



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Y

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNAM - UMSNH

Teoremas de Murnaghan y Littlewood Sobre Productos de Kronecker de Funciones Simétricas

T E S I N A

Que para optar por el grado de:
Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Grover Colque Diaz

Director:

Dr. Ernesto Vallejo Ruiz

Centro de Ciencias Matemáticas. UNAM Morelia

Morelia, Michoacán, México

Septiembre de 2021

Índice

Resumen/Abstract	II
Introducción	1
1. Preliminares	2
2. Biálgebra de funciones simétricas	4
3. Producto de Kronecker de funciones simétricas	7
4. Fórmulas de Murnaghan y Littlewood	10
5. Algunos Productos de Kronecker	18

Teoremas de Murnaghan y Littlewood Sobre Productos de Kronecker de Funciones Simétricas

Grover Colque Diaz

Resumen

El producto de Kronecker de dos funciones simétricas homogéneas f y g , ambos de grado n , se define por $f * g = \text{ch}(\varphi \cdot \psi)$, donde ch es la función característica de Frobenius y φ, ψ son caracteres complejos del grupo simétrico S_n tales que $f = \text{ch}(\varphi)$ y $g = \text{ch}(\psi)$. En general, calcular productos de Kronecker no es tarea fácil aunque existen algunos resultados al respecto. Dos de los resultados más importantes sobre este producto fueron publicados por Murnaghan en 1956 y Littlewood en 1958 aunque la demostración de Littlewood no es fácil de entender y Murnaghan nunca publicó su demostración.

En este trabajo, utilizando el lenguaje de funciones simétricas, se demuestran los dos resultados anteriormente mencionados; para ello nos basamos en un resultado publicado en 1991 por J. Y. Thibon a partir del cual, los resultados de Murnaghan y Littlewood, se deducen como consecuencias de este resultado que es más general y que también se demuestra en este trabajo.

Palabras Clave: función simétrica, carácter, álgebra graduada, biálgebra, función característica, producto de Kronecker.

Abstract

The Kronecker product of two homogeneous symmetric functions f and g , both of degree n , is defined by $f * g = \text{ch}(\varphi \cdot \psi)$, where ch is the characteristic map of Frobenius and φ, ψ are complex characters of the symmetric group S_n such that $f = \text{ch}(\varphi)$ and $g = \text{ch}(\psi)$. In general, calculating Kronecker products is not an easy task, although there are some results in this regard. Two of the most important results on this product were published by Murnaghan in 1956 and Littlewood in 1958 although Littlewood's proof is not easy to understand and Murnaghan never published his proof.

In this work, using the language of symmetric functions, the two previously mentioned results are demonstrated; for this we are based on a result published in 1991 by J. Y. Thibon from which the results of Murnaghan and Littlewood are deduced as consequences of this result which is more general and which is also demonstrated in this work.

Introducción

La función característica de Frobenius $\text{ch} : R_n \longrightarrow \Lambda^n$ es un isomorfismo de módulos entre el $\mathbb{Z}$ -módulo de caracteres complejos del grupo simétrico S_n y el $\mathbb{Z}$ -módulo de funciones simétricas homogéneas de grado n . Este isomorfismo permite trasladar el producto usual de caracteres de R_n a Λ^n y definir un nuevo producto de funciones simétricas llamado **producto interior** o **producto de Kronecker**.

En 1956 Murnaghan [2] y en 1958 Littlewood [1] publican dos resultados importantes sobre productos de Kronecker aunque la demostración de Littlewood no es fácilmente comprensible, y por otro lado Murnaghan nunca publicó una demostración de su resultado. Posteriormente, en 1991 J. Y. Thibon publica un artículo [4] en donde se exponen las demostraciones de ambos resultados, siendo esta la primera demostración del teorema de Murnaghan y la tercera del Teorema de Littlewood ya que una segunda demostración fue dada por C. J. Cummins en 1988. La manera en la que Thibon procede es interesante, demuestra un resultado general (Teorema 4.11) a partir del cual los teoremas de Murnaghan y Littlewood se deducen como simples consecuencias de este resultado, a pesar de ello el artículo de Thibon no ha sido tomado muy en cuenta por la comunidad científica, y dado los importantes resultados que este artículo contiene vale la pena poner mayor atención en ello, sobre todo porque en la actualidad los productos de Kronecker siguen siendo de mucho interés y los teoremas de Murnaghan y Littlewood todavía siguen desempeñando un papel muy importante en esta teoría.

Los teoremas de Murnaghan y Littlewood constituyen dos de los principales resultados sobre productos de Kronecker desde los inicios de esta teoría hasta el artículo de Thibon. Por tal motivo, el objetivo principal de este trabajo son precisamente el estudio de estos dos teoremas. La demostración de estos teoremas la hacemos como lo hace Thibon en [4], utilizando su resultado general (Teorema 4.11) el cual también será demostrado en este trabajo, y como consecuencia de este resultado se prueban los teoremas de Murnaghan y Littlewood. A diferencia de Thibon, quien demuestra sus resultados utilizando el lenguaje de λ -anillos, todos los resultados de este trabajo son demostrados utilizando únicamente el lenguaje de funciones simétricas, esto constituye parte de la contribución científica de este trabajo ya que los resultados de Thibon se traducen a un lenguaje que es más comprensible.

Los resultados sobre funciones simétricas expuestos en este trabajo se los puede encontrar en [6] o [3], sin embargo también se agregó material extra que no contiene [6] y que algunos de ellos se encuentran solamente bosquejados en [3], con este material adicional se amplían los detalles de las demostraciones de Thibon y por tanto se exponen demostraciones más completas.

El trabajo se estructura en cinco secciones. En la sección 1 se introduce principalmente la notación y algunos resultados sobre funciones simétricas. En la sección 2 se estudia la estructura de biálgebra de funciones simétricas. En el capítulo 3 se define el producto de Kronecker y se estudia algunos resultados que relacionan este producto con la biálgebra de funciones simétricas. Estas dos secciones se basan en [3] y las notas de un curso de combinatoria algebraica dictado por el Dr. E. Vallejo. En la sección 4 se prueban los resultados más importantes, el teorema principal de Thibon (Teorema 4.11) y los teoremas de Murnaghan (Corolario 4.15) y Littlewood (Corolario 4.19). Finalmente en la sección 5 se exponen fórmulas para productos de Kronecker de algunas funciones simétricas, estos se deducen como consecuencia de otro resultado de Thibon (Teorema 4.18).

1. Preliminares

Sean $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $x = (x_1, x_2, \dots)$ un conjunto de variables. Una **composición débil** de n es una sucesión $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ de enteros no negativos tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i = n$. Una **función simétrica homogénea** (ó simplemente función simétrica) de grado n sobre $\mathbb{Z}$ es una serie formal $f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{Z}[[x]]$, donde α recorre sobre todas las composiciones débiles de n , $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$, y $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots) = f(x_1, x_2, \dots)$ para toda permutación $\sigma \in S(\mathbb{N})$. El $\mathbb{Z}$ -módulo de funciones simétricas homogéneas de grado n sobre $\mathbb{Z}$ se denota por Λ^n . Dado que $f \in \Lambda^m$ y $g \in \Lambda^n$ implica que $fg \in \Lambda^{m+n}$, el $\mathbb{Z}$ -módulo graduado $\Lambda = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n$ tiene estructura de $\mathbb{Z}$ -álgebra graduada. En ocasiones se consideran funciones simétricas con coeficientes racionales, esta $\mathbb{Q}$ -álgebra se denota por $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ una composición débil de n . λ es una **partición** de n , y se denota $\lambda \vdash n$, si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Las **partes** de λ son los λ_i positivos y su **longitud**, denotado por $\ell(\lambda)$, es el número de sus partes. A menudo se usa la notación $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$ donde m_i es el número de partes iguales a i ; además se definen los números $z_{\lambda} = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \dots n^{m_n} m_n!$ y $\varepsilon_{\lambda} = (-1)^{n-\ell(\lambda)} = \text{sgn}(\sigma)$, donde $\sigma \in S_n$ es una permutación con tipo cíclico $(1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$. El conjunto de particiones de n se denota por $\mathcal{P}(n)$ y $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{P}(n)$, donde la partición del cero es $\emptyset = (0, 0, \dots)$. Si $\lambda \in \mathcal{P}$, $|\lambda|$ denota el número del cual λ es partición.

El **diagrama** de λ es el conjunto $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i \leq \ell(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ y se representa ordenando las parejas (i, j) como las entradas de una matriz y colocando un cuadro por cada pareja (i, j) . La partición **conjugada** de λ es la partición $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{\lambda_1})$, donde λ'_j es el número de cuadros en la j -ésima columna del diagrama de λ . Si $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ y $\mu_i \leq \lambda_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ se denota $\mu \subseteq \lambda$, esto significa que el diagrama de μ está contenido en el diagrama de λ ; en este caso, λ/μ denota el diagrama que resulta de quitarle el diagrama de μ al diagrama de λ . Si $\mu = \emptyset$ se denota simplemente λ en lugar de $\lambda/\emptyset$.

