UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Instituto de Física y Matemáticas
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Centro de Ciencias Matemáticas
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

"TEORÍA DE RAMSEY Y AMENABILIDAD"

Tesis que para optar por el grado de Maestro en Ciencias en el área de Matemáticas presenta:

L. C. F. M. René Rodríguez Aldama

Supervisado por:

Dr. Ulises Ariet Ramos García
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

Morelia, Michoacán
Enero, 2018

Dedicado a Yola, Ale, Aixa y a la memoria de mi padre. Porque ustedes lo son todo para mí.

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a distintas personas e instituciones, la lista es muy extensa pero trataré de ser conciso. Primero que nada agradezco a mis padres por darme la vida y una educación digna, que, a pesar de las dificultades mi madre Yolanda siempre ha estado para protegerme y sobre todo quererme, sin ti no sería nadie. A mi hermana Alejandra porque sin ella no sería la persona que soy hoy porque tú me has enseñado la importancia de la familia y del trabajo duro. Mi familia me ha enseñado a nunca darme por vencido y creer en mis sueños.

Agradezco a todos mis profesores de todos los niveles educativos y del nivel superior tanto del Centro de Ciencias Matemáticas como de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas e instituto de Física y Matemáticas porque ellos son mis guías y mis mentores, me han guiado por el buen camino y este logro es suyo también. En especial quiero agradecer a mi asesor Ariet porque me ha apoyado mucho desde el principio, me ha ayudado a mejorar en muchos aspectos y juntos hemos aprendido otras cosas más.

Agradezco a todos mis compañeros y amigos de todas partes porque ellos me han enseñado el trabajo en equipo y que uno siempre puede tener ratos de diversión infinita. A todas las personas que me han apoyado incondicionalmente y a todos mis conocidos porque como siempre he dicho todos aprendemos de todos.

Agradezco al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico brindado el cual ha influído en la culminación de mis estudios, así como al Centro de Ciencias Matemáticas por su hospitalidad y apoyo. Agradezco al Instituto de Física y Matemáticas, a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH) y a la Universidad Nacional autónoma de México (UNAM), tanto a las instituciones como a sus trabajadores que se esfuerzan día a día por ofrecer un mejor servicio.

Mi agradecimiento para Aixa, porque ella me ha apoyado desde el principio de este proyecto. Ella me ha hecho crecer como persona, estudiante y amigo, gracias a ella todo esto es posible y sé que juntos lograremos nuestros sueños y metas.

Por último agradezco a la vida y a mi nación que me han dado la oportunidad de vivir tantas aventuras y tantos momentos increíbles...

Índice

Resumen

Este proyecto pertenece a la frontera de muchas áreas de las matemáticas. Una es la Teoría de Conjuntos, que, a lo largo del texto el autor expresa sus preferencias en cuánto a técnicas concierne, especialmente, las técincas prestadas de la combinatoria infinita tal como la Teoría de Ramsey. A grandes rasgos, el tema principal de este documento es la propiedad de Amenabilidad la cual es una propiedad muy deseable para un grupo. En el primer capítulo damos todos los prelimares para poder entender este concepto tomando definiciones de Topología y del Análisis Funcional. Después, hablamos acerca de un grupo muy peculiar, el grupo de Thompson, el cual tiene características muy interesantes y en este mismo capítulo mencionamos algunas de sus propiedades. En el tercer capítulo estudiamos la interacción entre la Teoría de Ramsey y los espacios de medidas, como una consecuencia podemos crear un marco adecuado y más estructurado para estudiar la amenabilidad del grupo de Thompson. En el cuarto capítulo, estudiamos una forma equivalente a la amenabilidad que tiene el sabor de la teoría de Ramsey. En el quinto y último capítulo damos algunas conclusiones que resultan de este trabajo así como preguntas que el autor considera son la manera más natural de continuar con la investigación en esta línea. En este momento es importante mencionar que esperamos que el lector disfrute su lectura y lo más importante es que esperamos que disfrute su viaje a través de las páginas.

Palabras clave: Amenabilidad, Teoría de Ramsey, Grupo de Thompson, Combinatoria Infinita, Espacios de Medida.

Abstract

This project lies on the border of several branches of Mathematics. One is Set Theory, along the text the author expresses his preferences when referring to techniques, specially, the techinques used from Infinite Combinatorics such as Ramsey Theory. Roughly, this document is all about the property of Amenability, which is a really desirable property for a group. In chapter one we give all of the preliminaires in order to understand this concept, we take definitions from Topology and Functional Analysis. Afterwards, we talk about a particular group, Thompson's group, that has many intriguing features and we describe some of its properties. In the third chapter, we develop the interplay between Ramsey Theory and the space of measures, and as a consequence, we can build up a more structural frame to study Thomson's group and more precisely, its amenability. In the forth chapter, we study an equivalent statement to amenability which has the Ramsey flavour. In the last chapter, of course we give some conclusions and additional remarks from all of what has been done, besides, some questions are posed as a result of this work and that (to the extent of the author) are the right way to follow on a future investigation. At this point it is appropriate to mention that we hope the reader will find a comfortable reading and the most important thing that he/she has some fun and enjoys his/her travel through the pages.

0. Introducción

Uno de los atributos más bellos de las matemáticas es la interacción que existe entre diversas áreas de investigación de la misma. Un ejemplo claro de esto es el uso de técnicas prestadas de la teoría de conjuntos y del análisis funcional aplicadas a problemas o teorías en otras disciplinas que lidian con objetos infinitos con más estructura, donde, su uso en ocasiones simplifica pruebas de hechos ya conocidos.

Más concretamente, uno de los arquetipos de este fenómeno es la bien conocida teoría de Ramsey ya que ha mostrado ser muy fructífera y por lo tanto muy investigada. Desde los trabajos en lógica de Frank P. Ramsey, en los cuales aisló el resultado que se convertiría en el importante Teorema de Ramsey en combinatoria, se han publicado un sinfín de resultados de esta índole; uno de los que ha motivado el presente trabajo es justamente el Teorema de Neil Hindman [3]:

Teorema. *Para cualquier coloración finita de* $\mathbb{N}$ *existe un conjunto infinito tal que todas sus sumas finitas tienen el mismo color.*

Este enunciado es puramente combinatorio y a pesar de que la prueba original tiene el mismo enfoque, existe una prueba más sencilla debida a Fred Galvin que no fue publicada en la cual se utiliza un ultrafiltro idempotente sobre $\mathbb{N}$; los ultrafiltros son un artilugio muy utilizado en el ámbito del infinito. A su vez, Steven Glazer se dio cuenta que esto era inmediato usando un bien conocido lema atribuido a Robert Ellis y a Katsui Numakura el cual expresa que en semigrupos topológicos compactos dichos ultrafiltros siempre existen, la asociatividad del semigrupo es esencial para probar este resultado. Un objetivo del presente trabajo es exponer conjeturas que son generalizaciones de estos dos teoremas al ámbito no asociativo, éstas fueron descubiertas y estudiadas por Justin Moore [5]. El presente trabajo es el resultado de un minucioso análisis de estos trabajos.

La motivación original de los trabajos de Moore [4] fue estudiar el concepto de amenabilidad de un grupo discreto: un grupo discreto G es amenable si y sólo si existe una medida de probabilidad $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0, 1]$ finito aditiva que es invariante bajo la acción de traslación. La propiedad de amenabilidad fue aislada y estudiada por John Von Neumann en sus trabajos sobre la paradoja de Banach-Tarski [7] y más tarde por Mahlon Day [2] en conexión con el análisis funcional, desde entonces esta propiedad ha sido bastante investigada [6] por lo que tiene muchas formas equivalentes y además ha jugado un rol interdisciplinario muy importante.

Uno de los problemas abiertos más antiguos que concierne a la amenabildad de un grupo específico es determinar si el grupo de Thompson F es amenable. El grupo de Thompson F se puede definir de muchas maneras pero la más sencilla de describir es la siguiente: denotamos a F por el conjunto de todos los automorfismo del intervalo $[0, 1]$ lineales por pedazos y que tienen pendiente racional, F con la operación de composición es un grupo y además el grupo de Thompson admite una presentación infinita con conjunto de generadores $\{ x_n : n \in \omega \}$ y para todo $i < n$ se satisface la relación $x_{n+1} = x_i^{-1} x_n x_i$, denotamos al elemento x_0 por A y a x_1 por B. La amenabilidad de F fue estudiada por el mismo Richard Thompson y desde entonces por muchos autores más [1], dicen los expertos que casi cualquier pregunta relativa a F es un verdadero reto y esto ha sido comprobado con el problema de su amenabilidad. En los artículos estudiados se dan criterios tipo Ramsey de la amenabilidad y, con ayuda de la interacción entre los teoremas antes mencionados en el ámbito no asociativo se propone un método muy interesante para atacar éste problema abierto.

Todos los resultados aquí descritos son debidos a Justin Moore a menos que se especifique lo contrario o que sean resultados bien conocidos. En el primer capítulo estudiamos la estructura general del espacio de medidas de probabilidad sobre un sistema binario arbitrario S. En el segundo capítulo describimos la manera en la que pensamos al grupo de Thompson y describimos una condición suficiente para la amenabilidad del mismo. En el tercer capítulo exponemos la generalización del Teorema de Hindman, enunciamos la generalización del Lema de Ellis y damos algunas aproximaciones a los mismos, también se muestra la relación existente entre ambas generalizaciones y se estudian las medidas idempotentes dentro de un compacto muy particular. En el cuarto y último capítulo mostramos los criterios tipo Ramsey para la amenabilidad de un grupo discreto así como también se estudia la no amenabilidad en este mismo marco.

1. Medidas de probabilidad

En este capítulo daremos las definiciones preliminares que nos acompañarán a lo largo del presente trabajo. Empezaremos con un conjunto arbitrario no vacío S y definiremos al conjunto de medidas de probabilidad finito aditivas sobre S, veremos que puede ser dotado con una topología natural por lo que nos referiremos a él con el sustantivo *espacio*. Más adelante a S lo enriqueceremos con una operación binaria y veremos de que manera interactúa esta operación con la topología mencionada, después daremos una caracterización de algunas subclases de este espacio en el caso cuando $|S| = \aleph_0$, donde $\aleph_0$ es la cardinalidad de los números naturales $\mathbb{N}$.[1] Denotamos al conjuto potencia del conjunto S por $\mathcal{P}(S)$ y $[S]^{<\omega}$ es el conjunto de subconjuntos finitos de S.

Sea S un conjunto no vacío, definimos a $Pr(S)$ como el conjunto de medidas de probabilidad finito aditivas, más precisamente, $\mu \in Pr(S)$ si y sólo si

(1) $\mu : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$,

(2) $\mu(S) = 1$,

(3) $\forall n \in \omega\ \forall\{A_i \ : \ i \in n\}\ (\forall i \neq j A_i \cap A_j = \emptyset \implies \mu(\bigcup_{i\in n} A_i) = \sum_{i\in n} \mu(A_i))$.

Nuestro primer objetivo será dotar al conjunto $Pr(S)$ con una topología, para esto se describirá un encaje del conjunto $Pr(S)$ dentro del conjunto $\ell_\infty(S)^*$[2]. Cada $\mu \in Pr(S)$ define una función $F_\mu : \ell_\infty(S) \to \mathbb{R}$ dada por $f \mapsto \int f\ d\mu$; no es díficil ver que $F_\mu \in \ell_\infty(S)^*$ y para cada $f \geq 0$ se cumple que $F_\mu(f) \geq 0$ y $F(1) = 1$, además, esta asociación es biyectiva. Esta identificación nos dice no sólo que $Pr(S) \hookrightarrow \ell_\infty(S)^*$ si no que $Pr(S)$ se puede ver como un subconjunto de la bola unitaria de $\ell_\infty(S)^*$.

Ahora, para cada $f \in \ell_\infty(S)$ denotamos por $e_f : \ell_\infty(S)^* \to \mathbb{R}$ al mapeo evaluación, a saber, $F \mapsto F(f)$. Así, podemos definir una topología sobre $\ell_\infty(S)^*$ la cual denotamos por $\tau_{deb^\star}$ y la llamamos la topología débil estrella ya que es la topología más pequeña que hace continuas a todos los mapeos evaluación. Notemos que la topología inducida por la norma del operador es más fina que $\tau_{deb^\star}$ y que las medidas con soporte finito y no vacío[3] son densas en $Pr(S)$ con la topología débil.

[1] $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, ω es el primer ordinal infinito y por lo tanto $n \in \omega$ será tratado como un ordinal.

[2] El símbolo $\ell_\infty(S)$ denota el conjunto de funciones $f : S \to \mathbb{R}$ acotadas, este espacio es un espacio de Banach con la norma del supremo, y $\ell_\infty(S)^*$ denota el conjunto de funcionales lineales acotados que es un espacio de Banach con la norma del operador.

[3] Definimos el soporte de una medida como el conjunto $supp(\mu) = \{ s \in S : \mu(\{ s \}) > 0 \}$.

Como
$$Pr(S) = \bigcap_{\substack{f \in \ell_\infty(S) \\ f \geq 0}} e_f^{-1}([0,\infty)) \cap e_{\mathbf{1}}^{-1}(\{1\})$$
entonces $Pr(S)$ es cerrado y por lo tanto compacto en $\tau_{deb^\star}$ ya que gracias al teorema de Banach-Alaoglu la bola unitaria es compacta.

Viendo a los elementos de S como masas puntuales tenemos que $S \subseteq Pr(S)$ y también cada ultrafiltro define una medida de probabilidad finito aditiva por lo que $\beta S \subseteq Pr(S)$. Si $(S, \star)$ es un sistema binario tenemos una forma natural de extender $\star$ a βS de la siguiente manera, Dados $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta S$:

$$W \in \mathcal{U} \star \mathcal{V} \leftrightarrow \{u \in S : \{v \in S : u \star v \in W\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Nos gustaría poder extender $\star$ a todo $Pr(S)$ de tal manera que esta extensión coincida con la extensión a βS; esa es nuestra siguiente tarea.

