UNIVERSIDAD MICHOACANA DE

SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMÁTICAS
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"
MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

" El álgebra escolar, un estudio exploratorio con estudiantes egresados de bachillerato"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
ARACELI VILLA MIRELES

ASESOR
DR. JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA

COASESOR
DR. ÁNGEL HERNÁNDEZ RAMOS

MORELIA, MICHOACÁN,DICIEMBRE DE 2016

AGRADECIMIENTOS

Dedico de manera muy especial este trabajo a mi papá quien me apoyó, me impulsó y estuvo a mi lado incondicionalmente hasta los últimos trámites, sin él no habría sido posible este momento.

Agradezco el apoyo y paciencia del Dr.Angel Hernández Ramos quien me encaminó y me ayudó en este trabajo hasta su culminación.

Al Dr. Carlos Cortés Zavala por aceptarme y apoyarme como su tesista y hacer posible todo el proceso.

Finalmente a mi Mamá y mi Esposo que con su cariño y apoyo hicieron más ligero este proceso.

ÍNDICE

RESUMEN

El interés de esta investigación es indagar acerca de los conocimientos y habilidades que han desarrollado los estudiantes durante sus tres años de bachillerato, en el aprendizaje del algebra; podría asegurarse que los estudiantes que ingresan al bachillerato no desconocen los temas del álgebra básica, pero su empleo para resolver problemas es aun limitado (Hernández, 2010).

Para indagar la temática se tomó una muestra de 100 estudiantes de sexto semestre del nivel bachillerato, a los cuales les fue aplicado un instrumento con ejercicios típicos del álgebra de bachillerato, donde los estudiantes deberían de tomar decisiones en forma autónoma, para llevar a cabo los procesos que requiera la tarea, de esta manera se hizo un análisis donde se hace referencia a 4 competencias para matemáticas:

El planteamiento y la resolución de problemas, la argumentación, la comunicación y el manejo de técnicas. Otro factor que interviene es el medio escolar, en que se desenvuelven los estudiantes las habilidades para hacer representaciones algebraicas, para realizar transformaciones sobre éstas y entender los significados operacionales de dichas representaciones, parecen ser elementos fundamentales para que se muestren competentes en álgebra (Hernández, 2010); lo cual es evidenciado al resolver problemas matemáticos en varios contexto.

En nuestro análisis de la muestra se obtiene que la mayoría de los estudiantes cuentan con el conocimiento para realizar la actividad pero, descuidos involuntarios los hacen parecer no competentes, se observa que los estudiantes tienen una noción por ejemplo de la estructura del desarrollo de un binomio al cuadrado, sin embargo, no tienen la habilidad para realizar las operaciones parciales que se requieren, mientras más pasos se requieran para llegar a la solución más estudiantes cometen errores antes de ello.

Al transcurrir el bachillerato se logra ver que conocen los contenidos del álgebra, Aplican los contenidos del álgebra pertinentemente, logran una representación simbólica adecuada pero fallas operacionales impiden llegar al resultado final correcto.

Apegándonos a la definición establecida podemos determinar que los estudiantes al concluir el bachillerato muestran los elementos fundamentales para la competencia Algebraica. Aunque en algunos ejercicios más elaborados no logran concluir satisfactoriamente, pero se logran los elementos anteriores.

Competencias, álgebra, bachillerato, estudiantes, muestra.

ABSTRACT

The interest of this research is to inquire about the knowledge and skills that have developed the students during their three years of high school on algebra learning. It could be sured that students entering high school are not unaware of basic algebra issues, but their use to solve problems is still limited (Hernández, 2010).

In order to investigate the subject, we took a sample of 100 students from the sixth semester of high school who were given an instrument with typical exercises of high school algebra, where students should make decisions autonomously, to carry out the procesases that require the competence, in this way an analysis was made based on the reference to 4 mathematics competences:

The approach and the resolution of problems, the argumentation, the communication and the management of techniques. Another factor that affects is the school environment, In which students develop the skills to make algebraic representations, to make transformations about them and to understand the operational meanings of such representations, seem to be fundamental elements for them to be proficient in algebra (Hernández, 2010); Which is evidenced when solving mathematical problems in several contexts.

We got on the sample's analysis that the majority of the students have the knowledge to make the activity but, involuntary carelessness makes them seem not competent, it is observed that the students have a notion of the structure of the development of a binomial Squared for example, however, do not have the ability to perform the partial operations that are required, the more steps are required to reach the solution the more students make mistakes before that. When students passed through high school we can see they know the algebra contents, they apply them pertinently, they obtain an adequate symbolic representation but operational failures prevent to arrive at the correct final result.

Getting closed to established definition we can determine that students at the end of high school show the fundamental elements for Algebraic competence. Although in some more elaborate exercises they fail to complete satisfactorily, but the previous elements are achieved.

PRESENTACIÓN

La mayoría de los estudiantes cuando ingresan al bachillerato cuentan con un conocimiento algebraico elemental que les permite realizar operaciones algebraicas básicas, sobre todo cuando se emplean coeficientes enteros en estas (Hernández, 2010). Podría asegurarse que los estudiantes que ingresan no desconocen los temas del álgebra básica, pero su empleo para resolver problemas es aun limitado. El interés de esta investigación es indagar acerca de los conocimientos y habilidades que han desarrollado los estudiantes durante sus tres años de bachillerato, en el aprendizaje del algebra.

Para lo cual fue tomada una muestra de 100 estudiantes del nivel bachillerato de una escuela pública de la ciudad de Morelia Michoacán. A los cuales les fue aplicado un instrumento con ejercicios típicos del álgebra de bachillerato, donde los estudiantes deberían de tomar decisiones en forma autónoma, para llevar a cabo los procesos que requiera la tarea. La información recabada se procesó estableciendo porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y no contestadas; además, de las respuestas incorrectas, se realizó un análisis estableciendo categorías. Así, partir de esta información y análisis realizados, hacemos afirmaciones acerca de los estudiantes que egresan del bachillerato.

El orden en que presentamos el documento es el siguiente: en el primer capítulo ciertos elementos teóricos del álgebra escolar, orientada a una noción de competencias algebraicas, del cual se carece en los documentos oficiales. En el segundo capítulo hacemos una revisión de las intenciones curriculares del álgebra para el bachillerato de acuerdo a la RIEB (SEP, 2008), mientras en el capítulo tres damos cuenta el diseño de investigación, los resultados obtenidos y finalmente en el capítulo cuatro, reportamos el análisis y las conclusiones

Planteamiento del problema de investigación

En un momento en el cual se están implementando ajustes curriculares, en un enfoque llamado en competencias, en todos los niveles de nuestro sistema educativo, consideramos necesario realizar esta investigación a fin de describir las competencias algebraicas que han desarrollado los estudiantes al egresar del bachillerato, específicamente en los aspectos; *realizar procesos estructurales característicos del álgebra*, y *hacer representaciones algebraicas*, que son los más favorecido por la instrucción escolar.

Es el bachillerato en donde los estudiantes deberán de vivir diversas experiencias, en las que los procesos algebraicos tales como: despeje de fórmulas, resolución de ecuaciones, transformación de expresiones algébricas y resolución de problemas, deberá adquirir mayor significatividad el álgebra por su empleo, por ejemplo, en contextos de las asignaturas de física y química, así como en las mismas matemáticas. Es en este nivel educativo en el cual los estudiantes tendrán oportunidades para consolidar su estudio del álgebra.

Preguntas de investigación

La pregunta de investigación que guía este estudio es, por lo tanto, la siguiente:

¿Con qué competencias cuentan los estudiantes que han concluido sus estudios de bachillerato, en relación al uso de representaciones algebraicas y al uso de procesos manipulativos algebraicos?

De donde especificamos las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las intenciones del currículo del bachillerato para la enseñanza del álgebra?

¿Cuáles competencias algebraicas se espera desarrollen los estudiantes en el bachillerato?

¿Qué competencias algebraicas muestran cuando realizan actividades algebraicas típicas del bachillerato?

Capítulo 1.

El álgebra escolar.

El conocimiento acerca de lo que es el álgebra escolar adquiere un carácter cada vez más amplio debido a las investigaciones y aportes teóricos sobre su naturaleza (Hernandez, 2010), como veremos a continuación. Algunos investigadores han puesto el énfasis en la naturaleza del álgebra como disciplina, otros en los orígenes del pensamiento algebraico, otros más han puesto su atención en las concepciones que se han construido a partir de la misma actividad del álgebra escolar, estableciendo diferentes direcciones para la investigación.

A través de diversos estudios acerca de errores y dificultades del álgebra escolar, ha sido posible explicitar distintos aspectos de su naturaleza. Por ejemplo, Sfard (1991), asegura que la mayoría de las personas adquieren conocimientos matemáticos pasando primero por una etapa operacional para llegar a una concepción de los objetos matemáticos, hace ver el aspecto procedimental como un camino que hay que recorrer; otros como por ejemplo, Kieran, (1992), han resaltado como fundamental los procesos estructurales y procesales del álgebra al caracterizar el álgebra escolar como:

> *una rama de las matemáticas que tiene que ver con la simbolización en general, relaciones numéricas y estructuras matemáticas y el cómo operar con esas estructuras. (p. 391)*

Kieran (2003), también mencionó que el álgebra escolar se centra principalmente en tres tipos de actividades: procedimental, representacional y meta-nivel cognitivo, el primero se refiere a los aspectos manipulativos del álgebra, el segundo hacer representaciones algebraicas y el tercero cuando se hace uso del álgebra en otros campos del conocimiento incluyendo resolución de problemas. En general, estos y otros estudios dan idea de la diversidad de los aspectos que están presentes durante un empleo competente del álgebra.

A continuación revisaremos brevemente algunas investigaciones que ponen énfasis el aspecto representacional del álgebra y otros que se ocupan más a fondo del aspecto estructural.

El aspecto representacional del álgebra

Lograr que los estudiantes hagan un uso efectivo de representaciones algebraicas cuando resuelven problemas, para representar generalizaciones y modelar situaciones ha sido un propósito en la enseñanza del álgebra y actualmente es una de las actividades principales del álgebra escolar. Sin embargo, varios estudios muestran que no es un aspecto fácil para el aprendiz, lo que ha conducido a investigadores del campo de la Educación Matemática a tratar de construir marcos teóricos para explicar los orígenes del pensamiento algebraico.

Bajo la idea de que los estudiantes no logran emplear representaciones algebraicas simplemente haciendo una transferencia del lenguaje natural, sino que existen experiencias que acercan a los estudiantes a su empleo, Bednardz, Kieran y Lee (1996) señalan diferentes acercamiento para el aprendizaje del álgebra y afirman que sólo una transición por éstos puede facilitar un acercamiento integral. Proponen un escenario metodológico de experiencias, desde las siguientes perspectivas:

-Patrones de generalización y las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.
En esta perspectiva se pretende introducir el álgebra por medio de actividades de generalización, iniciando con secuencias geométricas o numéricas, hasta llegar al uso de letras para simbolizar el patrón, y además brinda la posibilidad al estudiante de iniciarse en la lógica de la justificación cuando trata de validar la expresión generada. Para Mason (1985), expresar generalidades es el corazón del pensamiento matemático y una de las raíces del álgebra. Ursini (2001) considera que históricamente, la base para el desarrollo del álgebra está en el interés por deducir métodos generales para resolver conjuntos de problemas similares, dando al álgebra el carácter de tratar con magnitudes generales.

-Modelación de diversos fenómenos.
En esta perspectiva se requiere llegar a la simbolización a partir de situaciones reales o imaginarias, pero al alcance del entendimiento de los estudiantes, por ejemplo: el desplazamiento de un carro, el crecimiento de una planta etc. El proceso de modelación se apoya en la verbalización, la cual da significado al simbolismo que es gradualmente desarrollado por el estudiante. Según Niss et al (2007), en cualquier aplicación de las matemáticas se encuentra un modelo matemático en forma implícita o explícita.

El aprendizaje del álgebra requiere introducir al estudiante en una situación que le permita la construcción de significados por medio de varias representaciones (gráficas, expresiones simbólicas, etc.) que puede usar con cierta flexibilidad en la interpretación de fenómenos físicos o eventos diversos. Según Janvier (1996), la modelación proporciona al estudiante oportunidades para desarrollar el sentido de variable y favorece una introducción al álgebra vía esta noción. Además afirma que el punto clave en este proceso es la fase de formulación que resulta en la creación del modelo (expresión simbólica, gráfica, tabla de valores, etc.) en base a las hipótesis, que surgen de la tarea. La modelación matemática se ve como un acercamiento didáctico a las nociones matemáticas.

-El enfoque sobre conceptos de variable y función.

Un entendimiento del concepto de variable proporciona bases para la transición del aritmética al álgebra y es necesario para un significativo uso de las matemáticas avanzadas. Schoenfeld & Arcavi (1988) distinguen dos aspectos para las variables: como herramientas para expresar generalización; y su aspecto dinámico. Trabajando con diversas representaciones (numérica, gráfica y simbólica) los estudiantes desarrollan una comprensión más amplia de las funciones (NCTM, 2000. p 40). Las posibilidades ofrecidas por recientes desarrollos tecnológicos, por ejemplo, la facilidad de despliegue gráfico, simbólico y numérico los conceptos de variable y función están cada vez más presentes en ciertas aproximaciones usadas en la introducción al álgebra.

-Solución de problemas específicos o grupos de problemas categorizados.

El enfoque de resolución de problemas es visto como facilitador o generador de necesidades para el empleo del sistema simbólico algebraico, además para el empleo de manipulaciones algebraicas. Así, la resolución de problemas algebraicos es la manifestación de que hay una comprensión del álgebra.

De acuerdo con Bednarz, Kieran y Lee (1996), la resolución de problemas puede formar la base de un curso de álgebra, en una exploración completa: generalización, solución de ecuaciones, trabajo con funciones y fórmulas haciendo uso de diferentes representaciones.

Por medio de esta perspectiva, las propias estrategias de los estudiantes y su cultura matemática, caracterizada por la aritmética, son incorporadas como punto de partida para el aprendizaje sistemático y los métodos generales de resolución de problemas. Desde 1993 hasta el 2006, el enfoque prevaleciente para la enseñanza de las matemáticas en los diversos niveles escolares ha sido resolución de problemas, y se han escrito varios textos siguiendo este enfoque.

Significados e interpretaciones de las expresiones algebraicas, generados en la escuela

Normalmente la forma en que se introduce clásicamente el álgebra en la escuela, consiste en dar reglas de cómo escribir expresiones algebraicas, en presuponer que sus experiencias con los números es suficiente para que desarrollen habilidades y pronto estar operando con ellas (Kieran, 1992). Así los estudiantes construyen significados de las expresiones algebraicas debido a su participación en las actividades proporcionadas por el maestro.

Para Lins (2001), las interpretaciones que los estudiantes hacen de los objetos algebraicos, como por ejemplo, las ecuaciones, pueden ser muy diversas, lo que desencadena distintas lógicas de operaciones. Lins ejemplifica lo anterior mediante la siguiente pregunta: ¿Cómo puede realizarse la tarea de resolver 3x+10=100?, y sugiere 5 diferentes interpretaciones de la misma expresión que desencadenan acciones diferentes:

1) probar diferentes números hasta obtener el adecuado
2) pensar en tres cajas, junto con 10 kg haciendo equilibrio con 100kg
3) pensar en un número que multiplicado por 3, y sumado con 10 da como resultado 100.
4) tres partes de un valor todavía desconocido, junto con una parte de valor 10, componen un todo de valor 100.
5) agregar o sustraer el mismo número en ambos lados, multiplica o divide por el mismo número, obteniendo una expresión de la forma x= …

(p. 10)

Lins señala que estas interpretaciones tienen su origen en la práctica escolar. Por ejemplo, la interpretación como en 5), proviene probablemente de una práctica que se ha centrado en los axiomas de igualdad; la interpretación 2) probablemente fue precedida de una práctica con el “modelo de la balanza”. Sin embargo, cada una de estas interpretaciones tiene como objetivo encontrar el valor de la incógnita.

Por otra parte, Arzarello et al (2001), mencionan que el poder del álgebra consiste en los múltiples sentidos que son incorporados en una misma fórmula y/o en cómo estos pueden ser obtenidos por manipulaciones de la misma. Usan un triángulo como modelo para analizar las interpretaciones de las expresiones simbólicas en el álgebra. Su análisis parte de considerar tres elementos: la propia expresión, el objeto que denota y el sentido, asociándolos a cada vértice del triángulo (Figura 1.3):

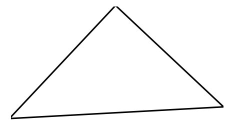


Figura 1.3. Modelo para analizar las expresiones algebraicas. Arzarello, et al (2001)

Emplean el término Sentido para referirse a la forma en la cual los objetos son percibidos por la mente, algo así como el pensamiento generado por la expresión. Mientras que definen Denotación, como el objeto al cual se refiere la expresión. Consideran que las expresiones pueden tener diferente sentido, pero denotar el mismo objeto, por ejemplo, las expresiones *4x+2 y 2(2x+1)*, denotan el mismo objeto. Empleando el triángulo como modelo, estas expresiones serían representadas de la siguiente manera:

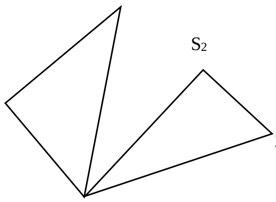


Figura 1.4. Dos expresiones y su sentido. Arzarello, et al (2001)

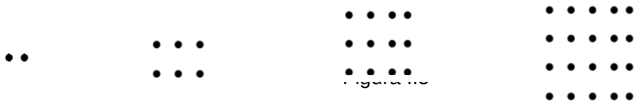
El vértice común representa el objeto al cual se refieren las expresiones representadas en los otros vértices. A cada una de estas expresiones le corresponde un sentido, S_1 y S_2, respectivamente, lo que significa que el sentido puede cambiar cuando hay un cambio en la expresión. Por ejemplo, *4x+2* genera una interpretación que tiene que ver con las operaciones que representa, una suma de términos, cuatro multiplicado por *x*, más *2*, mientras que la expresión *2(2x+1)*, es el producto de *2* con la suma de *2x* con *1*.

Las transformaciones algebraicas pueden producir diferentes expresiones, cada cual, con diferentes sentidos algebraicos pero denotando el mismo objeto, por ejemplo, *n(n+1)* al transformarlo en n^2+n, sigue siendo el mismo objeto matemático pero afecta su sentido algebraico, y la regla operacional. Las manipulaciones sintácticas de la misma fórmula pueden incorporar múltiples sentidos, por ejemplo:

$$n^2+n; \quad n(n+1); \quad n^2+2n+1-(n+1); \quad (n+1)^2-(n+1)$$

Consideran además el sentido contextualizado de una expresión, como un sentido que depende del dominio de conocimiento en el cual se encuentre, y afirman que las fórmulas expresan diferentes pensamientos, con respecto a los diferentes contextos donde son usadas. Así, por ejemplo, la expresión $n(n+1)$ está asociada a las siguientes situaciones en diferentes contextos:

a) El producto de un número por su consecutivo.
b) El área de un rectángulo cuyo largo mide uno más que su ancho.
c) La regla que relaciona el número de puntos que hay en el lugar n de acuerdo con la secuencia de la siguiente figura:



Los diferentes usos de letras en álgebra

También preocupados por los significados y la interpretación de las expresiones algebraicas Ursini y Trigueros (2003), han señalado la importancia de la comprensión de la idea de variable. Estas investigadoras señalan los tres usos básicos que tienen las variables en el álgebra escolar: como incógnita, como número general y en una relación funcional). A través del Modelo 3UV, describen los aspectos que caracterizan cada uno de estos usos y el actuar del estudiante cuando realiza trabajo algebraico, en relación a estos tres usos. Relacionan además cada uso con tres aspectos del álgebra: la interpretación de los símbolos algebraicos, la manipulación algebraica y la conceptualización y representación algebraica (Tabla 1.1)

Tabla 1.1. Categorización del concepto de variable. (Ursini y Trigueros, 2003. P. 9)

	Conceptualización y Representación	**Interpretación de Símbolos**	**Manipulación**
Como incógnita especifica	De una incógnita en una situación particular y/o en una ecuación	Como una incógnita especifica en ecuaciones	Factorizar simplificar, desarrollar, trasponer o balancear una ecuación
Como número general	De un número general involucrado en métodos generales o reglas deducidas de patrones numéricos y/o geométricos y/o familias de problemas similares	Como una generalización en expresiones algebraicas o en la expresión de métodos generales	Factorizar, simplificar y desarrollar para transformar expresiones
Como relación funcional	De una relación funcional (correspondencia y variación) a través de tablas, graficas o representaciones analíticas	Que representan correspondencia y variación conjunta en representaciones analíticas, tablas y gráficas.	Factorizar, simplificar, desarrollar para transformar una expresión, sustituir valores para determinar intervalos de variación, valores máximo/mínimo y comportamiento global de las relaciones

+

El Modelo 3UV brinda, por ejemplo, una perspectiva para analizar el quehacer del estudiante cuando se enfrenta a problemas algebraicos.