Sean $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$, $\mu \subseteq \lambda$ y α una composición débil de $|\lambda| - |\mu|$. Una **tabla de Young semiestándar (TYSE)** de la forma λ/μ y contenido α es un diagrama λ/μ cuyos cuadros están etiquetados con números naturales de manera que contiene α_i cuadros etiquetados con i , es débilmente creciente en cada fila y es estrictamente creciente en cada columna. El número de TYSE's de la forma λ/μ y contenido α se denota por $K_{\lambda/\mu, \alpha}$ y se llaman **números de Kostka**.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathcal{P}$, se define las funciones simétricas **monomiales** por $m_\emptyset = 1$ y $m_\lambda = \sum_\alpha x^\alpha$ donde α recorre sobre todas las permutaciones distintas $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ de $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$; las **elementales** por $e_0 = 1$, $e_n = m_{1^n}$ y $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots$; las **homogéneas completas** por $h_0 = 1$, $h_n = \sum_{\mu \vdash n} m_\mu$ y $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots$; las **sumas de potencias** por $p_0 = 1$, $p_n = m_n$ y $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$; y las **funciones de Schur** por $s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T$ donde T recorre sobre todas las TYSE's de la forma λ/μ y, si el contenido de T es $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $x^T = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$. Si $\lambda = (n)$ se escriben simplemente m_n , e_n , h_n , p_n y s_n en lugar de $m_{(n)}$, $e_{(n)}$, $h_{(n)}$, $p_{(n)}$ y $s_{(n)}$ respectivamente. A partir de su definición no queda claro que las funciones de Schur sean simétricas, el Teorema 7.10.12 de [6] muestra que sí lo son. Además, si $|\lambda| - |\mu| = n$, entonces $s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu \vdash n} K_{\lambda/\mu, \nu} m_\nu$.

Los conjuntos $\{m_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$, $\{e_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$, $\{h_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$ y $\{s_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$ son $\mathbb{Z}$ -bases de Λ como módulo sobre $\mathbb{Z}$; el conjunto $\{p_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$ no es una $\mathbb{Z}$ -base de Λ , pero sí es una $\mathbb{Q}$ -base de $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ (ver [3]). Como anillos, Λ puede ser visto como anillo de polinomios en $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ o como anillo de polinomios en $\{h_i : i \in \mathbb{N}\}$; y $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ como anillo de polinomios en $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$. De la identidad de Jacobi-Trudi y su dual (Teorema 7.16.1 y Corolario 7.16.2 de [6]) se deduce que

$$h_n = s_n = e_{(1^n)}.$$

Dado que $e_1, e_2, \dots$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Z}$ y generan a Λ como $\mathbb{Z}$ -álgebra, cualquier homomorfismo de álgebras queda determinado por sus valores en este conjunto de generadores. En particular, el homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -álgebras $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ definido en generadores por $\omega(e_i) = h_i$ (en consecuencia $\omega(e_\lambda) = h_\lambda$) es una involución (Teorema 7.6.1 de [6]) y por tanto un isomorfismo de álgebras. Además, la Proposición 7.7.5 y Teorema 7.15.6 de [6] demuestran que

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda p_\lambda \quad ; \quad \omega(s_{\lambda/\mu}) = s_{\lambda'/\mu'}. \quad (1.1)$$

Λ tiene un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ definido en bases por $\langle m_\lambda, h_\mu \rangle_\Lambda = \delta_{\lambda, \mu}$, donde $\delta_{\lambda, \mu}$ es la delta de Kronecker. Con este producto escalar, las funciones de Schur $\{s_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$ forman una base ortonormal de Λ (Corolario 7.12.2 de [6]), y las funciones $\{p_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$ forman una base ortogonal de $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ (Proposición 7.9.3 de [6]), siendo más precisos se tiene

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\Lambda = z_\lambda \delta_{\lambda, \mu}. \quad (1.2)$$

Además, el isomorfismo ω es una isometría con este producto escalar, es decir $\langle \omega(f), \omega(g) \rangle_\Lambda = \langle f, g \rangle_\Lambda$ (Proposición 7.9.5 de [6]).

Si $k \in \mathbb{N}$, $f \in \Lambda^n$ y $u \in \Lambda^{n+k}$, entonces existe un único elemento $D_f(u) \in \Lambda^k$ tal que para todo $v \in \Lambda^k$,

$$\langle D_f(u), v \rangle_\Lambda = \langle u, fv \rangle_\Lambda. \quad (1.3)$$

Si $u \in \Lambda^m$ y $m < n$, se define $D_f(u) = 0$. Entonces, utilizando la identidad 1.3, es fácil ver que la aplicación $D_f : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ definida por $u \mapsto D_f(u)$ es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos; esto permite definir un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos $D : \Lambda \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(\Lambda)$ como $D(f) = D_f$. Además si $u, v \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned} \langle D(fg)(u), v \rangle_\Lambda &= \langle D_{fg}(u), v \rangle_\Lambda = \langle u, (fg)v \rangle_\Lambda = \langle u, g(fv) \rangle_\Lambda = \langle D_g(u), fv \rangle_\Lambda \\ &= \langle D_f(D_g(u)), v \rangle_\Lambda = \langle (D_f D_g)(u), v \rangle_\Lambda, \end{aligned}$$

por tanto $D(fg) = D_f D_g$. Así, $D : \Lambda \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(\Lambda)$ es en realidad un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -álgebras. Además, por Teorema 7.15.4 de [6] se tiene que

$$D_{s_\mu}(s_\lambda) = s_{\lambda/\mu}. \quad (1.4)$$

2. Biálgebra de funciones simétricas

Todos los productos tensoriales que consideremos en esta y las siguientes secciones serán siempre sobre $\mathbb{Z}$.

Sean $x = (x_1, x_2, \dots)$ y $y = (y_1, y_2, \dots)$ dos conjuntos de variables. Se denota por $\Lambda(x) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(x)$ la $\mathbb{Z}$ -álgebra de funciones simétricas en las variables $(x_1, x_2, \dots)$. El producto tensorial $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y) = \bigoplus_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} \Lambda^k(x) \otimes \Lambda^l(y)$, que denota el módulo de funciones simétricas en las variables x y y , tiene estructura de $\mathbb{Z}$ -álgebra con el producto definido por

$$(f_1 \otimes g_1)(f_2 \otimes g_2) = (f_1 f_2) \otimes (g_1 g_2).$$

Además, si $\{u_\lambda(x) : \lambda \in \mathcal{P}\}$ y $\{v_\mu(y) : \mu \in \mathcal{P}\}$ son bases de $\Lambda(x)$ y $\Lambda(y)$ respectivamente, entonces el conjunto $\{u_\lambda(x) \otimes v_\mu(y) : \lambda, \mu \in \mathcal{P}\}$ es una base de $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$.

Lema 2.1. *La correspondencia $f(x) \otimes g(y) \longmapsto f(x)g(y)$ define un homomorfismo inyectivo de álgebras $F : \Lambda(x) \otimes \Lambda(y) \longrightarrow \mathbb{Z}[[x, y]]$.*

El álgebra $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ se identifica con su imagen bajo F , en consecuencia los elementos de $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ se denotan indistintamente como $f(x) \otimes g(y)$ o como $f(x)g(y)$. Con esta identificación, el álgebra $\Lambda(x, y) \subseteq \mathbb{Z}[[x, y]]$ de funciones simétricas en el conjunto de variables $\{x, y\} = \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una

subálgebra propia de $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ ya que si $f \in \Lambda$ es de grado positivo, entonces $f(x) = f(x) \otimes 1$ es simétrica en los conjuntos de variables x y y pero no en el conjunto de variables $\{x, y\}$.

Sean $z = \{x, y\} = (x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots)$, $\varphi : x \longrightarrow y$ y $\psi : x \longrightarrow z$ dos biyecciones. Por medio de φ y ψ , $\Lambda(x)$ se identifica con $\Lambda(y)$ y $\Lambda(z)$ simplemente reemplazando cada variable x_i con su imagen bajo φ y ψ respectivamente. Por tanto, la aplicación $\Delta : \Lambda(z) \longrightarrow \Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ definida por

$$\Delta(f(z)) = f(x, y) \in \Lambda(x, y) \subseteq \Lambda(x) \otimes \Lambda(y),$$

es una **comultiplicación** coconmutativa de Λ ; y la aplicación $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $\varepsilon(f) = f$ si $f \in \Lambda^0$ y $\varepsilon(f) = 0$ en otro caso, es una **counidad** de Δ . Por tanto, $(\Lambda, \Delta, \varepsilon)$ es una $\mathbb{Z}$ -coálgebra coconmutativa, mas aún Δ y ε son homomorfismos de álgebras, en consecuencia si $M : \Lambda \otimes \Lambda \longrightarrow \Lambda$ es la multiplicación de Λ y $\eta : \mathbb{Z} \longrightarrow \Lambda$ la inclusión $\mathbb{Z} \cong \Lambda^0 \subseteq \Lambda$ entonces, $(\Lambda, M, \eta, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra conmutativa y coconmutativa.

Sean $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}$ tal que $\mu \subseteq \lambda$. Entonces, dado que las funciones de Schur forman una $\mathbb{Z}$ -base de Λ , existen enteros $c_{\mu, \nu}^\lambda$ tales que

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu, \nu}^\lambda s_{\nu}. \quad (2.1)$$

Los números $c_{\mu, \nu}^\lambda$ se llaman **coeficientes de Littlewood-Richardson**.

