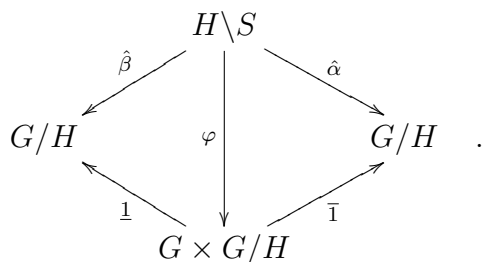
Donde la estructura de (H, G) -biconjunto de G es la de inducción y la de (G, H) -biconjunto está dada por restricción definidas en el ejemplo 1.11.

En este caso $\alpha(a) = a^{-1}H$ y $\beta(a) = aH \forall a \in G$. Mientras que $p : G \rightarrow H/H$ es la función constante $a \mapsto H$.



donde $H \setminus S = G \times_H G$, $\hat{\alpha}([a, b]) = \alpha(b)$, $\hat{\beta}([a, b]) = \beta(a)$.

Sea $\varphi : H \setminus S \rightarrow G \times G/H$ definida por $\varphi([a, b]) = (ab, aH)$. Probaremos que φ es un isomorfismo de (G, G) - biconjuntos que hace conmutar el siguiente diagrama:



- Veamos que φ está bien definida.

$$\begin{aligned}
 [a, b] &= [ah, h^{-1}b] \text{ para } h \in H. \\
 \varphi([ah, h^{-1}b]) &= (ab, aH).
 \end{aligned}$$

- Veamos que φ es un morfismo de (G, G) - biconjuntos.

$$\varphi(r[a, b]s) = \varphi([ra, bs]) = (rabs, raH) = r(ab, aH)s = r\varphi([a, b])s.$$

- Veamos que φ es un isomorfismo.

$$\psi : G \times G/H \text{ definida por } \psi(c, dH) = [d, d^{-1}c] \text{ es su inversa.}$$

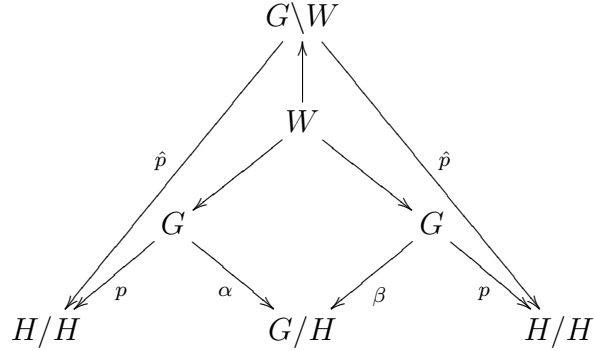
- Veamos que φ hace conmutar el diagrama.

Sea $[a, b] \in H \setminus S$, entonces

$$\bar{1}\varphi([a, b]) = (b^{-1})a^{-1}aH = b^{-1}H = \hat{\alpha}([a, b]).$$

Mientras que $\underline{1}\varphi([a, b]) = aH = \hat{\beta}([a, b])$.

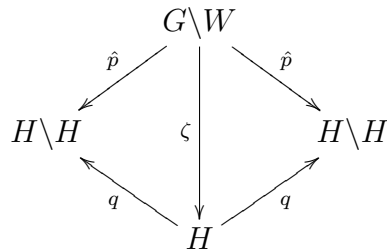
Para $\langle G, \alpha, p \rangle \circ \langle G, p, \beta \rangle$ tenemos que



donde $G \setminus W = \{[a, b] \in G \times_G G : a^{-1}H = bH\}$

Sea $\zeta : G \setminus W \rightarrow H$ definida por $\zeta([a, b]) = ab$.

- Veamos que ζ está bien definida. $[a, b] = [ag, g^{-1}b]$, $ab = agg^{-1}b$.
- Veamos que ζ es un morfismo de (H, H) - biconjuntos. $\zeta(r[a, b]s) = rabt = r\zeta([a, b])t$.
- Veamos que ζ es un isomorfismo con inversa $\xi : H \rightarrow G \setminus W$ $h \mapsto [h, 1]$.
- Veamos que ζ hace conmutar el siguiente diagrama



donde $q : H \rightarrow H \setminus H$ es la función constante (en el caso de morfismos entre objetos que consisten de un solo punto están determinados por el biconjunto).

□

Teorema 2.8. (*Fórmula de Mackey*). Sea $\langle {}_H U_G, \alpha, \beta \rangle \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_G X, {}_H Y)$, $\langle {}_K V_H, \gamma, \delta \rangle \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_H Y, {}_K Z)$ con U, V biconjuntos transitivos tales que $\beta(u_0) = \gamma(v_0)$. Sea $E = (K \times H)_{v_0}$, $D = (H \times G)_{u_0}$, $H' = H_{\beta(u_0)}$, entonces tenemos que

$$\langle {}_K V_H, \gamma, \delta \rangle \langle {}_H U_G, \alpha, \beta \rangle = \left\langle \bigsqcup_{h \in A \setminus H'/B} (K \times G)/(E * {}^{(h,1)}D), \hat{\alpha}, \hat{\delta} \right\rangle$$

donde

$$\begin{aligned} E * {}^{(h,1)}D &= \{(a, b) \in K \times G : \exists c \in H, (a, c) \in E, (c, b) \in {}^{(h,1)}D\} \\ A = p_2(E) &= \{b \in H : \exists a \in K, (a, b) \in E\} \\ B = p_1(D) &= \{a \in H : \exists b \in G, (a, b) \in D\} \\ \hat{\delta}((a, b)E * {}^{(h,1)}D) &= a\delta(v_0) \\ \hat{\alpha}((a, b)E * {}^{(h,1)}D) &= b\alpha(u_0) \end{aligned}$$

Demostración. Primero tenemos que

$$V \times_H U \cong \bigsqcup_{h \in [A \setminus H/B]} (K \times G)/(E * {}^{(h,1)}D)$$

usando el siguiente isomorfismo $[av_0b, cu_0d] \mapsto (a, d^{-1})E * {}^{(h,1)}D$ donde $bc \in AhB$ (Ver [3], Lema 2.3.24, pag 26).

Dado que U y V son biconjuntos transitivos tenemos que $\text{Im}\alpha$ es G -transitivo, $\text{Im}\beta = \text{Im}\gamma$ es H -transitivo e $\text{Im}\delta$ es K -transitivo.

Sean $G' = G_{\alpha(u_0)}$, $K' = K_{\delta(v_0)}$ y $H' = H_{\gamma(v_0)} = H_{\beta(u_0)}$.

Sean $\eta : U \rightarrow (H \times G)/D$ y $\rho : V \rightarrow (K \times H)/E$ isomorfismos de biconjuntos respectivamente y redefiniendo $\alpha' = \alpha\eta^{-1}$, $\beta' = \beta\eta^{-1}$, $\gamma' = \gamma\rho^{-1}$ y $\delta' = \delta\rho^{-1}$ tenemos entonces $\langle U, \alpha, \beta \rangle = \langle (H \times G)/D, \alpha', \beta' \rangle$ y $\langle V, \gamma, \delta \rangle = \langle (K \times H)/E, \gamma', \delta' \rangle$. Además podemos identificar $\text{Im}\delta'$ con K/K' , $\text{Im}\gamma = \text{Im}\beta$ con H/H' y $\text{Im}\alpha$ con G/G' .

Por lo anterior podemos asumir sin pérdida de generalidad que tenemos el siguiente diagrama conmutativo para $\langle V, \gamma, \delta \rangle \langle U, \alpha, \beta \rangle$

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & & \swarrow & & \searrow \\ & (K \times H)/E & & & (H \times G)/D \\ & \swarrow \delta & & \searrow \beta & \searrow \alpha \\ {}_K Z & & {}_H Y & & {}_G X \end{array}$$

donde

- $\delta((a, b)E) = aK' \subset Z$,
- $\gamma((a, b)E) = bH'$,
- $\beta((c, d)D) = cH'$,
- $\alpha((c, d)D) = dG'$.

Veamos que $A \leq H'$.

Sea $b \in A$ entonces existe $a \in K$ tal que $(a, b) \in E$, ahora, $H' = \gamma(E) = \gamma((a, b)E) = bH'$, entonces $b \in H'$.

Análogamente $B \leq H'$.

Ahora, $[(a, b)E, (c, d)D] = [(a, 1)E, (h, d)D] \in V \times_H U$ con $b^{-1}c \in AhB$.

$H \setminus W = \{[(a, 1)E, (h, d)D] \in V \times_H U : hH' = H'\}$

$= H \setminus W = \{[(a, 1)E, (h, d)D] \in V \times_H U : h \in H'\}$ □

2.3. Estructura aditiva de \mathcal{C}_R

En esta sección probaremos que \mathcal{C}_R es una categoría aditiva y que todo objeto en \mathcal{C} puede ser expresado como suma directa de objetos en la categoría de biconjuntos, probaremos además que esta descomposición es única salvo isomorfismo de grupos finitos y esto nos da una forma sencilla de entender las clases de isomorfismo de \mathcal{C}_R que nos permitirán dar una equivalencia entre \mathcal{C}_R y $Add\mathcal{D}_R$.

Proposición 2.9. *Sea G un grupo finito y sean X, X' G -conjuntos finitos. Definimos los siguientes morfismos*

$$(G, X) \xleftarrow[\underline{q}]{\underline{i}} (G, X \sqcup X') \xrightarrow[\underline{j}]{\underline{p}} (G, X')$$

Donde $\underline{i} = \langle G \times X, \overline{1_X}, \underline{i_X} \rangle$, $\underline{j} = \langle G \times X', \overline{1_{X'}}$, $\underline{i_{X'}} \rangle$, $\underline{p} = \langle G \times X', \overline{i_{X'}}$, $\underline{1_{X'}} \rangle$, $\underline{q} = \langle G \times X, \overline{i_X}$, $\underline{1_X} \rangle$ y donde $1_X, i_X, 1_{X'}, i_{X'}$ es la identidad en X , la inclusión de X en $X \sqcup X'$, la identidad en X' y la inclusión de X' en $X \sqcup X'$ respectivamente. Los morfismos satisfacen los axiomas de suma directa en \mathcal{C}_R .

