

**OBTENCIÓN DE PARÁMETROS EN
TRANSFORMADORES MEDIANTE ELEMENTOS
FINITOS USANDO ANSYS**

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

presenta

Ing. Héctor Daniel Villanueva Hernández

Dr. Carlos Pérez Rojas

Director de Tesis

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Noviembre 2007

Agradecimientos

A mis Padres: Jesús Villanueva, quien físicamente ya no está conmigo y Ma. Dolores Hernández, quienes me alentaron con el ejemplo todos los días de mi vida para llevar a cabo con éxito este objetivo.

A Alexandra Saldivar Segundo en quien siempre encontré palabras de ánimo y fuerzas para seguir adelante.

A mis Hermanos quienes me impulsaron a seguir esforzándome para lograr mi sueño.

Y por supuesto, agradezco infinitamente a mi asesor el Dr. Carlos Pérez Rojas, por sus consejos, su confianza y su gran apoyo para llevar a cabo esta investigación.

A mis Amigos: Alejandro, Héctor Ramiro, Roberto, Jorge, José Luis, Jorge Alfredo por su apoyo, lealtad y todos los momentos gratos.

A DIOS por llenar mi vida de dicha y bendiciones.

Resumen

El estudio de la teoría electromagnética en forma convencional puede parecer muy abstracto, por tal razón se emplean métodos numéricos para resolver las ecuaciones resultantes que describen fenómenos o situaciones físicas, haciendo más ilustrativo el estudio del electromagnetismo. La determinación de parámetros en transformadores resulta una tarea difícil de llevar a cabo, puesto que las cantidades magnéticas no pueden ser medidas físicamente como tales, solo sus efectos pueden ser medidos a través de algunas técnicas. El método del elemento finito, que es un método de aproximación, puede emplearse para tener la aproximación a parámetros de esta naturaleza, algunos de los cuales pueden ser obtenidos por fórmulas desarrolladas a través de los años pero que para ser aplicadas se deben realizar algunas suposiciones que pueden resultar en datos alejados de la realidad. Además, con el método del elemento finito se pueden determinar parámetros que en la actualidad son de suma importancia, y para ellos las expresiones analíticas desarrolladas proporcionan valores alejados de la realidad, tal es el caso de la inductancia de dispersión.

Además, con el método del elemento finito se puede realizar el análisis de dispositivos con geometrías físicas complejas que analíticamente es muy difícil de llevar a cabo. Tal es el caso de los transformadores de horno de arco, que por su constitución física son mucho más fáciles de estudiar y analizar mediante el elemento finito en lugar de su formulación analítica.

Abstract

The study of the electromagnetic theory may seem to be very abstract in a conventional way. For such a reason numerical methods are used to solve the resultant equations that describe phenomena or physical situations, making the study of electromagnetism more illustrative. Parameters determination in transformers turns out to be a difficult task to carry out, since magnetic quantities cannot be straightforward physically measured, only their effects can be measured by means of some techniques. The finite element method, a method of approximation, can be used in order to get an approximation of the parameters of this nature. Some of those parameters may be obtained by means of formulas developed along the years but some of the assumptions that must be considered in order to apply them may lead us to obtain erroneous results. (e.g leakage inductance)

Besides, the finite element method let us obtain the analysis of devices with complex physical geometries, which analytically is very difficult to carry out. That it is the case of the furnace transformers, which are easier to study and analyze by means of the finite element instead of analytic formulation due to their physical constitution.

Índice

Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XIII
Lista de símbolos	XV
1. Introducción	1
1.1. Estado del Arte	2
1.2. Objetivo	4
1.3. Justificación	5
1.4. Metodología	6
1.5. Historia del elemento finito	7
1.6. Descripción de la tesis	8
2. Procedimiento del MEF	9
2.1. Introducción	9
2.2. Solución de la ecuación de Laplace	10
2.2.1. Discretización del Elemento Finito	11
2.2.2. Ecuaciones de elemento	13
2.2.3. Ensamblado de elementos	16
2.2.4. Solución de las ecuaciones resultantes	20
2.3. Solución de la ecuación de Poisson	22
2.3.1. Derivación de las ecuaciones de elemento	22
2.3.2. Solución de las ecuaciones resultantes	24
2.4. Imposición de condiciones frontera	24
2.4.1. Condiciones frontera de Dirichlet	25
2.4.2. Condiciones frontera de Neumann	25
3. El MEF aplicado a electromagnetismo	29
3.1. Introducción	29
3.2. Ecuaciones de Maxwell	30
3.2.1. Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell	31
3.2.2. Forma integral de las ecuaciones de Maxwell	32

3.2.3.	Campos magnetostáticos	33
3.2.4.	Campos electrostáticos	35
3.3.	Ecuaciones de potencial	36
3.3.1.	Potencial escalar magnético	37
3.4.	La ecuación inhomogénea de Helmholtz	37
3.4.1.	Funcional para la ecuación de Helmholtz	38
3.5.	Comparación del MEF y soluciones exactas	38
3.6.	Ansys [©]	40
4.	Análisis de transformadores usando el MEF	43
4.1.	Introducción	43
4.2.	Parámetros en reactores y transformadores	43
4.2.1.	Bobinas	43
4.2.2.	Inductancia	44
4.2.3.	Transformador ideal	44
4.2.4.	Transformador real	45
4.2.5.	Inductancia de magnetización	47
4.2.6.	Inductancia de dispersión	49
4.3.	Casos de estudio	49
4.4.	Reactor monofásico	50
4.4.1.	Modelado de un reactor monofásico tipo núcleo	51
4.4.2.	Modelado de un reactor monofásico tipo acorazado	56
4.5.	Transformador monofásico	60
4.5.1.	Modelado de un transformador monofásico tipo núcleo	61
4.5.2.	Modelado de un transformador monofásico tipo acorazado	65
4.6.	Modelado del transformador trifásico	70
5.	Transformador de horno	77
5.1.	Introducción	77
5.2.	Transformadores de horno	78
5.3.	Modelado usando elementos finitos	84
6.	Conclusiones	91
6.1.	Conclusiones	91
6.2.	Trabajo futuro	93
	Referencias	95

Lista de figuras

2.1. Elementos finitos típicos: (a) 1D, (b) 2D y (c) 3D	11
2.2. (a) Región solución y (b) Discretización en elementos finitos	12
2.3. Numeración de nodos	14
2.4. Funciones de forma para un elemento triangular	15
2.5. Discretización de una región no homogénea	17
2.6. Ensamblado de tres elementos	18
2.7. Fronteras: (a) De Dirichlet y (b) De Neumann	25
2.8. Diagrama de flujo del elemento finito	26
3.1. Superficie S y contorno C para la forma integral	32
3.2. Dominio con frontera curva modelado con elementos rectangulares	39
3.3. Diagrama de flujo de Ansys [©]	41
4.1. Transformador ideal	44
4.2. Circuitos acoplados magnéticamente	46
4.3. Reactor monofásico	51
4.4. Circuito equivalente: a) magnético, b) eléctrico	52
4.5. Reactor monofásico mallado	53
4.6. Líneas de flujo	54
4.7. Reactor monofásico con entrehierro	57
4.8. Circuito equivalente magnético	57
4.9. Mallado del reactor monofásico con entrehierro	58
4.10. Líneas de flujo	59
4.11. Transformador monofásico tipo núcleo	61
4.12. Circuito equivalente: a) magnético, b) eléctrico	62
4.13. Mallado del transformador monofásico tipo núcleo	63
4.14. Distribución de flujo magnético	63
4.15. Transformador monofásico tipo acorazado	66
4.16. Circuito equivalente magnético	66
4.17. Mallado del transformador monofásico tipo acorazado	67
4.18. Densidad de flujo magnético	68
4.19. Transformador trifásico de tres columnas	71
4.20. Circuito equivalente eléctrico del transformador trifásico de tres columnas	71

4.21. Circuito equivalente magnético del transformador trifásico de tres columnas	72
4.22. Mallado del transformador trifásico de tres columnas	74
4.23. Comportamiento de ϕ en el transformador trifásico	74
5.1. Derivaciones en el devanado primario	80
5.2. Regulación por autotransformador	81
5.3. Arreglo elevador	81
5.4. Conexión en ocho	82
5.5. Diagrama interno del transformador	83
5.6. Vista lateral del transformador	84
5.7. Transformador de horno discretizado	85
5.8. Equivalente del devanado secundario	85
5.9. Flujo generado por devanado secundario	86
5.10. Comportamiento de ϕ en el transformador de horno	86
5.11. Numeración de devanados	88

Lista de tablas

4.1. Parámetros del reactor monofásico tipo núcleo	55
4.2. Parámetros del reactor monofásico tipo acorazado	59
4.3. Parámetros magnéticos	60
4.4. Parámetros del transformador monofásico tipo núcleo	64
4.5. Inductancias de dispersión	64
4.6. Efecto de un defasamiento de devanados	65
4.7. Parámetros del transformador monofásico tipo acorazado	68
4.8. Inductancias de dispersión	69
4.9. Incremento en inductancia de dispersión	70
4.10. Parámetros del transformador trifásico	75
4.11. Inductancias de dispersión	76
5.1. Magnitudes máximas y mínimas de ϕ al cambiar derivación	87
5.2. Parámetros del transformador de horno	87

Lista de símbolos

α_i	Funciones de interpolación lineal
$[C_{ij}]$	Matriz de rigidez
V_e	Potencial en un elemento
B	Densidad de flujo magnético
H	Intensidad de flujo magnético
E	Intensidad de campo eléctrico
D	Densidad de flujo eléctrico
J	Densidad de corriente eléctrica
μ	Permeabilidad del material
ϵ	Permitividad eléctrica
ρ	Densidad de carga eléctrica
l	Longitud
A	Área de la sección transversal
L	Matriz de inductancia
L_l	Inductancia de dispersión
L_m	Inductancia de magnetización
ϕ_l	Flujo de dispersión
ϕ_m	Flujo de magnetización
\mathfrak{R}	Reluctancia
N	Número de vueltas de un devanado
fmm	Fuerza magnetomotriz

Capítulo 1

Introducción

Los problemas de ingeniería se estudian con modelos matemáticos que representan situaciones físicas, estos modelos suelen ser ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno e iniciales determinadas. Estas ecuaciones son derivadas aplicando leyes fundamentales y principios de la naturaleza a sistemas, las cuales representan el equilibrio de masas, fuerzas o energía. Sin embargo, existen muchos problemas prácticos en ingeniería para los que no se puede obtener su solución exacta, lo cual se puede atribuir a la complejidad natural de las ecuaciones diferenciales o a las dificultades que pueden ocurrir con las condiciones de contorno o iniciales. Para tratar este tipo de problemas se usan las aproximaciones numéricas. En contraste a la solución analítica, que muestra el comportamiento exacto de un sistema en cualquier punto del mismo, las soluciones numéricas aproximan la solución solo en puntos discretos, llamados nodos. El primer paso en cualquier procedimiento numérico es la discretización, este proceso divide el medio de interés en un número de pequeñas subregiones y nodos. Hay dos clases de métodos numéricos: método de diferencias finitas y método de los elementos finitos. Con el método de diferencias finitas, la ecuación diferencial es escrita para cada nodo y las derivadas son reemplazadas por ecuaciones de diferencias, con ello se logra un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas. Aunque este método es fácil de entender y utilizar en problemas simples, se presentan dificultades al aplicarlo a geometrías complejas o condiciones de contorno complejas, esta situación es real para problemas con materiales con propiedades no isotrópicos (que no tienen iguales

propiedades en todas las direcciones). En contraste, el Método del Elemento Finito (MEF) usa una formulación integral más que en ecuaciones de diferencias para crear un sistema de ecuaciones algebraicas. Por otra parte se asume una función continua aproximada para representar la solución para cada elemento. La solución completa se genera conectando o armando las soluciones individuales, permitiendo la continuidad de los límites interelementales. La importancia que tiene el MEF radica en que es una técnica numérica poderosa que permite resolver sistemas representados por ecuaciones diferenciales parciales que no pueden resolverse analíticamente. Por ejemplo, la ecuación de Poisson, con la cual se representa el fenómeno electromagnético que sucede en dispositivos utilizados en ingeniería eléctrica.

El MEF ha llegado a ser una herramienta poderosa en la solución numérica de un amplio rango de problemas de ingeniería. Las aplicaciones van desde el análisis por deformación y esfuerzo de automóviles, aeronaves, edificios y estructuras de puentes, hasta el análisis de los campos de flujo de calor, de fluidos, magnético, filtraciones y otros problemas de flujo. Con los avances en la tecnología de las computadoras y de los sistemas CAD, pueden modelarse problemas más complejos con relativa facilidad. Mediante una herramienta basada en el MEF, en una computadora pueden probarse varias configuraciones alternas antes de construir el primer prototipo.

1.1. Estado del Arte

A través de los años se ha intensificado la labor de investigación para la estimación de parámetros en transformadores y de esta manera determinar modelos que reproduzcan con precisión el comportamiento de los transformadores bajo diversas condiciones de operación.

El MEF ha sido ampliamente utilizado para la determinación de diferentes parámetros en transformadores, tal es el caso de [Leon92] donde se estiman la inductancia y capacitancia de dispersión en transformadores, para esto el devanado es representado como vueltas individuales. La inductancia de dispersión ha sido determinada para diferentes tipos de transformadores en específico, tales son los casos analizados en [Kashtiban05], [Hayes03], [Silvester73] y [Gyimesi99]. En [Kashtiban05] se determina la inductancia de dispersión para

transformadores con diferentes tipos de arrollamiento sobre el núcleo, para tal propósito se utiliza un programa COSMOS[©] que está basado en el MEF. En [Hayes03] se determina la inductancia de dispersión para dos transformadores de alta dispersión diferentes entre sí. En [Silvester73] la dispersión es calculada utilizando elementos de orden superior donde se obtienen matrices pequeñas a resolver comparadas con las matrices resultantes de usar elementos de primer orden. En [Gyimesi99] se propone el método de incremento de energías como una manera más eficiente de calcular inductancias comparado con el método de energía tradicional.

En [Jamali05] se determina la reactancia de dispersión además de esfuerzos mecánicos en las bobinas, tomando como modelo la mitad, por simetría, de un transformador trifásico de tres piernas. En [Kladas94] se hace una comparación entre técnicas basadas en la teoría de imágenes y el MEF donde para el caso estudiado se calculan campos de dispersión y fuerzas electromagnéticas estáticas en dos y tres dimensiones comparando los datos obtenidos con mediciones experimentales. Resultando más eficiente, para este tipo de problemas, un cálculo por elemento finito en tres dimensiones.

Por medio del MEF también se han desarrollado diferentes modelos de transformadores entre los cuales se encuentran los propuestos en [Chen97], [Férrandez02], [Rojas06] [Mohammed06] y [Wang01]. En [Chen97] se propone un modelo matemático para un transformador multi devanados, obteniendo los parámetros del modelo por medio del MEF, especificando que cada parámetro en el modelo corresponde a un flujo físico en el transformador, sin embargo, se resalta la dificultad de este modelo para ser usado analíticamente. En [Férrandez02] se propone un modelo para un transformador sin núcleo completamente basado en el MEF, resaltando que debido a que no contiene material no-lineal en él, el comportamiento completo del modelo es lineal, lo cual lleva a una fácil solución con el MEF. En [Rojas06] se valida por medio del MEF un modelo numérico utilizado para simular el comportamiento del núcleo magnético para diferentes condiciones de operación, implementando dicho modelo en FLUX2D[©]. En [Mohammed06] se propone un modelo que incluye los efectos de no linealidad del núcleo. En [Wang01] utilizan un programa comercial basado en el MEF para determinar el modelo de un transformador monofásico con fallas internas en los devanados comparando sus resultados con datos experimentales.

En [Kanerva05] se propone un acoplamiento entre parámetros obtenidos por medio del MEF de una máquina simulada en dos dimensiones y un modelo de la máquina eléctrica donde se reporta una inductancia dinámica obtenida mediante el MEF.

El MEF también ha sido ampliamente utilizado para la determinación de las corrientes de eddy en transformadores como puede ser visto en [Schmidt03], [Guangzheng92], y [Han04]. En [Schmidt03] se determinan las corrientes de eddy en el tanque de transformadores de potencia. En [Guangzheng92] el estudio es enfocado a la determinación de corrientes de eddy en los devanados para lo cual los autores proponen un método para resolver las ecuaciones resultantes de un modelo en tres dimensiones. A diferencia de [Han04] donde se proponen métodos para medir la dispersión y las mediciones reportadas son validadas por medio del MEF.

En [Yun90] el MEF es utilizado para la determinación del flujo de dispersión y el contenido armónico en el transformador durante un cortocircuito.

En [Li06] se determina el flujo de dispersión en transformadores que se encuentran operando a altas temperaturas para poder determinar la distribución de corrientes.

Además del desarrollo de modelos, el MEF también ha sido implementado en programas con el propósito particular de determinar flujo de dispersión como el propuesto en [Andersen73] y en [Zhizhen01].

El uso de Ansys[®] como herramienta de diseño ha sido validada en diferentes aplicaciones, para el caso de diseño de transformadores ha sido utilizado en [Meng04], [Gyimesi93] y [Zizek02] donde se probaron diferentes configuraciones, mediante el uso de esta herramienta, antes de que se construyeran los modelos.

Sin embargo, hasta el momento en la literatura disponible, el análisis del transformador de horno de arco no ha sido realizado mediante el MEF.

1.2. Objetivo

En la actualidad el diseño y análisis de dispositivos eléctricos de potencia y máquinas eléctricas se realiza con la utilización de paquetes computacionales que manejan el MEF, la disponibilidad de estos programas comerciales dan al ingeniero la oportunidad de obtener

información muy detallada sobre el comportamiento de los objetos que él diseña. Sin embargo, la existencia de esta posibilidad incrementa, en vez de reducir, la necesidad de un juicio firme en ingeniería sobre las bases, el fundamento y la implementación del programa. La información de salida de la computadora nunca puede sustituir el entendimiento y al sentido común.

En el presente trabajo, el paquete Ansys[©], que está basado en el MEF, es utilizado para la determinación de parámetros en transformadores, los cuales pueden ser aproximados por fórmulas ya desarrolladas y presentadas con anterioridad en la literatura [Krause02] [Fitzgerald92], pero que sin embargo dichas fórmulas solo proporcionan un valor aproximado, el cual para ciertos casos puede quedar en un valor distante al valor real, uno de estos parámetros es la inductancia de dispersión. El cálculo de la inductancia de dispersión L_l en un transformador es un pre-requisito para el cálculo de la reactancia total, parámetros de corto circuito y pérdidas por corriente de eddy. Por lo tanto, tiene una importancia fundamental para los diseñadores de transformadores. Otro objetivo en el desarrollo de este trabajo es que en caso de que exista un transformador con alguna falla interna se pueda observar la variación de los parámetros de inductancia, para lo cual no existen fórmulas desarrolladas debido a que hay una infinidad de fallas que suelen suceder en un transformador. Sin embargo con el uso del elemento finito estos parámetros pueden ser obtenidos. En Ansys[©] también se puede apreciar la distribución de las líneas de flujo en un transformador. En un transformador de horno de arco la densidad de flujo puede ser variada dependiendo del movimiento en sus cambiadores de derivación. Esto puede ser apreciado mediante la simulación de su modelo equivalente en Ansys[©], donde se puede utilizar una de las características principales que lleva a su utilización en este proyecto como lo es el poder realizar modelos en tres dimensiones.

1.3. Justificación

La determinación de parámetros en transformadores de horno de arco bajo diferentes condiciones de operación, es una tarea difícil de llevar a cabo, además, el realizar un análisis analítico de este dispositivo resulta muy complicado, debido a la complejidad

de la geometría de los mismos, principalmente por el doble núcleo. Es aquí donde tiene importancia el uso de un paquete computacional basado en el MEF, puesto que la literatura disponible acerca de estos transformadores de aplicación especial es reducida y no ofrece un modelo matemático en específico. El transformador de horno de arco no es tan común como uno de distribución o de potencia pero no por eso es menos importante.

1.4. Metodología

El problema a resolver en este trabajo es de tipo electromagnético y de solución muy complicada, ya que se trata del modelado de un transformador de horno de arco. La complejidad de éste es debida a que consta de dos núcleos y tres devanados donde dos de éstos entrelazan los dos núcleos, lo que impide la obtención de un circuito equivalente plano. De aquí que se tenga que recurrir a métodos numéricos para su solución. El primer paso consiste en proporcionar la base matemática de electromagnetismo. En este caso las ecuaciones de Maxwell, donde como casos particulares podemos obtener las ecuaciones de Poisson y Laplace, que definen el comportamiento de cualquier sistema electromagnético. Sin embargo, la solución analítica de estas ecuaciones puede resultar tan complicada como el problema mismo por lo cual se recurre a una herramienta como lo es el MEF. Como consecuencia el siguiente paso es revisar los fundamentos del MEF y su aplicación se realizó por medio de una herramienta computacional, en este caso Ansys[©], el cual se eligió debido que es un software reconocido mundialmente en el área de diseño y simulación.

Posteriormente se inicia con los modelos de un reactor y un transformador monofásico donde se pueden obtener los parámetros y su circuito equivalente de forma directa, por medio de las fórmulas tradicionales de circuitos y luego se comprueban con los parámetros que proporciona Ansys[©]. Para el caso particular del transformador de horno de arco donde debido a su complicada constitución geométrica al igual que su modelo analítico, se utiliza un método deductivo y el paquete Ansys[©] para obtener sus parámetros.

1.5. Historia del elemento finito

El MEF se origina en el campo del análisis estructural y su origen se remonta a principios de 1900, cuando algunos investigadores aproximaron y modelaron un sistema elástico continuo usando barras elásticas equivalentes discretizadas. Sin embargo, se ha acreditado a Courant como la primera persona en desarrollar el MEF. En 1943, Courant propuso dividir un problema continuo en regiones triangulares y reemplazar los campos con aproximaciones por partes dentro de los triángulos [Courant43]. La referencia citada por muchos como haber establecido el método del elemento finito, Turner, Clough, Martin y Topp [Turner56] se publicó en 1956. Pero, fue hasta 1960 que Clough hizo popular el término “Elemento Finito” [Clough60]. En Europa Argyris y Kelsey publicaron un libro basado en los trabajos realizados durante principios de los 50’s [Argyris60]. Una contribución teórica importante fue hecha en 1963 cuando Melosh mostró que el método del elemento finito es en realidad una variación del bien conocido método de Raleigh-Ritz [Melosh63]. Durante los 1960s, los investigadores comenzaron a aplicar el MEF a otras áreas de la ingeniería. Los elementos finitos triangulares de primer orden se emplearon por primera vez en aplicaciones de ingeniería eléctrica en 1968 [Ida92]. Estos tipos de elementos se siguen utilizando en la solución de problemas donde se incluyen materiales de comportamiento no lineal. El primer libro dedicado solamente al elemento finito fue escrito por Zienkiewicz y Cheung en 1971 [Zienkiewicz71], donde se presenta una interpretación amplia del método y su aplicación a cualquier problema de campos. En él se demuestra que las ecuaciones de los elementos finitos pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de residuos ponderados, tal como el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados. Esta visión del problema despertó un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el MEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones, hasta tal punto que hoy en día el MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada. Actualmente el método se encuentra en una fase de gran expansión, es decir, es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo.

1.6. Descripción de la tesis

El capítulo 1 nos remonta a los orígenes del método del elemento finito describiendo un poco de su historia, además nos muestra el objetivo de este trabajo de tesis.

El capítulo 2 profundiza un poco más en los pasos del método del elemento finito, mismos que son relacionados con la ecuación de Poisson que es la que describe el comportamiento de los campos electromagnéticos.

El capítulo 3 presenta una introducción básica a las ecuaciones de Maxwell que son las que describen el comportamiento de campos electromagnéticos así como una descripción muy general de los pasos que incluye la solución de un problema mediante Ansys[©].