Sean S_1, S_2 no vacíos y sean $\mu \in Pr(S_1)$, $\nu \in Pr(S_2)$. Entonces $\mu \otimes \nu : \mathcal{P}(()S_1 \times S_2) \to [0,1]$ dada por $E \mapsto \int \nu(E^x)\ d\mu$ es una medida de probabilidad en $S_1 \times S_2$, equivalentemente,
$$\mu \otimes \nu(f) = \int \int f(x,y) d\nu(y) d\mu(x)$$
donde $f \in \ell_\infty(S)$. Tenemos así un operador $\otimes : Pr(S_1) \times Pr(S_2) \to Pr(S_1 \times S_2)$ tal que $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$. Como $Pr(S_1) \times Pr(S_2) \subseteq \ell_\infty(S_1)^* \times \ell_\infty(S_2)^*$ y $Pr(S_1 \times S_2) \subseteq \ell_\infty(S_1 \times S_2)^*$ entonces nos podemos preguntar sobre la continuidad de $\otimes$.

Teorema 1.1. *Sean S_1, S_2 no vacíos, se cumple lo siguiente.*

(1) *Para todo $\nu \in Pr(S_2)$ el mapeo $G_\nu : Pr(S_1) \to Pr(S_1 \times S_2)$ tal que $\mu \mapsto \mu \otimes \nu$ es continuo.*

(2) *Si $\mu \in Pr(S_1)$ tiene soporte finito entonces el mapeo $G_\mu : Pr(S_2) \to Pr(S_1 \times S_2)$ tal que $\nu \mapsto \mu \otimes \nu$ es continuo.*

Demostración. (1) Sea $(\mu_d)_{d \in D}$ una red en $Pr(S_1)$ tal que $\mu_d \to \mu$[4]. Veamos que $\mu_d \otimes \nu \to \mu \otimes \nu$. Sea $f \in \ell_\infty(S_1 \times S_2)$, definamos $g \colon S_1 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \int f(x,y) d\nu(y)$, es fácil ver que $g \in \ell_\infty(S_1)$ y que $\mu_d \otimes \nu(f) = \mu_d(g) \to \mu(g) = \mu \otimes \nu(f)$.

(2) Sea $(\nu_d)_{d \in D}$ una red en $Pr(S_2)$ tal que $\nu_d \to \nu$ y sea $f \in \ell_\infty(S_1 \times S_2)$. Como $|supp(\mu)| < \aleph_0$ tenemos que para cualquier $g \colon S_1 \to \mathbb{R}$ se cumple que

$$\int g(x) d\mu(x) = \int g(s) d\mu(x) = \sum_{s \in supp(\mu)} g(s),$$

[4]Como la topología de $Pr(S)$ es la topología débil, esto es equivalente a decir que para cada $f \in \ell_\infty(S)$ se cumple que $\mu_d(f) \to \mu(f)$

así, para $y \in S_2$ fija

$$\sum_{s \in supp(\mu)} f(s,y) = \int f(s,y) d\mu(x) = \int f(x,y) d\mu(x).$$

Por lo tanto tenemos que

$$\mu \otimes \nu_d(f) = \int \int f(x,y) d\nu_d(y) d\mu(x) = \sum_{s \in supp(\mu)} \int f(s,y) d\nu_d(y)$$

usando la linealidad de la integral y la hipótesis, el término anterior es igual a

$$\int \sum_{s \in supp(\mu)} f(s,y) d\nu_d(y) \to \int \sum_{s \in supp(\mu)} f(s,y) d\nu(y)$$

usando una vez más la linealidad concluimos

$$\sum_{s \in supp(\mu)} \int f(s,y) d\nu(y) = \int \int f(x,y) d\nu(y) d\mu(x) = \mu \otimes \nu(f). \qquad \square$$

Por último extendemos $\star$ a $Pr(S)$. Sea $\star\colon Pr(S) \times Pr(S) \to Pr(S)$ la función dada por $\mu \star \nu(f) = \mu \otimes \nu(f \circ \star)$. Es fácil ver que en efecto, ésta operación extiende bien a $\star$ y coincide con la extensión en βS, más aún, obtenemos automáticamente las conclusiones del teorema anterior para $\star$.

El siguiente objetivo es describir un poco la estructura general de $Pr(S)$ en el caso en que S es numerable, que es el caso que más nos interesa, el siguiente teorema nos dice como son las medidas en $Pr(S)$ que tienen soporte no vacío.

Dada $\mu \in Pr(S)$ para cada $A \subseteq S$ definimos $r_A = \sup \{ \mu(F) : F \in [A]^{<\omega} \}$; observemos que $r_{A \cup B} = r_A + r_B$ siempre que $A \cap B = \emptyset$.

Teorema 1.2. *Sea $S = \{ s_i : i \in \omega \}$ un conjunto numerable. Si $\mu \in Pr(S)$ tiene soporte no vacío entonces*

(1) *μ es σ-aditiva $\iff$ $\sum_{i \in \omega} \mu(\{ s_i \}) = 1$.*

(2) *μ no es σ-aditiva $\iff$ $\mathcal{I} = \{ A \subseteq S : \mu(A) = r_A \}$ es un ideal propio*[5].

Demostración. (1) Probaremos la implicación no trivial. Supongamos que

$$\sum_{i \in \omega} \mu(\{ s_i \}) = 1,$$

[5]Recuerde que un ideal es una subfamilia de $\mathcal{P}(S)$ que es cerrada bajo subconjuntos y bajo uniones finitas. El ideal es propio si no contiene al total y es no trivial si contiene a los conjuntos finitos.

y sea $(A_i)_{i\in\omega}$ una familia ajena por pares. Podemos suponer que ningún A_i es vacío pues μ ya es finito aditiva. Supongamos además, que forman una partición de S, queremos ver que $\sum_{i\in\omega}\mu(A_i)=1$. Tenemos que $M:=\sum_{i\in\omega}\mu(A_i)\leq 1$ porque 1 acota a todas las sumas parciales y si la desigualdad fuera estricta entonces existiría $N\in\omega$ tal que

$$M<\sum_{j=0}^{N}\mu(\{\,s_j\,\})\leq 1$$

pero $s_j\in A_{i_j}$ con lo que, agrupando los que pertenecen al mismo A_{i_j},

$$M<\sum_{j=0}^{N}\mu(\{\,s_j\,\})\leq\sum_{j=0}^{N}\mu(A_{i_j})$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $M=1$. En caso de que los A_i no formen una partición, consideramos $B_0=S\setminus(\bigcup_{i\in\omega}A_i)$ y para $i>0$ definimos $B_i=A_{i-1}$. Haciendo el cálculo tenemos

$$\sum_{i\in\omega}\mu(A_i)+\mu(B_0)=\sum_{j\in\omega}\mu(B_j)=1$$

por lo tanto

$$\sum_{i\in\omega}\mu(A_i)=1-\mu(B_0)=\mu(\bigcup_{i\in\omega}A_i).$$

(2) De nuevo probaremos la implicación no trivial. Supongamos que $\mu\in Pr(S)$ no es σ-aditiva, por (a) tenemos que

$$\sum_{i\in\omega}\mu(\{\,s_i\,\})<1.$$

Probaremos que $\mathcal{I}=\{\,A\subseteq S:r_A=\mu(A)\,\}$ es un ideal y para esto necesitaremos la siguiente afirmación.

Afirmación. *Sean $A,B\in\mathcal{P}(S)$ ajenos. $A\in\mathcal{I}$ y $B\in\mathcal{I}\iff A\cup B\in\mathcal{I}$.* Supongamos que $A\in\mathcal{I}$ y $B\in\mathcal{I}$ tenemos que $r_A=\mu(A)$ y $r_B=\mu(B)$ por lo que

$$r_{A\cup B}=r_A+r_B=\mu(A)+\mu(B)=\mu(A\cup B).$$

Ahora, si $\mu(A)>r_A$ o $\mu(B)>r_B$ entonces tendríamos

$$r_{A\cup B}=r_A+r_B<\mu(A)+\mu(B)=\mu(A\cup B).$$

Supongamos que $A\in\mathcal{I}$ y sea $X\subseteq A$, tenemos que $X\cup A\setminus X=A\in\mathcal{I}$ y como son ajenos vemos que $X\in\mathcal{I}$. Sean $A,B\in\mathcal{I}$ tenemos que $A\cup B=A\cup B\setminus A\in\mathcal{I}$ pues son ajenos y $B\in\mathcal{I}$ implica que $B\setminus A$ está en $\mathcal{I}$. Además, es trivial ver que $S\notin\mathcal{I}$, $\emptyset\in\mathcal{I}$ y $[S]^{<\omega}\subseteq\mathcal{I}$. $\square$

Es muy fácil encontrar medidas que no sean σ-aditivas y con soporte vacío, pero el teorema anterior nos da una sugerencia de cómo construir medidas con soporte no vacío y que no sean σ-aditivas: Simplemente tomemos $\mathcal{U} \in \beta(S)$ y definamos

$$\mu(A) = \begin{cases} r_A & A \notin \mathcal{U} \\ 1 - r_{S \setminus A} & A \in \mathcal{U} \end{cases}$$

No es difícil ver que $\mu \in Pr(S)$ y que cumple con lo estipulado.

2. El grupo de Thompson F

En este capítulo definiremos un sistema binario $\mathbb{T}$ el cual describirá de una manera muy precisa al grupo de Thompson F, veremos de que manera actúa F en $\mathbb{T}$ y cómo el problema de amenabilidad en F se puede reducir a una cierta forma de amenabilidad de $\mathbb{T}$, además, se propone una manera muy interesante de probar esta reducción.

2.1. $\mathbb{T}$ un modelo para F

Definimos la operación $\frown : \mathcal{P}([0,1])^2 \to \mathcal{P}([0,1])$ por

$$a^\frown b = \frac{1}{2}a \cup \frac{1}{2}(b+1).$$

Consideremos $(\mathbb{T}, \frown, \mathbf{1})$ el sistema binario generado libremente por $\mathbf{1} = \{1\}$. Los elementos de $\mathbb{T}$ serán los puntos de discontinuidad de automorfismos de $[0,1]$ de alguna función lineal por pedazos que los extienda y cada elemento de $\mathbb{T}$ describe una manera de asociar al $\mathbf{1}$ con la operación cuña y equivalentemente se pueden pensar como árboles binarios finitos con raíz. El sistema $(\mathbb{T}, \frown)$ será nuestro sistema binario principal.

Lo primero que haremos es ver que el Lema de Ellis no es cierto en $(\beta\mathbb{T}, \frown)$, es decir, $(\beta\mathbb{T}, \frown)$ no contiene un elemento idempotente. Definamos la función rango $rank : \mathbb{T} \to 0,1$ por recursión de la siguiente manera: $rank(\mathbf{1}) = 0$ y $rank(a^\frown b) = rank(a) + 1$. Ahora, si $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{T}$, entonces

$$\{u \in \mathbb{T} : rank(u) \text{ es impar}\} \in \mathcal{U}^\frown\mathcal{U}$$
$$\leftrightarrow \{u \in \mathbb{T} : \{v \in \mathbb{T} : rank(u^\frown v) = rank(u) + 1 \text{ es impar}\}\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$$
$$\leftrightarrow \{u \in \mathbb{T} : \{v \in \mathbb{T} : rank(u) \text{ es par}\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow \{u \in \mathbb{T} : rank(u) \text{ es par}\} \in \mathcal{U}.$$

Por lo tanto $\mathcal{U}$ no puede ser idempotente.

Ahora observemos que el Teorema de Hindman también falla para $\mathbb{T}$, es decir, existe una coloración $c : \mathbb{T} \to 2$ tal que c no es monocromática en las cuñas finitas de cualquier $X \in [\mathbb{T}]^\omega$. Consideremos la función $c : \mathbb{T} \to 2$ dada por $c(t) = rank(t)$ (mód 2). Notemos que $rank(a)$ y $rank(a^\frown b)$ tienen distinta paridad por lo que no puede existir ningún conjunto con más de dos elementos monocromático en cuñas finitas.

Para cualquier $a \in \mathbb{T}$ definimos a^+ como el elemento de $\mathbb{T}$ con tamaño $|a|$ pero todos los paréntesis asociados hacia la derecha. El par (a, a^+) describe una función de F la cual denotamos $a \to a^+$, en la que asociamos los elementos de a con los de a^+ en orden creciente y extendemos de manera lineal a todo el intervalo $[0, 1]$, tenemos así una función suprayectiva $\Phi : \mathbb{T} \to F^+$. Al subconjunto de los elementos en F que son de esta forma $a \to a^+$, lo denotaremos por F^+ ya que coinciden exactamente con los elementos positivos de la presentación infinita x_i de F mencionada en la introducción, así, este es un subsemigrupo de F y es bien sabido que todo elemento de F se puede expresar de la forma st^{-1} con $s, t \in F^+$. Para más información se refiere al lector al artículo de Cannon [1].

2.2. Condición suficiente para la amenabilidad de F

A continuación veremos como mostrar la amenabilidad de F a partir de una forma de amenabilidad para $\mathbb{T}$. Denotamos por Σ al conjunto de generadores de la presentación finita de F, a saber, $\Sigma = \{ A, B, A^{-1}, B^{-1} \}$. Definimos una acción parcial de F sobre $\mathbb{T}$ de la siguiente manera:

(1) $A((a^\frown b)^\frown c) = a^\frown(b^\frown c)$ y también $B(a^\frown((b^\frown c)^\frown d)) = (a^\frown(b^\frown(c^\frown d)))$,

(2) Si $f \in F$ entonces existe $n \in \omega$ tal que $f = g_n g_{n-1} \cdots g_0$ donde $g_i \in \Sigma$; así, ft está definido si y sólo si para cada $i \leq n$ el elemento g_i está definido en $(g_{i-1} \cdots g_0)t$.

Es un ejercicio sencillo el probar que ft está definido si y sólo si $\Phi(t)f^{-1} \in F^+$ y en este caso coinciden los valores por lo tanto tenemos que la función Φ es F-equivariante. Por comodidad, abreviaremos el enunciado f está definido en t por $\mathcal{D}(ft)$.