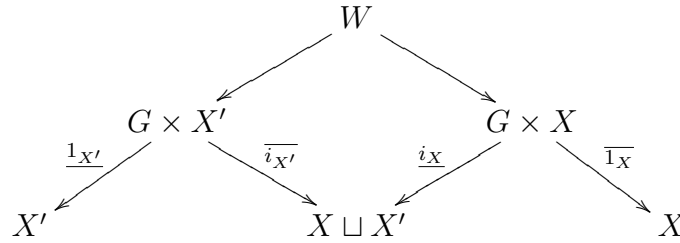
Demostración. Sean S, T G -conjuntos y $f : S \rightarrow T$ morfismo de G conjuntos, las funciones $\overline{f}, \underline{f} : G \times S \rightarrow T$, están definidas como en la definición 2.3, es decir,

$$\begin{aligned} \overline{f}(g, t) &= g^{-1}f(t) \\ \underline{f}(g, t) &= f(t) \quad . \end{aligned}$$

Tenemos que probar que

$$\begin{aligned} pi &= 0 \\ qj &= 0 \\ qi &= 1_{(G,X)} \\ pj &= 1_{(G,X')} \\ iq + jp &= 1_{(G,X \sqcup X')} \quad . \end{aligned}$$

- Veamos que $pi = 0$:

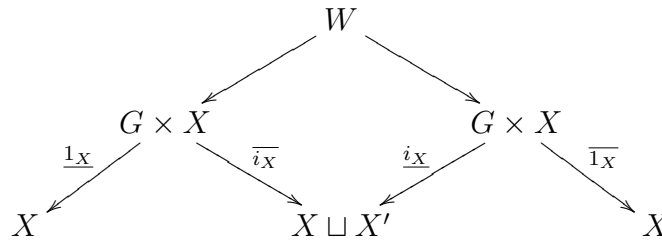


$$G \backslash W = \{[(a, x_1), (b, x_2)] \in (G \times X') \times_G (G \times X) : a^{-1}x_1 = x_2\} = \emptyset$$

Entonces $pi = 0$.

Usando el mismo argumento tenemos que $qj = 0$.

- Veamos que $qi = 1_{GX}$:

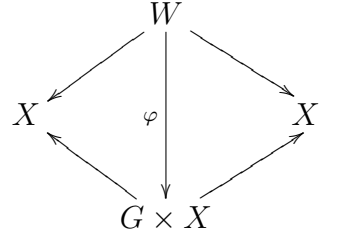


$$G \backslash W = \{[(a, x_1), (b, x_2)] \in (G \times X) \times_G (G \times X) : a^{-1}x_1 = x_2\}$$

Sea $\varphi : G \backslash W \rightarrow G \times X$ definida como

$$\varphi([(a, x_1), (b, x_2)]) = (ab, x_1),$$

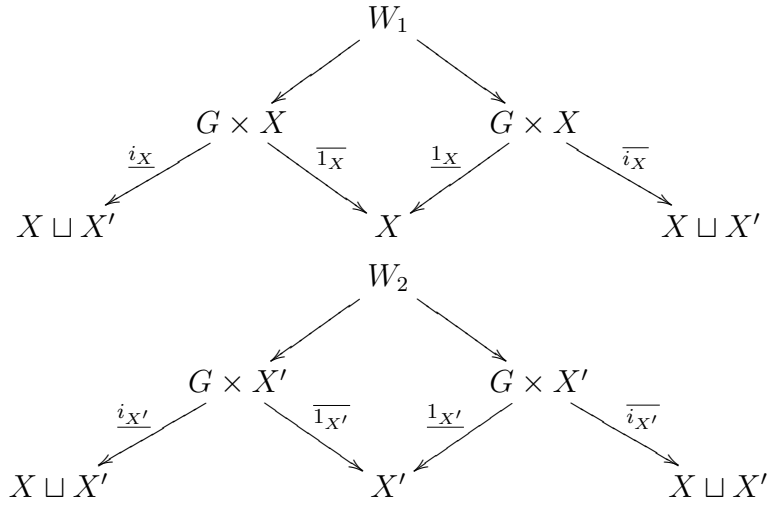
entonces φ es el isomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama



Por lo que tenemos $qi = 1_{GX}$.

Análogamente tenemos que $pj = 1_{GX'}$.

- Veamos que $iq + jp = 1_{X \sqcup X'}$:



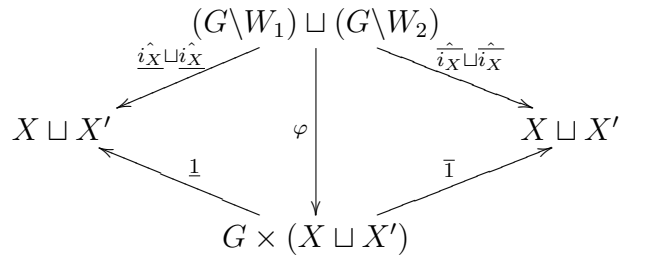
$$G \setminus W_1 = \{[(a, x_1), (b, x_2)] \in (G \times X) \times_G (G \times X) : a^{-1}x_1 = x_2\}$$

$$G \setminus W_2 = \{[(a, x_1), (b, x_2)] \in (G \times X') \times_G (G \times X') : a^{-1}x_1 = x_2\}$$

Sea $\varphi : (G \setminus W_1) \sqcup (G \setminus W_2) \rightarrow G \times (X \sqcup X')$ definida por

$$\varphi[(a, x_1), (b, x_2)] = (ab, x_1).$$

Entonces φ es un isomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama



□

Teorema 2.10. \mathcal{C}_R es una categoría aditiva.

Demostración. Probaremos que \mathcal{C} tiene sumas finitas.

Sea ${}_G X, {}_H Y \in \text{ob}\mathcal{C}$. Tenemos que ${}_G X \cong_{G \times H} (X \times H)$ en \mathcal{C} , esto porque para cada $x \in X$ tenemos que

$${}_G(G/G_x) \cong_{G_x} (G_x/G_x) \cong_{G_x \times 1} (G_x \times 1)/(G_x \times 1) \cong (G \times H)/(G_x \times 1) \text{ en } \mathcal{C}$$

por el lema 2.7. Análogamente, ${}_H Y \cong_{G \times H} G \times Y$ por lo que podemos definir ${}_G X \oplus {}_H Y$ como

$${}_G X \oplus {}_H Y :=_{G \times H} (X \times H) \sqcup (G \times Y).$$

\mathcal{C}_R tiene un objeto cero:

Demostraremos que si G, H son grupos finitos, se tiene que $(G, \emptyset) \cong (H, \emptyset)$ y este es un objeto inicial y final.

Primero, $1_{G\emptyset} = \langle \emptyset, \overline{1_\emptyset}, \underline{1_\emptyset} \rangle$, también tenemos que

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(G\emptyset, {}_H Y) = \{ \langle \emptyset, \overline{1_\emptyset}, \underline{i_\emptyset} \rangle \}$$

donde

$$\begin{array}{ccc} & \emptyset & \\ \underline{i_\emptyset} \swarrow & & \searrow \overline{1_\emptyset} \\ Y & & \emptyset \end{array}$$

con i_\emptyset la inclusión de \emptyset en Y y 1_\emptyset la identidad. Análogamente $\text{hom}_{\mathcal{C}}({}_G X, {}_H \emptyset) = \{ \langle \emptyset, \overline{i_\emptyset}, \underline{1_\emptyset} \rangle \}$. Por lo que el único morfismo de ${}_G \emptyset$ a ${}_H \emptyset$ es un isomorfismo. □

Lema 2.11. Sean ${}_G X, {}_H Y, {}_L Z \in \text{ob}(\mathcal{C}_R)$. Si ${}_G X \oplus {}_H Y \cong_G X \oplus_L Z$, entonces ${}_H Y \cong_L Z$.

Demostración. Sea K un grupo finito y sea $K^\circ = (K, K/K)$ como en la observación ??, definimos el functor $\overline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(K^\circ, _): \mathcal{C}_R \rightarrow R\text{-Mod}$ definido en objetos como

$$\overline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, {}_G X) = \frac{\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, {}_G X)}{\left(\sum_{|H| < |K|} \text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_H \circ, {}_G X) \text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, {}_H \circ) \right)} \quad (2.1)$$

En otras palabras, cada morfismo $f : K^\circ \rightarrow_G X$ que puede ser expresado como suma de morfismos $\sum_i f_i$ de tal forma que f_i se factorize a través de H_i° con $|H_i| < |K| \forall i$, es cero.

Veamos que $\overline{Hom_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, G X)}$ es un R -módulo libre. Sea M un grupo finito, por la observación 1.1, $RB(M)$ es R libre con base $\{M/N\}_{N \in [s(M)]}$ como R -módulo. Fijando un conjunto de representantes $[s(G \times K^{op})]$ el R -módulo $Hom_{\mathcal{C}}(K^\circ, G X)$ es libre con base $\langle {}_G(U_L)_K, \alpha_L, \beta_L \rangle_{L \in \mathcal{U}}$ donde $U_L = (G \times K^{op})/L$, \mathcal{U}_L es un conjunto de representantes de las clases de equivalencia del conjunto

$$\{\langle W, \alpha, \beta \rangle : W \cong U_L \text{ como biconjuntos} \}$$

y se define \mathcal{U} como

$$\mathcal{U} = \bigsqcup_{L \in [s(G \times K^{op})]} \mathcal{U}_L.$$

De esta forma, por como está definido $\sum_{|H| < |K|} Hom_{\mathcal{C}}(H^\circ, G X) Hom_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, H^\circ)$ podemos tomar $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$ la partición de \mathcal{U} definida como

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cap \left(\sum_{|H| < |K|} Hom_{\mathcal{C}}(H^\circ, G X) Hom_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, H^\circ) \right)$$

y sea $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1$, entonces \mathcal{U}_1 es una R -base para $\sum_{|H| < |K|} Hom_{\mathcal{C}}(H^\circ, G X) Hom_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, H^\circ)$ y $\overline{Hom_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, G X)} \cong R^{\mathcal{U}_2}$.

$$\begin{array}{ccc} K^\circ & \xrightarrow{\quad} & G X \\ & \searrow & \nearrow \\ & H^\circ & \end{array} .$$

Veamos que $\overline{Hom_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, G X)}$ es un funtor. Para $\alpha : G X \rightarrow_H Y$ tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{Hom_{\mathcal{C}}(K^\circ, G X)} &\rightarrow \overline{Hom_{\mathcal{C}}(K^\circ, H Y)} \\ \overline{\varphi} &\mapsto \overline{\alpha \varphi} \end{aligned}$$

que está bien definido pues

$$\varphi \in \sum Hom_{\mathcal{C}}(H^\circ, G X) Hom_{\mathcal{C}}(K^\circ, H^\circ),$$

por lo tanto, $\alpha\varphi \in \sum Hom_{\mathcal{C}}(H^\circ, GY) Hom_{\mathcal{C}}(K^\circ, H^\circ)$

$$\begin{array}{ccccc} K^\circ & \longrightarrow & GX & \longrightarrow & HY \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & L^\circ & & & \end{array} .$$

Ahora, $\overline{Hom}(K^\circ, _)$ es un functor puesto que $Hom(K^\circ, _)$ lo es y la proyección $Hom(K^\circ, _) \rightarrow \overline{Hom}(K^\circ, _)$ es tal que $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ es un morfismo de R -módulos. De la observación 1.1 tenemos que

$$X \cong \bigoplus_{x \in [G \setminus X]} G_x(G/G_x),$$

además, para cada $x \in G \setminus X$, tenemos que $G_x(G/G_x) \cong G_x^\circ$ en \mathcal{C} , de la estructura aditiva de \mathcal{C} tenemos que

$$\overline{Hom}(K^\circ, GX) = \bigoplus_{x \in [G \setminus X]} \overline{Hom}(K^\circ, G_x^\circ).$$

Si nos fijamos en $\overline{Hom}_{\mathcal{C}}(K^\circ, G_x^\circ)$, este es un functor valuado en G_x que es definido y estudiado en [5].