En el capítulo 4 se hace una revisión de conceptos básicos en cuanto a bobinas y transformadores se refiere, para después presentar los modelos de reactores, transformadores monofásico y trifásicos por medio del elemento finito, donde algunos de ellos son sometidos a fallas de defasamiento de devanados y apertura de vueltas en el devanado.

El capítulo 5 es un caso especial en el cual se presenta la forma en que se comporta el flujo magnético en un transformador de horno de arco dependiendo del movimiento realizado por el cambiador de derivación, lo cual indica la dirección y sentido en la alimentación del devanado de excitación.

El capítulo 6 presenta las conclusiones así como algunos objetivos proyectados a futuro del presente trabajo.

Capítulo 2

Procedimiento del MEF

2.1. Introducción

El MEF, como ya se mencionó en el capítulo 1, tiene sus orígenes en el campo estructural. A pesar que los tratados matemáticos fueron propuestos por Courant en 1943 [Courant43], el método no fue aplicado a problemas de electromagnetismo (EM) hasta 1968. Desde entonces el método ha sido aplicado en diversas áreas tales como máquinas eléctricas [Sabonnadiere97], dispositivos semiconductores [Tan89], microcintas [She94], problemas de guía de ondas [Zakharia04], y absorción de radiación EM por cuerpos biológicos [Van83] [Seker02]. A pesar que el método de diferencias finitas y el método de momentos son conceptualmente más sencillos y fáciles de programar que el MEF, éste es una técnica numérica más poderosa y versátil para manejar problemas que envuelven geometrías complejas y medios no homogéneos. La generalidad sistemática del método hace posible la construcción de programas de propósito general para resolver una amplia gama de problemas. Como consecuencia, los programas que han sido desarrollados para alguna disciplina en particular pueden ser aplicados con gran éxito para resolver problemas en algún campo diferente con pequeñas o sin modificaciones.

EL MEF es una aplicación por partes de un método variacional, dentro de este tipo de métodos hay dos pasos básicos para solucionar ecuaciones diferenciales los cuales son: reformular la ecuación diferencial en su forma variacional, y determinar su solución aproxi-

mada usando algún método variacional, tal como el método de Ritz, el método de Galerkin o algún otro. El término *formulación variacional* se usa para indicar una formulación en la cual la ecuación diferencial dada es reformulada en una forma integral equivalente, cambiando la diferenciación por una función de prueba y la variable dependiente. Para la mayoría de los problemas lineales esta formulación es equivalente a la minimización de un funcional cuadrático $I(u)$, llamado algunas veces *la energía potencial total*. Análogamente a la condición necesaria para el mínimo de una función ordinaria, la condición necesaria para un funcional cuadrático es que su primer derivada con respecto a la variable dependiente sea cero. Del cálculo de variaciones se sabe que la función minimizada es la verdadera solución de la ecuación diferencial. Sin embargo, en este trabajo no se profundiza en la obtención de funcionales debido a que es un tema demasiado extenso, en lugar de esto se utiliza la ecuación de Helmmoltz, descrita más adelante, donde su funcional se encuentra dado por una ecuación generalizada [Reddy84].

El análisis por elemento finito de cualquier problema engloba básicamente cuatro pasos:

1. Discretización de la región solución en un número finito de subregiones o elementos.
2. Derivación de las ecuaciones gobernantes para un elemento típico.
3. Ensamblado de todos los elementos en la región solución.
4. Solución de las ecuaciones del sistema.

La discretización del medio continuo comprende la división de la región solución en subdominios, llamados elementos finitos. La Figura 2.1 muestra algunos elementos típicos para problemas de una (*a*), dos (*b*) y tres dimensiones (*c*).

2.2. Solución de la ecuación de Laplace

Como una aplicación del MEF a problemas de electrostática, se aplicarán los cuatro pasos mencionados anteriormente para resolver la ecuación de Laplace, $\nabla^2 V = 0$.

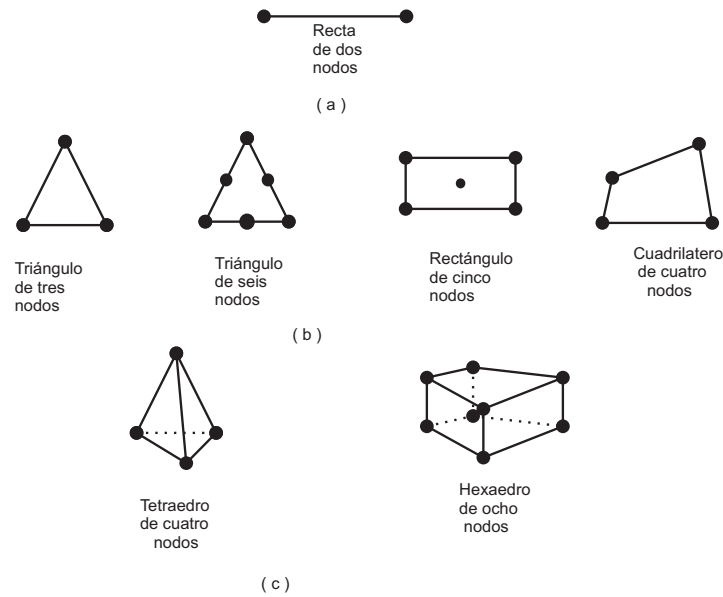


Figura 2.1: Elementos finitos típicos: (a) 1D, (b) 2D y (c) 3D

2.2.1. Discretización del Elemento Finito

Para calcular la distribución del potencial $V(x, y)$ para la región solución bidimensional mostrada en la Figura 2.2a, se divide la región en un número de elementos finitos como se ilustra en la Figura 2.2b, la región solución es subdividida en nueve elementos finitos; los elementos 6, 8 y 9 son cuadriláteros de cuatro nodos, mientras que los otros elementos son triángulos de tres nodos. En soluciones prácticas, sin embargo, es preferido, para facilidad en programación, tener elementos del mismo tipo en toda la región. Esto es, en la Figura 2.2b, se puede dividir cada cuadrilátero en dos triángulos, así se tendrían doce elementos triangulares en total. Lo que se busca es una aproximación para el potencial V_e dentro de un elemento e , y después interrelacionar la distribución de potencial en varios elementos considerando que el potencial es continuo a través de límites interelementales. La solución aproximada para la región completa es

$$V(x, y) \simeq \sum_{e=1}^N V_e(x, y) \quad (2.1)$$

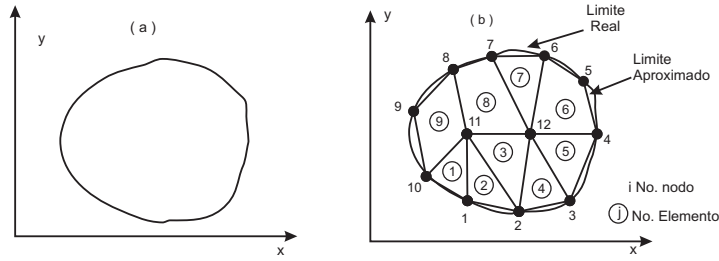


Figura 2.2: (a) Región solución y (b) Discretización en elementos finitos

Donde N es el número de elementos triangulares en los cuales es dividida la región solución. La forma más común de aproximación para V_e dentro de un elemento es por aproximación polinomial, es decir

$$V(x, y) = a + bx + cy \quad (2.2)$$

para un elemento triangular y

$$V_e(x, y) = a + bx + cy + dxy \quad (2.3)$$

para un elemento cuadrilateral. Donde las constantes a , b , c y d necesitan ser determinadas. El potencial V_e en general es diferente de cero dentro del elemento e y cero fuera de e . En vista que los elementos cuadrilaterales no cumplen de manera adecuada con los límites curvos tan fácil como los elementos triangulares, estos últimos son los más utilizados en la mayoría de los problemas, por lo tanto nos enfocaremos solo en ellos. Hay que notar que la suposición de la variación lineal de potencial dentro del elemento triangular como en (2.2) es la misma que el hecho de asumir que el campo eléctrico es uniforme dentro del elemento, i.e.,

$$E_e = -\nabla V_e = -(ba_x + ca_y) \quad (2.4)$$

2.2.2. Ecuaciones de elemento

Considerando un elemento triangular típico mostrado en la Figura 2.3. Se puede obtener el potencial V_{e1} , V_{e2} y V_{e3} en los nodos 1, 2, y 3, respectivamente, usando (2.2)

$$\begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Los coeficientes a , b y c son determinados de (2.5) como

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Lo cual sustituido en (2.2), da

$$V_e = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}$$

lo que es lo mismo

$$V_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) V_{ei} \quad (2.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned} \quad (2.8)$$

siendo A el área del elemento e

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)$$

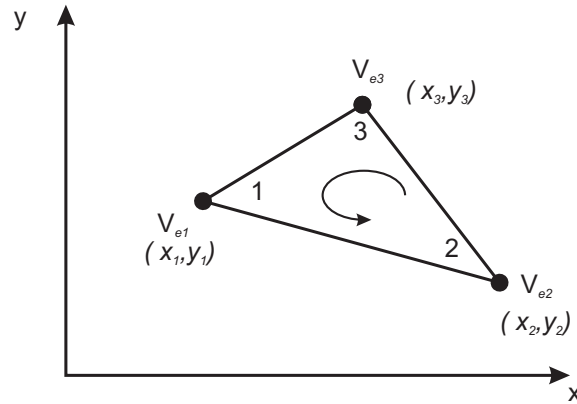


Figura 2.3: Numeración de nodos

es decir

$$A = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (2.9)$$

El valor de A es positivo si los nodos son numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj (comenzando de cualquier nodo), como lo muestra la flecha en la Figura 2.3. Nótese aquí que (2.7) proporciona el potencial en cualquier punto (x, y) dentro del elemento una vez que los potenciales en los vértices son conocidos. Esta es la principal diferencia con el análisis por diferencias finitas, donde los potenciales solo son conocidos en los puntos de la red. También hay que resaltar que α_i son funciones de interpolación lineal, las cuales son llamadas *funciones de forma del elemento* y tienen las siguientes propiedades [Silvester96]:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1 \quad (2.10)$$

Las funciones de forma α_1 , α_2 y α_3 son mostradas en la Figura 2.4.

El funcional correspondiente a la ecuación de Laplace, $\nabla^2 V = 0$ está dado por [Sadiku01]

$$W_e = \frac{1}{2} \int \epsilon |E_e|^2 dS = \frac{1}{2} \int \epsilon |\nabla V_e|^2 dS \quad (2.11)$$

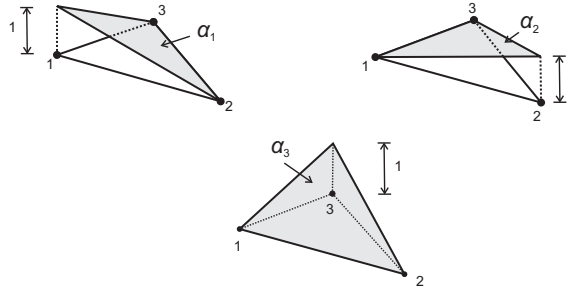


Figura 2.4: Funciones de forma para un elemento triangular

Físicamente, la función W_e es la energía por unidad de longitud asociada con el elemento e . De (2.7)

$$\nabla W_e = \sum_{i=1}^3 V_{ei} \nabla \alpha_i \quad (2.12)$$

sustituyendo (2.12) en (2.11) se obtiene

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon V_{ei} \left[\int \nabla \alpha_i \cdot \alpha_j dS \right] V_{ej} \quad (2.13)$$

definiendo el término entre corchetes como

$$C_{ij}^{(e)} = \int \nabla \alpha_i \cdot \alpha_j dS \quad (2.14)$$

se puede escribir (2.13) en forma matricial como

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon [V_e]^t [C^{(e)}] [V_e] \quad (2.15)$$

donde el superíndice t denota la transpuesta de la matriz,

$$[V_e] = \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}$$

y

$$[C^{(e)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(e)} & C_{12}^{(e)} & C_{13}^{(e)} \\ C_{21}^{(e)} & C_{22}^{(e)} & C_{23}^{(e)} \\ C_{31}^{(e)} & C_{32}^{(e)} & C_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

La matriz $[C^{(e)}]$ es llamada *matriz de coeficientes de los elementos*. El elemento $[C_{ij}^{(e)}]$ de la matriz de coeficientes puede ser considerado como el acoplamiento entre los nodos i y j ; su valor es obtenido de las ecuaciones (2.8) y (2.14). Por ejemplo,

$$\begin{aligned} C_{12}^{(e)} &= \int \nabla \alpha_i \cdot \alpha_j dS \\ &= \frac{1}{4A^2} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \int dS \\ &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \end{aligned}$$

de forma similar

$$\begin{aligned} C_{13}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)], \\ C_{23}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)], \\ C_{11}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2], \\ C_{22}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2], \\ C_{33}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2] \end{aligned} \tag{2.17}$$

De la misma forma

$$C_{21}^{(e)} = C_{12}^{(e)}, C_{31}^{(e)} = C_{13}^{(e)}, C_{32}^{(e)} = C_{23}^{(e)} \tag{2.18}$$

2.2.3. Ensamblado de elementos

Considerando un elemento típico, el siguiente paso es ensamblar todos los elementos en la región solución. La energía asociada con el ensamblado de los elementos es

$$W = \sum_{e=1}^N W_e = \frac{1}{2} \epsilon [V]^t [C] [V] \tag{2.19}$$

donde

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

n es el número de nodos, N el número de elementos, y $[C]$ es llamada la matriz de coeficientes globales. Hay que resaltar que para obtener (2.19), se ha asumido que el dominio solución es homogéneo, es decir ϵ constante. Para la solución en una región no homogénea tal como la mostrada en la Figura 2.5, por ejemplo, la región es discretizada de tal forma que cada elemento finito es homogéneo. En este caso, (2.11) aun es mantenida, pero (2.19) ya no es aplicable debido a que $\epsilon = (\epsilon_r \epsilon_0)$ o simplemente ϵ_r varía de un elemento a otro. Para aplicar (2.19), se puede reemplazar ϵ por ϵ_0 y multiplicar el integrando en (2.14) por ϵ_r .

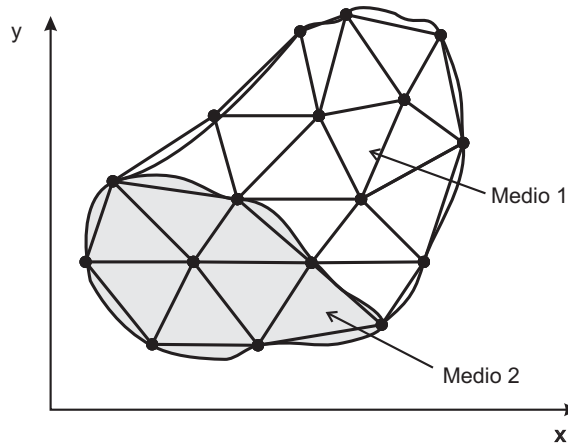


Figura 2.5: Discretización de una región no homogénea

El proceso por el cual los coeficientes de las matrices de cada elemento individual son ensamblados, para obtener la matriz de coeficientes global, se ilustra mejor con un ejemplo. Considere el mallado de elemento finitos consistente de tres elementos mostrado en la Figura 2.6. Observe la numeración del mallado. El numerado de nodos 1, 2, 3, 4 y 5 es llamado *numeración global*. La numeración i, j, k es llamada numeración local, y

corresponde con 1-2-3 del elemento en la Figura 2.3. Por ejemplo, para el elemento 3 en

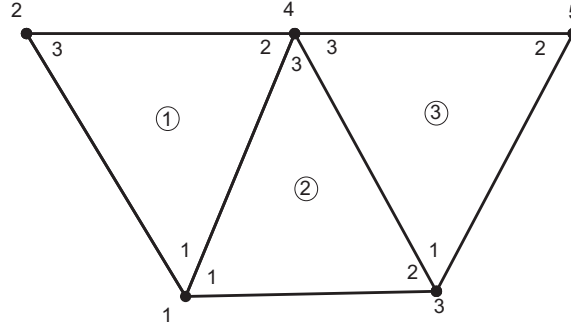


Figura 2.6: Ensamblado de tres elementos

la Figura 2.6, la numeración global 3-5-4 corresponde con la numeración local 1-2-3 del elemento. Para el elemento 3, se puede escoger 4-3-5 en lugar de 3-5-4 para que corresponda con 1-2-3 del elemento en la Figura 2.3. Por lo tanto la numeración en la Figura 2.6 no es única. Como sea que se utilice la numeración, la matriz de coeficientes globales permanece sin cambios. Asumiendo la numeración particular de la Figura 2.6, la matriz de coeficientes globales tendría la forma

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

la cual es una matriz de 5 x 5 debido a que son 5 nodos los que se encuentran involucrados ($n=5$). Una vez más C_{ij} es el acoplamiento entre los nodos i y j . Se obtiene C_{ij} usando el hecho de que la distribución del potencial debe ser continuo a través de los límites interelementales. La contribución a la posición i, j en $[C]$ viene de todos los elementos que contienen nodos i y j . Por ejemplo, en la Figura 2.6 los elementos 1 y 2 tienen un nodo en común; así

$$C_{11} = C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} \quad (2.22)$$

El nodo 2 solo le pertenece el elemento 1, por lo tanto

$$C_{22} = C_{33}^{(1)}$$

y para los demás nodos

$$C_{44} = C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)}$$

$$C_{14} = C_{41} = C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)}$$

$$C_{23} = C_{32} = 0$$

Continuando de esta manera, se pueden obtener todos los términos en la matriz de coeficientes globales

$$\begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & C_{13}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} & 0 \\ C_{31}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & C_{32}^{(1)} & 0 \\ C_{21}^{(2)} & 0 & C_{22}^{(2)} + C_{11}^{(3)} & C_{23}^{(2)} + C_{13}^{(3)} & C_{12}^{(3)} \\ C_{21}^{(1)} + C_{31}^{(2)} & C_{23}^{(1)} & C_{32}^{(2)} + C_{31}^{(3)} & C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)} & C_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & C_{21}^{(3)} & C_{23}^{(3)} & C_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Nótese que las matrices de coeficientes se sobreponen en los nodos compartidos por los elementos y que existen 29 términos (9 por cada uno de los 3 elementos) en la matriz de coeficientes globales $[C]$. Nótese también las siguientes características de la matriz $[C]$:

1. Es simétrica ($C_{ij} = C_{ji}$) de la misma forma que los elementos de la matriz de coeficientes
2. Debido a que $C_{ij} = 0$ si no existe acoplamiento entre los nodos i y j , es de esperarse que para una gran cantidad de elementos, $[C]$ sea dispersa. La matriz $[C]$ es también una matriz banda si los nodos son cuidadosamente numerados. Se puede demostrar usando (2.17) que

$$\sum_{i=1}^3 C_{ij}^{(e)} = 0 = \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{(e)}$$

3. Es singular, lo cual puede ser mostrado utilizando la matriz de coeficientes del elemento (2.16) [Sadiku01].

2.2.4. Solución de las ecuaciones resultantes

Regresando a la ecuación 2.19, debido a que la ecuación de Laplace se satisface cuando se minimiza la energía total en la región solución [Sadiku01], se necesita que las derivadas parciales de W con respecto a cada valor nodal del potencial sea cero, i.e.,

$$\frac{\partial W}{\partial V_1} = \frac{\partial W}{\partial V_2} = \dots = \frac{\partial W}{\partial V_n} = 0 \quad (2.24)$$

es decir

$$\frac{\partial W}{\partial V_k} = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.25)$$

Por ejemplo, para obtener, $\frac{\partial W}{\partial V_1} = 0$ para el mallado del elemento finito mostrado en la Figura 2.6 se sustituye (2.21) en (2.19) y tomando la derivada parcial de W con respecto a V_1 resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial W}{\partial V_1} = 2V_1C_{11} + V_2C_{12} + V_3C_{13} + V_4C_{14} + V_5C_{15} + V_2C_{21} + V_3C_{31} + V_4C_{41} + V_5C_{51} \\ 0 &= V_1C_{11} + V_2C_{12} + V_3C_{13} + V_4C_{14} + V_5C_{15} \end{aligned} \quad (2.26)$$

En general, $\frac{\partial W}{\partial V_k} = 0$ se reduce a

$$0 = \sum_{i=1}^n V_i C_{ik} \quad (2.27)$$

Donde n es el número de nodos en el mallado. Escribiendo (2.27) para todos los nodos $k = 1, 2, 3, \dots, n$ se obtiene un grupo de ecuaciones simultáneas de las cuales se puede encontrar la solución de $[V]^t = [V_1, V_2, \dots, V_n]$. Lo anterior puede ser hecho de dos maneras

1. **Método Iterativo:** Suponga que el nodo 1 en la Figura 2.6, por ejemplo, es un nodo libre. De (2.26)

$$V_1 = -\frac{1}{C_{11}} \sum_{i=2}^5 V_i C_{1i} \quad (2.28)$$

Así, en general, en el nodo k en el mallado con n nodos

$$V_k = -\frac{1}{C_{kk}} \sum_{i=1, i \neq k}^n V_i C_{ki} \quad (2.29)$$

donde el nodo k es un nodo libre. Puesto que $C_{ki} = 0$ si el nodo k no está directamente conectado al nodo i , solo los nodos que están directamente conectados al nodo k contribuyen a V_k en (2.29). Así (2.29) puede ser aplicada iterativamente a todos los nodos libres. El proceso de iteración comienza colocando potenciales a los nodos fijos (donde el potencial es fijo o conocido) a sus valores preestablecidos y los potenciales en los nodos libres (donde el potencial es desconocido) igual a cero o al potencial promedio.

$$V_{ave} = \frac{1}{2}(V_{min} + V_{max}) \quad (2.30)$$

donde V_{min} y V_{max} son los valores mínimo y máximo de V en los nodos fijos. Con estos valores iniciales, los potenciales en los nodos fijos son calculados usando (2.29). Al final de cada iteración, cuando los nuevos valores han sido calculados para todos los nodos libres, éstos se convierten en los valores anteriores para iniciar la segunda iteración. El proceso se repite hasta que el cambio entre las iteraciones subsecuentes es lo suficientemente despreciable.

2. **Método de la Matriz Banda:** Si todos los nodos libres son numerados primero y los nodos fijos al final, (2.19) puede ser escrita como [Silvester96]

$$W = \frac{1}{2}\epsilon \begin{bmatrix} V_f & V_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \\ C_{pf} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_f \\ V_p \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Donde los subíndices f y p , respectivamente, se refieren a los nodos con potenciales libres y fijos. Debido a que V_p (es constante o conocido), solo diferenciamos con respecto a V_f así aplicando (2.25) a (2.31) se tiene

$$\begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_p \end{bmatrix} = 0$$

reduciendo

$$[C_{ff}][V_f] = -[C_{fp}][V_p] \quad (2.32)$$

Esta ecuación puede ser escrita como

$$[A][V] = [B]$$

lo que interesa es conocer $[V]$, por lo tanto

$$[V] = [A]^{-1}[B] \quad (2.33)$$

donde $[V] = [V_f]$, $[A] = [C_{ff}]$, $[B] = -[C_{fp}][V_p]$. Debido a que $[A]$ es, en general, no singular y depende solo de coordenadas de los elementos, el potencial en los nodos libres puede ser determinado usando (2.33). Se puede resolver para $[V]$ en (2.33) usando inversión de matrices si el tamaño de la matriz a invertir no es muy grande.

2.3. Solución de la ecuación de Poisson

Para resolver la ecuación bidimensional de Poisson,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_s}{\epsilon} \quad (2.34)$$

usando el MEF, se usan los mismos pasos mencionados en la sección 2.2.

2.3.1. Derivación de las ecuaciones de elemento

Después de que la región solución ha sido dividida en elementos triangulares, se aproxima la distribución de potencial V_e y el término de la fuente ρ_{ei} (para problemas bidimensionales) en cada elemento triangular mediante las combinaciones lineales de los polinomios de interpolación α_i , i.e.,

$$V_e = \sum_{i=1}^3 V_{ei} \alpha_i \quad (2.35)$$

$$\rho_{se} = \sum_{i=1}^3 \rho_{ei} \alpha_i \quad (2.36)$$

Los coeficientes V_{ei} y ρ_{ei} , respectivamente, representan los valores de V y ρ_s en el vértice i del elemento e como en la Figura 2.3. Los valores de ρ_{ei} son conocidos debido a que $\rho_s(x, y)$ es conocido, mientras que los valores de V_{ei} serán determinados.

