
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

DINÁMICA DE REDES

NEURONALES DE HOPFIELD

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN FÍSICA

PRESENTA

FRANCISCO REYNAGA GUTIÉRREZ

ASESOR

DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR

Morelia, Michoacán, Agosto 2009

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Redes binarias	4
1.2. Mecánica Estadística de redes binarias	6
1.2.1. Análisis de la estática	7
1.2.2. Análisis de la dinámica	10
1.3. Introducción de desorden	13
1.4. Redes de espines	15
1.4.1. Modelo de espines Curie-Weiss	16
1.4.2. Modelo Sherrington-Kirkpatrick	17
1.5. Redes de neuronas	19
1.5.1. Modelo de neuronas Curie-Weiss	19
1.5.2. Modelo Little-Hopfield	20
1.6. Análisis señal-ruido	22
1.6.1. Fuentes de las correlaciones	25
1.7. Estructura de la tesis	27
2. Modelo Little-Hopfield	29
2.1. Introducción	29
2.2. Modelo	30
2.3. Análisis señal-ruido	32

2.3.1.	Dinámica efectiva	37
2.4.	Análisis numérico	38
2.4.1.	Método Eissfeller-Opper	39
2.4.2.	Resultados	41
3.	Modelo Ashkin-Teller	46
3.1.	Introducción	46
3.2.	Modelo	47
3.3.	Análisis señal-ruido	51
3.4.	Dinámica efectiva	56
3.5.	Análisis numérico	59
3.5.1.	Método Eissfeller-Opper	59
3.5.2.	Resultados	62
4.	Otras arquitecturas	70
4.1.	Introducción	70
4.2.	Definiciones	71
4.3.	Redes neuronales que presentan dilución al extremo	72
4.4.	Redes neuronales que recuperan secuencias de patrones	78
A.	Herramientas matemáticas	86
A.1.	Ley de números grandes (LNG)	86
A.2.	Teorema del límite central (TLC)	86
A.3.	Integrales Gaussianas	87
A.4.	Método punto-silla	87
B.	Análisis con funciones generadoras	89
B.1.	La función generadora	89
B.2.	Evaluación de la función generadora	91
B.3.	Promedio sobre el desorden	96
B.4.	Método punto-silla	98

B.5. Significado físico	100
B.6. Dinámica efectiva	104
C. Ecuaciones de los parámetros de orden	107
C.1. Ecuaciones explícitas	107
C.2. Primeros pasos temporales	109

Capítulo 1

Introducción

;;

Nuestro cerebro es un sistema complejo que está conformado por 10^{11} células nerviosas de muchos tipos llamadas neuronas. Redes, en forma de árbol, de fibras nerviosas llamadas *dendritas* se conectan al *soma* o cuerpo de la célula donde se localiza el núcleo de la célula. Del cuerpo de la célula sale una fibra larga llamada *axón*, la cual eventualmente se divide en ramas que conectan a la célula con alrededor de otras 10^4 células [1]. Al final de las ramas del axón se encuentran las *sinapsis* que tienen el papel de transmitir señales a otras neuronas. La transmisión de una señal desde una célula a otra en una sinapsis es un proceso químico complejo. El efecto de este proceso es elevar o bajar el potencial eléctrico dentro del cuerpo de la célula receptora. Si el potencial alcanza un umbral, un pulso de magnitud y duración fija es enviado a través del axón. Entonces decimos que la célula se encuentra en un estado “activo”. El pulso viaja a través de las ramas del axón a otras neuronas. Después de enviar el pulso, la neurona tiene que esperar un tiempo antes de poder enviar otro, así que pasa a un estado “inactivo”. Donald Hebb [2] postuló que la eficacia de una conexión sináptica puede ser ajustada si su nivel de actividad cambia. Una

neurona que a través de la sinapsis estimula en forma repetida y persistente a otra neurona induce un aumento de la eficacia sináptica.

