



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO  
Y  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS  
Y  
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



## Marcos Continuos en Espacios de Krein.

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas  
Presenta:

DIEGO ALEJANDRO CARRILLO CARVAJAL

*Asesor:* Dr. Elmar Wagner

MORELIA, MICHOACÁN - FEBRERO DE 2018.



<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>5</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>9</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>12</b>
1.1. Teoría de la Medida . . . . .	12
1.2. Marcos en espacios de Hilbert . . . . .	15
<b>2. MARCOS EN ESPACIOS DE KREIN</b>	<b>20</b>
2.1. Espacios de Krein . . . . .	20
2.2. Marcos Discretos . . . . .	25
2.3. Espacios de Hilbert con $W$ -métrica . . . . .	28
<b>3. MARCOS GENERALIZADOS EN ESPACIOS DE KREIN</b>	<b>31</b>
3.1. Integral Débil . . . . .	31
3.2. Marcos Continuos . . . . .	33
3.3. Descomposición de Marcos . . . . .	42
<b>4. EJEMPLOS</b>	<b>49</b>
4.1. Operador de Gram $W_\varphi$ . . . . .	49
4.2. Marcos de Gabor y Marcos de Wavelet . . . . .	52
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>56</b>



## AGRADECIMIENTOS

Durante mi formación universitaria hasta esta gran experiencia a nivel de posgrado, mi vida se ha enriquecido en varios aspectos gracias a un sinnúmero de familiares y amigos que de alguna u otra forma supieron ayudarme; son tantos que no los puedo nombrar a todos. En ese sentido, agradezco a Dios por sus bendiciones reflejadas en dichas personas que con su sencillez y amabilidad creyeron en mí, dándome así la fortaleza necesaria para alcanzar este logro académico.

A mis padres los más fraternos agradecimientos por ser mi mayor motivación para estudiar con mucha disciplina; a mis hermanos por el respaldo y la confianza que han depositado en mí, en especial a mi hermano mayor Omar Carrillo por su gran generosidad; así mismo, a mi pareja Luz Adriana por su preocupación y palabras de aliento en los momentos difíciles. Agradecer también a mi asesor de la licenciatura, el Dr. Osmin Ferrer por haberme impulsado a continuar los estudios en las matemáticas puras y sobre todo por sus enseñanzas de humildad, sin su ayuda incondicional no habría alcanzado la admisión al posgrado; de igual manera a quienes fueron mis maestros de clases durante la maestría, por sus asistencias, confianza y conocimientos impartidos, haciendo posible mi solida formación académica, en particular al Dr. Elmar Wagner quien fue mi asesor y gran amigo pues desde mi llegada al posgrado pude contar con su colaboración absoluta, lo cual fue crucial para culminar este proceso satisfactoriamente.

Dar las gracias a la comunidad en general del posgrado conjunto en ciencias matemáticas UNAM-UMSNH por sus orientaciones y acompañamientos; del mismo modo a CONACYT puesto que su patrocinio fue muy importante para dedicarme exclusivamente a las actividades académicas, permitiéndome además hacer bonitas amistades con compañeros como Jhon Jairo, Shaday Guerrero y Diana Piñango entre otros, quienes me hicieron sentir como en casa con su apoyo incondicional y por los gratos momentos compartidos. Resalto igualmente amigos como Kevin Esmeral y Roselia Torres que facilitaron mi llegada a México y que de igual forma han estado muy pendientes durante mi estadía en el país estos dos años.



## RESUMEN

Los espacios de Krein como generalización de los espacios de Hilbert, aparecen del mismo modo en diversas áreas de la física donde su principal diferencia está en la posibilidad de contar con un producto interno indefinido y de ganar propiedades que en el espacio de Hilbert quizás no se cumplan. Por otro lado, la teoría de marcos en espacios de Krein es de utilidad en el sentido práctico para la representación discreta de cualquiera de sus vectores en términos de una familia denominada marco, donde dicha representación se da mediante series de funciones. El objetivo de este estudio es generalizar la teoría estándar mencionada, de manera que los vectores del marco se puedan etiquetar utilizando índices discretos o continuos y así dar lugar a marcos que proporcionan representaciones continuas mediante integrales débiles. Ante ello, surgió lo que se denomina como *marcos continuos en espacios de Krein* y en los cuales aparecen nuevos marcos de mayor interés. Tal generalización se logró dando una descripción de la teoría completamente en espacios de Krein con producto interno indefinido, donde uno de los resultados a destacar es el teorema de descomposición de marcos, el cual permite ver naturalmente un marco como una base generalizada.

**PALABRAS CLAVE:** Producto interno, espacio de Krein, marcos discretos, integral débil, marcos continuos.

## ABSTRACT

Krein spaces as a generalization of Hilbert spaces, appear in the same way in different areas of physics where the main difference is the possibility of having an indefinite internal product and gain properties that in the Hilbert space may not be fulfilled. On the other hand, the theory of frames in Krein spaces is useful in the practical sense for the discrete representation of any of its vectors in the terms of a family called frame, where said representation is given by a series of functions. The objective of this study is to generalize the aforementioned standard theory, so that frame vectors can be labeled using discrete or continuous indexes and thus give rise to frames that provide continuous representations through weak integrals. In the face of this, what is known as continuous frames in Krein spaces arose and in which new frames of greater interest appear. Such generalization was achieved by giving a description of the theory completely in Krein spaces with indefinite internal product, where one of the results to be highlighted is the frame decomposition theorem, which allows to see naturally a frame as a generalized base.



Los espacios de Hilbert son el contexto común en el que se trabaja la explicación matemática de muchas áreas de la física, y en varios casos surge el problema de representar un vector  $f$  del espacio  $\mathcal{H}$  en términos de alguna familia de vectores  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ . En teoría, la mejor solución para dicho problema es utilizar una base ortonormal pues su principal característica consiste en garantizar la unicidad de dicha representación, es decir, si

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n(f) f_n,$$

los coeficientes  $c_n(f)$  son únicos. No obstante, las bases ortonormales son a menudo difíciles de manejar en la práctica y entre las formas de evitar la rigidez de dichas bases, se encuentra abandonar la ortogonalidad de los vectores y la unicidad de la representación, mientras se mantienen sus otras propiedades útiles como convergencia rápida de la misma aunque los coeficientes correspondientes no son necesariamente únicos. Ante ello, el objeto resultante es lo que se denomina un *marco* introducido en 1952 por Duffin y Schaeffer [1], trabajo en el cual los marcos se usaron como herramienta para el estudio de series de Fourier no armónicas. La importancia del concepto no se comprendió al comienzo, sin embargo tiempo después fue que estos objetos recibieron más atención entre matemáticos y físicos, gracias al trabajo publicado tres décadas después por Daubechies, Grossmann y Meyer [2] en el análisis wavelet.

Ahora bien, es natural querer extender la teoría de marcos en espacios de Hilbert a otros espacios más generales, que del mismo modo aparecen en diversas áreas de la física y en los cuales se puede ganar propiedades que en el espacio de Hilbert quizás no. Por ejemplo en [3] dan un enfoque directo de la teoría teniendo en cuenta la estructura de los espacios de Krein, en el sentido que se evita trabajar en el espacio de Hilbert asociado y transferir de uno al otro; sin embargo, dicho proceso de transferencia se realiza para la construcción de los ejemplos. Por otro lado, debido a que los marcos en espacios de Krein brindan una representación discreta donde se usan series de funciones, en este trabajo se generaliza la teoría estándar mencionada de tal manera que los vectores del marco se puedan etiquetar utilizando índices discretos o continuos y de este modo la teoría da lugar a marcos que proporcionan representaciones continuas mediante integrales débiles, surgiendo así lo que se va a denominar como *marcos continuos en espacios de Krein* y en los cuales aparecen nuevos marcos de mayor interés.

En el capítulo 1 se dan propiedades básicas de teoría de la medida para el estudio de conceptos relevantes en la tesis, como la integral débil y también se busca dar a conocer el estudio de los marcos en espacios de Hilbert con sus características más importantes. En el capítulo 2 básicamente se establecen resultados principales de [3], sobre los marcos discretos en espacios de Krein con la estructura de estos espacios; asimismo se destacan aspectos fundamentales sobre espacios de Hilbert con  $W$ -métrica que serán de utilidad en los ejemplos. En el capítulo 3 se encuentra el resultado principal de este trabajo, donde se pasa de los marcos discretos a los marcos continuos generalizando gran parte de los resultados del capítulo 2; entre dichos resultados se destaca el teorema de descomposición de marcos, el cual permite ver naturalmente un marco como una base generalizada. Por último, en el capítulo 4 se finaliza el trabajo mostrando ejemplos de marcos continuos, donde se hace uso de propiedades del operador de Gram  $W_\varphi$ , como también de resultados sobre marcos de Gabor y marcos de Wavelet.



Es común que en un producto interno la linealidad sea establecida en la entrada de la izquierda, sin embargo el producto interno que se usa a lo largo del presente trabajo se adopta linealidad en la derecha como lo prefieren los físicos. En este capítulo se dan algunas nociones elementales de la teoría de la medida y los marcos en espacios de Hilbert, con el fin de sentar las bases necesarias para los marcos discretos y la integral débil. Los resultados de este capítulo pueden ser encontrados en [6], [7], [10] y [11].

## 1.1. Teoría de la Medida

**Definición 1.1.** Sea  $\mathcal{M}$  un conjunto. Una familia  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $\mathcal{M}$  se dice que es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathcal{M}$  si se cumple:

- i)  $\mathcal{M}$  pertenece a  $\mathcal{B}$ .
- ii) Si  $A$  pertenece a  $\mathcal{B}$ , el complemento  $A^c = \mathcal{M} \setminus A$  pertenece a  $\mathcal{B}$ .
- iii) Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $\mathcal{B}$ , la unión  $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$  pertenece a  $\mathcal{B}$ .

El par  $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$  es denominado un *espacio medible* y un conjunto en  $\mathcal{B}$  es llamado un *conjunto medible*.

Si  $2^{\mathcal{M}} := \{A : A \subset \mathcal{M}\}$ , se observa que  $2^{\mathcal{M}}$  siempre es una  $\sigma$ -álgebra. Además, para cualquier colección no vacía  $\mathbb{A} \subset \mathcal{B}$ , existe la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene dicha colección y comúnmente se llama la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathbb{A}$ .

**Definición 1.2.** Una *medida*  $\mu$  es una función que toma valores en los números reales extendidos  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  y esta definida sobre una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{M}$  tal que: i)  $\mu(\emptyset) = 0$ , ii)  $\mu(E) \geq 0$  para todo  $E \in \mathcal{B}$ , y iii)  $\mu$  es **contablemente aditiva** en el sentido que si  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es cualquier sucesión disjunta de conjuntos medibles, entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Si una medida no toma el valor  $+\infty$ , se dice que es *finita*. Más general, si existe una sucesión  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de conjuntos medibles con  $\mathcal{M} = \bigcup E_n$  tal que  $\mu(E_n) < \infty$  para todo  $n$ , entonces se dice que  $\mu$  es  $\sigma$ -*finita*. Por otra parte, se dice que una cierta proposición se satisface  $\mu$ -casi en todas partes o simplemente casi en todas partes, si existe un subconjunto  $N \in \mathcal{B}$  con  $\mu(N) = 0$  tal que la proposición se satisface en el complemento de  $N$ .

A través de este trabajo se considera un *espacio de medida* denotado por  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mu)$ , el cual es un espacio medible  $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$  junto con una medida  $\mu$ .

**Definición 1.3.** Una función real-valuada extendida  $f : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  se llama  **$\mathcal{B}$ -medible** o simplemente **medible**, si para cada número real  $\alpha$  el conjunto  $f^{-1}((\alpha, \infty])$  es medible. Por otro lado, si la función toma valores en los números complejos,  $f$  es medible si su parte real e imaginaria lo son.

**Definición 1.4.** Una función  $\varphi$  real-valuada que solo tiene un número finito de valores y es medible, se designa como función **simple**. Además  $\varphi$  puede ser representada en la forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j},$$

donde los  $a_j \in \mathbb{R}$  son distintos y los  $E_j$  son disjuntos tal que  $\mathcal{M} = \bigcup_{j=1}^n E_j$ . A partir de ello, se define la **integral** de  $\varphi$  con respecto a  $\mu$  por,

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi d\mu := \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j).$$

Una función simple tiene muchas representaciones como combinación lineal de funciones características, sin embargo la representación anterior es una *única representación estándar*.

**Definición 1.5.** Si una función medible  $f$  es real-valuada extendida y no negativa en el espacio  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mu)$ , se define la **integral** de  $f$  con respecto a  $\mu$  por

$$\int_{\mathcal{M}} f d\mu := \sup \left\{ \int_{\mathcal{M}} \varphi d\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ simple} \right\}.$$

Si por el contrario,  $f$  también toma valores negativos y su parte positiva  $f^+ := \sup\{f, 0\}$  o su parte negativa  $f^- := \sup\{-f, 0\}$  tiene integral finita con respecto a  $\mu$ , entonces

$$\int_{\mathcal{M}} f d\mu := \int_{\mathcal{M}} f^+ d\mu - \int_{\mathcal{M}} f^- d\mu,$$

Asimismo, si la función  $f$  tiene integral finita con respecto a  $\mu$ , se dice que  $f$  es **integrable**. Si  $f$  toma valores en los complejos, se dice integrable si su parte real e imaginaria lo son. En este caso se define

$$\int_{\mathcal{M}} f d\mu := \int_{\mathcal{M}} \operatorname{Re}(f) d\mu + i \int_{\mathcal{M}} \operatorname{Im}(f) d\mu.$$

Ahora bien, hay algunos casos donde se discuten funciones  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  cuyo comportamiento es como el de las medidas, excepto que estas toman tanto valores positivos como negativos. Además, no es conveniente permitir los números reales extendidos  $+\infty$  y  $-\infty$  a la vez.

**Definición 1.6.** *Por una **medida signada** en un espacio medible  $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ , se entiende una función real-valuada extendida  $\nu$  en  $\mathcal{B}$  tal que:*

- i)  $\nu$  asume a lo más uno de los valores  $+\infty, -\infty$ .
- ii)  $\nu(\emptyset) = 0$ .
- iii)  $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ , para cualquier sucesión disjunta  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ .

Un conjunto  $P$  se dice *positivo* con respecto a la medida signada  $\nu$  si  $\nu(E \cap P) \geq 0$  para cualquier conjunto medible  $E$ . De igual modo, un conjunto  $N$  es *negativo* si  $\nu(E \cap N) \leq 0$  y un conjunto  $M$  es *nulo* si  $\nu(E \cap M) = 0$ .

**Teorema 1.1.** [11] *(Teorema de Descomposición de Hahn)*

Sea  $\nu$  una medida signada en el espacio medible  $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ , entonces existe un conjunto positivo  $P$  y un conjunto negativo  $N$  con respecto a  $\nu$  tal que  $\mathcal{M} = P \cup N$  y  $P \cap N = \emptyset$ .

Una descomposición de  $\mathcal{M}$  en dos conjuntos disjuntos  $P$  y  $N$ , positivo y negativo respectivamente es llamada una *descomposición de Hahn* para  $\nu$ .

**Observación 1.1.** [10] *En general, una descomposición de Hahn no es única; sin embargo, si  $P_1, N_1$  y  $P_2, N_2$  son descomposiciones de Hahn para  $\nu$ , entonces*

$$\nu(E \cap P_1) = \nu(E \cap P_2), \quad \nu(E \cap N_1) = \nu(E \cap N_2), \quad E \in \mathcal{B}$$

**Definición 1.7.** *Sea  $P, N$  una descomposición de Hahn para la medida signada  $\nu$ . Las **variaciones positiva y negativa** de  $\nu$  son las medidas  $\nu_+$  y  $\nu_-$  definidas para un conjunto medible  $E$  por*

$$\nu_+(E) := \nu(E \cap P), \quad \nu_-(E) := -\nu(E \cap N)$$

y la **variación total** de  $\nu$  es la medida  $|\nu|$  definida por  $|\nu|(E) := \nu_+(E) + \nu_-(E)$ .

Dos medidas  $\nu_1, \nu_2$  son *mutuamente singulares* y se denota por  $\nu_1 \perp \nu_2$ , si existen dos conjuntos disjuntos  $A, B$  medibles con  $\mathcal{M} = A \cup B$  tal que  $\nu_1(A) = \nu_2(B) = 0$ . Luego, las variaciones positiva y negativa son mutuamente singulares.