De [Sadiku01] se tiene que un funcional de energía para (2.34) es

$$F(V_e) = \frac{1}{2} \int_S [\epsilon |\nabla V_e|^2 - 2\rho_{se} V_e] dS \quad (2.37)$$

donde $F(V_e)$ representa la energía total por unidad de longitud dentro del elemento e . El primer término dentro de la integral, es la densidad de energía en el sistema electrostático, mientras que el segundo es el trabajo realizado por las cargas en movimiento (más adelante se menciona una forma generalizada para funcionales partiendo de una ecuación diferencial con ciertas características). Sustituyendo (2.35) y (2.36) en (2.37) se tiene

$$F(V_e) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon V_{ei} \left[\int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \right] V_{ej} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 V_{ei} \left[\int \alpha_i \alpha_j dS \right] \rho_{ej}$$

Esto puede ser escrito en forma matricial como

$$F(V_e) = \frac{1}{2} \epsilon [V_e]^t [C^e] [V_e] - [V_e]^t [T^{(e)}] [\rho_e] \quad (2.38)$$

donde

$$C_{ij}^e = \int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \quad (2.39)$$

lo cual ya está definido en (2.17) y

$$T_{ij}^e = \int \alpha_i \alpha_j dS \quad (2.40)$$

La ecuación (2.38) puede ser aplicada a cada elemento en la región solución. Se obtiene el funcional discretizado para la región solución completa (con N elementos y n nodos) como la suma de los funcionales de los elementos individuales, i.e. de (2.38),

$$F(V) = \sum_{e=1}^N F(V_e) = \frac{1}{2} \epsilon [V]^t [C] [V] - [V]^t [T] [\rho] \quad (2.41)$$

El vector $[V]$ consiste de los valores de V_{ei} , mientras que el vector $[\rho]$ contiene los n valores de los nodos en función de la fuente ρ_s . El funcional (2.41) se minimiza por diferenciación con respecto a V_{ei} e igualando el resultado a cero.

2.3.2. Solución de las ecuaciones resultantes

Las ecuaciones resultantes pueden ser resueltas ya sea por un método iterativo o por el método de la matriz banda, en este caso solo se desarrollará el primero de éstos.

Método Iterativo Considerando la región solución de la Figura 2.6 que tiene 5 nodos se tiene

$$F = \frac{1}{2} \epsilon [V_1 \cdots V_5] \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{51} & \cdots & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_5 \end{bmatrix} - [V_1 \cdots V_5] \begin{bmatrix} T_{11} & \cdots & T_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{51} & \cdots & T_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_5 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Para minimizar la energía se aplica

$$\frac{\partial F}{\partial V_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.43)$$

de (2.42), se obtiene $\frac{\partial F}{\partial V_k}$ por ejemplo

$$\frac{\partial F}{\partial V_1} = \epsilon [V_1 C_{11} + \cdots + V_5 C_{51}] - [T_{11} \rho_1 + \cdots + T_{51} \rho_5] = 0$$

Expresado de otra forma

$$V_1 = -\frac{1}{C_{11}} \sum_{i=2}^5 V_i C_{i1} + \frac{1}{\epsilon C_{11}} \sum_{i=1}^5 T_{i1} \rho_i \quad (2.44)$$

Por lo tanto, para un mallado con n nodos

$$V_k = -\frac{1}{C_{kk}} \sum_{i=1, i \neq k}^n V_i C_{ki} + \frac{1}{\epsilon C_{kk}} \sum_{i=1}^n T_{ki} \rho_i \quad (2.45)$$

donde el nodo k se asume como un nodo global. Fijando los potenciales en los nodos prescritos y poniendo inicialmente el potencial en los nodos globales igual a cero, se aplica (2.45) iterativamente a todos los nodos globales hasta que se obtenga la convergencia.

2.4. Imposición de condiciones frontera

En las aplicaciones del elemento finito las fronteras son usadas para simplificar el modelo del elemento finito y aproximar el vector de potencial magnético en los nodos. Debido a la simetría en muchos modelos, la aplicación correcta de límites reduce en gran parte el tamaño del modelo del elemento finito.

2.4.1. Condiciones frontera de Dirichlet

Las condiciones de Dirichlet necesitan el vector de potencial magnético en un punto particular, para adquirir un valor conocido, eso es:

$$U = m$$

donde m es el valor especificado como se puede apreciar en la Figura 2.7a. Las fronteras de Dirichlet fuerzan a las líneas de flujo a ser paralelas a los límites de la frontera. En problemas de dos dimensiones una línea de flujo es una línea de $U = cte$. Al usar la condición frontera $U = 0$, las líneas de flujo son obligadas a seguir la frontera.

2.4.2. Condiciones frontera de Neumann

Las condiciones de Neumann requieren que la derivada de la normal del vector de potencial magnético sea cero. Este tipo de frontera no es satisfecha exactamente por la solución del elemento finito, sino el valor medio de la frontera.

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

donde $n = x$ ó y

Las fronteras de Neumann son fronteras naturales en el MEF ya que no tienen que ser especificadas explícitamente. Las líneas de flujo cruzan a la frontera Neumann ortogonalmente. Este tipo de fronteras son usadas principalmente en problemas de simetría donde el flujo es ortogonal a un plano [Trejo02], lo cual puede apreciarse en la Figura 2.7b.

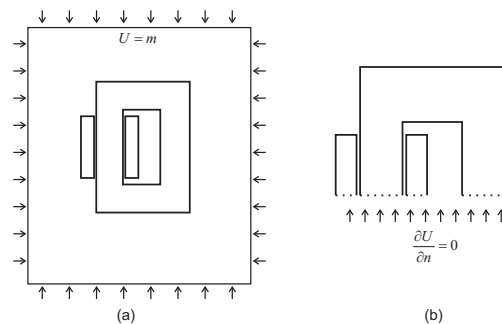


Figura 2.7: Fronteras: (a) De Dirichlet y (b) De Neumann

En resumen el método del elemento finito se puede decir que queda descrito por el diagrama de flujo mostrado en la Figura 2.8, donde se puede apreciar que partiendo de una ecuación diferencial parcial, si ésta cumple con un formato general, esto es, si la ecuación está dada de cierta forma que exista dentro de la literatura una ecuación generalizada de la que ya exista un funcional determinado (en este caso se menciona la ecuación de Helmholtz como ejemplo de ecuación general), se ahorra el trabajo de su determinación. De no cumplir con esta característica se procede a determinar el funcional de la ecuación diferencial por medio de algún método variacional.

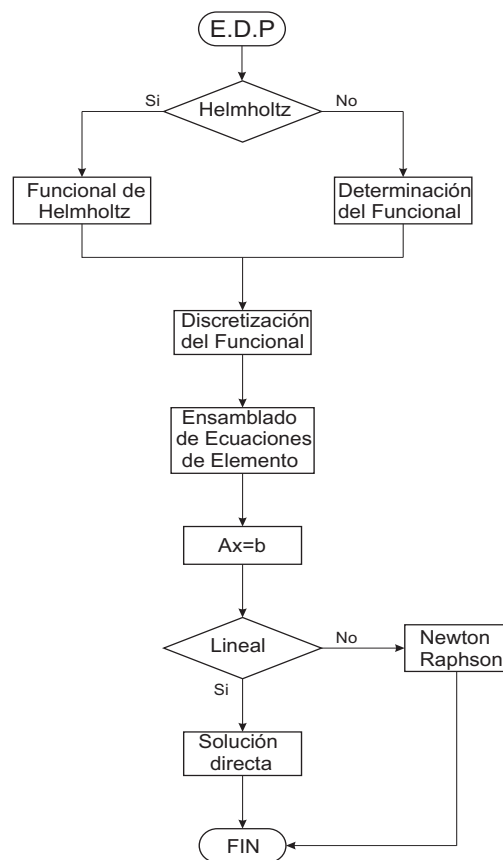


Figura 2.8: Diagrama de flujo del elemento finito

El funcional asociado al m -ésimo elemento, depende solo de los valores del potencial en los tres nodos de los elementos donde la matriz que los relaciona depende solo

de la geometría y características de los materiales (expresado por los coeficientes de las funciones de aproximación). Para un elemento triangular típico, se obtiene un sistema de tres ecuaciones donde se tienen como incógnita los valores del potencial en los nodos del elemento. Cuando el sistema de ecuaciones es resuelto, se obtiene la solución para el problema de campo en el m -ésimo elemento. Para obtener la solución del dominio completo basta con el acoplamiento de las soluciones de cada elemento, considerando la conectividad entre elementos o lo que es lo mismo, considerando la matriz de rigidez del sistema, la cual por obvias razones, es una matriz dispersa. La solución de campo tiene que satisfacer las condiciones límite. Donde las condiciones de Neumann puede que no sean impuestas debido a que se cumplen por ser condiciones de operación normal. Sin embargo, las condiciones de Dirichlet tienen que ser impuestas ya que son condiciones esenciales. Una vez que el sistema está ensamblado e incluyendo sus condiciones frontera puede ser resuelto de dos maneras, dependiendo del tipo de ecuaciones resultantes. Si el sistema es lineal las ecuaciones resultantes pueden ser resueltas por un método directo tal como Gauss-Jordan. Si el sistema resultante es no lineal se puede aplicar algún método iterativo, tal como Newton-Raphson, el sistema puede ser no lineal debido a que los parámetros del material no son constantes, pero están en función del valor de variables de campos magnéticos. El caso más común es la curva B-H en los materiales magnéticos. Con todo esto se puede observar que con el MEF se pasa de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales a un sistema de ecuaciones algebraicas.

Capítulo 3

El MEF aplicado a electromagnetismo

3.1. Introducción

La importancia que tiene el MEF radica en que es una técnica numérica poderosa que permite resolver sistemas representados por ecuaciones diferenciales parciales que no pueden resolverse analíticamente. Por lo tanto, se requiere conocer las ecuaciones que rigen todo fenómeno electromagnético para plantear de manera adecuada la ecuación que describe el fenómeno a estudiar, así como sus condiciones particulares a las que se encuentra sujeto el dominio de estudio. Un ejemplo de estas ecuaciones es la ecuación de Poisson, con la cual se representa el fenómeno electromagnético que sucede en dispositivos utilizados en ingeniería eléctrica.

La teoría electromagnética tomó mucho tiempo en ser establecida, lo cual puede ser entendido por el hecho de que las cantidades electromagnéticas son “abstractas” en otras palabras, no pueden ser “vistas” o “tocadas” (contrariamente a muchas otras, tales como cantidades mecánicas y térmicas). Las ecuaciones de Maxwell y sus relaciones constitutivas son las ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos. La gran contribución de James Clerk Maxwell fue reunir en estas ecuaciones largos años de resultados experimentales, debidos a Coulomb, Gauss, Ampere, Faraday y otros, introduciendo los conceptos

de campo y corriente de desplazamiento, y unificando los campos eléctricos y magnéticos en un solo concepto: el campo electromagnético [Silvester96]. Maxwell convirtió el electromagnetismo en un formalismo muy simple, mantenido principalmente por solo cuatro ecuaciones. La posibilidad física de poder describir distintos fenómenos (microondas y campos de imanes permanentes) con este grupo de ecuaciones es muy alta. Mientras el formalismo y los conceptos básicos de campos electromagnéticos son muy simples, los problemas reales pueden ser muy complicados y difíciles de resolver. De hecho cuando aparecen juntas (e inclusive solas) geometrías complicadas, no linealidades, varias fuentes de campo no estáticas, etc, es virtualmente imposible encontrar una solución analítica para tales problemas, lo cual es la razón principal de que los métodos numéricos sean ampliamente usados en ingeniería eléctrica en nuestros días.

3.2. Ecuaciones de Maxwell

Realmente, la mayoría de los fenómenos electromagnéticos fueron establecidos por otros científicos antes que Maxwell, tales como Ampere, Gauss, Faraday, Lenz, entre otros. Los problemas de campo electromagnético tienen una posición relativamente favorable en ingeniería y física, en el sentido de que las leyes que las rigen pueden expresarse muy concisamente por un solo conjunto de ecuaciones[Bastos03][Schwab88][Solin06][Silvester96]. Las variables básicas forman el conjunto siguiente de cinco vectores y un escalar

1. Intensidad de campo eléctrico E
2. Intensidad de campo magnético H
3. Densidad de flujo eléctrico D
4. Densidad de flujo magnético B
5. Densidad de corriente eléctrica J
6. Densidad de carga eléctrica ρ

3.2.1. Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

Las relaciones de Maxwell pueden escribirse en forma diferencial como

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.1)$$

que es la expresión diferencial de la ley de Faraday.

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (3.2)$$

es la ley de Ampere. El término $\frac{\partial D}{\partial t}$ introducido recibe el nombre de corriente de desplazamiento, lo cual hace que esta ecuación sea conocida como ley de Ampere modificada.

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (3.3)$$

no es más que la ley de Gauss, que se reduce a la ley de Coulomb para cargas puntuales.

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3.4)$$

la cual no tiene nombre y expresa la inexistencia de monopolos magnéticos en la naturaleza, es decir, esta es la explicación de que al romper un imán obtengamos dos imanes, y no dos medio-imanes. La interpretación de esta ecuación permite deducir que no hay fuentes de flujo magnético, sino que las líneas de flujo magnético son continuas y forman trayectorias que se cierran sobre sí mismas, sin fuentes ni sumideros.

A estas relaciones diferenciales se le agregan las relaciones constitutivas

$$D = \varepsilon E \quad (3.5)$$

$$B = \mu H \quad (3.6)$$

$$J = \sigma E \quad (3.7)$$

que describen las propiedades macroscópicas del medio en cuestión en términos de la permitividad ε , permeabilidad μ y conductividad σ . Las magnitudes ε , μ y σ no son necesariamente simples constantes; una excepción notable es el caso de los materiales ferromagnéticos, para los cuales la relación $B - H$ puede ser una ley no lineal muy complicada. Además, ε y

μ pueden representar materiales anisotrópicos, con densidades de flujo que difieren en direcciones respecto a las intensidades de campo correspondientes. De las ecuaciones (3.1)-(3.4) se puede definir una quinta relación totalmente válida.

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.8)$$

Esta ecuación es llamada *ecuación de continuidad eléctrica* y es consistente con el resultado de tomar la divergencia de (3.2) y sustituirla en (3.3), puesto que la divergencia del rotacional de un vector se anula. En el estado estacionario (3.8) se vuelve $\nabla \cdot J = 0$. Esto en otras palabras significa que el flujo de un vector, o de forma similar, la conducción de corriente es conservativa. En situaciones variables con el tiempo, dentro de buenos conductores también es una buena aproximación suponer una densidad de corriente no divergente [Silvester96].

La mayoría de los métodos computacionales de electromagnetismo (analíticos y numéricos) se basan en la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell. La ventaja principal del modelo de ecuaciones diferenciales parciales es su capacidad para incluir no linealidades y anisotropías.

3.2.2. Forma integral de las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell, son un grupo de ecuaciones poderosas. Existe una forma integral matemáticamente equivalente de (3.1) a (3.4). Las integrales se toman sobre una superficie abierta S o sobre su frontera C , como se ilustra en la Figura 3.1

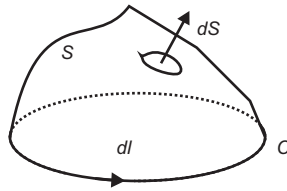


Figura 3.1: Superficie S y contorno C para la forma integral

Las primeras dos ecuaciones de Maxwell se convierten en

$$\oint_C E \cdot dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad (3.9)$$

$$\oint_C H \cdot dl = \int_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS \quad (3.10)$$

Estas corresponden, respectivamente, a la ley de Faraday y a la regla de los circuitos de Ampere, con la adición de Maxwell de la corriente de desplazamiento $\frac{\partial D}{\partial t}$. Las ecuaciones de divergencia (3.3) y (3.4) corresponden a la ley de Gauss para campos eléctricos y la ley de Gauss para campos magnéticos

$$\oint_{S'} D \cdot dS = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (3.11)$$

$$\oint_{S'} B \cdot dS = 0 \quad (3.12)$$

que establecen que la integral correspondiente de D es igual a la carga total dentro del volumen Ω encerrado por la superficie S , mientras que el flujo de B sobre cualquier superficie cerrada S es cero; en otras palabras, el campo magnético no diverge (es solenoidal) [Silvester96].

La ventaja principal de la forma integral de las ecuaciones de Maxwell es que proveen una buena idea acerca de las relaciones entre las fuentes de campo y las cantidades de campo. Su aplicación computacional, sin embargo, está limitada a problemas simples, caracterizados por geometrías triviales y propiedades de los materiales lineales.

3.2.3. Campos magnetostáticos

La ley básica para campos magnetostáticos es la ecuación de Ampere

$$\nabla \times H = J \quad (3.13)$$

La cual es relacionada a la ley de Biot-Savart, y la ley de la conservación de flujo magnético (también llamada ley de Gauss para magnetostática)

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3.14)$$

en forma Integral

$$\oint_C H \cdot dl = I \quad (3.15)$$

$$\oint_S B \cdot dS = 0 \quad (3.16)$$

Las relaciones constitutivas son

$$B = \mu H \quad (3.17)$$

$$J = \sigma E$$

Esto es normalmente referido como la forma puntual de la ley de Ohm. En términos de potencial magnético vectorial A (en Wb/metro).

$$B = \nabla \times A \quad (3.18)$$

Aplicando la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F \quad (3.19)$$

a (3.13) y (3.18) y asumiendo la condición de Coulomb $\nabla \cdot A = 0$, se llega a la ecuación de Poisson para campos magnetostáticos [Sadiku01]:

$$\nabla^2 A = -\mu J \quad (3.20)$$

Que cuando $J = 0$ (3.20) se convierte en la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 A = 0 \quad (3.21)$$

A primera vista, el análisis magnetostático se ve muy limitado debido a que la mayoría de dispositivos tienen fuentes de corriente variables, y/o tienen movimiento. Sin embargo, cuando la estructura es construida de tal manera que se pueda despreciar $\frac{\partial B}{\partial t}$ en materiales conductores, es posible tratarlos como magnetostáticos. En otras palabras, es posible estudiar la estructura a cada posición como si fuera estática y, además, componer los resultados sucesivos de manera de obtener el comportamiento dinámico de ésta.

3.2.4. Campos electrostáticos

Los campos electrostáticos existen en ambientes no conductores donde hay cargas eléctricas en reposo. Por ejemplo, en la vecindad de dieléctricos cargados electrostáticamente. Los campos electrostáticos son gobernados por las siguientes ecuaciones, que de la misma forma que en el caso de campos magnetostáticos, pueden ser en forma diferencial

$$\nabla \times E = 0 \quad (3.22)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (3.23)$$

en forma integral

$$\oint_C E \cdot dl = 0 \quad (3.24)$$

$$\oint_S D \cdot dS = q \quad (3.25)$$

y la relación constitutiva

$$D = \varepsilon E \quad (3.26)$$

En términos de potencial eléctrico V (en volts), E es expresada como

$$E = -\nabla V \quad (3.27)$$

Integrando (3.27) se tiene

$$V = - \int E \cdot dl \quad (3.28)$$

Combinado (3.23), (3.26) y (3.27) se obtiene la ecuación de Poisson [Sadiku01]

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla V = -\rho \quad (3.29)$$

si ε es constante,

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \quad (3.30)$$

Cuando $\rho = 0$, (3.30) se convierte en la ecuación de Laplace

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla V = 0$$

$$\boxed{\nabla^2 V = 0} \quad (3.31)$$

3.3. Ecuaciones de potencial

En muchos casos se presenta una simplificación considerable en el cálculo cuando se representan los campos E y B mediante funciones potenciales. El caso de un campo eléctrico estático, representado por una variable potencial escalar

$$E = -\nabla V \quad (3.32)$$

donde en regiones libres de carga V tiene que satisfacer la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.33)$$

Las reglas del cálculo vectorial exigen que el rotacional del gradiente de cualquier variable escalar, y la divergencia del rotacional de cualquier variable vectorial deben anularse. Así, se verifica sin dificultad que

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.34)$$

$$B = \nabla \times A \quad (3.35)$$

que definen los potenciales escalar y vectorial V y A , respectivamente, los cuales automáticamente satisfacen a dos de las cuatro relaciones de Maxwell (3.1) y (3.4). Existe aquí, evidentemente, un elemento de arbitrariedad en las representaciones potenciales de E y B , puesto que añadir el gradiente de cualquier función escalar de posición $\nabla \cdot A$ puede especificarse a voluntad. Por lo común, se supone que es válida la norma de Lorentz [Silvester96]:

$$\nabla \cdot A = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.36)$$

Pueden escogerse otras normas, como por ejemplo la de Coulomb $\nabla \cdot A = 0$. Pero la de Lorentz tiene la ventaja de que conduce a un conjunto simple y simétrico de ecuaciones cuando las dos ecuaciones restantes de Maxwell (3.2) y (3.3) se escriben en términos de los potenciales V y A . En el caso de un medio lineal, homogéneo, estas ecuaciones se convierten en

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.37)$$

$$\nabla^2 A - \mu\epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J \quad (3.38)$$

3.3.1. Potencial escalar magnético

Otra representación útil es la equivalente magnética de (3.32):

$$H = -\nabla P \quad (3.39)$$

donde P es un potencial escalar magnético. Aquí, la regla del cálculo vectorial de que el rotacional del gradiente de cualquier variable es cero, da $\nabla \times H = 0$. Obviamente en virtud de (3.2) la representación de un campo magnético por un potencial escalar es sólo válida en regiones libres de corriente, y en frecuencias lo suficientemente bajas para hacer caso omiso de la corriente de desplazamiento $\frac{\partial D}{\partial t}$. No obstante, se trata a menudo de una representación útil. La ecuación básica que rige al potencial escalar magnético proviene de la propiedad solenoidal de B , (3.4), la cual exige que

$$\nabla \cdot (\mu \nabla P) = 0 \quad (3.40)$$

3.4. La ecuación inhomogénea de Helmholtz

La ecuación inhomogénea de Helmholtz [Silvester96] [Schwab88] [Bianchi05], puede describirse de manera formal como

$$\nabla \cdot (p \nabla u) + k^2 u = g \quad (3.41)$$

en (3.41) se toma a u , una función de posición, por decir $u = u(x, y, z)$, referida a un sistema coordenado cartesiano rectangular, como la variable dependiente cuya determinación constituye la solución requerida. Se supone que las propiedades materiales del medio en cuestión quedan representadas por $p(x, y, z)$, que es una función especificada de posición. La cantidad k^2 es una constante invariante con la posición, que puede ser o no conocida, mientras $g(x, y, z)$ es una función de excitación previamente dada. Una característica importante de los elementos finitos es que las ecuaciones generales como (3.41) puedan programarse para resolverse en computadoras, para representar una gama completa de situaciones físicas diferente. Una de las tareas importantes del ingeniero es ajustar problemas específicos a paquetes de programas de amplio propósito, disponibles en la actualidad. Algunos ejemplos de diversas simplificaciones de (3.41) que se representan en la práctica son:

La ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad (3.42)$$

Esta ecuación representa al problema electrostático simple.

La ecuación de Poisson

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla u) = -\rho \quad (3.43)$$

En este caso se modela un problema de potencial más complicado. La permitividad ε puede variar con la posición en cualquier manera especificada. Una distribución de carga espacial, ρ , considerada conocida, modifica la distribución de potencial elemental (3.42).

La ecuación de Helmholtz en dos dimensiones

$$\nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (3.44)$$

Esta ecuación modela al comportamiento de modos eléctricos transversales en una guía de ondas, lo cual no es considerado en este trabajo.