Un sistema complejo como el cerebro donde se tiene un número muy grande de neuronas interactuando es un sistema propicio para analizarse utilizando los métodos de la mecánica estadística. Sin embargo, no es factible resolver analíticamente un modelo de una red neuronal con todas las complejidades de una red neuronal biológica. Por tanto, los modelos de redes neuronales que se han implementado son muy simples, incorporando solamente las características que se consideran esenciales, con la esperanza de capturar el comportamiento macroscópico de las redes neuronales biológicas. McCulloch y Pitts [3] propusieron en 1943 un modelo simple de la evolución de una neurona

$$\sigma_i(t+1) = \Theta \left(\sum_j J_{ij} \sigma_j(t) - \mu_i \right). \quad (1.1)$$

Si el estado de la neurona σ_i es 1 se dice que está “activa” e “inactiva” si el estado es 0. El tiempo t se toma como una cantidad discreta. El estado de una neurona σ_j conectada a la neurona σ_i contribuye con un peso J_{ij} a la suma formada por la contribución de todas las neuronas conectadas a la neurona σ_i . La suma se introduce a una función de Heaviside, de forma que la salida de la neurona es 1 si el valor de la suma supera o iguala un umbral μ_i y es 0 en el caso contrario. Los pesos J_{ij} representan las sinapsis entre neuronas. Una sinapsis tiende a activar una neurona cuando su valor es positivo y la tiende a desactivar si el valor es negativo.

En [4] el modelo de McCulloch-Pitts se reformuló como un sistema magnético de espines. En [5], con base en las ideas sobre el aprendizaje del cerebro descritas por Hebb, se formuló una teoría estadística usando técnicas de mecánica estadística. En esta línea de investigación otro trabajo importante se presentó en [6]. Hopfield, en 1982, hizo un paso importante en la formulación de las redes neuronales como un problema de mecánica estadística, introduciendo una

función de energía y enfatizando que estas redes son sistemas dinámicos cuyos atractores corresponden a patrones o memorias almacenados en la red [7]. Por tanto, podemos visualizar una hipersuperficie de la energía donde los mínimos de la energía corresponden a los atractores de la red de Hopfield.

El tipo de redes neuronales que vamos a estudiar en esta tesis, son generalizaciones al modelo presentado por Hopfield en 1982. Las sinapsis de la red se determinan mediante un algoritmo, inspirado en las ideas de Hebb, que tiene como propósito hacer coincidir los atractores de la red neuronal con los patrones que se desea que la red recupere. La red se inicializa en un estado que consiste de una versión ruidosa de uno de los patrones que se quiere recuperar. Ya que los patrones representan atractores de la red, el patrón será recuperado siempre que el estado inicial se encuentre dentro de la *cuenca de atracción* (basin of attraction).

Hay varias características de una red neuronal que se buscan obtener mediante un análisis estadístico. En la estática, por ejemplo, se busca obtener las distintas fases de la red neuronal, los valores de los parámetros del sistema donde se registran los cambios de fase, determinar si existe una fase de recuperación de patrones y los valores de los parámetros del sistema donde se encuentra esta fase. En relación a la dinámica, por ejemplo, se busca determinar la cuenca de atracción del sistema y la forma en que el sistema converge a un estado estacionario.

Como hemos visto en los párrafos anteriores las redes de neuronas y las redes de espines tienen muchas similitudes. Por tanto, en las siguientes secciones definiremos en forma general los métodos de análisis de redes binarias (redes cuyas unidades tienen dos estados) que nos servirán para describir y estudiar redes de espines y neuronas.

1.1. Redes binarias

Queremos estudiar una red que consiste de N unidades binarias $\sigma_i \in S$ con $S = \{-1, 1\}$. Un estado de la red es descrito por

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \{\sigma_i(t)\} \quad i \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.2)$$

Cada unidad está conectada con todas las unidades restantes por acoplamientos J_{ij} que, en general, pueden ser parámetros aleatorios seleccionados desde una distribución de probabilidad $P(\mathbf{J})$, con $\mathbf{J} = \{J_{ij}\}$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$. El campo local de la unidad i se define por

$$h_i(t) = \sum_j J_{ij} \sigma_j(t) + \theta_i(t). \quad (1.3)$$

Los campos externos $\theta_i(t)$ se introducen al campo local con el fin de estudiar la respuesta del sistema ante perturbaciones en el análisis de la dinámica, así que, los omitiremos mientras no sean necesarios.