Definición 2.1. Una medida $\mu \in Pr(\mathbb{T})$ se llama F-invariante si cumple lo siguiente,

(1) $\mu(\{ t \in \mathbb{T} : \mathcal{D}(At) \wedge \mathcal{D}(Bt) \}) = 1$

(2) $\forall E \subseteq \mathbb{T}\ \mu(\{ At : \mathcal{D}(At) \wedge t \in E \}) = \mu(E) = \mu(\{ Bt : \mathcal{D}(Bt) \wedge t \in E \})$

Teorema 2.2. *El grupo de Thompson F es amenable si y sólo si existe $\mu \in Pr(F^+)$ tal que para cada $E \subseteq G$ tenemos $\mu(E \cdot A) = \mu(E) = \mu(E \cdot B)$.*

Demostración. Si F es amenable y μ lo testifica entonces para cada $E \subseteq F^+$ definimos $\nu(E) = \frac{1}{\mu(F^+)}\mu(E)$. Así, ν es obviamente una medida invariante y de probabilidad sobre F^+. Sea $\nu \in Pr(F^+)$ invariante bajo la trasalación de A y B, para todo $E \subseteq F$ definamos $\mu(E) = \nu(E \cap F^+)$. Veamos que esta es una medida invariante. Es fácil ver que $\mu \in Pr(F)$ por eso solamente haremos la invarianza. Observemos que $\mu(E \cdot A) = \nu((E \cdot A) \cap F^+) = \nu((E \cap F^+) \cdot A) = \nu(E \cap F^+) = \mu(E)$ y además $\mu(E \cdot A^{-1}) = \mu(EA^{-1}A) = \mu(E)$, un cálculo similar funciona para B y así para $g \in F$ tenemos que es producto de los generadores y tenemos que $\mu(E) = \mu(Eg)$. $\square$

Teorema 2.3. *Si existe $\mu \in Pr(\mathbb{T})$ que es F-invariante entonces F es amenable. En particular, si $\mu \in Pr(\mathbb{T})$ es idempotente entonces F es amenable.*

Demostración. Supongamos que μ es F-invariante sobre $\mathbb{T}$. Para cada $E \subseteq F^+$ definimos $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}[E])$, veamos que ν es una medida invariante. Es fácil ver que $\nu \in Pr(F^+)$. Queremos probar que para todo $E \subseteq F$ se cumple $\nu(E \cdot A) = \nu(E)$. Sea $E \subseteq F$, tenemos

$$v(E \cdot A) = \mu(\Phi^{-1}[E \cdot A]) = \mu(\{\, t \in \mathbb{T} : \Phi(t) \in E \cdot A \,\}) = \mu(\{\, t \in \mathbb{T} : \Phi(t)A^{-1} \in E \,\}).$$

Por la primera cláusula tenemos que el conjunto donde At no está definido tiene medida cero y además $\{\, t \in \mathbb{T} : \Phi(t)A^{-1} \notin F^+ \,\} = \{\, t \in \mathbb{T} : \neg\mathcal{D}(At) \,\}$. Así tenemos lo siguiente

$$\mu(\{\, t \in \mathbb{T} : \Phi(t)A^{-1} \in E \,\}) = \mu(\{\, yA^{-1} : \Phi(y) \in E \,\})$$
$$\mu(\{\, y \in \mathbb{T} : \Phi(y) \in E \,\}) = \mu(\Phi^{-1}[E]) = \nu(E).$$

Un cálculo similar funciona para B y con eso hemos probado la primera parte, ahora probaremos la segunda conclusión: sea $\mu \in Pr(\mathbb{T})$ tal que $\mu^\frown\mu = \mu$. La primera observación es que $\mu(\{\,\mathbf{1}\,\}) = \mu^\frown\mu(\{\,\mathbf{1}\,\}) = \mu \otimes \mu(\emptyset) = 0$ y además

$$\mu^\frown\mu(\{\, t \in \mathbb{T} : \exists a\ (t = \mathbf{1}^\frown a) \,\}) = \mu(\{\,\mathbf{1}\,\}) \cdot \mu(\mathbb{T}) = 0,$$

por la definición de medida producto y de $^\frown$. Se cumple que $\mu = \mu^\frown(\mu^\frown\mu) = (\mu^\frown\mu)^\frown\mu$, por la idempotencia. Sea $E \subseteq \mathbb{T}$ veamos que $\mu(E) = \mu(A \cdot E)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \mu(\{\, t \in E : \exists a\ \exists b\ \exists c\ t = (a^\frown b)^\frown c \,\}) \\
&= (\mu^\frown\mu)^\frown\mu(\{\, t \in E : \exists a\ \exists b\ \exists c\ t = (a^\frown b)^\frown c \,\}) \\
&= (\mu \otimes \mu) \otimes \mu(\{\, (a, b, c) \in \mathbb{T}^3 : (a^\frown b)^\frown c \in E \,\}) \\
&= \mu \otimes (\mu \otimes \mu)(\{\, (a, b, c) \in \mathbb{T}^3 : a^\frown(b^\frown c) \in A \cdot E \,\}) \\
&= \mu^\frown(\mu^\frown\mu)(\{\, t \in A \cdot E : \exists a\ \exists b\ \exists c\ t = a^\frown(b^\frown c) \,\}) = \mu(A \cdot E).
\end{aligned}$$

Nuevamente, un cálculo similar muestra que $\mu(B \cdot E) = \mu(E)$ y por lo tanto μ es F-invariante. $\square$

3. Teoría de Ramsey en $Pr(\mathbb{T})$

La condición del capítulo anterior es un manera muy intrigante de probar la amenabilidad del grupo de Thompson, veremos que el estudio de $Pr(\mathbb{T})$ y sus idempotentes tiene estrecha relación con la teoría de Ramsey y que por los resultados del presente capítulo, podemos observar que no es trivial dicha relación.

3.1. Versión no asociativa del Teorema de Hindman en $Pr(\mathbb{T})$

Necesitaremos algunas aproximaciones finitas de $\mathbb{T}$ y sus respectivos espacios de medidas de probabilidad para esto definimos $\mathbb{T}_n := \{\, t \in \mathbb{T} \colon |t| = n \,\}$ y $\mathbb{A}_n = Pr(T_n)$ y $\mathbb{A} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{A}_n$. Observemos que

$$\mathbb{A}_n = \{\, \lambda_0\mu_0 + \ldots + \lambda_k\mu_k \colon \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \,, \sum_i \lambda_i = 1 \wedge \mu_i \in \mathbb{T}_n \,\},$$

donde la suma y el producto son puntuales. Así $\mathbb{A}_n$ es convexo para toda n. Ya que las medidas de $\mathbb{A}$ tienen soporte finito y no vacío, podemos computar la operación $\frown$ restringida a $\mathbb{A}$ de la siguiente forma

$$\mu^\frown\nu(E) = \sum_{a^\frown b\in E} \mu(\{\, a \,\})\nu(\{\, b \,\}),$$

de hecho, $(\mathbb{A}, {}^\frown)$ es un sistema binario, en efecto, si $\mu \in \mathbb{A}_m$ y $\nu \in \mathbb{A}_n$ entonces

$$\mu^\frown\nu(\{\, t \,\}) \neq 0 \iff \sum_{a^\frown b\in\{\, t \,\}} \mu(\{\, a \,\})\nu(\{\, b \,\}) \neq 0 \iff t = a^\frown b$$

con $a \in \mathbb{T}_m$ y $b \in \mathbb{T}_n$ lo cual implica $t \in \mathbb{T}_{m+n}$ y en particular $\mu^\frown\nu(\mathbb{T}_{n+m}) = 1$, esto a su vez implica $\mu^\frown\nu \in \mathbb{A}_{n+m}$. Nuestro siguiente paso será definir un cierto límite de estos conjuntos de tal forma que nos de información sobre la topología de $Pr(S)$ para esto tomemos un ultrafiltro $\mathcal{U} \in \beta(\mathbb{N})$ si denotamos por $\eta(\mu)$ al conjunto de vecindades abiertas de μ, consideramos el subconjunto de $Pr(\mathbb{T})$ definido de la siguiente manera

$$\mathbb{A}_\mathcal{U} := \{\, \mu \in Pr(\mathbb{T}) \colon \forall W \in \eta(\mu) \ \{\, m \colon \mathbb{A}_m \cap W \neq \emptyset \,\} \in \mathcal{U} \,\}$$

observemos que $\mathbb{A}_\mathcal{U}$ es el $\mathcal{U}$-límite de los $\mathbb{A}_n$ en el hiperespacio $\mathcal{K}(Pr(\mathbb{T}))$ con la topología de Vietoris[6], esto implica que $\mathbb{A}_\mathcal{U}$ es un subespacio compacto no vacío y convexo de $Pr(\mathbb{T})$.

[6]El conjunto $\mathcal{K}(Pr(\mathbb{T}))$ es el conjunto de todos los subconjuntos compactos de $Pr(\mathbb{T})$, una base para la topología de Vietoris sobre este conjunto está dada por los conjuntos $\{\, \langle U_0, \ldots U_n\rangle :\ n \in \omega \wedge U_i \in \tau^*_{deb} \,\}$ donde $\langle U_0, \ldots U_n\rangle = \{\, A \in \mathcal{K}(Pr(\mathbb{T})) : A \subseteq \bigcup_{i<n} U_i \wedge \forall i < n \ A \cap U_i \neq \emptyset \,\}$.

Lema 3.1. *Si $\mathcal{U} \in (\beta(\mathbb{N}), +)$ es idempotente entonces $(\mathbb{A}_{\mathcal{U}}, \frown)$ es un sistema binario.*

Demostración. Sea $W \in \eta(\mu \frown \nu)$. Deseamos ver que $\{ n : \mathbb{A}_n \cap W \neq \emptyset \} \in \mathcal{U}$, usando la idempotencia de $\mathcal{U}$ esto es equivalente a probar que existe $X \in \mathcal{U}$ tal que para toda $m \in X$ se cumple que $A_m = \{ n : n + m \in A \} \in \mathcal{U}$. Por continuidad, existe $U \in \eta(\mu)$ tal que para todo $\mu' \in U$ se tiene que $\mu' \frown nu \in W$. Como $\mu \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$ existe $X \in \mathcal{U}$ tal que para cada $m \in X$ existe $\mu_m \in U \cap \mathbb{A}_m$. También existe $V_m \in \eta(\nu)$ tal que para todo $\nu' \in V_m$ se tiene que $\mu'_m \frown \nu' \in W$. Como $\nu \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$ tenemos que para cada $m \in X$ el conjunto $Y_m = \{ n : \mathbb{A}_n \cap V_m \neq \emptyset \} \in \mathcal{U}$ además es fácil ver que $Y_m \subseteq A_m$ y esto implica que $A_m \in \mathcal{U}$. $\square$

Proposición 3.2. *Si $\mathcal{B} \in [\mathcal{P}(\mathbb{T})]^{<\omega}$ y $\mathcal{U} \in (\beta(\mathcal{N}), +)$ un idempotente, entonces existe $\mu \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$ tal que $\mu \frown \mu \restriction \mathcal{B} = \mu \restriction \mathcal{B}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{B}$ es una subálgebra finita. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de átomos[7] de $\mathcal{B}$ y consideremos la familia

$$\mathcal{C} = \{ A \in \mathcal{A} \colon \{ m \in \mathbb{N} \colon A \cap \mathbb{T}_m \neq \emptyset \} \in \mathcal{U} \}.$$

Afirmación1. *Si $A \in \mathcal{A} \cap (\mathcal{P}(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{C})$ entonces $\forall \xi \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}\ \xi(A) = 0$.* Supongamos que no y sea $\xi \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$ tal que $\xi(A) > 0$. Consideramos $W = e^{-1}_{\chi_A}[(0, 1]]$ y observemos que W es vecindad de ξ por lo tanto $\{ m \colon \mathbb{A}_m \cap W \neq \emptyset \} \in \mathcal{U}$ y además $\{ m \colon A \cap \mathbb{T}_m = \emptyset \} \in \mathcal{U}$ tomando m testigo de la intersección, por una parte tenemos que existe $\mu \in \mathbb{A}_m$ tal que $\mu(A) = \mu(A \cap \mathbb{T}_m) > 0$ y por otro lado $\mu(A) = \mu(A \cap \mathbb{T}_m) = 0$.
Afirmación2. *Si $A \in \mathcal{C}$ entonces $\exists \xi \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}} \cap \beta(\mathbb{T})\ \xi(A) = 1$.* Como $A \in \mathcal{C}$ tenemos que $M := \{ m \in \mathbb{N} \colon A \cap \mathbb{T}_m \neq \emptyset \} \in \mathcal{U}$. Para cada $m \in M$ escogemos x_m tal que $x_m \in A \cap \mathbb{T}_m$ y consideremos la medida en $\beta(\mathbb{T}) \cap \mathbb{A}_m$ inducida por x_m, es decir, $\xi_m(A) = 1 \iff x_m \in A$ y 0 en otro caso. La sucesión ξ_m tiene $\mathcal{U}$-límite en $\beta(\mathbb{T})$, digamos, ξ. Veamos primero que $\xi \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$, si W es vecindad de ξ entonces el conjunto de índices de la sucesión tales que están en W está en el ultrafiltro pero esto implica que $\{ m \colon \mathbb{A}_m \cap W \neq \emptyset \} \in \mathcal{U}$. Ahora, si $\xi(A) = 0$ entones $V = e^{-1}_{\chi_A}[[0, 1)]$ sería vecindad de ξ y por lo tanto existiría m tal que $\xi_m \in V$ que a su vez diría $\xi_m(A) = 0$, pero esto contradiría que $x_m \in A$. Concluimos que $\xi(A) = 1$.

Gracias a la segunda afirmación tenemos que para cada $A \in \mathcal{C}$ existe una medida $\xi_A \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}} \cap \beta(\mathbb{T})$ y la asociación $A \mapsto \xi_A$ es inyectiva pues si $\xi_{A_1} = \xi_{A_2}$ tenemos que $1 = \xi_{A_1}(A_1) = \xi_{A_2}(A_1)$ por lo que $A_1 = A_2$. Sea $X = \{ \xi_A \colon A \in \mathcal{C} \}$.