Ahora, probaremos que $\overline{Hom}(K^\circ, GX) \neq 0$ si y sólo si $\exists x \in X$ tal que K es subcociente de G_x (Denotado por $K \sqsubseteq G_x$).

Para esto, sea $\overline{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, X) \neq 0$, entonces $\exists x \in X$ tal que $\overline{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, G_x^\circ) \neq 0$. Sea $a \in \overline{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, G_x^\circ)$ distinto de cero donde

$$a = \sum_{i=1}^n a_i \bar{U}_i \in \overline{Hom}(K^\circ, G_x^\circ)$$

, con $G_x U_{iK}$ transitivos, no isomorfos y coeficientes $a_i \in R$, e esta forma, existe i tal que

$$U_i \notin \left(\sum_{|H| < |K|} Hom_{\mathcal{C}}(H^\circ, G_x^\circ) Hom_{\mathcal{C}}(K^\circ, H^\circ) \right).$$

Por la descomposición de Bouc,

$$U_i \cong Ind_A^{G_x} \times_{G_x} Inf_{A/N}^A \times_{A/N} Iso\mu \times_{C'/N'} Def_{C'/N'}^C \times_{C'} Res_{C'}^K$$

con $\mu : A/N \rightarrow C'/N'$ isomorfismo.

Si $C' \neq K$, entonces $U_i \in \sum_{|H| < |K|} Hom_{\mathcal{C}}(H^\circ, GX) Hom_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, H^\circ)$ pues U_i se factoriza a travez de C' , por lo que $Res_{C'}^K = {}_K K_K$. Similarmente $N = 1$ y $Def_{C'/N}^{C'} = {}_{C'} C'_{C'}$, entonces

$$U_i \cong \text{Ind}_A^{G_x} \times_{G_x} \text{Inf}_{A/N}^A \times_{A/N} \text{Iso} \mu$$

con $\mu : A/N \rightarrow K$ isomorfismo de grupos, por lo tanto, $K \sqsubseteq G_x$.

Para el regreso, sea $x \in X$ y sea K subcociente de G_x con $A \leq G_x$, $N \triangleleft A$ y $\varphi : K \rightarrow A/N$ un isomorfismo de grupos.

Definimos el siguiente (G, K) -biconjunto U :

$$U = \text{Ind}_A^G \times_A \text{Inf}_{A/N}^A \times_{A/N} \text{Iso}(\varphi)$$

Y sea $\beta : U \rightarrow X$ definida por $\beta([g, aN, bN]) = gx$ que está bien definida puesto que $A \leq G_x$. como K° es un punto, la función constante p es trivialmente de K -conjuntos, G -invariantes.

De esta forma, el morfismo $\varphi = \langle U, p, \beta \rangle$ no se puede factorizar a través de subgrupos menores a H por la descomposición de Bouc y la fórmula de Mackey.

Regresando a $X \oplus Y \cong X \oplus Z$, sea $\alpha : X \oplus Y \rightarrow X \oplus Z$ un isomorfismo en \mathcal{C}_R , aplicando

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(K^\circ, \alpha)$ y eliminando $\overline{\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, G X)}$ puesto que α es un isomorfismo de R -módulos libres, tenemos que

$$\overline{\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, H Y)} \cong \overline{\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, L Z)}$$

como R -módulos libres y por lo tanto,

$$|\overline{\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, H Y)}| = |\overline{\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, L Z)}|$$

Donde para M un R -módulo libre, $|M|$ denota el rango de M .

entonces,

$$\sum_{y \in [H \setminus Y]} \overline{\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K, H/H_y)} \cong \sum_{z \in [L \setminus Z]} \overline{\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K, L/L_z)}$$

Sea K un grupo de orden maximal en el conjunto

$$\{H_y : y \in Y\} \cup \{L_z : z \in Z\} \quad (2.2)$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $K = H_{y_0}$ con $y_0 \in Y$. Como $\overline{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(H_{y_0}^\circ, Y)} \neq 0$ entonces existe $z \in Z$ y tal que

$$\overline{\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(H_{y_0}^\circ, L_z^\circ)} \neq 0$$

, por la maximalidad de $K = H_{y_0}$ tenemos que $H_{y_0} \cong L_z$.

De lo anterior tenemos que $Y \cong_K \circ \oplus Y_1$, $Z \cong_K \circ \oplus Z_1$. Haciendo inducción en el número de órbitas de Y y Z tenemos $Y \cong Z$.

Particularmente, para ${}_G X = G/G$ y ${}_H Y \in \text{ob}\mathcal{C}$ tal que ${}_G \circ \cong {}_H Y$ tenemos que existe $y_0 \in Y$ tal que $H_{y_0} \sqsubset G$ con H_{y_0} maximal y por lo tanto, $H_{y_0} \cong G$, por lo tanto,

$${}_G \circ \cong {}_G \circ \oplus Y_1$$

Donde Y_1 es el H -subconjunto de Y formado por el complemento en Y de $\mathcal{O}_H(y_0)$.

Ahora, $Y_1 = \emptyset$ puesto que $\text{End}_{\mathcal{C}}({}_G \circ) \cong \text{End}_{\mathcal{C}}({}_H Y)$ como R módulos libres y

$$|\text{End}_{\mathcal{C}}({}_H Y)| = |\text{End}_{\mathcal{C}}| + |\text{End}_{\mathcal{C}}| + |\text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_G \circ, Y_1)| + |\text{Hom}_{\mathcal{C}}({}_H Y_1, {}_G \circ)|, \quad (2.3)$$

De lo cual tenemos que $Y_1 = \emptyset$ y por lo tanto, ${}_G \circ$ es inescindible para cada grupo finito G . \square

Teorema 2.12. Sean G_i, H_j grupos finitos donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$, entonces

$$\bigoplus_{i=1}^n G/G_i \cong \bigoplus_{j=1}^m H/H_j \text{ en } \mathcal{C}$$

si y sólo si $n = m$ y existe $\sigma \in S_n$ tal que $G_{\sigma(i)} \cong H_i$ como grupos finitos.

Demostración. Definimos ${}_G X$ como el G -conjunto $\bigsqcup_{i=1}^n G/G_i$ y definimos ${}_H Y$ como $\bigsqcup_{j=1}^m H/H_j$.

Si $n = m$ y $G_i \cong H_{\sigma(i)}$ por medio de un isomorfismo $\varphi_i : G_i \rightarrow H_{\sigma(i)}$, entonces

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{ij} : \bigoplus_{i=1}^n G/G_i \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m H/H_j$$

definida como $\varphi_{ij} = \delta_{ij} \text{Iso}(\varphi_i) : G/G_i \rightarrow H/H_j$ es un isomorfismo entre ${}_G X$ y ${}_H Y$.

Veamos que si ${}_G X \cong {}_H Y$, entonces existe σ e isomorfismos $\varphi_i : G_i \rightarrow H_{\sigma(i)}$. De la ecuación 2.3 tenemos que ${}_G \circ$ es inescindible por lo tanto, la implicación es cierta para ${}_G X = {}_G \circ$ dado que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, H) \cong \text{Hom}_{\Omega_R}(G, H)$$

y $G \cong H$ en Ω_R si y sólo si $G \cong H$ como grupos finitos (ver proposición 1.2).

Si ${}_G X \cong {}_H Y$, entonces $|\overline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, X)| = |\overline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}_R}(K^\circ, Y)|$ para todo grupo finito K .

Sea K un grupo de orden maximal del conjunto

$$\{G_x : x \in X\} \cup \{H_y : y \in Y\}$$

$$X \cong_{K \circ} \oplus X_1 Y \cong_{K \circ} \oplus Y_1$$

Donde el G -conjunto X satisface $|X_1| < |X|$ mientras que el H -conjunto Y_1 satisface $|Y_1| < |Y|$, más aún, tenemos que

$$\overline{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K \circ, X_1) = \overline{Hom}_{\mathcal{C}_R}(K \circ, Y_1)$$

Por lo que existe K_1 grupo finito tal que $X_1 \cong_{K_1 \circ} \oplus X_2$, $Y_1 =_{K_1 \circ} \oplus Y_2$. De manera recursiva tenemos que $n = m$ y existe $\sigma \in S_n$ tal que $H_i \cong G_{\sigma(i)}$.

Por el mismo argumento que en 2.2 existen $y \in Y$ y $z \in Z$ tal que $H_y \cong L_z$, por lo tanto, □

Veremos que \mathcal{C}_R admite una categoría plena equivalente a la categoría de biconjuntos.

Proposición 2.13. *Sea \mathcal{D}_R la subcategoría de \mathcal{C}_R con objetos $G \circ$ para G grupo finito. Sea $\Psi : \Omega_R \rightarrow \mathcal{C}$ el funtor definido en objetos como $\Psi(G) =_{G \circ}$ y Ψ definido en un morfismo de la forma ${}_H U_G : G \rightarrow H$ como $\Psi(U) = \langle U, p_G, p_H \rangle$ donde $p_G : U \rightarrow G/G$ es la función constante G/G , análogamente p_H es la función constante H/H . Entonces Ψ es un funtor fiel y pleno, más aún, es un isomorfismo de categorías e su imagen.*

Demostración. Ψ es un funtor puesto que para ${}_H U_G, {}_K V_H$ $\Psi(V \times U) = \langle V \times U, p_G, p_K \rangle$ y es fiel y denso puesto que la función

$$\Psi : Hom_{\Omega_R}(G, H) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}_R}(G \circ, H \circ)$$

es un isomorfismo de R -módulos (más aún, de anillos) entre $B(H \times G^{op})$ y $B(H \times G^{op} \circ)$. □

Definición 2.14. *Sea \mathcal{A} una categoría preaditiva, $Add(\mathcal{A})$ denotará a la mínima categoría extensión de \mathcal{A} que es aditiva.*

Podemos construir $Add(\mathcal{A})$ como la categoría de sumas formales finitas, es decir, los objetos de $Add(\mathcal{A})$ son n -adas de objetos en \mathcal{A} y para $a = \{a_i\}_{i=1}^n, b = \{b_i\}_{i=1}^m \in obAdd(\mathcal{A})$ un morfismo $f : a \rightarrow b$ es una colección de morfismos $\{f_{i,j}\}_{i,j}$ tal que $f_{i,j} : a_i \rightarrow b_j$ con $f_{i,j}$ morfismo en \mathcal{A} .