Todas las unidades se actualizan de acuerdo a la siguiente regla estocástica [8]

$$\sigma_i(t+1) = \text{sgn}(h_i(t) + T\eta_i(t)). \quad (1.4)$$

El parámetro T es introducido para controlar la magnitud del ruido y representa la temperatura. En el límite $T \rightarrow 0$, la regla de actualización se convierte en un proceso determinista $\sigma_i(t+1) = \text{sgn}(h_i(t))$, mientras en el límite $T \rightarrow \infty$, en un proceso completamente aleatorio. El comportamiento estocástico del sistema tiene su origen en las variables $\eta_i(t)$ distribuidas con la siguiente probabilidad

$$P(\eta_i(t)) = \frac{1}{2} [1 - \tanh^2(\eta_i(t))]. \quad (1.5)$$

Se puede derivar de (1.4)-(1.5) una descripción equivalente de la dinámica en términos de probabilidades de transición

$$P(\sigma_i(t+1)|\sigma_{(i)}(t), \mathbf{J}) = \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh(\beta h_i(t))]. \quad (1.6)$$

El parámetro positivo β representa el inverso de la temperatura $\beta = 1/T$. La dinámica descrita en las ecuaciones anteriores representa un proceso de Markov. Es decir, el estado del sistema a un tiempo $t+1$ depende solamente del estado del sistema al tiempo t (también puede depender de un estímulo externo). Por lo tanto, la probabilidad de transición del sistema está dada por

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\sigma}(t+1)|\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{J}) &= \prod_{i=1}^N P(\sigma_i(t+1)|\sigma_{(i)}(t), \mathbf{J}) \\ &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh(\beta h_i(t))]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

La probabilidad del sistema a un tiempo t es

$$P(\boldsymbol{\sigma}(t)|\mathbf{J}) = \sum_{\boldsymbol{\sigma}(t-1)} P(\boldsymbol{\sigma}(t)|\boldsymbol{\sigma}(t-1), \mathbf{J})P(\boldsymbol{\sigma}(t-1)|\mathbf{J}). \quad (1.8)$$

La actualización de las unidades de la red se puede hacer de dos formas. La actualización es secuencial cuando en cada paso temporal se actualiza solamente una neurona a la vez, escogida de forma aleatoria. Es decir, en promedio todas las neuronas se han actualizado una vez después de repetir el proceso N veces. Por tanto, la escala de tiempo característica de un evento microscópico es $\Delta = 1/N$. En este caso la dinámica se puede expresar de forma que el tiempo es continuo cuando el número de neuronas tiende a infinito. Por otra parte, la actualización es paralela cuando en cada paso temporal todas las neuronas se actualizan simultáneamente. Por tanto, la escala de tiempo característica es $\Delta = 1$. Desde el punto de vista biológico la actualización secuencial parece más atractiva, sin embargo hay una motivación por estudiar la actualización paralela ya que se tiene evidencia que algunas partes del cerebro trabajan de forma sincrónica.

Por lo general, el estudio de la estática en redes binarias se hace utilizando una actualización secuencial, ya que matemáticamente es más sencillo de implementar el análisis. Por otra parte, el estudio de la dinámica es más sencillo cuando el modelo en cuestión tiene actualización paralela. Por tanto, en los siguientes capítulos de esta tesis, donde el análisis está enfocado a la dinámica, estudiaremos solamente modelos con actualización paralela.

En las siguientes secciones, presentaremos las características principales de los modelos más representativos en redes de espines y neuronas. Haciendo $J_{ii} = 0$, $i \in \{1, \dots, N\}$ en los modelos de actualización paralela, los resultados encontrados en la literatura coinciden cualitativamente para ambos tipos de actualización. Para algunos modelos, por ejemplo en el modelo con dilución extrema simétrica presentado en el último capítulo, la coincidencia también es cuantitativa.