Observemos que si $\xi_A, \xi_B \in X$ entonces $\xi_A \frown \xi_B \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}} \cap \beta(\mathbb{T})$ debido a la proposición anterior y a un cálculo rutinario, así, por ser bivaluada esta medida, debe de existir un único átomo C tal que $\xi_A \frown \xi_B(C) = 1$. Más aún, $C \in \mathcal{C}$ gracias a la

[7] Los átomos son los elementos minimales de $\mathcal{B}$. Las álgebras finitas siempre tienen átomos y es fácil probar que forman una partición del conjunto subyacente.

primera afirmación. Sobre X definiremos una operación de la siguiente manera, para cada par (ξ_A, ξ_B) definimos $\xi_A * \xi_B = \xi_C$ donde C es el único elemento de $\mathcal{C}$ tal que $\xi_A{}^\frown\xi_B(C) = 1$; esta operación está bien definida por la observación anterior y es fácil notar que para todos $\xi, \eta \in X$ tenemos $\xi^\frown\eta \restriction \mathcal{B} = \xi * \eta \restriction \mathcal{B}$.

Extendemos $* : X \times X \to X$ de la manera natural a una operación bilineal al espacio generado $\langle X \rangle \subseteq \ell_\infty(\mathbb{T})^*$ (notemos que $*$ es continua por ser bilineal en un espacio de dimensión finita) y como $\langle X \rangle$ es un espacio vectorial de dimensión finita debe de ser isomorfo (como espacio vectorial topológico) a un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Sea H la envolvente convexa de X en $\mathbb{R}^n$, observemos que $*$ mapea $H \times H$ en H y que para cada $\xi, \eta \in H$ tenemos que $\xi^\frown\eta \restriction \mathcal{B} = \xi * \eta \restriction \mathcal{B}$. Ahora, la función $* : H \to H$ dada por $\xi \mapsto \xi * \xi$ es continua y como H es compacto convexo, usando el teorema del punto fijo de Browuer, existe $\mu \in H \subseteq \mathbb{A}_\mathcal{U}$ tal que $\mu = \mu * \mu$ y por lo tanto $\mu \restriction \mathcal{B} = \mu^\frown\mu \restriction \mathcal{B}$. □

Lema 3.3. *Si $f \in \ell_\infty(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$, entonces podemos encontrar un $\delta > 0$ y $\mathcal{B} \in [\mathcal{P}(\mathbb{T})]^{<\omega}$ tal que para cualesquiera $\xi, \eta \in Pr(\mathbb{T})$ si es el caso que para todo $E \in \mathcal{B}$ tenemos $|\xi(E) - \eta(E)| < \delta$ entonces $|\xi(f) - \eta(f)| < \varepsilon$.*

Demostración. Procedemos por contradicción, supongamos que es falso el lema. Para cada $\delta > 0$ y $\mathcal{B} \in [\mathcal{P}(\mathbb{T})]^{<\omega}$ consideremos el conjunto

$$A_{\delta,\mathcal{B}} = \{ (\xi, \eta) \in Pr(\mathbb{T})^2 \colon \forall E \in \mathcal{B}\ |\xi(E) - \eta(E)| < \delta \}$$

y también el conjunto

$$C = \{ (\xi, \eta) \in Pr(\mathbb{T})^2 \colon |\xi(f) - \eta(f)| \geq \varepsilon \}.$$

Por hipótesis sabemos que para cada $\delta > 0$ y $\mathcal{B} \in [\mathcal{P}(\mathbb{T})]^{<\omega}$ existe $p_{\delta,\mathcal{B}} \in A_{\delta,\mathcal{B}} \cap C$. Esto define una red con dominio el conjunto dirigido $D = (\mathbb{R}^+ \times [P(\mathbb{T}]^\omega, \leq)$ donde $(\delta_1, \mathcal{B}_1) \leq (\delta_2, \mathcal{B}_2) \iff \delta_2 \leq \delta_1 \wedge \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ y rango en $Pr(\mathbb{T})^2$. Como $Pr(\mathbb{T})^2$ es compacto tenemos que existe $p = (\xi, \eta) \in Pr(\mathbb{T})^2$ punto de acumulación, además, notemos que $C = (|\cdot| \circ - \circ\ e_f \times e_f)^{-1}[\varepsilon, \infty)$ por lo tanto C es cerrado y así $p \in C$.

Dado $E \subseteq \mathbb{T}$ afirmamos que $\xi(E) = \eta(E)$, en efecto, veremos que para todo $r > 0$ se cumple $|\xi(E) - \eta(E)| < r$. Sea $r > 0$, considerando al elemento $(\frac{r}{3}, \{E\})$ de D y a la vecindad $W = e_f^{-1}[B_{r/3}(\xi(E))] \times e_f^{-1}[B_{r/3}(\eta(E))]$ de p, tenemos que existe $(\delta, \mathcal{B})$ tal que $\delta \leq \frac{r}{3}$ y $E \in \mathcal{B}$ tal que $p_{\delta,\mathcal{B}} = (\xi', \eta') \in W$, así,

$$\begin{aligned} |\xi(E) - \eta(E)| &= |\xi(E) - \xi'(E) + \xi'(E) - \eta'(E) + \eta'(E) - \eta(E)| \\ &\leq |\xi(E) - \xi'(E)| + |\xi'(E) - \eta'(E)| + |\eta'(E) - \eta(E)| < r. \end{aligned}$$

Concluimos que ξ y η son dos medidas iguales por lo que $\xi(f) = \eta(f)$. □

Dada $f\colon \mathbb{T}_n \to \mathbb{R}$ podemos extenderla bilinealmente a una función de $\mathbb{A}_n$ en $\mathbb{R}$ de la manera natural y más aún cada $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ induce una extensión (que también denotamos por f) a todo $\mathbb{A}$. Diremos que una sucesión de medidas μ_i en $\mathbb{A}$ es creciente si $i < j$ implica $\mu_i \in \mathbb{A}_n$ y $\mu_j \in \mathbb{A}_m$ con $n < m$.

Teorema 3.4 (Extensión parcial del Teorema de Hindman)**.** *Sean $c\colon \mathbb{T} \to [0,1]$ y $\varepsilon > 0$, entonces existen $r \in [0,1]$ y una sucesión creciente $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{A}$ tal que satisfacen:*

(1) $\forall i\ |c(\mu_i) - r| < \varepsilon$.

(2) $\forall i < j\ |c(\mu_i{}^\frown\mu_j) - r| < \varepsilon$

Demostración. Sean c y ε como en el teorema y tomemos δ y $\mathcal{B}$ como en el lema anterior. Por la proposición anterior, existe $\mu \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$ tal que $\mu^\frown\mu \restriction \mathcal{B} = \mu \restriction \mathcal{B}$. Necesitaremos una manera de aproximar a μ dentro de $\mathcal{B}$ para poder encontrar a los μ_i, para esto definimos para cada $f \in \ell_\infty(\mathbb{T})^*$ la norma de f con respecto a $\mathcal{B}$ dada por $||f||_{\mathcal{B}} = \max_{E\in\mathcal{B}} |f(\chi_E)|$, notemos que cualquier funcional lineal que sea combinación de μ coincide en norma con la norma cambiando μ por $\mu^\frown\mu$.

Hagámos $r := \mu(c) = c(\mu)$. Construiremos recursivamente una sucesión creciente de medidas μ_i en $\mathbb{A}$ que satisfagan lo siguiente:

(1) $\forall i\ ||\mu - \mu_i||_{\mathcal{B}} < \delta$,

(2) $\forall i\ ||\mu^\frown\mu - \mu_i{}^\frown\mu||_{\mathcal{B}} < \frac{\delta}{2}$,

(3) $\forall i < j\ ||\mu_i{}^\frown\mu - \mu_i{}^\frown\mu_j||_{\mathcal{B}} < \frac{\delta}{2}$.

Primero observemos que las μ_i así construídas son las buscadas, en efecto, por la claúsula uno tenemos que $\forall i\ \forall E \in \mathcal{B}\ |\mu_i(E) - \mu(E)| < \delta$ por lo que $\forall i\ |c(\mu_i) - r| < \epsilon$ y por la claúsula dos y tres tenemos

$$\begin{aligned}\forall i < j\ \forall E \in \mathcal{B}\ |\mu_i{}^\frown\mu_j(E) - \mu(E)| &\leq |\mu_i{}^\frown\mu_j(E) - \mu_i{}^\frown\mu(E)| + |\mu_i{}^\frown\mu(E) - \mu(E)| \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta\end{aligned}$$

concluimos que $\forall i < j\ |c(\mu_i{}^\frown\mu_j) - r| < \varepsilon$. Procedemos con la construcción de las μ_i. Consideremos la siguiente vecindad de μ,

$$U = \bigcap_{E\in\mathcal{B}} e_{\chi_E}^{-1}[B_\delta(\mu(E)]$$

y consideremos la siguiente vecindad de $\mu^\frown\mu$,

$$W = \bigcap_{E\in\mathcal{B}} e_{\chi_E}^{-1}[B_{\frac{\delta}{2}}(\mu^\frown\mu(E)].$$

Ahora, usando la continuidad del mapeo $\nu \mapsto \nu^\frown\mu$ podemos encontrar $V \in \eta(\mu)$ tal que $\forall \nu' \in V\ \nu'^\frown\mu \in W$. Como $\mu \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$, tenemos que $\{\, m \in \mathbb{N} \colon \mathbb{A}_m \cap V \cap U \neq \emptyset \,\} \in \mathcal{U}$; en particular este conjunto es no vacío y así, existe m_0 y $\mu_0 \in \mathbb{A}_{m_0} \cap U \cap V$. Por μ_0 estar en U inferimos que $||\mu - \mu_0||_{\mathcal{B}} < \delta$ y porque $\mu_0 \in V$ inferimos que $||\mu^\frown\mu - \mu_0{}^\frown\mu||_{\mathcal{B}} < \frac{\delta}{2}$. Para el paso recursivo, supongamos que hemos construído $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ sucesión creciente de medidas en $\mathbb{A}_{m_i}$ respectivamente que satisfacen las condiciones. Sean U y V como antes y para cada $i < n$ consideramos la siguiente vecindad de $\mu_i{}^\frown\mu$,

$$T_i = \bigcap_{E \in \mathcal{B}} e^{-1}_{\chi_E}[B_{\frac{\delta}{2}}(\mu_i{}^\frown\mu(E)].$$

Igual que antes, usando que $\forall i\ \mu_i \in \mathbb{A}$ tenemos que el mapeo $\nu \mapsto \mu_i{}^\frown\nu$ es continuo por lo tanto existe $V_i \in \eta(\mu)$ tal que $\forall \nu \in V_i\ \mu_i{}^\frown\nu$. Existe $m_n > m_{n-1}$ y $\mu_n \in \mathbb{A}_{m_n} \cap U \cap V \cap (\bigcap_{i<n} V_i)$, $\mu_n \in U$ garantiza (1), $\mu_n \in V$ asegura (2) y $\mu_n \in \bigcap_{i<n} V_i$ nos dice (3). $\square$

Cada $t \in \mathbb{T}_m$ induce una operación multilineal de $\mathbb{T}^m \to \mathbb{T}$ mediante sustitución y se puede extender ésta a $\mathbb{A}^m$. Más precisamente si $\mu_0, \ldots, \mu_m \in \mathbb{A}$ entonces $t(\mu_0, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{A}$ es la medida que se obtiene de reemplazar la i-ésima aparición de $\mathbf{1}$ en t por μ_i. Además, si t es tal que $t = a^\frown b$ con $|a| = k$ entonces $t(\mu_0, \ldots, \mu_m) = a(\mu_0, \ldots, \mu_{k-1})^\frown b(\mu_k, \ldots, \mu_m)$.

Sea $t \in \mathbb{T}_m$, para cada $k \leq m$ definimos $t_k \in \mathbb{T}$ el árbol resultante de remover iterativamente todas las caretas que tengan hojas con índices mayores que k (recordemos que se enumeran desde 0) y definimos la función $l_k(t) = |t_k| - 2$.

Definición 3.5. Sea $t \in \mathbb{T}_m$, diremos que la sucesión $i_0 < \ldots < i_{m-1}$ es admisible para t si para cada $k < m$ tenemos que $l_k(t) \leq i_k$.

Directamente de las definiciones tenemos que para cada k se cumple que $l_k(t) < |t|$ y así si $m \leq i_0$ entonces la sucesión es admisible para cualquier $t \in \mathbb{T}_m$, además, podemos observar que el elemento positivo de $\mathbb{T}_m$ admite a todas las sucesiones crecientes de tamaño m. Ya estamos listos para enunciar la generalización no asociativa del Teorema de Hindman *(NAHT)*.

Conjetura 3.6. Sean $c \colon \mathbb{T} \to [0, 1]$ coloración y $\varepsilon > 0$ entonces existen $r \in [0, 1]$ y una sucesión creciente $(\mu_i)_{i\in\omega} \subseteq \mathbb{A}$ tales que para cada $t \in \mathbb{T}_m$ y cualquier sucesión $i_0 < \ldots < i_{m-1}$ admisible para t se cumple que $|c(t(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_{m-1}})) - r| < \varepsilon$.