Notemos que para G un grupo finito y X un G -conjunto, ${}_G X \cong \bigoplus_{x \in [G \setminus X]} \mathcal{O}(x)$ en \mathcal{C} . Cada G conjunto $\mathcal{O}(x)$ es isomorfo a G/G_x como G -conjunto y cada G -conjunto ${}_G(G/G_x)$ es isomorfo en \mathcal{C} a ${}_{G_x} \circ$, por lo tanto,

$${}_G X \cong \bigoplus_{x \in [G \setminus X]} {}_{G_x} \circ$$

por el teorema 2.12 esta descomposición es única, salvo isomorfismo y los objetos de la forma ${}_G \circ$ son inescindibles en \mathcal{C} .

Teorema 2.15. $\mathcal{C} \cong \text{Add} \mathcal{D}$, más aún, todo objeto de \mathcal{C} se descompone de manera única, salvo isomorfismo como suma de elementos de \mathcal{D} .

Demostración. Sea $\Psi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Add}(\mathcal{D})$ el funtor definido en objetos como $\Psi({}_G X) = \{{}_{G_x} \circ\}_{x \in [G \setminus X]}$ y en un morfismo $\langle U, \alpha, \beta \rangle : {}_G X \rightarrow {}_H Y$ como $\Psi(\langle U, \alpha, \beta \rangle) = \{{}_{H_y} (\alpha^{-1}(x) \cap \beta^{-1}(y))_{G_x}\}_{(x,y) \in [G \setminus X] \times [H \setminus Y]}$. Ψ es un isomorfismo con inversa η definida en objetos como

$$\eta(\{{}_{G_i} \circ\}_{i=1}^n) = \bigoplus_{i=1}^n {}_{G_i} \circ$$

y en morfismos como $\eta(\{U_{i,j}\}_{i,j}) : \{{}_{G_i}\}_{i=1}^n \rightarrow \{{}_{H_j}\}_{j=1}^m$

$$\eta(\{U_{i,j}\}_{i,j}) = \left\langle \bigsqcup_{j,j} H \times_{H_j} U_{i,j} \times_{G_i} G, \alpha, \beta \right\rangle$$

Donde $G = \prod_i G_i$, $H = \prod_j H_j$ y

$$\begin{aligned} \alpha([h, u, g]) &= g^{-1} G_i \in \sqcup_i (G/G_i) \text{ si } u \in U_{i,j} \\ \beta([h, u, g]) &= h H_j \text{ si } u \in U_{i,j}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Funtores a R -módulos

En este capítulo identificaremos las categorías de funtores de Mackey y funtores de biconjuntos como subcategorías de \mathcal{C}_R . Además construiremos el funtor de representación como funtor de \mathcal{C} en grupos abelianos, generalizando esta prueba tenemos una construcción que incluye más ejemplos clásicos de funtor de biconjuntos.

3.1. Funtores globales

\mathcal{C} admite una subcategoría plena equivalente a la categoría de biconjuntos Ω_R de biconjuntos definida en el capítulo 1.

Definición 3.1. Sea \mathcal{D}_R la subcategoría plena de \mathcal{C}_R con objetos de la forma G° para cada grupo finito G .

Notemos que para un morfismo básico $\langle U, \alpha, \beta \rangle$ tenemos que α y β son proyecciones a un punto por lo que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G^\circ, H^\circ) \cong B(H \times G^{op})$$

De donde recuperamos la categoría de G -Conjuntos.

Teorema 3.2. Sea R un anillo conmutativo y sea \mathcal{D}_R la subcategoría plena de \mathcal{C}_R con objetos de la forma $G^\circ \cong (G, G/G) \circ$ el G -Conjunto trivial, entonces hay una equivalencia de categorías

$$\text{Fun}_R(\mathcal{D}_R, R - \text{Mod}) \simeq \text{Fun}_R(\mathcal{C}_R, R - \text{Mod})$$

Demostración. Sea $\text{Res}_{\mathcal{D}_R}^{\mathcal{C}_R} : \text{Fun}_R(\mathcal{C}_R, R - \text{mod}) \rightarrow \text{Fun}_R(\mathcal{D}_R, R - \text{mod})$ el funtor definido por restricción, i.e. dado $M \in \text{Fun}_R(\mathcal{C}, R - \text{mod})$

$$Res_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(M)(G) = M(G \circ)$$

en objetos y

$$Res_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(M)({}_H U_G) = M(\langle U, p_G, p_H \rangle)$$

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ p_H \swarrow & & \searrow p_G \\ H/H & & G/G \end{array}$$

en morfismos, extendido bilinealmente.

Sea $f : M \rightarrow M'$ una transformación natural, definimos

$$Res_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(f) : Res_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(M) \rightarrow Res_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(M')$$

como

$$Res_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(f)_G = f_{\circ} : M(G \circ) \rightarrow M'(G \circ).$$

la cual es natural pues si tenemos $\alpha : G \rightarrow H$ un morfismo en \mathcal{D} , entonces α es un morfismo en \mathcal{C} y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M(G \circ) & \xrightarrow{f_{(G \circ)}} & M'(G \circ) \\ M(\alpha) \downarrow & & \downarrow M'(\alpha) \\ M(H \circ) & \xrightarrow{f_{(H \circ)}} & M'(H \circ) \end{array}$$

Sea $Ind_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} : Fun_R(\mathcal{D}, R\text{-mod}) \rightarrow Fun_R(\mathcal{C}, R\text{-mod})$ el funtor definido en objetos como

$$Ind_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(M)({}_G X) = \left(\bigoplus_{x \in X} M({}_{G_x} \circ) \right)^G,$$

La acción de G en $\bigoplus_{x \in X} M({}_{G_x} \circ)$ para $m \in M({}_{G_x} \circ)$ y $g \in G$ definida por

$$gm = M({}_{G_{gx}} Iso(c_g)_{G_x})(m) \in M({}_{G_{gx}} \circ)$$

para $c_g : G_x \rightarrow {}^g G_x$ el isomorfismo conjugación donde $Iso(c_g)$ denota el (G_{gx}, G_x) biconjunto ${}_{G_{gx}}(G_{gx})_{c_g G_x}$.

Sea $\varphi = \langle {}_H U_G, \alpha, \beta \rangle : {}_G X \rightarrow {}_H Y$, definimos $(Ind_{\mathcal{D}_R}^{\mathcal{C}_R}(M))(\varphi)$ como

$$Ind_{\mathcal{D}_R}^{\mathcal{C}_R}(M)(\varphi) \left(\sum_{x \in X} m_x \right) = \sum_{y \in Y} \left(\sum_{x \in X} M(U_{x,y})(m_x) \right)$$

donde $m_x \in M(G_x \circ)$ y $U_{x,y}$ es el (H_y, G_x) biconjunto $\alpha^{-1}(x) \cap \beta^{-1}(y)$.

$Ind_{\mathcal{D}_R}^{\mathcal{C}_R}(M)(\varphi)$ está bien definida pues si $h \in H$ entonces ${}_{H_y}Iso(c_h)_{H_y} \times_{H_y} U_{x,y} \cong U_{x,hy}$ por medio del isomorfismo $[hah^{-1}, u_{x,y}] \mapsto au$ para ${}^h a \in {}^h(H_y) = H_{hy}$. De esto tenemos que

$$\begin{aligned} h \sum_{x \in X} M(U_{x,y})(m_x) &= \sum_{x \in X} M\left({}_{H_y}Iso(c_h)_{H_{h^{-1}(y)}}\right) M(U_{x,h^{-1}(y)})(m_x) \\ &= \sum_{x \in X} M\left({}_{H_y}Iso(c_h)_{H_{h^{-1}(y)}} \times_{H_{h^{-1}(y)}} U_{x,h^{-1}(y)}\right)(m_x) \\ &= \sum_{x \in X} M(U_{x,y})(m_x) \end{aligned}$$

Tenemos que

$$Ind_{\mathcal{D}_R}^{\mathcal{C}_R}(M)(\varphi) \left(\sum_{x \in X} m_x \right) \in \left(\bigoplus_{y \in Y} M(H_y \circ) \right)^H$$

puesto que

$$Iso(c_h) \times_{H_y} U_{x,y} \cong U_{x,hy}$$

por medio del isomorfismo

$$[h, u] \mapsto hu$$

$Ind_{\mathcal{D}_R}^{\mathcal{C}_R}$ está definido en un morfismo $f : M \rightarrow N$ como

$$Ind_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(f) : Ind_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}M \rightarrow Ind_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}N \text{ tal que para } {}_G X \in \mathcal{C}$$

$$\begin{aligned} \left(Ind_{\mathcal{D}_R}^{\mathcal{C}_R}(f) \right)_{GX} &: \left(\bigoplus_{x \in X} M(G_x \circ) \right)^G \rightarrow \left(\bigoplus_{x \in X} N(G_x \circ) \right)^G \\ Ind_{\mathcal{D}_R}^{\mathcal{C}_R}(f)_{GX} \left(\sum_{x \in X} m_x \right) &= \sum_{x \in X} f_{G_x \circ}(m_x) \end{aligned}$$

$Ind_{\mathcal{D}_R}^{\mathcal{C}_R}(f)$ es natural puesto que $f_{(G_x \circ)}$ es natural.

Ahora, $Res_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} Ind_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} = 1_{Fun_R(\mathcal{D}, R\text{-mod})}$ mientras que

$$\eta : Ind_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} Res_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$$

se define para $M \in \text{Fun}_R(\mathcal{C}, R\text{-mod})$

$$\eta_{GX} : \left(\bigoplus_{x \in X} M(G_x) \right)^G \rightarrow M(X)$$

$$\eta_{GX} \left(\sum_{x \in X} m_x \right) = \sum_{x \in X} M(\zeta_x)(m_x)$$

Con $\zeta_x : (G_x, \circ) \rightarrow (G, X)$ el morfismo de escisión, es decir,

$$\begin{array}{ccc} & G \times (G_x/G_x) & \\ \beta \swarrow & & \searrow \beta \\ X & & G_x/G_x \end{array}$$

donde α y β son como en el morfismo i definido en la Proposición 2.9.