En esta tesis, el análisis de las redes siempre se hace en el *límite termodinámico* $N \rightarrow \infty$. Todas las arquitecturas analizadas tienen conectividad infinita. Es decir, el número promedio de acoplamientos conectados a una unidad es infinito. Estudiaremos arquitecturas *completamente conectadas* con sinapsis simétricas y asimétricas, es decir, cada unidad de la red está conectada por acoplamientos diferentes de cero con el resto de las unidades. También estudiaremos arquitecturas con dilución al extremo, tanto simétrica como asimétrica. La dilución extrema representa un límite especial de dilución de una red donde la conectividad promedio por unidad es infinita, pero la distancia promedio entre dos unidades cualquiera tiende a infinito.

1.2. Mecánica Estadística de redes binarias

La mecánica estadística es una herramienta matemática que sirve para estudiar las propiedades estadísticas de sistemas compuestos por muchas entidades que interaccionan entre sí. La idea principal de mecánica estadística es derivar

propiedades de observables macroscópicos, en el límite termodinámico, iniciando desde sus propiedades microscópicas.

Un análisis completo de una red binaria involucra el estudio de la estática y la dinámica de la red. En esta sección vamos a describir brevemente las herramientas estándar para estudiar la estática y la dinámica de redes binarias. En ambos casos el punto de partida es la definición de una función generadora desde la cual se obtienen los parámetros de orden relevantes por medio de diferenciación de la función generadora o funciones construídas a partir de ésta.

1.2.1. Análisis de la estática

El estudio de la estática de redes binarias nos permite determinar características importantes como, las diferentes fases que puede presentar un sistema en equilibrio y los valores de los parámetros del sistema donde se dan los cambios de fase. En [9] se puede ver una revisión de los métodos utilizados en la estática de redes neuronales. En el siguiente análisis denotaremos a los estados de un proceso estacionario como $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$. Se puede demostrar que en un sistema finito que evoluciona como un proceso de Markov con probabilidades de transición estrictamente positivas, la probabilidad del estado estacionario $P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{J})$ existe y es única. Si adicionalmente se cumple la condición de *balance detallado*, implicando que no hay corrientes de probabilidad en el sistema, el estado estacionario representa un estado de equilibrio. Para cumplir con la condición de balance detallado, una red binaria con actualización paralela debe tener acoplamientos simétricos $J_{ij} = J_{ji}$ [10, 11]. Matemáticamente, la condición de balance detallado implica

$$P(\boldsymbol{\sigma}''|\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{J})P(\boldsymbol{\sigma}'|\mathbf{J}) = P(\boldsymbol{\sigma}'|\boldsymbol{\sigma}'', \mathbf{J})P(\boldsymbol{\sigma}''|\mathbf{J}). \quad (1.9)$$

Suponiendo que los acoplamientos son simétricos, obtenemos

$$P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{J}) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^N \cos(\beta h_i) \equiv \frac{1}{Z} \exp(-\beta H) \quad (1.10)$$

con

$$h_i = \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma_j, \quad (1.11)$$

$$H = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^N \log [2 \cosh(\beta h_i)], \quad (1.12)$$

$$Z = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \exp(-\beta H). \quad (1.13)$$

La cantidad H representa un pseudo-Hamiltoniano del sistema. La razón por la que no es un Hamiltoniano real es que, en principio, un Hamiltoniano no debería depender de la temperatura. Sin embargo, introduciendo variables auxiliares se puede transformar en un Hamiltoniano real, permitiendo utilizar las herramientas de análisis de la estática. Es decir,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \prod_{i=1}^N 2 \cosh\left(\beta \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma_j\right) \\ &= \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \sum_{\tau_1 \dots \tau_N} \exp\left(-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma_i \tau_j\right) \\ &= \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \sum_{\tau_1 \dots \tau_N} \exp(-\beta H') \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde

$$H' = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma_i \tau_j, \quad (1.15)$$

es un Hamiltoniano real.