Teorema 3.7. *NAHT $\implies$ Teorema de Hindman.*

Demostración. Sea $c : \mathbb{N} \to k$ una cloración. Sea $(a_i)_{i<k} \subseteq [0, 1]$ una sucesión estrictamente creciente. Definimos $d \colon \mathbb{T} \to [0, 1]$ por $t \mapsto a_{c(m)}$ si $t \in \mathbb{T}_m$. Esto define una coloración cuya extensión es constante por niveles y de hecho si $\nu \in \mathbb{A}_m$ entonces $d(\nu) = a_{c(m)}$. Sea $\varepsilon = \min_{i<k} |a_i - a_{i+1}|$. Tenemos que existen $r \in [0, 1]$ y

una sucesión creciente $(\mu_i)_{i\in\omega} \subseteq \mathbb{A}$ que satisfacen la hipótesis de $NAHT$ para $\frac{\varepsilon}{2}$.
Afirmación. $S = \sum\{ n \in \omega \colon \exists i\ \mu_i \in \mathbb{A}_n \}$ *es monocromático.* Sean $p = p_0 + \ldots + p_m, r = r_0 + \ldots + r_l \in S$, deseamos ver que $c(p) = c(r)$ así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que están ordenados de menor a mayor. Considere $\mu_{i_0} \in \mathbb{A}_{p_0}, \ldots, \mu_{i_m} \in \mathbb{A}_{p_m}, \mu_{j_0} \in \mathbb{A}_{r_0}, \ldots, \mu_{j_l} \in \mathbb{A}_{r_l}$ los testigos de que $p, r \in S$, respectivamente. Sabemos que existe $t \in \mathbb{T}_m$ y que existe $t' \in \mathbb{T}_l$ tal que $|d(t(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_m})) - r| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|d(t'(\mu_{j_0}, \ldots, \mu_{j_l})) - r| < \frac{\varepsilon}{2}$ así $|d(t(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_m})) - d(t'(\mu_{j_0}, \ldots, \mu_{j_l}))| < \varepsilon$ lo cual implica $d(t(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_m})) = d(t'(\mu_{j_0}, \ldots, \mu_{j_l}))$ es decir $a_{c(p_0+\ldots+p_m)} = a_{c(r_0+\ldots+r_l)}$ y así concluimos que $c(p) = c(r)$. □

Observemos también que $NAHT$ implica la extensión parcial demostrada anteriormente, ya que cuando $t = \mathbf{1}$ o $t = \mathbf{1}^\frown\mathbf{1}$ cualquier sucesión creciente es admisible.

3.2. Versión no asociativa del Lema de Ellis

En la sección anterior vimos que la versión conjeturada del Teorema de Hindman tiene relación con las propiedades topológicas de $Pr(S)$, además, definimos un compacto muy particular que es un subsistema y resultó ser convexo. De hecho, estas son las mínimas propiedades que podemos pedir para que un subconjunto sea realmente interesante, así, en analogía con el Lema de Ellis enunciamos su generalización al ámbito no asociativo y la llamamos GE.

Conjetura 3.8. Sea $(S, *)$ un sistema binario. Para cada $C \subseteq (Pr(S), *)$ subsistema convexo, compacto y no vacío existe $\mu \in C$ tal que $\mu * \mu = \mu$.

Como se mecionó en la introducción el Lema de Ellis implica el Teorema de Hindman, sería lo deseado que GE implique $NAHT$ para que la versión conjeturada tenga sustento positivo. Es un resultado de Moore [5] que en efecto esto pasa y es el objetivo de esta sección describir esta prueba.

Lema 3.9. *Sea $t \in \mathbb{T}_m$, $k < m$ y $\nu_0, \ldots, \nu_{m-1} \in Pr(\mathbb{T})$ con las primeras k de soporte finito. Entonces*

$$F(\zeta) = t(\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}, \zeta, \nu_{k+1}, \ldots, \nu_{m-1})$$

es una función continua.

Demostración. Procedemos por inducción sobre m y sea $k < m$ fija. Para $m = 1$ tenemos que F es la identidad y por lo tanto es continua. Supongamos que $m > 1$, esto implica $t = a^\frown b$.

Primero supongamos que $|a| = l \leq k$. Por lo anterior

$$t(\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}, \zeta, \nu_{k+1}, \ldots, \nu_{m-1}) = a(\nu_0, \ldots, \nu_{l-1})^\frown b(\nu_l, \ldots, \nu_{k-1}, \zeta, \ldots, \nu_{m-1}),$$

digamos que el primer término es ν (que tiene soporte finito) y como $|b| < m$ entonces la hipótesis inductiva aplicada a b, $m-l-1 < |b|$ y a $\nu_l, \ldots \nu_{k-1}, \ldots, \nu_{m-1}$(que son $m-l = |b|$ medidas) nos dice que $G(\zeta) = b(\nu_l, \ldots, \nu_{k-1}, \zeta, \ldots, \nu_{m-1})$ es continua. Así $F(\zeta) = (\nu^\frown) \circ G(\zeta)$ es continua.

Ahora si $l > k$ tenemos que

$$t(\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}, \zeta, \nu_{k+1}, \ldots, \nu_{m-1}) = a(\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}, \zeta, \ldots, \nu_{l-1})^\frown b(\nu_l, \ldots, \nu_{m-1})$$

y por lo tanto la hipótesis inductiva para a dice que $G(\zeta) = a(\nu_l, \ldots, \nu_{k-1}, \zeta, \ldots, \nu_{l-1})$ es continua. Y así $F(\zeta) = (^\frown\nu) \circ G(\zeta)$ es continua. □

Dado $t \in \mathbb{T}_m$ y $k \leq m$. Denotaremos por $t(\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}; \mu)$ al elemento que sustituye con μ a partir de la $k+1$-ésima hoja. Observemos que t_k tiene al menos $k+1$ hojas y en el caso $k = m$ si convenimos en que $t_m = t$ entonces tiene exactamente k hojas.

Lema 3.10. *Sea $\mu \in Pr(\mathbb{T})$ idempotente. Si $t \in \mathbb{T}_m$ entonces para todo $k \leq m$ y para cada $\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}$ se cumple que $t_k(\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}; \mu) = t(\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}; \mu)$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre m, el caso base $m = 1$ es trivial. Supongamos que $m > 1$ y sea $k \leq m$. Tenemos dos posibilidades, $t_k = t$ o quitamos al menos una careta a t para crear a t_k. En el primer caso estamos bien. En el segundo, observemos que si pudimos quitar al menos una careta de t esto quiero decir que $k < m$ es decir $k \leq m-1$ y la careta está formada por dos μ. La hipótesis de inducción aplicada a t' (que es igual a t pero colapsando $\mu^\frown\mu$ a μ) implica que $t_k(\ldots) = t'(\ldots) = t(\ldots)$. □

Teorema 3.11. *$GE \implies NAHT$.*

Demostración. Sea $c\colon \mathbb{T} \to [0,1]$ una coloración y sea $\varepsilon > 0$. Como GE es cierto, existe $\mu \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$ idempotente. Fijemos $r = c(\mu)$. Construyamos recursivamente una sucesión de $(\mu_i)_{i\in\omega} \subseteq \mathbb{A}$ de tal manera que si $(\mu_i)_{i<n}$ ha sido contruída entonces μ_n es tal que $\forall m \leq n+2$ y $\forall t \in \mathbb{T}_m$ tenemos que $\forall k < m$ y cualquier $i_0 < \ldots < i_{k-1} < n$ se cumple

$$|c(t(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_{k-1}}; \mu)) - c(t(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_{k-1}}, \mu_n; \mu))| < \varepsilon \cdot 2^{-(n+1)}.$$

Esto es posible usando la F del lema anterior, más precisamente, considerando

$$W = \bigcap_{m\leq n+2} \bigcap_{t\in T_m} \bigcap_{k<m} \bigcap_{i_0<\ldots<i_{k-1}<n} (e_c \circ F_{t,k,I})^{-1}[B_{\varepsilon\cdot 2^{-(n+1)}}(c(t(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_{k-1}}; \mu)))].$$

Observemos que $\mu \in W$ pues es el "centro"de las bolas. Así existe una medida $\mu \in \mathbb{A}$ (con índice más adelante que las otras) tal que $\mu_n \in W$, por lo que μ_n

satisface lo que deseábamos. Ahora veamos que la sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ cumple la conclusión de $NAHT$: Sea $t \in \mathbb{T}_m$ e $i_0 < \ldots < i_{m-1}$ admisible para t, notemos que $r = c(\mu) = c(t(\mu))$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&|c(t(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_{m-1}}; \mu)) - c(t(\mu))| \\
\leq &\sum_{k<m} |c(t(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_{k-1}}; \mu)) - c(t(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_{k-1}}, \mu_{i_k}; \mu))| \\
= &\sum_{k<m} |c(t_k(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_{k-1}}; \mu)) - c(t_k(\mu_{i_0}, \ldots, \mu_{i_{k-1}}, \mu_{i_k}; \mu))| \\
&< \sum_{k<m} \varepsilon \cdot 2^{-(i_k+1)} < \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

3.3. Conjuntos de Idempotentes

En esta sección estudiaremos algunas propiedades sobre los idempotentes, en particular, sobre los idempotentes de $\mathbb{A}_{\mathcal{U}}$.

Lema 3.12. *Si μ es idempotente entonces para cada $F \in [\mathbb{T}]^{<\omega}$ tenemos $\mu(F) = 0$.*

Demostración. Basta probarlo para los unitarios y lo probaremos por inducción sobre $|t|$. Si $|t| = 1$ tenemos que $\mu(\{\mathbf{1}\}) = \mu \otimes \mu(\{\mathbf{1}\} \circ \frown) = \mu \otimes \mu(\emptyset) = 0$ y si $t = a^\frown b$ tenemos que $\mu^\frown\mu(t) = \mu(\{b\})\mu(\{a\}) = 0$. $\square$

Teorema 3.13. *Si $M := \{\mu_i : i \in \omega\}$ son medidas idempotentes y existen $(E_i)_{i\in\omega}$ subconjuntos de $\mathbb{T}$ tales que $\mu_i(E_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker - Dirac), entonces ningún punto de acumulación de M es idempotente.*

Demostración. Sea μ un punto de acumulación de M. Enumeremos a $\mathbb{T}$ de alguna manera, digamos, $\{t_i : i \in \omega\}$ y definamos

$$E = \bigcup_{i\in\omega} \bigcup_{j<i} t_i{}^\frown E_j.$$

Afirmación1. $\mu^\frown\mu(E) = 0$. En efecto, para cada $i \in \omega$ tenemos que $\mu(\bigcup_{j<i} E_j) = 0$ pues μ es punto de acumulación. Así,

$$\mu^\frown\mu(E) \leq \sum_{i\in\omega} \mu^\frown\mu(\bigcup_{j<i} t_i{}^\frown E_j) = \sum_{i\in\omega} \mu(\{t_i\})\mu(\bigcup_{j<i} E_j) = 0.$$

Afirmación2. $\mu(E) = 1$. Observemos primero que para todo $i \in \omega$ tenemos que

$\mu_k(\bigcup_{j<i} E_j) = 1$ siempre que $k < i$ y es cero si $i \leq k$. Así para todo $k \in \omega$ se cumple

$$\mu_k(E) = \mu_k{}^\frown\mu_k(E) = \int\int \chi_E(s^\frown t)d\mu_k(t)d\mu_k(s) = \mu(\{\, t_i : k < i \,\})$$
$$= \mu(\mathbb{T}) - \mu(\{\, t_i : i \leq k \,\}) = 1.$$

Como μ es punto de acumulación tenemos que $\mu(E) = 1$. □

Lema 3.14. *Si $\mu \in \mathbb{A}_\mathcal{U}$ y $p \in \omega$ entonces $\mu(\{\, t \in \mathbb{T} : 2^p \mid \#(t) \,\}) = 1$.*

Demostración. Consideremos $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_{2^p}$ el homomorfismo canónico. Sabemos que existe una extensión (de hecho, también es homomorfismo) a todo $\beta\mathbb{N}$, por la idempotencia de $\mathcal{U}$ se debe cumplir $\psi(\mathcal{U}) = 0$. Es decir $A = \{\, n : 2^p | \, n \,\} \in \mathcal{U}$, si suponemos que $\mu(\{\, t \in \mathbb{T} : 2^p \mid \#(t) \,\}) < 1$ tendríamos que $B = \{\, n : \exists \nu \in \mathbb{A}_n \wedge \nu(\{\, t \in \mathbb{T} : 2^p \mid \#(t) \,\}) < 1 \,\} \in \mathcal{U}$ por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{U}$ y en particular es no vacío, sea $n \in A \cap B$ por una parte debe cumplir que $2^p | n$ y además existe $\nu \in \mathbb{A}_n$ que al conjunto $\nu(\{\, t \in \mathbb{T} : 2^p \mid \#(t) \,\})$ le da medida menor que 1 pero esto contradice el hecho de que $\mathbb{T}_n \subseteq \{\, t \in \mathbb{T} : 2^p \mid \#(t) \,\}$. □

Teorema 3.15. *Si $\mathbb{A}_\mathcal{U}$ contiene un idempotente entonces existen idempotentes $\{\, \mu_r : r \in 2^\omega \,\} \subseteq \mathbb{A}_\mathcal{U}$ y conjuntos $E_r \subseteq \mathbb{T}$ para $r \in 2^\omega$ tales que $\mu_r(E_s) = \delta_{rs}$.*

Demostración. Definimos $u_\sigma \in \mathbb{T}$ recursivamente para cada $\sigma \in 2^{<\omega}$ por: $u_\sigma = \mathbf{1}$ si $|\sigma| = 1$, $u_{\sigma 0} = u_\sigma{}^\frown 1$ y $u_{\sigma 1} = 1^\frown u_\sigma$. Observemos que $\forall \sigma \in 2^{<\omega}$ $|u_\sigma| = |\sigma|$.
Para $n > 0$ y $r \in 2^\omega$ definimos $E_{r,n} = \langle \{\, u_{r \restriction k} : n \leq k \,\} \rangle$, donde los corchetes denotan el subsistema generado y $E_r = E_{r,2}$. Es fácil ver que si $r \neq s$ entonces existe n tal que $E_{r,n} \cap E_s = \emptyset$.
Definimos para cada $r \in 2^\omega$ la función h_r de la siguiente manera

$$h_r(t) = \begin{cases} h_r(a)^\frown h_r(b) & t = a^\frown b, \text{ y } a << b \\ u_{r \restriction |t|} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $a << b \iff \exists l \in \omega \; |a| < 2^l \;\wedge\; 2^l || b|$. Extendemos h_r a una función $\widetilde{h_r}\colon \ell_\infty(\mathbb{T})^* \to \ell_\infty(\mathbb{T})^*$ dada por $\widetilde{h_r}(F)(f) = F(f \circ h_r)$, en el caso de medidas de probabilidad tenemos la siguiente igualdad, vía el teorema de Riesz

$$\int f \circ h_r(x) d\mu(x) = \int f(x) d\widetilde{h_r}(\mu)(x).$$

Afirmación1. *Para cada $r \in 2^\omega$ si $\mu, \nu \in \mathbb{A}_\mathcal{U}$ entonces $\widetilde{h_r}(\mu^\frown\nu) = \widetilde{h_r}(\mu)^\frown\widetilde{h_r}(\nu)$.* Por el lema anterior tenemos que para $s \in \mathbb{T}$ fija, al conjunto $\{\, t : s << t \,\}$, ν lo mide