De esta forma η es un isomorfismo natural con inversa ρ definida en un objeto ${}_G X$ como

$$\rho_{GX} : M({}_G X) \rightarrow \left(\bigoplus_{x \in X} M(G_x) \right)^G$$

$$\rho_{GX}(m) = \sum_{x \in X} M(p_x)(m)$$

donde $p_x : (G, X) \rightarrow (G_x, \circ)$ la proyección de (G, X) en (G_x, \circ) , es decir,

$$\begin{array}{ccccc} & G_x G_G & & G \times \mathcal{O}(x) & & G \times \mathcal{O}(x) & & \\ & \swarrow t & & \swarrow \underline{a} & & \swarrow \overline{1_{\mathcal{O}(x)}} & & \swarrow \overline{i_x} \\ G_x/G_x & & G/G_x & & \mathcal{O}(x) & & & X \end{array}$$

$$p_x = \langle G_x G_G, r, t \rangle \langle G \times \mathcal{O}(x), 1_{\mathcal{O}(x)}, \underline{a} \rangle \langle G \times \mathcal{O}(x), \overline{i_x}, 1_{\mathcal{O}(x)} \rangle$$

y está bien definida pues $\text{Iso}(c_g)p_x = p_{gx}$ □

3.2. Funtores locales

Recapitulando, \mathcal{C} es una categoría aditiva y \mathcal{D} es una subcategoría plena, equivalente a la categoría de biconjuntos, cada objeto en \mathcal{C} puede ser escrito de manera única como suma directa de objetos en \mathcal{D} , salvo isomorfismos en \mathcal{D} . Ahora, veamos que \mathcal{C} admite para cada grupo finito G , una subcategoría equivalente a $\text{Span}(G\text{-Sets})$ (Ver definición 1.20).

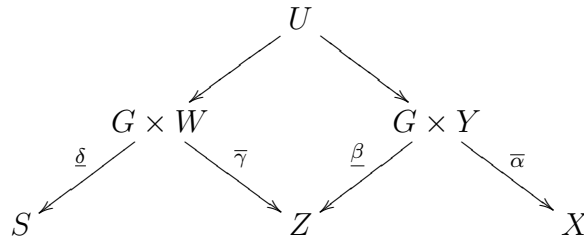
Teorema 3.3. Sea G un grupo finito fijo y sea $\mathcal{S}_G = \mathcal{S}_{G,R}$ la subcategoría de \mathcal{C} con objetos de la forma (G, X) . Sea $\text{Hom}_{\mathcal{S}_G}(G X, G Y)$ el R -módulo generado por los morfismos de la forma $\langle G \times Z, \bar{\alpha}, \underline{\beta} \rangle$

donde $Y \xleftarrow{\beta} Z \xrightarrow{\alpha} X$ son morfismos de G -conjuntos y $\bar{\alpha}(g, z) = g^{-1}\alpha(z)$, $\underline{\beta}(g, z) = \beta(z)$, entonces \mathcal{S}_G es equivalente a la categoría $\text{Span}(G - \text{Sets})$ y $\overline{\text{Fun}}(\mathcal{S}_G, \text{Ab})$ es equivalente a la categoría de funtores de Mackey.

Sea

$$S \xleftarrow{\delta} W \xrightarrow{\gamma} Z, \quad Z \xleftarrow{\beta} Y \xrightarrow{\alpha} X$$

Para componer en \mathcal{C} consideremos el siguiente diagrama



Sea T el producto fibrado de γ y β

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\epsilon} & Y \\
 \eta \downarrow & & \downarrow \beta \\
 W & \xrightarrow{\gamma} & Z
 \end{array}$$

donde $G \backslash U = \{[(a, w), (b, y)] \in (G \times W) \times_G (G \times Y) : a^{-1}\gamma(w) = \beta(y)\}$ definimos $\varphi : G \backslash U \rightarrow G \times T$ como

$$\varphi([(a, w), (b, z)]) = (ab, (w, ay))$$

φ está bien definida porque para $t \in G$,

$$[(at^{-1}, w), (tb, tz)] \mapsto (at^{-1}tb, (w, at^{-1}tz))$$

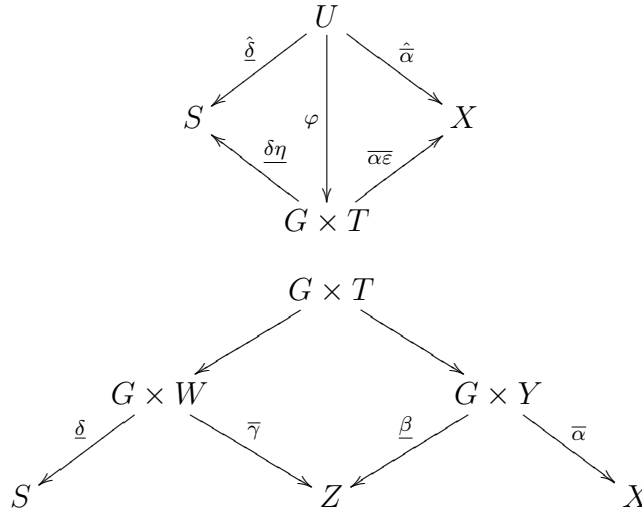
φ es un morfismo de biconjuntos porque $s, t \in G$, entonces $s[(a, w), (b, z)]t = [(sa, sw), (bt, z)] \mapsto (sabt, (sw, saz)) = s\varphi([(a, w), (b, z)])t$.

Es un isomorfismo con inversa ψ dada por $\psi(b, (w, z)) = [(1, w), (a, z)]$.

Ahora, el morfismo $\langle G \times W, \bar{\gamma}, \delta \rangle \langle G \times Y, \alpha, \beta \rangle$ en la categoría \mathcal{C} puede ser escrito en \mathcal{C}_G como $\langle G \times W, \bar{\alpha}\bar{\epsilon} \rangle \langle G \times Y, \underline{\delta}\underline{\eta} \rangle$, asociado a los morfismos de G -conjuntos

$$Z \xleftarrow{\delta} W \xrightarrow{\eta} T \xrightarrow{\epsilon} Y \xrightarrow{\alpha} X$$

por lo tanto, $\langle G \times W, \bar{\gamma}, \delta \rangle \langle G \times Y, \alpha, \beta \rangle$ es un morfismo en sC_G , esto se debe a la conmutatividad de los diagramas



Es importante notar que \mathcal{S}_G no es una subcategoría plena de \mathcal{C} puesto que \mathcal{S}_G pues $|B_G(Y \times X)| < |B_{G \times G}(Y \times X)|$, esto pues $Hom_{\mathcal{S}_G}(G X, H Y)$ está generado por los (G, G) biconjuntos de la forma ${}_G G_A \times_A A G_G$ que se obtienen de $G \times (G/A) \cong {}_G G_A \times_A A G_G$.

Ejemplo 3.4. Para ${}_G X$ un G -conjunto finito, el anillo de Burnside de X , $B({}_G X)$ es isomorfo a $Hom_{\mathcal{C}}(1, {}_G X)$, esto pues dado $(T\varphi) \in B({}_G X)$ tenemos que φ es de G -conjuntos 1-invariante de manera que podemos definir

$$(T, \varphi) \mapsto \langle T^{op}, \varphi^{op}, p_1 \rangle$$

Análogamente, para un morfismos $\langle U, \alpha, \beta \rangle \in Hom_{\mathcal{C}}(1, {}_G X)$ tenemos que β es la función constante 1 y por lo tanto podemos definir el morfismo

$$\langle u, \alpha, \beta \rangle \mapsto (U^{op}, \alpha^{op}).$$

Este es un funtor de \mathcal{C} en $R - Mod$ que extiende anillo de Burnside como funtor en biconjuntos, es decir, $RB : \mathcal{C} \rightarrow R - Mod$ cumple que $RB({}_G \circ) = B(G)$ y para $f : G \rightarrow H$ morfismo en \mathcal{D} de la forma $\langle {}_H U_G, p_{G/G}, p_{H/H} \rangle$, $RB(f) = B(U)$ donde $B(U)({}_G T) = U \times_G T$.

3.3. Haces vectoriales sobre G -conjuntos

En esta sección $R = \mathbb{Z}$. Sea G un grupo finito y sea k un campo de característica cero, el funtor de representación, como funtor en biconjuntos

es el grupo de Grothendieck de la categoría de kG módulos finitamente generados. El grupo de Grothendieck se toma como categoría exacta y puede ser extendido en un funtor muy particular en $Fun(\mathcal{C}, Ab)$. En esta construcción es fácil ver la estructura de funtor de Mackey de Dress del funtor de representación.

Definición 3.5. Sea k un campo, G un grupo finito y M un kG -módulo. Definimos el k -módulo M_G como el máximo cociente de M donde G actúa trivialmente, esto es:

$$M_G = M/(I_G M)$$

donde $I_N = \bigoplus_{g \in G} k(1 - g)$ es el ideal aumentación de kG

Definición 3.6. Sea X un G -conjunto, definimos la categoría \hat{X} con objetos el conjunto X y para $x, y \in X$ definimos para $x, y \in X$

$$Hom_{\hat{X}}(x, y) = \{(g, x) : g \in G, gx = y\}$$

con la composición dada por

$$(h, gx)(g, x) = (hg, x)$$

Sea k un campo de característica cero, definimos el funtor de representación $R_k : \mathcal{C} \rightarrow Ab$ en un objeto ${}_G X$ como $G_0 Fun(\hat{X}, k - Vec)$ donde $k - Vec$ es la categoría $k - mod$, es decir, k -espacios vectoriales de dimensión finita sobre k ; G_0 es el grupo de Grothendieck como categoría abeliana, i.e.

$$R_k({}_G X) = \mathbb{Z}^{[Fun(\hat{X}, k - Vec)]} \left/ \left\langle [M'] - [M] - [M''] : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \longrightarrow 0 \text{ es exacta} \right\rangle \right.$$

Para $\varphi = \langle U, \alpha, \beta \rangle : {}_G X \rightarrow {}_H Y$ definimos el funtor exacto

$$\varphi_* : Fun(\hat{X}, k - Vec) \rightarrow Fun(\hat{Y}, k - Vec)$$

en un objeto $M \in Fun(\hat{X}, k - Vec)$ valuado en un objeto $y \in ob \hat{Y}$ como

$$\varphi_* M(y) = \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u \right)_G$$

La acción de G en $\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u$ se define como sigue:

Para $g \in G$ y $\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u \in \bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u$ tenemos :

$$gm_u = M(g, \alpha(u))(m_u) \in M_{ug^{-1}} = M(\alpha(ug^{-1})),$$

donde $ug^{-1} \in \beta^{-1}(y)$

Ahora, $\varphi_* M(h, y) : \varphi_* M(y) \rightarrow \varphi_* M(hy)$, está definida por

$$\varphi_* M(h, y)(m_u) = m_u \in M_{hu} = M(\alpha(hu))$$

pues

$$m_u \in M_u = M(\alpha(u)), \alpha(hu) = \alpha(u) \text{ y } hu \in \beta^{-1}(hy).$$

El functor φ_* está definida en un morfismo $f : M \rightarrow N$ como

$$\begin{aligned} (\varphi_* f)_y : \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M(\alpha(u)) \right)_G &\rightarrow \left(\bigoplus_{w \in \beta^{-1}(y)} N(\alpha(w)) \right)_G \\ (\varphi_* f)_y \left(\overline{\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u} \right) &= \overline{\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} f_{\alpha(u)} m_u} \end{aligned}$$

Definimos $R_k(\varphi) : R_k(GX) \rightarrow R_k(HY)$ como el morfismo inducido por φ_* en el grupo de Grothendieck.