**Observación 1.2.** [11] *Sea  $g$  una función medible en  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mu)$  tal que  $\nu(E) := \int_E g d\mu$  define una medida signada, entonces si  $f$  es una función medible,*

$$\int_{\mathcal{M}} f d\nu = \int_{\mathcal{M}} fg d\mu,$$

donde la integración con respecto a la medida signada  $\nu$  esta dada por

$$\int_{\mathcal{M}} f d\nu := \int_{\mathcal{M}} f d\nu_+ - \int_{\mathcal{M}} f d\nu_-.$$

**Teorema 1.2.** [11](*Teorema de Descomposición de Jordan*)

Si  $\nu$  es una medida signada en el espacio medible  $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ , entonces dicha medida es la diferencia de dos medidas mutuamente singulares. En particular,  $\nu$  esta determinada de manera única por la diferencia de  $\nu_+$  y  $\nu_-$ .

Debido a que la medida signada  $\nu$  asume a lo más uno de los valores extendidos  $+\infty$  y  $-\infty$ , entonces ya sea  $\nu_+$  o  $\nu_-$  debe ser finita.

**Observación 1.3.** [10] Un conjunto  $E$  es positivo si  $\nu_-(E) = 0$  y es nulo si  $|\nu|(E) = 0$ , o sea,  $|\nu|(E) = 0$  implica  $\nu(E) = 0$ . Además, una medida signada  $\nu$  es **absolutamente continua** con respecto a una medida  $\mu$  si  $\nu(E) = 0$  para cada  $E$  tal que  $\mu(E) = 0$  y se denota  $\nu \ll \mu$ . En particular, la medida signada  $\nu$  es absolutamente continua con respecto a  $|\nu|$  y efectivamente

$$\int_E (\chi_P - \chi_N) d|\nu| = \nu(E),$$

En tal caso, de manera similar a la observación 1.2 se tiene que para cualquier función medible  $f$ , se cumple

$$\int f d\nu = \int f(\chi_P - \chi_N) d|\nu|.$$

En general, en la medida signada  $\nu(E) = \int_E g d\mu$  se tiene que  $\nu$  es absolutamente continua con respecto a  $\mu$ . El siguiente teorema muestra que sujeto a una restricción de  $\sigma$ -finitud, cada medida  $\nu$  absolutamente continua es obtenida de esa manera.

**Teorema 1.3.** [11](*Teorema de Radon-Nikodym*)

Supongamos que el espacio de medida  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mu)$  es  $\sigma$ -finito y que la medida  $\nu$  es absolutamente continua con respecto a  $\mu$ . Siendo así, existe una función medible no negativa  $f$  tal que para cada conjunto medible  $E$ ,

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

El teorema se extiende al caso de medidas signadas y la función  $f$  es única en el sentido que si  $g$  es cualquier función medible con esta propiedad, entonces  $g = f$  casi en todas partes. Además,  $f$  es llamada la *derivada de Radon-Nikodym* de  $\nu$  con respecto a  $\mu$  y se denota  $d\nu/d\mu$ .

## 1.2. Marcos en espacios de Hilbert

**Definición 1.8.** Una familia de elementos  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interno, es llamado un **marco** si existen constantes  $A, B > 0$  tales que

$$A\|h\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x_n, h \rangle|^2 \leq B\|h\|^2, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Las constantes  $A$  y  $B$  son llamadas cotas del marco pues no son únicas; las cotas óptimas del marco son el mayor valor posible de  $A$  y el menor valor posible de  $B$ . Si sucede el caso que  $A = B$  el marco se llama **ajustado**.

**Proposición 1.1.** Si  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal en  $\mathcal{H}$ , entonces para cualquier operador acotado  $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  con inverso  $Q^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  acotado, se cumple que  $\{f_n = Qe_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco con cotas  $\|Q^{-1}\|^{-2}$  y  $\|Q\|^2$ .

**Definición 1.9.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , entonces el operador lineal

$$T_0 : \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad \text{donde} \quad T_0(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n x_n,$$

se denomina **operador pre-marco**.

**Proposición 1.2.** [6, sec. 5.5] Una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$  es un marco para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  si y sólo si el operador pre-marco es un mapeo bien definido de  $\ell^2(\mathbb{N})$  a  $\mathcal{H}$ .

**Observación 1.4.** El operador pre-marco  $T_0$  asociado al marco  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para  $\mathcal{H}$  es acotado y su operador adjunto  $T_0^* : \mathcal{H} \rightarrow \ell_2(\mathbb{N})$  está dado por  $T_0^*(h) = \{\langle x_n, h \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Además, tras la composición de  $T_0$  y  $T_0^*$ , se obtiene el **operador marco**

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad Sh := T_0 T_0^*(h) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, h \rangle x_n,$$

el cual es acotado, autoadjunto y positivo.

**Lema 1.1.** [6, sec. 5.1] Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para  $\mathcal{H}$  y  $S$  el operador marco asociado, entonces se cumple que:

- i) El operador  $S$  es invertible y satisface  $B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$ .
- ii)  $\{S^{-1}x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco con cotas  $B^{-1}$ ,  $A^{-1}$  y su operador marco es  $S^{-1}$ .

El marco  $\{S^{-1}x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es llamado el **dual canónico** de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  porque juega un rol similar en teoría de marcos como el dual de una base.

**Definición 1.10.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son marcos para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  tales que

$$h = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle y_n, h \rangle x_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, h \rangle y_n, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **marco dual** de  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Proposición 1.3.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco en  $\mathcal{H}$ , entonces  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco ajustado si y sólo si tiene un dual de la forma  $y_n = Cx_n$  para alguna constante  $C > 0$ .

**Teorema 1.4.** [6, sec. 5.1] (*Descomposición de Marcos*)

Sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  con el operador marco  $S$ . En tal caso,

$$h = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle S^{-1}x_n, h \rangle x_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, h \rangle S^{-1}x_n, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

En conclusión, el teorema muestra que toda la información acerca de  $h \in \mathcal{H}$  está contenida por ejemplo en la sucesión  $\{\langle S^{-1}x_n, h \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde los valores  $\langle S^{-1}x_n, h \rangle$  se llaman coeficientes del marco.

La descomposición de marcos es el resultado más importante pues muestra que si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco de un espacio de Hilbert, cada elemento del espacio se puede representar como una combinación lineal infinita de los elementos del marco. Por esta razón, es natural ver un marco como una especie de “base generalizada”.

**Corolario 1.1.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco ajustado para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  con cotas  $A = B = 1$ . Si  $\|x_n\| = 1$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal para el espacio de Hilbert.

**Proposición 1.4.** [6] Supongamos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de elementos en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que existen constantes  $A, B$  que satisfacen

$$A\|h\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x_n, h \rangle|^2 \leq B\|h\|^2,$$

para todo  $h$  en un subconjunto denso  $V$  de  $\mathcal{H}$ . Siendo así,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco para  $\mathcal{H}$  con cotas  $A, B$ .

A menudo es posible construir marcos con propiedades especiales; por ejemplo, en la siguiente proposición se establece que a cada marco podemos asociar un marco ajustado canónico con cota  $A = B = 1$ .

**Proposición 1.5.** [6] Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  con operador marco  $S$  y  $S^{-1/2}$  la raíz cuadrada positiva de  $S^{-1}$ . Por lo tanto,  $\{S^{-1/2}x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco ajustado con cota del marco igual a 1, y

$$h = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle S^{-1/2}x_n, h \rangle S^{-1/2}x_n, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

**Observación 1.5.** [7] Se recuerda una implicación importante de la raíz de un operador positivo, a saber, la **descomposición polar** donde se establece que para todo operador acotado  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  entre dos espacios de Hilbert  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{K}$ , existe una única isometría parcial  $\mathcal{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  tal que

$$\mathcal{U}|_{(\text{Ran}(|T|))^\perp} \equiv 0 \quad \text{y} \quad T = \mathcal{U}|T|,$$

donde  $|T| = (T^*T)^{1/2}$  tal que  $\|Th\| = \||T|h\|$ ,  $\ker(T) = \ker(|T|)$  y  $\text{ran}(T^*) = \text{ran}(|T|)$ . Además, si  $T$  es inyectivo entonces  $\mathcal{U}$  es una isometría.

**Proposición 1.6.** [6] *Si se remueve un vector  $x_j$  de un marco  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , entonces*

$$\begin{aligned} \text{si } \langle x_j, S^{-1}x_j \rangle &\neq 1, & \{x_n\}_{n \neq j} &\text{ es un marco para } \mathcal{H}, \\ \text{si } \langle x_j, S^{-1}x_j \rangle &= 1, & \{x_n\}_{n \neq j} &\text{ es incompleto.} \end{aligned}$$

Los marcos que dejan de serlo al remover un elemento de la familia, reciben el nombre de *marcos exactos*.

**Teorema 1.5.** [6, sec. 5.5] (*Caracterización de Marcos*)

*Si  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , entonces los marcos para dicho espacio son precisamente las familias  $\{Ue_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es un operador acotado y sobreyectivo.*



En este capítulo se da a conocer los espacios de Krein y se establecen los marcos discretos en estos espacios, seguidamente se estudian sus propiedades como se vio en el capítulo anterior para luego llegar a los espacios de Krein generados por una  $W$ -métrica. Los resultados importantes sin demostración se pueden hallar en [3], [4] y [5].

## 2.1. Espacios de Krein

**Definición 2.1.** Sea  $\mathfrak{F}$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{K}$  de los números complejos o los números reales. Un **producto interno**  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{K}$  en  $\mathfrak{F}$  satisface que para todo  $x, y, z \in \mathfrak{F}$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

$$i) [x, y + z] = [x, y] + [x, z], \quad ii) [x, \alpha y] = \alpha [x, y], \quad iii) [x, y] = \overline{[y, x]}.$$

Al par  $(\mathfrak{F}, [\cdot, \cdot])$  se le llama *espacio con producto interno*.  $(\mathfrak{F}, -[\cdot, \cdot])$  también es un espacio con producto interno y se le conoce como el anti-espacio de  $(\mathfrak{F}, [\cdot, \cdot])$ .

**Definición 2.2.** Sea  $x$  un elemento en un espacio con producto interno  $\mathfrak{F}$ . El vector  $x$  se dice ser **positivo**, **negativo**, o **neutral** dependiendo si  $[x, x] > 0$ ,  $[x, x] < 0$ , o  $[x, x] = 0$  respectivamente.

Claramente el vector cero es neutral pero en general la neutralidad de un vector no implica que sea el vector nulo, de hecho la presencia o ausencia de vectores neutrales no nulos influye en las propiedades del producto interno.

**Definición 2.3.** Sea  $\mathfrak{L}$  subespacio de  $\mathfrak{F}$ . Si  $\mathfrak{L}$  solo contiene vectores positivos(negativos) y el vector nulo, se dice que es **definido positivo(negativo)**; además si tiene tanto elementos positivos como negativos, se dice en ese caso que es un **espacio con producto interno indefinido**.

En [4] y [5] se demuestra que un espacio con producto interno indefinido tiene vectores neutrales no nulos, lo cual no sucede en un espacio definido. Por otro lado, en un espacio con producto interno semidefinido, es decir, ya sea sin vectores positivos o sin vectores negativos, se satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

**Definición 2.4.** Dos vectores  $x, y \in \mathfrak{F}$  se dicen **ortogonales** ( $x \perp y$ ) si  $[x, y] = 0$  y dos conjuntos  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$  son **ortogonales** ( $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$ ) si  $x \perp y$  para todo  $x \in \mathfrak{M}, y \in \mathfrak{N}$ ; en particular si  $\mathfrak{M}$  se reduce a un solo vector  $x$ , se escribe simplemente  $x \perp \mathfrak{N}$ . Además, si  $\mathfrak{M}$  es subconjunto de  $\mathfrak{F}$ , el **complemento ortogonal** de  $\mathfrak{M}$  está dado por  $\mathfrak{M}^\perp := \{x \in \mathfrak{F} : x \perp \mathfrak{M}\}$  de tal manera que  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^{\perp\perp}$  y  $\mathfrak{M}^\perp = \mathfrak{M}^{\perp\perp\perp}$ .

El subespacio  $\mathfrak{L}^0 := \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^\perp$  se denomina la *parte isotrópica* de  $\mathfrak{L}$  y sus elementos no nulos se llaman *vectores isotrópicos*. Si  $\mathfrak{L}^0 = \{0\}$  se dice que  $\mathfrak{L}$  es un *subespacio no degenerado*, en caso contrario se dice subespacio degenerado. Un subespacio no degenerado semidefinido se llama *pre-Hilbert*.

**Definición 2.5.** Sea  $\mathfrak{L}$  un subespacio de  $\mathfrak{F}$ . Si  $x \in \mathfrak{F}$  admite una representación como  $x = y + z$ , con  $y \in \mathfrak{L}$  y  $z \in \mathfrak{L}^\perp$ , se dice que  $y$  es una **proyección ortogonal** de  $x$  en  $\mathfrak{L}$ .

Ni la existencia ni la unicidad de la proyección de un vector en un subespacio es garantizada; de hecho en Bogner [5] se demuestra que si existen dos proyecciones ortogonales en un subespacio, estas difieren en un vector isotrópico. Además, si  $\mathfrak{L}$  es no degenerado cada elemento en  $\mathfrak{F}$  tiene a lo más una proyección en  $\mathfrak{L}$  y si existe un elemento en  $\mathfrak{F}$  que tiene exactamente una proyección en  $\mathfrak{L}$ , entonces  $\mathfrak{L}$  es no degenerado.

**Definición 2.6.** Sean  $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$  subespacios de  $\mathfrak{F}$  tales que  $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{0\}$ . La **suma directa** de  $\mathfrak{L}$  y  $\mathfrak{L}'$  es denotada  $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}'$ . Además, si  $\mathfrak{L} \perp \mathfrak{L}'$  entonces se designa como **suma directa ortogonal** y se denota por  $\mathfrak{L} \dot{+} \mathfrak{L}'$ .

**Definición 2.7.** Decimos que  $(\mathfrak{F}, [\cdot, \cdot])$  es **descomponible** si admite una representación de la forma  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \dot{+} \mathfrak{F}^+ \dot{+} \mathfrak{F}^-$ , donde  $\mathfrak{F}^0$  es la parte isotrópica de  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F}^+$  y  $\mathfrak{F}^-$  son subespacios definidos positivo y negativo respectivamente. Tal descomposición se llama **descomposición fundamental**.

**Observación 2.1.** [4, sec. 1.1] Pues bien, aunque no siempre los subespacios no degenerados pueden descomponerse en la suma directa de un subespacio positivo y otro negativo, la inversa si es válida. Si  $\mathfrak{F}$  admite una descomposición en la suma directa  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ \dot{+} \mathfrak{F}^-$  con  $\mathfrak{F}^+$  y  $\mathfrak{F}^-$  definidos positivo y negativo respectivamente, entonces  $\mathfrak{F}$  es un espacio con producto interno no degenerado.

En realidad, si  $\mathfrak{F}$  admite tal descomposición fundamental entonces  $(\mathfrak{F}^+, [\cdot, \cdot]), (\mathfrak{F}^-, -[\cdot, \cdot])$  son espacios pre-Hilbert y es posible definir una topología en  $\mathfrak{F}^\pm$  por  $\|\cdot\|_\pm := \sqrt{\pm[\cdot, \cdot]}$ . Supuesto esto, la descomposición  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ \dot{+} \mathfrak{F}^-$  en espacios pre-Hilbert no es única, sin embargo mediante una descomposición ortogonal se define un espacio de Krein.

**Definición 2.8.** *Un espacio topológico con producto interno  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$  que admite una descomposición fundamental  $(\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ [\dot{+}] \mathfrak{K}^-)$  se denomina **Espacio de Krein** si la topología de la suma ortogonal coincide con la del espacio topológico y los subespacios  $(\mathfrak{K}^+, [\cdot, \cdot])$ ,  $(\mathfrak{K}^-, -[\cdot, \cdot])$  son espacios de Hilbert relativos a las normas  $\|\cdot\|_+$ ,  $\|\cdot\|_-$  respectivamente.*

Asumiendo una descomposición fundamental  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ [\dot{+}] \mathfrak{K}^-$ , se obtienen operadores  $P^\pm$  que van de  $\mathfrak{K}$  a  $\mathfrak{K}^\pm$  denominados *proyectores fundamentales*, los cuales están definidos por  $P^+k := k^+$ ,  $P^-k := k^-$  satisfaciendo  $(P^\pm)^2 = P^\pm$  y  $[P^\pm k, h] = [k, P^\pm h]$ ,  $\forall k, h \in \mathfrak{K}$ , de tal manera que  $P^+ + P^- = I_{\mathfrak{K}}$  y  $P^+P^- = P^-P^+ = 0$  son los operadores identidad y nulo en  $\mathfrak{K}$  respectivamente. Ahora bien, el operador  $J : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$  definido por  $J := P^+ - P^-$ , se llama *simetría fundamental* y satisface  $J^2 = I_{\mathfrak{K}}$ .