Teorema 2.2. *Para todo $\lambda \in \mathcal{P}$,*

$$\Delta(s_{\lambda}) = \sum_{\mu} s_{\mu} \otimes s_{\lambda/\mu} = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu, \nu}^\lambda s_{\mu} \otimes s_{\nu}.$$

Demostración. Consideremos el alfabeto ordenado $A = \{1 < 2 < \dots < 1^* < 2^* < \dots\}$ y sea T una TYSE en el alfabeto A de la forma $\lambda \in \mathcal{P}$ y contenido $(a_1, a_2, \dots, a_{1^*}, a_{2^*}, \dots)$. Denotamos $(xy)^T = \prod_i x_i^{a_i} \prod_j y_j^{a_{j^*}}$, entonces por definición de funciones de Schur se tiene que $s_{\lambda}(x, y) = \sum_T (xy)^T$. La parte de T ocupada por $1, 2, \dots$ es una TYSE de la forma μ , para alguna $\mu \subseteq \lambda$; en consecuencia, la parte ocupada por $1^*, 2^*, \dots$ es una TYSE de la forma λ/μ . Por tanto

$$s_{\lambda}(x, y) = \sum_{\mu \subseteq \lambda} s_{\mu}(x) s_{\lambda/\mu}(y) = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu, \nu}^\lambda s_{\mu}(x) s_{\nu}(y),$$

donde la segunda igualdad sigue de la identidad (2.1). Esto concluye la prueba. $\square$

Dado que $h_n = s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se sigue inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que*

$$\Delta(h_n) = \sum_{a+b=n} h_a \otimes h_b.$$

El álgebra $\Lambda \otimes \Lambda$ tiene un producto escalar definido por

$$\langle f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2 \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} = \langle f_1, f_2 \rangle_{\Lambda} \langle g_1, g_2 \rangle_{\Lambda}$$

para todo $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \Lambda$. Con respecto a este producto escalar, la multiplicación M y comultiplicación Δ de Λ son adjuntas tal como muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Sean $f, g, h \in \Lambda$. Entonces*

$$\langle \Delta(f), g \otimes h \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} = \langle f, M(g \otimes h) \rangle_{\Lambda}.$$

Demostración. Basta demostrar para funciones de Schur s_{λ} , s_{μ} y s_{ν} . Por Teorema 2.2 se tiene que

$$\langle \Delta(s_{\lambda}), s_{\mu} \otimes s_{\nu} \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta}^{\lambda} \langle s_{\alpha} \otimes s_{\beta}, s_{\mu} \otimes s_{\nu} \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} = c_{\mu, \nu}^{\lambda}.$$

Por otro lado, por las identidades (1.3), (1.4) y (2.1), se tiene

$$\langle s_{\lambda}, s_{\mu} s_{\nu} \rangle_{\Lambda} = \langle D_{s_{\mu}}(s_{\lambda}), s_{\nu} \rangle_{\Lambda} = \langle s_{\lambda/\mu}, s_{\nu} \rangle_{\Lambda} = \sum_{\alpha} c_{\mu, \alpha}^{\lambda} \langle s_{\alpha}, s_{\nu} \rangle_{\Lambda} = c_{\mu, \nu}^{\lambda}.$$

El teorema se concluye de las dos anteriores igualdades. $\square$

Por la coconmutatividad de Δ y la identidad (1.4), la primera igualdad del Teorema 2.2 se puede escribir como

$$\Delta(s_{\lambda}) = \sum_{\mu} (D_{s_{\mu}}(s_{\lambda})) \otimes s_{\mu}. \quad (2.2)$$

Lema 2.5. *Si $f, g \in \Lambda$ y $\Delta(g) = \sum g_{(1)} \otimes g_{(2)}$, entonces*

$$D_f(g) = \sum \langle f, g_{(1)} \rangle_{\Lambda} g_{(2)}.$$

Demostración. Por la identidad (1.3) y el Teorema 2.4 se tiene

$$\begin{aligned} \langle D_f(g), u \rangle_{\Lambda} &= \langle g, fu \rangle_{\Lambda} = \langle \Delta(g), f \otimes u \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} = \sum \langle g_{(1)} \otimes g_{(2)}, f \otimes u \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} \\ &= \sum \langle g_{(1)}, f \rangle_{\Lambda} \langle g_{(2)}, u \rangle_{\Lambda} = \left\langle \sum \langle g_{(1)}, f \rangle_{\Lambda} g_{(2)}, u \right\rangle_{\Lambda}. \end{aligned}$$

Esto prueba el lema. $\square$

El siguiente teorema generaliza la identidad (2.2) para cualquier $f \in \Lambda$.

Teorema 2.6. *Sean $\{u_{\lambda} : \lambda \in \mathcal{P}\}$ y $\{v_{\lambda} : \lambda \in \mathcal{P}\}$ bases duales de Λ con respecto al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda}$. Entonces, para cada $f \in \Lambda$*

$$\Delta(f) = \sum_{\mu} (D_{u_{\mu}}(f)) \otimes v_{\mu}.$$

Demostración. Basta demostrar para una f elemento de una base.

Como $\{v_{\alpha} \otimes v_{\nu} : \alpha, \nu \in \mathcal{P}\}$ es base de $\Lambda \otimes \Lambda$, para cada $\lambda \in \mathcal{P}$ existen enteros $d_{\alpha, \nu}^{\lambda}$ tales que

$$\Delta(v_{\lambda}) = \sum_{\alpha, \nu} d_{\alpha, \nu}^{\lambda} v_{\alpha} \otimes v_{\nu} = \sum_{\alpha} v_{\alpha} \otimes \left(\sum_{\nu} d_{\alpha, \nu}^{\lambda} v_{\nu} \right).$$

Por el lema anterior se sigue que

$$D_{u_\mu}(v_\lambda) = \sum_\alpha \langle u_\mu, v_\alpha \rangle_\Lambda \left(\sum_\nu d_{\alpha,\nu}^\lambda v_\nu \right) = \sum_\nu d_{\mu,\nu}^\lambda v_\nu.$$

Remplazando esta identidad en la anterior y por la coconmutatividad de Δ se sigue que

$$\Delta(v_\lambda) = \sum_\alpha v_\alpha \otimes D_{u_\alpha}(v_\lambda) = \sum_\mu D_{u_\mu}(v_\lambda) \otimes v_\mu.$$

Como $\{v_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$ es base de Λ , el teorema queda demostrado. $\square$

3. Producto de Kronecker de funciones simétricas

Sea $\{\chi^\lambda : \lambda \vdash n\}$ el conjunto de todos los caracteres irreducibles de S_n (Teorema 7.18.5 de [6]) y $R_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Z} \cdot \chi^\lambda$ el $\mathbb{Z}$ -módulo de caracteres complejos de S_n , entonces el $\mathbb{Z}$ -módulo $R = \bigoplus_{n=0}^\infty R_n$ tiene estructura de $\mathbb{Z}$ -álgebra graduada con la multiplicación definida por $\varphi \bullet \psi = \text{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}}(\varphi \times \psi)$; el uno del álgebra es el carácter trivial $1_{S_0} \in R_0$. De la identidad (7.75) de [6] se sigue que $\chi^{(1^n)}(\sigma) = (-1)^k = \text{sgn}(\sigma)$, donde k es el número de ciclos de longitud par en la descomposición de σ en ciclos disjuntos.

La **función característica de Frobenius** $\text{ch} : R_n \rightarrow \Lambda^n$ se define como $\text{ch}(\varphi) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \varphi(\mu) p_\mu$, donde $\varphi(\mu)$ es el valor de φ en la clase de conjugación de las permutaciones con tipo cíclico $\mu = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n})$. Esta función es un isomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos y se extiende a un isomorfismo de $\mathbb{Z}$ -álgebras graduadas $\text{ch} : R \rightarrow \Lambda$ (Proposición 7.18.4 de [6]). Este isomorfismo permite trasladar la estructura de coálgebra de Λ a R ; este proceso concluye con la comultiplicación $\Delta_R : R \rightarrow R \otimes R$ definida por $\Delta_R(\varphi) = \sum_{a+b=n} \text{Res}_{S_a \times S_b}^{S_n}(\varphi)$ y la counidad $\varepsilon_R : R \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $\varepsilon_R(\varphi) = \varphi$ si $\varphi \in R_0$ y $\varepsilon_R(\varphi) = 0$ si $\varphi \in R_n$ y $n > 0$. Además, Δ_R y ε_R resultan ser homomorfismos de álgebras, en consecuencia $(R, \bullet, 1_0, \Delta_R, \varepsilon_R)$ es una $\mathbb{Z}$ -biálgebra conmutativa, coconmutativa y ch es un isomorfismo de biálgebras.

El $\mathbb{Z}$ -módulo R_n tiene además estructura de anillo con la multiplicación usual de caracteres de S_n . Por tanto, utilizando el isomorfismo ch , se puede trasladar este producto de R_n a Λ^n . Así, se define un nuevo producto en Λ^n .

Definición 3.1. Sean $f, g \in \Lambda^n$ tales que $f = \text{ch}(\varphi)$ y $g = \text{ch}(\psi)$. Se define

$$f * g = \text{ch}(\varphi \cdot \psi).$$

* se llama **producto interior o de Kronecker**.

Por definición de ch y la identidad (7.22) de la proposición 7.7.6 de [6], se tiene que $\text{ch}(1_{S_n}) = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda = s_n$, por tanto s_n es el uno de Λ^n con respecto al producto interior y $\text{ch} : (R_n, +, \cdot, 0, \chi^{(n)}) \longrightarrow (\Lambda^n, +, *, 0, s_n)$ es un isomorfismo de anillos. El producto $*$ se extiende a Λ definiendo $f * g = 0$ si f y g son de grados diferentes, por tanto Λ no es un álgebra graduada con el producto interior y tampoco tiene uno.