En un sistema con actualización secuencial para cumplir la condición de balance detallado, adicionalmente a la simetría en los acoplamientos, se requiere que $J_{ii} = 0$. Bajo estas condiciones se obtiene el siguiente Hamiltoniano

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j. \quad (1.16)$$

A partir de $P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{J})$ podemos obtener todos los promedios relevantes del sistema en el equilibrio. Denotaremos $\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle$ al promedio de una función $f(\boldsymbol{\sigma})$ sobre los estados del sistema en equilibrio. Es decir,

$$\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{J}) f(\boldsymbol{\sigma}). \quad (1.17)$$

Usando el Hamiltoniano del sistema es posible definir una función generadora

$$\begin{aligned} Z[\boldsymbol{\Psi}] &= Z \left\langle \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^N \Psi_i \sigma_i\right) \right\rangle \\ &= Z \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{J}) \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^N \Psi_i \sigma_i\right) \\ &= \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \exp(-\beta H - \beta \sum_{i=1}^N \Psi_i \sigma_i). \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde $\boldsymbol{\Psi} = \{\Psi_i\}$, $i \in \{1, \dots, N\}$. A esta función generadora se le llama *función de partición*. Se han introducido (pequeños) campos externos auxiliares Ψ_i con el fin de hacer perturbaciones al sistema, los cuales se hacen cero después de evaluar los promedios relevantes. Nótese que $Z[\mathbf{0}] = Z$. A partir de la función de partición podemos definir la *energía libre*

$$F[\boldsymbol{\Psi}] = -T \log Z[\boldsymbol{\Psi}]. \quad (1.19)$$

Podemos evaluar varios promedios relevantes de unidades de la red, por diferenciación de la energía libre

$$\langle \sigma_i \rangle = - \lim_{\Psi_i \rightarrow 0} \frac{\partial F[\boldsymbol{\Psi}]}{\partial \Psi_i}, \quad (1.20)$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = - \lim_{\Psi_{ij} \rightarrow 0} \frac{\partial F[\boldsymbol{\Psi}]}{\partial J_{ij}}. \quad (1.21)$$

Un análisis de la estática de un modelo de red binaria necesita la definición de parámetros de orden, los cuales son cantidades macroscópicas que se pueden construir con la ayuda de la energía libre. Un cambio en el valor de estos parámetros de orden nos permite distinguir las fases de un sistema. Por lo general, los parámetros de orden tienen un valor cero en algunas fases y diferente de cero en otras. El estudio de los parámetros de orden nos permite crear el diagrama de fase del modelo de red. Este diagrama consiste en un hiperplano de $n - 1$ dimensiones, siendo n el número de parámetros constantes del sistema (como la temperatura). El estudio de la estática también consiste en determinar el tipo de transiciones de fase que se presentan en el diagrama de fase.

Decimos que un sistema es *ergódico* cuando tienen una solución estacionaria única, es decir, cuando alcanza el mismo estado estacionario independientemente de las condiciones iniciales. Otra forma de definir ergodicidad consiste en asumir que el promedio de algún observable sobre el tiempo y el promedio sobre el ensamble estadístico son los mismos. Es decir, si queremos obtener el promedio de un observable de un sistema, se supone que el promedio sobre las muestras tomadas de una realización del sistema durante un tiempo largo es equivalente al promedio sobre muestras de distintas realizaciones del sistema. En esta tesis estudiaremos sistemas desordenados de tamaño infinito y como se podrá ver, siempre se encuentra algún tipo de *rompimiento de ergodicidad*.

1.2.2. Análisis de la dinámica

La importancia del estudio de la dinámica reside en la posibilidad de analizar las cuencas de atracción y otras propiedades dinámicas, algo que no se puede determinar estudiando solamente la estática. De hecho, varios modelos de redes neuronales, tales como los que recuperan secuencias de patrones que analizaremos en el último capítulo, no tienen un estado de equilibrio. Por lo tanto, es necesario hacer uso de herramientas para estudiar sistemas fuera del equilibrio.