Además, si  $[\cdot, \cdot]_J : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathbb{K}$  es un producto interno dado por  $[x, y]_J := [x, Jy]$ , entonces  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$  es un espacio pre-hilbert donde  $[\cdot, \cdot]_J$  se llama *J-producto interno*. De hecho, la topología de la suma directa ortogonal esta determinada por la norma asociada al J-producto interno, la cual se denota por  $\|\cdot\|_J$  y se denomina *J-norma*. Por tanto,  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$  es un espacio de Hilbert.

**Observación 2.2.** *[4, sec. 1.7] En Azizov se demuestra que las diferentes J-normas sobre  $\mathfrak{K}$  son equivalentes independientemente de la descomposición fundamental en espacios de Hilbert. Por otro lado, cabe destacar que todo espacio de Hilbert es un espacio de Krein con  $\mathfrak{K}^- = \{0\}$  y la identidad como simetría fundamental. Luego, lo único que podría cambiar en los espacios de Krein comparados con los espacios de Hilbert es la posibilidad de que su producto interno sea indefinido pues según la observación 2.1, la propiedad de ser no degenerado se mantiene.*

Siempre que no se indique lo contrario; el espacio  $\mathfrak{K}$  sobre el campo  $\mathbb{K}$ , denotará el espacio de Krein  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$  con descomposición fundamental  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$  y la simetría fundamental asociada  $J : (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]) \rightarrow (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$ .

Para ver un ejemplo de un espacio de Krein, considérese en primer lugar una medida signada  $\nu$  en el espacio medible  $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ , de tal manera que por el teorema 1.1 existen conjuntos medibles  $\mathcal{M}_+$  positivo y  $\mathcal{M}_-$  negativo con respecto a  $\nu$  tal que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_-$  y  $\mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}_- = \emptyset$ . Además, por el teorema 1.2  $\nu$  es la diferencia de  $\nu_+$  y  $\nu_-$  medidas mutuamente singulares donde se considera la variación total  $|\nu| := \nu_+ + \nu_-$ .

**Ejemplo 2.1.** *El espacio de funciones  $f \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M}, |\nu|)$  con el producto interno indefinido  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{K}} : \mathcal{L}_2(\mathcal{M}, |\nu|) \times \mathcal{L}_2(\mathcal{M}, |\nu|) \rightarrow \mathbb{K}$  dado por*

$$[h, f]_{\mathfrak{K}} := \int_{\mathcal{M}} \bar{h} f d\nu,$$

*da lugar a un espacio de Krein denotado como  $\mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$ , con la siguiente descomposición fundamental*

$$\mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu) = \mathcal{L}_2(\mathcal{M}_+, \nu_+) [\dot{+}] \mathcal{L}_2(\mathcal{M}_-, \nu_-). \quad (2.1)$$

En efecto, sean  $h, f \in \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$ . Si  $x \in \mathcal{M}_+$ ,  $(\chi_{\mathcal{M}_+}f)(x) = f(x)$  y  $(\chi_{\mathcal{M}_-}f)(x) = 0$ . Por otra parte si  $x \in \mathcal{M}_-$ ,  $(\chi_{\mathcal{M}_+}f)(x) = 0$  y  $(\chi_{\mathcal{M}_-}f)(x) = f(x)$ , o sea, en cualquier caso  $f = \chi_{\mathcal{M}_+}f + \chi_{\mathcal{M}_-}f$  y efectivamente,  $[\chi_{\mathcal{M}_+}f, \chi_{\mathcal{M}_-}f]_{\mathfrak{K}} = 0$ .

Además, si  $h, f \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M}_+, \nu_+)$ ,

$$[h, f]_{\mathfrak{K}} = \int_{\mathcal{M}_+} \bar{h}f d\nu = \int_{\mathcal{M}_+} \bar{h}f d\nu_+ - \int_{\mathcal{M}_+} \bar{h}f d\nu_- = \int_{\mathcal{M}_+} \bar{h}f d\nu_+ = \langle h, f \rangle_{L_2(\mathcal{M}_+)},$$

igualmente si  $h, g \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M}_-, \nu_-)$ ,

$$-[h, g]_{\mathfrak{K}} = \int_{\mathcal{M}_-} \bar{h}g d\nu_- - \int_{\mathcal{M}_-} \bar{h}g d\nu_+ = \int_{\mathcal{M}_-} \bar{h}g d\nu_- = \langle h, g \rangle_{L_2(\mathcal{M}_-)}.$$

Siendo así,  $\mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$  admite la descomposición fundamental dada en la ecuación (2.1) de tal manera que  $(\mathcal{L}_2(\mathcal{M}_+), [\cdot, \cdot])$  y  $(\mathcal{L}_2(\mathcal{M}_-), -[\cdot, \cdot])$  son espacios de Hilbert y como se mencionó en la observación 2.1,  $\mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$  resulta ser un espacio con producto interno no degenerado. De hecho como los proyectores fundamentales son  $P^\pm(f) = f^\pm = \chi_{\mathcal{M}_\pm}f$ , entonces la simetría fundamental se puede expresar en términos de la derivada de Radon-Nikodym  $j_\nu := \chi_{\mathcal{M}_+} - \chi_{\mathcal{M}_-}$  de  $\nu$  con respecto  $|\nu|$  como se mostró en la observación 1.3, pues  $J_\nu(f) := f^+ - f^-$  y  $j_\nu f = (\chi_{\mathcal{M}_+} - \chi_{\mathcal{M}_-})f$ , por ende  $J_\nu(f) = j_\nu f$  y así

$$[h, f]_{J_\nu} = \int_{\mathcal{M}} \bar{h}J_\nu(f)d\nu = \int_{\mathcal{M}} \bar{h}J_\nu(f)j_\nu d|\nu| = \int_{\mathcal{M}} \bar{h}J_\nu^2(f)d|\nu| = \int_{\mathcal{M}} \bar{h}f d|\nu| = \langle h, f \rangle_{L_2(\mathcal{M})}. \quad (2.2)$$

Por tanto, la topología sobre  $(\mathfrak{K}_2(\mathcal{M}), [\cdot, \cdot]_{J_\nu})$  coincide con la de  $(\mathcal{L}_2(\mathcal{M}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , esto es,  $\mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$  es un espacio de Krein.

Espacios de Krein como el anterior son los de mayor interés, pues son espacios topológicos que se pueden descomponer en dos subespacios de Hilbert ortogonales donde se tiene tanto el J-producto interno como el adicional producto interno indefinido. Además, dichos subespacios de Hilbert resultan definidos positivo y negativo respectivamente con respecto a tal producto indefinido. Ahora bien, para el estudio de operadores lineales actuando entre espacios de Krein es necesario tener presente algunas definiciones y hechos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert, además una implicación de lo afirmado en la observación 2.2 es que la continuidad de un operador no depende de la descomposición fundamental.

**Definición 2.9.** Sean  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{K}})$  y  $(\mathfrak{G}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{G}})$  espacios de Krein con simetrías fundamentales  $J_{\mathfrak{K}}$  y  $J_{\mathfrak{G}}$  respectivamente. Se define el conjunto de operadores lineales acotados como

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}) := \left\{ T : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{G}, \text{ lineal y } \|T\| = \sup_{k \in \mathfrak{K} \setminus \{0\}} \frac{\|Tk\|_{J_{\mathfrak{G}}}}{\|k\|_{J_{\mathfrak{K}}}} < \infty \right\}.$$

Ya que la continuidad no depende de la descomposición fundamental para los espacios de Krein, entonces  $\mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \mathfrak{G}^+ \oplus \mathfrak{G}^-)$ . Con ello, es fácil ver que la simetría fundamental  $J_{\mathfrak{K}}$  es un operador lineal acotado y  $\|J_{\mathfrak{K}}\| = 1$ .

**Definición 2.10.** Sea  $T$  un operador lineal con dominio denso en el espacio de Krein  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{K}})$  y definido hacia el espacio de Krein  $(\mathfrak{G}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{G}})$ . El operador adjunto  $T^*$  se define para  $g \in \mathfrak{G}$  tal que existe un  $g^*$  que satisface  $[g, Tk]_{\mathfrak{G}} = [g^*, k]_{\mathfrak{K}} \quad \forall k \in \text{dom}(T)$  y en este caso  $T^*g := g^*$ .

**Observación 2.3.** [5, sec. 6.2] El operador  $T^*$  puede ser expresado a través del adjunto en espacios de Hilbert  $T^{[*]}$ , el cual se denomina **J-adjunto** y satisface  $[g, Tk]_{J_{\mathfrak{G}}} = [T^{[*]}g, k]_{J_{\mathfrak{K}}}$ ,  $\forall k \in \text{dom}(T)$ ,  $g \in \text{dom}(T^{[*]})$ . La relación entre dichos adjuntos esta dada por

$$T^* = J_{\mathfrak{K}}T^{[*]}J_{\mathfrak{G}}. \quad (2.3)$$

Ya que  $T^{[*]}$  es único y las simetrías fundamentales son invertibles,  $T^*$  es único; además si  $T$  es acotado,  $T^*$  también lo es pues sería composición de operadores acotados. En realidad, si  $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$  entonces muchas propiedades de  $T^{[*]}$  son preservadas por  $T^*$  pues como lo expresa la ecuación (2.3) serían unitariamente equivalentes. Siendo así, dichas propiedades se pueden obtener ya sea imitando los argumentos en espacios de Hilbert o aplicando los resultados de espacios de Hilbert en si mismo y combinar con dicha ecuación.

Como se verá en el siguiente ejemplo, es importante tener en cuenta que el adjunto de un operador lineal densamente definido es siempre tomado con respecto al producto interno específico.

**Ejemplo 2.2.** Para resultados posteriores se pretende distinguir entre el operador identidad que va del espacio de Hilbert  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$  al espacio de Krein  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$  y el operador identidad que simplemente actúa entre el mismo espacio de Krein. Dichos operadores se denotan respectivamente por  $I_J : (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J) \rightarrow (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$  y  $I_{\mathfrak{K}} : (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]) \rightarrow (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$ . Su distinción se justifica ya que por ejemplo si el operador  $J$  esta determinado por la simetría fundamental  $J$  pero entre el espacio de Krein  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$  y el espacio de Hilbert  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ , es decir,  $\tilde{J} : (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]) \rightarrow (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ ,  $\tilde{J}k := Jk$ , entonces resulta que  $I_J^* = \tilde{J}$  pues

$$[g, \tilde{J}k]_J = [g, J^2k] = [g, k] = [I_J g, k].$$

**Definición 2.11.** Un operador  $T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K})$  se dice **auto-adjunto** en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  si  $T = T^*$  y **J-autoadjunto** si  $T = T^{[*]}$ . Además si  $[Tk, k] \geq 0$  para cada  $k \in \mathfrak{K}$ ,  $T$  se dice **positivo**. Por otro lado, si  $[Tk, k] \geq \alpha \|k\|_J^2$  para todo  $k \in \mathfrak{K}$  y algún  $\alpha > 0$ ,  $T$  se dice **uniformemente positivo**.

La simetría fundamental  $J$  es tanto un operador auto-adjunto como un operador J-autoadjunto, también es un operador positivo e invertible tal que  $J^{-1} = J^* = J$  y de igual manera es isométrico de acuerdo a la siguiente definición.

**Definición 2.12.** Un operador lineal  $T : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{G}$  entre los espacios de Krein  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{K}})$  y  $(\mathfrak{G}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{G}})$  se dice **unitario** si se tiene que  $TT^* = I_{\mathfrak{G}}$  y  $T^*T = I_{\mathfrak{K}}$ . Por otra parte, si  $[Tk, Th]_{\mathfrak{G}} = [k, h]_{\mathfrak{K}}$  para cada  $k, h \in \mathfrak{K}$ , el operador lineal  $T$  se llama **isométrico**.

## 2.2. Marcos Discretos

**Definición 2.13.** [3] Una sucesión contable  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{K}$  es un **marco discreto** para el espacio de Krein  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$  si existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  de tal manera que

$$A\|k\|_J^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |[k, k_n]|^2 \leq B\|k\|_J^2 \quad \text{para todo } k \in \mathfrak{K}.$$

Como el caso de los espacios de Hilbert, las constantes  $A$  y  $B$  son las cotas del marco. El valor más grande de  $A$  y el más pequeño de  $B$  son llamadas cota óptima inferior y superior respectivamente. Un marco discreto es ajustado si  $A = B$  y si al remover un elemento arbitrario deja de ser marco, se denomina marco discreto exacto.

**Lema 2.1.** Sean  $\mathfrak{K}, \mathfrak{G}$  espacios de Krein con simetrías fundamentales  $J_{\mathfrak{K}}$  y  $J_{\mathfrak{G}}$ . Si  $U : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{G}$  es un operador unitario tal que  $U^* J_{\mathfrak{G}} U = J_{\mathfrak{K}}$ , entonces para cualquier marco discreto  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathfrak{K}$  se tiene que  $\{Uk_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco discreto en  $\mathfrak{G}$  con las mismas cotas del marco.

*Demostración.* Sea  $U : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{G}$  un operador unitario tal que  $U^* J_{\mathfrak{G}} U = J_{\mathfrak{K}}$ , entonces para cada  $k \in \mathfrak{K}$ ,

$$\|Uk\|_{J_{\mathfrak{G}}}^2 = [k, (U^* J_{\mathfrak{G}} U)k]_{\mathfrak{K}} = [k, J_{\mathfrak{K}}k]_{\mathfrak{K}} = \|k\|_{J_{\mathfrak{K}}}^2.$$

Ahora, si  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco discreto en  $\mathfrak{K}$  con cotas  $A$  y  $B$ , se tiene que para todo  $g \in \mathfrak{G}$ ,

$$\begin{aligned} A\|g\|_{J_{\mathfrak{G}}}^2 &= A\|(UU^*)g\|_{J_{\mathfrak{G}}}^2 = A\|U^*g\|_{J_{\mathfrak{K}}}^2 \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |[U^*g, k_n]_{\mathfrak{K}}|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |[g, Uk_n]_{\mathfrak{G}}|^2 \\ &\leq B\|U^*g\|_{J_{\mathfrak{K}}}^2 = B\|g\|_{J_{\mathfrak{G}}}^2. \end{aligned}$$

□

Pues bien, si se reemplaza  $U = J$  se cumple que  $U^*JU = J$  ya que la simetría fundamental  $J : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$  es un operador unitario. Así, en virtud del lema anterior los marcos discretos para un espacio de Krein son básicamente los mismos como marcos para el espacio de Hilbert asociado, tal como le expresa el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.** [3, cap. 3] Sea  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco discreto para el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  con cotas del marco  $A \leq B$ .
- ii)  $\{Jk_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco discreto para el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  con cotas del marco  $A \leq B$ .
- iii)  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco discreto para el espacio de Hilbert  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$  con cotas del marco  $A \leq B$ .
- iv)  $\{Jk_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco discreto para el espacio de Hilbert  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$  con cotas del marco  $A \leq B$ .