3.4.1. Funcional para la ecuación de Helmholtz

Si ahora recordamos un poco que el método del elemento finito no es otra cosa que la aplicación por partes de un método variacional en el que se minimiza un funcional; esto conduce a buscar un funcional para (3.41). Se necesita encontrar un funcional $F(u)$ que sea estacionario alrededor de la solución $U = u$, la cual es la solución correcta a esa ecuación y a sus restricciones de frontera. Por lo tanto, de [Silvester96] se obtiene que un funcional para la ecuación de Helmholtz (3.41) es

$$F(U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [p(\nabla U)^2 - k^2 U^2 + 2gU] d\Omega \quad (3.45)$$

3.5. Comparación del MEF y soluciones exactas

El proceso de la representación de un dominio físico con elementos finitos es referido como mallado, y el grupo de elementos resultantes es conocido como mallado de elemento finito.

Como la mayoría de las geometrías usadas tienen lados rectos, es imposible incluir el dominio completo en el mallado del elemento finito si el dominio incluye límites curvos. Tal situación es mostrada en la Figura 3.2a. Note que el refinamiento del mallado en la Figura 3.2b representa de manera más fiel al dominio físico en cuestión. (Elementos triangulares podrían aproximar el dominio en una mejor manera).

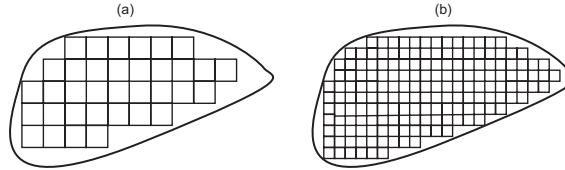


Figura 3.2: Dominio con frontera curva modelado con elementos rectangulares

Si las funciones de interpolación satisfacen ciertamente los requerimientos matemáticos, una solución por elemento finito para un problema en particular converge a la solución exacta del problema, es decir, a medida que se incrementa el número de elementos finitos y sus dimensiones físicas decrecen, la solución por elemento finito cambia incrementalmente.

Hasta este punto se ha presentado la teoría del MEF necesaria para su entendimiento, donde se puede ver que este método puede ser aplicado a ecuaciones diferenciales parciales tales como:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + a_{00}u - f = 0 \quad (3.46)$$

de donde como un caso especial podemos obtener la ecuación de Poisson considerando que $a_{11} = a_{22} = a$ y $a_{12} = a_{21} = a_{00} = 0$, o bien la ecuación de Laplace si $f = 0$

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f \quad (3.47)$$

que describen la mayoría de los problemas electromagnéticos en dos dimensiones, mismas que para tres dimensiones resulta un poco más complicada su solución. Por lo tanto, este tipo de sistemas resulta más conveniente modelarlos por medio de un paquete computacional que utilice elementos finitos.

3.6. Ansys[©]

En la actualidad, toda industria competitiva requiere de la simulación de sus productos o procesos para predecir y/o corregir posibles problemas que se pudieran presentar. El campo de aplicación de la simulación por elementos finitos es amplio, pudiendo utilizarse ya sea en las grandes estructuras de la industria como así también en la verificación de pequeños implantes biomédicos.

La aplicación más difundida del método de elementos finitos es en el diseño de productos. En este caso se tiene la posibilidad de evaluar de manera virtual los prototipos, permitiendo dejar para la etapa final del desarrollo la construcción y el ensayo, una vez que se ha logrado la configuración ideal.

Otra aplicación muy interesante es la evaluación del estado de equipos o componentes que han estado en servicio o que han sido sometidos accidentalmente a sobrecargas. También se puede evaluar, antes de su puesta en servicio, el comportamiento del equipo en caso de modificar las condiciones de operación o realizar reparaciones o alteraciones al mismo. En ese caso se puede utilizar la historia de la operación del equipo y la información obtenida en las inspecciones de mantenimiento para definir el modelo y las cargas. Incluso se pueden identificar las probables causas de fallas en servicio.

La información de partida para realizar una simulación por elementos finitos es la geometría del modelo. Además, se deben definir las cargas actuantes, las cuales pueden ser cargas normales de servicio o también se pueden considerar condiciones extremas de carga para identificar condiciones críticas de trabajo o de falla del modelo.

Las simulaciones electromagnéticas son críticas en el diseño de productos eléctricos o electrónicos. Entre las aplicaciones posibles se incluyen: máquinas rotatorias, sensores, actuadores, generadores y transformadores, entre otros. Sin embargo, la mayoría de los paquetes computacionales que operan en base al elemento finito están enfocados a estructuras y esfuerzos, dejando el área electromagnética de lado, no obstante, en la actualidad se han desarrollado algunos paquetes, tales como Ansys[©], Comsol[©], divididos por áreas donde ésta ya es considerada. De estos paquetes sobresale Ansys[©] por sus características de simulación, así como sus bondades para la implementación de modelos donde su representación

no puede ser realizada en 2 dimensiones. El programa Ansys[©] usa las ecuaciones de Maxwell como la base para el análisis de campo electromagnéticos. Las incógnitas primarias (grados de libertad) que calcula la solución por elemento finito son potenciales magnéticos y eléctricos, a partir de éstas se pueden determinar incógnitas secundarias tales como densidad de corriente, pérdidas, inductancia, capacitancia, entre otras.

Cualquier modelo realizado en Ansys[©] tiene que seguir los pasos mostrados en la Figura 3.3, donde para iniciar se tienen que conocer las propiedades de los materiales. Las propiedades dependen del tipo de simulación a realizar. Por ejemplo, para un análisis electromagnético los parámetros que se necesita conocer es la permeabilidad del material, la permeabilidad del aire y la resistividad de los conductores.

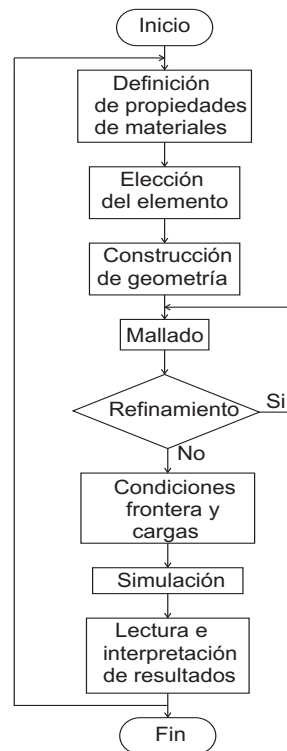


Figura 3.3: Diagrama de flujo de Ansys[©]

La elección del elemento depende principalmente de la geometría del modelo y de los grados de libertad necesarios para realizar la simulación. Para una lista completa de los

elementos que pueden ser utilizados en análisis electromagnéticos y sus características en cuanto a grados de libertad se puede consultar en [Ansys04]. La etapa de mallado es la que más tiempo y trabajo requiere. Si el mallado generado no cumple las condiciones requeridas para la correcta representación del modelo se puede proceder a un refinamiento del mismo, lo cual consiste en dividir en elementos más pequeños los ya existentes, y agregar los que sean necesarios para una representación más fiel del modelo. La forma en que se agregan las condiciones frontera dependen del tipo de condición (ya sea Dirichlet o Neumann) y la forma en que Ansys[©] las acepte. Es decir, si se está interesado en tomar en cuenta el decaimiento natural de una onda electromagnética se puede utilizar un elemento infinito [Ansys04], el cual sobre entiende que el valor del campo en el infinito será cero. Si no se está interesado en tomar en cuenta esto y solo se simula un modelo reducido, se puede especificar que el valor del campo es cero lo cual no precisa que este valor esté tomado en el infinito. En cuanto a las fronteras de simetría éstas dependen de la simetría del modelo a simular.

Después de simular el modelo, se realiza la lectura de resultados los cuales pueden ser tomados como condiciones iniciales para una simulación futura, o bien interpretados para obtener información acerca del comportamiento de éste bajo las circunstancias especificadas. Por lo tanto, se puede observar que el Ansys[©] es una herramienta que permite realizar análisis y diseño de componentes electromagnéticos; para este caso en particular se utiliza en la obtención de parámetros de transformadores.

Ansys[©] es un software reconocido mundialmente en el área de diseño y simulación. Su desarrollo es continuo en aplicaciones y en la interfaz con el usuario cada vez más amigable, por estas razones es que se optó el usarlo en este trabajo. Es importante destacar que los dos capítulos anteriores bases del MEF y aplicaciones del MEF a electromagnetismo, son vitales para el manejo e interpretación del Ansys[©], puesto que es un software que utiliza un método que se basa en la geometría de los modelos. Es imprescindible que el usuario tenga bien claras las bases de campos electromagnéticos y del MEF para poder realizar un análisis de los resultados apropiadamente.

Capítulo 4

Análisis de transformadores usando el MEF

4.1. Introducción

Los circuitos magnéticamente acoplados son el centro de operación de los transformadores y las máquinas eléctricas. En el caso de los transformadores, los circuitos estacionarios son acoplados magnéticamente con el propósito de cambiar los niveles de voltaje y corriente. Debido a que los circuitos acoplados magnéticamente juegan un rol muy importante en la transmisión y conversión de potencia, es primordial establecer las ecuaciones que describen su comportamiento y expresar éstas de una forma conveniente para el análisis.

4.2. Parámetros en reactores y transformadores

4.2.1. Bobinas

De modo amplio, se puede decir que las bobinas son dispositivos almacenadores de energía y como tales se emplean para conseguir el filtrado de formas de onda conmutadas, la generación de corrientes o tensiones senoidales en circuitos resonantes, la limitación en la velocidad de variación de las corrientes en los circuitos de protección o snubbers, corrientes de arranque o transición limitada, etc. El parámetro fundamental que define una bobina es

su inductancia, cuyo significado físico y valoración se establece a continuación.

4.2.2. Inductancia

El concepto de inductancia para un punto de operación específico (en tiempo y espacio) implica la invariabilidad tanto del medio como de la posición de los circuitos en los cuales se pretende conocer su valor. El conocimiento de las inductancias propias y mutuas resulta útil en el modelado de dispositivos electromagnéticos. La inductancia propia se define como la razón del flujo que enlaza una bobina con respecto a la corriente que circula en ella, y la inductancia mutua como la razón del flujo que enlaza una bobina con respecto a la corriente que circula en otra.

Debido a que los enlaces de flujo se relacionan directamente con la energía magnética de un dispositivo electromagnético, se puede también definir a la inductancia como una medida de energía almacenada. Cuando se trata de un material lineal, el valor de la coenergía es igual al de la energía, por lo tanto, otra alternativa para el cálculo de la inductancia es un medio lineal a través del valor de la coenergía [Reyes99].

4.2.3. Transformador ideal

La aproximación del transformador ideal resulta muy útil en el modelado de los transformadores reales. Se dice que los devanados de un transformador de dos bobinas están perfectamente acoplados si ambos se encuentran atravesados por el mismo flujo y éste es el único que los atraviesa. Es decir, no hay flujos de dispersión como se puede apreciar en la Figura 4.1; además, se considera que en un transformador ideal la resistencia de

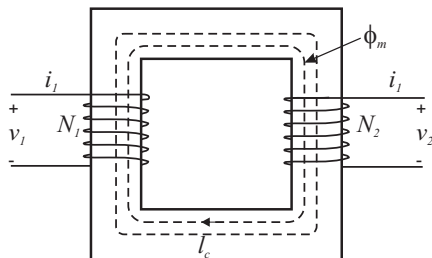


Figura 4.1: Transformador ideal

los devanados es despreciable, todos los flujos están confinados al núcleo y enlazan ambos devanados. Es decir, las pérdidas en el núcleo son despreciables y la permeabilidad del núcleo es infinita (i.e., $\mu \rightarrow \infty$). Por lo tanto, la corriente de excitación requerida para establecer un flujo en el núcleo es despreciable, esto es, la fuerza magnetomotriz neta requerida para establecer un flujo en el núcleo es cero. Tomando en cuenta estas consideraciones tenemos que la tensión inducida por vuelta es la misma, siendo además la tensión en cada devanado directamente proporcional a su número de espiras:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (4.1)$$

La intensidad del campo magnético se puede determinar a partir de la ley de Ampere dada por (3.15)

$$H = \frac{N_1 \cdot i_1 + N_2 \cdot i_2}{l_c} \quad (4.2)$$

Donde l_c es el tamaño equivalente de la trayectoria magnética. Si la permeabilidad del núcleo fuese infinita, H debería ser cero para evitar que la densidad de flujo magnético B fuese infinita, pero la condición de nulidad de H sólo se verifica si la suma de fmm es cero, es decir:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} \quad (4.3)$$

de donde se concluye que los sentidos de las corrientes son opuestos: una entrante y otra saliente de su terminal correspondiente. De (4.1) y (4.3)

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0 \quad (4.4)$$

esto es, la potencia instantánea de entrada al transformador es igual a la potencia instantánea de salida del mismo. Lo cual es esperado ya que en un transformador ideal no existen pérdidas.

4.2.4. Transformador real

En la sección 4.2.3 se mencionaron las propiedades de un transformador ideal. Sin embargo, ciertas suposiciones que fueron hechas no son válidas para transformadores

prácticos. Por ejemplo, en los transformadores prácticos los devanados tienen resistencia, no todos los devanados enlazan el mismo flujo, la permeabilidad del material está sujeta al flujo variante en el tiempo. En el análisis de un transformador práctico todas estas imperfecciones tienen que ser consideradas.

Esto puede ser demostrado por el circuito de la Figura 4.2. Las dos bobinas consisten de N_1 y N_2 vueltas, respectivamente, arrolladas en un material ferromagnético con permeabilidad mayor a la del aire. La permeabilidad del aire es de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$. La permeabilidad de otros materiales es $\mu = \mu_r \mu_0$ donde μ_r es la permeabilidad relativa.

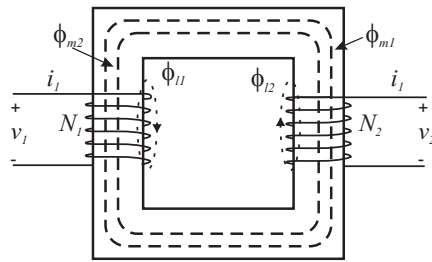


Figura 4.2: Circuitos acoplados magnéticamente

En general, el flujo producido por cada bobina puede ser separado en dos componentes: una componente de dispersión, denotado con un subíndice l , y otra componente de magnetización, denotado por un subíndice m :

$$\phi_1 = \phi_{l1} + \phi_{m1} + \phi_{m2} \quad (4.5)$$

$$\phi_2 = \phi_{l2} + \phi_{m2} + \phi_{m1} \quad (4.6)$$

El flujo de dispersión ϕ_{l1} , es producido por la corriente que fluye en la bobina 1, y este solo enlaza las vueltas de la bobina 1. De la misma forma, el flujo de dispersión ϕ_{l2} es producido por la corriente que fluye en la bobina 2 y solo enlaza las vueltas de la misma. El flujo de magnetización ϕ_{m1} es producido por la corriente que fluye en la bobina 1, y enlaza todas las vueltas de las bobinas 1 y 2. De manera similar ϕ_{m2} es producido por la corriente que fluye en la bobina 2 y éste enlaza todas las vueltas de las bobinas 1 y 2.

Cuando las corrientes fluyen a través de los devanados en el transformador, establecen un flujo resultante mutuo (o común) ϕ_m que está confinado esencialmente al núcleo

magnético. Sin embargo, existe una pequeña cantidad de flujo conocido como flujo de dispersión ϕ_l mostrado en la Figura 4.2. La trayectoria de la dispersión es principalmente por el aire, como consecuencia el flujo de dispersión varía linealmente con la corriente. Los efectos del flujo de dispersión pueden ser considerados mediante la inserción en el modelo de una inductancia, llamada inductancia de dispersión L_l :

$$L_{l1} = \frac{N_1 \phi_{l1}}{i_1}$$

$$L_{l2} = \frac{N_2 \phi_{l2}}{i_2}$$

En resumen, un transformador real difiere del ideal en tres aspectos fundamentales:

1. Las tensiones no responden exactamente a la relación (4.1), puesto que la existencia de un flujo de dispersión evita que todo el flujo que atraviesa uno de los devanados cruce el otro.
2. La permeabilidad es finita, con lo que (4.3) tampoco es totalmente cierta. Es necesaria una fmm total no nula para crear un flujo en el núcleo. La corriente precisa para crear ese campo se denomina corriente magnetizante.
3. Las ecuaciones (4.1) y (4.3) expuestas no dependen de la frecuencia, pudiendo usarse en continua, pero éste no es el caso de un transformador real.

4.2.5. Inductancia de magnetización

Tal y como ha sido puesto de manifiesto, para que dos devanados se encuentren acoplados magnéticamente deberá existir un flujo que los atraviese a ambos. Normalmente, uno de ellos genera una densidad de campo B que enlaza al otro devanado. Según (3.17), sólo en el caso hipotético de permeabilidad infinita puede existir densidad de flujo B sin intensidad de campo H, y por tanto con una fmm total nula. La mayor aproximación se obtendrá empleando un núcleo sin entrehierro y alta permeabilidad. En ese caso, lo que se tiene desde uno de los devanados, si el otro se encuentra en circuito abierto, es simplemente una inductancia de valor muy elevado (pero finito) denominada inductancia de magnetización. En función de cuál sea el devanado desde el que se mide la inductancia de

magnetización, ésta puede tomar dos valores distintos que estarán relacionados entre sí por el cuadrado de la relación de espiras [José00],

$$L_m = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_m} \quad (4.7)$$

expresándolo de otra manera, si se define N_1 como el número de vueltas del primer devanado y tomando (4.5) y (4.6), se podrán expresar los enlaces de flujo para el primer devanado, por medio de:

$$\lambda_1 = N_1\phi_1 = N_1(\phi_{l1} + \phi_{m1} + \phi_{m2}) \quad (4.8)$$

Donde el flujo ϕ_{l1} resulta de la fmm del primer devanado, es decir N_1i_1 . A su vez, el flujo ϕ_m resulta por la fmm de $N_1i_1 + N_2i_2$, y se considera la reluctancia \mathfrak{R} de la trayectoria del flujo. Por lo tanto, se puede reformular (4.8) como:

$$\lambda_1 = \left(\frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{l1}} + \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_m} \right) i_1 + \frac{N_1N_2}{\mathfrak{R}_m} i_2 \quad (4.9)$$

De igual forma se puede obtener para el segundo devanado

$$\lambda_2 = \frac{N_1N_2}{\mathfrak{R}_m} i_1 + \left(\frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{l2}} + \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_m} \right) i_2 \quad (4.10)$$

Cuando el sistema magnético es lineal, los enlaces de flujo se pueden expresar en términos de inductancias y corrientes, con lo que se llega a la forma siguiente:

$$\lambda_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \quad (4.11)$$

$$\lambda_2 = L_{12}i_1 + L_{22}i_2 \quad (4.12)$$

De (4.9) y (4.10) se obtiene L_{11} y L_{22} que son las inductancias propias de ambos devanados y también las expresiones para L_{12} y L_{21} que son las inductancias mutuas entre ellos.

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{l1}} + \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_m} = L_{l1} + L_{m1} \quad (4.13)$$

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{l2}} + \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_m} = L_{l2} + L_{m2} \quad (4.14)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{N_1N_2}{\mathfrak{R}_m} \quad (4.15)$$

En sistemas lineales las inductancias de magnetización pueden ser relacionadas a las inductancias mutuas de manera particular por [Krause02]

$$L_{12} = \frac{N_2}{N_1}L_{m1} = \frac{N_1}{N_2}L_{m2} \quad (4.16)$$

4.2.6. Inductancia de dispersión

Según se ha comentado al hablar de circuitos magnéticos, no todo el flujo generado por uno de los devanados circula por el circuito magnético y atraviesa el otro devanado. Existe una porción de flujo que atraviesa el aire y no enlaza a los dos devanados, lo que provoca un acoplamiento imperfecto entre los mismos. La dispersión del flujo fuera del circuito magnético presenta un efecto más importante en los transformadores que en las bobinas. En estas últimas, el único efecto es un aumento del valor previsto, mientras que en el otro caso se interfiere el funcionamiento básico del transformador. Por lo tanto, será necesario conocer el motivo de la dispersión del flujo en un transformador para realizar un diseño más efectivo. En la mayoría de los casos se pretende minimizar este parámetro, puesto que, aparte de la discrepancia con (4.1), la inductancia de dispersión puede provocar la aparición de sobretensiones indeseadas en los dispositivos de conmutación al intentar cortar de manera brusca la corriente que circula a través de ellos.

La determinación de la inductancia de dispersión puede efectuarse por un procedimiento de medida, si se dispone ya del transformador (prueba de cortocircuito), o por un procedimiento analítico a partir del detalle constructivo y la disposición de los devanados, tal como será mencionado más adelante. Sin embargo, no existe un dispositivo que mida de manera directa la inductancia de dispersión como tal, los que si pueden ser medidos son los efectos debida a ésta. Por lo tanto, la inductancia de dispersión es determinada de manera indirecta. Es aquí donde una herramienta como el elemento finito puede ser utilizada para determinar este parámetro de una manera más precisa.

4.3. Casos de estudio

La determinación precisa del comportamiento de un transformador cualquiera requiere de la solución de las ecuaciones de Maxwell. Debido a la geometría y a la no linealidad de los materiales, no es posible encontrar la solución analítica que represente el comportamiento de un dispositivo electromagnético, a menos de que se realicen una serie de suposiciones que pongan en riesgo la veracidad del modelo resultante.

Es por eso que los métodos numéricos resultan ser la alternativa más viable para

el estudio detallado de la mayoría de las máquinas eléctricas. En este sentido el MEF es una técnica numérica que ha tomado gran importancia en las últimas décadas en la solución de campos electromagnéticos [Reyes99].

En tales situaciones se pueden aprovechar las bondades de los paquetes de simulación por elemento finito. La simulación de procesos es una de las más grandes herramientas de la ingeniería, la cual se utiliza para representar un proceso mediante otro que lo hace mucho más simple y entendible.

Este tipo de programas permiten obtener soluciones aproximadas de problemas que sean susceptibles de ser representados por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. En la actualidad existen numerosos programas de este tipo tales como, Ansys[©], Quickfield[©], Abaqus[©], Cosmos[©], Nastran[©], Flux3d[©], etc., sin embargo, la mayoría de éstos se han especializado en estudios de mecánica, por lo tanto, al tener una aplicación de ingeniería eléctrica no se obtiene una formulación tan fácil de realizar como se esperaría.

El Ansys[©] es uno de los programas de elemento finito comerciales más utilizados en la actualidad, éste usa las ecuaciones de Maxwell como base para el análisis de campos electromagnéticos. Las incógnitas primarias (grados de libertad) que calcula la solución del elemento finito son potenciales magnéticos y potenciales eléctricos. Otras cantidades de campos magnéticos tales como densidad de flujo de campo magnético, densidad de corriente, energía, fuerzas, pérdidas, inductancia y capacitancia son derivadas de estos grados de libertad y son considerados como incógnitas secundarias. Dependiendo del tipo de elemento y opción de elemento que se escoja, los grados de libertad pueden ser potenciales magnéticos escalares, potenciales magnéticos vectoriales, o flujo en el borde, también como potencial dependiente del tiempo o no. Ansys[©] ofrece varias formulaciones, dependiendo de tipo de análisis, las propiedades del material en el análisis y la física total del análisis.

4.4. Reactor monofásico

En máquinas eléctricas, los circuitos magnéticos pueden ser formados solo por materiales ferromagnéticos (como en transformadores) o por materiales ferromagnéticos en conjunto con el aire (como en las máquinas rotatorias). En la mayoría de las máquinas

eléctricas, excepto en las máquinas de imán permanente, el campo magnético (o flujo) es producido por el paso de una corriente a través de las bobinas arrolladas en materiales ferromagnéticos.