Así, por ejemplo, al analizar qué se necesita para resolver un problema como el siguiente:

> Dentro de un año, Amanda tendrá el triple de edad que tenía hace nueve años.
> ¿Qué edad tiene Amanda ahora?

Ursini et al (2005; p. 92)

se señala como necesario:

- Reconocer e identificar en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado.
- Usar una letra para representar la cantidad desconocida.
- Simbolizar las relaciones contenidas en el enunciado produciendo una expresión del tipo: $x+1=3(x-9)$
- Interpretar la variable como incógnita
- Manipular la variable simbólica para determinar el valor de la incógnita

Como se observa, durante la resolución de un problema se hace uso de representaciones algebraicas, además, para obtener el valor de la incógnita hay que hacer uso de procesos estructurales algebraicos.

Este modelo 3UV, es considerado en los planes de estudio actuales, en donde se propone que:

> los alumnos profundicen en el estudio del álgebra con los tres usos de las literales, conceptualmente distintos: como número general, como incógnita y en relación funcional. Este énfasis en el uso del lenguaje algebraico supone cambios importantes para ellos en cuanto a la forma de generalizar propiedades aritméticas y geométricas.

(SEP, 2006; pp. 35)

El aspecto estructural del álgebra

En el álgebra escolar el aspecto estructural es trascendental, ha sido una meta su aprendizaje, ya en recientes propuesta se presentan actividades que le den más significado su aprendizaje. (Aproches to algebra Bernardz y Kieran 1996)

Para Mulligan & Mitchelmorel (2009), una estructura significa la forma en la cual varios elementos son organizados o relacionados, por ejemplo, la estructura de una secuencia de números puede ser expresada en una fórmula algebraica:

2,4,6,8,10, …, 2n

1,3,5,7,9 …, 2n-1

Las formulas pueden ser explicitadas o sólo interiorizadas en forma de estructuras mentales por los estudiantes, las cuales les permitirán dar respuesta a una pregunta relacionada o ser integrada durante el proceso de la resolución de un problema.

Así el estudiante va construyendo estructuras más complejas como las procedimentales, por ejemplo la suma de fracciones:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

En donde además los procesos inversos cobran importancia, por ejemplo, el resultado obtenido en la suma referida pude expresarse en las fracciones parciales que la generaron:

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$$

Que al simplificar obtenemos las fracciones originales

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

Así es una de las formas como las estructuras, propician el aspecto operativo y transformacional del álgebra.

Investigadores que han profundizado en el aspecto estructural del álgebra coinciden en mencionar que las estructuras matemáticas tiene un papel sustancial en matemáticas y en álgebra en particular (Kieran, 1992; Sfard, 1992). Además, Dreyfus y Hoch (2004), comentan que el haber adquirido ciertas competencias en el uso y reconocimiento de las estructuras algebraicas para realizar manipulaciones, ha sido considerado como un éxito en el álgebra. Esto se muestra, por ejemplo, cuando el estudiante es capaz de reconocer y transformar $x-1$ en $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$, o cuando en la relación $y=3x+2$, reconoce que el valor de y depende de un valor asignado a *x*, *y* es capaz de operar el valor asignado a *x* para obtener el valor de *y*. Estos investigadores, citando a Zorn (2002), señalan que:

> *entender matemáticas básicas profundamente significa pericia al detectar, reconocer y aprovechar las estructuras, para realizar útiles conexiones entre diferentes estructuras.*
>
> (Dreyfus y Hoch, 2004; p.152)

El aspecto deductivo del álgebra, presente en algunos de los desarrollos algebraicos de los libros de texto de secundaria y bachillerato, y al parecer considerado una competencia necesaria, requiere también del uso y reconocimiento de estructuras algebraicas. Esto se observa, por ejemplo, cuando se deduce la fórmula general de la ecuación de segundo grado, o cuando se enfrentan otros procesos deductivos algebraicos, por ejemplo, en el contexto de la física, como el siguiente:

> En un movimiento uniformemente acelerado, la distancia recorrida en el tiempo $t=t_1$ con una velocidad inicial v_0 está dado por:

$$d = v_0 t_1 + \tfrac{1}{2} a t_1^2 \qquad (\text{ I })$$

donde la aceleración *a* es:

$$a = \frac{F}{m} \qquad (\text{II})$$

en el transcurrir del tiempo $v_1 = v_0 + at_1$, de la cual despejando t_1 obtenemos:

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a}$$

que al sustituir en la ecuación (I)

$$d = v_0\left(\frac{v_1 - v_0}{a}\right) + \tfrac{1}{2} a \left(\frac{v_1 - v_0}{a}\right)^2$$

desarrollando:

$$d = \frac{v_0 v_1}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{v_1^2}{2a} - \frac{v_0 v_1}{a} + \frac{v_0^2}{2a}$$

al reducir términos semejantes:

$$d = \frac{v_1^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a}$$

sustituyendo (II)

$$d = \frac{m}{2F} v_1^2 - \frac{m}{2F} v_0^2$$

o bien

$$Fd = \tfrac{1}{2} m v_1^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2$$

Significa que la fuerza *F* aplicada durante un recorrido *d* produce un cambio en la cantidad $\tfrac{1}{2} m v^2$.

En otras asignaturas también se observa procesos como este, en los cuales se demanda relacionar diferentes expresiones, detectar que mediante el despeje de una variable hay una relación útil para lograr una nueva relación, lo cual requiere de un entendimiento de los procesos estructurales, específicamente transformaciones algebraicas y la idea de equivalencia.

Precisando el término *sentido estructural*, Hoch (2003; p. 167) lo emplea como:

> *una colección de habilidades, aparte de las habilidades manipulativas, las cuales capacitan a los estudiantes para hacer mejor uso de las técnicas algebraicas previamente aprendidas.*

Capítulo 2

El álgebra en el bachillerato.

Como un antecedente al algebra del bachillerato, revisamos la intenciones para el aprendizaje del álgebra en el nivel de secundaria (SEP, 2006). Dentro del enfoque para el aprendizaje de las matemáticas basado en competencias.

Intenciones para el aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria (2006)

En el documento: Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudios (SEP, 2006), se caracteriza las competencias, haciendo énfasis en el papel de la adquisición de conocimientos y su movilización:

> *Es necesaria una educación básica que contribuya al desarrollo de competencias amplias para mejorar la manera de vivir y convivir en una sociedad cada vez más compleja. Esto exige considerar el papel de la adquisición de los saberes socialmente construidos, la movilización de saberes culturales y la capacidad de aprender permanentemente para hacer frente a la creciente producción de conocimiento y aprovecharlo en la vida cotidiana.* (p.11)
>
> *Una competencia implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias del impacto de ese hacer (valores y actitudes). En otras palabras, la manifestación de una competencia revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en un contexto dado*. (*p. 11)*

De acuerdo con este documento una competencia manifiesta conocimiento, habilidades, actitudes y valores.

Además se presenta la noción de competencia matemática, como un ir más allá de los contenidos, cuando se dice:

> …se intenta ir más allá de los aprendizajes esperados y, por lo tanto, de los contenidos que se estudian en cada grado; se trata de lo que algunos autores llaman competencias matemáticas y cuyo desarrollo deriva en conducirse competentemente en la aplicación de las matemáticas o en ser competente en matemáticas. (pp. 34)

En este nivel educativo se hace referencia a 4 competencias para matemáticas: *el planteamiento y la resolución de problemas, la argumentación, la comunicación y el manejo de técnicas*

La enseñanza del algebra en el bachillerato

El último curso de álgebra elemental, en nuestro sistema educativo, tradicionalmente ha sido en el bachillerato, sin embargo, actualmente en algunas facultades han implementado un curso de algebra elemental en su primer semestre, argumentando que los estudiantes muestran debilidades en su empleo, las cuales han sido manifestadas en los exámenes de ingreso y durante los primeros cursos de matemáticas, en el nivel superior.

La enseñanza del algebra en bachillerato es presentada en un enfoque de competencias matemáticas

Las competencias en Educación Media Superior (2008)

El enfoque basado en competencias se presenta también en el documento *Reforma Integral de la Educación Media Superior* (SEP, 2008), en el que se adopta la definición de competencia de la ANUIES y se hace énfasis en el papel que juega el conocimiento como recurso para las competencias:

> *El enfoque de competencias considera que los conocimientos por sí mismos no son lo más importante sino el uso que se hace de ellos en situaciones específicas de la vida personal, social y profesional. De este modo, las competencias requieren una base sólida de conocimientos y ciertas habilidades, los cuales se integran para un mismo propósito en un determinado contexto. Los planes de estudio que adopten el enfoque en competencias no menospreciarán la adquisición de conocimientos, pero sí enfatizarán su importancia como un recurso fundamental en la formación de los estudiantes.* (p. 51)

En los niveles de educación Secundaria y Medio Superior, van más allá de presentar definiciones, se hacen caracterizaciones de lo que se entenderá por competencias, en las cuales se hace explícita una relación entre conocimientos y competencias: *el conocimiento como necesario para producir competencias.* En lo referente al nivel Medio Superior se precisa: "*los conocimientos por sí mismos no son lo más importante sino el uso que se hace de ellos en situaciones específicas de la vida personal, social y profesional".*

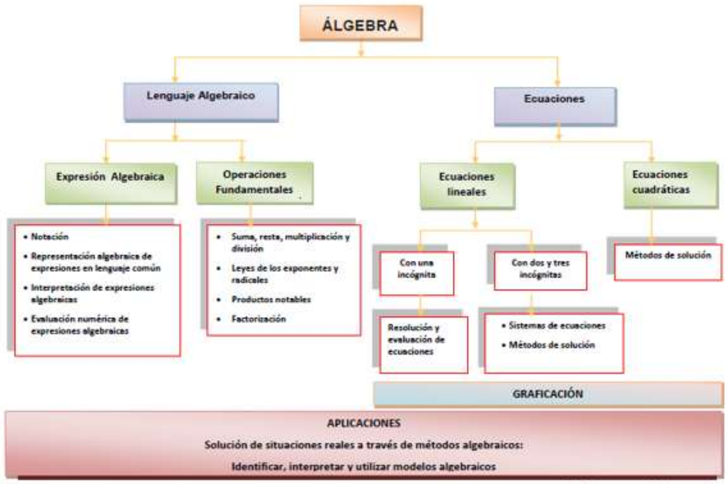
Se han estado presentando varios documentos en donde se especifican competencias, como es el caso de las competencias disciplinares básicas para matemáticas (SEP, 2009), donde se enuncian, para bachillerato, las 8 siguientes:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Sin embargo, debido a la generalidad como se presentan, sin duda requerirán de análisis para la formulación de propuestas de enseñanza más concretas, ya que las matemáticas contienen componentes formativos y propedéuticos muy específicos.

En relación al tema que nos ocupa, en el siguiente cuadro presentamos el programa de estudio del curso de álgebra, de acuerdo al enfoque en competencias, proclamado en forma oficial.

2.7. Estructuras conceptuales



2. Estructura de la materia

Figura # COSNET

En este cuadro podemos se observa una estructura que presenta los contenidos clásicos de álgebra en el bachillerato. Finalmente, no hay un cambio con los programas anteriores, solo que se sugiere hacer aplicaciones del algebra resolviendo situaciones reales a través de métodos algebraicos.

Como muestra, presentamos una lista de contenidos del álgebra, como tradicionalmente han sido presentados.

Lista de contenidos. Algebra, primer semestre

Lenguaje algebraico, definiciones.
Traducción de lenguaje común al lenguaje algebraico
Evaluación de expresiones algebraicas
Operaciones algebraicas suma, resta multiplicación y división.
Operaciones con potencias (leyes de exponentes)
Productos notables
Factorización
Operaciones con fracciones
Ecuaciones de primer grado con 1 y 2 incógnitas
Resolución de problemas
La ecuación general de segundo grado
Resolución de problemas

Capítulo 3

Diseño de Investigación

Esa conformado por 100 estudiantes de sexto semestre del turno matutino, que cursaron el bachillerato de Septiembre 2010 a Julio de 2013, en el CBTIS 149 de la ciudad de Morelia. Estos estudiantes ya habían estudiado los cursos de matemáticas: Algebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, actualmente casi concluían Probabilidad y Estadística.
Cursaron un bachillerato bivalente, los participantes en esta investigación eran estudiantes de las especialidades de: Informática, Laboratorista Clínico y Puericultura
La población de estudiantes de sexto semestre en el turno matutino, en la generación en que se realizó el estudio fue de 320, de los cuales sólo a 298, les fue aplicada la Prueba Enlace versión 2013, sus resultados fueron los que presentamos a continuación:

Clave de Centro: 16DCT0149Z. Nivel de Dominio en Matemáticas				
Porcentaje de alumnos				
Insuficiente	Elemental	Bueno	Excelente	Número de evaluados
0.7	6.7	23.2	69.8	298

201.175.44.204/Enlace/Resultados2013/MediaSuperior201

De los centros de nivel Medio Superior que participarán en esta prueba, de acuerdo a la lista revisada, este plantel fue el que obtuvo el más alto nivel de excelencia.
Los Centros de Bachillerato Tecnológico Industrial y de servicios (CBTIS), son planteles centralizados y sus planes de estudio dependen de COSDAC. A partir de la Reforma Integral a la Educación Media Superior (RIEMS) de la SEP, 2008. El enfoque para la enseñanza de las matemáticas, fue declarado por competencias.
Instrumento de observación
Consiste de un cuestionario conformado con una selección de reactivos de álgebra, con tópicos que tradicionalmente contienen los textos que se emplean en bachillerato, por ejemplo el libro de algebra de CONAMAT de Editorial Person, que es el empleado por la mayoría de los integrantes de la academia de matemáticas de este plantel.
La poca precisión que se hace acerca del nuevo enfoque, en los documentos oficiales, lo convierte en un curso como tradicionalmente se ha trabajado, donde las creencias de los profesores será determinante en su planeación de clase. Así se convierte en un curso denso en contenidos y el trabajo de los estudiantes y el profesor se centra en una ejercitación de

los contenidos, donde el real enfoque de su aprendizaje consiste en la práctica de procedimientos y algoritmos de las operaciones algebraicas.

La mencionada reforma, para las autoridades administrativas ha consistido en un cambio en los formatos de la planeación que incluyan “secuencias didácticas”, (anexo 1) dichos formatos son proporcionados a los profesores deben sujetar su planeación a estos en forma absoluta, ya que de no ser así son rechazados. Siendo un requisito cada inicio de semestre. El llenado de los formatos es considera la evidencia de la reforma, el que los profesores realizan actividades programadas con los estudiantes con los tres momentos: apertura, desarrollo y cierre. Sin embargo su aplicación se deja a criterio de los docentes ya que no existe una supervisión o seguimiento de los resultados de las llamadas “secuencias didácticas”.

Instrumentos Empleados

Si revisamos los instrumentos de evaluación del semestre, estos se enfocan a la adquisición de habilidades manipulativas de los temas de algebra. (Anexo x2). Se eligieron 50 reactivos de los cuales seleccionamos 14, que no fueran de fácil solución, ni tan difíciles que ni los intentarán resolver.

A continuación mostramos los reactivos seleccionados y describimos, tema correspondiente y habilidades y conocimientos

Tabla. Descripción de los reactivos empleados

REACTIVOS SELECCIONADOS	TEMA Y COMPETENCIA	HABILIDADES Y CONOCIMIENTOS
I. Simplifica de tal manera que no haya exponentes negativos $\left(\frac{15x^{-1}y^{2}}{5xy^{-4}}\right)^{-1}$	Tema: Leyes de exponentes enteros Reconocimiento y uso de leyes de exponentes para transformar una expresión.	Reconocimiento del significado de potencia negativa y las transformaciones que implica. Además usar eficazmente las leyes de exponentes para conseguir el objetivo de hacer una representación equivalente con potencias positivas. $a^{-1}=\frac{1}{a}$ $(\frac{a}{b})^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$ $(a^{n})^{m}=a^{nm}$
II. Realiza los siguientes productos notables 1. $\left(3x-\sqrt{y}\right)^{2}=$	Tema: productos notables, desarrollo de un binomio al cuadrado y cubo	Reconocer un producto notable y recordar su regla de desarrollo o, en su defecto, reconocer un producto repetido y realizarlo. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

2. $\left(\frac{1}{5}-\frac{5a}{2}\right)^3=$	Reconocimiento de la estructura de: binomio al cuadrado y al cubo, su desarrollo.	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ $(a^n)^m=a^{nm}$ $(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$
III. Factoriza las siguientes expresiones 1. $16+40x^2+25x^4=$ 2. $x^2-18+7x=$ 3. $ax-bx+b-a-by+ay=$	Tema: Factorización. *Trinomio cuadrado perfecto *Trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$, por agrupación de términos. *Factorización por agrupación Reconocimiento de estructuras factorizables de expresiones de segundo y primer grado y su transformación de para representar en forma equivalente en factores.	Recordar que factorizar significa representar la expresión dada en un producto de dos o más factores. Ejercicio 1 Reconocer un trinomio cuadrado perfecto y expresarlo como un binomio al cuadrado o un producto de binomios repetido. $x^2-2ax+a^2=(x-a)(x-a)$ $=(x-a)^2$ Ejercicio 2 Reconocer un trinomio de la forma: x^2+Bx+C factorizable, observar el orden de los términos y ordenarlo. $x^2+ab+(a+b)x \quad se\ ordena\ como$ $x^2+(a+b)x+ab$ Para factorizar como: $(x+a)(x+b)$ Ejercicio 3 Advertir que en cada par de términos existe un factor común, factorizarlo y después advertir que cada "binomio factor" es un factor común y factorarlo, o reconocer en cada tres términos un factor común y factorizarlo. $ax-bx-a+b+ay-by$ $=x(a-b)-(a-b)+y(a-b)$ $=(a-b)(x-1+y)$ O bien: $ax-bx-a+b+ay-by$ $=a(x-1+y)-b(x-1+y)$ $=(a-b)(x-1+y)$
IV. Realiza las operaciones indicadas y simplifica lo más que puedas.	Tema: Operaciones con fracciones algebraicas. Suma y división Reconocimiento de estructuras de suma y	Ejercicio 1 Reconocer la operación suma de fracciones, en el caso particular aplicar el procedimiento determinando el mcm, o aplicando el procedimiento

$\frac{2c-d}{c^2d}+\frac{c+d}{cd^2}=$ $\frac{x^3-x}{2x^2+6x}\div\frac{5x^2-5x}{2x+6}=$	división de fracciones algebraicas y los procesos correspondientes para su transformación y simplificación.	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ Tener la habilidad de reconocer términos semejantes en el numerador para simplificar. Además una adecuada aplicación de leyes de exponentes. Ejercicio 2 Para el segundo ejercicio deben recordar el procedimiento para dividir dos fracciones $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ Además reconocer que los polinomios del numerador y denominador, en este caso, tienes factores comunes para realizar simplificaciones.
V. Simplifica la expresión algebraica $\frac{\frac{2}{y}+\frac{1}{2y}}{y+\frac{y}{2}}=$	Tema: Fracciones complejas Reconocimiento de una estructura de división de sumas de fracciones y el uso de recursos para su simplificación	Reconocer que hay una suma de fracciones en el numerador y denominador que se deben realizar, para proseguir con la división de las fracciones resultantes, la estructura compleja del ejercicio es: $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}+\frac{g}{h}}$ Después de sumar las fracciones contenidas en el numerador y denominador simplificar una fracción cuya estructura es de la forma $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{AD}{BC}$
VI. Resuelve las siguientes ecuaciones: $\frac{7x-1}{3}-\frac{6-2x}{2x}=\frac{1+7x^2}{3x}$ $\sqrt{x}=x-2$ $6(x-5)-(x-5)^2=8$	Tema: ecuaciones, Primer grado, segundo grado (las cuales requieren transformaciones) Reconocimiento una ecuación y ejecución de procesos correspondientes para su transformación y la determinación del o	Conocer el significado de ecuación y de su solución. Ejercicio 1. Identificar y realizar la operación de suma de fracciones cuya estructura es: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, en un proceso encaminado al despeje de la incógnita. Ejercicio 2. Reconocer la necesidad de transformar la expresión elevando al

	los valores que hacen verdadera la igualdad	cuadrado la igualdad para escribirla con potencias enteras, desarrollar el binomio al cuadrado de un lado de la igualdad para obtener una ecuación de la forma: $$ax^2+bx+c=0$$ Recordar la(s) forma(s) de solución: i) Formula general: $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ii) Factorización: $$ax^2+bx+c=(dx+n)(ex+m)$$ Ejercicio 3. Reconocer la estructura de una ecuación de segundo grado factorizable $$6(x-5)-(x-5)^2=8$$ $$6(z)-(z)^2=8$$ La cual al ordenar en forma decreciente se obtiene $z^2-6z+8=0$ que es posible resolver por factorización $$(z-2)(z-4)=0$$ De donde: $$z_1=2 \quad por\ lo\ que$$ $$x-5=2\ \ para\ obtener\ x=7$$ $$z_2=4, \qquad por\ lo\ que$$ $$x-5=4\ para\ obtener\ x=9$$ O bien, desarrollando los binomios de la expresión: $$6(x-5)-(x-5)^2=8$$ Que al simplificar queda: $$x^2-16x+63=0$$ Resolviendo $$x_1=9\ \ y\ \ x_2=7$$
VII. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $$4x-4y=12$$ $$-6x-3y=24$$	Tema: resolución de sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Reconocimiento de estructuras y ejecución de los axiomas de la igualdad	Recordar que resolver un sistema de ecuaciones consiste en obtener los valores de las incógnitas. Recordar alguno de los métodos de solución: eliminación, sustitución, igualación o determinantes y ponerlo en práctica.

	correspondientes para su transformación	
VIII. Resuelve los siguientes problemas utilizando Algebra 1. La edad de Enrique es la mitad de la de Pedro; la de Juan el triple de la de Enrique y la de Marco el doble de la de Juan. Si las cuatro edades suman 132 años, ¿qué edad tiene cada uno?	Tema: Resolución de problemas Uso de representaciones algebraicas y de los procesos correspondientes para la solución de una ecuación de primer grado.	Leer correctamente, hacer una correcta interpretación, para hacer una representación en lenguaje algebraico de la relación entre las edades. Hacer un planteamiento adecuado del problema mediante una ecuación de primer grado. Resolución de una ecuación de primer grado.