Recuérdese que dado un marco  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , el operador pre-marco  $T_0 : \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$  está dado por la definición 1.9. En el caso especial cuando  $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$  y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  coincide con la base estándar de  $\ell_2(\mathbb{N})$ , el operador marco es simplemente la identidad. Esto último se conserva si se describe la teoría completamente en espacios de Krein con producto interno indefinido, donde se utiliza el mismo espacio de sucesiones en  $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$  con cierto producto interno como se verá en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.3.** Sean  $\mathfrak{R}_2(\mathbb{N}) = \ell_2(\mathbb{N})$  y su base estándar  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $e_n = (\delta_{n,m})$ , es decir,  $e_n$  es la secuencia cuyo  $n$ -ésimo término es 1 y todos los otros términos son cero. Si se define la forma sesquilineal  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{R}_2} : \mathfrak{R}_2(\mathbb{N}) \times \mathfrak{R}_2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{K}$  en dicha base por  $[e_n, e_m]_{\mathfrak{R}_2} := (-1)^n \delta_{n,m}$  y se extiende a todo  $\ell_2(\mathbb{N})$  de tal manera que

$$[\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}]_{\mathfrak{R}_2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \overline{\alpha_n} \beta_n,$$

se obtiene que  $(\mathfrak{R}_2(\mathbb{N}), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{R}_2})$  es un espacio con producto interno indefinido y descomposición fundamental

$$\mathfrak{R}_2(\mathbb{N}) = \overline{\text{gen}\{e_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}} \oplus \overline{\text{gen}\{e_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}}.$$

En tal caso como  $[e_n, e_m]_{J_{\mathfrak{R}}} = [e_n, (-1)^m e_m] = (-1)^n (-1)^m \delta_{n,m} = \delta_{n,m}$ , se concluye que  $(\mathfrak{R}_2(\mathbb{N}), [\cdot, \cdot]_{J_{\mathfrak{R}}}) = (\ell_2(\mathbb{N}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  donde  $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}$  y efectivamente los subespacios  $(\overline{\text{gen}\{e_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}}, [\cdot, \cdot]_{J_{\mathfrak{R}}})$ ,  $(\overline{\text{gen}\{e_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}}, -[\cdot, \cdot]_{J_{\mathfrak{R}}})$  son completos. Por tal razón,  $(\mathfrak{R}_2(\mathbb{N}), [\cdot, \cdot]_{J_{\mathfrak{R}}})$  es un espacio de Krein con simetría fundamental dada por  $J_{\mathfrak{R}}(\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{(-1)^n \alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Además, la base  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell_2(\mathbb{N})$  ortonormal es un marco ajustado con cotas  $A = B = 1$  y en consecuencia el operador pre-marco  $T_0 : (\ell_2(\mathbb{N}), \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathfrak{R}_2(\mathbb{N}), [\cdot, \cdot]_{J_{\mathfrak{R}}})$  entre espacios de Hilbert coincide con la operador identidad pues  $T_0(\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n = \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , asimismo el operador marco  $S := T_0^* T_0 = I$ , o sea que para bases ortonormales los operadores marco y pre-marco tienen la forma más simple posible como se había mencionado. Sin embargo, se sabe por el ejemplo 2.2 que si el operador  $T_0$  es considerado hacia el espacio de Krein  $(\mathfrak{R}_2(\mathbb{N}), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{R}_2})$ , entonces  $T_0$  deja de ser el operador identidad en sentido estricto y en este caso el operador marco cambia a  $S(\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = T_0^*(\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{(-1)^n \alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Observación 2.4.** Es de notar que si se eligiera una forma sesquilineal arbitraria para  $\ell_2(\mathbb{N})$  dada por  $[e_n, e_m]_{\mathfrak{R}_2} := \gamma^n \delta_{n,m}$  con  $\gamma^{2n} = 1$ , en general la teoría de marcos en espacios de Krein se cumple sin mayor problema. No obstante, como se busca dar una descripción completamente en espacios de Krein con producto interno indefinido, no se utiliza por ejemplo el caso trivial  $(\ell_2(\mathbb{N}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  que resulta de  $\gamma = 1$ .

**Proposición 2.2.** Sea  $\mathfrak{R}_2(\mathbb{N})$  el espacio de Krein con simetría fundamental  $J_{\mathfrak{R}}$  donde  $(\mathfrak{R}_2(\mathbb{N}), [\cdot, \cdot]_{J_{\mathfrak{R}}}) = (\ell_2(\mathbb{N}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Si  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco discreto para el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ , entonces el operador lineal

$$T : (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]) \rightarrow (\mathfrak{R}_2(\mathbb{N}), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{R}_2}), \quad T(k) := \{[k_n, k]\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad k \in \mathfrak{K},$$

está bien definido y es continuo.

*Demostración.* Note que el operador  $T$  se puede factorizar haciendo uso de los operadores  $I_{J_{\mathfrak{R}}}$  y  $\tilde{J}$  del ejemplo 2.2, como se ilustra el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]) & \xrightarrow{T} & (\mathfrak{K}_2(\mathbb{N}), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{K}_2}) \\ \tilde{J} \downarrow & & \uparrow I_{J_{\mathfrak{R}}} \\ (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J) & \xrightarrow{T_0^*} & (\ell_2(\mathbb{N}), \langle \cdot, \cdot \rangle) \end{array}$$

Todos los operadores son acotados pues  $I_{J_{\mathfrak{R}}}$ ,  $\tilde{J}$  lo son y  $T_0^*$  es el adjunto del operador pre-marco dado por la teoría de marcos en espacios de Hilbert. Además, como  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco discreto se tiene que el operador  $T_0^*$  está bien definido y por tanto con el operador  $T$  se tiene la misma conclusión.  $\square$

**Observación 2.5.** *Ahora bien, para estar en afinidad con la teoría de marcos en espacios de Hilbert, el operador **pre-marco** asociado al marco discreto  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  del espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  sería en este caso el adjunto*

$$T^* : (\mathfrak{K}_2(\mathbb{N}), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{K}_2}) \rightarrow (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$$

del operador  $T = I_{J_{\mathfrak{R}}} T_0^* \tilde{J}$  según el diagrama de la demostración anterior. Así que teniendo en cuenta el ejemplo 2.2, se obtiene que el operador pre-marco está dado por  $T^* = I_J T_0 \tilde{J}_{\mathfrak{R}}$ . Además, como  $J_{\mathfrak{R}}^2 = I_{\mathfrak{R}}$  y para todo  $k \in \mathfrak{K}$ ,

$$(T_0 T_0^*) \tilde{J} k = T_0 \{[k_n, Jk]_J\} = \sum_{n \in \mathbb{N}} [k_n, k] k_n,$$

se define el **operador marco**  $S : (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]) \rightarrow (\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$  dado por  $S := T^* J_{\mathfrak{R}} T$  tal que para todo  $k \in \mathfrak{K}$ ,

$$Sk = \sum_{n \in \mathbb{N}} [k_n, k] k_n. \quad (2.4)$$

Luego, de manera similar se obtiene como en el capítulo 1 que el operador marco en espacios de Krein es auto-adjunto e invertible [3, cap. 3], lo cual permite llegar al Teorema de Descomposición de Marcos en espacios de Krein.

**Teorema 2.1.** [3, cap. 3] (**Teorema de Descomposición de Marcos**)

Sea  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco discreto para el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  y  $S$  el operador marco asociado, entonces para todo  $k \in \mathfrak{K}$ ,

$$\begin{aligned} k &= \sum_{n \in \mathbb{N}} [k_n, k] S^{-1} k_n, \\ k &= \sum_{n \in \mathbb{N}} [S^{-1} k_n, k] k_n, \end{aligned}$$

y ambas series convergen incondicionalmente.

Recuérdese que en el espacio de Hilbert  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ , si se toma un marco dual para el marco  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , digamos por ejemplo  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , entonces se tiene que tal marco satisface en  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$  la siguiente ecuación,

$$k = \sum_{n \in \mathbb{N}} [h_n, k]_J k_n,$$

Ahora se establece una definición análoga para los espacios Krein y luego se describe marcos duales en términos de la simetría fundamental  $J$  y el operador marco  $S$ . Estos marcos duales se llaman marcos duales canónicos.

**Definición 2.14.** Sea  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco discreto para el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ . Un marco  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  discreto para  $\mathfrak{K}$  es llamado un **marco dual** de  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si

$$k = \sum_{n \in \mathbb{N}} [h_n, k] k_n,$$

**Proposición 2.3.** [3, cap. 3] Sea  $S$  el operador marco del marco discreto  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ . En ese caso,

- i)  $\{S^{-1}k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco dual de  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$ .
- ii)  $\{JS^{-1}k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco dual de  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ .
- iii)  $\{JS^{-1}k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco dual de  $\{Jk_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$ .
- iv)  $\{S^{-1}k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco dual de  $\{Jk_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ .

Si  $0 < A \leq B$  son las cotas del marco  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , se tiene que  $0 < B^{-1} \leq A^{-1}$  son las cotas de los marcos duales.

## 2.3. Espacios de Hilbert con $W$ -métrica

Este capítulo se termina con una revisión de los espacios de Krein dados por un operador de Gram  $W$  donde se busca mostrar como transferir un marco para un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  a un espacio de Krein  $\mathcal{H}_W$ . En [3] se detallan los casos  $W$  acotado y  $W$  no acotado por separado, donde por ejemplo si  $0 \notin \text{spec}(W)$  es posible identificar  $\mathcal{H}_W$  con un subespacio de  $\mathcal{H}$  cuando  $W$  es no acotado o incluso con el mismo espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  cuando  $W$  es acotado. Aunque los ejemplos de mayor interés son cuando  $0 \in \text{spec}(W)$ , en los cuales ocurre un proceso de completación tanto para  $W$  acotado como no acotado. A menos que se diga lo contrario,  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  representa un espacio separable de Hilbert y  $W$  denota un operador cerrado auto-adjunto con dominio  $\text{dom}(W) \subseteq \mathcal{H}$  y descomposición polar  $W = J|W|$ .

Antes que nada se recuerda que el adjunto de un operador  $T$  densamente definido en  $\mathcal{H}$ , es cerrado y su gráfico esta dado por  $\Gamma(T^*) = [V(\Gamma(T))]^\perp$  donde  $V$  es un operador unitario que envía  $(f, g)$  a  $(g, -f)$ . Asimismo, el operador  $T^*$  es densamente definido si y sólo si  $T$  es cerrable y en tal caso se tiene que  $\overline{T} = T^{**}$  donde  $\Gamma(\overline{T}) := \overline{\Gamma(T)}$ . Además, el operador  $T$  es auto-adjunto si  $\text{dom}(T) = \text{dom}(T^*)$  y  $\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle$ ,  $\forall f, g \in \text{dom}(T)$ , esto es, si es simétrico y su dominio coincide con el de su adjunto. Los operadores simétricos pueden ser cerrados o no, sin embargo siempre son cerrables y en realidad la cerradura de un simétrico es simétrico pero no necesariamente auto-adjunto.

Por otro lado, si  $T$  es un operador cerrado, entonces  $T^*T$  es auto-adjunto positivo y por ende existe un único operador positivo  $|T| := \sqrt{T^*T} \geq 0$  tal que  $|T|^2 = T^*T$ . De hecho, si se

considera  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  tal que  $U(|T|\psi) := T\psi$ ,  $\psi \in \text{dom}(|T|)$  y  $U|_{[\text{Ran}(|T|)]^\perp} \equiv 0$ , se concluye que  $U$  está bien definido ya que  $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^*T)$ . Además,  $U$  es una isometría parcial y se tiene la descomposición polar  $T = U|T|$ .

**Observación 2.6.** [3, cap. 4] Si  $\text{Ker}(W) = \{0\}$ , entonces la isometría parcial  $J$  dado por la descomposición polar resulta ser unitario y auto-adjunto. Por otra parte, si  $E$  denota la medida con valores en proyecciones sobre la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$  tal que  $W = \int \lambda dE(\lambda)$ , entonces  $\text{dom}(W)$  se convierte en un espacio descomponible con producto interno no degenerado  $[f, g] := \langle f, Wg \rangle$ ,  $f, g \in \text{dom}(W)$ , tal que  $\text{dom}(W) = \mathcal{D}_+[+] \mathcal{D}_-$  y la simetría fundamental coincide con  $J$  de tal modo que

$$\mathcal{D}_+ := E((0, \infty)) \text{dom}(W), \quad \mathcal{D}_- := E((-\infty, 0)) \text{dom}(W), \quad J = E((0, \infty)) - E((-\infty, 0)).$$

Aquí, el producto interno no degenerado se denomina  $W$ -**métrica** y el operador lineal  $W$  **Operador de Gram** donde la ecuación  $W = \int \lambda dE(\lambda)$  se interpreta por  $[g, Wh] = \int \lambda dE_{g,h}$  con  $E_{g,h}(\cdot) := [g, E(\cdot)h]$  definida en la respectiva  $\sigma$ -álgebra. Como consecuencia,

$$[f, g]_J := \langle f, JWg \rangle = \langle f, |W|g \rangle, \quad f, g \in \text{dom}(W).$$

Tomando el cierre bajo la  $J$ -norma y extendiendo el operador  $J$  por continuidad al cierre, se obtiene un espacio de Krein  $(\mathcal{H}_W, [\cdot, \cdot])$  con simetría fundamental  $J$  y descomposición fundamental  $\mathcal{H}_W = \mathcal{H}_+[+] \mathcal{H}_-$  tal que  $\mathcal{D}_+$  y  $\mathcal{D}_-$  son densos en  $\mathcal{H}_+$  y  $\mathcal{H}_-$  respectivamente.

Para la transferencia de marcos del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  al espacio de Krein  $\mathcal{H}_W$ , el siguiente teorema trata la situación general donde el operador  $W$  puede ser no acotado y  $0 \in \text{spec}(W)$ .

**Teorema 2.2.** [3, cap. 4] Sea  $W : \text{dom}(W) \rightarrow \mathcal{H}$  un operador auto-adjunto en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que  $\text{Ker}(W) = \{0\}$ , entonces:

i)  $\text{dom}(\sqrt{|W|})$  es completo en la norma  $\|\cdot\|_J$  si y sólo si  $0 \notin \text{spec}(W)$ .

ii)  $\sqrt{|W|} : \text{dom}(\sqrt{|W|}) \rightarrow \mathcal{H}$  puede ser extendido al operador unitario

$$U := \overline{\sqrt{|W|}} : \mathcal{H}_W \rightarrow \mathcal{H}.$$

iii)  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$  es un marco para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  con cotas del marco  $A \leq B$  si y sólo si  $\{U^{-1}k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_W$  es un marco para el espacio de Krein  $\mathcal{H}_W$  con cotas del marco  $A \leq B$ .

iv) Si  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom}(\sqrt{|W|}^{-1})$  es un marco para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , entonces el marco  $\{U^{-1}k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para el espacio de Krein  $\mathcal{H}_W$  esta dado por  $\{\sqrt{|W|}^{-1}k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .



## CAPÍTULO 3

### MARCOS GENERALIZADOS EN ESPACIOS DE KREIN

En este capítulo se abordan algunas generalizaciones de los resultados anteriores en base a lo trabajado en [8] y [9], donde se deja en evidencia que todo marco discreto es un marco continuo y por ende gran parte de las propiedades dadas en los marcos discretos se satisfacen en los marcos generalizados. Cuando no haya posibilidad de confusión se debe asumir  $\nu$  como una medida signada  $\sigma$ -finita en  $\mathcal{M}$ .

#### 3.1. Integral Débil

**Definición 3.1.** Sean  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{K}}), (\mathfrak{G}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{G}})$  espacios de Krein y  $\mathcal{M}$  un espacio medible; una función  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$  es **débilmente medible** en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$  si la función que envía  $x \in \mathcal{M}$  a  $[h, F(x)k]_{\mathfrak{G}}$  es medible para cualesquiera  $h \in \mathfrak{G}$  y  $k \in \mathfrak{K}$ .

**Observación 3.1.** Para el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  se sabe por el Teorema de Riesz que  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{K}}) \cong \mathfrak{K}'$  donde  $\mathfrak{K}' := \mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathbb{C})$ . Pues bien, para alguna función  $V : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{K}$  es posible considerar  $W := \varphi \circ V : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathbb{C})$  donde para  $k \in \mathfrak{K}$ , el funcional  $\varphi(k) := \varphi_k$  actúa como  $\varphi_k(\cdot) = [k, \cdot]$ . Así, para cada  $k \in \mathfrak{K}$ ,

$$\langle h, W(x)k \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{h}[V(x), k]_{\mathfrak{K}}, \quad \forall h \in \mathbb{C},$$

en tal caso como se cumple para cada  $h \in \mathbb{C}$ , se deduce que si  $W : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{K}'$  es débilmente medible en  $\mathfrak{K}'$  entonces la función que envía  $x \in \mathcal{M}$  a  $[V(x), k]_{\mathfrak{K}}$  es medible para cada  $k \in \mathfrak{K}$ . Por tanto, si lo último ocurre se dice que  $V : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{K}$  es **débilmente medible** en  $\mathfrak{K}$ .

**Definición 3.2.** Sean  $\mathfrak{K}, \mathfrak{G}$  y  $\mathcal{M}$  como en la última definición. Si  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$  es débilmente medible y el operador  $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$  es acotado, entonces la **integral débil** de  $F$  en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$  es  $A$  si para cualesquiera  $h \in \mathfrak{G}$  y  $k \in \mathfrak{K}$ ,

$$\int_{\mathcal{M}} [h, F(x)k]_{\mathfrak{G}} d\nu(x) = [h, Ak]_{\mathfrak{G}}, \quad (3.1)$$

y se denota

$$\int_{\mathcal{M}} F(x) d\nu(x) = A.$$

**Observación 3.2.** Si la función  $V : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{K}$  es débilmente medible y  $W := \varphi \circ V$ , entonces como para  $a \in \mathfrak{K}$

$$\int_{\mathcal{M}} \langle h, W(x)k \rangle_{\mathbb{C}} d\nu(x) = \langle h, \varphi_a(k) \rangle_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \int_{\mathcal{M}} [V(x), k]_{\mathfrak{K}} d\nu(x) = [a, k]_{\mathfrak{K}} \quad \forall k \in \mathfrak{K}, h \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

vale definir la integral débil de  $V$  en  $\mathfrak{K}$  con base en la integral débil de  $F$  en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$ , en el sentido que

$$\int_{\mathcal{M}} V(x) d\nu(x) = a \Leftrightarrow \int_{\mathcal{M}} [V(x), k]_{\mathfrak{K}} d\nu(x) = [a, k]_{\mathfrak{K}}.$$

Luego dependiendo si la función toma valores en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$  o solamente en  $\mathfrak{K}$ , así mismo se le da sentido a la integral débil.