Del Corolario 7.17.5 de [6] se sigue que

$$\text{ch}(\chi^\lambda) = \sum_{\mu} z_\mu^{-1} \chi^\lambda(\mu) p_\mu = s_\lambda. \quad (3.1)$$

En particular,

$$\text{ch}(\chi^{(1^n)}) = s_{(1^n)} = e_n.$$

Por Corolario 7.17.4 de [6] y las identidades (1.1) se tiene que

$$\chi^{\lambda'}(\mu) = \langle p_\mu, s_{\lambda'} \rangle_\Lambda = \langle \omega(p_\mu), \omega(s_{\lambda'}) \rangle_\Lambda = \langle \varepsilon_\mu p_\mu, s_\lambda \rangle_\Lambda = \varepsilon_\mu \chi^\lambda(\mu).$$

Por tanto,

$$e_n * s_\lambda = \text{ch}(\chi^{(1^n)} \cdot \chi^\lambda) = \text{ch}(\chi^{\lambda'}) = s_{\lambda'},$$

esto implica que

$$s_{\lambda'} * s_{\mu'} = s_\lambda * s_\mu.$$

Si χ^λ y χ^μ son caracteres irreducibles de S_n , entonces existen enteros no negativos $g(\lambda, \mu, \nu)$, llamados **coeficientes de Kronecker**, tales que

$$\chi^\lambda \chi^\mu = \sum_{\nu \vdash n} g(\lambda, \mu, \nu) \chi^\nu.$$

De esta identidad y la definición de producto interior se deduce que

$$s_\lambda * s_\mu = \text{ch}(\chi^\lambda \chi^\mu) = \sum_{\nu \vdash n} g(\lambda, \mu, \nu) \text{ch}(\chi^\nu) = \sum_{\nu \vdash n} g(\lambda, \mu, \nu) s_\nu. \quad (3.2)$$

Además, dado que los caracteres irreducibles de S_n son ortogonales, se tiene que

$$g(\lambda, \mu, \nu) = \langle \chi^\lambda \chi^\mu, \chi^\nu \rangle_R = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi^\lambda(\sigma) \chi^\mu(\sigma) \chi^\nu(\sigma),$$

esto implica que $g(\lambda, \mu, \nu)$ es invariante bajo permutaciones de λ , μ y ν .

Lema 3.2. Sean $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$. Entonces $p_\lambda * p_\mu = z_\lambda \delta_{\lambda, \mu} p_\lambda$.

Demostración. Por Corolario 7.17.4 de [6] y la identidad (3.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \langle p_\lambda * p_\mu, s_\nu \rangle_\Lambda &= \sum_{\alpha, \beta} \chi^\alpha(\lambda) \chi^\beta(\mu) \langle s_\alpha * s_\beta, s_\nu \rangle_\Lambda = \sum_{\alpha, \beta} \chi^\alpha(\lambda) \chi^\beta(\mu) \sum_{\gamma} g(\alpha, \beta, \gamma) \langle s_\gamma, s_\nu \rangle_\Lambda \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \chi^\alpha(\lambda) \chi^\beta(\mu) g(\alpha, \beta, \nu) = \sum_{\alpha} \chi^\alpha(\lambda) \sum_{\beta} \chi^\beta(\mu) g(\nu, \alpha, \beta) \\ &= \sum_{\alpha} \chi^\alpha(\lambda) \chi^\nu(\mu) \chi^\alpha(\mu) = \chi^\nu(\mu) \sum_{\alpha} \chi^\alpha(\lambda) \chi^\alpha(\mu), \end{aligned}$$

y por la Proposición 7.17.6 (a) de [6] se concluye que

$$\langle p_\lambda * p_\mu, s_\nu \rangle_\Lambda = \chi^\nu(\mu) z_\lambda \delta_{\lambda,\mu} = z_\lambda \delta_{\lambda,\mu} \langle p_\mu, s_\nu \rangle_\Lambda = \langle z_\lambda \delta_{\lambda,\mu} p_\lambda, s_\nu \rangle_\Lambda.$$

Esto prueba el lema. $\square$

Corolario 3.3. *Si $f, g \in \Lambda^n$ y $\nu \vdash n$, entonces $\langle f * g, p_\nu \rangle_\Lambda = \langle f, p_\nu \rangle_\Lambda \langle g, p_\nu \rangle_\Lambda$.*

Demostración. Por el lema anterior y la identidad (1.2) se tiene

$$\langle p_\lambda * p_\mu, p_\nu \rangle_\Lambda = z_\lambda \delta_{\lambda,\mu} \langle p_\lambda, p_\nu \rangle_\Lambda = z_\lambda \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \delta_{\lambda,\nu} = z_\lambda \delta_{\lambda,\nu} z_\mu \delta_{\mu,\nu} = \langle p_\lambda, p_\nu \rangle_\Lambda \langle p_\mu, p_\nu \rangle_\Lambda.$$

Esto prueba el corolario ya que $\{p_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$ es una base de $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ y Λ es una subálgebra de $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. $\square$

Sean x y y dos conjuntos de variables y $xy = \{x_i y_j : i, j \in \mathbb{N}\}$. Si $f \in \Lambda$ entonces $f(xy)$ lo pensamos como un elemento de $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$.

Teorema 3.4. *Sean $f, g, h \in \Lambda^n$. Entonces*

$$\langle f(xy), g(x) \otimes h(y) \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} = \langle f, g * h \rangle_\Lambda.$$

Demostración. Basta demostrar para $f = p_\lambda$.

Si $m \in \mathbb{N}$, entonces sigue de su definición que $p_m(xy) = p_m(x)p_m(y)$. Por tanto, $p_\lambda(xy) = p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ para todo $\lambda \in \mathcal{P}$, y por el corolario anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \langle p_\lambda, g * h \rangle_\Lambda &= \langle p_\lambda, g \rangle_\Lambda \langle p_\lambda, h \rangle_\Lambda = \langle p_\lambda(x) \otimes p_\lambda(y), g(x) \otimes h(y) \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} \\ &= \langle p_\lambda(xy), g(x) \otimes h(y) \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda}. \end{aligned}$$

Esto prueba el teorema. $\square$

Definición 3.5. Se define un producto interior en $\Lambda \otimes \Lambda$ por

$$(f_1 \otimes g_1) * (f_2 \otimes g_2) = (f_1 * f_2) \otimes (g_1 * g_2),$$

para todo $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \Lambda$.

Teorema 3.6. *Sean $f \in \Lambda^a$, $g \in \Lambda^b$ y $h \in \Lambda^n$, con $n = a + b$. Entonces,*

$$(fg) * h = M[(f \otimes g) * \Delta(h)],$$

donde M es la multiplicación de Λ .

Demostración. En teoría de representaciones se tiene el isomorfismo $\text{Ind}_H^G(V) \otimes W \cong \text{Ind}_H^G(V \otimes \text{Res}_H^G(W))$ (Lema 1.6.9 de [7]) donde H es un subgrupo de G y V, W son un H -módulo y G -módulo respectivamente. Esto implica la identidad de caracteres

$$\text{Ind}_H^G(\chi_V) \cdot \chi_W = \text{Ind}_H^G(\chi_V \cdot \text{Res}_H^G(\chi_W)).$$

Sean $\chi \in R_a$, $\varphi \in R_b$, $\psi \in R_n$ tales que $\text{ch}(\chi) = f$, $\text{ch}(\varphi) = g$ y $\text{ch}(\psi) = h$. Por la identidad anterior se tiene que

$$\text{Ind}_{S_a \times S_b}^{S_n}(\chi \times \varphi) \cdot \psi = \text{Ind}_{S_a \times S_b}^{S_n}((\chi \times \varphi) \cdot \text{Res}_{S_a \times S_b}^{S_n}(\psi)).$$

Aplicando el isomorfismo ch a esta identidad se concluye con el teorema. $\square$

4. Fórmulas de Murnaghan y Littlewood

Sean $\widehat{\Lambda} = \prod_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda^n$, $F = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $G = (g_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \widehat{\Lambda}$ tales que $f_n, g_n \in \Lambda^n$. $\widehat{\Lambda}$ es un álgebra con la multiplicación definida por

$$FG = (f_i)_{i \in \mathbb{N}_0} (g_j)_{j \in \mathbb{N}_0} = \left(\sum_{i+j=n} f_i g_j \right)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

El uno del álgebra es $1 = (1, 0, 0, \dots)$.

Sea $u = \sum_{i=0}^m u_i \in \Lambda$ con $u_i \in \Lambda^i$. Como $D_{f_n}(u_i) = 0$ para todo $n > i$, entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} D_{f_n}(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{i=0}^m D_{f_n}(u_i) = \sum_{n=0}^m \sum_{i=n}^m D_{f_n}(u_i) \in \Lambda.$$

Esto permite definir la siguiente aplicación.