1 y así $h_r(s^\frown t) = h_r(s)^\frown h_r(t)$ en este conjunto. Sea $f \in \ell_\infty^*(\mathbb{T})$, deseamos ver que $\widetilde{h_r}(\mu^\frown\nu)(f) = \widetilde{h_r}(\mu)^\frown\widetilde{h_r}(\nu)(f)$, recordando que $\mu^\frown\nu(f) = \mu\otimes\nu(f\circ{}^\frown)$, tenemos

$$\widetilde{h_r}(\mu^\frown\nu)(f) = \int f(h_r(x))d\mu^\frown\nu(x) = \int\int f(h_r(s^\frown t))d\nu(t)d\mu(s)$$

$$= \int\int f(h_r(s)^\frown h_r(t))d\nu(t)d\mu(s) = \int\int f(h_r(s)^\frown v)d\widetilde{h_r}(\nu)(v)d\mu(s)$$

$$= \int\int f(u^\frown v)d\widetilde{h_r}(\nu)(v)d\widetilde{h_r}(\mu)(u) = \widetilde{h_r}(\mu)^\frown\widetilde{h_r}(\nu).$$

Afirmación2. *Si $\mu \in \mathbb{A}_\mathcal{U}$ entonces para $n > 0$ y para toda $r \in 2^\omega$ se cumple que $\widetilde{h_r}(\mu)(E_{r,n}) = 1$ y si $r \neq s$ tenemos que $\widetilde{h_r}(\mu)(E_s) = 0$.* Primero observemos que si $2^p \mid |a| + |b|$ y $a << b$ entonces $2^p \mid |a|$ y $2^p \mid |b|$, en efecto, como $a << b$ entonces existe $l \in \omega$ tal que $|a| < 2^l$ y $2^l \mid |b|$, notemos que $p < l$ pues si $l \leq p$ entonces 2^l dividiría a la suma y a $|b|$ y por lo tanto a $|a|$, lo cual es imposible; así $p < l$ y 2^p divide a $|b|$, a la suma y por lo tanto a $|a|$.

Ahora probaremos por inducción sobre $|t|$ la siguiente claúsula: $2^p \mid |t|$ implica $h_r(t) \in E_{r,2^p}$. Para $t = \mathbf{1}$, tenemos que si $2^p \mid 1$ entonces $2^p = 1$ y así $h_r(\mathbf{1}) = u_{r\restriction 1} = \mathbf{1} \in E_{r,1}$. Supongamos que $t = a^\frown b$, si $2^p \mid |t| = |a|+|b|$ hay dos posibilidades que $a << b$ o que no, en el primer caso, por la observación anterior tenemos que $2^p \mid |a|$ y $2^p \mid |b|$, así por hipótesis inductiva $h_r(a) \in E_{r,2^p}$ y $h_r(b) \in E_{r,2^p}$ por lo tanto $h_r(a)^\frown h_r(b) \in E_{r,2^p}$. En el otro caso, $h_r(t) = u_{r\restriction\, |t|} \in E_{r,2^p}$ pues $2^p \leq |t|$. Sea $n > 0$ y tomemos p de tal manera que $n \leq 2^p$ y $E_{r,n} \supseteq E_{r,2^p}$, tenemos que

$$\int \chi_{E_{r,2^p}}(x)d\widetilde{h_r}(\mu)(x) = \int \chi_{E_{r,2^p}}(h_r(x))d\mu(x) = \int_{\{\, t\in\mathbb{T}:2^p\ \mid\ |t|\,\}} \chi_{E_{r,2^p}}(h_r(x))d\mu(x)$$

$$= \int_{\{\, t\in\mathbb{T}:2^p\ \mid\ |t|\,\}} d\mu(x) = \mu(\{\, t \in \mathbb{T} : 2^p \mid |t|\,\}) = 1$$

Concluimos que $\widetilde{h_r}(\mu)(E_{r,n}) \geq \widetilde{h_r}(\mu)(E_{r,2^p}) = 1$. Para finalizar la prueba de la afirmación, recordemos que existe $m \in \omega$ tal que $E_s \subseteq (\mathbb{T} \setminus E_{r,m})$, basta tomar $2^p \geq m$ para que $E_s \subseteq (\mathbb{T} \setminus E_{r,2^p})$ y así $\widetilde{h_r}(\mu)(E_s) = 0$.

Para concluir con la demostración del teorema definimos para cada $r \in 2^\omega$ la medida $\mu_r := \widetilde{h_r}(\mu) \in \mathbb{A}_\mathcal{U}$. Por la primera afirmación $\mu_r = \widetilde{h_r}(\mu) = \widetilde{h_r}(\mu^\frown\mu) = \widetilde{h_r}(\mu)^\frown\widetilde{h_r}(\mu) = \mu_r{}^\frown\mu_r$. Por la segunda afirmación tenemos que $\mu_r(E_r) = 1$ y si $s \neq r$ se cumple que $\mu_r(E_s) = 0$. □

Corolario 3.16. *El conjunto de idempotentes de $\mathbb{A}_\mathcal{U}$ es vacío o no es cerrado.*

Demostración. Supongamos que es no vacío, entonces existen al menos $\mathfrak{c}$ idempotentes y conjuntos con la propiedad del teorema anterior. Tomando un subconjunto numerable de ésta colección, tenemos que ningún punto de acumulación es idempotente, es decir, el conjunto de idempotentes no es numerablemente compacto por lo que no puede ser cerrado ya que estamos en un compacto. □

Definición 3.17. Sea $f\colon 2^\omega \to 2^\omega$ la función definida por

$$f(x)(i) = \begin{cases} 0 & i < n \\ 1 & i = n \\ x(i) & i > n \end{cases}$$

donde $n = \min\{\, i \in \omega : x(i) = 0 \,\}$ y definimos $f(1) = 0$. Este es un sistema dinámico minimal[8] y lo llamaremos el odómetro.[9]

Teorema 3.18. *Sea $K \subseteq \beta(\mathbb{T})$ un subsistema compacto minimal, entonces K no cumple la c.c.c. En particular, dicho conjunto es no separable.*

Demostración. Sea $(2^\omega, f)$ el odómetro y denotamos a $f(x)$ por $x+1$. Definamos recursivamente la función $h\colon \mathbb{T} \to 2^\omega$ por: $h(1) = 0$ y $h(s^\frown t) = h(t) + 1 = f(h(t))$, podemos extenderla continuamente a una función $H\colon \beta(\mathbb{T}) \to 2^\omega$. Podemos describir a la extensión de la siguiente manera:
Si $u \in \beta(\mathbb{T}$ entonces $H(u)$ es el único elemento al cual converge el ultrafiltro $h[U] = \{\, A \subseteq 2^\omega : h^{-1}[A] \in u \,\}$. En otras palabras $H(u) = x \iff \forall s \in 2^{<\omega}\ x \in [s] \implies \{\, s^\frown t \in \mathbb{T} : h(t) + 1 \in [s] \,\} \in u$. De esta observación obtenemos que $H(u^\frown v) = H(v) + 1$ y $H(u^\frown v) - 1 = H(v)$.
Afirmación. *La imagen de cualquier subconjunto $^\frown$-cerrado no vacío de $\beta(\mathbb{T})$ es densa en 2^ω.* Sea $A \subseteq \beta(\mathbb{T})$ dicho subconjunto, primero notemos que $f[H[A]] \subseteq H[A]$, en efecto si $x = f(h(a))$ entonces $x = h(a) + 1 = h(a^\frown a)$ y así $x \in H[A]$, más aún, $f[\overline{H[A]}] \subseteq \overline{f[[H[A]]]} \subseteq \overline{H[A]}$ y así, como $\overline{H[A]}$ es f-invariante, cerrado y no vacío tenemos que $\overline{H[A]} = 2^\omega$. En particular, $H[K] = 2^\omega$.

Para cada $r \in 2^\omega$ existe $\xi_r \in K$ tal que $h(\xi_r{}^\frown \xi_r) = r$, esto es porque para $r - 1 \in 2^\omega$ existe ξ_r tal que $r - 1 = h(\xi_r)$ y así $r = h(\xi_r) + 1 = h(\xi_r{}^\frown \xi_r)$. Para cada $r \in 2^\omega$ y $p \in \omega$ consideremos el conjunto

$$E_{r,p} = \{\, t \in \mathbb{T} : \forall\ i < p\ h(t)(i) = r(i) \,\}$$

es fácil ver que para cada $p \in \omega$ tenemos que $\xi_r(E_{r-1,p}) = 1$, es decir $E_{r-1,p} \in \xi_r$ (debido a que si $t \in \mathbb{T}$ y $h(t) \in h[E_{r-1,p}]$ entonces $t \in E_{r-1,p}$), también observemos

[8]Un sistema dinámico es un par (X, f), en donde X es un espacio topológico y $f\colon X \to X$ es una función continua. Un conjunto $A \subseteq X$ se llama f-invariante si $f(A) \subseteq A$. El sistema dinámico se llama minimal si X es minimal en el orden de la contención con respecto a la propiedad de ser f-invariante y cerrado no vacío.

[9]Esta nomenclatura es debida a que al igual que el odómetro de un carro los números en la órbita de un elemento aparecen de manera ordenada.

que si $r \neq q$ y $p > \Delta(r,q)$ entonces $E_{r,p} \cap E_{q,p} = \emptyset$. Definamos

$$E_r = \{\, s^\frown t : s^\frown t \in E_{r,|s|} \,\} = \{\, s^\frown t : t \in E_{r-1,|s|} \,\}$$

es fácil ver que $\xi_r{}^\frown\xi_r(E_r) = 1$ usando las definiciones.

Para toda $r \in 2^\omega$ tenemos que el conjunto $U_r = \{\, \eta \in K : \eta(E_r) = 1 \,\}$ es abierto no vacío. La minimalidad de K implica que $K^\frown K$ es denso en K, así si $U_r \cap U_s \neq \emptyset$ entonces existe k tal que $k^\frown k(E_r) = 1$ y $k^\frown k(E_s) = 1$, así $E_r \cap E_s \in k^\frown k$ y concluimos que $\{\, U_r : r \in 2^\omega \,\}$ es una familia de abiertos no vacíos ajena por pares (ya que podemos suponer que los elementos de K son no principales). $\square$

4. Criterios tipo Ramsey para la amenabilidad de un grupo discreto

En este capítulo presentaremos un criterio para la amenabilidad de un grupo, dicho criterio es una condición de tipo Ramsey. Durante éste capítulo fijaremos un grupo discreto G.

Sólo consideraremos medidas de probabilidad con soporte finito y no vacío, así que, apelando a la extensión de la operación del grupo a todo $Pr(G)$ observamos que si $\mu, \nu \in Pr(G)$ y $A \subseteq G$, entonces

$$\mu\nu(A) = \sum_{xy \in A} \mu(\{x\})\nu(\{y\}).$$

Observemos que para todo $g \in G$, $\mu \in Pr(G)$ y $E \subseteq G$ se tiene que

$$g\mu\,(E) = \mu\left(g^{-1}E\right).$$

La siguiente definición será central en este capítulo, sugerimos al lector que no siga avanzando en su lectura hasta que no la haya contemplado y analizado a detalle.

Definición 4.1. Sean $A, B \in [G]^{<\omega}$ y $\varepsilon > 0$, decimos que B es ε-ramsey con respecto a A si para todo $E \subseteq B$ existe $\mu \in Pr(B)$ tal que:

(1) $Pr(A)\mu \subseteq Pr(B)$,

(2) $\forall \nu, \nu' \in Pr(A)\ |\nu\mu(E) - \nu'\mu(E)| \leq \varepsilon$.

Cada E codifica una coloración del espacio $Pr(B)$, y la μ induce "una copia" de $Pr(A)$ en $Pr(B)$, así, un conjunto B es ε-Ramsey con respecto a A si para cada coloración de $Pr(B)$ existe una copia de $Pr(A)$ en $Pr(B)$ que es ε-monocromática.

Teorema 4.2. *Sea G un grupo, son equivalentes:*

(1) *Para cada $E \subseteq G$ y cada $A \in [G]^{<\omega}$ existe $\mu \in Pr(G)$ tal que para todo $g \in A$ se tiene $\mu(gE) = \mu(E)$.*

(2) *Para cada $A \in [G]^{<\omega}$ existe $B \in [G]^{<\omega}$ tal que B es $\dfrac{1}{2}$-ramsey con respecto a A.*

(3) *G es amenable.*

De hecho con la prueba de este teorema veremos que para cada A finito podemos encontrar B_ε que es ε-Ramsey con respecto a A. Para probar el teorema anterior bastará con probar el siguiente teorema y aplicarlo a $H = G$.

Teorema 4.3. *Sea G un grupo y $H \subseteq G$ un submonoide[10], las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Para cada $E \subseteq G$ y cada $A \in [H]^{<\omega}$ existe $\mu \in Pr(H)$ tal que para toda $g \in A$ se cumple $\mu(g^{-1}E) = \mu(E)$.*

(2) *Para cada $A \subseteq H$ existe $B \in [H]^{<\omega}$ tal que B es $\frac{1}{2}$-Ramsey respecto a A.*

(3) *Existe $q \in (0, 1)$ tal que para todo $A \in [H]^{<\omega}$ existe $B \in [H]^{<\omega}$ tal que si $f : B \longmapsto [0, 1]$, entonces existe $\mu \in Pr(B)$ tal que $Pr(A)\mu \subseteq Pr(B)$ y para todos los $g, h \in A$ se tiene que $|g\mu(f) - h\mu(f)| \leq q$[11].*

(4) *Para cada $A \in [H]^{<\omega}$ y $\varepsilon > 0$, existe $B \in [H]^{<\omega}$ tal que si $f : B \longmapsto [0, 1]$, entonces existe $\mu \in Pr(B)$ tal que $Pr(A)\mu \subseteq Pr(B)$ y para todos los $g, h \in A$, se tiene que $|g\mu(f) - h\mu(f)| < \varepsilon$.*

(5) *Existe $\mu \in Pr(H)$ tal que para todo $E \subseteq G$ y para todo $g \in H$ se cumple $\mu(g^{-1}E) = \mu(E)$.*

[10] Un submonoide es un subconjunto cerrado bajo la operación y que contiene al elemento identidad.