**Proposición 3.1.** Para los espacios de Krein  $\mathfrak{K}, \mathfrak{G}$ , la función  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$  débilmente medible y el operador  $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$  tal que  $\int_{\mathcal{M}} F d\nu = A$ , se cumplen las siguientes propiedades:

i)

$$\int_{\mathcal{M}} F(x)k d\nu(x) = Ak \quad \forall k \in \mathfrak{K}.$$

ii) Para  $C \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$  y  $D \in \mathfrak{B}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ ,

$$\int_{\mathcal{M}} F(x)C d\nu(x) = AC \quad y \quad \int_{\mathcal{M}} DF(x) d\nu(x) = DA.$$

iii)

$$\int_{\mathcal{M}} F(x)^* d\nu(x) = A^*.$$

*Demostración.* Sean  $k \in \mathfrak{K}$ ,  $h \in \mathfrak{G}$  y supongamos que  $\int_{\mathcal{M}} F d\nu = A$ .

i) Fijando  $k \in \mathfrak{K}$ , la función  $F_k(x) := F(x)k$  es débilmente medible en  $\mathfrak{G}$  pues  $[F_k(x), h]_{\mathfrak{G}} = \overline{[h, F(x)k]_{\mathfrak{G}}}$  y efectivamente,

$$\int_{\mathcal{M}} [F(x)k, h]_{\mathfrak{G}} d\nu(x) = \int_{\mathcal{M}} \overline{[h, F(x)k]_{\mathfrak{G}}} d\nu(x) = \overline{[h, Ak]_{\mathfrak{G}}} = [Ak, h]_{\mathfrak{G}}, \quad (3.2)$$

demostrando así que la integral débil de  $F_k(x)$  en  $\mathfrak{G}$  es  $Ak$ .

ii) Teniendo en cuenta  $[h, (AC)k]_{\mathfrak{G}} = [h, A(Ck)]_{\mathfrak{G}}$  y la ecuación (3.1) se tiene que

$$\int_{\mathcal{M}} [h, (F(x)C)k]_{\mathfrak{G}} d\nu(x) = [h, (AC)k]_{\mathfrak{G}},$$

y de manera similar a  $D^*h \in \mathfrak{G}$  se obtiene las respectivas integrales débiles en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$ .

iii) Como los operadores  $A$  y  $F(x)$  son acotados, existen sus adjuntos. Supuesto esto, como  $[k, F(x)^*h]_{\mathfrak{K}} = \overline{[h, F(x)k]_{\mathfrak{G}}}$ ,  $F(x)^*$  es débilmente medible en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}, \mathfrak{K})$  y además por la ecuación (3.2) se tiene que  $\int_{\mathcal{M}} F^* d\nu = A^*$  pues

$$\int_{\mathcal{M}} [k, F(x)^*h]_{\mathfrak{K}} d\nu(x) = [k, A^*h]_{\mathfrak{K}}.$$

□

### 3.2. Marcos Continuos

Si se considera el conjunto discreto  $\mathcal{M} = \mathbb{N}$  de los números naturales y la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B} = 2^{\mathbb{N}}$ , cualquier función  $\eta : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{K}$  es débilmente medible en  $\mathfrak{K}$ . En particular, si  $\{\eta_x\}_{x \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ , la función  $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{K}$  definida por  $\eta(x) = \eta_x$  es débilmente medible en  $\mathfrak{K}$  y para  $\mu$  la medida de conteo en  $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$  se tiene que

$$\int_{\mathcal{M}} |[\eta_x, k]|^2 d\mu(x) = \sum_{x \in \mathbb{N}} |[\eta_x, k]|^2.$$

Por lo cual, si  $\{\eta_x\}_{x \in \mathbb{N}}$  es un marco discreto en  $\mathfrak{K}$  con cotas  $b \geq a > 0$  se tiene que

$$a\|k\|_J^2 \leq \int_{\mathcal{M}} |[\eta_x, k]|^2 d\mu(x) \leq b\|k\|_J^2. \quad (3.3)$$

**Observación 3.3.** *La siguiente definición para espacios de Krein es la base principal de este trabajo y la proponemos buscando generalizar las definiciones análogas para espacios de Hilbert de [8, sec. 3.1] y [9, sec. 4.1].*

**Definición 3.3.** *Un Marco Continuo de rango  $n \in \mathbb{N}$  en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  respecto al espacio medible  $\mathcal{M}$  y la medida signada  $\nu$   $\sigma$ -finita, es una familia  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  en  $\mathfrak{K}$  de tal manera que las funciones  $\eta^i : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{K}$  con  $\eta^i(x) = \eta_x^i$  son débilmente medibles. Además existen números reales  $b \geq a > 0$  tal que para todo  $k \in \mathfrak{K}$ ,*

$$a\|k\|_J^2 \leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[\eta_x^i, k]|^2 d|\nu|(x) \leq b\|k\|_J^2. \quad (3.4)$$

*De igual modo las constantes  $a$  y  $b$  son las cotas del marco y la propiedad anterior es la **condición del marco**. Las cotas óptimas del marco son el mayor valor posible de  $a$  y el menor valor posible de  $b$ , además si  $a = b$  el marco continuo se dice ajustado.*

**Observación 3.4.** *Lo anterior está bien definido porque al cambiar la simetría fundamental dicha condición se mantiene, sin embargo es posible que las cotas del marco cambien.*

En efecto, si  $\widehat{J}$  es otra simetría fundamental, existen  $c_2 \geq c_1 > 0$  tal que para cada  $k \in \mathfrak{K}$

$$c_1\|k\|_{\widehat{J}}^2 \leq \|k\|_J^2 \leq c_2\|k\|_{\widehat{J}}^2.$$

Luego,

$$a c_1 \|k\|_J^2 \leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[\eta_x^i, k]|^2 d|\nu|(x) \leq b c_2 \|k\|_J^2,$$

de donde  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo con cotas  $a c_1 > 0$  y  $b c_2 > 0$ .

De acuerdo con la ecuación (3.3), todo marco discreto es un marco continuo de rango 1, es decir, los marcos generalizados extienden el estudio de los marcos ordinarios como en el capítulo anterior. Es por eso que se aborda de manera general diversas propiedades asociadas a los marcos discretos. Pues bien, siempre y cuando no se señale lo contrario, la familia  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  denotará un marco continuo en  $\mathfrak{K}$  con cotas  $b \geq a > 0$ .

**Proposición 3.2.** [9] Si  $\{\eta_x\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo de rango 1 en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ , es posible considerar un marco continuo  $\{\eta'_x\}_{x \in \mathcal{M}'}$  en  $\mathfrak{K}$  con  $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$  tal que las cotas del marco se mantienen y para todo  $x \in \mathcal{M}'$ ,  $\|\eta'_x\|_J = 1$  para alguna simetría fundamental  $J$ .

*Demostración.* Sea  $\{\eta_x\}_{x \in \mathcal{M}}$  marco con respecto a  $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$  y  $\nu$  la medida signada  $\sigma$ -finita. El caso trivial ocurre cuando  $\|\eta_x\|_J = 1$  para alguna simetría fundamental  $J$  y para todo  $x \in \mathcal{M}$ . Pero si se tiene lo contrario, se considera el conjunto  $\mathcal{M}' := \{x \in \mathcal{M} : \eta_x \neq 0\}$  y la  $\sigma$ -álgebra asociada a dicho conjunto  $\mathcal{B}' := \mathcal{B}_{\mathcal{M}'}$ . El conjunto  $\mathcal{M}'$  es medible ya que la función que envía  $x \in \mathcal{M}$  a  $\|\eta_x\|_J^2$  es medible pues

$$\|\eta_x\|_J^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}} |[e_m, \eta_x]_J|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^m |[e_t, \eta_x]_J|^2,$$

donde  $\{e_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal de  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ . Así para cada  $x \in \mathcal{M}'$ , se define  $\eta'_x := \|\eta_x\|_J^{-1} \eta_x$  para alguna simetría fundamental  $J$ , de tal manera que para cada  $k \in \mathfrak{K}$ ,

$$[\eta'_x, k] = \|\eta_x\|_J^{-1} [\eta_x, k] \quad y \quad \|\eta'_x\|_J = 1.$$

Así, como  $\|\eta_x\|_J^2$  es una función medible

$$\int_{\mathcal{M}} |[\eta_x, k]|^2 d|\nu|(x) = \int_{\mathcal{M}'} \|\eta_x\|_J^2 |[\eta'_x, k]|^2 d|\nu|(x),$$

Por lo cual, basta con definir la medida en  $(\mathcal{M}', \mathcal{B}')$  por,

$$\nu'(N) := \int_N \|\eta_x\|_J^2 d|\nu|(x)$$

para obtener

$$\int_{\mathcal{M}'} |[\eta'_x, k]|^2 d\nu'(x) = \int_{\mathcal{M}} |[\eta_x, k]|^2 d|\nu|(x).$$

Ahora bien, es fácil ver que  $\eta'$  es débilmente medible y que  $\nu' = |\nu'|$ . Por tanto, si  $b \geq a > 0$  son las cotas de  $\{\eta_x\}_{x \in \mathcal{M}}$ ,

$$a \|k\|_J^2 \leq \int_{\mathcal{M}'} |[\eta'_x, k]|^2 d\nu'(x) \leq b \|k\|_J^2,$$

de donde se concluye que  $\{\eta'_x\}_{x \in \mathcal{M}'}$  es un marco continuo de rango 1 en  $\mathfrak{K}$  con respecto a  $(\mathcal{M}', \mathcal{B}')$  y  $\nu'$ .  $\square$

Lo anterior se traduce en que un marco  $\{\eta_x\}_{x \in \mathcal{M}}$  puede ser reemplazado por otro marco tal que los vectores son normalizados para alguna simetría fundamental  $J$ , a saber,  $\|\eta'_x\|_J = 1$ .

**Proposición 3.3.** Sean  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$  y  $(\mathfrak{G}, [\cdot, \cdot])$  espacios de Krein tal que  $J_{\mathfrak{K}}$  y  $J_{\mathfrak{G}}$  son sus simetrías fundamentales respectivamente. Si  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo en  $\mathfrak{K}$  con cotas  $b \geq a > 0$ , entonces para todo operador  $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$  tal que  $A^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{G}, \mathfrak{K})$  se tiene que la familia  $\{A\eta_x^1, A\eta_x^2, \dots, A\eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo en  $\mathfrak{G}$  con cotas  $b\|A\|^2$  y  $a\|A^{-1}\|^{-2}$ .

*Demostración.* Sean  $g \in \mathfrak{G}$  y  $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$ . Como  $[A\eta_x^i, g] = [\eta_x^i, A^*g]$ , es evidente que las funciones  $A\eta_x^i : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{K}$  con  $(A\eta^i)(x) = A\eta_x^i$  son débilmente medibles. Además, si se considera  $d = \|A\|^2$  y  $c = \|A^{-1}\|^{-2}$  con respecto a las respectivas simetrías fundamentales, se tiene que

$$c\|g\|_{J_{\mathfrak{G}}}^2 = \frac{\|(A^{-1})^*(A^*g)\|_{J_{\mathfrak{G}}}^2}{\|A^{-1}\|^2} \leq \|A^*g\|_J^2 \leq d\|g\|_{J_{\mathfrak{G}}}^2,$$

de donde se obtiene,

$$ac\|g\|_{J_{\mathfrak{G}}}^2 \leq a\|A^*g\|_J^2 \leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[A\eta_x^i, g]|^2 d|\nu|(x) \leq b\|A^*g\|_J^2 \leq bd\|g\|_{J_{\mathfrak{G}}}^2.$$

Con lo cual,  $\{A\eta_x^1, A\eta_x^2, \dots, A\eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo en  $\mathfrak{G}$  con cotas  $b\|A\|^2$  y  $a\|A^{-1}\|^{-2}$ .  $\square$

Se observa claramente que si el operador  $A$  es unitario entre los espacios de Hilbert correspondientes, las constantes del marco inicial se mantienen.

**Observación 3.5.** Se sabe que un espacio de Krein puede ser un espacio de Hilbert donde su  $J$ -norma es sencillamente su norma natural, por tal razón la condición del marco  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  en el espacio de Hilbert asociado  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$  es

$$a\|k\|_J^2 \leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[\eta_x^i, k]_J|^2 d|\nu|(x) \leq b\|k\|_J^2.$$

**Teorema 3.1.** Sea  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  una familia en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco para el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ .
- ii)  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco para el espacio de Hilbert  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ .
- iii)  $\{J\eta_x^1, J\eta_x^2, \dots, J\eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco para el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ .
- iv)  $\{J\eta_x^1, J\eta_x^2, \dots, J\eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco para el espacio de Hilbert  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ .

Aquí cada marco continuo de rango  $n$  tiene las mismas cotas del marco  $b \geq a > 0$ .

Las equivalencias anteriores se satisfacen en vista de la proposición 3.3, pues se tiene que  $J$  es continuo con  $J^{-1} = J$  y además como es unitario las constantes del marco no cambian. El teorema 3.1 cuestiona la manera de abordar los marcos continuos en espacios de Krein pues resulta más sencillo trabajar en el espacio de Hilbert; pero como la simetría fundamental no es única, se busca dar una descripción de la teoría completamente en espacios de Krein con producto interno indefinido.

**Proposición 3.4.** Sean  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  un marco continuo de rango  $n \in \mathbb{N}$  en  $\mathcal{H}$  con respecto a un espacio de medida  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mu)$ , entonces existe un operador lineal  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  acotado tal que

$$Ag = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} \langle \eta_x^i, g \rangle \eta_x^i d\mu(x) \quad g \in \mathcal{H}.$$

*Demostración.* Sea  $h : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  la forma sesquilineal dada por

$$h(f, g) := \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} \langle f, \eta_x^i \rangle \langle \eta_x^i, g \rangle d\mu(x), \quad f, g \in \mathcal{H},$$

Ahora, aplicando Cauchy-Schwarz tanto en  $L_2(\mathcal{M}, |\mu|)$  como en  $\mathbb{C}^n$ , se obtiene

$$\begin{aligned} |h(f, g)| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |\langle f, \eta_x^i \rangle \langle \eta_x^i, g \rangle| d|\mu| \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\int_{\mathcal{M}} |\langle f, \eta_x^i \rangle|^2 d|\mu|} \sqrt{\int_{\mathcal{M}} |\langle \eta_x^i, g \rangle|^2 d|\mu|} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |\langle f, \eta_x^i \rangle|^2 d|\mu|} \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |\langle \eta_x^i, g \rangle|^2 d|\mu|} \\ &\leq b \|f\| \|g\|, \end{aligned}$$

o sea, la forma sesquilineal esta bien definida y es acotada. Así, en virtud del teorema de representación de Riesz existe un operador lineal  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  acotado tal que

$$h(f, g) := \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} \langle f, \eta_x^i \rangle \langle \eta_x^i, g \rangle d\mu(x) = \langle f, Ag \rangle,$$

finalmente tomando el complejo conjugado y escribiendo en términos de integral débil en  $\mathcal{H}$  según la observación 3.2, se tiene que

$$Ag = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} \langle \eta_x^i, g \rangle \eta_x^i d\mu(x).$$

□

Debido a la condición del marco y a que  $\mu$  es una medida se obtiene como en el caso discreto la relación

$$a \|g\|^2 \leq \langle Ag, g \rangle \leq b \|g\|^2, \quad \forall g \in \mathcal{H},$$

así  $A$  es uniformemente positivo y por tanto invertible. Siendo así, se puede probar que cada  $g \in \mathcal{H}$  tiene las representaciones,

$$g = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} \langle g, \eta_x^i \rangle A^{-1} \eta_x^i d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} \langle g, A^{-1} \eta_x^i \rangle \eta_x^i d\mu(x).$$

No obstante, cuando se realiza el mismo proceso en el espacio de Hilbert  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ , es evidente que se va a depender directamente de la simetría fundamental  $J$ . Por tanto, es necesario hacer uso de un espacio auxiliar como en el caso discreto.

**Observación 3.6.** Sea  $\bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$  el espacio de vectores  $f = (f_1, \dots, f_n)$  de tal manera que para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $f_i \in \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$  donde este último está dado por el ejemplo 2.1. Si se considera el producto interno dado por

$$[(h_1, \dots, h_n), (f_1, \dots, f_n)]_{\oplus} := \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} \overline{h_i} f_i d\nu,$$

entonces  $\bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$  es un espacio de Krein con descomposición fundamental

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu) = \bigoplus_{i=1}^n L_2(\mathcal{M}_+, \nu_+) [ + ] \bigoplus_{i=1}^n L_2(\mathcal{M}_-, \nu_-).$$

Luego, si sus elementos se consideran como vectores columna entonces se tiene que la simetría fundamental está dada por la matriz de operadores

$$J_{\nu, n} = \begin{pmatrix} J_{\nu} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\nu} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{\nu} \end{pmatrix}$$

y dicho espacio de Krein es el que adopta el rol similar al espacio  $\mathfrak{K}_2(\mathbb{N})$  como se hizo en el caso discreto.