Teorema 3.7. $R_k \in \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Ab})$ y extiende al functor de representación en biconjuntos.

Demostración. ■ El functor φ_* no depende de la elección del representante (U, α, β) de la clase de equivalencia $\varphi = \langle U, \alpha, \beta \rangle$.

Supongamos que $(U, \alpha, \beta) \cong (U', \alpha', \beta')$, con $\eta : U \rightarrow U'$ isomorfismo de biconjuntos tal que $\alpha'\eta = \alpha$ y $\beta'\eta = \beta$ Tenemos que

$$\eta|_{\beta^{-1}(y)} : \beta^{-1}(y) \rightarrow \beta'^{-1}(y)$$

es un isomorfismo de (H_y, G) biconjuntos.

■ La función $\varphi_* M(h, y)$ está bien definida y se calcula con la regla:

$$\varphi_* M(h, y) \left(\overline{\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u} \right) = \overline{\sum_{v \in \beta^{-1}(hy)} m_{h^{-1}v}}$$

Es suficiente probar que el morfismo $\varphi_h : \bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u \rightarrow \bigoplus_{v \in \beta^{-1}(hy)} M_v$,

$m_u \mapsto m_u \in M_{hu}$ satisface $\varphi_h(gm) = g\varphi_h(m)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\varphi_h \left(g \left(\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u \right) \right) &= \varphi_h \left(\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} M(g, \alpha(ug))(m_{ug}) \right) \\
&= \sum_{v \in \beta^{-1}(hy)} M(g, \alpha(h^{-1}vg))m_{[h^{-1}vg]} \\
&= g \sum_{v \in \beta^{-1}(hy)} m_{h^{-1}v} \\
&= g\varphi_h \left(\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u \right)
\end{aligned}$$

Luego tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u & \xrightarrow{\varphi_h} & \bigoplus_{v \in \beta^{-1}(hy)} M_v \\
\downarrow & & \downarrow \\
\left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u \right)_G & \xrightarrow{\varphi_* M(h,y)} & \left(\bigoplus_{v \in \beta^{-1}(y)} M_v \right)_G
\end{array}$$

Es claro que $\varphi_* M$ preserva identidades y composición.

- Veamos que φ_* está bien definido en morfismos. Sea $f : M \rightarrow N$ una transformación natural, es suficiente probar que

$$\varphi_f : \bigoplus_{\beta^{-1}(y)} M_u \rightarrow \bigoplus_{\beta^{-1}(y)} N_u$$

,

Definida por

$$\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u \mapsto \sum_{u \in \beta^{-1}(y)} f_{\alpha(u)}(m_u)$$

satisface $\varphi_f(gm) = g\varphi_f(m)$.

$$\begin{aligned}
\varphi_f \left(g \sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u \right) &= \varphi_f \left(\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} M(g, \alpha(ug))(m_{ug}) \right) \\
&= \sum_{u \in \beta^{-1}(y)} f_{\alpha(u)} m_u - f_{\alpha(u)} M(g, \alpha(ug))(m_{ug}) \\
&= \sum_{u \in \beta^{-1}(y)} N(g, \alpha(ug)) f_{\alpha(ug)}(m_{ug}) \\
&= g \varphi_f \left(\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u \right)
\end{aligned}$$

- Veamos que $\varphi_* f$ es una transformación natural.

$$\begin{aligned}
\varphi_* N(h, y) (\varphi_* f)_y \left(\overline{\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u} \right) &= \varphi_* N(h, y) \left(\overline{\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} f_{\alpha(u)}(m_u)} \right) \\
&= \overline{\sum_{v \in \beta^{-1}(hy)} f_{\alpha(h^{-1}v)}(m_{h^{-1}v})} \\
&= (\varphi_* f)_{hy} \left(\overline{\sum_{v \in \beta^{-1}(hy)} (m_{h^{-1}v})} \right) \\
&= (\varphi_* f)_{hy} \varphi_* M(h, y) \left(\overline{\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u} \right)
\end{aligned}$$

Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
\left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u \right)_G & \xrightarrow{(\varphi_* f)_y} & \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} N_u \right)_G \\
\varphi_* M(h, y) \downarrow & & \downarrow \varphi_* N(h, y) \\
\left(\bigoplus_{v \in \beta^{-1}(hy)} M_v \right)_G & \xrightarrow{(\varphi_* f)_{hy}} & \left(\bigoplus_{v \in \beta^{-1}(hy)} N_v \right)_G
\end{array}$$

- Veamos que φ_* es un funtor. Por definición $\varphi_*(1_M) = 1_{\varphi_* M}$. Sea $M, N, L \in \text{Fun}(\hat{X}, k\text{-Vec})$ y sean $f : M \rightarrow N$, $f' : N \rightarrow L$ transformaciones naturales, entonces

$$\begin{aligned}
(\varphi_* f' f)_y \left(\overline{\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u} \right) &= \overline{\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} (f' f)_{\alpha(u)}(m_u)} \\
&= \overline{\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} f'_{\alpha(u)} f_{\alpha(u)}(m_u)} \\
&= (\varphi_* f')_y (\varphi_* f)_y \left(\overline{\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u} \right)
\end{aligned}$$

- Veamos que $(\psi\varphi)_* \cong \psi_*\varphi_*$ para $\varphi = \langle {}_H U_G, \alpha, \beta \rangle$, $\psi = \langle {}_K V_H, \gamma, \delta \rangle$.
 $\psi\varphi = \langle H \setminus W, \hat{\alpha}, \hat{\delta} \rangle$ donde $H \setminus W = \{[v, u] \in V \times_H U : \gamma(v) = \beta(u)\}$.

Sea $\eta : (\psi\varphi)_* \rightarrow \psi_*\varphi_*$ la transformación natural que para cada $M \in \text{Fun}(\hat{X}, k\text{-Vec})$

$$\begin{aligned}
(\eta_M)_z : \left(\bigoplus_{[v,u] \in \hat{\delta}^{-1}(z)} M(\hat{\alpha}[v,u]) \right)_G &\rightarrow \left(\bigoplus_{v \in \delta^{-1}(z)} \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} M(\alpha(u)) \right)_G \right)_H \\
\overline{\sum_{[v,u] \in \hat{\delta}^{-1}(z)} m_{[v,u]}} &\mapsto \overline{\sum_{v \in \delta^{-1}(z)} \sum_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} m_{[v,u]}}
\end{aligned}$$

Que está bien definida pues

$$\zeta : \bigoplus_{[v,u] \in \hat{\delta}^{-1}(z)} M(\hat{\alpha}[v,u]) \rightarrow \left(\bigoplus_{v \in \delta^{-1}(z)} \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} M(\alpha(u)) \right) \right)$$

, definida como

$$\zeta \left(\sum_{[v,u] \in \hat{\delta}^{-1}(z)} m_{[v,u]} \right) = \sum_{v \in \delta^{-1}(z)} \sum_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} m_{[v,u]} = \sum_{v \in \delta^{-1}(z)} \zeta_v \left(\sum_{[v,u] \in \hat{\delta}^{-1}(z)} m_{[v,u]} \right)$$

satisface

$$\varphi_u(gm) = g\varphi_u(m), \text{ por lo que } \zeta = \sum_{u \in \delta^{-1}(z)} \zeta_u, \text{ satisface } \zeta(gm) = g\zeta(m),$$

es decir,

$$\zeta(gm) = \sum_{v \in \delta^{-1}(z)} \zeta_u(gm) = \sum_{v \in \delta^{-1}(z)} g\zeta_u(m)$$

$$\zeta \left(\sum_{[v,u] \in \hat{\delta}^{-1}(z)} m_{[v,u]} \right) = \sum_{v \in \delta^{-1}(z)} \sum_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} m_{[v,u]}. \text{ De esta forma}$$

$$\bar{\zeta} : \left(\bigoplus_{[v,u] \in \hat{\delta}^{-1}(z)} M(\hat{\alpha}[v,u]) \right)_G \rightarrow \left(\bigoplus_{v \in \delta^{-1}(z)} \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} M(\alpha(u)) \right)_G \right)$$

está bien definida. Se define $(\eta_M)_z$ como $\bar{\zeta}$ seguida de la proyección a H . η es un isomorfismo con inversa ρ ,

$$(\rho_M)_z \left(\overline{\sum_{v \in \delta^{-1}(z)} \sum_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} m_{(v,u)}} \right) = \sum_{[v,u] \in \hat{\delta}^{-1}(z)} \frac{1}{|H|} \left(\sum_{h \in H} m_{(vh^{-1}, hu)} \right)$$

ρ está bien definido porque para

$$\xi \left(\sum_{v \in \delta^{-1}(z)} \sum_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} m_{(v,u)} \right) = \overline{\sum_{[v,u] \in \hat{\delta}^{-1}(z)} \frac{1}{|H|} \left(\sum_{h \in H} m_{(vh^{-1}, hu)} \right)}$$

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{v \in \delta^{-1}(z)} \bigoplus_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} M_{(v,u)} & \xrightarrow{\xi} & \left(\bigoplus_{[v,u] \in \hat{\delta}^{-1}(z)} M_{[v,u]} \right)_G \\ \pi_1 \downarrow & \nearrow \tilde{\xi} & \\ \bigoplus_{v \in \delta^{-1}(z)} \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} M_{(v,u)} \right)_G & \xrightarrow{(\rho_M)_z} & \\ \pi_2 \downarrow & \nearrow & \\ \left(\bigoplus_{v \in \delta^{-1}(z)} \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} M_{(v,u)} \right)_G \right)_H & & \end{array}$$

- Sean $\varphi = \langle U, \alpha, \beta \rangle, \varphi' = \langle U', \alpha', \beta' \rangle \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G\hat{X}, {}_H Y)$, entonces, para cada $M \in \text{Fun}(\hat{X}, k\text{-Vec})$ se tiene que $(\varphi + \varphi')_* = \varphi_* + \varphi'_*$. Esto es porque

$$\left(\bigoplus_{u \in (\beta \sqcup \beta')^{-1}(y)} M_u \right)_G \cong \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u \right)_G \oplus \left(\bigoplus_{u' \in \beta'^{-1}(y)} M_{u'} \right)_G$$

y $(\varphi + \varphi')_*(M)(h, y) = \varphi_*M(h, y) + \varphi'_*M(h, y)$.

- Veamos que φ_* es exacta. Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \longrightarrow 0$ sucesión exacta en $Fun(\hat{X}, k\text{-Vec})$. $\varphi_f = \sum_{u \in \beta^{-1}(y)} f_u$, entonces tenemos que

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u \xrightarrow{\varphi_f} \bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M'_u \xrightarrow{\varphi_{f'}} \bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M''_u \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de k -espacios vectoriales.