4.4.1. Modelado de un reactor monofásico tipo núcleo

La Figura 4.3 muestra un simple circuito magnético que consta de un núcleo ferromagnético el cual tiene una permeabilidad relativa de 59.33 que describe el comportamiento magnético lineal de un material tipo M-27 y una bobina arrollada en una de las piernas de éste que consta de 1000 vueltas por donde circula una corriente de 0.1 Amp. Cuando una corriente i fluye a través de la bobina de N vueltas, la mayoría del flujo magnético es confinado en el núcleo. El flujo que existe fuera de éste, llamado flujo de dispersión, es muy pequeño, de modo que para algunos propósitos prácticos puede ser despreciado. Sin embargo, para tener la representación completa de este modelo debe ser tomado en cuenta.

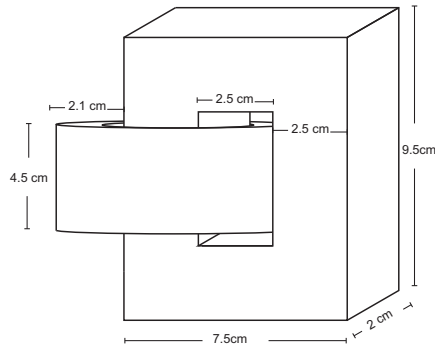


Figura 4.3: Reactor monofásico

Uno de los pasos más importantes radica en cómo modelar el circuito magnético partiendo del sistema físico. El circuito magnético que se deduce de la Figura 4.3 es el que se muestra en la Figura 4.4a. El núcleo se puede representar por medio de una reluctancia \mathfrak{R}_1 que relaciona el camino del flujo con la fuerza magnetomotriz necesaria para establecer el flujo ϕ_1 , cuyo valor puede ser determinado de la fórmula general para el cálculo de inductancias

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad (4.17)$$

donde la fuente f representa al devanado y el acoplamiento magnético a través del aire es representado por la reluctancia lineal \mathfrak{R}_{l1} , donde se puede ver de (4.17) que este último parámetro está relacionado de manera inversa con la inductancia de dispersión. Sin embargo, la determinación de este parámetro físicamente no es una tarea sencilla lo que da pie al uso del elemento finito o alguno de los paquetes computacionales en los que éste está implementado tales como Ansys[®], donde directamente se obtiene la inductancia de dispersión y partiendo de ésta, si así se desea, se puede determinar \mathfrak{R}_l mediante (4.17). La Figura 4.4 muestra los circuitos equivalentes para el reactor, magnético y eléctrico, respectivamente. Con el objetivo de mostrar los pasos a seguir para obtener la L_l utilizada en el circuito equivalente eléctrico, Figura 4.4b, se necesita conocer la \mathfrak{R} correspondiente, Figura 4.4a, y aplicando (4.17) se obtiene la inductancia deseada.

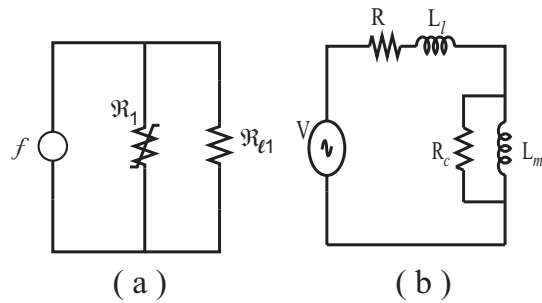


Figura 4.4: Circuito equivalente: a) magnético, b) eléctrico

De la Figura 4.4a, claramente se puede observar que el flujo total es

$$\phi_t = \frac{f \cdot (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_{l1})}{\mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{R}_{l1}} \quad (4.18)$$

y el flujo que circula por la rama de dispersión está dado por

$$\phi_l = \frac{f}{\mathfrak{R}_{l1}} \quad (4.19)$$

donde observando las expresiones determinadas para el cálculo de los flujos se puede apreciar, como era de esperarse, que se encuentran involucrados los parámetros relacionados con la dispersión, y aquí se puede observar que la distancia promedio para la \mathfrak{R}_l no es fácil indicarla ya que es en el aire y, por lo tanto, se pueden tener valores muy dispares. Por esta

razón se usa el Ansys[©] para obtener todos los valores de inductancias. Para su determinación seguimos los pasos del elemento finito descritos con anterioridad donde conociendo la región a ser solucionada y sus condiciones, el paso inmediato a seguir es modelar con los elementos finitos necesarios para la representación correcta de la geometría del dominio o para obtener la exactitud deseada. La Figura 4.5 muestra el dominio dividido en 1532 elementos finitos los cuales suman un total de 3024 nodos tomando en cuenta los que se encuentran en la región de aire, el cual no es mostrado para tener una mejor visualización del modelo, para el cual se utilizó una de las bondades de Ansys[©] que permite colocar un tipo de elemento infinito denominado de esta manera, debido a que permite conocer el decaimiento de manera natural de los campos en un contorno libre es decir en un medio natural sin fronteras.

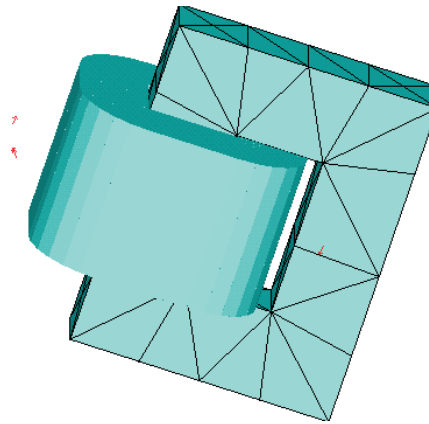


Figura 4.5: Reactor monofásico mallado

Una vez que el modelo ha sido discretizado el siguiente paso es obtener la solución mediante Ansys[©], el cual calcula los potenciales en cada nodo de los elementos finitos, para conocer la distribución de líneas de campo, las cuales se obtienen uniendo mediante líneas los puntos donde los potenciales del mismo valor coincidan en los nodos especificados, se tiene que recurrir a la interpolación basándose en el hecho que los elementos tienen un comportamiento lineal debido a lo pequeño de los elementos.

La Figura 4.6 muestra los resultados de lo comentado anteriormente en una vista de dos dimensiones, donde se puede apreciar de manera más clara cómo el flujo tiende a

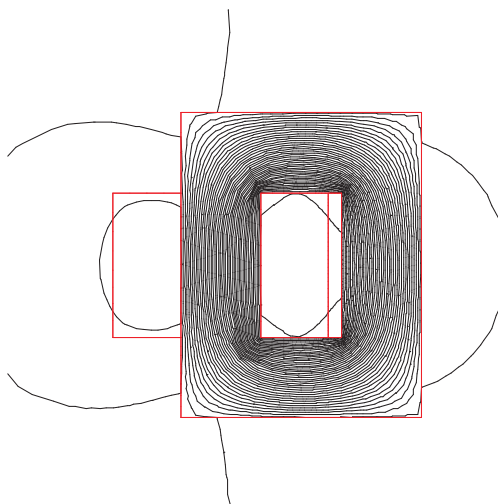


Figura 4.6: Líneas de flujo

circular por la parte más cercana a la ventana del reactor, es decir, por donde encuentra un reluctancia menor lo cual resulta entendible si tomamos en cuenta que

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu A} \quad (4.20)$$

donde A es el área de la sección transversal del núcleo y l es el tamaño equivalente de la trayectoria magnética como se mencionó anteriormente.

Según se ha expuesto con anterioridad, una bobina es un elemento que almacena energía en forma de campo magnético, siendo la inductancia una medida de esa capacidad de almacenamiento de energía magnética, la cual se puede expresar como (4.13), (4.14) o de un modo alternativo en función de la energía como:

$$W = \frac{1}{2} Li^2 \quad (4.21)$$

De esta expresión se deduce que, para una misma evolución de la corriente, cuanto mayor sea la inductancia, mayor será la energía acumulada. Sin embargo, dentro de un entorno real existe la aparición de un parámetro no deseado como lo es la inductancia de dispersión la cual no es nada sencilla de determinar, de tal manera que en la mayoría de los trabajos en que ésta es referida, es tomada como un 10 % del valor de la inductancia total de

la bobina, cosa que en no todos los casos resulta verdadera [Krause02]. Una de las ventajas de utilizar Ansys[©] en el desarrollo de este trabajo es que a partir de las incógnitas primarias que se han obtenido mediante la simulación, se puede determinar tanto la inductancia total como la inductancia de dispersión, las cuales para este caso dado son mostradas en la Tabla 4.1

Tabla 4.1: Parámetros del reactor monofásico tipo núcleo

Parámetro	Ansys [©]	Por (4.17)	Relación
L_m	0.190720948	0.1398151673	1.3640
L_l	9.461489236E-03	0.0155350186	0.6090
L	0.200182437	0.155350186	1.2885
R	0.71957672	0.71957672	1

donde se puede apreciar principalmente la diferencia entre la inductancia de dispersión L_l supuesta de manera tradicional y la calculada usando elementos finitos. De la relación entre ellas podemos apreciar que la obtenida por Ansys[©] es casi un 60% del valor de la supuesta como el 10% de la inductancia total. La inductancia de magnetización obtenida mediante Ansys[©] está por arriba del valor calculado con (4.17) en un 36% y la inductancia total obtenida por Ansys[©] casi un 30% sobre la obtenida con (4.17), lo cual se puede decir que estriba en el uso de (4.20), ya que para la determinación de la inductancia el valor de la reluctancia influye de manera inversa y, por lo general, para su cálculo se utiliza una longitud media. Sin embargo, como se puede ver de la Figura 4.6 la longitud media es un promedio que no siempre resulta conveniente. En el caso de la resistencia de los devanados no hay mucho que señalar pues los valores obtenidos resultan con una relación unitaria con respecto a [Trejo02]; es decir, los valores obtenidos son idénticos como se puede apreciar en la Tabla 4.1.

Ahora bien, una vez que se han determinado los parámetros de dispersión el siguiente paso es determinar el parámetro lineal de la reluctancia de dispersión el cual para este caso en específico es

$$\mathfrak{R}_{l1} = \frac{N^2}{L_l} = 1.0569e8$$

y la reluctancia no lineal \mathfrak{R}_1 para este punto de operación toma un valor de

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{N^2}{L_m} = 5.2433e6$$

con lo cual ahora se cuenta con el modelo de reluctancias para el reactor monofásico tipo núcleo completo. Del mismo modo con los resultados de la Tabla 4.1, se tienen los parámetros para el circuito eléctrico equivalente.

4.4.2. Modelado de un reactor monofásico tipo acorazado

La presencia de un entrehierro en un circuito magnético supone la inclusión de una zona de reluctancia elevada (o permeancia reducida), que da lugar a una disminución de la inductancia total del circuito. Aun así, son muchas las ocasiones en que las bobinas incorporan un entrehierro como parte de su circuito magnético. Las razones que justifican esto son principalmente dos [José00]:

1. Estabilizar los valores de la inductancia consiguiendo que no dependan de la permeabilidad del núcleo (la cual varía con el flujo presente en la estructura)
2. Retardar la saturación del núcleo magnético, pudiendo así aprovechar las propiedades magnéticas del mismo con corrientes más elevadas.

De acuerdo a (4.20) la reluctancia de los tramos de núcleo y entrehierro para el modelo de la Figura 4.7 serían, respectivamente

$$R_k = \frac{l_k}{\mu_k \cdot A} \quad (4.22)$$

$$R_g = \frac{g}{\mu_0 \cdot A} \quad (4.23)$$

siendo g la longitud del entrehierro, con lo cual, se comprueba que al considerar un entrehierro se incluye una zona de reluctancia elevada [Krause89] puesto que a diferencia de (4.22), (4.23) está dividida entre la permeabilidad del aire μ_0 la cual comparada con la permeabilidad de cualquier material ferromagnético es un valor muy pequeño.

La Figura 4.7 muestra un reactor monofásico con entrehierro el cual tiene una permeabilidad relativa de 1000, y una bobina arrollada en la pierna central de $N=100$ vueltas por donde circula una corriente de 0.1 ampere.

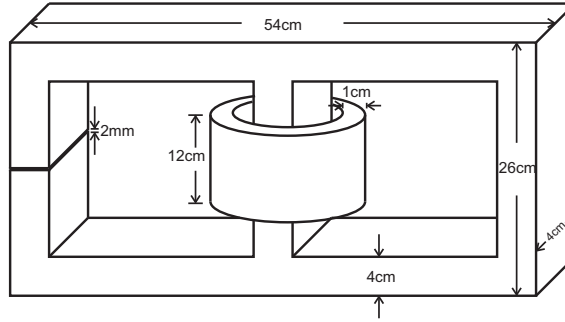


Figura 4.7: Reactor monofásico con entrehierro

El circuito magnético equivalente del modelo mostrado en la Figura 4.7 se representa en la Figura 4.8. La reluctancia del núcleo es ahora representada por \mathfrak{R}_5 , \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 y \mathfrak{R}_3 , \mathfrak{R}_4 es la reluctancia de dispersión a través del aire, aclarando que \mathfrak{R}_3 es la reluctancia neta de los yugos superior e inferior de la parte izquierda en la Figura 4.7, y \mathfrak{R}_5 es la reluctancia del entrehierro. Para este caso se puede observar que el circuito equivalente eléctrico es idéntico al del reactor monofásico tipo núcleo mostrado en la Figura 4.4b, si consideramos que el circuito magnético mostrado en la Figura 4.8 puede ser reducido a la forma mostrada en la Figura 4.4a mediante el equivalente de reluctancias.

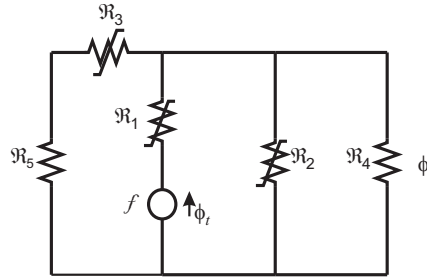


Figura 4.8: Circuito equivalente magnético

De la Figura 4.8 se puede determinar que el flujo total producido por f es

$$\phi_t = \frac{f \cdot [(\mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_5) \cdot \mathfrak{R}_2 + (\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_5) \cdot \mathfrak{R}_4]}{(\mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_5) \cdot \mathfrak{R}_2 \cdot \mathfrak{R}_4 + (\mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_5) \cdot \mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{R}_2 + (\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_5) \cdot \mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{R}_4} \quad (4.24)$$

y el flujo que circula por la rama de dispersión está dado por

$$\phi_l = \frac{f - \phi_t \cdot \mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_4} \quad (4.25)$$

Donde este parámetro es el que da origen a la inductancia de dispersión que es uno de los parámetros difíciles de determinar; por lo tanto, para su obtención y partiendo del modelo físico se divide el modelo completo en elementos finitos, donde, para tener una representación exacta del comportamiento del modelo la región del entrehierro tiene que ser dividido en regiones más pequeñas debido a sus dimensiones. Comparado con el modelo completo esta área consta de 528 elementos, en los cuales existen 929 nodos y el modelo completo consta de 7682 elementos con 15301 nodos, el modelo discretizado sin considerar el aire que lo rodea es mostrado en Figura 4.9.

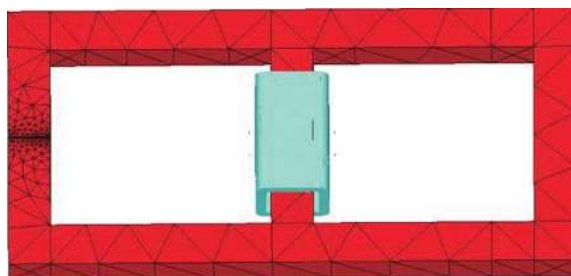


Figura 4.9: Mallado del reactor monofásico con entrehierro

Si se considerara un circuito magnético ideal se asume que todo el flujo que atraviesa el devanado está circulando a través del núcleo o del volumen definido por el mismo. Sin embargo, como ya se ha comentado, en cualquier circuito magnético aparece siempre un flujo de dispersión. Además, la existencia de un entrehierro hace que el flujo a través del mismo incluya una componente adicional por la existencia de un efecto de elongamiento hacia afuera de dichas líneas de flujo, lo cual amplía la sección efectiva atravesada por el flujo en esa zona [Fitzgerald92]. Ambos efectos incrementan el valor calculado para la inductancia en el supuesto de que todo el flujo esté contenido en el núcleo y que el flujo en el entrehierro sea perpendicular a las caras que lo limitan.

La Figura 4.10 ilustra esta situación, apareciendo un flujo de dispersión ϕ_l respecto al circuito magnético, y un flujo en el entrehierro que no se ajusta a la sección principal del circuito magnético

Haciendo una comparación entre los circuitos eléctricos y magnéticos, considerando las analogías entre el flujo y la corriente, la resistencia y la reluctancia, podemos observar

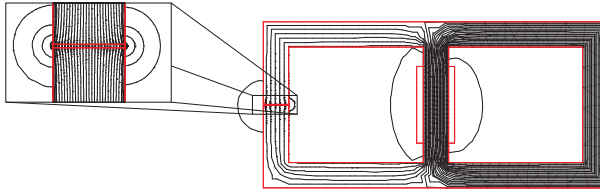


Figura 4.10: Líneas de flujo

de la Figura 4.10 que el flujo tiende a circular por donde encuentra una reluctancia menor, de la misma manera que lo haría la corriente en un circuito eléctrico. Por esta razón es que el flujo por la pierna que tiene entrehierro es menor al de las piernas que no lo tienen.

La inductancia de una bobina colocada sobre este núcleo sería por tanto como se muestra en la Tabla 4.2, donde se puede apreciar la gran diferencia que existe entre la inductancia de dispersión obtenida mediante la simulación por elementos finitos la cual es casi 3 veces la supuesta de la manera tradicional, lo cual haría un modelo ineficiente en cuanto a desempeño se refiere si este valor es tomado.

Tabla 4.2: Parámetros del reactor monofásico tipo acorazado

Parámetro	Ansys [©]	Usando (4.17)	Relación
L_m	2.653101524E-02	3.119926497E-02	0.85
L_l	1.022474574E-02	3.466584997E-03	2.94
L	3.675576098E-02	3.466584997E-02	1.06
R	0.113333E-01	0.113333E-01	1

En cuanto a los parámetros de la inductancia total y la inductancia de magnetización se puede observar, según la relación mostrada en la Tabla 4.2, que los errores son de 6% y 15%, respectivamente, lo cual llevaría a que, dependiendo de la aplicación del reactor, el valor obtenido mediante fórmulas pudiera ser tomado como verdadero, pero no así el valor de la inductancia de dispersión el cual tiene un margen de error muy grande.

Ahora bien la determinación de las reluctancias lineales se puede basar en los parámetros determinados por Ansys[©] hasta este punto. Tal es el caso de la energía almacenada en el entrehierro con la cual por medio de la combinación de (4.17) y (4.21) se puede obtener \mathfrak{R}_5 . Además de este valor en la Tabla 4.3 se presenta el valor de la reluctancia del

entrehierro obtenido por (4.23):

Tabla 4.3: Parámetros magnéticos

Parámetro	Ansys [©]	Por 4.23
\mathfrak{R}_5	1450703.41	994718.39

Con lo cual se puede apreciar la diferencia entre la calculada por Ansys[©] y por (4.23) existe una diferencia de más del 45%. Ahora partiendo de (4.17) podríamos determinar la reluctancia de dispersión del circuito magnético, sin embargo el parámetro de dispersión mostrado en la Tabla 4.2 también incluye la dispersión debida al entrehierro por lo tanto su reluctancia también está asociada a este parámetro pero de Ansys[©] podemos excluir este parámetro y determinar \mathfrak{R}_4 el cual para este caso es

$$\mathfrak{R}_4 = 3001616.67$$

Parámetro que es determinado sustituyendo la energía almacenada proporcionada por Ansys[©] en (4.21) y posteriormente en (4.20). Con este parámetro se completa el modelo magnético del reactor monofásico tipo acorazado. Además, con los parámetros mostrados en la Tabla 4.2 se tiene completo el modelo eléctrico del mismo.

4.5. Transformador monofásico

Un transformador es un dispositivo de corriente alterna que transforma voltajes, corrientes e impedancias. Normalmente consiste en dos o más bobinas acopladas magnéticamente a través de un núcleo ferromagnético común. El núcleo del transformador es el que suministra el circuito magnético de baja reluctancia a través del cual circula la mayoría del flujo generado por los devanados. El núcleo del transformador monofásico puede ser de tipo núcleo o de tipo acorazado. Una corriente alterna que circule por uno de los devanados crea en el núcleo un campo magnético alterno. La mayor parte de este flujo atraviesa el otro devanado e induce en él una fuerza electromotriz (fem). La potencia es transmitida de un arrollamiento a otro por medio del flujo magnético del núcleo.

4.5.1. Modelado de un transformador monofásico tipo núcleo

La Figura 4.11 muestra la geometría del transformador tipo núcleo, cuyos devanados primario y secundario están divididos en dos bobinas arrolladas alrededor de la misma pierna, el núcleo tiene una permeabilidad relativa de 1200, el devanado primario tiene un espesor de 0.4cm con $N=10$ vueltas y el devanado secundario de 0.7cm con $N=100$ vueltas. Además, entre los devanados existe una separación de 0.1cm de distancia necesaria para el cálculo de la inductancia de dispersión [Flanagan92], misma que es una variación de la presentada en [Bossche05] y [Henriksen01], para devanados concéntricos donde se especifica que el cálculo de las inductancias de dispersión requiere conocer las geometrías de las bobinas, puesto que el valor de cualquier inductancia se deduce básicamente de la geometría y de los materiales del circuito magnético.

$$L_l = \frac{4\pi P N^2}{D} \left[\frac{h_1 + h_3}{3} + h_2 \right] \times 10^{-9} \quad (4.26)$$

Donde P es el perímetro medio del aislamiento ente los devanados, N es el número de vueltas en el devanado al cual está referida la inductancia de dispersión, D es la altura de los devanados, h_1 y h_3 es el espesor de los devanados primario y secundario, h_2 es el ancho del espacio existente ente los devanados.

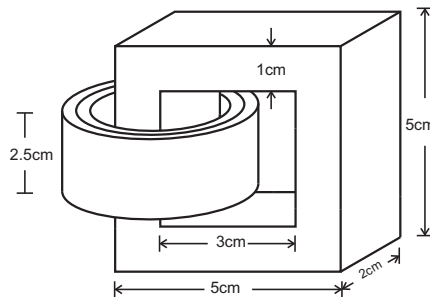


Figura 4.11: Transformador monofásico tipo núcleo

Ahora bien, los circuitos equivalentes del transformador monofásico tipo núcleo de la Figura 4.11 suelen expresarse como se muestra en la Figura 4.12. El circuito de la Figura 4.12b muestra el equivalente del circuito eléctrico donde L_{l_j} representan las inductancias de dispersión y L_m representa la inductancia de magnetización del núcleo, mientras que

en el circuito de la Figura 4.12a las reluctancias lineales \mathfrak{R}_{l1} y \mathfrak{R}_{l2} son las reluctancias de dispersión a través del aire y \mathfrak{R}_1 y \mathfrak{R}_2 representan la reluctancia del núcleo.

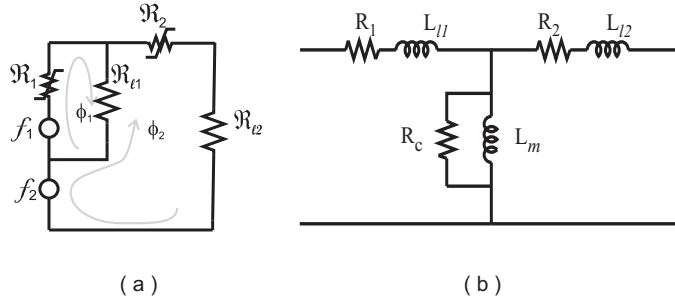


Figura 4.12: Circuito equivalente: a) magnético, b) eléctrico

Aplicando mallas al circuito de la Figura 4.12a se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{11} & \mathfrak{R}_{12} \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{11} &= \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_{l1} & \mathfrak{R}_{12} &= -\mathfrak{R}_{l1} \\ \mathfrak{R}_{21} &= \mathfrak{R}_{l2} & \mathfrak{R}_{22} &= \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{l1} + \mathfrak{R}_{l2} \end{aligned}$$

de donde se puede apreciar la influencia que tienen los parámetros de dispersión en el desarrollo del modelo, por lo tanto para determinarlos se procede a la aplicación del método del elemento finito, mismo que comienza con la discretización del dominio físico tal y como se muestra en la Figura 4.13, el cual considerando el aire que lo rodea tiene 77392 elementos finitos los cuales constan de 105685 nodos.