**Proposición 3.5.** Sea  $\widehat{k}_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  la función definida por  $\widehat{k}_i(x) := [\eta_x^i, k]$  y designada como **la transformada de  $k \in \mathfrak{K}$  con respecto a  $\eta^i$**  en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ , donde las funciones  $\eta^i$  están determinadas por el marco  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$ . El operador lineal  $T : \mathfrak{K} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$  definido por

$$Tk := (\widehat{k}_1, \dots, \widehat{k}_n),$$

está bien definido y es acotado.

*Demostración.* En vista de la ecuación (3.4) se tiene que para cada  $i = 1, \dots, n$  y todo  $k \in \mathfrak{K}$ ,

$$\int_{\mathcal{M}} |[\eta_x^i, k]|^2 d|\nu|(x) \leq b \|k\|_J^2 < \infty.$$

Luego, el operador  $T$  está bien definido ya que  $\widehat{k}_i \in \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$ . También es lineal debido a la linealidad del producto interno pues si  $k, h \in \mathfrak{K}$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$  se tiene que para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$(\widehat{k + \alpha h})_i(x) = [\eta_x^i, k + \alpha h] = [\eta_x^i, k] + \alpha[\eta_x^i, h] = \widehat{k}_i(x) + \alpha\widehat{h}_i(x),$$

de donde

$$T(k + \alpha h) = ((\widehat{k + \alpha h})_1, \dots, (\widehat{k + \alpha h})_n) = (\widehat{k}_1 + \alpha\widehat{h}_1, \dots, \widehat{k}_n + \alpha\widehat{h}_n) = Tk + \alpha Th.$$

Además, el operador  $T$  es acotado pues teniendo en cuenta la ecuación (2.2) se infiere

$$\begin{aligned} \|Tk\|_{J, \nu}^2 &= \sum_{i=1}^n [\widehat{k}_i, \widehat{k}_i]_{J, \nu} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [k, \eta_x^i][\eta_x^i, k] d\nu(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[\eta_x^i, k]|^2 d\nu(x) \leq b\|k\|_J^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

□

**Teorema 3.2.** *Sea  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  una familia de vectores en  $\mathfrak{K}$  tal que para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $\eta^i$  es débilmente medible. Si la condición del marco se satisface en un subconjunto denso  $\mathfrak{G}$  de  $\mathfrak{K}$ ,  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo de rango  $n$  en  $\mathfrak{K}$ .*

*Demostración.* Supongamos que para  $k \in \mathfrak{K}$  no se satisface la desigualdad de la derecha en la ecuación (3.4), o sea

$$b\|k\|_J^2 < \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[\eta_x^i, k]|^2 d\nu(x) = \int_{\mathcal{M}} \left( \sum_{i=1}^n |[\eta_x^i, k]|^2 \right) d\nu(x).$$

Por lo cual, si se considera la sucesión  $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  en  $\mathfrak{G}$  tal que  $k_m \rightarrow k$ , entonces se obtiene que

$$b\|k\|_J^2 < \int_{\mathcal{M}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n |[\eta_x^i, k_m]|^2 \right) d\nu(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} \left( \sum_{i=1}^n |[\eta_x^i, k_m]|^2 \right) d\nu(x)$$

donde se utiliza el Lema de Fatou[10] en la última desigualdad. Además, como la ecuación (3.4) se satisface en  $\mathfrak{G}$  y  $\|k_m\|_J \rightarrow \|k\|_J$ , se deduce

$$b\|k\|_J^2 < \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} \left( \sum_{i=1}^n |[\eta_x^i, k_m]|^2 \right) d\nu(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} b\|k_m\|_J^2 = b\|k\|_J^2,$$

obteniendo así una contradicción. Luego, se concluye

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[\eta_x^i, k]|^2 d\nu(x) \leq b\|k\|_J^2,$$

y teniendo en cuenta la ecuación (3.5) se tiene que  $\|Tk\|_{J_{\nu,n}}^2 \leq b\|k\|_J^2$  para todo  $k \in \mathfrak{K}$ , esto significa que el operador  $T$  es acotado. Ahora, por la continuidad de  $T$ ,  $\|Tk_m\|_{J_{\nu,n}}^2 \rightarrow \|Tk\|_{J_{\nu,n}}^2$  y como  $a\|k_m\|_J^2 \leq \|Tk_m\|_{J_{\nu,n}}^2$ , se obtiene  $a\|k\|_J^2 \leq \|Tk\|_{J_{\nu,n}}^2$ . Por tanto, la ecuación (3.4) se cumple para cada  $k \in \mathfrak{K}$  y en consecuencia  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo de rango  $n$  en  $\mathfrak{K}$ .  $\square$

**Definición 3.4.** Sea  $T$  el operador lineal de la proposición 3.5 asociado al marco  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$ . El respectivo adjunto  $T^* : \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu) \rightarrow \mathfrak{K}$  se denomina el **Operador Pre-marco**.

De acuerdo a la proposición 3.5, las proyecciones  $T_i k = \widehat{k}_i$  del operador  $T$  son operadores acotados de  $\mathfrak{K}$  a  $\mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$ , por lo cual existen sus respectivos adjuntos como en el caso del mismo  $T$ .

**Proposición 3.6.** El operador pre-marco  $T^* : \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu) \rightarrow \mathfrak{K}$  está dado por

$$T^*(f_1, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i(x) \eta_x^i d\nu(x), \quad f_i \in \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu),$$

donde la integral débil de  $f_i \cdot \eta^i$  en  $\mathfrak{K}$  es el adjunto  $T_i^* : \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu) \rightarrow \mathfrak{K}$  de la proyección  $T_i$ , es decir,

$$T_i^* f_i = \int_{\mathcal{M}} f_i(x) \eta_x^i d\nu(x).$$

*Demostración.* Sean  $k \in \mathfrak{K}$  y  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$ .

Como  $[f_i(x) \eta_x^i, k] = \overline{f_i(x)} [\eta_x^i, k]$ , entonces las funciones  $f_i \cdot \eta^i$  son débilmente medibles en  $\mathfrak{K}$  y de hecho,

$$\begin{aligned} [T^* f, k] &= [f, Tk]_{\bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}_2} = \sum_{i=1}^n [f_i, T_i k]_{\mathfrak{K}_2} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} \overline{f_i(x)} \widehat{k}_i(x) d\nu(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [f_i(x) \eta_x^i, k] d\nu(x), \end{aligned}$$

donde claramente para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$[T_i^* f_i, k] = \int_{\mathcal{M}} [f_i(x) \eta_x^i, k] d\nu(x).$$

Por tanto,

$$T^*(f_1, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i(x) \eta_x^i d\nu(x).$$

$\square$

**Observación 3.7.** Si se consideran las proyecciones  $T_i k = \widehat{k}_i$  del operador  $T$ , se tiene que para  $k \in \mathfrak{K}$   $Tk = (T_1 k, \dots, T_n k)$  y por lo anterior se infiere que si  $f = (f_1, \dots, f_n)$  con  $f_i \in \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$ , entonces

$$T^* f = T_1^* f_1 + \dots + T_n^* f_n.$$

**Teorema 3.3.** Sea  $T^*$  el operador pre-marco asociado a  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$ . La familia  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo de rango  $n$  en  $\mathfrak{K}$  si y sólo si el operador pre-marco es acotado y sobre.

*Demostración.* Sean  $k \in \mathfrak{K}$  y  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}} \subset \mathfrak{K}$  tal familia de vectores. Si  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo, entonces teniendo en cuenta la proposición 3.5 y la ecuación (2.3) se tiene que tanto el respectivo  $J$ -adjunto  $T^{[*]}$  como el operador pre-marco  $T^*$  son acotados. Además, por la ecuación (3.5)

$$\|Tk\|_{J\nu, n}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[\eta_x^i, k]|^2 d\nu(x) \geq a \|k\|_J^2, \quad (3.6)$$

de donde se infiere que  $T$  es inyectivo, o sea,  $Ran(T^{[*]})$  es denso en  $\mathfrak{K}$  y en realidad como  $Ker(T) = Ker(T^{[*]}T)$ , se concluye igualmente que  $Ran(T^{[*]}T)$  es denso en  $\mathfrak{K}$ . Luego, vale considerar la sucesión  $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{K}$  tal que  $T^{[*]}T(k_m) \rightarrow k \in \mathfrak{K}$  y por la ecuación (3.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \|k_m - k_p\|_J^2 &\leq \frac{1}{a} \|T(k_m - k_p)\|_{J\nu, n}^2 = \frac{1}{a} [T^{[*]}T(k_m - k_p), k_m - k_p]_J \\ &\leq \frac{1}{a} \|T^{[*]}T(k_m - k_p)\|_J \|k_m - k_p\|_J, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|k_m - k_p\|_J \leq \frac{1}{a} \|T^{[*]}T(k_m - k_p)\|_J.$$

Por lo cual, existe  $g \in \mathfrak{K}$  tal que  $k_m \rightarrow g$ , así  $T^{[*]}T(g) = k$  y en consecuencia  $Ran(T^{[*]}T) = \mathfrak{K}$ , obteniendo de esa forma que  $T^{[*]}$  es sobre pues  $Ran(T^{[*]}T) \subseteq Ran(T^{[*]})$  y en virtud de la ecuación (2.3) se tiene que el operador pre-marco  $T^*$  es sobre.

Por otro lado, si el operador pre-marco  $T^*$  es acotado y sobre, entonces se tiene lo mismo para el  $J$ -adjunto  $T^{[*]}$  y por ende  $T^{[*]}T$  resulta acotado e inyectivo. Además, teniendo en cuenta el teorema del rango cerrado [12, sec. 4.5], se deduce que  $Ran(T)$  es cerrado ya que  $Ran(T^{[*]}) = \mathfrak{K}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} Ran(T^{[*]}) &= Ran(T^{[*]}|_{Ker(T^{[*]})^\perp}) = Ran\left(T^{[*]}|_{\overline{Ran(T)}}\right) \\ &= Ran(T^{[*]}T). \end{aligned}$$

Luego,  $T^{[*]}T$  es sobre y por el teorema del inverso acotado [13, sec. 4.12] se tiene que el operador  $(T^{[*]}T)^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K})$ . Pues bien, de acuerdo a lo anterior el operador dado por  $T^\dagger := (T^{[*]}T)^{-1}T^{[*]}$  esta bien definido y es acotado. Además  $T^\dagger Tk = k$  y suponiendo  $\|T\| \leq b$ , se concluye

$$\|T^\dagger\|^{-2} \|k\|^2 \leq \frac{\|T^\dagger\|^2 \|Tk\|_{J_{\nu,n}}^2}{\|T^\dagger\|^2} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[\eta_x^i, k]|^2 d|\nu|(x) \leq b^2 \|k\|^2.$$

Por tanto,  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo de rango  $n$  en  $\mathfrak{K}$  con cotas  $\|T^\dagger\|^{-2}$  y  $b^2$ .  $\square$

Ahora, mediante un ejemplo se argumenta la importancia de la simetría fundamental del espacio auxiliar como ocurrió en el caso discreto para definir el Operador Marco.

**Ejemplo 3.1.** Sean  $(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}_0, \mu_0)$  un espacio con medida finita,  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}_0}$  un marco continuo y  $p_-, p_+$  dos puntos distintos en  $\mathcal{M}_0$ .

Ahora se define el espacio medible que esta dado por el conjunto  $\mathcal{M} := \mathcal{M}_0 \times \{p_-, p_+\}$  y la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{B}_0 \times 2^{\{p_-, p_+\}}$  y denotada  $\mathcal{B} := \mathcal{B}_0 \otimes 2^{\{p_-, p_+\}}$  junto con la medida signada  $\nu := \mu_0 \otimes \nu$  donde  $\nu(\{p_-\}) = -1$  y  $\nu(\{p_+\}) = 1$ .

Pues bien, como las funciones  $\eta^i$  son débilmente medibles, si  $\eta_{(x,p_\pm)}^i := \eta_x^i$  se tiene que la función que envía  $(x, p) \in \mathcal{M}$  a  $|[\eta_{(x,p)}^i, k]|^2$  es medible y no negativa, entonces en vista del Teorema de Tonelli[10],

$$\int_{\mathcal{M}} |[\eta_{(x,p)}^i, k]|^2 d|\nu|((x, p)) = \int_{\mathcal{M}_0} \left( \int_{\{p_\pm\}} |[\eta_{(x,p)}^i, k]|^2 d|\nu|(p) \right) d\mu_0(x),$$

pues es claro que  $|\nu| = \mu_0 \otimes |\nu|$  y efectivamente  $|\nu|(\{p_\pm\}) = 1$ . Luego, teniendo en cuenta las cotas del marco  $b \geq a > 0$  con respecto a  $(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}_0)$  y que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[\eta_{(x,p)}^i, k]|^2 d|\nu|((x, p)) &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}_0} \left( \int_{\{p_\pm\}} |[\eta_{(x,p)}^i, k]|^2 d|\nu|(p) \right) d\mu_0(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}_0} (|[\eta_{(x,p_-)}^i, k]|^2 + |[\eta_{(x,p_+)}^i, k]|^2) d\mu_0(x) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}_0} |[\eta_x^i, k]|^2 d\mu_0(x), \end{aligned}$$

se concluye que  $\{\eta_{(x,p)}^1, \eta_{(x,p)}^2, \dots, \eta_{(x,p)}^n\}_{(x,p) \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo con respecto a  $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ , donde un par de cotas son  $2b \geq 2a > 0$ . Así, por las proposiciones 3.5 y 3.6 se deduce que para cualesquiera  $h, k \in \mathfrak{K}$ ,

$$[T^*Th, k] = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [h, \eta_{(x,p)}^i][\eta_{(x,p)}^i, k] d\nu((x, p)),$$

y por el Teorema de Fubini[10] se tiene que para todo  $k, h \in \mathfrak{K}$ ,

$$\begin{aligned} [T^*Th, k] &= \int_{\mathcal{M}_0} \left( \int_{\{p_{\pm}\}} |[h, \eta_{(x,p)}^i][\eta_{(x,p)}^i, k]| d\nu(p) \right) d\mu_0(x) \\ &= \int_{\mathcal{M}_0} ([h, \eta_{(x,p_+)}^i][\eta_{(x,p_+)}^i, k]\nu(p_+) + [h, \eta_{(x,p_-)}^i][\eta_{(x,p_-)}^i, k]\nu(p_-)) d\mu_0(x) \\ &= \int_{\mathcal{M}_0} ([h, \eta_x^i][\eta_x^i, k] - [h, \eta_x^i][\eta_x^i, k]) d\mu_0(x) = 0, \end{aligned}$$

de donde se infiere que en general el operador  $T^*T \equiv 0$  no necesariamente es invertible.

### 3.3. Descomposición de Marcos

**Definición 3.5.** Sean  $T^*$  el Operador Pre-marco asociado a  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  y  $J_{\nu, n}$  la simetría fundamental del espacio de Krein  $\bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}_2(\mathcal{M}, \nu)$ . El operador lineal  $S : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$  definido por

$$S = T^* J_{\nu, n} T,$$

se llama el **Operador Marco**.

**Proposición 3.7.** El operador marco  $S$  asociado al marco  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es autoadjunto, acotado y para cada  $k$  en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ ,

$$Sk = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [\eta_x^i, k] \eta_x^i d|\nu|(x). \quad (3.7)$$

*Demostración.* Claramente el operador marco  $S$  es autoadjunto pues  $S^* = T^* J_{\nu, n}^* (T^*)^* = S$ , y es acotado al ser composición de operadores acotados. Además, por la proposición 3.6 se concluye

$$Sk = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} j_{\nu}(x) [\eta_x^i, k] \eta_x^i d\nu(x),$$

ya que  $(J_{\nu, n} T)k = (J_{\nu}(\widehat{k}_1), \dots, J_{\nu}(\widehat{k}_n))$  y por ende, para cada  $k, h \in \mathfrak{K}$ ,

$$\begin{aligned} [Sk, h] &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [j_{\nu}(x) [\eta_x^i, k] \eta_x^i, h] d\nu(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} j_{\nu}(x) [k, \eta_x^i] [\eta_x^i, h] d\nu(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [k, \eta_x^i] [\eta_x^i, h] d|\nu|(x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Así, por la definición de la integral débil,

$$Sk = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [\eta_x^i, k] \eta_x^i d|\nu|(x).$$

□

En la proposición 3.3 el operador marco asociado a  $\{A\eta_x^1, A\eta_x^2, \dots, A\eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es  $ASA^*$  ya que,

$$\begin{aligned} [(ASA^*)k, h] &= [S(A^*k), A^*h] = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [A^*k, \eta_x^i][\eta_x^i, A^*h] |d\nu|(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [k, A\eta_x^i][A\eta_x^i, h] |d\nu|(x). \end{aligned}$$

Ahora bien, de manera similar que en el caso discreto el inverso del operador marco juega un papel importante en toda esta teoría y de hecho en este nuevo contexto también satisface las siguientes propiedades importantes.