Aplicación de instrumentos

Fueron aplicados en una sola sesión de dos horas, durante su clase de matemáticas y aplicado por su mismo maestro, se logró que respondieran con dedicación el cuestionario. Sin embargo el tiempo que tardaron fue de 45 a 70 minutos

Se pidió no borrar sus intentos, si se daban cuenta de que se habían equivocado, sólo tachar lo que habían trabajado. Lo que permitió hacer interpretaciones de sus procesos.

Se procedió a revisar las respuestas, anotando la frecuencia de las correctas por reactivo y después los intentos comentamos con mi asesor las respuestas para hacer interpretaciones e ir estableciendo categorías, para procesar las respuestas en hojas de Excel, e la siguiente forma:

Correcto: 1

Incorrecto: 2

No contesta: 0

Capítulo 4

Resultados de la investigación

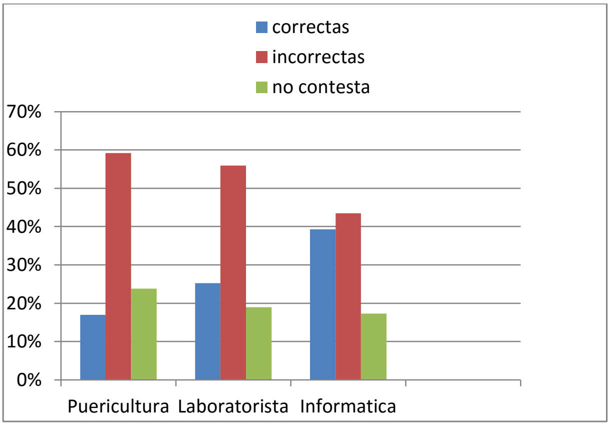
Tabla de Resultados

En las tres categorías de respuestas en que se concentró la información el resultado para los 100 estudiantes está representada en la siguiente gráfica:

est	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	correctas	incorrect	No Contes	%correcta	%incorrect	%No Contes
L33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	0	12	2	1	80.00	13.33	6.67
17i	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	2	1	1	12	3	0	80.00	20.00	0.00
26i	2	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	12	3	0	80.00	20.00	0.00
L6	1	1	1	2	1	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	10	5	0	66.67	33.33	0.00
7i	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2	0	2	1	1	1	10	4	1	66.67	26.67	6.67
P4	2	1	2	1	1	2	1	1	1	0	2	2	1	1	1	9	5	1	60.00	33.33	6.67
L5	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	1	0	9	5	1	60.00	33.33	6.67
15i	2	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	1	2	2	9	6	0	60.00	40.00	0.00
16i	2	1	1	1	1	1	0	1	1	0	2	2	2	1	1	9	4	2	60.00	26.67	13.33
24i	2	1	1	1	1	1	1	1	0	2	2	2	2	1	1	9	5	1	60.00	33.33	6.67
22i	0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	0	2	0	8	4	3	53.33	26.67	20.00
P1	2	1	2	1	1	2	1	1	1	2	2	2	2	1	0	7	7	1	46.67	46.67	6.67
P21	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	2	2	0	7	7	1	46.67	46.67	6.67
P37	2	1	1	1	1	0	2	1	2	2	1	1	2	2	0	7	6	2	46.67	40.00	13.33
L14	2	1	1	2	2	2	1	1	1	2	1	2	2	1	2	7	8	0	46.67	53.33	0.00
L21	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	7	8	0	46.67	53.33	0.00
18i	2	2	1	1	1	1	2	1	2	0	0	2	1	1	0	7	5	3	46.67	33.33	20.00
L26	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	0	0	6	7	2	40.00	46.67	13.33
6i	2	1	1	2	1	1	2	0	2	2	2	2	2	1	1	6	8	1	40.00	53.33	6.67
11i	0	1	1	1	1	2	0	0	1	0	2	2	2	1	0	6	4	5	40.00	26.67	33.33
12i	2	1	1	1	1	2	2	2	0	2	2	2	2	1	1	6	8	1	40.00	53.33	6.67
20i	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1	6	9	0	40.00	60.00	0.00
21i	0	2	2	1	1	2	2	1	2	2	0	2	1	1	1	6	7	2	40.00	46.67	13.33
P2	0	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	5	9	1	33.33	60.00	6.67
P6	2	1	1	2	1	2	2	1	2	0	2	2	2	1	2	5	9	1	33.33	60.00	6.67
P19	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	5	10	0	33.33	66.67	0.00
P27	2	1	1	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2	1	0	5	9	1	33.33	60.00	6.67
P38	2	1	1	0	1	0	0	0	2	0	2	2	2	1	1	5	5	5	33.33	33.33	33.33
L2	2	2	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	1	5	10	0	33.33	66.67	0.00
L7	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	1	2	5	10	0	33.33	66.67	0.00
L15	2	1	2	1	2	0	2	2	1	2	2	2	2	1	1	5	9	1	33.33	60.00	6.67
L17	0	1	1	0	1	2	2	1	0	2	2	2	0	1	0	5	5	5	33.33	33.33	33.33
L24	2	2	0	2	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	5	9	1	33.33	60.00	6.67
L32	0	1	1	2	1	0	2	2	1	2	2	2	2	1	0	5	7	3	33.33	46.67	20.00
9i	2	1	0	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	0	5	8	2	33.33	53.33	13.33
14i	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	2	0	2	2	5	9	1	33.33	60.00	6.67
19i	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	1	1	5	10	0	33.33	66.67	0.00
23i	2	1	1	1	1	1	0	0	0	2	2	2	2	0	0	5	5	5	33.33	33.33	33.33
27i	2	0	0	1	1	2	2	1	1	2	2	0	2	1	2	5	7	3	33.33	46.67	20.00
P14	1	1	2	2	1	2	2	2	1	0	2	2	2	0	0	4	8	3	26.67	53.33	20.00
L4	2	1	2	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	0	4	10	1	26.67	66.67	6.67
L19	0	1	2	2	1	1	2	1	2	0	2	0	2	2	0	4	7	4	26.67	46.67	26.67
L29	2	1	2	0	1	2	2	2	2	0	2	1	2	1	0	4	8	3	26.67	53.33	20.00
L30	1	1	1	2	2	2	2	2	1	0	2	2	2	2	0	4	9	2	26.67	60.00	13.33
1i	0	1	1	0	0	0	2	1	1	0	0	2	2	2	0	4	4	7	26.67	26.67	46.67
2i	0	1	0	1	1	1	2	2	2	0	2	2	2	2	2	4	8	3	26.67	53.33	20.00
4i	0	1	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	2	4	10	1	26.67	66.67	6.67
25i	0	2	2	0	1	1	2	2	2	2	0	2	2	1	1	4	8	3	26.67	53.33	20.00
P3	2	1	2	2	1	0	2	2	2	2	2	1	2	2	2	3	11	1	20.00	73.33	6.67

est	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	correctas	incorrect	No Contes	%correcta	%incorrect	%No Contes
P18	2	1	1	2	1	2	2	2	2	0	0	0	2	2	0	3	8	4	20.00	53.33	26.67
P22	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	0	3	11	1	20.00	73.33	6.67
P25	0	0	0	2	1	0	2	0	1	2	0	0	2	1	2	3	5	7	20.00	33.33	46.67
L1	2	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	3	10	2	20.00	66.67	13.33
L3	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	0	3	11	1	20.00	73.33	6.67
L8	2	1	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	0	3	11	1	20.00	73.33	6.67
L11	2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	0	0	0	1	2	3	9	3	20.00	60.00	20.00
L22	0	1	2	2	1	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	10	2	20.00	66.67	13.33
8i	2	1	1	0	0	2	2	0	0	0	2	2	0	1	0	3	5	7	20.00	33.33	46.67
13i	2	2	0	1	1	2	2	1	2	2	0	2	2	2	0	3	9	3	20.00	60.00	20.00
P9	0	2	2	2	1	1	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	11	2	13.33	73.33	13.33
P11	0	2	0	2	1	0	2	1	0	0	2	2	2	2	0	2	7	6	13.33	46.67	40.00
P13	2	1	2	0	2	0	2	2	1	2	2	2	2	2	0	2	10	3	13.33	66.67	20.00
P24	2	0	0	2	1	2	2	2	1	2	0	0	2	0	0	2	7	6	13.33	46.67	40.00
P30	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	0	2	12	1	13.33	80.00	6.67
P31	2	2	0	2	1	0	2	0	2	0	2	2	2	1	0	2	8	5	13.33	53.33	33.33
P32	2	1	0	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	11	2	13.33	73.33	13.33
P34	0	2	2	2	1	0	1	2	2	0	2	0	2	0	0	2	7	6	13.33	46.67	40.00
P35	0	2	2	0	2	2	1	1	0	0	0	2	2	2	0	2	7	6	13.33	46.67	40.00
P36	0	2	2	0	1	0	2	1	0	0	2	2	2	2	0	2	7	6	13.33	46.67	40.00
P39	0	1	2	0	0	0	2	1	2	0	2	2	2	2	2	2	8	5	13.33	53.33	33.33
L9	2	2	2	2	2	2	0	2	2	2	2	2	1	1	2	2	12	1	13.33	80.00	6.67
L20	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	13	0	13.33	86.67	0.00
L27	0	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	0	2	0	2	10	3	13.33	66.67	20.00
3i	0	1	2	0	1	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	2	4	9	13.33	26.67	60.00
5i	0	1	2	2	0	0	2	1	0	2	2	2	0	0	0	2	6	7	13.33	40.00	46.67
10i	2	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	13	0	13.33	86.67	0.00
P7	2	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	1	0	1	8	6	6.67	53.33	40.00
P10	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	1	13	1	6.67	86.67	6.67
P12	0	2	0	2	1	0	0	0	2	0	2	2	2	2	2	1	8	6	6.67	53.33	40.00
P15	0	2	2	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	1	10	4	6.67	66.67	26.67
P20	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	0	2	2	2	1	1	7	7	6.67	46.67	46.67
P23	0	2	2	1	2	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	1	5	9	6.67	33.33	60.00
P26	2	1	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	1	12	2	6.67	80.00	13.33
P28	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	1	13	1	6.67	86.67	6.67
P29	2	2	2	2	0	2	2	2	2	0	0	0	0	2	1	1	9	5	6.67	60.00	33.33
L10	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	1	13	1	6.67	86.67	6.67
L12	0	0	0	2	1	2	2	2	2	2	2	2	0	2	2	1	10	4	6.67	66.67	26.67
L16	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	2	1	2	1	4	10	6.67	26.67	66.67
L23	2	2	2	1	2	0	2	0	2	2	2	2	2	2	0	1	11	3	6.67	73.33	20.00
L25	2	1	2	2	2	0	0	2	0	0	2	2	0	2	0	1	8	6	6.67	53.33	40.00
L28	0	1	2	2	2	0	2	2	2	0	0	2	2	0	0	1	8	6	6.67	53.33	40.00
L31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	1	0	1	2	12	6.67	13.33	80.00
P5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	15	0	0.00	100.00	0.00
P8	2	0	0	0	0	0	2	2	2	2	0	2	2	2	0	0	8	7	0.00	53.33	46.67
P16	2	2	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	0	2	0	0	12	3	0.00	80.00	20.00
P17	2	2	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	13	2	0.00	86.67	13.33
P33	2	2	2	0	0	0	2	2	2	0	0	2	0	2	0	0	8	7	0.00	53.33	46.67
P40	2	2	2	0	0	0	0	2	2	2	0	2	2	2	0	0	9	6	0.00	60.00	40.00
L13	0	2	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	0	8	7	0.00	53.33	46.67
L18	0	2	2	0	0	2	0	0	0	2	2	2	2	2	0	0	8	7	0.00	53.33	46.67

Además se concentró la información en hojas de Excel por grupo (Puericultura, Laboratorista e Informática). Por lo cual, se observa que existe una notable diferencia en el rendimiento por especialidad, como se observa en el siguiente grafico que muestra los resultados de acuerdo a la especialidad que estudian:



Puericultura (n=40)	**Laboratorista Clínico (n=33)**	**Informática: (n=27)**
Correctas: 17% Incorrectas: 59.17% No contestada: 23.83%	Correctas: 25.25% Incorrectas: 55.93% No contestado: 18.97%	Correcta 39.26% Incorrecta 43.46% No Contesta: 17.28%

Análisis de Resultados

Análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes

En este apartado se comentan los porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y no contestadas de los reactivos, además se analiza y describen los errores de los estudiantes por medio de la figura del trabajo que realizó el estudiante.

REACTIVO I

Simplifica de tal manera que no haya exponentes negativos:

$$\left(\frac{15x^{-1}y^{2}}{5xy^{-4}}\right)^{-1}$$

Respuesta esperada: $\frac{x^2}{3y^6}$, o cualquier otra que no contenga exponentes negativos

Resultados:

6 % lo contesto correctamente

32% no contestaron

62% lo contesto incorrectamente

Es un ejercicio de dificultad para la mayoría de los estudiantes, sólo 6% logran concluirlo en forma adecuada y el 32% ni siquiera lo intentan.

Del 62% de respuestas incorrectas, 21% muestran contar con ciertas nociones de las leyes de exponentes requeridas, ya que la aplican correctamente en alguna parte del proceso, sin embargo no logran la respuesta correcta debido a errores durante su uso, veamos algunos ejemplos:

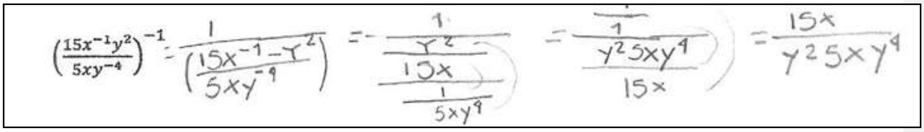


Figura 1. Trabajo de Lizbeth reactivo 1

Lizbeth aplica correctamente el inverso a la fracción del paréntesis, pero ya no así en el segundo paso, donde al factor 15x-1 le aplica la potencia negativa a todo el término incluyendo el 15, lo mismo hace con el factor 5xy-4, cuando el exponente negativo afecta sólo a las literales.

En la figura 2, se muestra el trabajo de Eduardo, en el primer paso de su proceso aplica correctamente la potencia al cociente, pero ya en el segundo paso el exponente (-1), lo aplicó sólo a las variables y no a los coeficientes, ni a la x del denominador.

$$\left(\frac{15x^{-1}y^2}{5xy^{-4}}\right)^{-1} = \frac{(15x^{-1}y^2)^{-1}}{(5xy^{-4})^{-1}} = \frac{15xy^{-2}}{5xy^4} = \frac{\frac{15}{xy^2}}{5xy^4} = \frac{15}{5x^2y^8}$$

Figura 2. Trabajo de Eduardo reactivo 1

En la figura 3, se observa como Rebeca aplica correctamente la propiedad del inverso a la fracción, pero ya en el tercer paso de su secuencia, aunque aplica correctamente leyes de exponentes para convertir a potencias positivas las literales, también lo aplica el inverso al 15 del denominador, cuando este ya no está afectado por el exponente negativo, además en el resultado final se observa un error en la multiplicación de las x en el numerador.

$$\left(\frac{15x^{-1}y^2}{5xy^{-4}}\right)^{-1} \frac{1}{\frac{15x^{-1}y^2}{5xy^{-4}}} = \frac{5xy^{-4}}{15x^{-1}y^2} = \frac{5x\,15x}{y^2y^4} = \frac{75x}{y^6}$$

Figura 3. Trabajo de Rebeca reactivo 1

Veamos el trabajo de Daniela en la figura 4, inicia aplicando el exponente -1, al denominador y numerador adecuadamente, en el siguiente paso de su proceso también aplica correctamente el exponente invirtiendo la expresión numerado a denominador y viceversa, pero ya es en el último paso en que comete errores graves respecto a las leyes de los exponentes, pues hace la cancelación de la variable x y escribe la y con exponente positivo.

$$\left(\frac{15x^{-1}y^2}{5xy^{-4}}\right)^{-1} = \frac{(15x^{-1}y^2)^{-1}}{(5xy^{-4})^{-1}} = \frac{5\cancel{x}y^{-4}}{15x^{-1}y^2} = \frac{1}{3}y^2$$

Figura 4. Trabajo de Daniela reactivo 1

Un 41% de las respuestas incorrectas, no presentan característica común que definiera sus errores, como por ejemplo en la figura 5, Jazmin en cuya respuesta podría interpretarse, que ignora el signo de los exponentes y los suma.

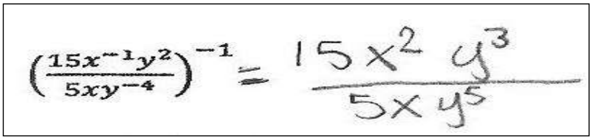


Figura 5. Trabajo de Jazmin reactivo 1

Vemos también el trabajo de Vanesa, figura 6, que aplica el exponente -1 correctamente a las letras del numerado y denominador, y cambia de signo los dos coeficientes de la fracción. Finalmente vuelve a comete otro error al simplificar las variables.

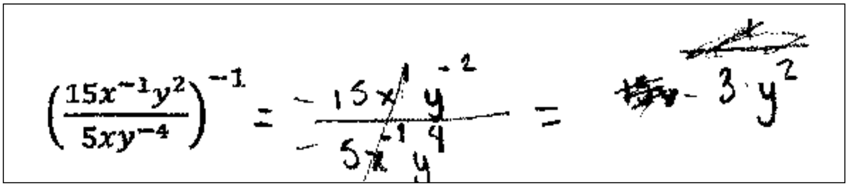


Figura 6. Trabajo de Vanesa reactivo 1

Los estudiantes que intentan resolver sin éxito el ejercicio, se centran en aplicar el exponente (a/b)n, pero ya en segundo momento se pierde control del proceso.

REACTIVOS II

Realiza los siguientes productos notables

2.1 $\left(3x-\sqrt{y}\right)^2 =$ 2.2 $\left(\frac{1}{5}-\frac{5a}{2}\right)^3 =$

Respuesta esperada:

2.1 $9x^2-6x\sqrt{y}+y$ 2.2 $\frac{1}{125}-\frac{15}{50}a+\frac{75}{20}a^2-\frac{125}{8}a^3=\frac{1}{125}-\frac{3}{10}a+\frac{15}{4}a^2-\frac{125}{8}a^3$

RESULTADOS

Reactivo 2.1

57% respondió correctamente

34% responde en forma incorrecta

Solo un 9% no contesta

La mayoría tienen una noción correcta del desarrollo del binomio, los errores ocurren durante el proceso de la simplificación.

Del 34% de respuestas incorrectas más de la mitad (21%) muestra una noción correcta del desarrollo de un binomio, o bien, lo recordaban multiplicaban dos veces el mismo binomio. En ambos casos se observan errores aritméticos y/o algebraicos, como podemos ver el trabajo de Josué, en la figura 7.

$$(3x-\sqrt{y})^2 = 3x^2 - 6x\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 = 3x^2 - 6x\sqrt{y} + y$$

Figura 7. Trabajo de Josué reactivo 2.1

Josué muestra conocer la regla del desarrollo de un binomio al cuadrado, sin embargo en el primer término no eleva el coeficiente al cuadrado; esto podría ser un descuido de Josué o una mala aplicación de la propiedad de (ab)n =anbn.