[11] Extendemos el mapeo evaluación a todo $Pr(G) \times \ell_\infty(G)$ mediante integración, definiendo

$$(\mu, f)(E) = \mu(f)(E) = f\mu(E) = \int_E \mu(\{x\})f(x)dx$$

pero ya que estamos interesados sólo en medidas con soporte finito, esto se convierte simplemente en la suma

$$\mu(f)(E) = \sum_{g \in E} \mu(\{g\})f(g).$$

Demostración. ($5 \Rightarrow 1$) Simplemente para cada $E \subseteq G$ tomamos el $\mu \in Pr(H)$ dado por 5.

($1 \Rightarrow 2$) Supongamos que 2 es falso y sea $A \subseteq H$ que lo testifique.

Afirmación. *Existe $E \subseteq H$ tal que*

$$\forall \mu \in Pr(H) \exists g, h \in A \left(|\mu(g^{-1}E) - \mu(h^{-1}E)| > \frac{1}{2} \right).$$

Sean $G' = \langle A \rangle$, $H' = H \cap G'$ y $\langle B_n : n \in \omega \rangle \subseteq [H']^{<\omega}$ una sucesión creciente tal que $\bigcup_{n\in\omega} B_n = H'$. Definamos

$$T = \{(n, F) : F \subseteq B_n \text{ y F testifica que } B_n \text{ no es } \frac{1}{2}\text{-ramsey respecto a } A\}$$

y también $(n, F) \leq_T (n', F')$ si, y solo si, $n \leq n'$ y $F = F' \cap B_n$. De este modo, $(T, \leq_n)$ es un árbol infinito de ramificación finita; pues si $(n, F) \in T$, entonces para $m < n$; $(m, F \cap B_m) \in T$, esto, pues si suponemos que $(m, F \cap B_m) \notin T$, entonces hay una $\mu \in Pr(B_m)$ que testifica que $F \cap B_m$ no es testigo de que B_m no es ε-ramsey respecto a A, pero esta misma μ vista como elemento de $Pr(B_n)$ testificaría que $(n, F) \notin T$. Claramente es de ramificación finita pues los sucesores inmediatos de un $(n, F) \in T$ son de la forma $(n + 1, F')$ y B_{n+1} es finito. Por último es infinito pues para cada $n \in \omega$ se tiene un testigo de que B_n no es ε-ramsey respecto a A. Luego, por el lema de Köning, existe una rama cofinal, y por tanto, existe $E \subseteq H'$ tal que para todo $n \in \omega$, $(n, E \cap n) \in T$. Dicho E sirve para probar la afirmación, ya que si suponemos que existe una medida $\mu \in Pr(H')$ tal que para todo $g, h \in A$ se tiene que

$$|\mu(g^{-1}E) - \mu(h^{-1}E)| < \frac{1}{2},$$

existiría una tal μ con soporte finito S (recordemos que H' es numerable, y $\mu \in Pr(H')$, así que podemos aproximar μ tanto como queramos restringiendo su dominio a conjuntos finitos). Sin embargo, como S es finito, tendríamos que para algún $n \in \omega$ el conjunto $S \cup (A^{-1} \cdot S)$ está contenido en B_n; y por tanto $(n, E \cap B_n) \notin T$. Notemos que esto implica que 1 falla, pues 1 implica que $\mu(g^{-1}E) = \mu(E) = \mu(h^{-1}E)$.

($2 \Rightarrow 3$) Fijemos $q = \frac{3}{4}$ y $A \in [H]^{<\omega}$. Usando 2, tomemos $B \in [H]^{<\omega}$ tal que B es $\frac{1}{2}$-Ramsey respecto a A. Veamos que B también cumple 3. Sea $f : B \longmapsto [0, 1]$ y definamos $E = \{b \in B : f(b) \geq \frac{1}{2}\}$. Entonces, por 2, existe $\mu \in Pr(B)$ tal que $Pr(A)\mu \subseteq Pr(B)$ y para todos $g, h \in A$ se tiene que $|g\mu(E) - h\mu(E)| \leq \frac{1}{2}$.

Notemos que

$$0 \leq \text{mín}\left\{g\mu\left(f - \frac{1}{2}\chi_E\right), h\mu\left(f - \frac{1}{2}\chi_E\right)\right\}$$
$$\leq \text{máx}\left\{g\mu\left(f - \frac{1}{2}\chi_E\right), h\mu\left(f - \frac{1}{2}\chi_E\right)\right\} \leq \frac{1}{2}$$

y de este modo, se tiene que

$$|g\mu(f) - h\mu(f)| = |\frac{1}{2}\left(g\mu(E) - h\mu(E)\right) + g\mu\left(f - \frac{1}{2}\chi_E\right) - h\mu\left(f - \frac{1}{2}\chi_E\right)|$$
$$\leq \frac{1}{2}|g\mu(E) - h\mu(E)| + |g\mu\left(f - \frac{1}{2}\chi_E\right) - h\mu\left(f - \frac{1}{2}\chi_E\right)| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = q.$$

($3 \Rightarrow 4$) Sean $A \in [H]^{<\omega}$ y $\varepsilon > 0$.Sea $n \in \omega$ tal que con el q dado por 3, se cumpla que $q^n < \varepsilon$ y construyamos una sucesión $\langle B_i : i \leq n \rangle$ tal que $B_0 = A$ y B_{i+1} es dado por 3 con respecto a B_i. Definamos también recursivamente (aplicando la recursión en sentido opuesto, esto es, empezando en $n-1$ y terminando en 0) una suseción de medidas $\langle \nu_i : i < n \rangle$ tales que para todo $i < n$ y para todos $g, h \in B_i$ se tiene que $Pr(B_i)\nu_i \subseteq Pr(B_{i+1})$ y

$$|g\nu_i \cdots \nu_{n-1}(f) - h\nu_i \cdots \nu_{n-1}(f)| \leq q^{n-i}.$$

Para hacer esto, definamos para $i < n$, la función $f_i : B_{i+1} \longmapsto [0,1]$ de la siguiente manera: $f_{n-1} = f$ y si $i < n-1$, entonces

$$f_i(g) = \left(\frac{1}{q}\right)^{n-i-1}\left(g\nu_{i+1} \cdots \nu_{n-1}(f) - \min_{h \in B_{i+1}} h\nu_{i+1} \cdots \nu_{n-1}(f)\right).$$

Notemos que por hipótesis de inducción, el segundo factor del lado derecho es menos que q^{n-1} y por tanto el rango de f_i está contenido en $[0,1]$. Luego, como B_{i+1} cumple 3) con respecto a B_i, existe una medida ν_i tal que $Pr(B_i)\nu_i \subseteq Pr(B_{i+1})$ y que además para cada $g, h \in B_i$ tenemos $|g\nu_i(f_i) - h\nu_i(f_i)| \leq q$. Así, tenemos lo siguiente

$$\left(\frac{1}{q}\right)^{n-i-1}\left(|g\nu_i \cdots \nu_{n-1}(f) - h\nu_i \cdots \nu_{n-1}(f)|\right)$$
$$\leq \left(\frac{1}{q}\right)^{n-i-1}|\left(g\nu_i \cdots \nu_{n-1}(f) - \min_{l \in B_{i+1}} h\nu_{i+1} \cdots \nu_{n-1}(f)\right)$$
$$- \left(h\nu_i \cdots \nu_{n-1}(f) - \min_{l \in B_{i+1}} h\nu_{i+1} \cdots \nu_{n-1}(f)\right)|$$
$$= |f_i(g\nu_i) - f_i(h\nu_i)| = |g\nu_i(f_i) - h\nu_i(f_i)| \leq q,$$

y multiplicando ambos lados por q^{n-i-1}, tenemos que ν_i cumple lo requerido, así terminamos con la recursión. Por último, si definimos $\mu = \nu_0 \cdots \nu_{n-1}$, entonces para todos $g, h \in A = B_0$ se tiene que $|g\mu(f) - h\mu(f)| \leq q^n < \varepsilon$.

($4 \Rightarrow 5$) Por compacidad, es suficiente probar que para cada $\varepsilon > 0$, cada sucesión finita $\langle E_i : i < n \rangle$ de subconjuntos de H y cada sucesión finita $\langle g_i : i < n \rangle$ de elementos de H existe una medida con soporte finito $\mu \in Pr(H)$ tal que para todo $i < n$ se tiene que $|\mu(g_i^{-1}E_i) - \mu(E_i)| < \varepsilon$. Sea $B_0 = \{e_G\} \cup \{g_i : i < n\} \cup \{g_i^{-1} : i < n\}$ y definamos una sucesión $\langle B_i : i \leq n \rangle$ tal que para todo $i < n$, B_{i+1} satisface 4) con respecto a B_i y $\frac{\varepsilon}{2}$. Construyamos también una sucesión $\langle \mu_i : i < n \rangle$ de medidas mediante recursión invertida. Suponiendo que para $i < j < n$, μ_j ya ha sido construida, definamos $\mu_i \in Pr(B_{i+1})$ tal que $Pr(B_i)\mu_i \subseteq Pr(B_{i+1})$ y que para todo $\nu \in Pr(B_i)$ cumpla que

$$|\nu\mu_i \cdots \mu_{n-1}(E_i) - \mu_i \cdots \mu_{n-1}(E_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\mu = \mu_0 \cdots \mu_{n-1}$, así, si $i < n$, $\mu_0 \cdots \mu_{i-1} \in Pr(B_i)$, pues como $e_G \in B_0$, entonces $e_G \cdot \mu_0 \in Pr(B_1)$, luego, $\mu_0\mu_1 \in B_2$, y así sucesivamente. También como $g_i \in B_0$, entonces $g_i^{-1}\mu_0 \cdots \mu_{i-1} \in Pr(B_i)$, esto implica

$$|g_i^{-1}\mu(E_i) - \mu_i \cdots \mu_{n-1}(E_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\mu(E_i) - \mu_i \cdots \mu_{n-1}(E_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y por lo tanto $|\mu(g_i^{-1}E_i) - \mu(E_i)| < \varepsilon$. □

Como mencionamos anteriormente, el inciso 4 nos dice que si un grupo G es amenable entonces para cada $\varepsilon > 0$ y cada finito A existe B_ε que es ε-Ramsey con respecto a A.

Definición 4.4. Decimos que $E \subseteq G$ es *invariantemente medible (i.m.)* si existe $\mu \in Pr(G)$ tal que para cada $g \in G$ se tiene $\mu(gE) = \mu(E)$.

El teorema anterior nos dice que G es amenable si y sólo si todo subconjunto E es invariantemente medible. Es natural preguntarse hasta que extento puede uno generalizar este teorema a un grupo arbitrario, es decir, si $\mathscr{M}$ es la familia de subconjuntos invariantemente medibles entonces existe una μ que mide invariantemente a todo elemento de $\mathscr{M}$, resulta ser que tenemos obstrucciones desde el primer momento.

Algunas observaciones básicas sobre esta propiedad son las siguientes. Si $E \in \mathscr{M}$ entonces $G \setminus E \in \mathscr{M}$, además, si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $gA \cup gB = g(A \cup B)$, podemos concluir que $A \cup B \in \mathscr{M}$ siempre que A y B sean ajenos. Observemos que si $A \in \mathscr{M}$ y μ es testigo de esto, entonces si existe una familia ajena por pares de la forma $\{ gA : g \in H \}$, donde $H \subseteq G$, entonces $\mu(A) = 0$.

Teorema 4.5. *En $\mathbb{F}_2$, existen dos subconjuntos i.m. tales que ninguna medida μ los mide invariantemente.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{F}_2$ los generadores y A el conjunto de todas las palabras reducidas que empiezan con a o con a^{-1}. Definamos $h\colon \mathbb{F}_2 \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo que manda a al 1 y b al -1. Definamos $Z_k = \{ x \in \mathbb{F}_2 : h(x) \geq k \}$, también definimos $Z = Z_0$, observemos que $wZ = Z_{h(w)}$. Considere los conjuntos

$$A^0 = \{ x \in A : h(x) > 0 \} \qquad A^1 = \{ x \in A : h(x) \leq 0 \}.$$

Notemos que $A^0 \subseteq Z_1$ y $A^1 \subseteq \mathbb{F} \setminus Z_1$. El conjunto A no puede ser medido invariantemente, en efecto, las familias $\{ b^k A : k \in \mathbb{Z} \}$ y $\{ a^k(\mathbb{F}_2 \setminus A) : k \in \mathbb{Z} \}$ son infinitas y ajenas por pares, lo cual implicaría que A y su complemento miden 0. Así A^0 y A^1 no pueden ser medidos simultáneamente. Ahora encontremos $\mu_0, \mu_1 \in Pr(G)$ que midan invariantemente a A^0 y A^1, respectivamente.
Afirmación. *Si existen $\mu_0, \mu_1 \in Pr(G)$ tales que para cada $w \in \mathbb{F}_2$ tenemos $\mu_i(wZ) = i$ entonces μ_i mide invariantemente a A^i.* Sea $w \in \mathbb{F}_2$, tenemos que $\mu_0(wA^0) \leq \mu_0(wZ) = 0$ y además $\mu_0(A^0) \leq \mu_0(Z_1) = \mu_0(aZ) = 0$. Ahora, $\mu_1(A^1) \leq \mu_1(\mathbb{F}_2 \setminus Z_1) = \mu_1(\mathbb{F}_2 \setminus aZ) = 1 - \mu_1(aZ) = 0$, además $\mu_1(wA^1) \leq \mu_1(w(\mathbb{F}_2 \setminus Z_1)) = \mu_1(\mathbb{F}_2 \setminus wZ_1) = \mu_1(\mathbb{F}_2 \setminus waZ) = 1 - \mu_1(waZ) = 0$.