El estudio de la dinámica mediante un análisis con funciones generadoras (AFG) fue introducido al campo de la mecánica estadística en [12, 13]. La primera aplicación del método AFG a las redes neuronales se reportó en [14] para el modelo Little-Hopfield completamente conectado en el caso de temperatura cero. La solución para el caso de temperatura finita fue dada en [15]. La aplicación del método AFG a modelos de redes neuronales con dilución extrema, para los casos de dilución simétrica y asimétrica y actualización paralela, se reportó en [16, 17]. Una revisión del método, para los casos completamente conectado y con dilución, se encuentra en [18]. Este método también se ha aplicado a modelos que recuperan patrones secuencialmente [19, 20]. Los resultados obtenidos por este método demuestran la existencia de características especiales en modelos que presentan simetría en las sinapsis, ausentes en modelos con sinapsis asimétricas. La diferencia entre esos modelos se puede ver en la forma que adquiere el campo local en el límite termodinámico; los modelos que tienen simetría en las sinapsis demuestran un término de autointeracción en el campo local, el cual no se encuentra en los modelos con sinapsis asimétricas.

En el siguiente análisis denotaremos las trayectorias del sistema desde el tiempo $t = 0$ hasta $t = t_f$, $t_f > 0$, como $\boldsymbol{\sigma} = \{\boldsymbol{\sigma}(0), \dots, \boldsymbol{\sigma}(t_f)\}$. La probabilidad $P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{J})$ de encontrar una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(0) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(1) \rightarrow \dots \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(t_f)$ tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{J}) &= P(\boldsymbol{\sigma}(0)) \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^{t_f-1} P(\sigma_i(t+1)|\boldsymbol{\sigma}_{(i)}(t), \mathbf{J}) \\ &= P(\boldsymbol{\sigma}(0)) \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^{t_f-1} \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh(\beta h_i(t))]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

A partir de $P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{J})$ podemos obtener todos los promedios relevantes sobre trayectorias. Denotaremos $\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle$ al promedio de una función $f(\boldsymbol{\sigma})$ sobre trayectorias del sistema. Es decir,

$$\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle = \sum_{\boldsymbol{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\boldsymbol{\sigma}(t_f)} P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{J}) f(\boldsymbol{\sigma}). \quad (1.23)$$

Alternativamente, la función generadora $Z[\boldsymbol{\Psi}]$ produce todas las estadísticas relevantes con resultados equivalentes

$$\begin{aligned} Z[\boldsymbol{\Psi}] &= \left\langle \exp\left(-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{t_f} \Psi_i(t) \sigma_i(t)\right) \right\rangle \\ &= \sum_{\boldsymbol{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\boldsymbol{\sigma}(t_f)} P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{J}) \exp\left(-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{t_f} \Psi_i(t) \sigma_i(t)\right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

La función generadora nos permite obtener las estadísticas de unidades de la red. Derivando la función generadora respecto a los campos externos $\{\Psi_i\}$ se obtienen los promedios relevantes, incluyendo aquellos que involucran estados de la red a distintos tiempos,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j(t) \rangle &= i \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial Z[\boldsymbol{\Psi}]}{\partial \Psi_j}, \\ \langle \sigma_i(t) \sigma_j(t') \rangle &= - \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 Z[\boldsymbol{\Psi}]}{\partial \Psi_i(t) \partial \Psi_j(t')}, \\ \partial \langle \sigma_i(t) \rangle / \partial \theta_j(t') &= i \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 Z[\boldsymbol{\Psi}]}{\partial \Psi_i(t) \partial \theta_j(t')}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Al igual que en la estática, es necesario definir parámetros de orden para cada modelo que se está estudiando. Para modelos sencillos es suficiente parámetros de orden que incluyen estados de la red a un tiempo. Sin embargo, en general, el estudio detallado de modelos complejos requiere la definición de parámetros de orden a dos tiempos, tales como las funciones de correlación entre estados de la red a tiempos diferentes y funciones respuesta midiendo el comportamiento del sistema ante perturbaciones.