Como se mencionó anteriormente, el flujo total que enlaza a un devanado, ya sea primario o secundario, se puede dividir en dos componentes, el flujo mutuo resultante, confinado esencialmente al núcleo de hierro y producido por el efecto combinado de las corrientes en el primario y secundario, y el flujo de dispersión del primario, que solo enlaza al mismo devanado. Estos componentes se identifican en la Figura 4.14 donde se puede apreciar que debido a que la trayectoria de dispersión queda principalmente por el aire el flujo de dispersión y el voltaje inducido por él varían en forma lineal con la corriente que los produce [Fitzgerald92].

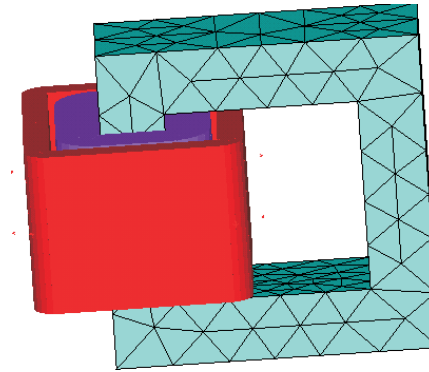


Figura 4.13: Mallado del transformador monofásico tipo núcleo

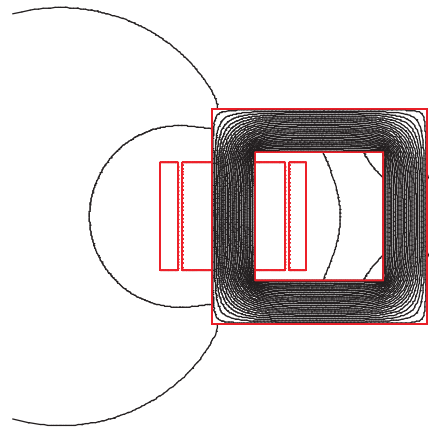


Figura 4.14: Distribución de flujo magnético

En la Tabla 4.4 se muestran las inductancias mutuas y propias obtenidas por medio de Ansys[©], así como las obtenidas usando las fórmulas mostradas en la sección 4.2.5 donde las inductancias de dispersión según [Krause02] se consideran como el 10 % de la inductancia total.

Por medio del uso de (4.26) tenemos otra alternativa para obtener un valor aproximado de la inductancia de dispersión, por lo tanto, podemos hacer un resumen de los valores de este parámetro obtenida de tres formas diferentes, lo cual es mostrado en la Tabla 4.5, de donde podemos concluir que los parámetros mejor aproximados son los obtenidos mediante (4.26) y Ansys[©] considerando este último más preciso ya que su valor se calcula en base a

Tabla 4.4: Parámetros del transformador monofásico tipo núcleo

Parámetro	Ansys [©]	Usando (4.17)	Relación
Primario			
L_{m1}	2.106917637E-02	1.696460033E-02	1.24194
L_{l1}	6.451189646E-05	1.884955592E-03	0.03422
L_{11}	2.113368827E-02	1.884955592E-02	1.12117
L_{12}	2.106917637E-03	1.884955592E-03	1.11775
Secundario			
L_{m2}	2.106917637E-04	1.696460033E-04	1.24194
L_{l2}	8.834893036E-07	1.884955592E-05	0.04687
L_{22}	2.115752530E-04	1.884955592E-04	1.12244

la energía, resaltando que no deja de ser una aproximación al mismo.

Tabla 4.5: Inductancias de dispersión

Parámetro	Supuesto	De (4.26)	Ansys [©]
L_{l1}	1.884955592E-03	2.81486E-04	6.451189646E-05
L_{l2}	1.884955592E-05	2.81486E-06	8.834893036E-07

En casos prácticos es deseable la detección y diagnóstico temprano de fallas internas en el transformador para su diagnóstico, mantenimiento programado y mejora en la eficiencia de operación del transformador. El diagnóstico de fallas en un transformador requiere un modelado exacto de condiciones bajo falla y fallas internas en particular.

La Tabla 4.6 muestra el efecto de algunas fallas en los devanados ya sean debidas a sobretensión o a alguna falla mecánica.

La primera columna muestra el efecto de una abertura entre vueltas de una bobina, para lo cual se realizó una abertura en el 70% del devanado secundario dejando el 30% restante a una distancia de 0.05cm donde se puede apreciar que los parámetros que tienen una variación más significativa son los parámetros de dispersión, en los cuales sus valores varían alrededor del 10% con respecto a los valores presentados como en operación normal en la Tabla 4.4. La segunda y tercer columna muestran el efecto del defasamiento de una bobina, en este caso el primario, con respecto a la otra, para lo cual el primario es movido hacia arriba y hacia abajo 0.2cm y los resultados varían de la forma en que se puede apreciar en la Tabla 4.6, donde los parámetros de la variación más significativa como en el

Tabla 4.6: Efecto de un defasamiento de devanados

Parámetro	Abertura	0.2cm arriba	0.2cm abajo
Primario			
L_{m1}	2.1062377E-02	2.1067222E-02	2.1066975E-02
L_{l1}	7.1152358E-05	6.8382682E-05	7.0660337E-05
L_{11}	2.1133529E-02	2.1135605E-02	2.1137636E-02
L_{12}	2.1062377E-03	2.1067222E-03	2.1066975E-03
Secundario			
L_{m2}	2.1062377E-04	2.1067222E-04	2.1066975E-04
L_{l2}	8.0500161E-07	9.0186833E-07	9.0549508E-07
L_{22}	2.1142877E-04	2.1157409E-04	2.1157525E-04

caso anterior son los parámetros de dispersión, ya que sus valores oscilan entre el 10 % para el devanado primario y 2.5 % para el devanado secundario que es el que permanece fijo. Con estos valores se puede apreciar que de estas fallas la más significativa es la apertura de vueltas en una bobina, pues ello conlleva a un incremento más significativo en la dispersión de ambas bobinas comparado con el defasamiento de un devanado completo.

Ahora bien considerando que la reluctancia \mathfrak{R}_{l2} está relacionada con la dispersión debida al devanado que se encuentra más cercano al núcleo, en este caso el secundario, y \mathfrak{R}_{l1} está relacionada con la debida al devanado más expuesto, primario en este caso, se pueden determinar estos parámetros utilizando los datos mostrados en la última columna de la Tabla 4.5 de lo cual se obtiene que

$$\mathfrak{R}_{l1} = 1550101.694 \quad \mathfrak{R}_{l2} = 1.1318756162924E10$$

por lo tanto, se tienen los datos relacionados con la dispersión de los dos modelos del transformador monofásico tipo núcleo mostrados en la Figura 4.12.

4.5.2. Modelado de un transformador monofásico tipo acorazado

La Figura 4.15 muestra un transformador monofásico tipo acorazado cuyos devanados primario y secundario están arrollados alrededor de la pierna central. Las dimensiones de los devanados al igual que en el caso presentado anteriormente son $N_1 = 10$ vueltas con 0.4cm de espesor para el primario y $N_2 = 100$ vueltas con 0.7cm de espesor para el secundario, los dos con un altura de 2.5cm. De las características magnéticas del núcleo se

resalta que tiene una permeabilidad relativa en su región lineal de 1200, misma donde éste es operado.

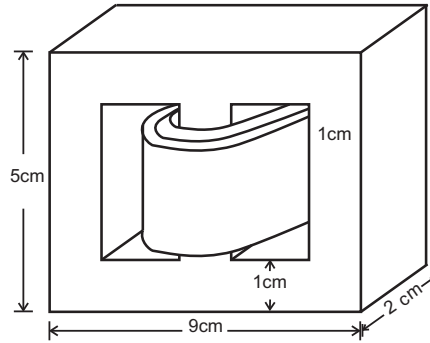


Figura 4.15: Transformador monofásico tipo acorazado

Para la Figura 4.15 se tiene que su diagrama equivalente eléctrico es de la misma forma que el presentado en la Figura 4.12b además, se puede deducir de manera tradicional el diagrama magnético equivalente como se muestra en la Figura 4.16, donde \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 y \mathfrak{R}_3 representan las reluctancias no-lineales de las secciones del núcleo magnético. Los acoplamientos magnéticos a través del aire se representan con las reluctancias lineales \mathfrak{R}_4 y \mathfrak{R}_5 . Las fuentes de corriente f_1 y f_2 representan los devanados primario y secundario, respectivamente.

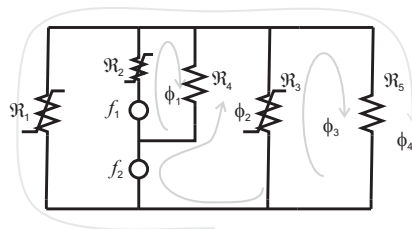


Figura 4.16: Circuito equivalente magnético

Analizando el circuito de la Figura 4.16 por mallas se tiene que

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{11} & \mathfrak{R}_{12} & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} & \mathfrak{R}_{23} & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_{32} & \mathfrak{R}_{33} & \mathfrak{R}_{34} \\ 0 & 0 & \mathfrak{R}_{43} & \mathfrak{R}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Donde $\mathfrak{R}_{11} = \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_4$, $\mathfrak{R}_{12} = -\mathfrak{R}_4$, $\mathfrak{R}_{22} = \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_4$, $\mathfrak{R}_{23} = -\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_{33} = \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_5$, $\mathfrak{R}_{34} = \mathfrak{R}_5$ y $\mathfrak{R}_{44} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_5$.

como la matriz es simétrica

$$\mathfrak{R}_{ij} = \mathfrak{R}_{ji}$$

Para la determinación de los parámetros de dispersión se discretiza el modelo de la Figura 4.15 y como resultado se tiene el mostrado en la Figura 4.17 mismo que consta de 90600 nodos y 66440 elementos. Es importante resaltar que entre más nodos y más elementos contenga un modelo podremos obtener de manera más precisa su solución. Sin embargo, el realizar un modelo muy detallado conlleva a tener un archivo de simulación demasiado grande lo que puede llevar a problemas computacionales entre los cuales los más comunes son falta de memoria así como quedarse sin espacio en disco duro, cosa que resulta obvio al tener en cuenta que estamos hablando de un método en el que se estudia el comportamiento de un modelo por partes, mismo que al final tiene que ser ensamblado para conocer el comportamiento global.

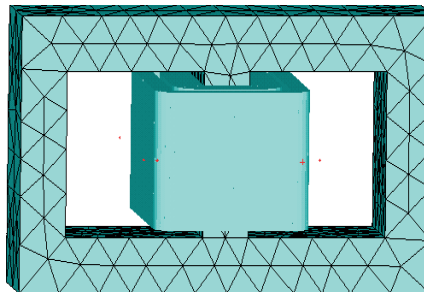


Figura 4.17: Mallado del transformador monofásico tipo acorazado

La dispersión observada en este modelo se puede apreciar en la Figura 4.18. La inductancia de dispersión en este tipo de transformadores es menor a la que se obtiene en

los transformadores tipo núcleo, considerando que las bobinas de ambos transformadores tienen las mismas dimensiones lo cual se debe a las piernas externas, que se encuentran a los lados de la pierna central, donde se encuentran arrollados los devanados. Sin embargo, esto se puede apreciar mejor en los datos obtenidos de la simulación con Ansys[©] mostrados en la Tabla 4.7

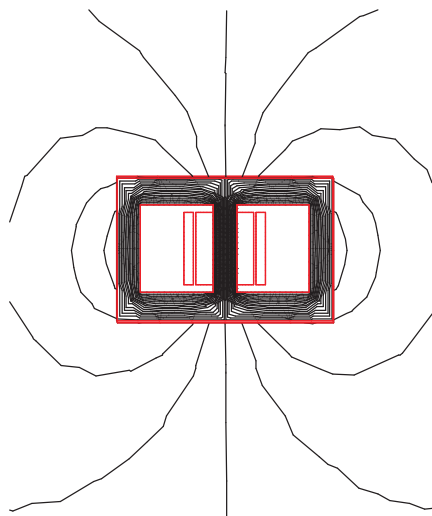


Figura 4.18: Densidad de flujo magnético

Tabla 4.7: Parámetros del transformador monofásico tipo acorazado

Parámetro	Ansys [©]	Usando (4.17)	Relación
Primario			
L_{m1}	3.390215025E-02	2.714336052E-02	1.24900
L_{l1}	5.223180575E-05	3.015928947E-03	0.01731
L_{11}	3.395438205E-02	3.015928947E-02	1.12583
L_{12}	3.390215025E-03	3.015928947E-03	1.12410
Secundario			
L_{m2}	3.390215025E-04	2.714336052E-04	1.24900
L_{l2}	4.628014340E-07	3.015928947E-05	0.01534
L_{22}	3.394843039E-04	3.015928947E-04	1.12563

De la Tabla 4.7 se puede apreciar que entre los valores de inductancia obtenidos mediante la simulación con Ansys[©] y los obtenidos de (4.17) existe un margen de dife-

rencia cercano al 30% en cuanto a las inductancias de magnetización se refiere, siendo en este parámetro donde se encuentra la mayor diferencia en cuanto a valores y cercano al 15% en la inductancia total. Ahora tomando solo los datos de inductancia de dispersión y agregando el calculado usando (4.26), en la Tabla 4.8 se puede observar que la diferencia que existe entre los valores obtenidos por (4.26) y por Ansys[©] es pequeña, comparada con la que existe entre estos valores y el supuesto como el 10% de la inductancia total. Otra característica importante de este modelo es que a pesar de que los devanados tiene las mismas dimensiones que los de la Figura 4.11, este modelo presenta una inductancia de dispersión menor a la arrojada por los análisis en el caso anterior. Esto es basándose en el hecho de que la inductancia de dispersión solo es función de las dimensiones físicas de los devanados [Flanagan92], como consecuencia tanto la inductancia de dispersión de este modelo como la del transformador monofásico tipo núcleo debería ser la misma según [Flanagan92] [Bossche05] y [Henriksen01]. Sin embargo, por sentido común es de esperarse un valor de dispersión menor debido a la estructura del núcleo ferromagnético, como consecuencia, los resultados presentados resultan lógicos, sin olvidar que los valores arrojados por (4.26) son una aproximación.

Tabla 4.8: Inductancias de dispersión

Parámetro	Supuesto	Usando (4.26)	Ansys [©]
L_{l1}	3.015928947E-03	2.81486E-04	5.223180575E-05
L_{l2}	3.015928947E-05	2.81486E-06	4.628014340E-07

Ahora para la determinación de los parámetros de dispersión mostrados en la Figura 4.16 se toman los datos mostrados en la última columna de la Tabla 4.8, lo cual lleva a que

$$\Re_4 = 2.1607538925E10 \quad \Re_5 = 1.9145422710E6$$

de esta forma se tienen completos los parámetros de dispersión para el circuito eléctrico y magnético del transformador monofásico tipo acorazado.

Movimiento interno de devanados

Una de las fallas comunes en transformadores es el movimientos de devanados, es decir un devanado puede moverse hacia arriba o hacia abajo con respecto al otro, ya sea por una sobretension o por situaciones físicas. Al tener un movimiento en los devanados la inductancia puede modificarse, una falla de este tipo fue aplicada al modelo de la Figura 4.15 donde el devanado secundario fue movido con respecto al primario y el comportamiento de la inductancia es mostrado en la Tabla 4.9, donde podemos apreciar que el parámetro que sufre el cambio más significativo es la inductancia de dispersion L_{l1} teniendo un incremento de un poco más del 25 % en ambas pruebas, para este caso en específico. La disminución en la inductancia de dispersion del devanado movido se debe a que con el movimiento este devanado fue acercado al núcleo.

Tabla 4.9: Incremento en inductancia de dispersión

Parámetro	Normales	0.2cm arriba	0.2cm abajo
Primario			
L_{m1}	3.390215025E-02	3.388866751E-02	3.388875049E-02
L_{l1}	5.223180575E-05	6.571454099E-05	6.563407033E-05
L_{11}	3.395438205E-02	3.395438205E-02	3.395438456E-02
L_{12}	3.390215025E-03	3.388866751E-03	3.388875049E-03
Secundario			
L_{m2}	3.390215025E-04	3.388866751E-04	3.388875049E-04
L_{l2}	4.628014340E-07	4.118012156E-07	4.186567202E-07
L_{22}	3.394843039E-04	3.392984763E-04	3.393061616E-04

4.6. Modelado del transformador trifásico

Un sistema trifásico es usado para generar y transmitir grandes cantidades de energía eléctrica. Los transformadores trifásico son requeridos para elevar o disminuir los voltajes en las diferentes etapas de transmisión de potencia. Un transformador trifásico puede ser construido de dos maneras: conectando adecuadamente un banco de tres transformadores monofásicos, o construyendo un transformador trifásico en una estructura magnética en común. Sin embargo, el costo de una unidad trifásica es menor que el costo de su equivalente en tres unidades monofásicas.

Cada pierna y bobina de este transformador está asociado con una fase. Los voltajes en los devanados secundarios están en fase con los voltajes en los devanados primarios, independientemente del tipo de conexión hecha externamente a los devanados.

Una regla importante en dispositivos trifásicos es la simetría. Las fases deben estar conectadas simétricamente, y las bobinas deben tener una construcción y localización simétrica en el núcleo [Flanagan92].

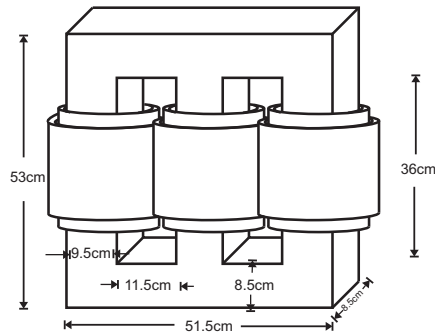


Figura 4.19: Transformador trifásico de tres columnas

El modelo a realizar es el mostrado en la Figura 4.19 donde el material magnético tiene una permeabilidad relativa de 12000 y sus devanados tienen un espesor de 1.3 cm con $N_1 = 25$ y $N_2 = 45$ primario y secundario, respectivamente.

En un transformador trifásico la determinación de su circuito eléctrico es algo complicada [Slemon53] [Chen97], sin embargo, éste puede ser representado de una manera más sencilla como se aprecia en la Figura 4.20 [Pérez04].

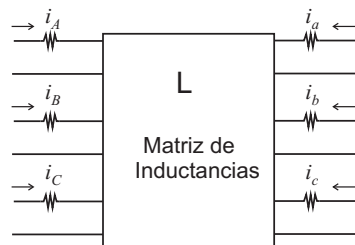


Figura 4.20: Circuito equivalente eléctrico del transformador trifásico de tres columnas

De donde podemos obtener los parámetros necesarios para su representación de

Donde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{11} &= \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_{l1} & \mathfrak{R}_{14} &= -\mathfrak{R}_{l1} \\
\mathfrak{R}_{22} &= \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{l2} & \mathfrak{R}_{25} &= -\mathfrak{R}_{l5} \\
\mathfrak{R}_{33} &= \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_{l3} & \mathfrak{R}_{36} &= -\mathfrak{R}_{l3} \\
\mathfrak{R}_{44} &= \mathfrak{R}_4 + \mathfrak{R}_7 + \mathfrak{R}_{l1} & \mathfrak{R}_{47} &= \mathfrak{R}_4 + \mathfrak{R}_7 & \mathfrak{R}_{48} &= \mathfrak{R}_4 \\
\mathfrak{R}_{55} &= \mathfrak{R}_5 + \mathfrak{R}_8 + \mathfrak{R}_{l2} & \mathfrak{R}_{56} &= \mathfrak{R}_8 \mathfrak{R}_{58} = \mathfrak{R}_5 + \mathfrak{R}_8 \\
\mathfrak{R}_{66} &= \mathfrak{R}_8 + \mathfrak{R}_{l3} & \mathfrak{R}_{68} &= \mathfrak{R}_8 \\
\mathfrak{R}_{77} &= \mathfrak{R}_6 + \mathfrak{R}_4 + \mathfrak{R}_7 & \mathfrak{R}_{78} &= \mathfrak{R}_4 + \mathfrak{R}_6 \\
\mathfrak{R}_{88} &= \mathfrak{R}_4 + \mathfrak{R}_5 + \mathfrak{R}_6 + \mathfrak{R}_8
\end{aligned}$$

como la matriz es simétrica

$$\mathfrak{R}_{ij} = \mathfrak{R}_{ji} \quad (4.30)$$

el cálculo de la reluctancia se realiza mediante

$$\mathfrak{R}_k = \frac{l_k}{\mu_k A_k} \quad (4.31)$$

donde l_k , A_k y μ_k son la longitud, área de la sección transversal y la permeabilidad del k-ésimo elemento del núcleo [Pérez04].

Una vez teniendo el modelo físico, y partiendo del modelo de reluctancias tradicional, el siguiente paso en el modelado por elementos finitos es discretizarlo, resultando el modelo discretizado mostrado en la Figura 4.22, mismo que por sus dimensiones consta de 109281 nodos con 94580 elementos.

De este modelo tomando en cuenta que es un dispositivo que se encuentra trabajando con corriente alterna trifásica, a 60Hz, obtenemos lo mostrado en la Figura 4.23 donde podemos ver cómo se comporta la densidad de flujo en tres diferentes puntos. Así mismo esta Figura muestra las ondas de la alimentación al primario del transformador. La Figura 4.23a corresponde al punto 1 en la Figura 4.23d donde la Fase A del primario se encuentra en su valor pico máximo positivo, y las Fases B y C tienen un valor similar entre ellas con signo negativo. El comportamiento del flujo en la Figura 4.23b corresponde al punto 2 de la Figura 4.23d donde la Fase C tiene un máximo negativo y las Fases A y B tiene un valor positivo similar entre ellas equivalente a la mitad del de la fase C. Por último, el flujo

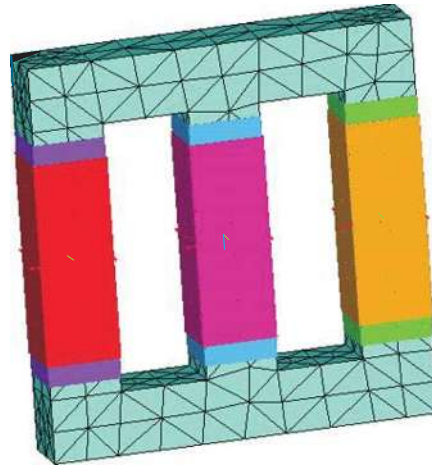


Figura 4.22: Mallado del transformador trifásico de tres columnas

mostrado en 4.23c obedece a la alimentación en el punto 3 de las ondas mostradas en la Figura 4.23d. Cabe mencionar que en este caso se tomó como referencia para las Figuras el voltaje de alimentación de los devanados primarios, pero de la misma forma puede ser realizado tomando los de los devanados secundarios solo considerando el defasamiento de 180 grados respecto a las ondas de su equivalente en el primario.

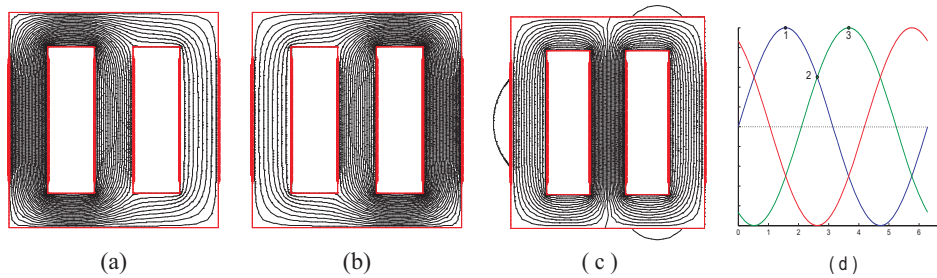


Figura 4.23: Comportamiento de ϕ en el transformador trifásico

Debido al tamaño relativamente grande de este modelo tiene que ser cuidadosamente discretizado para la correcta obtención de los parámetros de inductancia de dispersión, de no ser así puede resultar en datos de salida erróneos, que si bien, a simple vista parecen lógicos puede que para ser usados como condiciones iniciales en simulaciones fu-

turas no resulten convenientes. Los datos obtenidos de la simulación por elementos finitos son los mostrados en la Tabla 4.10 donde, por simplicidad, sólo se presentan los valores de inductancias de magnetización, dispersión y los valores de la inductancia total.