Como $\varphi_f g \left(\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u \right) = g \varphi_f \left(\sum_{u \in \beta^{-1}(y)} m_u \right)$ entonces φ_f es morfismo de kG -módulos derechos.

Usando el lema del 9 para el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I_G \left(\bigoplus_u M_u \right) & \longrightarrow & I_G \left(\bigoplus_u M'_u \right) & \longrightarrow & I_G \left(\bigoplus_u M''_u \right) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_u M_u & \longrightarrow & \bigoplus_u M'_u & \longrightarrow & \bigoplus_u M''_u \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \left(\bigoplus_u M_u \right)_G & \longrightarrow & \left(\bigoplus_u M'_u \right)_G & \longrightarrow & I_G \left(\bigoplus_u M''_u \right)_G \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u \right)_G \xrightarrow{(\varphi_* f)_y} \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M'_u \right)_G \xrightarrow{(\varphi_* f')_y} \left(\bigoplus_{u \in \beta^{-1}(y)} M''_u \right)_G \longrightarrow 0$$

es exacta pues los dos primeros renglones son exactos. El primer renglón es exacto pues por el teorema de Maschke, kG es semisimple y por lo tanto, I_G es proyectivo.

- R_k restringido a \mathcal{D} es el funtor de representación.

Sea $(\underline{\quad}) : Fun(\hat{G}^\circ, k - Vec) \rightarrow (kG - mod)$ el funtor definido en un objeto M como

$$\underline{M} := \bigoplus_{x \in X} M(x)$$

Sea $f : M \rightarrow N$ transformación natural, entonces \underline{f} definida por

$$\underline{f} \left(\sum_{x \in X} m_x \right) = \sum_{x \in X} f_x(m_x)$$

satisface $\underline{f}(gm) = g\underline{f}(m)$ pues cada f_x hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M(x) & \xrightarrow{f_x} & N(x) \\ M(g,x) \downarrow & & N(g,x) \downarrow \\ M(gx) & \xrightarrow{f_{gx}} & N(gx) \end{array}$$

Tenemos que $\eta : kG - mod \rightarrow Fun(\hat{X}, R - mod)$ definida en un kG módulo T como $\eta(T)(G/G) = T$ y para $f : T_1 \rightarrow T_2$ definimos $\eta(f)_{G^\circ} = f$, de esta forma, η es una equivalencia de categorías con quasi inversa $(\underline{\quad})$.

Sea $\varphi = \langle {}_H U_G \rangle : G^\circ \rightarrow H^\circ$ entonces el funtor $\varphi_* : Fun(Fun(\hat{G}^\circ, k - Vec), Fun(\hat{H}^\circ, K - Vec))$ se identifica con $kU \otimes_{kG} \underline{\quad} : kG - mod \rightarrow$

$kH - mod$ por lo que $\varphi_* T$ es identificado como $\left(\bigoplus_{x \in G/G} \underline{T} \right)_G \cong kU \otimes_{kG}$

\underline{T} . El isomorfismo es dado por $\overline{\sum_{u \in U} \sum_{x \in X} m_{u,x}} \mapsto \sum_{u,x} u \otimes m_{u,x}$.

□

3.4. Haces fibrados sobre G -conjuntos

Una forma de generalizar el funtor R_k es cambiando $k - Vec$ por una categoría \mathcal{A} cerrada bajo colímites finitos, dado que $(M)_G$ es un colímite; en particular existirán coproductos y coproductos fibrados. En este caso las clases de isomorfismo de funtores forman un monoide y tomando su grupo

de Grothendieck como monoide podemos construir un funtor de \mathcal{C} en grupos abelianos. Aquí encontramos una diferencia, dado que φ_* tiene que ser aditiva en el sentido de que

$$\varphi_*(M \sqcup N) \cong \varphi_*(M) \sqcup \varphi_*(N)$$

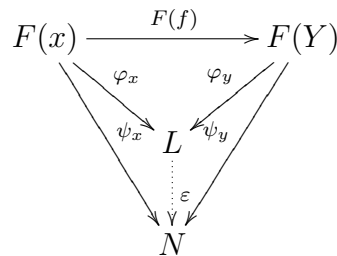
Donde $(M \sqcup N)(x) = M(x) \sqcup_{\mathcal{A}} N(x)$ y $\sqcup_{\mathcal{A}}$ denota el coproducto en \mathcal{A} .

Tenemos que φ_* no necesariamente exacta, aunque la exactitud tenga sentido. Un contraejemplo de que φ_* no necesariamente es un funtor exacto es tomando k un campo de característica p . Sean X, Y triviales, es decir, conjuntos con un solo elemento y $\varphi = Def_{G/N}^G$ donde $N \triangleleft G$ y $p \mid |N|$. Por el criterio de Higman, φ no puede ser exacto.

Dos ejemplos que podemos obtener de esta forma son el anillo de Burnside y el anillo de Green para una campo k de característica p , tomando $\mathcal{A} = set$ y $\mathcal{A} = k-Vec$ respectivamente, este último tomando el grupo de Grothendieck del monoide de clases de isomorfismo de kG -módulos finitamente generado, módulo las sucesiones exactas cortas que se dividen, lo cual veremos más adelante.

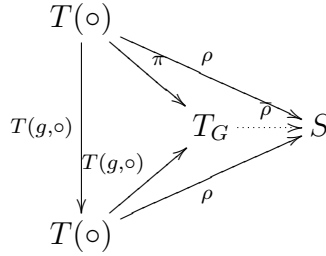
Definición 3.8. ■ \mathcal{A} una categoría, un G -objeto de \mathcal{A} es un funtor $T : {}_G\hat{\circ} \rightarrow \mathcal{A}$. Notemos que un G objeto define una acción de G en $T(\circ)$ por automorfismos en \mathcal{A} .

- Sea J una categoría finita y $F : J \rightarrow \mathcal{A}$ un funtor. Un cocono de F Es el un objeto $N \in ob(\mathcal{A})$ y una familia de morfismos $\psi_x : F(x) \rightarrow L$ para cada $x \in ob J$ de tal forma que $\psi_x = \psi_y F(f)$ para todo morfismo $f : x \rightarrow y$ en la categoría J . Un colímite es un cocono finito, es decir, un objeto $L \in ob \mathcal{A}$ y funciones $\varphi_x : F(x) \rightarrow L$ tal que para (N, ψ) cocono de F , existe un único morfismo $\varepsilon : L \rightarrow N$ que hace conmutar el siguiente diagrama



- Dado T un G -objeto, definimos T_G como el colímite de $T : {}_G\hat{\circ}$. En este

caso particular la propiedad universal se traduce como



Definición 3.9. Sea \mathcal{A} una categoría de esqueleto pequeño con colímites finitos, definimos el functor $L_{\mathcal{A}}$ en objetos como $G_0(\text{Fun}(\hat{X}, \mathcal{A}))$.

Para $\varphi = \langle U, \alpha, \beta \rangle :_G X \rightarrow_H Y$ definimos el functor aditivo

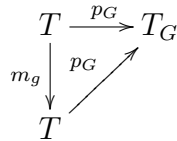
$$\varphi_* : \text{Fun}(\hat{X}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Fun}(\hat{Y}, \mathcal{A})$$

en un objeto $M : \hat{X} \rightarrow \mathcal{A}$ como

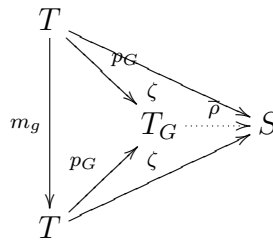
$$\varphi_* M(y) = \left(\bigsqcup_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u \right)_G$$

Con $M_u = M(\alpha(u))$. $\sqcup_{\mathcal{A}}$ denota el coproducto de \mathcal{A} y \sqcup denota el coproducto inducido por \mathcal{A} en $\text{Fun}(\hat{X}, \mathcal{A})$ respectivamente.

Notemos que para el G -Conjunto trivial, ${}_G \circ$, la categoría $\hat{G} \circ$ es la categoría del grupo G . Sea T un G -objeto en \mathcal{A} y $m_g : T \rightarrow T$. T_G denota el colímite del siguiente diagrama



Es decir,



Si denotamos el morfismos $M(g, x)$

$$\begin{array}{ccc}
 M & & \\
 \downarrow m_g & \searrow \zeta & \\
 & & M_G \xrightarrow{\exists \zeta} T \\
 & \nearrow \zeta' & \\
 M & &
 \end{array}$$

dado ζ tal que $\zeta m_g = m_g$ existe un único morfismo $\zeta' : M_G \rightarrow T$ tal que el diagrama anterior conmuta.

La acción de G en $\bigsqcup_{u \in \beta^{-1}(y)} M_u$, para cada $g \in G$ está dada por el morfismo

$$\bigsqcup_{u \in \beta^{-1}(y)} M(g, \alpha(u))$$

donde $M(g, \alpha(u)) : M_u \rightarrow M_{ug^{-1}} = M(\alpha(ug^{-1}))$.

$\varphi_* M(h, y) : \varphi_* M(y) \rightarrow \varphi_* M(hy)$, está definida por

$$\varphi_* M(h, y) = \bigsqcup_{u \in \beta^{-1}(y)} r_{h,u}$$

donde $r_{h,u} : M_u \rightarrow M_{hu}$. es la función identidad, recordando que $M_u = M(\alpha(u)) = M(\alpha(hu)) = M_{hu}$.

Definiremos $L_{\mathcal{A}}(\varphi) : L_{\mathcal{A}}(G X) \rightarrow L_{\mathcal{A}}(H Y)$ como el morfismo inducido por φ en los grupos de Grothendieck.

Teorema 3.10. $L_{\mathcal{A}} \in \text{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, \text{Ab})$.

Demostración. Muchas de las cosas que hay que probar se siguen del caso del functor de representación cambiando suma directa por coproducto. Daremos otra demostración de que dados ${}_G X, {}_H Y, {}_K Z \in \text{ob } \mathcal{C}$ y $\varphi = \langle U, \alpha, \beta \rangle : X \rightarrow Y$, $\psi = \langle V, \gamma, \delta \rangle : Y \rightarrow Z$ sin suponer nada más sobre \mathcal{A} , se tiene

$$\psi_* \varphi_* \cong (\psi \varphi)_*$$

Sea $\zeta : \bigsqcup_{[v,u] \in \delta^{-1}(z)} M_{[v,u]} \rightarrow \bigsqcup_{v \in \delta^{-1}(z)} \bigsqcup_{u \in \beta^{-1}(\gamma(v))} M_{(v,u)}$ el morfismo $\bigsqcup_{[v,u]} t_{[v,u]}$ donde $t_{[v,u]} : M(\alpha(u)) = M_{[v,u]} \rightarrow \bigsqcup_{v,u} M_{(v,u)}$ es la inclusión de $M_{[v,u]} = M_{(v,u)}$ en el coproducto.