Definición 4.1. Para cada $F \in \widehat{\Lambda}$ se define la aplicación $\widehat{D}_F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ como

$$\widehat{D}_F(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} D_{f_n}(u).$$

Como D_{f_n} es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos, entonces $\widehat{D}_F$ es también un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos; esto permite definir una aplicación $\widehat{D} : \widehat{\Lambda} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(\Lambda)$ como $\widehat{D}(F) = \widehat{D}_F$, es fácil ver que $\widehat{D}$ es homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos ya que D es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos. Mas aún, como D es homomorfismo de álgebras,

$$\begin{aligned} \widehat{D}(FG) &= \widehat{D} \left(\left(\sum_{i+j=n} f_i g_j \right)_{n \in \mathbb{N}_0} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} D \left(\sum_{i+j=n} f_i g_j \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{i+j=n} D(f_i) D(g_j) \\ &= \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_0} D(f_i) \right) \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_0} D(g_j) \right) = \widehat{D}(F) \widehat{D}(G), \end{aligned}$$

por tanto $\widehat{D}$ es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -álgebras.

A continuación se define una aplicación bilineal que extiende al producto escalar de Λ , y por tanto se la denota también por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda}$.

Definición 4.2. Se define la aplicación bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda} : \Lambda \times \widehat{\Lambda} \rightarrow \mathbb{Z}$ por

$$\langle u, F \rangle_{\Lambda} = \sum_{i=0}^m \langle u_i, f_i \rangle_{\Lambda},$$

donde $u = \sum_{i=0}^m u_i$ y $u_i \in \Lambda^i$.

Si $u \in \Lambda^n$ entonces por la definición de $\widehat{D}_F$ y la identidad (1.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \widehat{D}_F(u), G \rangle_{\Lambda} &= \left\langle \sum_{i=0}^n D_{f_i}(u), G \right\rangle_{\Lambda} = \sum_{i=0}^n \langle D_{f_i}(u), g_{n-i} \rangle_{\Lambda} = \sum_{i=0}^n \langle u, f_i g_{n-i} \rangle_{\Lambda} \\ &= \left\langle u, \sum_{i+j=n} f_i g_j \right\rangle_{\Lambda} = \langle u, FG \rangle_{\Lambda}. \end{aligned}$$

Por la linealidad de $\widehat{D}_F$ y la bilinealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda$ se sigue que

$$\langle \widehat{D}_F(u), G \rangle_\Lambda = \langle u, FG \rangle_\Lambda \quad (4.1)$$

para todo $u \in \Lambda$ y $F, G \in \widehat{\Lambda}$.

Sean H_t y E_t las series formales

$$H_t(x) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - x_n t)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} h_n(x) t^n \in \Lambda[[t]],$$

$$E_t(x) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + x_n t) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} e_n(x) t^n \in \Lambda[[t]].$$

Entonces, $H_t(x)$ y $E_{-t}(x)$ son inversos uno del otro; en particular $H_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} h_n = (h_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \widehat{\Lambda}$ y $E_{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n e_n = ((-1)^n e_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \widehat{\Lambda}$, por lo que se tienen definidos dos homomorfismos de $\mathbb{Z}$ -módulos $\widehat{D}_{H_1}, \widehat{D}_{E_{-1}} : \Lambda \rightarrow \Lambda$. Además, como H_1 y E_{-1} son inversos y $\widehat{D}$ un homomorfismo de álgebras, $\widehat{D}_{H_1}$ y $\widehat{D}_{E_{-1}}$ son inversos y por tanto isomorfismos de módulos.

Sea $f \in \Lambda$. El entero que resulta de evaluar f en $(1, 0, 0, \dots)$ se denota por $f(1)$, y la función que resulta de remplazar el conjunto de variables $y = (y_1, y_2, \dots)$ por $(1, 0, 0, \dots)$ en $\Delta(f) = f(x, y)$ se denota por $f(x, 1)$.

Lema 4.3. *Sea $f \in \Lambda$. Entonces $\widehat{D}_{H_1}(f)(x) = f(x, 1)$.*

Demostración. Sea $\mu \vdash n$. De su definición se sigue que $m_\mu(1) = 1$ si $\mu = n$ y $m_\mu(1) = 0$ en otro caso, en consecuencia

$$s_\lambda(1) = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda, \mu} m_\mu(1) = K_{\lambda, n} m_n(1),$$

y de la definición de TYSE sigue que $s_\lambda(1) = 1$ si $\lambda = n$, y $s_\lambda(1) = 0$ en otro caso. Por tanto, del Teorema 2.6 con $u_\lambda = v_\lambda = s_\lambda$ y dado que $s_n = h_n$, se sigue que

$$f(x, 1) = \sum_{\lambda} s_\lambda(1) D_{s_\lambda}(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} D_{s_n}(f)(x) = \widehat{D}_{H_1}(f)(x).$$

□

Corolario 4.4. *$\widehat{D}_{H_1}$ y $\widehat{D}_{E_{-1}}$ son isomorfismos de álgebras*

Esto sigue inmediatamente del lema y del hecho que $\widehat{D}_{H_1}$ y $\widehat{D}_{E_{-1}}$ son inversos.

Sea $\Omega = \prod_{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2} \Lambda^i \otimes \Lambda^j$. La aplicación $\varphi : \widehat{\Lambda} \otimes \widehat{\Lambda} \rightarrow \Omega$ definida por $\varphi(F \otimes G) = (f_i \otimes g_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2}$ es inyectiva pero no es suryectiva (ver sección 4 de [8]¹). Identificamos $\widehat{\Lambda} \otimes \widehat{\Lambda}$ con su imagen bajo φ , en consecuencia se denota indistintamente $F \otimes G$ ó $(f_i \otimes g_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2}$.

En lo que sigue, $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, $c_{i,k}$ y $d_{i,k}$ denotan elementos de Λ^i para todo $k \in \mathbb{N}$.

¹Se vio la necesidad de citar estas notas debido a que no se encontró algún libro o artículo que contenga este resultado, pero esto no es muy relevante para este trabajo ya que dicho resultado no se usa en la demostración de ningún teorema.

Definición 4.5. Se define la aplicación $\widehat{M}_1 : \Omega \longrightarrow \widehat{\Lambda}$ como

$$\widehat{M}_1 \left(\left(\sum_k a_{i,k} \otimes b_{j,k} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2} \right) = \left(\sum_{i+j=n} \sum_k a_{i,k} b_{j,k} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

La restricción de $\widehat{M}_1$ a $\widehat{\Lambda} \otimes \widehat{\Lambda}$ queda definido por

$$\widehat{M}_1(F \otimes G) = \widehat{M}_1 \left((f_i \otimes g_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2} \right) = \left(\sum_{i+j=n} f_i g_j \right) = FG,$$

por tanto $\widehat{M}_1$ es una extensión de la multiplicación de $\widehat{\Lambda}$.

Definición 4.6. Se define la aplicación $\widehat{*}_1 : \Omega \longrightarrow \widehat{\Lambda}$ como

$$\widehat{*}_1 \left(\left(\sum_k a_{i_k} \otimes b_{j_k} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2} \right) = \left(\sum_k a_{i_k} * b_{j_k} \right)_{i \in \mathbb{N}_0}.$$

La restricción de $\widehat{*}_1$ a $\widehat{\Lambda} \otimes \widehat{\Lambda}$ queda definido por

$$F \widehat{*}_1 G = \widehat{*}_1(F \otimes G) = \widehat{*}_1((f_i \otimes g_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2}) = (f_i * g_i)_{i \in \mathbb{N}_0},$$

por lo que $\widehat{*}_1$ induce un producto en $\widehat{\Lambda}$ con la cual tiene estructura de álgebra. Además, como h_n es la unidad de Λ^n con respecto a $*$, entonces H_1 es la unidad de $\widehat{\Lambda}$ con respecto a $\widehat{*}_1$.

Definimos ahora dos productos en Ω que las denotamos por $\widehat{M}_2$ (o simplemente por $\cdot$) y $\widehat{*}_2$, la razón de estas notaciones es que están estrechamente relacionados con $\widehat{M}_1$ y $\widehat{*}_1$ respectivamente. Esto se verá de inmediato.

Definición 4.7. Definimos el producto $\widehat{M}_2 : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ por

$$\left(\sum_k a_{i,k} \otimes b_{j,k} \right)_{(i,j)} \cdot \left(\sum_l c_{i,l} \otimes d_{j,l} \right)_{(i,j)} = \left(\sum_{s+t=i} \sum_{k,l} a_{s,k} c_{t,l} \otimes \sum_{s+t=j} \sum_{k,l} b_{s,k} d_{t,l} \right)_{(i,j)}.$$

Definición 4.8. Se define el producto $\widehat{*}_2 : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ por

$$\left(\sum_k a_{i,k} \otimes b_{j,k} \right)_{(i,j)} \widehat{*}_2 \left(\sum_l c_{i,l} \otimes d_{j,l} \right)_{(i,j)} = \left(\left(\sum_{k,l} a_{i,k} * c_{i,l} \right) \otimes \left(\sum_{k,l} b_{j,k} * d_{j,l} \right) \right)_{(i,j)}.$$

Sean $L = (l_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $R = (r_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \widehat{\Lambda}$, con $l_n, r_n \in \Lambda^n$. Si se restringen los anteriores productos a $\widehat{\Lambda} \otimes \widehat{\Lambda} \times \widehat{\Lambda} \otimes \widehat{\Lambda}$, estos quedan definidos por

$$(F \otimes G) \cdot (L \otimes R) = (FL) \otimes (GR), \quad (4.2)$$

$$(F \otimes G) \widehat{*}_2 (L \otimes R) = (F \widehat{*}_1 L) \otimes (G \widehat{*}_1 R). \quad (4.3)$$