**Observación 3.8.** *El operador  $JS$  resulta ser autoadjunto en el espacio de Hilbert asociado  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$  pues para cualesquiera  $k, h \in \mathfrak{K}$ ,*

$$[(JS)h, k]_J = [Sh, k] = [h, Sk] = [h, (JS)k]_J.$$

**Lema 3.1.** *El operador marco  $S$  del marco continuo  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  en  $\mathfrak{K}$  con cotas  $b \geq a > 0$  es invertible con inverso acotado y*

$$b^{-1}J \leq S^{-1} \leq a^{-1}J.$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta la ecuación (3.8) y que  $J^2 = Id$ , se tiene que

$$a\|k\|_J^2 \leq [JSk, k]_J \leq b\|k\|_J^2$$

de donde  $JS$  es un operador uniformemente positivo en el espacio de Hilbert  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$  con  $a \leq JS \leq b$ , por tanto  $JS$  tiene inverso acotado y

$$b^{-1} \leq (JS)^{-1} \leq a^{-1}.$$

Además, como  $((JS)^{-1}J)S = I$  y  $S((JS)^{-1}J) = JJS((JS)^{-1}J) = J^2 = I$  se obtiene que  $S^{-1} = (JS)^{-1}J$  es un operador acotado y así, en el espacio de Krein  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$  se tiene que  $aJ \leq S \leq bJ$  y

$$b^{-1}J \leq S^{-1} \leq a^{-1}J.$$

□

**Proposición 3.8.** *La familia  $\{[(JS)^{-\frac{1}{2}}]^* \eta_x^1, [(JS)^{-\frac{1}{2}}]^* \eta_x^2, \dots, [(JS)^{-\frac{1}{2}}]^* \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo ajustado de rango  $n$  en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ .*

*Demostración.* De acuerdo con el lema 3.1 y la observación anterior, el operador  $JS$  es autoadjunto y positivo en el espacio de Hilbert  $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ , por ello  $JS$  tiene una raíz cuadrada positiva  $(JS)^{\frac{1}{2}}$  única y efectivamente,

$$\sqrt{a} \leq (JS)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{b},$$

así que de igual manera  $(JS)^{\frac{1}{2}}$  es invertible. Por tanto, en virtud de la proposición 3.3, la familia  $\{[(JS)^{\frac{-1}{2}}]^* \eta_x^1, [(JS)^{\frac{-1}{2}}]^* \eta_x^2, \dots, [(JS)^{\frac{-1}{2}}]^* \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un marco continuo de rango  $n$ .

Sentado lo anterior, solo basta comprobar sus cotas para verificar que en efecto es un marco ajustado. Para ello se utiliza la ecuación (3.7) y el hecho que el operador  $(JS)^{\frac{1}{2}}$  también es autoadjunto en el respectivo espacio de Hilbert, donde se obtiene que para  $k \in \mathfrak{K}$ ,

$$\begin{aligned} \|k\|_J^2 &= [(JS)^{\frac{1}{2}}(JS)^{\frac{-1}{2}}k, k]_J = [JS(JS)^{\frac{-1}{2}}k, (JS)^{\frac{-1}{2}}k]_J \\ &= [S(JS)^{\frac{-1}{2}}k, (JS)^{\frac{-1}{2}}k] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [(JS)^{\frac{-1}{2}}k, \eta_x^i][\eta_x^i, (JS)^{\frac{-1}{2}}k] d|\nu|(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [k, [(JS)^{\frac{-1}{2}}]^* \eta_x^i][[(JS)^{\frac{-1}{2}}]^* \eta_x^i, k] d|\nu|(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |[(JS)^{\frac{-1}{2}}]^* \eta_x^i, k|^2 d|\nu|(x). \end{aligned}$$

Luego, se concluye que las cotas del marco son  $a = b = 1$ , o sea que el marco es ajustado.  $\square$

Por último, teniendo en cuenta principalmente las propiedades correspondientes a la proposición 3.1, es posible representar cada vector en el espacio de Krein mediante el uso de la integral débil y el marco continuo asociado.

**Teorema 3.4. (Teorema de Descomposición de Marcos)**

Sean  $S^{-1}$  el inverso del operador marco asociado a  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ . En tal caso, cada  $k$  en  $\mathfrak{K}$  tiene las siguientes representaciones

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [S^{-1} \eta_x^i, k] \eta_x^i d|\nu|(x), \\ k &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [\eta_x^i, k] S^{-1} \eta_x^i d|\nu|(x), \end{aligned}$$

donde las integrales convergen débilmente en  $\mathfrak{K}'$ .

*Demostración.* Teniendo en cuenta la ecuación (3.7) y que el inverso del operador marco es autoadjunto, se deduce fácilmente la primera igualdad,

$$k = S(S^{-1}k) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [\eta_x^i, S^{-1}k] \eta_x^i d|\nu|(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [S^{-1} \eta_x^i, k] \eta_x^i d|\nu|(x).$$

Además, debido a la proposición 3.1 se tiene que

$$k = S^{-1}(Sk) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} S^{-1}([\eta_x^i, k] \eta_x^i) d|\nu|(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [\eta_x^i, k] S^{-1} \eta_x^i d|\nu|(x).$$

$\square$

**Observación 3.9.** *Teniendo en cuenta el teorema de descomposición de marcos y la derivada de Radon-Nikodym  $j_\nu$ , para cada  $k$  se tiene que*

$$k = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [S^{-1}(j_\nu(x)\eta_x^i), k] \eta_x^i d\nu(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [\eta_x^i, k] S^{-1}(j_\nu(x)\eta_x^i) d\nu(x),$$

lo cual motiva la definición de marcos duales.

**Definición 3.6.** *Sea  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  marco continuo en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ . Un marco continuo  $\{\zeta_x^1, \zeta_x^2, \dots, \zeta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  es un **marco dual** de  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  si para cada  $k$  en  $\mathfrak{K}$ ,*

$$k = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [\zeta_x^i, k] \eta_x^i d\nu(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [\eta_x^i, k] \zeta_x^i d\nu(x).$$

**Observación 3.10.** *Un ejemplo concreto y sencillo a la hora de comprobar para un marco dual de  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$ , es la familia  $\{S^{-1}(j_\nu(x)\eta_x^1), S^{-1}(j_\nu(x)\eta_x^2), \dots, S^{-1}(j_\nu(x)\eta_x^n)\}_{x \in \mathcal{M}}$  como se mencionó en la última observación.*

Pues bien, como el operador  $S$  actúa de  $\mathfrak{K}$  en  $\mathfrak{K}$ , se buscará dar a este y a su inverso una expresión en términos de integral débil sobre operadores de la misma naturaleza.

**Proposición 3.9.** *Sean  $\eta_1$  y  $\eta_2$  vectores del espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ . En ese caso, el operador lineal  $|\eta_1][\eta_2| : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$  dado para  $k \in \mathfrak{K}$  por*

$$|\eta_1][\eta_2|(k) = [\eta_2, k] \eta_1$$

es acotado y su adjunto es el operador,

$$(|\eta_1][\eta_2|)^* = |\eta_2][\eta_1|.$$

*Demostración.* Es claro la linealidad del operador. Además, para cada  $k \neq 0$  en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ ,

$$\frac{\| |\eta_1][\eta_2|(k) \|_J}{\|k\|_J} = \frac{\| [\eta_2, Jk] \|_J \| \eta_1 \|_J}{\|k\|_J} \leq \frac{\| \eta_2 \|_J \| Jk \|_J \| \eta_1 \|_J}{\|k\|_J} = \| \eta_2 \|_J \| \eta_1 \|_J.$$

Luego, el operador  $|\eta_1][\eta_2|$  es acotado y como para cualesquiera  $k, h \in \mathfrak{K}$ ,

$$\begin{aligned} [h, |\eta_1][\eta_2|(k)] &= [h, [\eta_2, k] \eta_1] = [\eta_2, k] [h, \eta_1] = [[\eta_2, h] \eta_2, k] \\ &= [|\eta_2][\eta_1|(h), k], \end{aligned}$$

se infiere que  $(|\eta_1][\eta_2|)^* = |\eta_2][\eta_1|$ . □

Por el inciso *i*) de la proposición 3.1, cada integral débil en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{K})$  se puede expresar como una integral débil en  $\mathfrak{K}$ . Además, en el caso del operador marco se verá seguidamente que se cumple el recíproco teniendo en cuenta el operador de la proposición anterior.

**Observación 3.11.** *En cuanto al marco  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  se tiene que para cada  $x \in \mathcal{M}$  y  $i = 1, \dots, n$ , el operador  $|\eta_x^i][\eta_x^i|$  esta en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{K})$ , entonces considerando las funciones  $|\eta^i][\eta^i| : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{K})$  que envían  $x \in \mathcal{M}$  a  $|\eta_x^i][\eta_x^i|$  y sustituyendo en la ecuación (3.7), se tiene que*

$$Sk = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |\eta_x^i][\eta_x^i|(k) d|\nu|(x), \quad k \in \mathfrak{K}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |\eta_x^i][\eta_x^i| d|\nu|(x) = S,$$

donde se considera la integral débil en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{K})$ . Esta última expresión del operador marco es lo que se requiere en estados coherentes [8] en lugar de la condición del marco.

**Proposición 3.10.** *Sean  $S$  el operador marco asociado a  $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \dots, \eta_x^n\}_{x \in \mathcal{M}}$  en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  y los operadores  $|S^{-1}\eta_x^i][S^{-1}\eta_x^i|$ ,  $|S^{-1}\eta_x^i][\eta_x^i|$  y  $|\eta_x^i][S^{-1}\eta_x^i|$  en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{K})$ , entonces*

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |S^{-1}\eta_x^i][S^{-1}\eta_x^i| d|\nu|(x) = S^{-1}$$

y

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |\eta_x^i][S^{-1}\eta_x^i| d|\nu|(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |S^{-1}\eta_x^i][\eta_x^i| d|\nu|(x) = I.$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $S^{-1}$  también es autoadjunto, se tiene que

$$\begin{aligned} [h, |S^{-1}\eta_x^i][S^{-1}\eta_x^i|(k)] &= [h, [S^{-1}\eta_x^i, k]S^{-1}\eta_x^i] = [S^{-1}\eta_x^i, k][h, S^{-1}\eta_x^i] \\ &= [\eta_x^i, S^{-1}k][S^{-1}h, \eta_x^i] = [S^{-1}h, [\eta_x^i, S^{-1}k]\eta_x^i] \\ &= [S^{-1}h, |\eta_x^i][\eta_x^i|(S^{-1}k)], \end{aligned} \quad (3.9)$$

siendo así, como la función  $|\eta^i][\eta^i|$  es débilmente medible,  $|S^{-1}\eta^i][S^{-1}\eta^i|$  también lo es, y de manera similar se concluye que las funciones  $|S^{-1}\eta^i][\eta^i|$  y  $|\eta^i][S^{-1}\eta^i|$  son débilmente medibles. Por otra parte, en vista de la observación 3.11 se sabe que para cada  $k, h \in \mathfrak{K}$ ,

$$[h, Sk] = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [h, |\eta_x^i][\eta_x^i|(k)] d|\nu|(x),$$

entonces reemplazando en esta expresión  $k$  por  $S^{-1}k$ ,  $h$  por  $S^{-1}h$  y usando la ecuación (3.9) se obtiene,

$$\begin{aligned} [h, S^{-1}k] &= [S^{-1}h, k] = [S^{-1}h, SS^{-1}(k)] = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [S^{-1}h, |\eta_x^i| [\eta_x^i(S^{-1}k)] d\nu|(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [h, |S^{-1}\eta_x^i| [S^{-1}\eta_x^i k] d\nu|(x). \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |S^{-1}\eta_x^i| [S^{-1}\eta_x^i] d\nu|(x) = S^{-1}.$$

Las dos últimas ecuaciones se siguen del teorema de descomposición de marcos y la proposición 3.1 pues

$$Ik = S(S^{-1}k) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} [S^{-1}\eta_x^i, k] \eta_x^i d\nu|(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |\eta_x^i| [S^{-1}\eta_x^i k] d\nu|(x),$$

además

$$\begin{aligned} I &= I^* = \left( \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |\eta_x^i| [S^{-1}\eta_x^i] d\nu|(x) \right)^* = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} (|\eta_x^i| [S^{-1}\eta_x^i])^* d\nu|(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} |S^{-1}\eta_x^i| [\eta_x^i] d\nu|(x). \end{aligned}$$

□



Se finaliza este trabajo con unas observaciones y particularidades del operador de Gram  $W_\varphi$ , el cual permite construir ejemplos de marcos continuos en espacios de Krein donde  $\varphi$  es una función con ciertas propiedades. Tales aspectos se van a ilustrar teniendo en cuenta resultados del capítulo anterior y la construcción de dichos espacios asignando una  $W$ -métrica a un espacio de Hilbert determinado, como bien se mostró en el capítulo 2.

#### 4.1. Operador de Gram $W_\varphi$

**Observación 4.1.** [3] *Los marcos para los espacios de Krein provienen de  $L_2$ -espacios  $\mathcal{L}_2(\mathcal{M}, \mu)$ . Si  $\mu$  es una medida positiva en una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathcal{M}$  y  $\varphi$  una función real medible de tal manera que para ciertas funciones  $f, g \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M}, \mu)$ ,*

$$[f, g] := \int \overline{f(x)}g(x)\varphi(x) d\mu(x), \quad f, g \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M}, \mu), \quad (4.1)$$

*define un producto interno y se pueda obtener un espacio de Krein tomando una completación tal que  $\mathcal{L}_2(\mathcal{M}, |\varphi|\mu)$  da lugar a dicho espacio con simetría fundamental  $J$  de tal forma que el producto interno positivo que resulta está dado por*

$$[f, g]_J := \int \overline{f(x)}g(x)|\varphi(x)| d\mu(x),$$

*entonces aunque se pueda aplicar la teoría de marcos ya sea al espacio de Krein o al espacio de Hilbert asociado; se prefiere trabajar en el espacio de Krein debido a que si se pasa de  $\varphi$  a  $|\varphi|$  se podría perder algunas propiedades como por ejemplo el hecho de ser una función diferenciable, tal como sucede cuando  $\varphi(x) = x$ .*

Si en particular se considera el operador  $W_\varphi$  definido en  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  por  $(W_\varphi f)(x) := \varphi(x)f(x)$ , resulta que la  $W_\varphi$ -métrica coincide con el producto dado en la ecuación (4.1), esto es,  $[f, g] = \langle f, W_\varphi g \rangle$ .

Ahora bien, para la transferencia de marcos es importante tener  $W_\varphi$  auto-adjunto y  $\text{Ker}(W_\varphi) = \{0\}$ . Además, para determinar la continuidad del operador de Gram  $W_\varphi$  y saber si el cero pertenece o no al espectro del mismo, será de utilidad los conceptos del supremo esencial e ínfimo esencial definidos respectivamente por

$$\begin{aligned} \text{ess sup}(\varphi) &:= \inf \{c \in \mathbb{R} : \mu((\varphi^{-1}((c, \infty))) = 0\} \\ \text{ess inf}(\varphi) &:= \sup \{c \in \mathbb{R} : \mu(\varphi^{-1}((-\infty, c))) = 0\}, \end{aligned}$$

**Lema 4.1.** *Sea  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  con la respectiva medida de Lebesgue y  $\varphi$  una función real medible, entonces el conjunto  $D$  de funciones  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\varphi(x)|^2 dx < \infty$ , es denso en  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ .*

*Demostración.* Sean  $h$  en  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  y los conjuntos  $K_n := |\varphi|^{-1}([0, n])$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $h_n := \chi_{K_n} h$ , la sucesión  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está formada por funciones medibles del conjunto  $D$  de tal manera que  $h_n$  converge a  $h$  puntualmente.