Tabla 4.10: Parámetros del transformador trifásico

Fase A Devanado Primario			
Parámetro	Ansys [©]	Usando (4.17)	Relación
L_{m1}	6.936378858E-02	5.643255803E-02	1.22914
L_{l1}	1.370005110E-03	6.270284226E-03	0.21849
L_{11}	7.073379369E-02	6.270284226E-02	1.12807
Fase B Devanado Primario			
L_{m2}	9.475455750E-02	7.591900603E-02	1.24810
L_{l2}	1.033019182E-03	8.435445115E-03	0.12246
L_{22}	9.578757668E-02	8.435445115E-02	1.13553
Fase C Devanado Primario			
L_{m3}	6.932098058E-02	5.643255804E-02	1.22838
L_{l3}	1.375042949E-03	6.270284226E-03	0.21929
L_{33}	7.069602352E-02	6.270284226E-02	1.12747
Fase a Devanado Secundario			
L_{m4}	0.225292081E-00	0.182841488E-00	1.23217
L_{l4}	4.420103540E-03	0.203157209E-01	0.21757
L_{44}	0.229712184E-00	0.203157209E-00	1.13071
Fase b Devanado Secundario			
L_{m5}	0.307582629E-00	0.245977579E-00	1.25044
L_{l5}	3.368521829E-03	0.273308421E-01	0.12324
L_{55}	0.310951150E-00	0.273308421E-00	1.13772
Fase c Devanado Secundario			
L_{m6}	0.225302192E-00	0.182841488E-00	1.23222
L_{l6}	4.474826474E-03	0.203157209E-01	0.22026

Parámetro	Ansys [©]	Usando (4.17)	Relación
L_{66}	0.229777019E-00	0.203157209E-00	1.13103

De los valores obtenidos se puede observar que los valores calculados por Ansys[©] en cuanto a dispersión se refiere quedan entre el 10 y 20 % del valor tomado de manera convencional, siendo la pierna central la que presenta menos dispersión tanto en el devanado secundario como en el primario. Con respecto a la inductancia de magnetización, la diferencia con respecto a los valores obtenidos con la fórmula general para el cálculo de inductancias está cerca del 25 %, mientras que para la inductancia total se tiene una diferencia entre ellas de cerca del 15 % como se puede apreciar en la última columna de la Tabla 4.10.

Tabla 4.11: Inductancias de dispersión

Devanado	Supuesto	Usando (4.26)	Ansys [©]
Fase A	6.270284226E-03	1.11384E-05	1.370005110E-03
Fase B	8.435445115E-03	1.11384E-05	1.033019182E-03
Fase C	6.270284226E-03	1.11384E-05	1.375042949E-03
Fase a	0.203157209E-01	3.55314E-05	4.420103540E-03
Fase b	0.273308421E-01	3.55314E-05	3.368521829E-03
Fase c	0.203157209E-01	3.55314E-05	4.474826474E-03

Ahora bien, aislando los valores relacionados con la dispersión, mostrados en la Tabla 4.11, se puede apreciar que para las tres piernas, en el caso de las bobinas secundarias o primarias, utilizando (4.26) no presentan variación en sus valores, esto es debido a que esta fórmula solo utiliza las propiedades geométricas de los devanados para determinar la inductancia de dispersión, sin tomar en cuenta, como ya se mencionó, el tipo de núcleo y la posición de los devanados. Sin embargo, esta variación sí puede ser distinguida de los valores supuestos como el 10 % de la inductancia total, lo cual puede ser entendido de la fórmula general del cálculo de la inductancia (4.17), ya que como se puede apreciar ésta depende de la reluctancia. Además, entre los valores obtenidos mediante Ansys[©] y los valores supuestos se puede observar que la diferencia oscila entre un $\pm 22\%$

Capítulo 5

Transformador de horno

5.1. Introducción

La aplicación principal de los transformadores de horno de arco es en la producción de acero; son requeridos para diferentes procesos y aplicaciones de horno. Son construidos para Hornos de acero, principalmente de arco grande, hornos de cucharón, hornos de arco corto y sumergido.

Los transformadores de horno de arco (AFT) operan bajo condiciones muy severas con sobrecorrientes y sobrevoltajes, debido a los cortocircuitos generados por el horno. De todos los aparatos que producen arco eléctrico en un sistema de potencia, son los hornos de arco eléctrico los que pueden causar los problemas más severos, porque representan una fuente armónica de gran capacidad concentrada en un lugar específico. Los hornos de arco eléctrico (EAF) son una de las principales causas de las fluctuaciones de voltaje mismas que afecta a los consumidores conectados a las mismas líneas, debido a la alta demanda de corriente de las cargas. Para poder entender y analizar adecuadamente los efectos en el sistema de estas cargas, es crucial obtener una representación exacta de las características de las cargas y de los transformadores ya que a través de ellos se unen las no linealidades de la carga al sistema.

El funcionamiento del EAF se desarrolla en varias etapas, dependiendo del estado de fundición y del lapso de tiempo de energización inicial de la unidad. Durante el período

de fundición se crea un corto circuito en el lado secundario del transformador de horno, esto crea grandes fluctuaciones de corriente a bajo factor de potencia. Estas fluctuaciones causan las variaciones en la potencia reactiva, lo cual causa una caída de voltaje momentánea o parpadeo, en la barra del suministro y las barras cercanas al sistema interconectado. Las corrientes del arco son más uniformes durante el período del refinamiento, y produce menos impacto en la calidad de la potencia del sistema.

5.2. Transformadores de horno

Los EAF utilizan el efecto térmico de un arco eléctrico para fundir el contenido del horno, el EAF tiene tres electrodos conectados a las terminales secundarias del AFT. Por lo tanto, el transformador tiene que ser especialmente diseñado para soportar cortocircuitos en el lado secundario, además, un transformador alimentando un horno de arco tiene que entregar una corriente extraordinariamente alta a voltajes relativamente modestos, digamos entre 200 y 1000 volts. Sus rangos de potencia que varían entre 50 y 100 MVA son bastante comunes con corrientes en el secundario de más de 50 KA alcanzando en ocasiones los 200 kA. El AFT tiene características especiales para manejar corrientes muy altas comparadas con un transformador convencional. Las corrientes en el horno de arco se caracterizan por tener amplias fluctuaciones y condiciones desbalanceadas, las cuales llevan a problemas de caída de voltajes, armónicos, etc. Estos efectos pueden ser mitigados alimentando el AFT directamente de una línea de transmisión de alto voltaje [Martin98].

La reactancia de dispersión del transformador de horno afecta la operación del horno debido a que ésta se ve agregada a la reactancia de las conexiones de alta corriente entre las terminales del secundario del transformador y los extremos de los electrodos. Entre mayor sea la reactancia menos provechosas serán las corrientes, como consecuencia se reduce la eficiencia en la operación. Por lo tanto, la reactancia de dispersión necesita ser mantenida tan baja como sea prácticamente posible, tomando en consideración el diseño mecánico de los devanados y los soportes de las estructuras. Sin embargo, se requiere cierto valor de reactancia en el circuito del horno para estabilizar el arco. En las instalaciones de hornos de gran capacidad, normalmente las conexiones de bajo voltaje proporcionan la reactancia

necesaria. Para instalaciones de hornos de menos capacidad, se puede agregar un reactor en serie con el devanado primario para proporcionar el valor de reactancia necesaria para la estabilidad. Estos reactores en serie, los cuales pueden estar contenidos en el tanque del transformador de horno, son normalmente proporcionados con cambiadores de derivación. Por lo tanto, el valor de reactancia puede ser variado para un desarrollo óptimo. Así, dependiendo de la clasificación de la instalación del horno y su reactancia inherente, la reactancia de dispersión del transformador de horno tiene que ser prudentemente seleccionada para cumplir los requerimientos de estabilidad y eficiencia [Kulkarni04].

A pesar que la construcción del núcleo es común, la construcción tipo acorazado es convenientemente usada debido a que se puede obtener un valor de impedancia pequeño entrelazando los devanados primario y secundario. Los transformadores de horno cuentan con un devanado regulador independiente (de derivación). La variación del porcentaje de reactancia sobre el rango completo de cambios de derivación depende de la disposición de los devanados.

El proceso de fundición en un horno requiere una potencia inicial muy grande para deshacer y fundir la carga del horno. La potencia requerida después de esto para el refinamiento del material derretido es menor. El requerimiento de potencia variable a la entrada es lograda variando el voltaje de alimentación del horno de manera continua sobre un rango amplio mediante el uso de un cambiador de derivación bajo carga (on-load tap changer OLTC). Su uso es primordial donde no se desea tener interrupciones temporales de suministro en el cambiador de derivación. Debido a que la regulación requerida es muy fina, se requiere de un OLTC con gran número de pasos.

Los arreglos más usados para la regulación de voltaje son mostrados a continuación. El arreglo de la Figura 5.1, que consiste de derivaciones en la terminal neutral del devanado primario, es usado para transformadores de horno de baja capacidad (5 a 10MVA). El costo del OLTC es mínimo debido a los bajos valores de voltaje y de corriente (el voltaje primario puede ser del orden de 33 a 66 kV). La desventaja de este arreglo es que los pasos de voltaje no son constantes a través del rango de regulación de voltaje (para un voltaje fijo en el primario, cuando la posición de la derivación se cambia para variar el voltaje del secundario, el voltaje por vuelta cambia lo cual resulta en un cambio no uniforme en el

voltaje del secundario de una derivación a otra).

El arreglo de la Figura 5.2, usado para aplicaciones de hornos grandes, elimina la desventaja del arreglo anterior. Se utiliza un autotransformador independiente para la regulación de voltaje. El paso de voltaje es uniforme, por lo tanto, el voltaje por vuelta es independiente de la posición de la derivación para una entrada de voltaje fija en el primario del autotransformador. El autotransformador, que puede ser alimentado directamente de un sistema de 66 ó 132 kV, reduce el nivel de voltaje al nivel del devanado primario del transformador de horno. El nivel de voltaje del OLTC es mayor que el del arreglo de la Figura 5.1 por lo tanto se pueden usar cambiadores de derivación trifásicos. Normalmente el autotransformador y el transformador de horno son alojados en tanques separados, lo cual incrementa el tamaño y costo del sistema total.

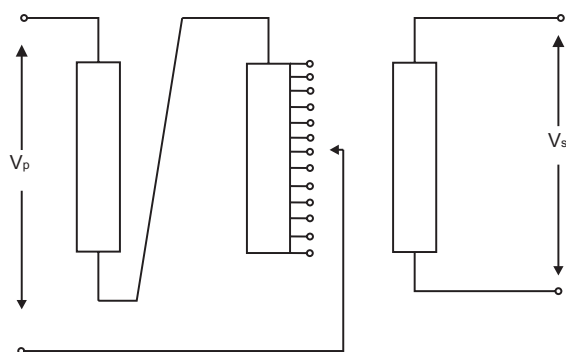


Figura 5.1: Derivaciones en el devanado primario

El arreglo más común utilizado para aplicaciones de hornos de mediana y alta potencia es el transformador de horno con un arreglo elevador como se muestra en la Figura 5.3. El transformador elevador en las salidas aumenta o reduce el voltaje fijo del secundario del transformador principal. El devanado primario del transformador elevador es alimentado del devanado de derivación del transformador principal, y el voltaje de alimentación es seleccionado de tal forma que resulte en condiciones de operación menos costosas para el OLTC. Así, el costo del OLTC es muy bajo en este arreglo. También, la variación del voltaje del secundario es igual de una derivación a otra a través del rango de regulación. Normalmente, el transformador principal y el transformador elevador son colocados en el

mismo tanque minimizando el tamaño de las conexiones entre los devanados secundarios de ambos transformadores.

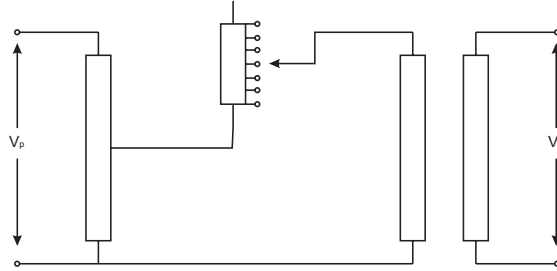


Figura 5.2: Regulación por autotransformador

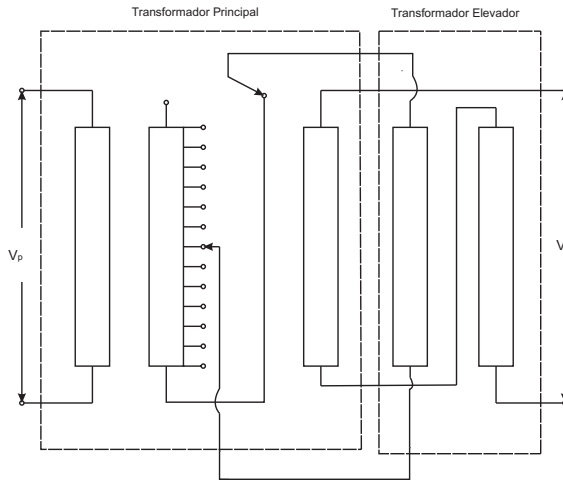


Figura 5.3: Arreglo elevador

La capacidad del transformador elevador es mucho menor que la del transformador principal, siendo suficiente solo para propósitos de regulación. Además, los diámetros de los núcleos (así como el área del núcleo) son diferentes, los circuitos magnéticos de los dos transformadores tienen generalmente la misma distancia de centro a centro y la misma altura de ventanas para facilitar las conexiones entre sus devanados secundarios. Si se quisiera reducir el material del núcleo, la distancia de centro a centro del transformador elevador puede ser menor, pero las conexiones se vuelven un poco más complicadas. Debido a que las corrientes en los devanados secundarios del transformador principal y del primario del transformador

elevador son iguales; se utiliza el mismo tipo y tamaño de conductor para ambos devanados. También, los dos devanados son a menudo conectados en una Figura de ocho, como se muestra en la Figura 5.4, evitando conexiones extras entre ellos. Se requiere un arreglo especial para levantar los dos devanados de los núcleos ensamblándolos simultáneamente [Kulkarni04].

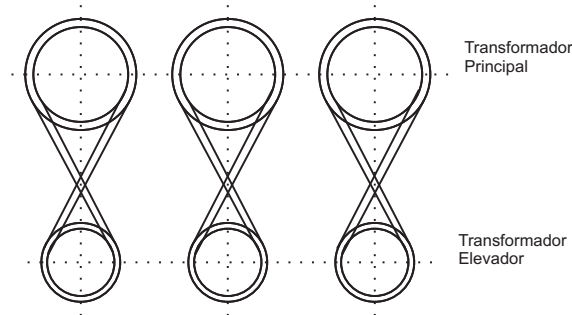


Figura 5.4: Conexión en ocho

Debido a que la corriente que circula por los devanados del secundario es muy alta, un cable conductor es transpuesto de manera continua lo que minimiza las pérdidas por eddy. El material de las partes estructurales que soportan las terminales de alta corriente y las partes del tanque cercanas a los campos de altas corrientes son construidas de materiales no magnéticos.

El devanado secundario de un transformador de horno está constituido por un número de bobinas en paralelo arregladas verticalmente y conectadas por medio de barras de cobre verticales. El arreglo de ida y retorno es usado para las conexiones de entrada/salida (colocadas cercanas entre sí) reduciendo el campo magnético y las pérdidas asociadas en las partes estructurales cercanas. Es preferible un devanado secundario conectado en delta, debido a que la corriente circulante por éste será reducida. Muchas veces los finales de cada fase del devanado secundario son extraídas del tanque y la conexión delta es realizada en el horno (formada automáticamente por la carga metálica en el horno). Esto minimiza las caídas de voltaje inducido en el conductor y puede lograr un mejor balance por fase en las corrientes de los electrodos. Las terminales del devanado secundario son colocadas normalmente en el lado vertical del tanque (en lugar de cubierta superior) resultando en un

tamaño de las conexiones menor, así como menos pérdidas y menor costo del transformador. El devanado de bajo voltaje (secundario) es invariablemente el devanado más expuesto y el devanado de alto voltaje (primario) puede ser localizado junto al núcleo. En tal caso el devanado de regulación (de derivación) está entre los devanados de alta y de baja. Tal disposición de devanados reduce la variación de porcentaje de impedancia (voltaje de corto circuito) a medida que la posición de derivación es cambiada de un valor mínimo a un valor máximo en el diseño de flujo variable [Kulkarni04] [Martin98]. Un diagrama interno mostrado en la Figura 5.5, nos da una idea de la disposición de los devanados dentro del transformador de horno. La Figura 5.5 y el funcionamiento en general del transformador de

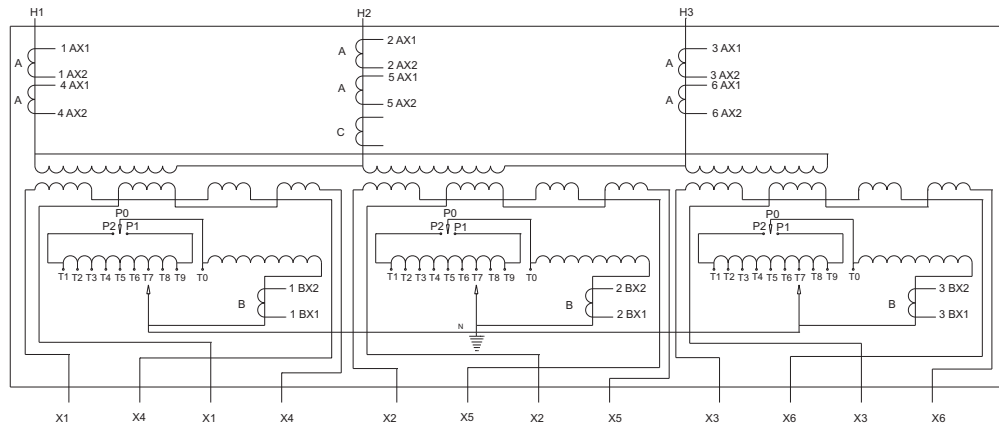


Figura 5.5: Diagrama interno del transformador

horno puede apreciarse mejor en la Figura 5.6, donde para propósitos prácticos se muestra una vista de perfil del transformador de horno permitiendo ver solo una fase del transformador, además los devanados han sido defasados sobre las piernas para su apreciación. En el núcleo principal (MT) se puede apreciar en la parte superior el devanado primario en el centro el devanado de derivación y en la parte de abajo el devanado secundario. En el núcleo secundario (ST) se puede apreciar en la parte superior el devanado de excitación y en la parte de abajo el devanado secundario.

Si se tiene una corriente en el devanado primario como se indica en la Figura 5.6 se genera un campo magnético de abajo hacia arriba en el núcleo principal, que induce una corriente que genera un flujo en sentido contrario en los devanados de derivación y secun-

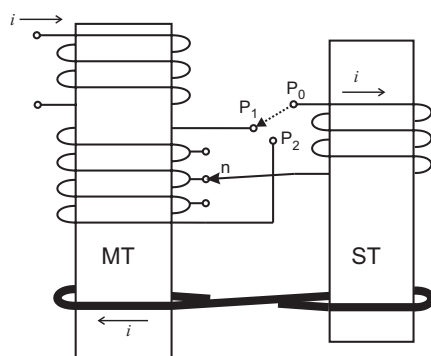


Figura 5.6: Vista lateral del transformador

dario, como resultado, en el núcleo secundario se tiene un flujo generado por el devanado secundario que va de arriba hacia abajo y, dependiendo de la conexión entre las terminales **P0-P1** o **P0-P2** en el devanado de excitación, se tendrá un flujo que se suma o se resta al generado por el devanado secundario en el núcleo pequeño, la magnitud que se suma o reste dependerá de la posición de la derivación como se puede apreciar en la Figura 5.5. En la Figura 5.6 se puede observar que el devanado secundario se encuentra abierto, lo cual se mencionó con anterioridad ya que la conexión es realizada con la carga al momento de realizar la fundición del material.

5.3. Modelado usando elementos finitos

Debido a que este tipo de transformador consta de dos núcleos es muy difícil realizar un modelo en dos dimensiones, por lo tanto, tenemos que recurrir forzosamente a un modelo en tres dimensiones, el cual ya discretizado en elementos finitos tiene la apariencia mostrada en la Figura 5.7.

Como se mencionó en la sección 5.2, el devanado secundario de un AFT tiene forma de ocho, sin embargo, para la simulación en Ansys[©] éste se dividió en dos bobinas en las que la corriente tiene sentido inverso en comparación una con la otra. Esto puede apreciarse mejor en la Figura 5.8 que muestra solo los núcleos con este devanado, donde las líneas punteadas indican la trayectoria original de los devanados y las flechas que se encuentran a los lados de las piernas externas muestran el sentido de la corriente en la bobina que se

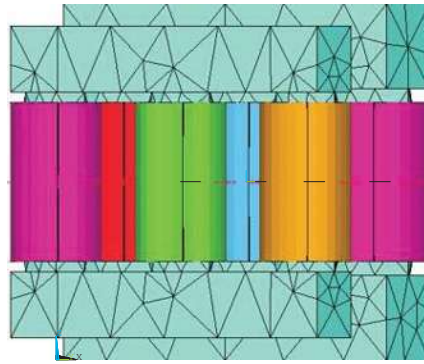


Figura 5.7: Transformador de horno discretizado

encuentra junto a ellas, éstas no se aprecian en la pierna central debido a que son tapadas por el yugo del transformador.

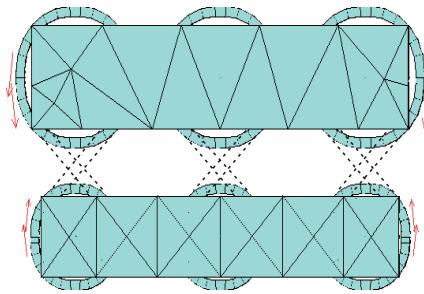


Figura 5.8: Equivalente del devanado secundario

Ahora bien, esto es equivalente a que las bobinas en el núcleo principal generen un flujo hacia un sentido y a que en el núcleo secundario el flujo generado se encuentre en sentido contrario, lo cual se puede apreciar mejor en la Figura 5.9, donde la Figura 5.9a equivale al flujo en el núcleo principal, la Figura 5.9b al flujo en el núcleo secundario y la Figura 5.9c muestra las dos Figuras anteriores superpuestas, donde se puede apreciar que en el yugo superior del transformador principal el flujo va de derecha a izquierda y en el núcleo secundario, dejando como referencia el yugo superior, el flujo va de izquierda a derecha. Como consecuencia, al superponer los dos núcleos se aprecia que en un transformador el flujo va en un sentido y en el otro va en sentido contrario.