Es decir, los productos $\widehat{M}_2$ y $\widehat{*}_2$ de $\widehat{\Lambda} \otimes \widehat{\Lambda}$ no son otra cosa que los productos $\widehat{M}_1$ y $\widehat{*}_1$ de $\widehat{\Lambda}$ definidos en cada factor.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \Omega$ donde $A_n, B_n \in \prod_{i+j=n} \Lambda^i \otimes \Lambda^j$, entonces los productos $\widehat{M}_2$ y $\widehat{*}_2$ se escriben como

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \cdot (B_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = \left(\sum_{i+j=n} A_i B_j \right)_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad (4.4)$$

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \widehat{*}_2 (B_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (A_n * B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (4.5)$$

Definición 4.9. Se define la aplicación $\widehat{\Delta} : \widehat{\Lambda} \rightarrow \Omega$ como

$$\widehat{\Delta}(F) = (\Delta(f_n))_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

$\widehat{\Delta}$ no es una comultiplicación ya que $\text{Im}(\widehat{\Delta}) \not\subseteq \widehat{\Lambda} \otimes \widehat{\Lambda}$ (ver sección 4 de [9]²), por lo que es necesario tomar como codominio el conjunto Ω . Además, por la identidad (4.4) y dado que Δ es homomorfismo de álgebras se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(FG) &= \widehat{\Delta} \left(\left(\sum_{i+j=n} f_i g_j \right)_n \right) = \left(\Delta \left(\sum_{i+j=n} f_i g_j \right)_n \right) = \left(\sum_{i+j=n} \Delta(f_i) \Delta(g_j) \right)_n \\ &= (\Delta(f_i))_n \cdot (\Delta(g_j))_n = \widehat{\Delta}(F) \widehat{\Delta}(G), \end{aligned}$$

es decir $\widehat{\Delta}$ es multiplicativa. Además, del Corolario 2.3 se sigue que

$$\widehat{\Delta}(H_1) = (\Delta(h_n))_n = \left(\sum_{a+b=n} h_a \otimes h_b \right)_n = (h_a)_a \otimes (h_b)_b = H_1 \otimes H_1. \quad (4.6)$$

El Teorema 3.6 se extiende a $\widehat{\Lambda}$ como sigue:

Teorema 4.10. Si $F, G, L \in \widehat{\Lambda}$. Entonces,

$$(FG) \widehat{*}_1 L = \widehat{M}_1 [(F \otimes G) \widehat{*}_2 \widehat{\Delta}(L)].$$

Demostración. Por teorema 3.6 se tiene

$$\begin{aligned} (FG) \widehat{*}_1 L &= \left(\sum_{a+b=n} f_a g_b \right)_n \widehat{*}_1 (l_n)_n = \left(\left(\sum_{a+b=n} f_a g_b \right) * l_n \right)_n = \left(\sum_{a+b=n} (f_a g_b) * l_n \right)_n \\ &= \left(\sum_{a+b=n} M[(f_a \otimes g_b) * \Delta(l_n)] \right)_n = \left(M \left(\sum_{a+b=n} [(f_a \otimes g_b) * \Delta(l_n)] \right) \right)_n \\ &= \widehat{M}_1 \left[\left(\left(\sum_{a+b=n} f_a \otimes g_b \right) * \Delta(l_n) \right)_n \right] = \widehat{M}_1 [(F \otimes G) \widehat{*}_2 \widehat{\Delta}(L)]. \end{aligned}$$

□

²Se cita por la misma razón que [8].

Para evitar la sobrecarga de notación, en lo que sigue se escriben D en lugar de $\widehat{D}$, M en lugar de $\widehat{M}_1$ y $\widehat{M}_2$, $*$ en lugar de $\widehat{*}_1$ y $\widehat{*}_2$, y Δ en lugar de $\widehat{\Delta}$. El contexto nos permitirá distinguir entre las distintas aplicaciones.

El siguiente teorema es el resultado principal del presente trabajo y fue demostrado en 1991 por J. Y. Thibon en [4]. Los teoremas de Murnaghan y Littlewood son realmente consecuencias de este teorema.

Teorema 4.11. (*Thibon 1*) Sean $\{u_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$ y $\{v_\mu : \mu \in \mathcal{P}\}$ bases duales de Λ y $f, g \in \Lambda$. Entonces

$$(H_1 f) * (H_1 g) = H_1 \sum_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} D_{v_\lambda}(f) D_{v_\mu}(g) (u_\lambda * u_\mu).$$

Demostración. Por Teorema 4.10 y dado que Δ es multiplicativa se tiene que

$$(H_1 f) * (H_1 g) = M[(H_1 \otimes f) * \Delta(H_1 g)] = M[(H_1 \otimes f) * (\Delta(H_1) \Delta(g))].$$

Por la identidad (4.6), Teorema 2.6, las identidades (4.2), (4.3) y dado que H_1 es unidad de $\widehat{\Lambda}$ respecto de $*$, se sigue que

$$\begin{aligned} (H_1 f) * (H_1 g) &= M \left[(H_1 \otimes f) * \left((H_1 \otimes H_1) \left(\sum_{\mu \in \mathcal{P}} D_{v_\mu}(g) \otimes u_\mu \right) \right) \right] \\ &= M \left[(H_1 \otimes f) * \left(\sum_{\mu \in \mathcal{P}} H_1 D_{v_\mu}(g) \otimes H_1 u_\mu \right) \right] \\ &= M \left[\sum_{\mu \in \mathcal{P}} (H_1 * H_1 D_{v_\mu}(g)) \otimes (f * H_1 u_\mu) \right] \\ &= \sum_{\mu \in \mathcal{P}} H_1 D_{v_\mu}(g) (f * H_1 u_\mu), \end{aligned}$$

y nuevamente por Teorema 4.10, Teorema 2.6 e identidad (4.3) se concluye que

$$\begin{aligned} (H_1 f) * (H_1 g) &= H_1 \sum_{\mu \in \mathcal{P}} D_{v_\mu}(g) M[(H_1 \otimes u_\mu) * \Delta(f)] \\ &= H_1 \sum_{\mu \in \mathcal{P}} D_{v_\mu}(g) M \left[(H_1 \otimes u_\mu) * \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} D_{v_\lambda}(f) \otimes u_\lambda \right) \right] \\ &= H_1 \sum_{\mu \in \mathcal{P}} D_{v_\mu}(g) M \left[\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} (H_1 * D_{v_\lambda}(f)) \otimes (u_\mu * u_\lambda) \right] \\ &= H_1 \sum_{\mu \in \mathcal{P}} D_{v_\mu}(g) \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} D_{v_\lambda}(f) (u_\mu * u_\lambda) \right) \\ &= H_1 \sum_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} D_{v_\lambda}(f) D_{v_\mu}(g) (u_\lambda * u_\mu). \end{aligned}$$

□

La identidad de Jacobi-Trudi (Teorema 7.16.1 de [6]) expresa las funciones de Schur $s_{\lambda/\mu}$ como la determinante de una matriz cuyos elementos son las funciones homogéneas completas h_n 's, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $h_n = 0$ para todo $n < 0$. Siguiendo esta idea, se define una función s_α para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ como sigue:

Definición 4.12. Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$. Se define la función s_α como

$$s_\alpha = \det(h_{\alpha_i - i + j})_{i,j=1}^n.$$

Es claro que si α es una partición entonces s_α es una función de Schur, por esta razón se la denota también con la letra s . Aplicando intercambio de filas en la determinante s_α , no es difícil ver que si α no es partición entonces $s_\alpha = 0$ ó $s_\alpha = \pm s_\beta$ para alguna partición β (ver [5]), por tanto s_α es una función simétrica para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Mas aún, si $s_\alpha \neq 0$ entonces $s_\alpha \in \Lambda^k$ donde $k = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, es decir el grado de s_α es la suma de las coordenadas de α .

Definición 4.13. La función $\langle \rangle : \Lambda \longrightarrow \widehat{\Lambda}$ se define en la base de funciones de Schur como $\langle s_\lambda \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}} s_{\lambda_p}$, donde $\lambda_p = (p, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$.

De la definición de s_α se sigue que $s_{\lambda_p} = 0$ para todo $p < -k$. Además, como el grado de s_{λ_p} es la suma de las coordenadas de λ_p , no existen dos enteros p y q diferentes tales que $s_{\lambda_p} \neq 0$, $s_{\lambda_q} \neq 0$ y tengan el mismo grado, esto implica que $\langle s_\lambda \rangle \in \widehat{\Lambda}$. Así la función anterior está bien definido.

Lema 4.14. $\langle f \rangle = H_1 D_{E_{-1}}(f)$.

Demostración. Como $D_{E_{-1}}$ es homomorfismo, basta probar para $f = s_\lambda$.