En la siguiente figura, Fernanda también muestra conocer la regla del desarrollo de un binomio al cuadrado, sin embargo se observa un error en el tercer término cuando como resultado de la operación $\left(\sqrt{y}\right)^2$ escribe 2y, parece entender que la raíz cuadrada se simplifica con el cuadrado, pero agrega un 2 por quitar la raíz cuadrada.

$$(3x-\sqrt{y})^2 = 9x^2 - 6x\sqrt{y} + 2y$$

En la figura 9 se muestra el trabajo de Julio el cual parece recordar la estructura del binomio cuadrado sin embargo al realizar la operación para obtener el primer término: $(3x)^2$ en lugar de elevar el coeficiente al cuadrado lo duplica.

$$(3x-\sqrt{y})^2 = 6x^2 - 6x\sqrt{y} + y$$

Figura 9. Trabajo de Julio reactivo 2.1

También Diana (figura 10), muestra conocer la regla del desarrollo de un binomio al cuadrado pero considera dos veces el signo negativo en el segundo término: -$2(3x)\left(-\sqrt{y}\right)$

, además no realiza correctamente la operación la operación con dichos factores, así al operar $(-\sqrt{y})^2$ solo escribe $-\sqrt{y}$

$$(3x-\sqrt{y})^2 = (3x)^2 - 2(3x)(-\sqrt{y}) + (-\sqrt{y})^2 = 9x^2 - 6x - \sqrt{y} - \sqrt{y}$$

Figura 10. Trabajo de Diana reactivo 2.1

Del grupo de respuestas incorrectas un 13% presenta respuestas variadas que en general no reflejan un conocimiento de la regla del desarrollo del binomio pero si reflejan graves errores conceptuales, por ejemplo, en la figura 11 en el trabajo de Eder se observa que eleva al cuadrado cada término, incluso con error en el primer término.

$$(3x-\sqrt{y})^2 = 3x^2 - y$$

Figura 11. Trabajo de Eder reactivo 2.1

En la figura 12, Gyna al igual que Eder no parece tener conocimiento del desarrollo de un binomio al cuadrado, se centra el elevar al cuadrado la raíz cuadrada.

$$(3x-\sqrt{y})^2 = (3x-\sqrt{Y})^2 = 3x - Y$$

Figura 12. Trabajo de Gyna reactivo 2.1

Reactivo 2.2

36% respondió correctamente

46% responde en forma incorrecta

El 18% no contesta

Del 46% de respuestas incorrectas casi la mitad (22%) recuerda la regla del desarrollo de un binomio al cubo pero muestran errores aritméticos y/o algebraicos de diversos tipos.

Veamos el trabajo de Erick en la figura 13. Erick muestra una noción del desarrollo de un binomio al cubo, que le permite escribir correctamente el primer término y también el último termino con excepción del signo.

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{5a}{2}\right)^3=\frac{1}{125}-\frac{15a}{10}-\frac{15a}{30}+\frac{125a^3}{8}$$

Figura 13. Trabajo de Erick reactivo 2.2

En la figura 14, se muestra el trabajo de Itzel, parece no recordar la estructura del desarrollo del binomio al cubo pero recuerda que al multiplicar 3 veces el mismo binomio obtendrá el resultado, sin embargo comete el errores como escribir el resultado de $\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$ como $\frac{1}{10}$, lo cual parece ser una distracción ya que en otras ocasiones si lo hace correctamente. Otros errores son cuando el primer resultado lo intenta multiplicar por el binomio y parece que olvida escribir un término escribe: $\left(\frac{5a}{2}\right)\left(\frac{1}{10}-\frac{100a}{100}+\frac{25a^2}{4}\right)$ cuando debería tener: $\left(\frac{1}{5}-\frac{5a}{2}\right)\left(\frac{1}{10}-\frac{10a}{10}+\frac{25a^2}{4}\right)$

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{5a}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{5}-\frac{5a}{2}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{5a}{2}\right)=\frac{1}{10}-\frac{5a}{10}-\frac{5a}{10}+\frac{25a^2}{4}$$
$$=\left(\frac{5a}{2}\right)\left(\frac{1}{10}-\frac{100a}{100}+\frac{25a^2}{4}\right)=\frac{5a}{20}-\frac{500a^2}{200}+\frac{12a^3}{8}$$

Figura 14. Trabajo de Itzel reactivo 2.2

Veamos el trabajo de Evelia en la figura 14, recuerda la estructura del desarrollo de un binomio al cubo, representa correctamente el desarrollo, pero al realizar las operaciones comete un error en forma recurrente que consiste en que multiplica los coeficientes por el exponente, por ejemplo multiplica por 3 en lugar de elevar al cubo, como se observa de manera más precisa en tercer término, $\left(\frac{-5a}{2}\right)^3$ lo escribe como $\frac{-15a^3}{6}$, lo mismo, cuando eleva al cuadrado multiplica los coeficientes por 2.

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{5a}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{5}\right)^3+3\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(-\frac{5a}{2}\right)+3\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{5a}{2}\right)^2+\left(-\frac{5a}{2}\right)^3=\frac{1}{15}+3\left(\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{5a}{2}\right)+3\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{10a^2}{4}\right)$$
$$+\left(-\frac{15a^3}{6}\right)$$

Figura 15. Trabajo de Evelia reactivo 2.2

Por último mostraremos el trabajo de Alondra en la figura 16, aplica correctamente la regla del binomio al cubo pero al momento de realizar operaciones indicadas, se observa varios errores semejantes a los de Evelia, como en el tercer término $3\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5a}{2}\right)^2$ en lugar de elevar al cuadrado multiplica por 2 y escribe el resultado como $3\left(\frac{1}{5}\right)(\frac{10a^2}{4})$, finalmente obtiene $\frac{30}{20}a^2$; así también en el cuarto término $\left(\frac{5a}{2}\right)^3$ escribe como resultado $\frac{50a^3}{8}$.

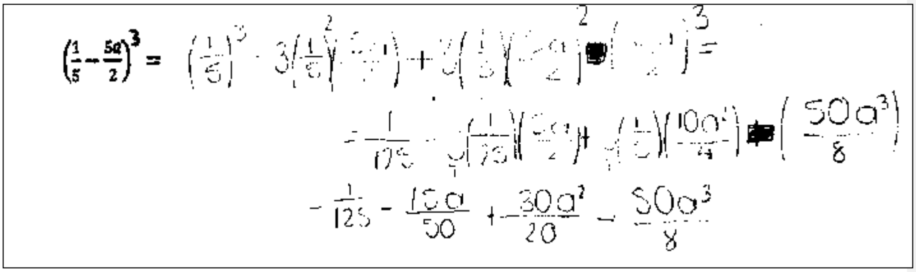


Figura 16. Trabajo de Alondra reactivo 2.2

Se observa que los estudiantes tienen una noción de la estructura del desarrollo de un binomio al cubo, sin embargo, no tienen la habilidad de para realizar las operaciones parciales que se requieren.

REACTIVO III

Factoriza las siguientes expresiones

$$16 + 40x^2 + 25x^4$$

$$x^2 - 18 + 7x =$$

$$ax - bx + b - a - by + ay =$$

Respuesta esperada:

$$25x^4 + 40x^2 + 16 = (5x^2 + 4)^2 = (5x^2 + 4)(5x^2 + 4)$$

o bien

$$25x^4 + 40x^2 + 16 = (5x^2 + 4)(5x^2 + 4)$$

$$x^2 + 7x - 18 = (x - 9)(x + 2)$$

$$ax - bx - a + b + ay - by = x(a - b) - (a - b) + y(a - b) = (a - b)(x - 1 + y) \text{ o bien}$$
$$ax - bx - a + b + ay - by = a(x - 1 + y) - b(x - 1 + y) = (a - b)(x - 1 + y)$$

RESULTADOS

Reactivo 3.1

40 % lo contesto correctamente

33% lo contesto incorrectamente,

27% no contestaron

De los estudiantes que contestaron en forma incorrecta el 9% de ellos identificaron que se trataba de un trinomio e intentaron utilizar algún método de factorización, parecían tener alguna idea de la estructura de la respuesta, es decir, en un producto de dos factores pero no recordaban como llegar al resultado, por ejemplo veamos el trabajo de Miguel en la figura 17.

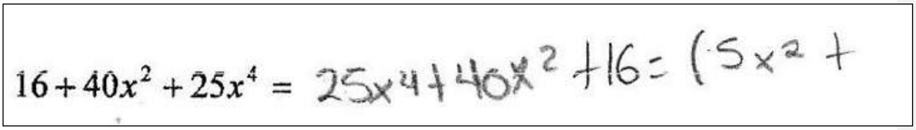


Figura 17. Trabajo de Miguel reactivo 3.1

De los mismos estudiantes que contestaron en forma incorrecta, el 11% de ellos no identificaron que se trataba de un trinomio cuadrado perfecto, tan solo detectan un factor común de dos términos como vemos en el trabajo de Estela, figura 18. Representa 5x2 como factor común de dos términos.

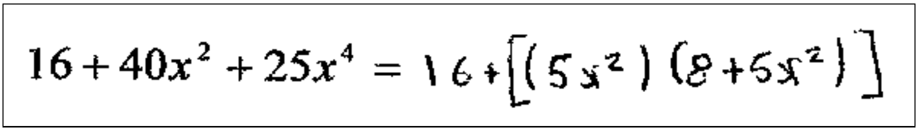


Figura 18. Trabajo de Estela reactivo 3.1

En la figura 19, se observan dos intentos de Diana, en uno supone en forma incorrecta que podría ser la factorización $(x^2 + 20x) + (x^2 + 20x)$ después en cada paréntesis factoriza

2x. En otro intento identifica un factor común en el primer y segundo y representa $x^2(25x^2+40)+16$.

$$\Rightarrow x^2(25x^2+40)+16$$

$$16+40x^2+25x^4 = 25x^4+40x^2+16 = (x^2+20x)+(x^2+20x) = x(x+20)+x(x+20)$$

$$= x^2+(x+20)$$

Figura 19. Trabajo de Diana reactivo 3.1

Finalmente otro 9% de estudiantes de este grupo de respuestas incorrectas, ordenan el polinomio en forma creciente respeto a la variable, pero no hacen más.

Reactivo 3.2

68 % lo contesto correctamente

19% lo contesto incorrectamente

13% no contestaron

La mayoría identifica este tipo de factorización y la sabe realizar, sin embargo casi una tercer parte de la muestra (32%), muestra algún tipo de dificultad.

Del 19% que contesto incorrectamente, 10% no identificó el tipo de factorización, solo pueden apreciar la x como factor común en 2 términos, como se observa en el trabajo de Jorge en las figuras 20 y 21.

$$x^2-18+7x = -18+x(x+7)$$

Figura 20. Trabajo de Jorge reactivo 3.2

$$x^2-18+7x = x(x+7)-18$$

Figura 21. Trabajo de Jorge reactivo 3.2

Otro intento incorrecto es el de Jazmin en la figura 22

$$x^2-18+7x = 3x[x-6+4]$$

Figura 22 Trabajo de Jazmin. Reactivo 3.2

El 2% identificaron el tipo de factorización que se trata y muestran la estructura de cómo debería ser la factorización (producto de 2 factores) pero no logran concretar, como se observa en el trabajo de Eleazar en la figura 23.

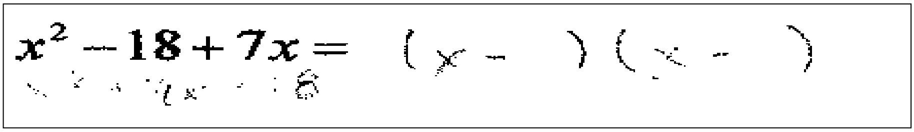


Figura 23. Trabajo de Eleazar reactivo 3.2

Finalmente también 2%, emplea la fórmula general para encontrar los números de los factores, pero no la aplican en forma correcta, por ejemplo veamos en la siguiente figura como Claudia al no ordenar los términos de la ecuación, intercambia los valores de b con c, escribe $b = -18$ y $c = 7$. Recuerda que encontrando las raíces x1 y x2 , del polinomio podría factorizar la expresión:

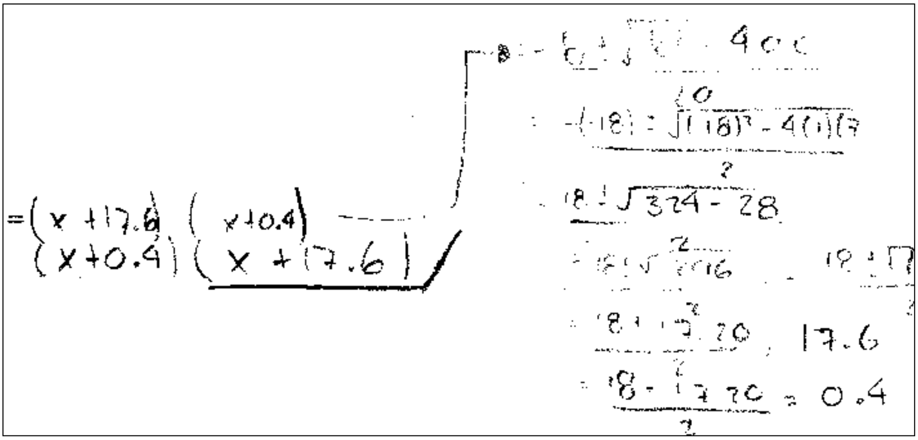


Figura 24. Trabajo de Claudia reactivo 3.2

Reactivo 3.3

14 % lo contesto correctamente

53% lo contesto incorrectamente,

33% no contestaron

Esta es una forma de factorización difícil para la muestra ya que solo el 14% la realiza correctamente.

Del 53% que contestó incorrectamente, la mayoría, identifica el método de factorización e incluso lo abordaron de forma correcta pero se observa tipo de algún error, ya sea en un signo, o en la agrupación como se observa en la figura 25, donde Manuel reacomoda la expresión pero con un error de signo, escribe: ax-bx-b-a-by-ay, cuando es ax-bx+b-a+ay-by.

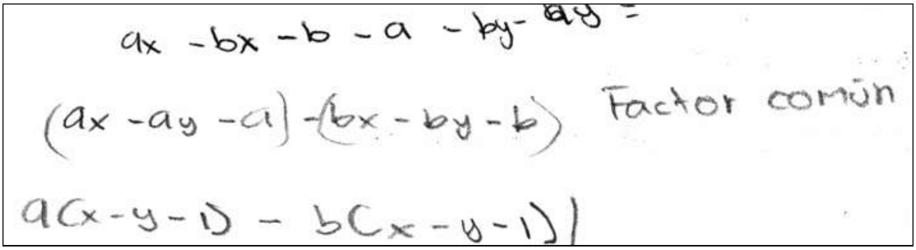


Figura 25. Trabajo de Manuel reactivo 3.3

En la siguiente figura 26, Martha intenta de forma diferentes a los demás estudiantes; factoriza los primeros cuatro términos: ax-bx+b-a correctamente como (x-1)(a-b) así como los otros dos términos –y(b-a), sin embargo no concluyó el ejercicio.

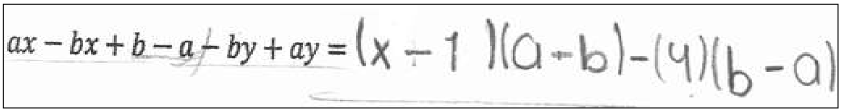


Figura 26. Trabajo de Martha reactivo 3.3

En la figura 27 Brenda factoriza correctamente la x del primer par de términos, la y del último par, sin embargo le falto habilidad para acomodar un signo negativo y expresar en la misma forma (a-b) o (b-a).

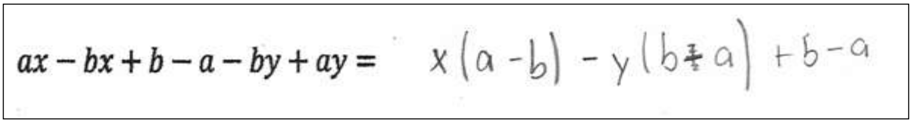


Figura 27. Trabajo de Brenda reactivo 3.3

$$ax - bx + b - a - by + ay =$$
$$(ax - a + ay) - (bx + b - by) = a(x - 1 + y) - b(x - 1 + y)$$

Figura 28. Trabajo de Dulce reactivo 3.3

Así también en el trabajo de Lizbeth de la figura 29, se observa como ordena correctamente los términos para factorizar las variables “a” y “b”: a(x-1+y)+b(1-x-y) pero al no observar

un fa

$$ax - bx + b - a - by + ay = (ax - a + ay) + (b - bx - by) : a(x - 1 + y) + b(1 - x - y)$$

Figura 29. Trabajo de Lizbeth reactivo 3.3

De manera similar a Lizbeth procede Ronny como se observa en la figura 30.

$$ax - bx + b - a - by + ay = a(x + y - 1) + b(-x - y + 1)$$

Figura 30. Trabajo de Ronny reactivo 3.3

REACTIVO IV

IV. Realiza las operaciones indicadas y simplifica lo más que puedas.

$$\frac{2c - d}{c^2 d} + \frac{c + d}{cd^2} =$$

$$\frac{x^3 - x}{2x^2 + 6x} \div \frac{5x^2 - 5x}{2x + 6} =$$

Respuesta esperada:

4.1. $$\frac{2dc - d^2 + c^2 + cd}{c^2 d^2} = \frac{3cd - d^2 + c^2}{c^2 d^2}$$

4.2. $$\frac{(x)(x-1)(x+1)}{(2x)(x+3)} \div \frac{(5x)(x-1)}{(2)(x+3)} = \frac{(x)(x-1)(z'1)(2)(x+3)}{(2x)(x+3)(5x)(x-1)} = \frac{x+1}{5x}$$

RESULTADOS

Reactivo 4.1

22 % lo contesto correctamente

65% lo contesto incorrectamente,

13% no contestaron

Un reactivo difícil ya que para un 78% de los estudiantes presentó algún tipo de dificultad. 65% contestaron incorrectamente, de los cuales el 28% inician el proceso de suma de fracciones algebraica en forma correcta pero se observan errores en su intento por simplificar, por ejemplo en la figura 31 se observa el trabajo de Ivan, que elimina incorrectamente los factores del denominador c2d y cd2, cuando en el numerador hay sumas involucradas, no se percata y continua su proceso de simplificaciones.

$$\frac{2c-d}{c^2d}+\frac{c+d}{cd^2}=\frac{(2c-d)\cancel{(cd^2)}+\cancel{(c^2d)}(c+d)}{\cancel{(c^2d)}\,\cancel{(cd^2)}}=(2c-d)+(c+d)$$
$$=2c-d+c+d$$
$$=2c+c$$
$$=3c$$

Figura 31. Trabajo de Ivan reactivo 4.1

Alan en la figura 32 realiza correctamente el proceso inicial, incluso realiza correctamente los productos del numerador, pero también cancela un término del numerador con un factor del denominador, de no haber realizado esta “cancelación” hubiera logrado una respuesta correcta.

$$\frac{2c-d}{c^2d}+\frac{c+d}{cd^2}=\frac{(2c-d)(cd^2)+(c^2d)(c+d)}{c^2d\,cd^2}=\frac{2c^2d-d^3+c^3d+d^2}{(c^2d)(cd^2)}=\frac{2c^2d-d^3+cd+d^2}{cd^2}$$

Figura 32. Trabajo de Alan reactivo 4.1

En la figura 33 Guillermo inicia correctamente la suma de fracciones, pero elimina términos del numerador con los factores del denominador, en forma errónea. Además las sumas del numerador las hace como producto.

$$\frac{2c-d}{c^2d}+\frac{c+d}{cd^2}=\frac{(2c-d)(cd^2)+(c^2d)(c+d)}{(c^2d)\,(cd^2)}=(2c-d)(c+d)=$$
$$=2c^2+2d-cd-d^2=$$

Figura 33. Trabajo de Guillermo reactivo 4.1

Por otra parte un 15% de los estudiantes no parecen tener preciso cómo proceder, por ejemplo Mariana, como en la figura 34, realiza una multiplicación de los numeradores con los denominadores.

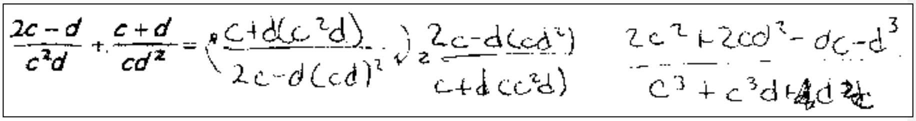


Figura 34. Trabajo de Mariana reactivo 4.1

El 17% intentó simplificar aplicando distributividad a las fracciones, descomponiendo en fracciones parciales, sin embargo, al simplificar estos resultados no lo hacen correctamente. Por ejemplo, veamos el caso de Víctor, más sin embargo en los últimos tres términos de su resultado final, que deberían ser inversos los escribe con potencias positivas.

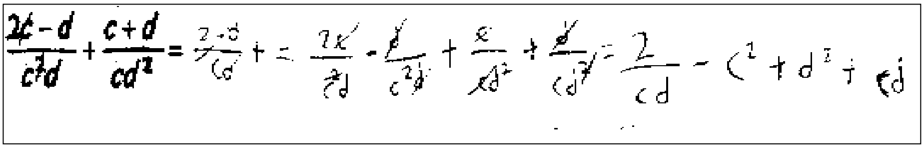
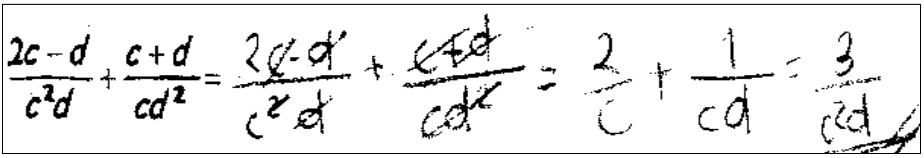


Figura 35. Trabajo de Víctor reactivo 4.1

Veamos el trabajo de Gyna, que desde el principio hace cancelaciones erróneas.