Sea $\xi : \bigsqcup_{v,u} M_{(v,u)} \rightarrow \bigsqcup_{[v,u]} M_{[v,u]}$ el morfismo $\bigsqcup_{(v,u)} r_{(v,u)}$ donde $r_{(v,u)}$ es la inclusión de $M_{(v,u)}$ en el coproducto, identificando a $M_{(v,u)}$ con $M_{[v,u]}$ nuevamente.

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{[v,u]} M_{[v,u]} & \xrightarrow{\zeta} & \bigsqcup_v \bigsqcup_u M_{(v,u)} \\
 \xi \longleftarrow & & \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
 \left(\bigsqcup_{[v,u]} M_{[v,u]} \right)_G & & \bigsqcup_v \left(\bigsqcup_u M_{(v,u)} \right)_G \\
 & \nearrow s_v & \downarrow \pi_2 \\
 \left(\bigsqcup_u M_{(v,u)} \right)_G & & \left(\bigsqcup_v \left(\bigsqcup_u M_{(v,u)} \right)_G \right)_H
 \end{array}$$

Donde $s_v : \left(\bigsqcup_u M_{(v,u)} \right)_G \rightarrow \bigsqcup_v \left(\bigsqcup_u M_{(v,u)} \right)_G$ son las inclusiones al coproducto. Sea $\pi_1 = \bigsqcup_v \pi_v$ donde

$$\pi_v : \left(\bigsqcup_u M_{(v,u)} \right) \rightarrow \left(\bigsqcup_u M_{(v,u)} \right)_G$$

son las proyecciones al cociente.

Sea $g \in G$, veamos que $\pi_1 \zeta m_g = \pi_1 \zeta$.

$$\begin{aligned}
 \pi_1 \left(\bigsqcup_{[v,u]} t_{[v,u]} \right) \left(\bigsqcup_{[v,u]} M(g, \alpha(u)) \right) &= \pi_1 \bigsqcup_{[v,u]} (t_{[v,u]} M(g, \alpha(u))) \\
 &= \pi_1 \bigsqcup_{[v,u]} t_{[v,ug]} \\
 &= \pi_1 n_g \bigsqcup_{[v,u]} t_{[v,u]} \\
 &= \pi_1 \bigsqcup_{[v,u]} t_{[v,u]}
 \end{aligned}$$

Esto pues $\pi_1 n_g = \pi_1$ para n_g el morfismo de la acción de G en $\bigsqcup_{v,u} M_{(v,u)}$.

Por lo tanto, existe $\zeta' : \left(\bigsqcup_{[v,u]} M_{[v,u]} \right)_G \rightarrow \bigsqcup_v \left(\bigsqcup_u M_{(v,u)} \right)$ tal que $\pi_1 \zeta = \zeta' \pi$.

Análogamente existe $\xi' : \bigsqcup_v \left(\bigsqcup_u M_{(v,u)} \right)_G \rightarrow \left(\bigsqcup_{[v,u]} M_{[v,u]} \right)_G$, tal que $\xi' \pi_1 = \pi \xi$.

Más aún, como H actúa trivialmente en $\left(\bigsqcup_{[v,u]} M_{[v,u]} \right)_G$, entonces existe $\xi'' : \left(\bigsqcup_v \left(\bigsqcup_u M_{(v,u)} \right)_G \right)_H \rightarrow \left(\bigsqcup_{[v,u]} M_{[v,u]} \right)_G$.

tal que $\xi'' \pi_2 = \xi'$.

Ahora, por la definición de colímite, las proyecciones π_1, π_2, π son epimorfismos, esto pues tomando

$$\bigsqcup_{[v,u]} M_{[v,u]} \xrightarrow{\pi} \left(\bigsqcup_{[v,u]} M_{[v,u]} \right)_G \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} T$$

α y β son dos morfismos distintos que cumplen $\alpha\pi = \beta\pi$, y dado que $\pi m_g = \pi$ se tiene que α está determinado por la propiedad universal del colímite y es igual a β .

Sea $\zeta'' = \pi_2 \zeta'$ entonces $\pi \zeta'' \xi'' = \pi$ y por lo tanto, $\zeta'' \xi'' = 1$. Análogamente tenemos $\xi'' = \zeta''$.

Sea η la transformación natural que se obtiene de ζ'' , es decir,

y ρ la transformación natural que se obtiene de ξ'' , entonces $(\psi\varphi)_*$ es naturalmente isomorfo a $\psi_*\varphi_*$ e inducen el mismo morfismo en el grupo de Grothendieck. \square

Proposición 3.11. *Sea G un grupo finito y X un G -conjunto, entonces las siguientes categorías son equivalentes*

$$Fun(\hat{X}, set) \cong G - set_{\downarrow X}$$

Demostración. Definimos η funtor de $Fun(\hat{X}, set)$ en $G - set_{\downarrow X}$ como

$$\begin{aligned} \eta(M) &= (T_M, a_M) \\ T_M &= \bigsqcup_{x \in X} M(x) \\ a_M(m) &= x \text{ si } m \in M(x) \end{aligned}$$

Sea $f : M \rightarrow N$ transformación natural, $f = (f_x)_{x \in X}$, $f_X : M(x) \rightarrow N(x)$, entonces $\epsilon = \bigsqcup_{x \in X} f_x : \bigsqcup_{x \in X} M(x) \rightarrow \bigsqcup_{x \in X} N(x)$ satisface

$\epsilon(gm_x) = g\epsilon(m_x)$ por ser f natural, por lo tanto, induce un morfismo de G -conjuntos $\eta(f) = \epsilon : T_M \rightarrow T_N$.

Sea ρ el funtor definido en un objeto (T, a) como $\rho(T, a) := S_{T,a}$

$$S_{T,a}(x) = a^{-1}(x)$$

Para $b : (T_1, a_1) \rightarrow (T_2, a_2)$ tal que $a_2b = a_1$ definimos $\rho(b) = b|_{T_1} : a^{-1}(x) \rightarrow a_2^{-1}(x)$. Esta resulta una transformación natural y η, ρ resultan mutuamente inversas. \square

Corolario 3.12.

$$G_0Fun(\hat{X}, set) \cong B(G(X))$$

Demostración. El funtor $\eta : Fun(\hat{X}, set) \rightarrow G - set_{\downarrow X}$ manda coproductos en coproductos y por lo tanto, η induce un isomorfismo en los grupos de Grothendieck. \square

Ejemplo 3.13. ■ L_{set} es equivalente al anillo de Burnside como funtor, esto se obtiene restringiendo a \mathcal{D}_R obtenemos el anillo de Burnside.

- L_{k-Vec} es equivalente al funtor de Green $a(k_)$, para esto vemos que el funtor de Green se obtiene como el grupo de Grothendieck de kG -módulos generados, módulo las sucesiones exactas que se dividen.

Finalmente, esta construcción nos da una versión explícita de la estructura funtorial de Dress de los funtores antes citados y una forma de construir funtores a partir de ciertas categorías que nos dan ejemplos clásicos de funtores en biconjuntos.

Como conclusión, la categoría $Fun_R(\mathcal{C}_R, R - mod)$ es otra forma de estudiar a la categoría de funtores de biconjuntos desde el punto de vista de los G -Conjuntos y enlazar conceptos de los funtores de Mackey que suelen ser más sencillos desde el punto de vista de Dress y viceversa. Además $Fun_R(\mathcal{C}_R, R - mod)$ es una generalización de la categoría de biconjuntos que nos permite estudiar estos funtores desde el punto de vista de la aditivización de la categoría de biconjuntos.

Bibliografía

- [1] A. Dress. Contributions to the theory of induced representations, volume 342 of Lecture Notes in Mathematics, pages 183–240. Springer-Verlag, 1973.
- [2] H. Lindner. A remark on Mackey functors. *Manuscripta Math.*, 18:273–278, 1976.
- [3] Bouc, S. *Biset Functors for Finite groups*. Springer, Berlin, 2010.
- [4] Bouc, S. *Green functors and G -sets*. Springer, Berlin, 1997.
- [5] Bouc, S. Stancu, R. Thévenaz J. Simple Biset functors and Double Burnside ring. arXiv: <http://arxiv.org/abs/1203.0195>. March, 2012.
- [6] Bouc, S. Fused Mackey functors. arXiv: 1303.6875v1.
- [7] Lindner, H. A remark of Mackey functors. *Manuscripta Mathematica* v. 18 n. 3 (1976). pages 273-278.
- [8] Webb P. A guide to Mackey Functors. *Handbook of algebra* v. 2 (North-Holland), 2000.
- [9] Nakaoka, H. A Mackey-functor theoretic interpretation of biset functors. <http://arxiv.org/abs/1311.4044>. November, 2013.
- [10] Hartmann, R. Yalçın E. Generalized Burnside Rings and group cohomology. *Journal of Algebra* volume 310. April 2007.
- [11] I. Hambleton, L. R. Taylor, and E. B. Williams. Mackey functors and bisets. *Geom. Dedicata*, 148:157–174, 2010.

Indice alfabético

- $B(G)$, 2.
- $G \setminus X$, 2.
- $[G \setminus X]$, 2.
- $s(G)$, 2.
- G° , 18, 40.
- $[s(G)]$, 2.
- Gr , 17.
- Ab , 45.
- \mathcal{O}_G , 1.
- G_x , 1.
- Ind_H^G , 7.
- Res_H^G , 7.
- $Inf_{G/N}^G$, 7.
- $Def_{G/N}$, 7.
- $Iso(\varphi)$, 7.
- ${}_G U_H$, 6.
- \times_H , 6.
- $\text{Span}(G - \text{set})$, 12.
- Ω_R , 10.
- $\mathcal{S}_{G,R}$, 43.
- \mathcal{C} , 39.
- \mathcal{D} , 37.
- $Fun_R(\mathcal{C}_R, R - \text{mod})$, 39.
- $Fun_R(\mathcal{D}_R, R - \text{mod})$, 39.
- $Fun_R(\mathcal{S}_R, R - \text{mod})$, 42.
- $Add(\mathcal{D})$, 37.
- \hat{X} , 46.
- $Fun(\hat{X}, k - \text{Vec})$, 46.
- R_k , 46.
- $L_{k-\text{Vec}}$, 56.
- $Fun(\hat{X}, \mathcal{A})$, 55.
- $L_{\mathcal{A}}$, 56.
- M_G , 46, 55.
- M^G , 40.
- Anillo de Burnside, 2.
- Aditivización de una categoría preaditiva, 37
- Biconjunto, 6.
- Colímite, 55.
- Descomposición de Bouc, 9.

- Formula de Mackey, 29.
- Funtor en biconjuntos, 10.
- Funtor de Green, 59.
- Funtor de Mackey (Dress), 11.
- Funtor de Mackey (Green), .
- Funtor de Mackey (Lindner), 12.
- Grupo de Grothendieck, 2.
- Haz vectorial sobre G -conjuntos, 46.
- Haz fibrado sobre G -conjuntos, 53.