1.3. Introducción de desorden

Si los acoplamientos J_{ij} de una red binaria son seleccionados desde una distribución de probabilidad, se dice que el sistema es *desordenado*. La introducción de este desorden en los modelos tiene implicaciones muy fuertes en la dificultad del análisis matemático de estos sistemas. En mecánica estadística se dice que un sistema presenta *desorden templado* (quenched disorder) cuando los elementos que forman el desorden son aleatorios, pero su valor está fijo durante el proceso de observación. Por otra parte, se dice que hay *desorden recocido* (annealed disorder) cuando los elementos que forman el desorden son aleatorios, pero pueden evolucionar. En nuestro caso los acoplamientos se mantienen fijos y por tanto el desorden es templado. Las unidades de la red representan un ejemplo de desorden recocido, ya que pueden cambiar sus valores con el tiempo.

No es deseable que la teoría desarrollada para estudiar sistemas desordenados y sus predicciones dependan de una realización particular del desorden. Nos interesan cantidades macroscópicas, solamente dependientes de las propiedades estadísticas del desorden. Estas cantidades deberán tener características especiales para ser de utilidad. Se requiere que sean cantidades *auto-promediadas*. En un sistema físico macroscópico, esta suposición nos dice que el valor de un observable del sistema coincide con el valor del observable promediado sobre todas las realizaciones del desorden. Por lo tanto, solamente se necesita obtener mediciones de una muestra. Los resultados de la medición deben coincidir con los resultados de cualquier otra muestra. Desde el punto de vista teórico lo anterior implica que solamente es necesario obtener expresiones para observables macroscópicos promediados sobre el desorden.

Para obtener predicciones teóricas de un observable macroscópico, que se supone auto-promediado, se requiere realizar dos promedios. En la estática, se obtiene primeramente el promedio del observable macroscópico sobre los estados de equilibrio dada una realización del desorden y posteriormente un promedio

sobre el desorden. En la dinámica, se obtiene primeramente el promedio del observable macroscópico sobre las trayectorias dada una realización del desorden y posteriormente un promedio sobre el desorden. En los métodos estándar de la mecánica estadística presentados en la sección anterior, el promedio sobre el desorden se realiza de forma diferente a los promedios sobre los estados de equilibrio o las trayectorias. En la estática, se promedia sobre el desorden la energía libre y, en la dinámica, se promedia sobre el desorden la función generadora. La realización de estos promedios requiere de nuevas técnicas que complican mucho el problema matemáticamente. Una de las ventajas del método señal-ruido utilizado en esta tesis es que todos los promedios se realizan de la misma forma, usando el teorema del límite central o la ley de números grandes según sea el caso.

En el estudio de la estática de redes de espines con conectividad finita se ha demostrado que la energía libre es una cantidad auto-promediada, sin embargo, la función de partición no cumple esta condición [21]. Para sistemas con conectividad infinita esta condición en la energía libre no se ha verificado teóricamente, sin embargo existen resultados numéricos que soportan esta suposición [22]. El método utilizado en la estática para evaluar el promedio de la energía libre sobre el desorden, se le llama método de *réplicas* [23, 24]. En la dinámica, se ha demostrado que la función generadora es una cantidad auto-promediada [13]. En este caso no es necesario utilizar el método de réplicas, la estrategia que se sigue consiste en la introducción de variables auxiliares, usando la forma integral de la función Delta, con el fin de facilitar la evaluación del promedio de la función generadora sobre el desorden.