Reactivo 4.2

36 % lo contesto correctamente

48% lo contesto incorrectamente,

16% no contestaron

Es poco más de un tercio de la muestra quien hace correctamente este ejercicio, lo que indica cierta dificultad.

Del 48% que contestaron de forma incorrecta, 14% inicia la operación correctamente, pero existen errores en su procedimiento ya sea en la multiplicación de binomios o en la e

$$\frac{x^3-x}{2x^2+6x} \div \frac{5x^2-5x}{2x+6} = \frac{x^3-x(2x+6)}{2x^2+6x(5x^2-5x)} = \frac{2x^4+6x^3\cancel{-2x^2-6x}}{\cancel{2x^2+6x}(5x^2-5x)}$$

$$= \frac{2x^4+6x^3}{5x^2-5x}$$

Figura 36. Trabajo de Mariana reactivo 4.2

Otros tipos de errores que se observaron en el 15% del grupo de estudiantes con respuestas incorrectas, consiste en que antes de realizar operaciones intentan simplificar, por ejemplo en la figura 37, Gyna hace x3-x igual a x2 y después esta x2, la simplifica con un sumando del denominador, evidenciando graves errores en su uso del álgebra.

$$\frac{x^3-x}{2x^2+6x} \div \frac{5x^2-5x}{2x+6} = \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}+6x} \div \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}+6} = \frac{1}{2+6x} \div \frac{1}{2+6} = \frac{1}{2+6x} \div \frac{1}{8}$$

Figura 37. Trabajo de Gyna reactivo 4.2

6% parecen haber olvidado el procedimiento para dividir fracciones y tan solo multiplican, por ejemplo, Noemi en la figura 38 multiplica la primera fracción por el denominador de la fracción divisor.

$$\frac{x^3-x}{2x^2+6x} \div \frac{5x^2-5x}{2x+6} = \frac{x^3-x(2x+6)}{2x^2+6x(2x+6)} = \frac{2x^4+6x^3-2x^2-6x}{4x^3+12x^2+12x^2+36x} = \frac{2x^4+6x^3-2x^2-6x}{4x^3+24x^2+36x}$$

Figura 38. Trabajo de Noemi reactivo 4.2

REACTIVO V

Simplifica la expresión algebraica

$$\frac{\frac{2}{y}+\frac{1}{2y}}{y+\frac{y}{2}} =$$

Respuesta esperada:

$\frac{5}{3y^2}$ o cualquier fracción equivalente.

RESULTADOS

28% respondió correctamente

57% responde en forma incorrecta

15% no contesta

En el 72% se observa algún tipo de dificultades

Del 57% que contestaron incorrectamente, el 11% realizaron la operación de sumar las fracciones contenidas en el numerador y denominador, pero durante el proceso se observa algún tipo de error algebraico o aritmético, como se observa en la figura 39 donde se muestra el trabajo de Aidé, esta representa correctamente la suma de fracciones tanto del numerador como del denominado, sin embargo su error consiste en que al parecer cancela términos en forma incorrecta, por ejemplo, la fracción $\frac{4y+y}{2y^2}$ la escribe como $\frac{4}{2y}$. Parece haber simplificado una variable antes de sumarla. Lo mismo parece hacer con en el denominador.

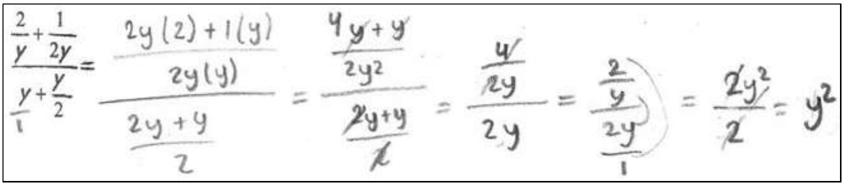


Figura 39. Trabajo de Aidé reactivo 5

En la figura 40, Josué realiza correctamente el proceso de la suma de fracciones tanto en el numerador como en el denominador; aplica la llamada “regla de la herradura” pero al realizar los productos de los términos medios comete un error algebraico, escribe 6y cuando debería ser 6y2.

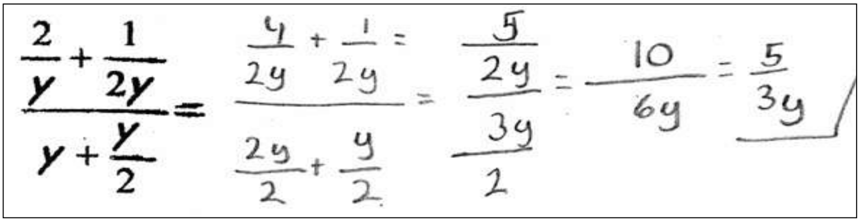


Figura 40. Trabajo de Josué reactivo 5

El 17% de los estudiantes parece conocer el proceso que debe realizar al dividir una fracción entre otra, pero suman en forma incorrecta las fracciones contenidas en el numerador y denominador principal. Por ejemplo, veamos el trabajo de Omar en la figura 41, suma las fracciones del numerador principal sumado sus numeradores y denominadores, cosa que también hace en el denominador principal; en el siguiente paso aplica la llamada la regla de la herradura, pero todavía comete un error en el producto de los medios, escribe el resultado de (3y)(2y) como 6y.

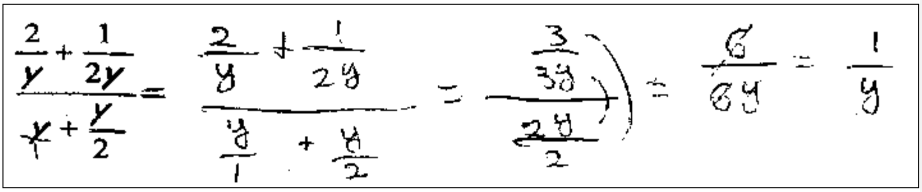


Figura 41. Trabajo de Omar reactivo 5

Así también es el caso de Melisa (figura 42) quien muestra errores en su forma de operar fracciones, por ejemplo en el denominador principal cambia $y + \frac{y}{2}$ por $\frac{1}{y} + \frac{y}{2}$, en lugar de colocar la unidad en el denominado de la y lo escribe sobre esta variable. Además al parecer, para realizar la suma de fracciones; suma los denominadores y los numeradores los multiplica respectivamente.

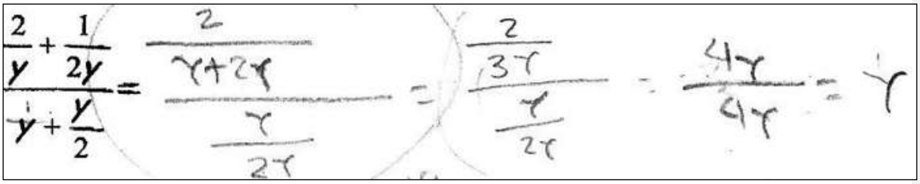


Figura 42. Trabajo de Melisa reactivo 5

En la figura 43, Yeraldin al realizar la suma de fracciones determina correctamente el denominador, pero multiplica sus numeradores, por ejemplo para la fracción $\frac{2}{y} + \frac{1}{2y}$ escribe como resultado $\frac{2}{2y^2}$.

$$\frac{\frac{2}{y}+\frac{1}{2y}}{\frac{y}{1}+\frac{y}{2}} = \frac{\frac{2}{2y^2}}{\frac{y^2}{2}} = \frac{4}{2y^4} = 2y^4$$

Figura 43. Trabajo de Yeraldin reactivo 5

24% de muestran conocer un orden para realizar la operación, pero no supieron sumar las fracciones del numerador y denominador, tal es el caso de Angélica cuyo trabajo se presenta en la figura 44, realiza la suma de fracciones, sumando los numeradores y denominadores respectivamente de cada fracción.

$$\frac{\frac{2}{y}+\frac{1}{2y}}{\frac{y}{1}+\frac{y}{2}} = \frac{\frac{3}{2y}}{\frac{2y}{3}} = \frac{6y}{9} \div \frac{3}{3} = \frac{2y}{3}$$

Figura 44. Trabajo de Angélica Vanessa reactivo 5

En la figura 45, Omar procede en forma parecida a Angélica, suma numeradores y denominadores de las fracciones, con varios errores de procedimiento por ejemplo al final realiza el producto (y)(y) el cual escribe como 2y.

$$\frac{\frac{2}{y}+\frac{1}{2y}}{y+\frac{y}{2}} = \frac{\frac{3}{3y}}{\frac{2y}{2}} = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{y}{1}} = \frac{2y}{1} = 2y$$

Figura 45. Trabajo de Omar reactivo V

La constante de los resultados erróneos en el análisis de estos reactivos , los estudiantes conocen la estructura del procedimiento pero fallan en el proceso de hacer las sumas parciales del numerador y denominador.

REACTIVO VI

Resuelve las siguientes ecuaciones:

6.1 $$\frac{7x-1}{3}-\frac{6-2x}{2x}=\frac{1+7x^2}{3x}$$

6.2 $$\sqrt{x}=x-2$$

6.3 $$6(x-5)-(x-5)^2=8$$

Respuesta esperada:

6.1 $x=5$

6.2 $x_1=1$; $x_2=4$

6.3 $x_1=9$; $x_2=7$

RESULTADOS

Reactivo 6.1

4% respondió correctamente

65% responde en forma incorrecta

32% no contesta

Dar respuesta a este reactivo represento gran dificultad para casi toda la muestra, debido a los procesos. Del 65% que respondieron incorrectamente el 8% separaron en fracciones individuales y sumaron los términos semejantes, pero durante el proceso se observan varios errores algebraicos. Por ejemplo, en el trabajo de Alejandra (figura 46), al realizar una cancelación $\frac{2x}{2x}$ lo considera como un cero, como se observa en su proceso.

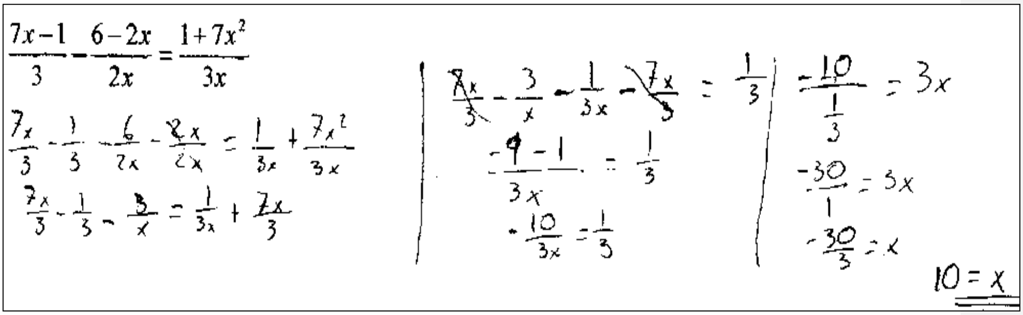


Figura 46. Trabajo de Alejandra reactivo 6.1

El 20% de los estudiantes realizan la operación con fracciones, casi correctamente, pero abandonan el proceso, cuando ven expresiones algebraicas de grado 2 o 3, como se observa en el trabajo de Yeraldin en la figura 47.

$$\frac{7x-1}{3}-\frac{6-2x}{2x}=\frac{1+7x^2}{3x} \qquad x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{14x^2-2x-18-6x}{6x}=\frac{1+3x^2}{3x}$$

$$42x^3-6x^2-54x-18x^2=6x+18x^3$$

Figura 47. Trabajo de Yeraldin reactivo 6.1

Nayeli en la figura 48, trabaja los términos en un lado de la igualdad, pero olvida escribir la igualdad a cero, por lo cual pierde la perspectiva de ecuación, viendo solo el aspecto procedimental de la expresión.

$$\frac{7x-1}{3}-\frac{6-2x}{2x}=\frac{1+7x^2}{3x}=\frac{6x^2(7x-1)-9x(6-2x)-6x(1+7x^2)}{18x^2}$$

$$=\frac{\cancel{42x^3}-6x^2-54x+18x^2-6x-\cancel{42x^3}}{18x^2}=\frac{12x^2-60x}{186x^2}$$

Figura 48. Trabajo de Nayeli reactivo 6.1

En la figura 49, Margarita abordó por partes la igualdad primero resolvió la resta de fracciones del lado izquierdo y lo hizo correctamente, sin embargo ya no relaciona este resultado con miembro del lado derecho y abandona su trabajo.

$$\frac{7x-1}{3}-\frac{6-2x}{2x}=\frac{1+7x^2}{3x}\longrightarrow\frac{7x-1}{3}-\frac{6-2x}{2x}=\frac{14x^2+2x-18+6x}{6x}=\frac{14x^2+8x-18}{6x}$$

$$\frac{7x^2+4x-9}{3x}$$ no me quedo :(

Figura 49. Trabajo de Margarita reactivo 6.1

El 32% de los estudiantes intentaron realizar operaciones con las fracciones, con ciertos errores algebraicos, veamos el caso de Erick quien inicia un proceso correcto, pero al multiplicar por 2 numerador y denominador de la fracción $\frac{7x-1}{3}$ no multiplica el -1 del numerador, transportando ya un error en el proceso. En el trabajo de este estudiante se aprecia un conocimiento de cómo resolver la ecuación, sin embargo, fallando en los procedimientos.

$$\frac{7x-1}{3}-\frac{6-2x}{2x}=\frac{1+7x^2}{3x} \quad \cancel{6}\left(\frac{14x-1}{\cancel{6}}-\frac{18-6x}{\cancel{6}x}=\frac{2+14x^2}{\cancel{6}x}\right)=14x-1-\frac{18-6x}{x}=\frac{2+14x^2}{x}$$

$$4x^2-x-\left(\frac{18x-6x^2}{x}\right)=1+7x^2=14x^2-x-18x+6x^2=x+7x^3=14x^2-x-18x+6x^2-7x^3-x=0$$

$$=-7x^3+20x^2-20x=0$$

Figura 50. Trabajo de Erick reactivo 6.1

Veamos el trabajo de Alondra en la figura 51; en la segunda fracción $\frac{6-2x}{2x}$ del lado izquierdo, elimina incorrectamente 2x del numerador, en un error algebraico grave. Continúa su proceso cometiendo errores en el mismo término sin observarse intento por resolver la ecuación.

$$\frac{7x-1}{3}-\frac{6-2x}{2x}=\frac{1+7x^2}{3x} \quad = \quad \frac{7x-1}{3}-\frac{6-2\cancel{x}}{2\cancel{x}}-\frac{1+7x^3}{3x}=0$$

$$\frac{7x-1}{3}-\frac{6}{2x}-\frac{1+7x^3}{3x}=0$$

$$\frac{7x-1}{3}-3x-\frac{1+7x^3}{3x}=0$$

Figura 51. Trabajo de Alondra reactivo 6.1

Finalmente veamos el trabajo de Gyna en la figura 52, pasa todos los términos a un solo lado de la igualdad y cancelando términos en forma errónea, no parece tener una finalidad

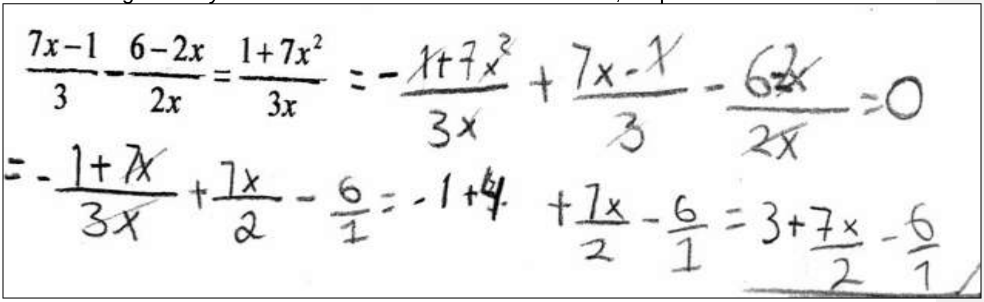


Figura 52. Trabajo de Gyna. Reactivo 6.1

La mayoría de estos estudiantes inician un proceso centrándose en realizar las operaciones con las fracciones, perdiendo de vista que se trata de una ecuación.

Reactivo 6.2

8% respondió correctamente el reactivo 2
71% responde en forma incorrecta
21% no contesta

Del 71% de respuestas incorrectas; el 38% eligen elevar al cuadrado para trabajar con potencias enteras, operan bien el miembro que contiene el radical pero no así el desarrollo del binomio, observándose diferentes errores, por ejemplo veamos el trabajo de Mariana en la figura 53.

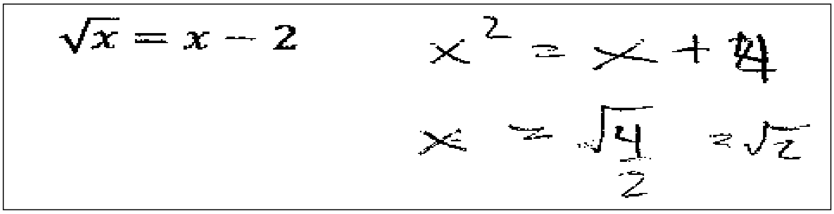


Figura 53. Trabajo de Mariana reactivo 6.2

Veamos el trabajo de Irving, opera correctamente la igualdad elevando al cuadrado cada miembro de la igualdad, pero con un error en el signo del doble producto y no concluye.

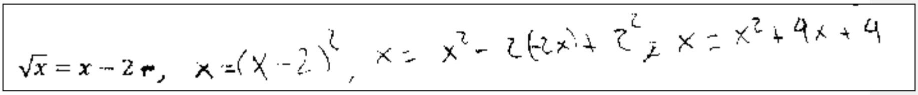


Figura 54. Trabajo de Irving. Reactivo 6.2

En la figura 55, se presenta el trabajo de Alejandre, se observa que eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad y ordena obteniendo una expresión de la forma ax2+ bx+c , la cual intenta factorizar pero no logra hacerlo, no concluyendo su trabajo.

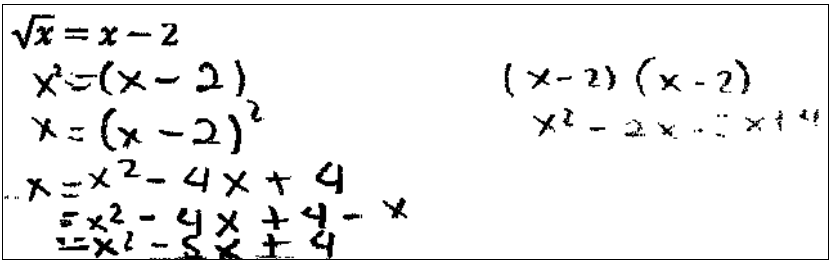


Figura 55. Trabajo de Alejandre reactivo 6.2

Por otra parte el 28% intentan hacer despejes, pero no parece haber idea de cómo proseguir, por ejemplo, Itzel en la figura 56, despeja con signos incorrectos la ecuación para el lado izquierdo y subraya una expresión como su respuesta.

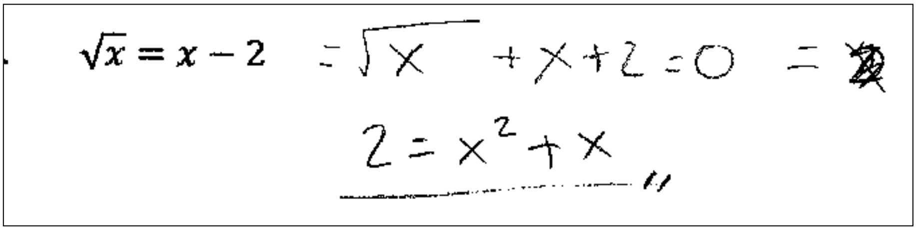


Figura 56. Trabajo de Itzel reactivo 6.2

En la figura 57, Yeraldin solamente traspone la x.

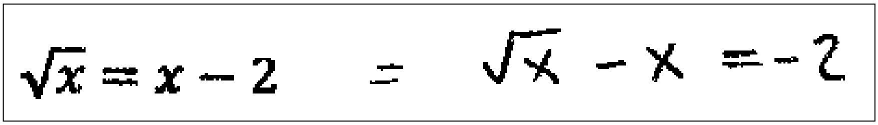


Figura 57. Trabajo de Yeraldin reactivo 6.2

Se observa en el proceder de los estudiantes un primer impulso procedimental, elevan al cuadrado, pero no pueden proseguir.