Sea $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Por definición y la identidad de Jacobi-Trudi se tiene que

$$\begin{aligned} s_{\lambda_p} &= \begin{vmatrix} h_p & h_{p+1} & h_{p+2} & \cdots & h_{p+k} \\ h_{\lambda_1-1} & h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+k-1} \\ h_{\lambda_2-2} & h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \cdots & h_{\lambda_2+k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_k-k} & h_{\lambda_k-k+1} & h_{\lambda_k-k+2} & \cdots & h_{\lambda_k} \end{vmatrix} \\ &= h_p s_\lambda - h_{p+1} s_{\lambda/(1)} + h_{p+2} s_{\lambda/(1,1)} - \cdots + (-1^k) h_{p+k} s_{\lambda/(1^k)} \\ &= h_p s_\lambda - h_{p+1} D_{s_1}(s_\lambda) + h_{p+2} D_{s_{(1,1)}}(s_\lambda) - \cdots + (-1^k) h_{p+k} D_{s_{(1^k)}}(s_\lambda) \\ &= h_p D_{e_0}(s_\lambda) - h_{p+1} D_{e_1}(s_\lambda) + h_{p+2} D_{e_2}(s_\lambda) - \cdots + (-1^k) h_{p+k} D_{e_k}(s_\lambda), \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{Z}} s_{\lambda_p} &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p D_{e_0}(s_\lambda) - \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_{p+1} D_{e_1}(s_\lambda) + \cdots + (-1^k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_{p+k} D_{e_k}(s_\lambda) \\ &= \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p \right) \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i D_{e_i}(s_\lambda) \right). \end{aligned}$$

Como $\ell(\lambda) = k$, entonces $(1^m) \not\subseteq \lambda$ para $m > k$, por lo que $D_{e_m}(s_\lambda) = s_{\lambda/(1^m)} = 0$ para todo $m > k$. Por tanto,

$$\langle s_\lambda \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}} s_{\lambda_p} = \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p \right) \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_0} (-1)^i D_{e_i}(s_\lambda) \right) = H_1 D_{E_{-1}}(s_\lambda).$$

□

Corolario 4.15. (*Murnaghan [2]*)

$$\langle f \rangle * \langle g \rangle = \left\langle \sum_{\lambda} D_{p_{\lambda}}(f) D_{p_{\lambda}}(g) \frac{D_{H_1}(p_{\lambda})}{z_{\lambda}} \right\rangle$$

Demostración. Por el Lema 4.14, Teorema 4.11 (Thibon 1) con $u_{\lambda} = \frac{p_{\lambda}}{z_{\lambda}}$ y $v_{\mu} = p_{\mu}$, y Lema 3.2, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle f \rangle * \langle g \rangle &= (H_1 D_{E_{-1}}(f)) * (H_1 D_{E_{-1}}(g)) \\ &= H_1 \sum_{\lambda, \mu} D_{p_{\lambda}}(D_{E_{-1}}(f)) D_{p_{\mu}}(D_{E_{-1}}(g)) \left(\frac{p_{\lambda}}{z_{\lambda}} * \frac{p_{\mu}}{z_{\mu}} \right) \\ &= H_1 \sum_{\lambda} D_{p_{\lambda}}(D_{E_{-1}}(f)) D_{p_{\lambda}}(D_{E_{-1}}(g)) \frac{p_{\lambda}}{z_{\lambda}}, \end{aligned}$$

como D es homomorfismo de álgebras conmutativas y $D_{E_{-1}} D_{H_1} = 1$ sigue que

$$\begin{aligned} \langle f \rangle * \langle g \rangle &= H_1 \sum_{\lambda} D_{E_{-1}}(D_{p_{\lambda}}(f)) D_{E_{-1}}(D_{p_{\lambda}}(g)) D_{E_{-1}} \left(\frac{D_{H_1}(p_{\lambda})}{z_{\lambda}} \right) \\ &= H_1 D_{E_{-1}} \left(\sum_{\lambda} D_{p_{\lambda}}(f) D_{p_{\lambda}}(g) \frac{D_{H_1}(p_{\lambda})}{z_{\lambda}} \right) \\ &= \left\langle \sum_{\lambda} D_{p_{\lambda}}(f) D_{p_{\lambda}}(g) \frac{D_{H_1}(p_{\lambda})}{z_{\lambda}} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Lema 4.16. $D_{H_1}(f * g) = \sum_{\lambda} D_{s_{\lambda}}(f) * D_{s_{\lambda}}(g)$.

Demostración. Sean $f, g, u \in \Lambda$ y $u(xy) = \sum_i u_{1,i}(x) \otimes u_{2,i}(y)$. Por la identidad (4.1), Teorema 3.4 y la identidad de Cauchy (Teorema 7.12.1 de [6]) se tienen las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} \langle D_{H_1}(f * g), u \rangle_{\Lambda} &= \langle f * g, H_1 u \rangle_{\Lambda} = \langle f(x) \otimes g(y), H_1(xy) \cdot u(xy) \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} \\ &= \sum_{\lambda} \sum_i \langle f(x) \otimes g(y), (s_{\lambda}(x) \otimes s_{\lambda}(y)) \cdot (u_{1,i}(x) \otimes u_{2,i}(y)) \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} \\ &= \sum_{\lambda} \sum_i \langle f(x), s_{\lambda}(x) u_{1,i}(x) \rangle_{\Lambda} \langle g(y), s_{\lambda}(y) u_{2,i}(y) \rangle_{\Lambda} \\ &= \sum_{\lambda} \sum_i \langle (D_{s_{\lambda}} f)(x), u_{1,i}(x) \rangle_{\Lambda} \langle (D_{s_{\lambda}} g)(y), u_{2,i}(y) \rangle_{\Lambda} \\ &= \sum_{\lambda} \sum_i \langle (D_{s_{\lambda}} f)(x) \otimes (D_{s_{\lambda}} g)(y), u_{1,i}(x) \otimes u_{2,i}(y) \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} \\ &= \sum_{\lambda} \langle (D_{s_{\lambda}} f)(x) \otimes (D_{s_{\lambda}} g)(y), u(xy) \rangle_{\Lambda \otimes \Lambda} \\ &= \sum_{\lambda} \langle D_{s_{\lambda}}(f) * D_{s_{\lambda}}(g), u \rangle_{\Lambda} \end{aligned}$$

Esto prueba el lema.

□

Lema 4.17. (Thibon) Si $f, g \in \Lambda$, entonces

$$\sum_{\lambda, \mu} (D_{s_\lambda} f)(D_{s_\mu} g)(s_{\lambda/\nu} * s_{\mu/\nu}) = \sum_{\lambda, \mu} (D_{s_\nu} D_{s_\lambda} f)(D_{s_\nu} D_{s_\mu} g)(s_\lambda * s_\mu).$$

Demostración. Consideremos $A = \Lambda(x) \otimes \Lambda(z) \otimes \Lambda(w) \otimes \Lambda(y)$ con dos estructuras de álgebra, la estructura de álgebra graduada usual y la estructura de álgebra con el producto definido por

$$(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 \otimes f_4) *_y (g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 \otimes g_4) = f_1 g_1 \otimes f_2 g_2 \otimes f_3 g_3 \otimes (f_4 * g_4).$$

Sean $f(x, z, y), g(x, w, y) \in A$. Aplicando dos veces el Teorema 2.6, con $u_\lambda = v_\lambda = s_\lambda$, se tiene

$$\begin{aligned} f(x, z, y) *_y g(x, w, y) &= \left(\sum_\lambda (D_{s_\lambda} f)(x, z) s_\lambda(y) \right) *_y \left(\sum_\mu (D_{s_\mu} g)(x, w) s_\mu(y) \right) \\ &= \left(\sum_\lambda \sum_\nu D_{s_\nu} (D_{s_\lambda} f)(x) s_\nu(z) s_\lambda(y) \right) *_y \left(\sum_\mu \sum_\alpha D_{s_\alpha} (D_{s_\mu} g)(x) s_\alpha(w) s_\mu(y) \right) \\ &= \left(\sum_{\lambda, \nu} (D_{s_\nu} D_{s_\lambda} f)(x) s_\nu(z) s_\lambda(y) \right) *_y \left(\sum_{\mu, \alpha} (D_{s_\alpha} D_{s_\mu} g)(x) s_\alpha(w) s_\mu(y) \right) \\ &= \sum_{\lambda, \nu, \mu, \alpha} (D_{s_\nu} D_{s_\lambda} f)(x) (D_{s_\alpha} D_{s_\mu} g)(x) s_\nu(z) s_\alpha(w) (s_\lambda(y) * s_\mu(y)). \end{aligned}$$

De manera análoga se tiene

$$\begin{aligned} f(x, z, y) *_y g(x, w, y) &= \left(\sum_\lambda (D_{s_\lambda} f)(x) s_\lambda(z, y) \right) *_y \left(\sum_\mu (D_{s_\mu} g)(x) s_\mu(w, y) \right) \\ &= \left(\sum_\lambda (D_{s_\lambda} f)(x) \sum_\nu s_\nu(z) s_{\lambda/\nu}(y) \right) *_y \left(\sum_\mu (D_{s_\mu} g)(x) \sum_\alpha s_\alpha(w) s_{\mu/\alpha}(y) \right) \\ &= \left(\sum_{\lambda, \nu} (D_{s_\lambda} f)(x) s_\nu(z) s_{\lambda/\nu}(y) \right) *_y \left(\sum_{\mu, \alpha} (D_{s_\mu} g)(x) s_\alpha(w) s_{\mu/\alpha}(y) \right) \\ &= \sum_{\lambda, \nu, \mu, \alpha} (D_{s_\lambda} f)(x) D_{s_\mu} g(x) s_\nu(z) s_\alpha(w) (s_{\lambda/\nu}(y) * s_{\mu/\alpha}(y)). \end{aligned}$$

de las dos igualdades anteriores se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \nu, \mu, \alpha} (D_{s_\lambda} f)(x) (D_{s_\mu} g)(x) s_\nu(z) s_\alpha(w) (s_{\lambda/\nu}(y) * s_{\mu/\alpha}(y)) \\ = \sum_{\lambda, \nu, \mu, \alpha} (D_{s_\nu} D_{s_\lambda} f)(x) (D_{s_\alpha} D_{s_\mu} g)(x) s_\nu(z) s_\alpha(w) (s_\lambda(y) * s_\mu(y)). \end{aligned}$$