Lo único que nos falta es dar la construcción de las medidas μ_i, para esto observemos que las familias $\{ \mathbb{F}_2 \setminus Z_k : k \in \mathbb{Z} \}$ y $\{ Z_k : k \in \mathbb{Z} \}$ son creciente y decreciente, respectivamente por lo que son base para un filtro. Extendiendo estas familias a ultrafiltros $\mathcal{U}_0$ y $\mathcal{U}_1$, tenemos dos medidas en $Pr(\mathbb{F}_2)$, es fácil ver que cumplen con lo pedido porque si $w \in \mathbb{F}_2$ entonces $\mu_0(wZ) = \mu_0(Z_{h(w)}) = 0$ y más aún $\mu_1(wZ) = \mu_1(Z_{h(w)}) = 1$. □

Sea $A \in [G]^{<\omega}$ fijo y tomemos $E \subseteq G$, definimos la función $\mathcal{X}_E\colon G \to \mathcal{P}(A)$ por $g \mapsto Eg^{-1} \cap A$. Consieremos la familia $\mathcal{X}_E = \{ \mathcal{X}_E(g) : g \in G \}$, esta familia es una aproximación finita de los trasaldos de E.

Definición 4.6. Sean $A \subseteq G$ finito y $\mathcal{Y}$ una familia de subconjunto de A, diremos que $\mathcal{Y}$ está realizada en G si existe $E \subseteq G$ tal que $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_E$.

Si A y $\mathcal{Y}$ son como arriba y $a \in A$, utilizaremos el símbolo Y_a para denotar al conjunto $\{ Y \in \mathcal{Y} : a \in Y \}$.

Definición 4.7. Sean $A \subseteq G$ finito, $\varepsilon \geq 0$ y $\mathcal{Y}$ una familia de subconjunto de A. Decimos que $\mathcal{Y}$ está ε-balanceada si existe $\mu \in Pr(\mathcal{Y})$ tal que para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene

$$|\mu(Y_a) - \mu(Y_b)| \leq \varepsilon.$$

La familia es balanceada si es 0-balanceada.

La propiedad de balanceo puede ser vista como una propiedad de homogeneidad de la familia $\mathcal{Y}$. A continuación mencionamos un teorema muy interesante que relaciona la amenabilidad de un grupo con la teoría de Ramsey y las familias desbalanceadas.

Teorema 4.8. *Sea G un grupo discreto, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *G no es amenable.*

(2) *Existe $A \in [G]^{<\omega}$ y existe $\mathcal{Y}$ familia de subconjuntos de A debalanceada que está realizada en G.*

(3) *Existe $A \in [G]^{<\omega}$ tal que ningún $B \in [G]^{<\omega}$ es 0-Ramsey con respecto a A.*

Para probar este teorema sólo necesitaremos dos lemas sencillos que engloban casi todas las propiedades requeridas para la prueba.

Lema 4.9. *Sean G un grupo, $\varepsilon \geq 0$ y $A \in [G]^{<\omega}$. Si existen $E \subseteq G$, $\mathcal{Y}$ es ε-balanceada y $B \in [G]^{<\omega}$ tales que*

$$\mathcal{Y} = \{\, \mathcal{X}_E(g) : g \in B \,\},$$

entonces existe $\nu \in Pr(B)$ tal que para cada $a, a' \in A$ se cumple $|a\nu(E) - a'\nu(E)| \leq \varepsilon$.

Demostración. Escogiendo un elemento de cada fibra de la imagen de $\mathcal{X}_E$, podemos suponer que para todos $b \neq b'$ se cumple que $\mathcal{X}_E(b) \neq \mathcal{X}_E(b')$. Como $\mathcal{Y}$ es ε-balanceada existe $\nu \in Pr(\mathcal{Y})$ tal que para cualesquiera $a, b \in A$ se cumple que $|\mu(Y_a) - \mu(Y_b)| \leq \varepsilon$. Definamos $\nu \in Pr(B)$ por $\nu(\{\, b \,\}) = \mu(\mathcal{X}_E(b))$, es fácil ver que esto define una medida de probabilidad sobre B. Si probamos que para toda $a \in A$ se cumple que $a\nu(E) = \mu(Y_a)$ habremos acabado. Sea $a \in A$, usando las definiciones tenemos que

$$a\nu(E) = \nu(a^{-1}E) = \sum_{b \in a^{-1}E} \nu(\{\, b \,\}) = \sum_{ab \in E} \mu(\{\, \mathcal{X}_E(b) \,\}) = \mu(Y_a). \qquad \square$$

Lema 4.10. *Sean G un grupo, $\varepsilon \geq 0$ y $A \in [G]^{<\omega}$. Si existen $E \subseteq G$ y $\nu \in Pr(G)$ tal que para cada $a, a' \in A$ se cumple que*

$$|a\nu(E) - a'\nu(E)| \leq \varepsilon,$$

entonces la familia $\{\, X \in \mathcal{X}_E : \nu(\{\, g \in G : \mathcal{X}_E(g) = X \,\}) > 0 \,\}$ es ε-balanceada. Más aún, $\mathcal{X}_E$ es balanceada.

Demostración. Para cada $X \in \mathcal{X}_E$ definimos $\mu(\{ X \}) = \nu(\{ g \in G : \mathcal{X}_E(g) = X \})$. Como antes, basta observar que para cada $a \in A$ se cumple que $\mu(Y_a) = \nu(a^{-1}E)$, en efecto, si $a \in A$ entonces

$$\mu(Y_a) = \sum_{a \in X} \mu(\{ X \}) = \nu(\{ g \in G : \mathcal{X}_E(g) = X \})$$

$$= \nu(\{ g \in G : a \in \mathcal{X}_E(g) \}) = \nu(\{ g \in G : ag \in E \}) = \nu(a^{-1}E). \qquad \square$$

Demostración del teorema 4.8. ($\neg 2 \Rightarrow \neg 1$) Supongamos que para todo $A \in [G]^{<\omega}$ y toda familia $\mathcal{Y}$ de subconjuntos de A tenemos que $\mathcal{Y}$ es balanceada o no está realizada en G. Para ver que G es amenable utilzaremos el teorema 4.2. Sea A' un finito de G arbitrario y E cualquier subconjunto de G, por hipótesis aplicada a $A = A' \cup \{ e_G \}$ tenemos que $\mathcal{X}_E$ está balanceada, por el lema 4.9 aplicado a $\varepsilon = 0$ y a un conjunto B de representantes de las fibras de $\mathcal{X}_E$ (el cual es finito, pues $\mathcal{P}(A)$ lo es) existe $\nu \in Pr(B) \subseteq Pr(G)$ que es homogénea con los elementos de A, en particular para todo $g \in A'$ se tiene $\mu(gE) = \mu(E)$.

($\neg 3 \Rightarrow \neg 2$) Supongamos que para cada $A \in [G]^{<\omega}$ existe $B \in [G]^{<\omega}$ que es 0-Ramsey con respecto a A. Probaremos que para todo $A \in [G]^{<\omega}$ y toda familia $\mathcal{Y}$ de subconjuntos de A se cumple que $\mathcal{Y}$ es balanceada o no está realizada en G. Para esto, sean A y $\mathcal{Y}$ arbitrarios, si $\mathcal{Y}$ no está realizada, ya acabamos. Así que supongamos que $\mathcal{Y}$ está realizada en G, es decir, existe $E \subseteq G$ tal que $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_E$. Para este A existe $B \in [G]^{<\omega}$ que es 0-Ramsey con respecto a A, así que el lema 4.10 nos dice que $\mathcal{X}_E$ es balanceada.

($\neg 1 \Rightarrow \neg 3$) Supongamos que G es amenable y sea $A \subseteq G$ finito.

Afirmación. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\mathcal{Y}$ es ε-balanceada entonces para todo $\varepsilon' > 0$ la familia es ε'-balanceada.* Para $\varepsilon > 0$ definimos

$$X_\varepsilon = \{ x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) : x \text{ es } \varepsilon\text{−}\mathit{balanceada} \},$$

observemos que esta es una familia decreciente de subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ así, como este conjunto es finito la familia se debe estabilizar y debe cumplir con lo requerido.

Como G es amenable existe B que es ε-Ramsey con respecto a A. Sea $E \subseteq B$, por hipótesis existe $\nu \in Pr(B)$ que cumple

$$\forall a, a' \in A \ |a\nu(E) - a'\nu(E)| \leq \varepsilon.$$

Observemos que la familia $\mathcal{Y} = \{ \mathcal{X}_E(g) : g \in B \wedge Ag \subseteq B \}$ es igual a la familia $\{ X \in \mathcal{X}_E : \nu(\{ g \in G : \mathcal{X}_E(g) = X \}) > 0 \}$ por lo que aplicando el lema 4.10 tenemos que $\mathcal{Y}$ es ε-balanceada. Por la elección de ε, $\mathcal{Y}$ es ε'-balanceada para todo $\varepsilon' > 0$. A su vez esto implica, gracias al lema 4.9 que existe $\nu \in Pr(B)$ tal que para cada $a, a' \in A$ se cumple que $|a\nu(E) - a'\nu(E)| \leq \varepsilon'$, es decir B es ε'-Ramsey para todo $\varepsilon' > 0$. Para concluir con la prueba veamos que B es 0-Ramsey. Sea $E \subseteq B$. Considere a $\mathbb{R}^+$ con el orden invertido y para $\varepsilon > 0$ definimos $\mu_\varepsilon \in Pr(B)$ como el testigo de que B es ε-Ramsey para el subconjunto E. Ésta red tiene un punto de acumulación μ, sin pérdida de generalidad supongamos que $\lim_\varepsilon \mu_\varepsilon = \mu$, veamos que μ testifica que B es 0-Ramsey. Como $Pr(B)$ es compacto y A es finito no vacío tenemos que para todo $\nu \in Pr(A)$ se cumple que $\nu\mu = \lim_\varepsilon \nu\mu_\varepsilon \in Pr(B)$ y para toda $\nu, \nu' \in Pr(A)$ se cumple

$$|\nu\mu(E) - \nu'\mu(E)| = |\lim_\varepsilon \nu\mu_\varepsilon(E) - \lim_\varepsilon \nu'\mu_\varepsilon(E)| = \lim_\varepsilon |(\nu\mu_\varepsilon(E) - \nu'\mu_\varepsilon(E))| \leq 0. \ \square$$

Corolario 4.11. *G es amenable $\iff$ para todo $A \in [G]^{<\omega}$ existe $B \in [G]^{<\omega}$ que es 0-Ramsey con respecto a A.*

5. Comentarios finales y preguntas

Por supuesto que este enfoque para atacar el problema del grupo de Thompson es relativamente nuevo y por lo tanto quedan muchas preguntas que responder. Las técnicas aquí desarrolladas también son de interés intrínseco así como el estudio del espacio $Pr(S)$ y de las conjeturas per se.

La primera pregunta que aparece de manera natural tiene que ver en el cómo extender estos resultados a una clase más general de medidas, en particular, ¿qué tipo de propiedades topológicas tiene la subclase de $Pr(S)$ en la que podemos asegurar la continuidad de la operación? Esta pregunta va de la mano con el estudio de los métodos para extender el teorema parcial de Hindman a más de dos términos, en una aproximación a NAHT tal y como pregunta Moore [5], ¿qué se puede decir del caso con tres términos del teorema 3.4? Nos gustaría tener más aproximaciones de subconjuntos compactos dados por la información de la primera pregunta y aunado a esto, más información sobre el conjunto de idempotentes en caso de ser no vacío. También sería interesante saber si NAHT implica otros teoremas ya conocidos para darle un voto positivo a esta conjetura y en una aproximación más, probar algunas instancias de NAHT, por ejemplo, para ciertos tipos de coloraciones.

La conjetura GE tiene interés propio ya que no menciona un conjunto en específico y nos gustaría saber que tipos de sistemas la satisfacen y quizás investigar más a fondo esta cuestión, tratando de hacer una estratificación según la complejidad de un sistema binario, claro está que hay que buscar la manera correcta de hacer esto.

Por último nos gustaría ver que efecto tiene los criterios de amenabilidad tipo Ramsey en otros grupos, en particular, caracterizar sus conjuntos Ramsey y estudiar más a detalle la propiedad i.m. para grupos arbitrarios. Tal vez necesitamos estudiar métodos más sofisticados de la topología algebraica, más precisamente, aquéllos que tienen relación con la *propiedad T* debido a la similitud en su formulación.

Hemos trabajado poco en la primera cuestión y a priori no es claro qué propiedades se deban cumplir. El tiempo no nos ha permitido estudiar más a detalle estas cuestiones pero planeamos abordarlas en un futuro proyecto.

Referencias

[1] Cannon, J. W., Floyd, W. J., and Parry, W. R. Introductory notes on Richard Thompson's groups. *Enseignement Mathematique 42* (1996), 215–256.

[2] Day, M. M. Amenable Semigroups. *Illinois Journal of Mathematics 1*, 4 (1957), 509–544.

[3] Hindman, N. Finite Sums from Sequences Within Cells of a Partition of $\mathbb{N}$. *Journal of Combinatorial Theory (A)*, 17 (1974), 1–11.

[4] Moore, J. T. Amenability and Ramsey Theory. *Fund. Math. 220*, 3 (2013), 263–280.

[5] Moore, J. T. Hindman's Theorem, Ellis's lemma, and Thompson's group F. *Zbornik Radova of the Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts 17*, 25 (2015), 171–187.

[6] Paterson, A. L. T. *Amenability*, 1 ed., vol. 29 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 1988.

[7] Von Neumann, J. Zur allgemeinen Theorie des Masses. *Fundamenta Mathematicae 13* (1929), 73–116.