Reactivo 6.3

9% respondió correctamente

82% responde en forma incorrecta

9% no contesta

Del 82% de incorrectas; el 27% realizan las operaciones de la expresión hasta llegar a una ecuación de segundo grado, que intentan resolver por medio de factorización o la fórmula general. Por ejemplo veamos el trabajo de Alejandra en la figura 58, quien realizó correctamente todo el proceso pero, un error en el signo al trasponer el 8, le impide obtener una solución correcta.

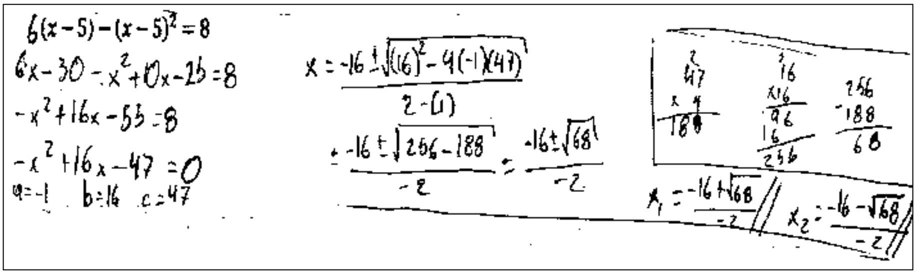


Figura 58. Trabajo de Alejandra reactivo 6.3

En la figura 59 Francisco al igual que Alejandra desarrolla un proceso correcto, parece saber a dónde tiene que llegar y que herramientas utilizar para llegar a una solución, pero un error al no cambiar el signo del número 25, no hace posible lograr la solución. Podríamos afirmar que cuentan con el conocimiento y habilidades para realizar la actividad, pero un descuido involuntario no los deja ver como competentes.

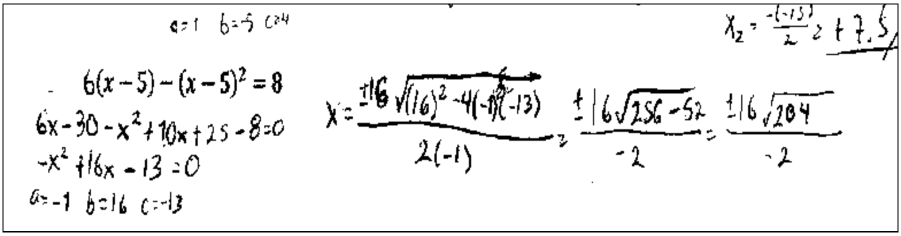


Figura 59. Trabajo de Francisco reactivo 6.3

Ismeni en la figura 60 realiza todo el proceso correctamente hasta llegar a la ecuación de segundo grado, sin embargo la intenta resolver como una ecuación de primer grado, mostrando además errores graves en los despejes que realiza

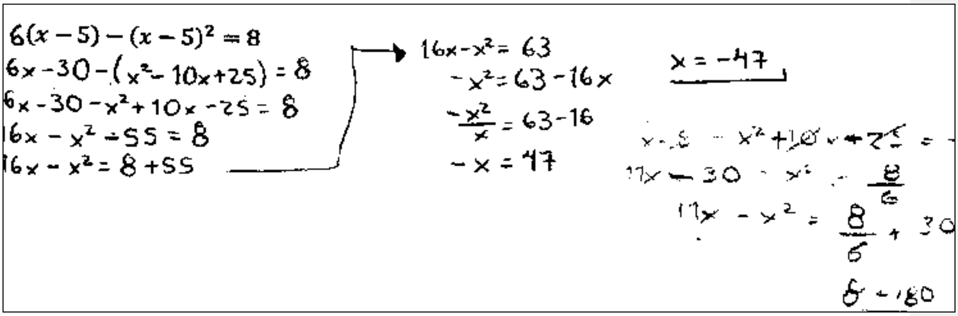


Figura 60. Trabajo de Ismeni reactivo 6.3

Un proceder semejante se observa en el trabajo de Omar de Jesús en la figura 61, realiza correctamente las operaciones del miembro izquierdo de la ecuación, pero parece no identifica que se trata de una ecuación de segundo grado ya que lo intenta resolver como si se tratará de una ecuación de primer grado.

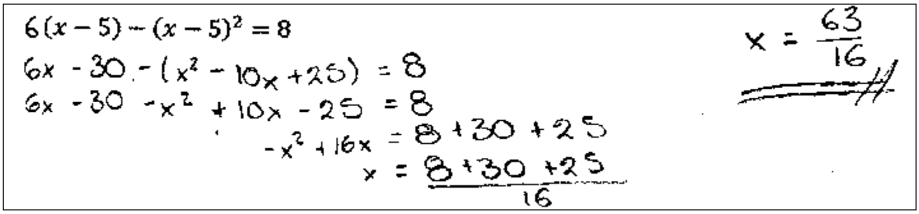


Figura 61. Trabajo de Omar de Jesús reactivo 6.3

El 48% de los estudiantes realizan las operaciones indicadas en la expresión y simplificaron hasta llegar a una ecuación de segundo grado, pero con algún error, la característica de estos estudiantes es que no intentan resolver la ecuación. Por ejemplo, en el trabajo de Brenda de la figura 62, se observa que escribe que (5)2 es 10, pero además no intenta resolver la ecuación obtenida.

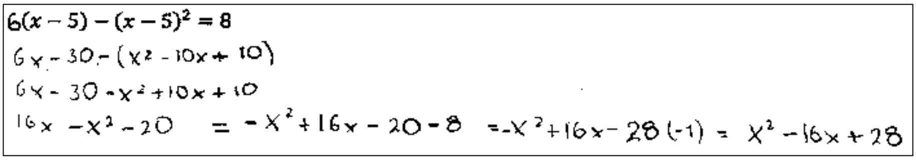


Figura 62. Trabajo de Brenda reactivo 6.3

En la figura 63, que muestra el trabajo de Fátima se observa errores algebraicos durante el proceso como no cambiar de signo a los dos últimos factores del binomio desarrollado y por consiguiente, llega a una ecuación cuadrática errónea y subraya la ecuación como resultado.

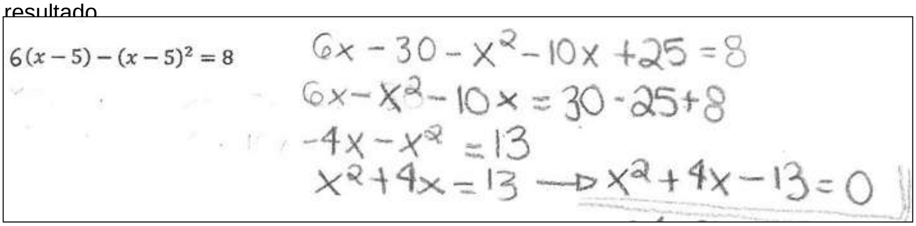


Figura 63. Trabajo de Fátima reactivo 6.3

En la figura 64, que muestra el trabajo de Claudia se observa errores muy parecidos a Fátima y Brenda al suprimir paréntesis, se equivoca en el signo del término 10x. Parece no convencerle el resultado obtenido por lo que escribe otra ecuación pero no intenta resolver alguna de las dos.

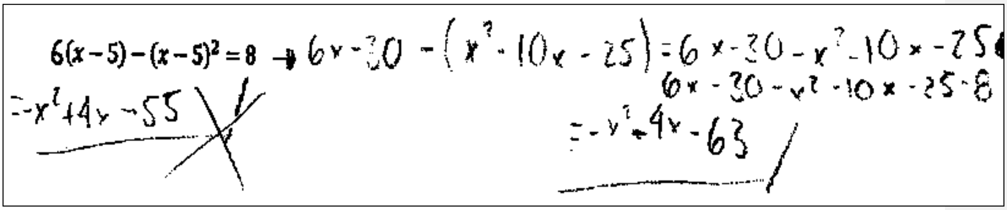


Figura 64. Trabajo de Claudia reactivo 6.3

En el caso de Julio en la figura 65; realiza el proceso correctamente sin ningún error y llega a la ecuación de segundo grado simplificada, aparentemente no sabe cómo resolverla.

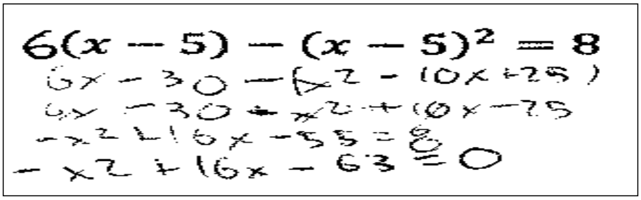


Figura 65. Trabajo de Julio reactivo 6.3

En el trabajo de Guillermo, de la figura 66, también muestra el mismo error de signo que Claudia y Fátima (en el signo del término 10x) por lo que no obtuvo la ecuación cuadrática correcta.

$6(x-5)-(x-5)^2=8$ $\quad 6x-30-(x^2+2(5x)+25)=8$

$$6x-30-x^2-10x+25=8$$

$$-x^2-4x-63=0$$

$$x^2+4x+63=0$$

Figura 66. Trabajo de Guillermo reactivo 6.3

Ninguno de los estudiantes reconoció la estructura: 6z-z2=8, de la expresión. La mayoría mostró un impulso procedimental y se enfoca al desarrollo del binomio al cuadrado y el producto contenido.

La mayoría parece visualizar que primero deberá de realizar operaciones y simplificar para resolver al final una ecuación, algunos de los cuales intentan resolverla como una ecuación de primer grado.

REACTIVO VII

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$4x-4y=12$$
$$-6x-3y=24$$

Respuesta esperada:

$x=-1.66$; $y=-4.66$ ó $x=-\frac{5}{3}$; $y=-\frac{14}{3}$

RESULTADOS

9 % lo contesto correctamente

77% lo contesto incorrectamente

14% no contestaron

Un tema, aunque no desconocido por la mayoría, no es dominado, sólo un 9% lo contesta correctamente.

Del 77% que contestó incorrectamente; 25% de los estudiantes intentaron, aplicar uno de los métodos de solución, pero no parece haber un pleno recuerdo de su estrategia. Como vemos en el trabajo de Daniel, quien se enfocó en obtener un cero al sumar las ecuaciones, sin una estrategia de la eliminación de una incógnita.

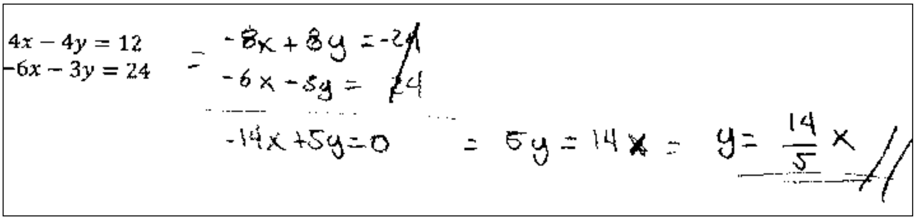


Figura 67. Trabajo de Daniel reactivo 7

En la figura 68, veamos el trabajo de Irene quien despeja -3y de la segunda ecuación y 4y en la primera, intenta cambio de signo a una de las ecuaciones. No se observa una estrategia específica.

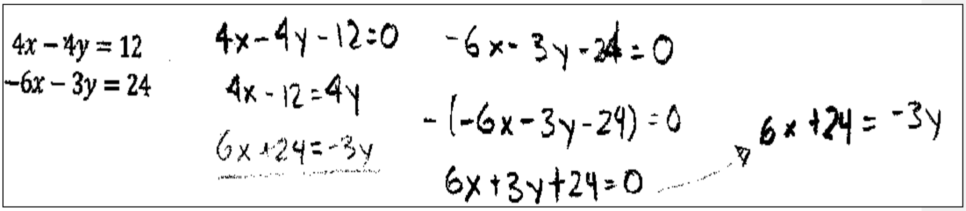


Figura 68. Trabajo de Irene reactivo 7

El 18% de las respuestas incorrectas, realizaron transformaciones que muestran recordar alguno de los métodos de solución, pero no logran resolver el sistema de ecuaciones; por ejemplo Bianka en la figura 69 suma miembro a miembro ambas ecuaciones y simplifica expresando una variable en términos de la otra.

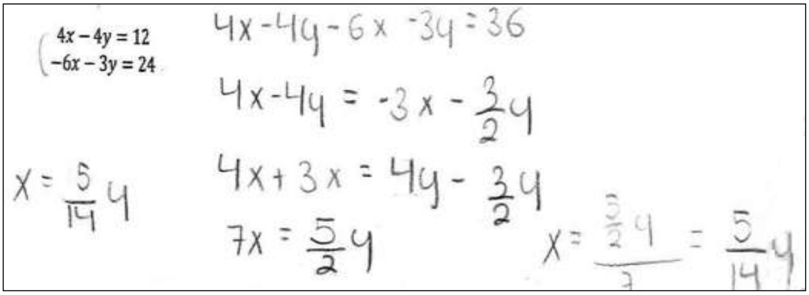


Figura 69. Trabajo de Bianka reactivo 7

En otros casos se observa el conocimiento de más de un método, sin embargo son empleados con inseguridad, como es el caso de Mariana cuyo trabajo se presenta en figura 70. Intenta en un principio aplicar el método de igualación, despejando la misma variable de ambas ecuaciones pero no supo continuar. En un segundo momento intenta aplicar el método de sustitución pero comete el error de hacer la sustitución en la misma ecuación de la que despeja y también abandona el proceso. En un tercer intento del despeje de x de la primera ecuación la sustituye en la segunda, pero en lugar de sustituir $\frac{4y+12}{4}$ escribió $\frac{4y+12}{6}$

.

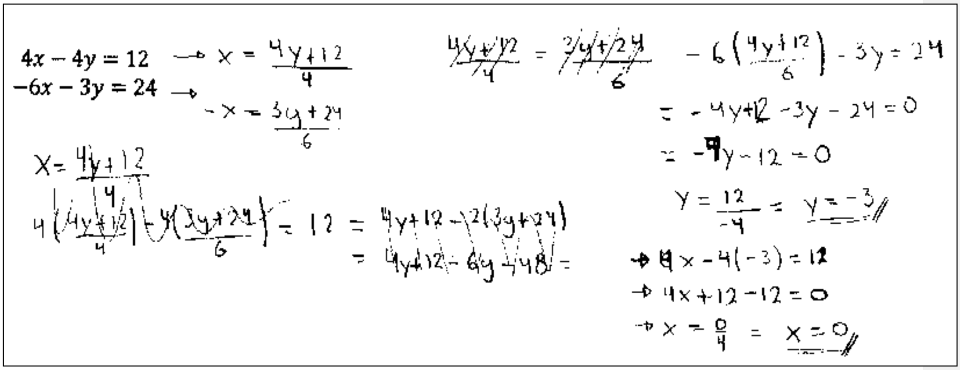


Figura 70. Trabajo de Mariana reactivo 7

De las respuesta incorrectas un 34% de los estudiantes, aplicaron correctamente sólo uno de los métodos pero muestran errores algebraicos y/o aritméticos durante el proceso por lo que no llegaron a una solución correcta; por ejemplo María de Jesús emplea el método de sustitución y lo aplica correctamente pero en su despeje se observa un error de signo, veamos como despeja la incógnita y: -4y=12-4x, hace $y = \frac{12-4x}{4}$, este error arrastró en todo el proceso por lo que no logró obtener el valor correcto de x, además ya no intentó obtener el valor de "y".

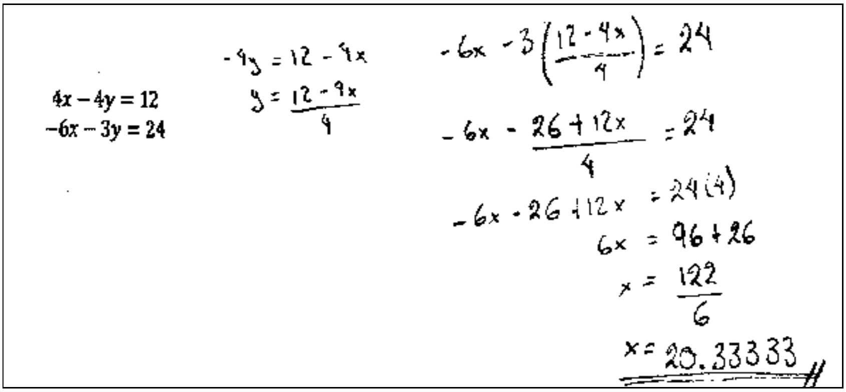


Figura 71. Trabajo de María de Jesús. Reactivo 7

Karina en la figura 72, aplica el método de sustitución; de la primer ecuación despeja la variable “x” sustituye correctamente en la segunda ecuación y obtiene el valor de “y”. Para obtener el valor de “x” realiza todo el proceso correctamente sin errores algebraicos pero comete un error aritmético que consistió en escribir el resultado de: 12-18.666 como 3.444, por lo que el valor que obtiene para “x “ es incorrecto.

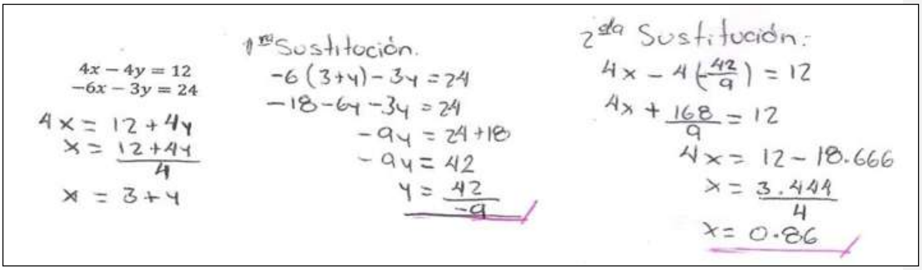


Figura 72. Trabajo de Karina reactivo 7

Yaritza en la figura 73 hace algo muy parecido a lo que hace Karina, aplica también el método de sustitución correctamente sin ningún error algebraico: $x = -\frac{42}{9}$ pero al expresarlo en forma decimal este es equivocado, por lo ya no obtiene el valor correcto para y.

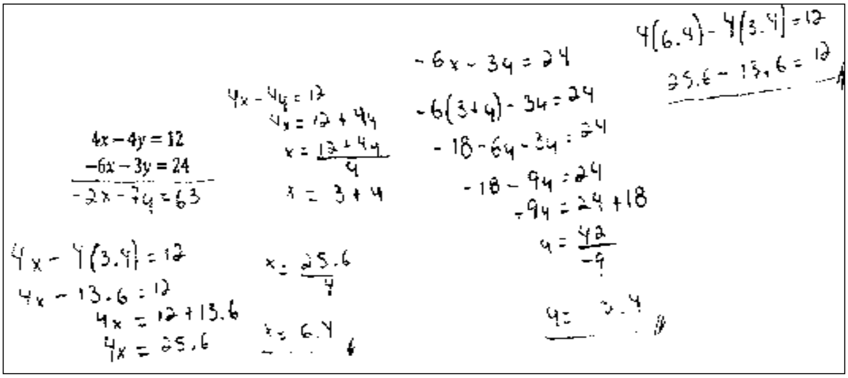


Figura 73. Trabajo de Yaritza reactivo 7

En la figura 74, Miguel resuelve el sistema de ecuaciones por el método de sustitución el cual realiza correctamente obteniendo un valor correcto de “y”, para obtener el valor de x cambio al método de reducción se observa que lo conoce, comete un error aritmético pues al multiplicar la segunda ecuación por (-3), no aplica el signo al término independiente, de ahí transporta el error y no logra obtener los resultados correctos.

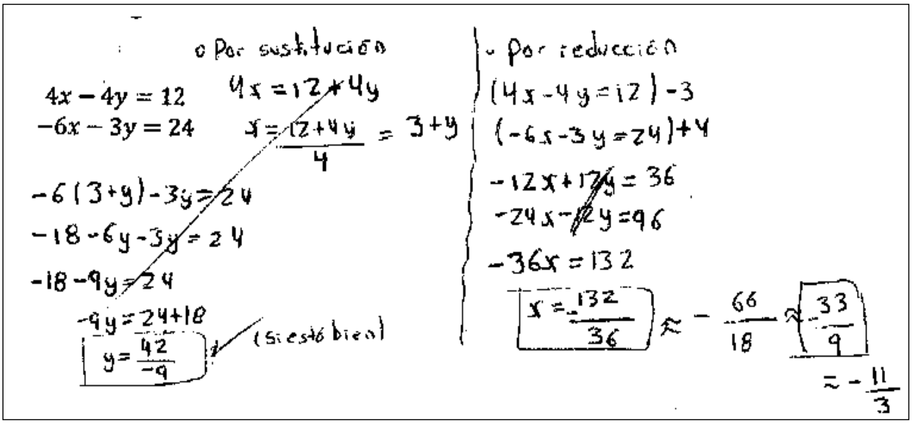


Figura 74. Trabajo de Miguel reactivo 7

OBSERVACIÓN

Considerando el 77% de respuestas incorrectas (realizan intentos), más el 9% de respuestas correctas, podemos afirmar que los estudiantes de la muestra cuentan con conocimiento del proceso para resolver un sistema de ecuaciones como el propuesto, sin embargo hay errores durante el proceso que les impide lograr la efectividad.