Considerando A como $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ -módulo y tomando los coeficientes de $s_\nu(z) s_\nu(w)$ en ambos lados de la igualdad, se tiene

$$\sum_{\lambda, \mu} (D_{s_\lambda} f)(x) (D_{s_\mu} g)(x) (s_{\lambda/\nu}(y) * s_{\mu/\nu}(y)) = \sum_{\lambda, \mu} (D_{s_\nu} D_{s_\lambda} f)(x) (D_{s_\nu} D_{s_\mu} g)(x) (s_\lambda(y) * s_\mu(y)),$$

y haciendo $y = x$,

$$\sum_{\lambda, \mu} (D_{s_\lambda} f)(D_{s_\mu} g)(s_{\lambda/\nu} * s_{\mu/\nu}) = \sum_{\lambda, \mu} (D_{s_\nu} D_{s_\lambda} f)(D_{s_\nu} D_{s_\mu} g)(s_\lambda * s_\mu).$$

□

Teorema 4.18. (Thibon 2) Si $f, g \in \Lambda$, entonces

$$\langle f \rangle * \langle g \rangle = \left\langle \sum_{\lambda, \mu, \nu} (D_{s_\lambda} f)(D_{s_\mu} g) (s_{\lambda/\nu} * s_{\mu/\nu}) \right\rangle.$$

Demostración. Por Lema 4.14, Teorema 4.11 (Thibon 1) con $u_\lambda = v_\lambda = s_\lambda$, y el hecho de que D es un homomorfismo de álgebras conmutativas, se tiene

$$\begin{aligned} \langle f \rangle * \langle g \rangle &= (H_1 D_{E_{-1}}(f)) * (H_1 D_{E_{-1}}(g)) \\ &= H_1 \sum_{\lambda, \mu} D_{s_\lambda}(D_{E_{-1}}(f)) D_{s_\mu}(D_{E_{-1}}(g)) (s_\lambda * s_\mu) \\ &= H_1 \sum_{\lambda, \mu} D_{E_{-1}}(D_{s_\lambda} f) D_{E_{-1}}(D_{s_\mu} g) (s_\lambda * s_\mu) \\ &= H_1 D_{E_{-1}} \sum_{\lambda, \mu} (D_{s_\lambda} f)(D_{s_\mu} g) D_{H_1}((s_\lambda * s_\mu)) \\ &= \left\langle \sum_{\lambda, \mu} (D_{s_\lambda} f)(D_{s_\mu} g) D_{H_1}(s_\lambda * s_\mu) \right\rangle, \end{aligned}$$

por el Lema 4.16, se concluye que

$$\langle f \rangle * \langle g \rangle = \left\langle \sum_{\lambda, \mu} (D_{s_\lambda} f)(D_{s_\mu} g) \sum_{\nu} s_{\lambda/\nu} * s_{\mu/\nu} \right\rangle = \left\langle \sum_{\lambda, \mu, \nu} (D_{s_\lambda} f)(D_{s_\mu} g) (s_{\lambda/\nu} * s_{\mu/\nu}) \right\rangle.$$

□

Del lema y teorema anteriores sigue inmediatamente el teorema de Littlewood.

Corolario 4.19. (Littlewood [1])

$$\langle f \rangle * \langle g \rangle = \left\langle \sum_{\lambda, \mu, \nu} (D_{s_\nu} D_{s_\lambda}(f))(D_{s_\nu} D_{s_\mu}(g)) (s_\lambda * s_\mu) \right\rangle.$$

5. Algunos Productos de Kronecker

En esta sección se deducen algunas fórmulas de productos de Kronecker para algunas funciones simétricas particulares.

Proposición 5.1. Sea $p \leq q$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle e_p \rangle * \langle e_q \rangle &= \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^{p-k} \left\langle \sum_{j=2}^k S_{(1^{q-p+2i}, 2^{p-k-i}, j)} + \sum_{j=1}^k S_{(1^{q-p+2i+1}, 2^{p-k-i-1}, j+1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^k S_{(1^{q-p+2i-1}, 2^{p-k-i}, j+1)} + \sum_{j=0}^k S_{(1^{q-p+2i}, 2^{p-k-i-1}, j+2)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Demostración. Por Teorema de Thibon 2 se tiene que

$$\langle e_p \rangle * \langle e_q \rangle = \left\langle \sum_{\lambda, \mu, \nu} S_{(1^p)/\lambda} \cdot S_{(1^q)/\mu} (S_{\lambda/\nu} * S_{\mu/\nu}) \right\rangle.$$

Para que los términos de la suma sean distintos de cero, λ y μ deben ser de la forma (1^k) , y como el producto interior es distinto de cero solo si ambas funciones son del mismo grado, se debe cumplir $|\lambda| = |\mu|$. En consecuencia, se debe tener $\lambda = \mu = (1^k)$, con $0 \leq k \leq p$. Por tanto, se sigue que

$$\begin{aligned} \langle e_p \rangle * \langle e_q \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^p \sum_{\nu} S_{(1^{p-k})} S_{(1^{q-k})} (S_{(1^k)/\nu} * S_{(1^k)/\nu}) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^k S_{(1^{p-k})} S_{(1^{q-k})} (S_{(1^{k-j})} * S_{(1^{k-j})}) \right\rangle. \end{aligned}$$

Por la identidad (3.3) y la version dual de la regla de Pieri's se sigue.

$$\begin{aligned} \langle e_p \rangle * \langle e_q \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^k e_{(q-k)} S_{(1^{p-k})} S_{k-j} \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^{p-k} S_{(1^{q-p+2i}, 2^{p-k-i})} \right) S_{k-j} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^{p-k} \left(\sum_{j=0}^k S_{(1^{q-p+2i}, 2^{p-k-i})} S_j \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Por regla de Pieri's se tiene que

$$S_{(1^a, 2^b)} S_j = \begin{cases} S_{(1^a, 2^b)} & \text{si } j = 0 \\ S_{(1^a, 2^{b-1}, 3)} + S_{(1^{a-1}, 2^{b+1})} + S_{(1^{a+1}, 2^b)} & \text{si } j = 1 \\ S_{(1^a, 2^{b-1}, j+2)} + S_{(1^{a-1}, 2^b, j+1)} + S_{(1^{a+1}, 2^{b-1}, j+1)} + S_{(1^a, 2^b, j)} & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

de donde

$$\sum_{j=0}^k S_{(1^a, 2^b)} S_j = \sum_{j=0}^k S_{(1^a, 2^{b-1}, j+2)} + \sum_{j=1}^k S_{(1^{a-1}, 2^b, j+1)} + \sum_{j=1}^k S_{(1^{a+1}, 2^{b-1}, j+1)} + \sum_{j=2}^k S_{(1^a, 2^b, j)}.$$

La proposición se concluye aplicando este resultado a $\sum_{j=0}^k S_{(1^{q-p+2i}, 2^{p-k-i})} S_j$ $\square$

Las demostraciones de las siguientes proposiciones siguen las mismas ideas de la demostración anterior por lo que solamente los enunciamos; además las pruebas se las puede ver en el artículo de Thibon [4].

Proposición 5.2. Para todo $p, q \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$\langle s_p \rangle * \langle e_q \rangle = \sum_{k=0}^{\min\{p, q\}} \langle s_{p-k} e_{q-k} (e_k + e_{k-1}) \rangle.$$

Proposición 5.3. Sea $p \leq q$. Entonces

$$\langle s_p \rangle * \langle s_q \rangle = \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^{p-k} \sum_{j=0}^k \sum_{\substack{a+b+c=j \\ a \leq i, b \leq p+q-2k-2i}} \langle S_{(a, i+b, p+q-2k-i+c)} \rangle.$$

Referencias

- [1] D. E. Littlewood, Products and Plethysms of Characters with Orthogonal, Symplectic and Symmetric Groups, Canadian Journal of Mathematics 10 (1958), 17-32.
- [2] F. D. Murnaghan, On the Kronecker Product of Irreducible Representations of the Symmetric Group, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 42 (1956), 95-98.
- [3] I. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Oxford University Press, 2a. ed., 1995.
- [4] J. Y. Thibon, Hopf Algebras of Symmetric Functions and Tensor Products of Symmetric Group Representations, International Journal of Algebra and Computation, Vol. 1, (1991), 207-221.
- [5] M. H. Rosas, A Comment on the Combinatorics of the Vertex Operator $\Gamma_{(t|X)}$, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 49, 7, 2019.
- [6] R. Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 62, Cambridge University Press, 1999.
- [7] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti y F. Tolli, Representation Theory of the Symmetric Group: The Okounkov-Vershik Approach, Character Formulas and Partition Algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 121, Cambridge University Press, 2010.
- [8] E. Vallejo, Producto tensorial, manuscrito, enero 2021.
- [9] E. Vallejo, La completación del anillo de funciones simétricas, manuscrito, enero 2021.