Si bien la Figura 5.9 muestra el flujo solo debido al devanado secundario, falta ver

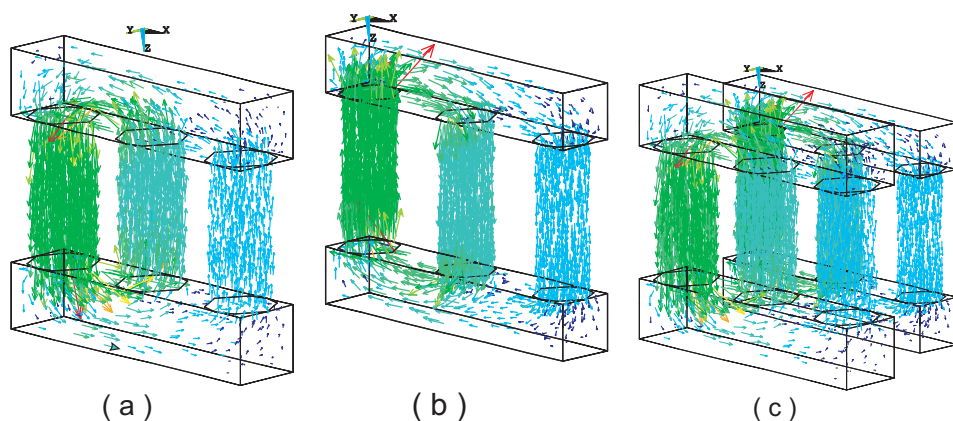


Figura 5.9: Flujo generado por devanado secundario

lo referente al flujo al realizar alguna variación en el cambiador de derivación, lo cual puede ser visto en la Figura 5.10, donde la Figura 5.10a muestra el sentido del flujo resultante en los dos núcleos del transformador en una de las piernas en una vista lateral. En la Figura 5.10b

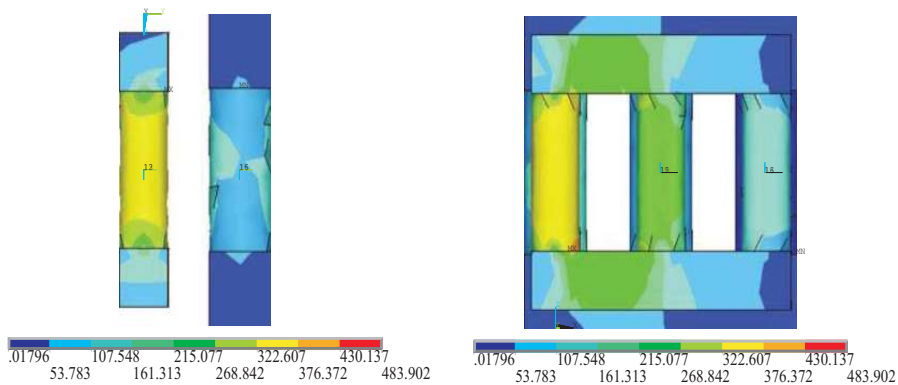


Figura 5.10: Comportamiento de ϕ en el transformador de horno

se puede apreciar que la mayor intensidad de flujo se encuentra en las primeras piernas de los transformadores. Esto es debido a que el transformador está siendo alimentado por corriente alterna y la Figura solo representa el comportamiento del flujo en un instante de tiempo, como consecuencia esta magnitud está variando pero, para este caso de estudio

en particular, se tomará este punto para tres casos donde se considera que el devanado de derivación se encuentra en tres posiciones diferentes: en la derivación nominal, aumentando la derivación en un 20% y cambiando el sentido del flujo generado por el devanado de excitación que se sumará o restará con el producido por el devanado secundario en el núcleo secundario, lo cual es mostrado en la Figura 5.6, y las magnitudes máximas y mínimas del flujo en los núcleos del transformador se comporta como se muestra en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Magnitudes máximas y mínimas de ϕ al cambiar derivación

Derivación	Núcleo primario		Núcleo secundario	
	ϕ Máximo	ϕ Mínimo	ϕ Máximo	ϕ Mínimo
P0-P1	179.619	0.050166	582.652	1.108
N	143.530	0.01796	483.902	0.355341
P0-P2	120.542	0.02551	121.509	0.281325

Se puede apreciar la forma en que se regula el flujo en el núcleo secundario al realizar variaciones de la derivación.

Los parámetros obtenidos en cuanto a inductancia se refiere, tomando en cuenta que el devanado de derivación se encuentra en una derivación extrema, son mostrados en la Tabla 5.2 donde por razones de simplicidad solo se muestran los valores pertenecientes a inductancias totales, es decir a la suma de $L_m + L_l$ y se considera que I representa a la primera pierna de los transformadores vistos de frente y así sucesivamente.

Tabla 5.2: Parámetros del transformador de horno

Pierna	Alta	Tap	Excitación	Secundario1	Secundario2
I	7.394790285	10.4592448	1.21683853	8.432928313E-04	1.350422575E-03
II	9.711525344	13.7351591	1.61704603	1.120736922E-03	1.773471803E-03
III	7.378709868	10.44178	1.21910926	8.451120497E-04	1.348323558E-03

Donde secundario1 pertenece a la parte del secundario en MT y secundario2 a la parte en ST. De esta Tabla se puede apreciar que la inductancia del devanado secundario es relativamente pequeña en comparación con la inductancia de los otros devanados, sin embargo hay que recordar que la inductancia está directamente relacionada con el cuadrado del número de vueltas, y en este caso este devanado solo cuenta con una vuelta. Por lo tanto

este valor resulta lógico. Estos valores no se pueden comparar contra algunos otros puesto que al ser un transformador de aplicación especial la literatura disponible respecto a éste es muy reducida y hasta el momento no se encuentran reportados valores o especificaciones de si sus cálculos se realizan de la manera tradicional. Sin embargo, los resultados de la simulación por elementos finitos pueden ser tomados como válidos por deducción de acuerdo a lo demostrado en los estudios anteriores.

Ahora bien considerando la numeración mostrada en la Figura 5.11 y considerando que **a** es utilizada para una de las piernas exteriores, **b** para la pierna central, y **c** para la pierna exterior restante

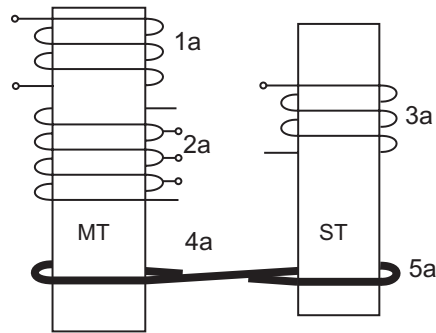


Figura 5.11: Numeración de devanados

se puede presentar la matriz de inductancias completa para el transformador de horno la cual queda de la siguiente forma:

	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	
1a	7.3947	4.8503	2.5198	8.7944	5.7683	2.9975	1.8797E - 3	1.4347E - 3	
1b		9.7115	4.8370	5.7685	11.5493	5.7541	1.4443E - 3	1.6899E - 3	
1c			7.3787	2.9968	5.7524	8.7775	1.0720E - 3	1.4346E - 3	
2a				10.4592	6.8603	3.5650	2.2493E - 3	1.7011E - 3	
2b					13.7351	6.8431	1.7134E - 3	2.0255E - 3	
2c						10.4417	1.2780E - 3	1.7016E - 3	
3a							1.2168	0.8045	
3b								1.6170	
3c									
4a									
4b									
4c									
5a									
5b									
5c									
	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c		
	1.0722E - 3	9.9928E - 2	6.5546E - 2	3.4063E - 2	5.0171E - 5	3.7478E - 5	2.8209E - 5		1a
	1.4427E - 3	6.5548E - 2	0.1312	6.5388E - 2	3.7722E - 5	4.5157E - 5	3.7660E - 5		1b
	1.8856E - 3	3.4053E - 2	6.5368E - 2	9.9742E - 2	2.8208E - 5	3.7462E - 5	5.0332E - 5		1c
	1.2778E - 3	0.1188	7.7954E - 2	4.0512E - 2	6.0035E - 5	4.4438E - 5	3.3615E - 5		2a
	1.7116E - 3	7.7954E - 2	0.1560	7.7764E - 2	4.4750E - 5	5.4119E - 5	4.4678E - 5		2b
	2.2561E - 3	4.0509E - 2	7.7762E - 2	0.1186	3.3628E - 5	4.4432E - 5	6.0217E - 5		2c
	0.4066	2.5886E - 5	1.9352E - 5	1.4480E - 5	3.2032E - 2	2.1182E - 2	1.0707E - 2		3a
	0.8070	1.9213E - 5	2.3332E - 5	1.9187E - 5	2.1181E - 2	4.2570E - 2	2.1250E - 2		3b
	1.2191	1.4493E - 5	1.9365E - 5	2.5974E - 5	1.0706E - 2	2.124E - 2	3.2097E - 2		3c
		1.3504E - 3	8.8580E - 4	4.6033E - 4	6.9086E - 7	5.0187E - 7	3.8127E - 7		4a
			1.7734E - 3	8.8367E - 4	5.0540E - 7	6.2328E - 7	5.0547E - 7		4b
				1.3483E - 3	3.8102E - 7	5.0099E - 7	6.9321E - 7		4c
					8.4329E - 4	5.5767E - 4	2.8189E - 4		5a
						1.1207E - 3	5.5945E - 4		5b
							8.4511E - 4		5c

Sin embargo, hay que resaltar que debido al tamaño relativamente grande en comparación de los otros modelos y a los altos requerimientos de hardware necesarios para una discretización del modelo como en los casos analizados anteriormente, éste fue realizado con una discretización mínima, Ansys tiene establecidos 10 niveles para mallado global representando con un 1 el mallado más fino y 10 el extremo opuesto tomado en este caso como mínimo, la cual es suficiente para representar el modelo aunque con cierto margen de error. Es por esto que los datos obtenidos, a pesar de que ya el MEF, en este caso por medio

de Ansys[©], es una aproximación a los mismos, pueden contener un error adicional por la representación del modelo, mismo que estará en función del número de elementos con los que esté representado el modelo, es decir, entre mayor cantidad de elementos representen el modelo el error será menor. El hardware utilizado en este modelo tiene como características principales un procesador XEON[©] a 2.8Ghz, 1Gb de memoria RAM y disco duro de 120Gb, a pesar de estas características si para el mallado del modelo se elige un nivel de mallado igual o inferior a 6 Ansys[©] regresa un mensaje de error sobre memoria insuficiente para procesar la discretización. Si se elige un nivel de 7 u 8 Ansys[©] solo despliega un mensaje de advertencia que la memoria reservada es insuficiente para procesar el mallado que es necesaria una reasignación.

Capítulo 6

Conclusiones

Se ha revisado una introducción y las bases necesarias para el estudio del método del elemento finito donde el enfoque que se le está dando es hacia la solución de problemas electromagnéticos, representados por la ecuación de Poisson o en su caso de Laplace. El MEF en el área de electromagnetismo ha recibido mucha atención en las últimas décadas desde su aparición en las áreas de estructuras y esfuerzos.

6.1. Conclusiones

La correcta discretización de dominio nos lleva a una solución más precisa a la esperada, sin embargo en algunos casos esto conlleva a archivos de gran tamaño que pueden tomar demasiado tiempo en ser solucionados. Este problema, en ciertas ocasiones donde el modelo lo permite, puede ser sobrellevado debido al uso de una de las características importantes del elemento finito, como lo es la utilización de modelos con simetría axial en donde lo más importante es la correcta colocación de sus fronteras.

Se compararon los valores de inductancia ofrecidos por las ecuaciones desarrolladas con los determinados mediante simulación. En este caso se comprobó que existe cierta discrepancia entre los valores de inductancia, pero como se resaltó en su momento esto es debido a las consideraciones tomadas en la aplicación de (4.17).

De los resultados obtenidos se aprecia que en el parámetro donde se comente el error mayor al ser tomado como una suposición es el parámetro de dispersión. Además,

se resalta la buena aproximación que es dada mediante el uso de (4.26) para el caso de devanados concentrados.

Se ha comprobado que el parámetro que varía más al tener una falla donde los devanados son defasados uno con respecto al otro es la inductancia de dispersión, la cual tiende a incrementar su valor .

Del análisis de las fallas presentadas en los transformadores monofásicos se puede concluir que una abertura entre las vueltas de una bobina tiene consecuencias más notables, en cuanto a la dispersión se refiere, que si el devanado completo se defasa con referencia al otro. De aquí se puede afirmar que el adecuado manejo e interpretación de la dispersión, es una valiosa herramienta en cuanto a mantenimiento y fallas incipientes se refiere.

En base a (4.26), donde si se considera que dos transformadores tienen devanados de las mismas dimensiones, se puede decir que la dispersión tiene el mismo valor en ambos devanados. Sin embargo por medio de la simulación con Ansys[©] se puede comprobar que esto no es necesariamente cierto, como se comprobó en la simulación de transformadores monofásicos con devanados concéntricos desarrollados en la sección 4.5

En el caso del transformador de horno de arco, que es un dispositivo que no puede ser modelado en dos dimensiones debido a sus características físicas, mediante el método del elemento finito se obtiene la distribución de la densidad de flujo en diferentes etapas del cambiador de derivación, así como sus inductancia para un punto de operación.

A medida que el modelo a simular mediante Ansys[©] crece en dimensiones y que éste no tiene simetría, es decir que no se puede modelar solo una parte asumiendo que las partes no simuladas pueden ser representadas en función de los resultados obtenidos por lo simulado, los requerimientos de memoria se incrementan, esto debido a que se obtiene solución para cada uno de los elementos finitos por que entre más grande sea el modelo mayor número de elementos finitos se necesitarán para su representación.

El manejo de herramientas como Ansys[©] en el área de ingeniería eléctrica no solamente facilita el análisis de los dispositivos en estudio, sino que a su vez permite realizar nuevos modelos de dichos dispositivos para mejorar su funcionamiento.

6.2. Trabajo futuro

Una vez observada la distribución de líneas de flujo y densidad de campo en un transformador en operación normal, uno de los proyectos planteados a futuro es la observación de una transitorio magnético, así como la variación de parámetros debido a éste.

Determinación de esfuerzos mecánicos en los devanados debidos a fallas internas o externas siendo el Ansys[©] un software mundialmente reconocido parecería no necesaria una validación, sin embargo, una buena investigación consistiría en tener un transformador al que se le hicieran todo tipo de pruebas y aplicación de fallas y corroborar con mediciones reales los resultados arrojados por Ansys[©].

En base a lo expuesto por esta tesis, diseñar un equipo (instrumento) para medir la inductancia en forma real.

Referencias

- [Andersen73] Andersen, O. Transformer leakage flux program based on the finite element method. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 92(2):682–689, March 1973.
- [Ansys04] Ansys, R. . *ANSYS Low Frequency Electromagnetic Analysis Guide*. Ansys, inc, 2004.
- [Argyris60] Argyris, J. y Kelsey, S. *Energy Theorems in Structural Analysis*. Butterworth, London, 1960.
- [Bastos03] Bastos, J. y Sadowski, N. *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*. Marcel Dekker, USA, 2003.
- [Bianchi05] Bianchi, N. *Electrical Machine Analysis Using Finite Elements*. Taylor & Francis, USA, 2005.
- [Bossche05] Bossche, A. V. D. y Vencislav, C. *Inductors and Transformers for Power Electronics*. Taylor & Francis, USA, 2005.
- [Chen97] Chen, X. y Venkata, S. A three-phase three-winding core-type transformer model for low-frequency transient studies. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 12(2):775–782, April 1997.
- [Clough60] Clough, R. The finite element method in plane stress analysis. *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, 1:345–378, Pittsburgh, PA, September 1960.

- [Courant43] Courant, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49:1–23, 1943.
- [Fitzgerald92] Fitzgerald, A., Kingsley, C., y Umans, S. D. *Máquinas Eléctricas*. McGraw Hill, USA, 1992.
- [Flanagan92] Flanagan, M. W. *Handbook of Transformer Design and Applications*. McGraw Hill, USA, 1992.
- [Férrandez02] Férrandez, C., Prieto, R., García, ., Herranz, P., Cobos, J. A., y Uceda, J. Modelling core less high frequency transformers using finite element analysis. *IEEE Power Electronics Specialists Conference*, 3:1260–1265, Cairns, Australia, June 2002.
- [Guangzheng92] Guangzheng, N., Xiaoming, X., Weiyang, C., Gangru, L., Baidun, J., Zhenghu, F., Xianghua, L., y Jitai, X. Fem analysis of 3d transformer leakage field and eddy current loss in the windings. *IEEE Transactions on Magnetism*, 28(2):1382–1385, March 1992.
- [Gyimesi93] Gyimesi, M., Lavers, D., Pawlak, T., y Ostergaard, D. Application of the general potential formulation. *IEEE Transactions on Magnetism*, 29(2):1345–1347, March 1993.
- [Gyimesi99] Gyimesi, M. y Ostergaard, D. Inductance computation by incremental finite element analysis. *IEEE Transactions on Magnetism*, 35(3):1119–1122, May 1999.
- [Han04] Han, Y., Eberle, W., y Liu, Y. F. New measurement methods to characterize transformer core loss and copper loss in high frequency switching mode power supplies. *IEEE Power Electronics Specialists Conference*, 2:1695–1701, Aachen, Germany, March 2004.
- [Hayes03] Hayes, J. G., O’Donovan, N., Egan, M. G., y O’Donnell, T. Inductance characterization of high-leakage transformers. *Eighteenth Annual IEEE*

- Applied Power Electronics Conference and Exposition*, 2:1150–1156, Miami Beach, Florida, February 2003.
- [Henriksen01] Henriksen, T. Transformer leakage flux modeling. *SINTEF Energy Research*, 11:158–163, 2001.
- [Ida92] Ida, N. y Bastos, J. A. *Electromagnetics and Calculation of Fields*. Springer Verlag, USA, 1992.
- [Jamali05] Jamali, S., Ardebili, M., y Abbaszadeh, K. Calculation of short circuit reactance and electromagnetic forces in three phase transformer by finite element method. *Proceedings of the Eighth International Conference on Electrical Machines and Systems*, 3:1725–1730, Nanjing, China, September 2005.
- [José00] José, M. A. P. *Elementos Magnéticos Integrados Para Aplicación en Convertidores Electrónicos de Alta Densidad de Potencia*. Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, Julio 2000.
- [Kanerva05] Kanerva, S., Seman, S., y Arkkio, A. Inductance model for coupling finite element analysis with circuit simulation. *IEEE Transactions on Magnetism*, 41(5):1620–1623, May 2005.
- [Kashtiban05] Kashtiban, A. M. A. V. y Halvaeil, A. Investigation of winding type effect on leakage flux of single phase shell type transformer using fem. *IEEE Proceedings of the Eighth International Conference on Electrical Machines and Systems*, 3:1755–1758, Nanjing, China, September 2005.
- [Kladas94] Kladas, A. G., Papadopoulos, M. P., y Tegopoulos, J. A. Leakage flux and force calculation on power transformer windings under short-circuit: 2d and 3d models based on the theory of images and the finite element method compared to measurements. *IEEE Transactions on Magnetism*, 30(5):3487–3490, September 1994.

- [Krause89] Krause, C. P. y Wasynczuk, O. *Electromechanical Motion Devices*. McGraw Hill, USA, 1989.
- [Krause02] Krause, P. C., Wasynczuk, O., y Sudhoff, S. D. *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. John Wiley and Sons, USA, 2002.
- [Kulkarni04] Kulkarni, S. y Khaparde, S. *Transformer Engineering Design and Practice*. Marcel Dekker inc, USA, 2004.
- [Leon92] Leon, d. F. y Semlyen, A. Efficient calculation of elementary parameters of transformers. *Transactions on Power Delivery*, 7(1):376–383, January 1992.
- [Li06] Li, X., Chen, Q., Hu, G., Sun, J., y Long, G. Numerical analysis on magnetic field of hts transformer with different geometry. *IEEE Transactions on Magnetism*, 42(4):1343–1346, April 2006.
- [Martin98] Martin, C. F., J. Heathcote. *The J & P Transformer Book*. Newnes, Great Britain, 1998.
- [Melosh63] Melosh, R. J. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. *Journal of AIAA*, 1(7):1631–1637, 1963.
- [Meng04] Meng, Z. y Wang, Z. The analysis of mechanical strength of hv winding using finite element method, part i calculation of electromagnetic forces. *International Universities Power Engineering Conference*, 1:170–174, Bristol, UK, September 2004.
- [Mohammed06] Mohammed, O. A., Liu, Z., Liu, S., y Abed, N. Y. Finite element based nonlinear physical model of iron-core transformers for dynamic simulations. *IEEE Transactions on Magnetism*, 42(4):1027–1030, April 2006.
- [Pérez04] Pérez, C. R. *Modelos Avanzados de Elementos del Sistema Eléctrico de Potencia en Coordenadas de Fase para Estudios de Estabilidad Dinámica*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Nuevo León, Monterrey, N.L., Abril 2004.

- [Reddy84] Reddy, J. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw Hill, USA, 1984.
- [Reyes99] Reyes, A., Escarela, P., Olguin, S., y Campero, L. Cálculo de la inductancia aparente en campos magnetostáticos no lineales mediante el método del elemento finito. *Reunión de Verano de Potencia IEEE RVP*, 2:158–163, 1999.
- [Rojas06] Rojas, J. A. y Varela, J. R. Numeric simulation of the magnetic flux in a power transformer. *IEEE PES Transmission and Distribution Conference and Exposition*, págs. 1–6, Caracas, Venezuela, August 2006.
- [Sabonnadiere97] Sabonnadiere, J. C. y Foggia, A. 2d and 3d finite element modeling of electrical machines. *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2(2):1326–1329, July 1997.
- [Sadiku01] Sadiku, M. *Numerical Techniques in Electromagnetics*. CRC, USA, 2001.
- [Schmidt03] Schmidt, E. Finite element calculation of eddy current losses in the tank wall of power transformers. *IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, 2:1167–1173, Vancouver , Canada , June 2003.
- [Schwab88] Schwab, A. *Field Theory Concepts*. Springer, Germany, 1988.
- [Seker02] Seker, S. S., Dermirbilek, B. O., y Morgul, A. Sar assessment in a human head model exposed to radiation from mobile phone using fem. *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 2(2):662–666, Sorrento, Italy, August 2002.
- [She94] She, J. y Mittra, R. A finite element cavity resonance method for waveguide and microstrip line discontinuity problems. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 42(3):433–440, March 1994.
- [Silvester73] Silvester, P. y Konrad, A. Analysis of transformer leakage phenomena by high-order finite elements. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 92(6):1843–1855, November 1973.

- [Silvester96] Silvester, P. P. y Ferrary, R. *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge University Press, USA, 1996.
- [Slemon53] Slemon, G. R. Equivalent circuits for transformers and machines including non-linear effects. *Institution Monograph*, 68:129–143, 1953.
- [Solin06] Solin, P. *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*. Wiley Interscience, USA, 2006.
- [Tan89] Tan, G. L., Yuan, X. L., Zhang, Q. M., y Ku, W. H. Two-dimensional semiconductor device analysis based on new finite-element discretization employing the s-g scheme. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, 8(5):468–478, May 1989.
- [Trejo02] Trejo, S. U. *Aplicación de El Método del Elemento Finito a Máquinas Eléctricas Con el Uso de Quickfield, Tesis de Licenciatura*. FIE-UMSNH, 2002.
- [Turner56] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., y Topp, L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronautical Science*, 23:805–823, 1956.
- [Van83] Van, D. B. P. M., Hoop, A. D., Segal, A., y Praagman, N. A computational model of the electromagnetic heating of biological tissue with application to hyperthermic cancer therapy. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 30(12):797–805, December 1983.
- [Wang01] Wang, H. y Butler, K. L. Finite element analysis of internal winding faults in distribution transformers. *Transactions on Power Delivery*, 16(3):422–428, July 2001.
- [Yun90] Yun, T. Q., Qiu, Q. J., y Zi-Hong, X. Numerical calculation of short circuit electromagnetic forces on the transformer winding. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2):1039–1041, March 1990.

-
- [Zakharia04] Zakharia, Y. Narrow circle sector-finite-element for solution of waveguide problems. *Modern Problems of Radio Engineering*, 10:135–137, February 2004.
- [Zhizhen01] Zhizhen, L., Xuguo, W., y Qingfu, L. Modularized program to calculate magnetic leakage field and stray losses in a power transformer. *IEEE Proceedings of the Eighth International Conference on Electrical Machines and Systems*, 1:239–241, Shenyang, China, August 2001.
- [Zienkiewicz71] Zienkiewicz, O. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw Hill, USA, 1971.
- [Zizek02] Zizek, F., Jelinek, Z., Timoransky, Z., Piel, H., Chovanec, F., Mozola, P., y Polak, M. End winding region configuration of an hts transformer. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 12(1):904–906, March 2002.