En efecto, para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |h_n(x)\varphi(x)|^2 dx &= \int_{K_n} |h(x)|^2 |\varphi(x)|^2 dx \leq n^2 \int_{K_n} |h(x)|^2 dx \\ &\leq n^2 \int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2 dx = n^2 \|h\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Luego,  $h_n \in D$ . Además,

$$\|h_n - h\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |1 - \chi_{K_n}(x)|^2 |h(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{R} \setminus K_n}(x) |h(x)|^2 dx.$$

En tal caso como  $\mathbb{R} = \bigcup K_n$ , se infiere que la sucesión  $\chi_{\mathbb{R} \setminus K_n} |h|^2$  converge a  $\chi_{\mathbb{R} \setminus K_n} |h|^2 \equiv 0$  puntualmente. Incluso  $|\chi_{\mathbb{R} \setminus K_n} |h|^2| \leq |h|^2$  y en consecuencia, el Teorema de Convergencia Dominada[10] nos asegura que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - h\| = 0. \quad (4.2)$$

Por tanto,  $D$  es denso en  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ . □

**Proposición 4.1.** *Sea  $W_\varphi : \text{dom}(W_\varphi) \subseteq \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  el operador de Gram dado por  $(W_\varphi f)(x) := \varphi(x)f(x)$  y dominio,*

$$\text{dom}(W_\varphi) := \left\{ f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\varphi(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

*entonces  $W_\varphi$  es auto-adjunto.*

*Demostración.* La existencia del operador adjunto  $W_\varphi^*$  esta garantizada por el lema 4.1. Por lo cual, se busca demostrar en ese caso que  $W_\varphi = W_\varphi^*$ .

En primer lugar,  $W_\varphi$  resulta simétrico, es decir,  $W_\varphi \subset W_\varphi^*$  pues para cada  $f, g \in \text{dom}(W_\varphi)$  se cumple

$$\langle f, W_\varphi g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} \varphi(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x) f(x)} g(x) dx = \langle W_\varphi f, g \rangle.$$

Pues bien, sea  $f \in \text{dom}(W_\varphi^*) \subseteq \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ . Se sabe por el lema 4.1 que para  $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  se tiene que  $g_n := \chi_{K_n} g \in \text{dom}(W_\varphi)$  con  $n \in \mathbb{N}$ , entonces se cumple  $\langle W_\varphi^* f, g_n \rangle = \langle f, W_\varphi(g_n) \rangle$  y si  $f_n$  se define de manera similar como  $g_n$ , se deduce

$$\begin{aligned} \langle \chi_{K_n} W_\varphi^* f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{K_n}(x) \overline{W_\varphi^* f(x)} g(x) dx = \langle W_\varphi^* f, g_n \rangle = \langle f, W_\varphi(g_n) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} \varphi(x) \chi_{K_n} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x) \chi_{K_n} f(x)} g(x) dx = \langle W_\varphi(f_n), g \rangle. \end{aligned}$$

Luego,  $|W_\varphi(f_n)| = |\chi_{K_n} W_\varphi^* f| \leq |W_\varphi^* f|$ , o sea,  $\{|W_\varphi(f_n)|^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión que converge casi en todas partes a  $|W_\varphi^* f|^2$  pues  $|W_\varphi(f_n)| \leq |W_\varphi(f_{n+1})|$ , entonces en virtud del Teorema de Convergencia Monótona[10] y la ecuación (4.2) se concluye

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\varphi(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 |\varphi(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |(W_\varphi f_n)(x)|^2 dx = \|W_\varphi^* f\|^2 < \infty.$$

Por tanto,  $f \in \text{dom}(W_\varphi)$ , esto es,  $W_\varphi^* \subset W_\varphi$  y en consecuencia  $W_\varphi = W_\varphi^*$ .  $\square$

Teniendo ya  $W_\varphi$  auto-adjunto, solo resta saber cuando  $\text{Ker}(W_\varphi) = \{0\}$  y así poder obtener  $W_\varphi$  operador de Gram, lo cual se logra con la condición  $\mu(\varphi^{-1}(\{0\})) = 0$ .

**Proposición 4.2.** *Sea  $W_\varphi$  el operador de Gram dado en la proposición anterior, entonces  $W_\varphi$  no es acotado si  $\text{ess sup}(|\varphi|) = \infty$ .*

*Demostración.* Si  $\text{ess sup}(|\varphi|) = \infty$ , entonces no existe  $c > 0$  tal que  $\mu(|\varphi|^{-1}((c, \infty))) = 0$ , es decir,  $\mu(|\varphi|^{-1}((n, \infty))) > 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y de hecho como la medida de Lebesgue  $\mu$  es  $\sigma$ -finita, existen conjuntos medibles  $M_n \subset |\varphi|^{-1}((n, c_n))$ ,  $c_n > n$  tal que  $0 < \mu(M_n) < \infty$ . Luego, las funciones  $\chi_{M_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  pertenecen al dominio de  $W_\varphi$  y son distintas del cero ya que  $(c, c_n)$  es acotado y  $\|\chi_{M_n}\|^2 = \mu(M_n)$ .

En tal caso, si  $W_\varphi$  fuera acotado

$$\|W_\varphi\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|W_\varphi \chi_{M_n}\|}{\|\chi_{M_n}\|} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{\int_{M_n} |\varphi|^2 dx}}{\|\chi_{M_n}\|} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \|\chi_{M_n}\|}{\|\chi_{M_n}\|} = \sup_{n \in \mathbb{N}} n = \infty,$$

lo que sería una contradicción y por tanto el operador  $W_\varphi$  no puede ser acotado.  $\square$

**Proposición 4.3.** *Para el operador de Gram  $W_\varphi$  se cumple que  $0$  pertenece a su espectro si y sólo si  $\text{ess inf}(|\varphi|) = 0$ .*

*Demostración.* Análogamente a la proposición 4.2 si  $\mu(|\varphi|^{-1}((0, c))) \neq 0$  para algún  $c > 0$ , entonces existe un conjunto medible  $M \subset |\varphi|^{-1}((0, c))$  tal que  $0 < \mu(M) < \infty$ . Así,  $\chi_M \in \text{dom}(|W_\varphi|) \setminus \{0\}$  y

$$\langle |W_\varphi| \chi_M, \chi_M \rangle = \langle |\varphi| \chi_M, \chi_M \rangle \leq c \langle \chi_M, \chi_M \rangle, \quad (4.3)$$

donde se utiliza el hecho de que  $W_{|\varphi|} = |W_\varphi|$  con  $\text{dom}(W_{|\varphi|}) = \text{dom}(W_\varphi)$ .

Ahora,  $0 \notin \text{spec}(W_\varphi) \Leftrightarrow 0 \notin \text{spec}(|W_\varphi|) \Leftrightarrow |W_\varphi| \geq \delta$  para algún  $\delta > 0$ , esto ocurre si y sólo si

$$\delta \langle f, f \rangle \leq \langle |W_\varphi| f, f \rangle = \langle |\varphi| f, f \rangle, \quad \forall f \in \text{dom}(|W_\varphi|),$$

Luego, por la ecuación (4.3) se infiere que  $\delta \langle f, f \rangle \leq \langle |W_\varphi| f, f \rangle, \forall f \in \text{dom}(|W_\varphi|)$  si y sólo si  $\mu(|\varphi|^{-1}((0, c))) = 0, \forall c \in [0, \delta)$ , lo que equivale a  $0 < \delta \leq \text{ess inf}(|\varphi|)$ .  $\square$

## 4.2. Marcos de Gabor y Marcos de Wavelet

**Observación 4.2.** *En [6, sec. 8.1] se demuestra que para una función fija  $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  con  $g(x) \neq 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}$  se tiene que  $\{E_b T_a g\}_{a,b \in \mathbb{R}}$  con  $a, b > 0$  es un marco continuo para  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  donde el operador de modulación  $E_b$  y el operador de traslación  $T_a$  están dados por*

$$(E_b g)(x) := f(x) e^{2\pi i b x}, \quad (T_a g)(x) := g(x - a).$$

Luego,  $(E_b T_a g)(x) = g(x - a) e^{2\pi i b x}$  y el marco se llama un marco de **Gabor**. Por ello si se considera el espacio medible  $\mathbb{R}^2$  con la medida de Lebesgue respectiva  $\nu$  entonces se tiene que para cada  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  [6, prop. 8.1.2],

$$\|g\|^2 \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\langle E_b T_a g, f \rangle_{\mathcal{L}_2}|^2 d\nu(a, b).$$

y teniendo en cuenta la definición 3.3,  $\{E_b T_a g\}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2}$  es un marco continuo ajustado de rango 1 para  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  con cota del marco igual a  $\|g\|^2$ .

**Ejemplo 4.1.** *Considere la medida signada  $\nu$  dada para un subconjunto de Borel  $E$  en el espacio medible  $\mathbb{R}$  por*

$$\nu(E) := \int_E \varphi(x) dx,$$

donde se integra a  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  medible con respecto a la medida de Lebesgue. Una descomposición de Hahn para  $\nu$  esta dada por los conjuntos  $P_\varphi := \varphi^{-1}([0, \infty))$  y  $N_\varphi := \varphi^{-1}((-\infty, 0))$ , donde al menos uno dichos conjuntos es finito. Así, las respectivas variaciones positiva, negativa y total corresponden a

$$\nu^+(E) := \int_{E \cap P_\varphi} \varphi dx = \int_E \varphi^+ dx, \quad \nu^-(E) := - \int_{E \cap N_\varphi} \varphi dx = \int_E \varphi^- dx.$$

Aquí  $\varphi^+$  y  $\varphi^-$  son las parte positiva y negativa de  $\varphi$  respectivamente como se estableció en la definición 1.5. Además,

$$|\nu|(E) := \int_E \varphi^+ dx + \int_E \varphi^- dx = \int_E |\varphi| dx.$$

La medida  $\nu$  definida así resulta absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y la función  $\varphi(x)$  es la respectiva derivada de Radon-Nikodym, o sea,  $d\nu = \varphi(x)dx$  y de la misma manera  $d|\nu| = |\varphi(x)|dx$ .

Por otro lado, si se considera el operador de Gram  $W_\varphi$  de la sección anterior y el espacio de Krein  $\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}, \nu)$  como en el ejemplo 2.1, se obtiene que la  $W_\varphi$ -métrica esta dada por

$$[f, g]_J := \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(x)|\varphi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(x) d|\nu|(x), \quad f, g \in \text{dom}(W_\varphi),$$

donde la simetría fundamental  $J$  corresponde al operador  $J = \chi_{P_\varphi} - \chi_{N_\varphi}$ . De hecho,

$$(J|W_\varphi|f)(x) = (\chi_{P_\varphi}(x) - \chi_{N_\varphi}(x))|\varphi(x)|f(x) = \varphi(x)f(x) = (W_\varphi f)(x),$$

esto es, el operador  $J$  es la isometría correspondiente a la descomposición polar  $W_\varphi = J|W_\varphi|$ . Siendo así, bajo la hipótesis de que  $0 = \text{ess inf}(|\varphi|) < \text{ess sup}(|\varphi|) = \infty$  se obtiene por las proposiciones 4.2 y 4.3 que el operador de Gram  $W_\varphi$  es no acotado y que  $0 \in \text{spec}(W_\varphi)$ . Luego, se toma el cierre bajo la  $J$ -norma como se describió en la observación 2.6 para obtener el espacio de Krein  $\mathcal{H}_{W_\varphi}$  dado por

$$\mathcal{H}_{W_\varphi} = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\varphi(x)| dx < \infty \right\},$$

por lo cual,  $\mathcal{H}_{W_\varphi} = \mathfrak{K}_2(\mathbb{R}, \nu)$  donde  $\mathcal{D}_+ = \chi_{P_\varphi} \text{dom}(W_\varphi)$  y  $\mathcal{D}_- = \chi_{N_\varphi} \text{dom}(W_\varphi)$  son los subespacios densos en  $\mathcal{H}_+ = \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \nu^+)$  y  $\mathcal{H}_- = \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \nu^-)$ .

De modo que el operador  $U := \sqrt{|W_\varphi|} : \mathcal{H}_{W_\varphi} = \mathfrak{K}_2(\mathbb{R}, \nu) \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  es unitario por el teorema 2.2 y como  $\{E_b T_a g\}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2}$  es un marco continuo ajustado de rango 1 para  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  con cota del marco igual a  $\|g\|_{\mathcal{L}_2}^2$  de acuerdo a la observación 4.2, entonces por la proposición 3.3 se deduce que

$$\{U^{-1}E_b T_a g\}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\varphi|}} E_b T_a g \right\}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2}$$

es un marco continuo ajustado de rango 1 en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}, \nu)$  con la misma cota del marco  $\|g\|^2$ . Además, en vista del teorema 3.4,

$$f = \int_{\mathbb{R}^2} [S^{-1}(U^{-1}E_b T_a g), f] U^{-1}E_b T_a g d\nu(a, b), \quad f \in \mathfrak{K}_2(\mathbb{R}, \nu),$$

donde  $S$  es el respectivo operador marco.

**Ejemplo 4.2.** [6, sec. 11.1] Si  $\psi$  pertenece a  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  y satisface,

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(x)|^2}{|x|} dx < \infty,$$

donde  $\widehat{\psi}$  denota la transformada de Fourier de  $\psi$ , entonces  $\{\psi^{a,b}\}_{(a,b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}}$  es un marco continuo ajustado de rango 1 para  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ , el cual denominamos como un marco continuo de Wavelet tal que

$$\psi^{a,b}(x) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

y la cota del marco está dada por  $C_\psi$  ya que [6, prop. 11.1.1],

$$C_\psi \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\langle \psi^{a,b}, f \rangle_{\mathcal{L}_2}|^2 \frac{dad b}{a^2}.$$

Al igual que el ejemplo anterior, si se considera  $\varphi(x) = x$  y  $W_x$  como en la proposición 4.1, es decir,  $(W_x f) := x f(x)$  y

$$\text{dom}(W_x) := \left\{ f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |x|^2 dx < \infty \right\},$$

entonces el operador  $W_x$  es autoadjunto y como  $\mu(\varphi^{-1}(\{0\})) = 0$ ,  $\text{Ker}(W_x) = \{0\}$ . Además, ya que  $0 = \text{ess inf}(|\varphi|) < \text{ess sup}(|\varphi|) = \infty$  para  $\varphi(x) = x$ , se tiene que  $W_x$  es no acotado y que  $0 \in \text{spec}(W_x)$ . Además el espacio de Krein  $\mathcal{H}_{W_x}$  corresponde a

$$\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}, xdx) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |x| dx < \infty \right\},$$

con simetría fundamental  $J = \chi_{[0,\infty)} - \chi_{(-\infty,0)}$  y operadores unitarios definidos en casi todas partes por

$$\begin{aligned} U_x &:= \overline{W_{|\phi|^{1/2}}} : \mathfrak{K}_2(\mathbb{R}, xdx) \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{R}), & (Uf)(x) &:= \sqrt{|x|} f(x), \\ U_x^{-1} &:= \overline{W_{|\phi|^{-1/2}}} : \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{K}_2(\mathbb{R}, xdx), & (U_x^{-1}f)(x) &:= \frac{1}{\sqrt{|x|}} f(x). \end{aligned}$$

Luego, en virtud tanto del teorema 2.2 como de la proposición 3.3, y teniendo cuenta que  $\{\psi^{a,b}\}_{(a,b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}}$  es un marco continuo ajustado de rango 1 para  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  con cota del marco  $C_\psi$ , se concluye que

$$\{U_x^{-1} \psi^{a,b}\}_{(a,b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{|x|}} \psi^{a,b} \right\}_{(a,b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}}$$

es un marco continuo de rango 1 en el espacio de Krein  $\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}, xdx)$  con la misma cota del marco  $C_\psi$ , y asimismo en vista del teorema 3.4,

$$f = \int_{\mathbb{R}^2} [S^{-1}(U_x^{-1} \psi^{a,b}), f] U_x^{-1} \psi^{a,b} \frac{dad b}{a^2}, \quad f \in \mathfrak{K}_2(\mathbb{R}, xdx).$$



- [1] R. Duffin, A. Schaeffer, *A class of nonharmonic fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 341-366.
- [2] I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer, *Painless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys. 27 (1986), 1271-1283.
- [3] K. Esmeral, O. Ferrer, E. Wagner, *Frames in Krein spaces arising from a non-regular W-metric*, Banach J. Math. Anal. 9 (2015), 1-16.
- [4] T. Azizov, I. Iokhvidov, *Linear operators in spaces with an indefinite metric*, John Wiley and Sons, Chichester, 1989.
- [5] J. Bogнар, *Indefinite inner product spaces*, Springer, Berlin, 1974.
- [6] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [7] D. Han, K. Kornelson, D. Larson, E. Weber, *Frames for Undergraduates, Student Mathematical Library*, American Mathematical Society, Providence, 2007.
- [8] S. Ali, J. Antoine, J. Gazeau, *Coherent States, Wavelets and their Generalizations*, Springer, New York, 2000.
- [9] G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [10] R. Bartle, *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, Champaign, 1966.
- [11] H. Royden *Real Analysis*, The Macmillan Company, London, 1963.
- [12] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berkeley, 1995.
- [13] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1978.