REACTIVO VIII

Resuelve el siguiente problema utilizando Algebra:

La edad de Enrique es la mitad de la de Pedro; la de Juan el triple de la de Enrique y la de Marco el doble de la de Juan. Si las cuatro edades suman 132 años, ¿qué edad tiene cada uno?

Una de las respuestas esperadas:

Relaciones de las edades representadas en forma algebraica

E=½P o P=2E;   J=3E;   M=2J=2(3E)=6E

Obtención de una ecuación como la siguiente o equivalente

E+2E+3E+6E=132

Solución:

Enrique = 11 años;   Pedro = 22 años;   Juan = 33 años y Marco = 66 años

RESULTADOS

43 % lo contesto correctamente

47% lo contesto incorrectamente

10% no contestaron

Del 47% que contestó incorrectamente; 21% de los estudiantes realizan un planteamiento algebraico adecuado pero se equivocaron durante en el proceso de solución. Por ejemplo en el trabajo de Martha, en la figura 75, hace una representación algebraica correcta de la ecuación, pero comete errores aritméticos al operar las fracciones. En su caso al multiplicar un entero por una fracción, multiplica numerador y denominador por el entero, como se observa en el tercer y cuarto término de la ecuación que plantea.

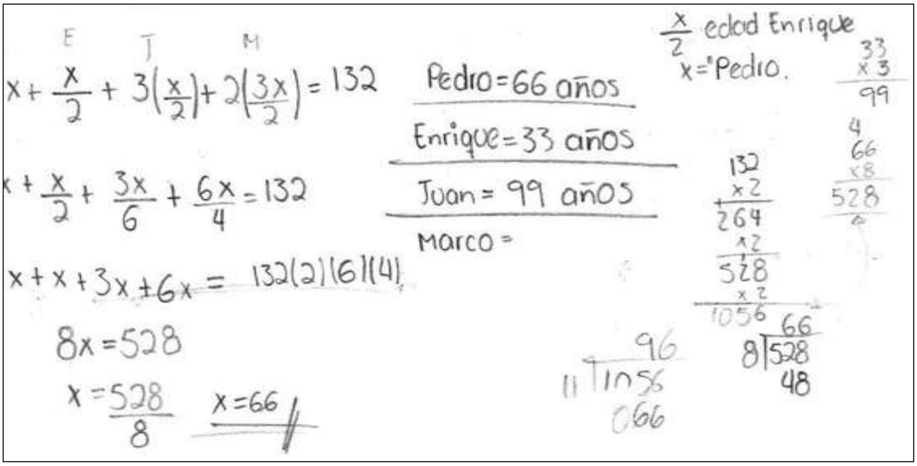


Figura 75. Trabajo de Martha reactivo 8

En el trabajo de Isabel, muestra una ecuación que representa correctamente las relaciones las edades e inicia correctamente su proceso de solución, sin error hasta la expresión $x + \frac{10x}{2} = 132$, en la cual despejar en forma incorrecta.

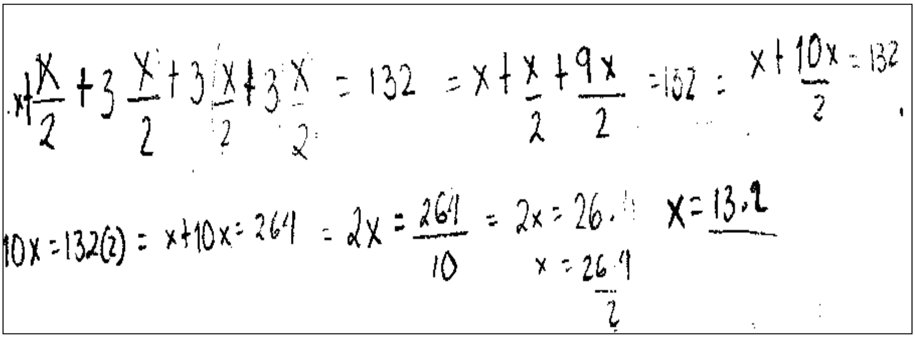


Figura 76. Trabajo de Isabel reactivo 8

Rebeca en la figura 77 plantea correctamente las edades de Juan, Enrique y Marco todas ellas en términos de la edad de Pedro pero olvida escribir la P para la edad de Pedro al establecer la suma de todas las edades.

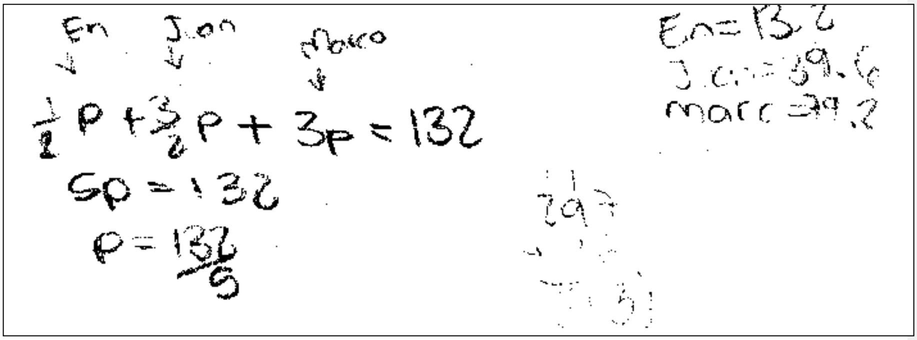


Figura 77. Trabajo de Rebeca reactivo 8

El 25% representan algebraicamente las relaciones entre las edades pero no logran hacerlo correctamente en términos de la misma variable, en una sola ecuación, como observamos en el trabajo de Guillermo en la figura 78.

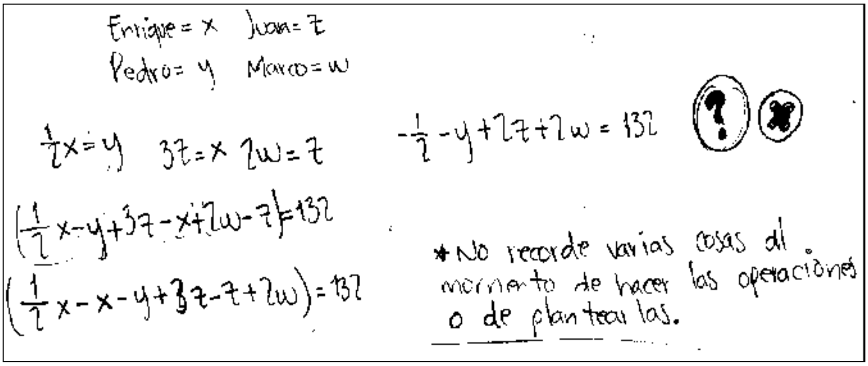


Figura 78. Trabajo de Guillermo reactivo 8

En la figura 79, mostramos el trabajo de Ronny, quien representa algebraicamente las relaciones de las edades, pero no logra hacer la representación de todas las edades en términos de una misma variable.

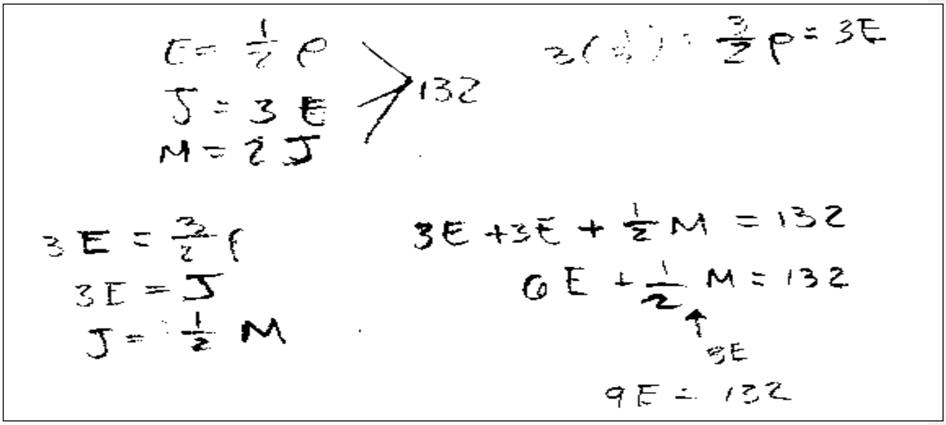


Figura 79. Trabajo de Ronny reactivo 8

Del 57 % que evidencian dificultades, para hacer representaciones algebraicas, al resolver el problema, se observan tres categorías: aquellos que no muestran intentos, los que hacen intentos logrando hacer representaciones parcialmente correctas, y los que hacen la representación algebraica que modela el problema, pero no la resuelven en forma correcta.

Si consideramos el 43% que responde correctamente con el 47% que intentan pero no logran la respuesta correcta, podemos afirmar que para la mayoría de los estudiantes no es desconocido el proceso para resolver este tipo de problemas, sin embargo no son eficientes en los procesos.

Tabla de resumen de resultados

REACTIVOS	TEMA Y COMPETENCIA	RESULTADOS
I. Simplifica de tal manera que no haya exponentes negativos $\left(\frac{15x^{-1}y^{2}}{5xy^{-4}}\right)^{-1}$	Leyes de exponentes enteros. Reconocimiento y empleo de leyes de exponentes para transformar una expresión.	Correctamente 6% Incorrecta 62% No contestó 32% La mayoría de los estudiantes intenta responder, aplican la potencia -1 al cociente, pero el siguiente paso de la solución muestra diferente tipo de errores. Indicado un reconocimiento, pero no un empleo eficaz de su conocimiento.
II. Realiza los siguientes productos notables 3. $\left(3x-\sqrt{y}\right)^{2}=$	Productos notables, desarrollo de un binomio al cuadrado y cubo Reconocimiento de la estructura de: binomio al cuadrado y al cubo, su desarrollo.	Correctamente 57% Incorrecta 34% No contestó 9%
4. $\left(\frac{1}{5}-\frac{5a}{2}\right)^{3}=$		Correctamente 36% Incorrecta 46% No contestó18% La mayoría de los estudiantes cuentan con el conocimiento para realizar la actividad pero, descuidos involuntarios al realizar operaciones con monomios los hacen parecer no competentes
III. Factoriza las siguientes expresiones 4. $16+40x^{2}+25x^{4}=$ 5. $x^{2}-18+7x=$ 6. $ax-bx+b-a-by+ay=$	Tema: Factorización. *Trinomio cuadrado perfecto *Trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$, por agrupación de términos. *Factorizacióyn por agrupación Reconocimiento de estructuras factorizables de expresiones de segundo y primer	1. Correctamente 40% Incorrecta 33% No contestó 27% 2. Correctamente 68% Incorrecta 19% No contestó 13% En las primeras dos factorizaciones, la mayoría de los estudiantes responden correctamente, podríamos decir que conocen y manejan correctamente el concepto. Respecto a las respuestas incorrectas la mayoría de éstas se

	grado y su transformación de para representar en forma equivalente en factores.	logra ver que los estudiantes tienen la noción epistemológica de la factorización pues intentan sacar el factor común, pero no logran ir más allá de esto, podríamos decir que no identifican los diferentes métodos de factorización. 3. Correctamente 14% Incorrecta 53% No contestó 33% El tercer caso de factorización requiere de un mayor nivel de habilidades y visión aritmética-algebraica, varios estudiantes identificaron el método de factorización pero como se trata de llevar a cabo varios pasos estratégicos aritméticos se cometen errores en el camino o si llegan al final no logran identificar el factor común.
IV. Realiza las operaciones indicadas y simplifica lo más que puedas. $\frac{2c-d}{c^2d}+\frac{c+d}{cd^2}=$ $\frac{x^3-x}{2x^2+6x}\div\frac{5x^2-5x}{2x+6}=$	Tema: Operaciones con fracciones algebraicas. Suma y división Reconocimiento de estructuras de suma y división de fracciones algebraicas y los procesos correspondientes para su transformación y simplificación.	Correctamente 22% Incorrecta 65% No contestó13% Prácticamente la tercera parte de las respuestas incorrectas, realiza el proceso de suma de fracciones correctamente, cometen algunos errores de signo, simplificación o eliminación de términos en el trayecto por lo que no llegan a una respuesta correcta. Correctamente 36% Incorrecta 48% No contestó 16% De las respuestas incorrectas casi la tercera parte conocen el proceso de multiplicación de fracciones pero errores involuntarios o de confusión hicieron que no lograran llegar al resultado correcto.

V. Simplifica la expresión algebraica $\dfrac{\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{2y}}{y+\dfrac{y}{2}}=$	Tema: Fracciones complejas Reconocimiento de una estructura de división de sumas de fracciones y el uso de recursos para su simplificación	Correctamente 28% Incorrecta 57% No contestó 15% Este ejercicio requiere de mayor entendimiento y habilidades como en toma de decisiones. pues dependiendo de esto puede ser un poco más laborioso el ejercicio~~,~~ casi una tercera parte de las respuestas incorrectas decidieron aplicar correctamente la ley de herradura pero cometieron múltiples errores en la suma de fracciones, y los que intentaron realizar la suma de numerador y denominador en el camino hacían simplificaciones incorrectas.
VI. Resuelve las siguientes ecuaciones: $\dfrac{7x-1}{3}-\dfrac{6-2x}{2x}=\dfrac{1+7x^2}{3x}$ $\sqrt{x}=x-2$ $6(x-5)-(x-5)^2=8$	Tema: ecuaciones, Primer grado, segundo grado (las cuales requieren transformaciones) Reconocimiento una ecuación y ejecución de procesos correspondientes para su transformación y la determinación del o los valores que hacen verdadera la igualdad	Correctamente 4% Incorrecta 65% No contestó 32% Más de la mitad de los estudiantes que respondieron incorrectamente muestran ~~un~~ conocimiento de cómo resolver la ecuación pero tienen fallas en algún proceso como de simplificación o eliminación. Correctamente 8% Incorrecta 71% No contestó 21% Nuevamente más de la mitad de los estudiantes que contestaron incorrectamente abordan adecuadamente la ecuación pues elevan al cuadrado ambos lados de la ecuación pero cometen errores en el desarrollo del binomio o no concluyen. Correctamente 9% Incorrecta 82%

		No contestó 9% Más de la tercera parte de los estudiantes que contestaron incorrectamente desarrollaron la ecuación satisfactoriamente hasta llegar a una ecuación de segundo grado donde errores involuntarios como algún signo o cualquier otro descuido impiden llegar a una respuesta correcta.
VII. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $4x - 4y = 12$ $-6x - 3y = 24$	Tema: resolución de sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Reconocimiento de estructuras y ejecución de los axiomas de la igualdad correspondientes para su transformación	Correctamente 9% Incorrecta 77% No contestó 14% La mitad de los estudiantes que contestaron incorrectamente intentaron aplicar alguno de los métodos de solución, pero no logran implementar una estrategia o no recuerdan el objetivo del método por lo que no logran continuar, la otra mitad de los estudiantes aplicaron alguno de los métodos correctamente y pero no pudieron concluir satisfactoriamente debido a algún error involuntario, de distracción, de simplificación o eliminación.
VIII. Resuelve los siguientes problemas utilizando Algebra 1. La edad de Enrique es la mitad de la de Pedro; la de Juan el triple de la de Enrique y la de Marco el doble de la de Juan. Si las cuatro edades suman 132 años, ¿qué edad tiene cada uno?	Tema: Resolución de problemas Uso de representaciones algebraicas y de los procesos correspondientes para la solución de una ecuación de primer grado.	Correctamente 43% Incorrecta 47%o contestó 10% La mitad de los estudiantes que respondieron incorrectamente hacen un planteamiento y representación algebraica adecuada pero tuvieron algún error durante el proceso de solución. La otra mitad de los estudiantes representaron adecuadamente las edades pero no lograron representarlos con la misma variable por lo que no pudieron continuar.

HABILIDADES Y CONOCIMIENTOS QUE DEBERÁN APLICAR

R1.

Reactivo 1

Reconocimiento del significado de potencia negativa y las transformaciones que implica. Además usar eficazmente las leyes de exponentes para conseguir el objetivo de hacer una representación equivalente con potencias positivas.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$
$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$(a^n)^m = a^{nm}$$

La mayoría aplica el significado de la potencia -1, como inverso, pero ya en segundo momento pierde control del proceso

Los estudiantes que intentan resolver sin éxito el ejercicio se centran en aplicar el exponente -1 en la expresión $(a/b)^n$, pero ya en segundo momento se pierde control del proceso.

R2.

Reactivo 2.1

57% respondió correctamente

34% responde en forma incorrecta

Solo un 9% no contesta

Reactivo 2.2

36% respondió correctamente

46% responde en forma incorrecta

El 18% no contesta

HABILIDADES Y CONOCIMIENTOS QUE DEBERÁN APLICAR

Reconocer un producto notable y recordar su regla de desarrollo o, en su defecto, reconocer un producto repetido y realizarlo.

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a-b)^3 =a^3-3a^2 b+3ab^2-b^3$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$
$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Se observa que los estudiantes tienen una noción de la estructura del desarrollo de un binomio al cuadrado o al cubo, sin embargo, no tienen la habilidad de para realizar las operaciones parciales que se requieren.

R3.

Reactivo 3

HABILIDADES Y CONOCIMIENTOS QUE PRINCIPALMENTE DEBERÁN APLICAR

Recordar que factorizar significa representar la expresión dada en un producto de dos o más factores.

Ejercicio 1
Reconocer un trinomio cuadrado perfecto y expresarlo como un binomio al cuadrado o un producto de binomios repetido.

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)(x-a) = (x-a)^2$$

Reactivo 3.1
40 % lo contesto correctamente
33% lo contesto incorrectamente,
27% no contestaron

Ejercicio 2
Reconocer un trinomio de la forma $x^2 + Bx + C$ factorizable, observar el orden de los términos y ordenarlo.

$$x^2 + ab + (a+b)x \quad se\ ordena\ como\ x^2 + (a+b)x + ab$$

Para factorizar como:

$$(x+a)(x+b)$$

Reactivo 3.2
68 % lo contesto correctamente
19% lo contesto incorrectamente
13% no contestaron
Ejercicio 3
Advertir que en cada par de términos existe un factor común, factorizarlo y después advertir que cada "binomio factor" es un factor común y factorarlo, o reconocer en cada tres términos un factor común y factorizarlo.

$$ax - bx - a + b + ay - by = x(a-b) - (a-b) + y(a-b) = (a-b)(x-1+y)$$

O bien:

$$ax - bx - a + b + ay - by = a(x-1+y) - b(x-1+y) = (a-b)(x-1+y)$$

Reactivo 3.3
14 % lo contesto correctamente
53% lo contesto incorrectamente,
33% no contestaron
R4.
Reactivo R4
Realiza las operaciones indicadas y simplifica lo más que puedas.

1. $\dfrac{2c-d}{c^2d} + \dfrac{c+d}{cd^2} =$

Ejercicio 1

Reconocer la operación suma de fracciones, en el caso particular aplicar el procedimiento determinando el mcm, o aplicando el procedimiento

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Tener la habilidad de reconocer términos semejantes en el numerador para simplificar. Además una adecuada aplicación de leyes de exponentes.

Reactivo 4.1

22 % lo contesto correctamente
65% lo contesto incorrectamente,
13% no contestaron
Un reactivo difícil ya que para un 78% de los estudiantes presentó algún tipo de dificultad.

Ejercicio 2

1. $\frac{x^3-x}{2x^2+6x}\div\frac{5x^2-5x}{2x+6}=$

Para el segundo ejercicio deben recordar el procedimiento para dividir dos fracciones

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Además reconocer que los polinomios del numerador y denominador, en este caso, tienes factores comunes para realizar simplificaciones.

Reactivo 4.2

36 % lo contesto correctamente
48% lo contesto incorrectamente,
16% no contestaron
R5.

Reactivo 5

Simplifica la expresión algebraica

$$\frac{\frac{2}{y}+\frac{1}{2y}}{y+\frac{y}{2}}=$$

HABILIDADES Y CONOCIMIENTOS QUE DEBERÁN APLICAR

Reconocer que hay una suma de fracciones en el numerador y denominador que se deben realizar, para proseguir con la división de las fracciones resultantes, la estructura compleja del ejercicio es:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}+\frac{g}{h}}$$

Después de sumar las fracciones contenidas en el numerador y denominador simplificar una fracción cuya estructura es de la forma

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{AD}{BC}$$

RESULTADOS
28% respondió correctamente
57% responde en forma incorrecta
15% no contesta
Conclusión: esta parece ser la constante de los resultados erróneos, los estudiantes conocen la estructura del procedimiento pero fallan en el proceso de hacer las sumas parciales del numerador y denominador.

R6

Reactivo 6
Resuelve las siguientes ecuaciones:

6.1 $\frac{7x-1}{3} - \frac{6-2x}{2x} = \frac{1+7x^2}{3x}$

6.2
$$\sqrt{x} = x - 2$$

6.3 $6(x-5) - (x-5)^2 = 8$

HABILIDADES Y CONOCIMIENTOS QUE DEBERÁN APLICAR

Conocer el significado de ecuación y la habilidad para realizar su proceso de solución.

Ejercicio 1.
Identificar y realizar la operación de suma de fracciones cuya estructura es: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, en un proceso encaminado al despeje de la incógnita.

Ejercicio 2.
Reconocer la necesidad de transformar la expresión elevando al cuadrado la igualdad para escribirla con potencias enteras, desarrollar el binomio al cuadrado de un lado de la igualdad para obtener una ecuación de la forma:
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Recordar la(s) forma(s) de solución:

iii) Formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

iv) Factorización:

$$ax^2 + bx + c = (dx + n)(ex + m)$$

Ejercicio 3.
Reconocer la estructura de una ecuación de segundo grado factorizable

$$6(x-5) - (x-5)^2 = 8$$

$$6(z) - (z)^2 = 8$$

La cual al ordenar en forma decreciente se obtiene $z^2 - 6z + 8 = 0$ que es posible resolver por factorización

$$(z-2)(z-4) = 0$$

De donde:

$$z_1 = 2 \quad por\ lo\ que \quad x - 5 = 2 \ \ para\ obtener\ x = 7$$

$$z_2 = 4, por\ lo\ que\ x - 5 = 4\ para\ obtener\ x = 9$$

O bien, desarrollando los binomios de la expresión:

$$6(x-5) - (x-5)^2 = 8$$

Que al simplificar queda:

$$x^2 - 16x + 63 = 0$$

Resolviendo

$$x_1 = 9 \ \ y \ \ x_2 = 7$$

RESULTADOS

Reactivo 6.1

4% respondió correctamente
65% responde en forma incorrecta
32% no contesta

Represento gran dificultad para casi toda la muestra, debido a los procesos. Del 65% que respondieron incorrectamente el 8% separaron en fracciones individuales y sumaron los términos semejantes, pero durante el proceso se observan varios errores algebraicos.

Reactivo 6.2

8% respondió correctamente el reactivo 2
71% responde en forma incorrecta
21% no contesta

Del 71% de respuestas incorrectas; el 38% eligen elevar al cuadrado para trabajar con potencias enteras, operan bien el miembro que contiene el radical pero no así el desarrollo del binomio, observándose diferentes errores.

Reactivo 6.3

9% respondió correctamente
82% responde en forma incorrecta
9% no contesta

Del 82% de incorrectas; el 27% realizan las operaciones de la expresión hasta llegar a una ecuación de segundo grado, que intentan resolver por medio de factorización o la fórmula general.
R7
Reactivo 7

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x - 4y &= 12 \\ -6x - 3y &= 24 \end{aligned}$$

HABILIDADES Y CONOCIMIENTOS QUE DEBERÁN APLICAR

Recordar que resolver un sistema de ecuaciones consiste en obtener los valores de las incógnitas.
Recordar alguno de los métodos de solución: eliminación, sustitución, igualación o determinantes y ponerlo en práctica.
RESULTADOS

9 % lo contesto correctamente
77% lo contesto incorrectamente
14% no contestaron

Un tema, aunque no desconocido por la mayoría, no es dominado, sólo un 9% lo contesta correctamente.
Del 77% que contestó incorrectamente; 25% de los estudiantes intentaron, aplicar uno de los métodos mde solución, pero no parece haber un pleno recuerdo de su estrategia.
OBSERVACIÓN
Considerando el 77% de respuestas incorrectas (realizan intentos), más el 9% de respuestas correctas, podemos afirmar que los estudiantes de la muestra cuentan con conocimiento del proceso para resolver un sistema de ecuaciones como el propuesto, sin embargo hay errores durante el proceso que les impide lograr la efectividad.
R8.
Reactivo 8

Resuelve el siguiente problema utilizando Algebra:

La edad de Enrique es la mitad de la de Pedro; la de Juan el triple de la de Enrique y la de Marco el doble de la de Juan. Si las cuatro edades suman 132 años, ¿qué edad tiene cada uno?

HABILIDADES Y CONOCIMIENTOS QUE DEBERÁN APLICAR

Leer correctamente, hacer una correcta interpretación, para hacer una representación en lenguaje algebraico de la relación entre las edades. Hacer un planteamiento adecuado del problema mediante una ecuación de primer grado. Resolución de una ecuación de primer grado.

RESULTADOS

43 % lo contesto correctamente
47% lo contesto incorrectamente
10% no contestaron
Del 47% que contestó incorrectamente, un 21% de los estudiantes realizan un planteamiento algebraico adecuado, pero se equivocaron durante el proceso de solución, el 26% podría no haber realizado una lectura correcta del enunciado. Si sumamos los que contestaron correctamente (43%), mas el 21% que plantea la ecuación hablamos de un 64% que hicieron la representación algebraica en forma correcta.

Del 57 % que evidencian dificultades para hacer representaciones algebraicas, para resolver el problema, se observan tres categorías: aquellos que no lo intentan (parecen no lograr una interpretación del problema), los que hacen intentos logrando hacer representaciones parcialmente correctas y los que hacen la representación algebraica que modela el problema con una ecuación correcta pero no la resuelven en forma correcta(parece haber una interpretación correcta del problema, sin embargo falta habilidad para representar en forma algebraica).
Si consideramos el 43% que responde correctamente con el 47% que intentan pero no logran la respuesta correcta, podemos afirmar que para la mayoría de los estudiantes no es desconocido el proceso para resolver este tipo de problemas, sin embargo todavía no logran ser eficientes en los procesos.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES POR REACTIVOS

- El reactivo 3.2. tuvo el mayor número de respuestas correctas (64) enseguida el reactivo 2.1. (57) en particular estos dos ejercicios son los que tienen un procedimiento más corto de los demás, esto nos dice que hay menor probabilidad de cometer errores.
- El reactivo 6.3. tuvo el mayor número de respuestas incorrectas (82), enseguida el reactivo 7 con (77) ambos ejercicios tienen un procedimiento más largo y vimos en el análisis de ambos como la mayoría de los estudiantes comete errores involuntarios o de distracción antes de concluir el ejercicio
- El reactivo 3.3 fue el menos contestado (33) aquí podemos ver que los estudiantes tienen el conocimiento pues saben que método aplicar pero no logran llevar a cabo el proceso, se confunden o no recuerdan cómo llegar a la solución.
- Los reactivos 2 y 12 fueron los más contestados (91) ambos tienen que ver con binomios cuadrados tienen claro ese concepto y seguramente por esto es que se atreven a resolverlo, aunque en el segundo ejercicio no logran simplificar correctamente y se convierte a sus ojos en algo más complejo.
- Los reactivos 3, 8 y 14 tienen cantidades muy cercanas entre la correctas e incorrectas, al analizarlos nos damos cuenta que la mayoría de estudiantes que contestaron incorrectamente abordaron bien los ejercicios pero como ya comentamos anteriormente no lograron llegar a la solución por errores en el proceso.
- Respecto al tema de fracciones podemos claramente observar que en el reactivo 4.2., respecto al reactivo 4.1 existe un porcentaje mayor de estudiantes que obtuvieron la respuesta correcta, no es desconocido que a los estudiantes se les dificulta más el proceso de suma de fracciones que el de multiplicación lo que también aquí se detecta, nuevamente quizá se deba a un mayor número de pasos para uno que para el otro.
- Pareciera como que al aumentar la cantidad de procesos aritméticos y/o algebraicos en un reactivo aumentara el porcentaje de obtener correcto el reactivo, es decir es más fácil cometer al menos un error en un largo proceso que en uno que simplemente se aplica la regla, como por ejemplo el reactivo 2.1.
- En la resolución de ecuaciones simultaneas podemos ver que los estudiantes recuerdan y saben aplicar los métodos de solución pero algunos muestran cierta inseguridad que no les permite continuar, o falta de destreza, otros no saben cómo continuar
- En el último reactivo podemos ver con gran gusto que los estudiantes han superado la parte epistemológica pues saben representar y plantear algebraicamente el problema y donde tienen dificultades al igual que los demás reactivos es en la parte procedimental, errores involuntarios, descuidos, entre otros.
- Los estudiantes realizan procesos que indican un conocimiento algebraico, en diversas situaciones vividas en el terreno de la práctica, sin embargo no logran concluir los procesos satisfactoriamente

CONCLUSIONES ENTRE ESTUDIANTES.

- Los estudiantes de la Informática obtuvieron un mayor porcentaje (40%) de respuestas correctas respecto a las otras dos especialidades y un menor porcentaje de no contestadas.
- Los estudiantes de Puericultura obtuvieron un mayor porcentaje de respuestas incorrectas (18%) y un mayor porcentaje de no contestadas (23%).
- Ningún estudiante obtuvo un porcentaje mayor de 80
- Solo 3 estudiantes tuvieron 80 dos de ellos de Informática y una de
- El 10% de los estudiantes tuvo calificación aprobatoria
- Casi el 29% de los estudiantes obtuvieron entre 30 y 50
- 37 % de los estudiantes obtuvieron entre 10 y 30
- 16% de los estudiantes obtuvieron entre 1 y 10

CONCLUSIONES GENERALES

En nuestro análisis de la muestra se obtiene que la mayoría de los estudiantes cuentan con el conocimiento para realizar la actividad pero, descuidos involuntarios los hacen parecer no competentes, se observa que los estudiantes tienen una noción por ejemplo de la estructura del desarrollo de un binomio al cuadrado, sin embargo, no tienen la habilidad para realizar las operaciones parciales que se requieren, mientras más pasos se requieran para llegar a la solución más estudiantes cometen errores antes de ello.

Al transcurrir el bachillerato se logra ver que conocen los contenidos del álgebra, Aplican los contenidos del álgebra pertinentemente, logran una representación simbólica adecuada pero fallas operacionales impiden llegar al resultado final correcto.

Apegándonos a la definición establecida podemos determinar que los estudiantes al concluir el bachillerato muestran los elementos fundamentales para la competencia Algebraica. Aunque en algunos ejercicios más elaborados no logran concluir satisfactoriamente, pero se logran los elementos anteriores.

CUESTIONARIO ALGEBRA

NOMBRE:____ GRUPO:_____ FECHA:_______

Realiza lo que se te pide debiendo anotar tu procedimiento, sin borrar intentos, solo táchalos. Gracias por tu colaboración. Puedes usar el frente y reverso de cada hoja

I. Simplifica de tal manera que no haya exponentes negativos

$$\left(\frac{15x^{-1}y^{2}}{5xy^{-4}}\right)^{-1}$$

II. Realiza los siguientes productos notables

1. $\left(3x-\sqrt{y}\right)^{2} =$

2. $\left(\frac{1}{5}-\frac{5a}{2}\right)^{3} =$

III. Factoriza las siguientes expresiones

1. $16+40x^{2}+25x^{4} =$

2. $x^{2}-18+7x =$

3. $ax-bx+b-a-by+ay =$

IV. Realiza las operaciones indicadas y simplifica lo más que puedas.

2. $\frac{2c-d}{c^{2}d}+\frac{c+d}{cd^{2}} =$

3. $\frac{x^{3}-x}{2x^{2}+6x} \div \frac{5x^{2}-5x}{2x+6} =$

V. Simplifica la expresión algebraica

$$\frac{\frac{2}{y}+\frac{1}{2y}}{y+\frac{y}{2}} =$$

VI. Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{7x-1}{3} - \frac{6-2x}{2x} = \frac{1+7x^2}{3x}$

2. $\sqrt{x} = x - 2$

3. $6(x-5) - (x-5)^2 = 8$

VII. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x - 4y &= 12 \\ -6x - 3y &= 24 \end{aligned}$$

VIII. Resuelve los siguientes problemas utilizando Algebra

1. La edad de Enrique es la mitad de la de Pedro; la de Juan el triple de la de Enrique y la de Marco el doble de la de Juan. Si las cuatro edades suman 132 años, ¿qué edad tiene cada uno?

2. Un número está compuesto de tres cifras; la suma de las cifras es 16. La cifra de las unidades es el doble de la cifra de las centenas, y cuando sumamos 297 al número, obtenemos como resultado el número escrito al revés. ¿Cuál es el número?

ANEXO 1

SEMS DGETI CBTis 149

ACADEMIA DE MATEMÁTICAS SEGUNDO EXAMEN PARCIAL Álgebra_ 3

Nombre del alumno ____Grupo________

Realiza lo que se te pide. Para cada ejercicio debes anotar tu procedimiento

1. Factoriza de manera completa las siguientes expresiones:

a) $a-a^3=$

b) $x^3-2x^2+x-2=$

c) $x^2+x-42=$

2. Realiza las siguientes operaciones indicadas con fracciones algebraicas.

a) $5-\frac{2}{3y}=$

b) $\frac{1}{(t+2)^2}+\frac{t}{3(t+2)}=$

c) $\left(\frac{z^2-9}{z^2+2z-3}\right)\left(\frac{z+1}{5z-15}\right)=$

d) $\left(\frac{x+2xy}{3x^2}\right)\div\left(\frac{2y+1}{6x}\right)=$

ANEXO 2

SEMS

SUBSECRETARIA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
INSTRUMENTO DE REGISTRO DE ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

A) IDENTIFICACIÓN: Dirección General de Educación Tecnológica Industrial | **PLANTEL: CBTis No. 149**

Plantel: CBTIS 149		Profesor(es): MIEMBROS DEL ACADEMIA DE MATEMATICAS				
Asignatura: Álgebra	Semestre : I	Especialidades: • Componente Básico.	Periodo Escolar: **Agosto-2012 / Enero-2013**	Fecha : 8 de Agosto de 2012.	**16 Semanas**	**Núm. Secuencias Didácticas: 5**

B) INTENCIONES FORMATIVAS

Propósitos de la Secuencia Didáctica : *.- Que los estudiantes comprendan los conceptos de **LENGUAJE ALGEBRAICO** buscando que sea capaz de interactuar con su entorno y abstraer los modelos matemáticos de la misma, comprender la importancia de la misma en su vida cotidiana. Que sea capaz de razonar y resolver los problemas que se le plantean.*

Tema Integrador : **Alimentos.**	*Otras asignaturas que trabajan el tema integrador :* *Geometría y Trigonometría, Estadística, Física, Economía, Administración y Ecología.*

CATEGORIAS

Espacio (X) *Tiempo ( )* *Diversidad (x)* *Energía ( )* *Materia ( )*

Diversidad *.-Analizar diferentes situaciones que conlleven a la práctica de lo aprendido o relacionarlo con su vida cotidiana. La gran variedad de lo cotidiano establece el marco de diversidad.*

Espacio *.- - Toda la naturaleza ocupa un lugar en el universo, por lo que estudiar la naturaleza de los objetos se desarrolla la categoría del espacio y su comprensión se relaciona con el desarrollo del Algebra.*

Bibliografía

Alarcón B. (1994) *Libro para el Maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*. México D.F. Secretaría de Educación Pública.

Álvarez y Palmas (2000). *Matemáticas 1*. Editorial Santillana México D.F.

Arzarrello, Bazzini & Chiappini (2001). A Model for Analyzing Algebraic processes of thinking. En: Sutherland, Rojano, Bell & Lins (Eds.) *PERSPECTIVES ON SCHOOL ALGEBRA*. (pp. 61-82). Kluwer Academic Publishers.

Bednarz N., Kieran C., Lee L., et al (1996) Approaches to Algebra Perspectives for Research and Teaching. Nadine Bednarz, Carolyn Kieran & Lesly Lee, (Editors). *APPROACHES TO ALGEBRA Perspectives for Research and Teaching* (pp. 3-12). Kluwer Academic Publishers. Netherlands, 1996.

Blomhoj y Jensen (2007) What´s all the fuss about competencies?. Blum, et al. (Eds.) Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study. Springer. USA.

Booth, L. (1989). A Question of Structure. In S. Wagner and C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 57-59). Reston: NCTM & Lawrence Erlbaum.

De Allende C., Morones G., (2006). Glosario de términos vinculados con la cooperación académica. México. ANUIES. www.anuies.mx/c_nacional/pdf/glosariocoopnal

Díaz Barriga, A. (2006) El enfoque de competencias en educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? Perfiles educativos. Vol. XXXVIII, núm. 111

Dreyfus T., y Hoch M.,(2004) Equations a structural approach. En: Hornes M., Fuglesad A., (Eds). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004* (Pp. 153-155). Bergen University College. Vol 1, PME28-2004.

Fernández F. (1997) *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Gallardo (2002) The Extension of the Natural Number Domain to the Integers in the Transition from Arithmetic to Algebra. Educational Studies in Mathematics. Kluwer Academic Publishers. Vol 49, pp 171-192.

Gimeno J. (2008) Diez tesis sobre la aparente utilidad de las competencias en educación. En Gimeno J. et al (Eds) Educar por competencias, ¿qué hay de nuevo?. Ediciones Morata. Madrid, España.

Godino, J. (2002) Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. En: //www.ugr.es/local/Godino/

Hernández, A. (2010) Competencias algebraicas de los estudiantes que ingresan al bachillerato. Tesis Doctoral CINVESTAV-IPN. Mèxico D.F.

Janvier (1996). Modeling and the Initiation into Algebra. Nadine Bednarz, Carolyn Kieran & Lesly Lee, (Editors). *APPROACHES TO ALGEBRA Perspectives for Research and Teaching* (pp. 225-236). Kluwer Academic Publishers. Netherlands. 1996.

Kieran, C. (1992) The learning and teaching of school algebra. En: D.A Growns (Ed.) *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Co.

Kieran C. (2003) The Transition from arithmetic to algebra: a model for conceptualizing school algebra and the role of computer technology in supporting the development of algebraic thinking. En: Eugenio Filloy (Coordinador). *Matemática Educativa Aspectos de*

la Investigación Actual. (pp.121-142). Fondo de Cultura Económica-CINVESTAV del IPN. México D.F.
Kruterskii V. (1976) *The Psichology of Mathematical Abilities in School Children*. The University of Chicago Press.
Lins, R. (2001) The production of Meaning for Algebra: a Perspective Based on a Theoretical Model of Semantic Fields. En: Sutherland, Rojano, Bell & Lins (Eds.) *PERSPECTIVES ON SCHOOL ALGEBRA*. (pp.37-60) Kluwer Academic Publishers.

MacGregor M. (2004). Goals and Content of an Algebra Curriculum for the Compulsory Years of Schooling. En Stacey K., Chick H., Kendal M., (Eds.) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study*. (p. 314) Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. Nadine Bednarz, Carolyn Kieran & Lesly Lee, (Editors). *APPROACHES TO ALGEBRA Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers. Netherlands. 1996.
National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston. Va.: NCTM.

Mogens N., (2003) Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Proyect. In Gagatsis, A., y Papastavridis, S. (eds) , 3o Mediterranean Conference on Mathematical Education. Athens, Greece.

Mogens, Blum y Galbrath (2007) Part 1, INTRODUCCIÖN. Blum, et al. (Eds.) Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study. Springer. USA. pp3-32

OCDE y INECSE (2004) Marcos Teóricos PISA 2003.Conocimientos y Destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. Traducción de Encarnación Belmonte. Ministerio de Educación y Ciencia, España.
Pimm D. (1995). Algebra Transforming. En Pimm D. (Ed) *Symbols and Meanings in School Mathematics*. (pp. 88-117). Routledge. London and New York.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different side of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers. Netherland.
Schoenfeld y Arcavi (1988) On The Meaning of Variable. En: B. Moses (Ed.). *Algebraic Thinking Grades K-12. Readings for NCTM school-based Journals and other publications* (pp. 150-156). NCTM Reston Virginia.

Sutherland R. (2003). Mathematics Education: a case for survival. En: Eugenio Filloy (Coordinador) *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual*. (Pp. 333-357) Fondo de cultura económica CINVESTAV del IPN. México D.F.
SEP (1993) *Plan y Programas de Estudio de Secundaria*. México D.F. Secretaría de Educación Pública.

SEP (2004) Plan y Programas de Educación Preescolar. México D.F. Secretaría de Educación Pública.
SEP. (2008) Reforma Integral de la Educación Media Superior. México. D.F. Subsecretaría de Educación Media Superior.
Tobón, Rial, Carretero y García (2006). *Competencia calidad y educación superior*. Alma Mater Magisterio. Bogotá, Colombia.
Ursini S. (2001). General methods: A way of entering the world of algebra. En: Sutherland, Rojano, Bell & Lins (Eds.) *PERSPECTIVES ON SCHOOL ALGEBRA*. (Pp. 209-229) Kluwer Academic Publishers.

Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) Enseñanza del Algebra Elemental. Una propuesta alternativa. Trillas, México D.F.

Ursini, S. y Trigueros, M., (2003) First-Year Undergraduates' Difficulties in Working with Different Uses of Variable. *CBMS Issues in Mathematics Education*. (Pp. 1-29) Volume 12, 2003.

Wagner y Kieran, C. (1989) An agenda for research on the learning and teaching of algebra. En: B. Moses (Ed.). *Algebraic Thinking Grades K-12. Readings for NCTM School-Based Journals and other publications* (pp. 362-373). NCTM Reston Virginia.

Weinert, F. (2001) Concepto de competencia: una aclaración conceptual. En Rychen S y Hersh L. Editores. Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida. México: Fondo de Cultura Económica 2004.