Una de las consecuencias más importantes de la introducción de desorden es la aparición del fenómeno conocido como *frustración*. Como se ha visto anteriormente, en las redes binarias, si es posible definir un Hamiltoniano, el estado de equilibrio representa un mínimo de la energía. Por lo tanto, un sistema siempre evoluciona a un estado de mínima energía. Así que, dos unidades de la red

unidas por un acoplamiento positivo tienden a un estado con el mismo signo, por otra parte, cuando el acoplamiento es negativo las unidades tienden a un estado con signo contrario. El fenómeno de frustración ocurre en configuraciones de la red donde no se puede cumplir con todos los requerimientos que imponen los acoplamientos al mismo tiempo. En este caso, el sistema no puede evolucionar a un estado de mínima energía global y queda atrapado en un mínimo local. Solamente el ruido térmico permite al sistema escapar de este mínimo local. La frustración sólo aparece en arquitecturas de red que permiten *bucles de retroalimentación*. A su vez, la retroalimentación solamente se puede dar cuando los acoplamientos de la red son simétricos, como podremos ver en el cuarto capítulo de esta tesis. En una red binaria finita, una de las consecuencias de la frustración es la aparición de muchos mínimos locales de distintas alturas en la energía. Por tanto, un sistema para ciertos valores de sus parámetros, converge muy lentamente al equilibrio ya que puede quedar atrapado en estos mínimos locales antes de encontrar el mínimo global. En el límite termodinámico, el número de mínimos locales es infinito y el sistema, en este caso, no converge al equilibrio en un tiempo finito.

1.4. Redes de espines

Un sistema que nos interesa mucho en esta tesis debido a las similitudes que tiene con las redes neuronales de Hopfield son las redes de espines. Estas redes surgieron por la necesidad de estudiar las propiedades macroscópicas de materiales ferromagnéticos originadas por las interacciones entre los espines de los átomos que los conforman. El análisis de estos sistemas se puede efectuar con las herramientas de mecánica estadística. Los resultados expuestos corresponden al límite termodinámico.

1.4.1. Modelo de espines Curie-Weiss

Los modelos de redes binarias más sencillos de analizar tienen interacción constante. El modelo Curie-Weiss consiste de N espines $\sigma_i \in S$ con $S = \{-1, 1\}$. Cada espín está conectado con el resto de los espines por acoplamientos constantes y positivos

$$J_{ij} = \frac{J}{N} \quad J > 0,$$

con $J_{ii} = 0$. Para describir el estado de equilibrio de este sistema es suficiente el conocimiento de la magnetización $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i \rangle$. El estudio de la estática de este modelo predice que hay un cambio de fase a una temperatura crítica $T_c = J$. Para $T > T_c$ se tiene una magnetización $m = 0$, lo que significa que los espines de la red se encuentran en completo desorden. A esta fase se le llama *paramagnética*. Por otra parte, para $T < T_c$ la magnetización adquiere un valor finito $m \neq 0$, lo que significa que hay una alineación general de los espines en la misma dirección. Esta fase se le conoce como *ferromagnética*.

En la fase paramagnética hay una solución estable, $m = 0$. Por otra parte, en la fase ferromagnética hay dos soluciones estables, $m = \pm |m^*|$, con m^* una cantidad que depende de la temperatura. Se puede demostrar que m^* disminuye suavemente al aumentar la temperatura, siendo $m^* = 1$ para $T = 0$ y $m^* = 0$ para $T = T_c$. La magnetización del sistema dependerá de las condiciones iniciales. Por tanto, en la fase ferromagnética hay un rompimiento de la ergodicidad.

En un sistema finito, las barreras que separan los mínimos de la energía del sistema son finitas, sin embargo en un sistema donde $N \rightarrow \infty$, las barreras tienen altura infinita. Por tanto, dadas las condiciones iniciales, para un sistema infinito en la fase ferromagnética, la evolución del sistema queda restringida a un subespacio de la hipersuperficie de la energía. Así que, el sistema es ergódico en este subespacio una vez determinadas las condiciones iniciales. Se dice, en

este caso, que tenemos rompimiento trivial de la ergodicidad.

Para describir la dinámica del sistema desde un estado inicial definimos la magnetización dependiente del tiempo $m(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i(t) \rangle$. El estudio de la dinámica de este modelo predice que para $T > T_c$ la magnetización tiende a cero al evolucionar el sistema, independientemente de las condiciones iniciales. Por otra parte, para $T < T_c$ el valor al cual converge la magnetización depende de las condiciones iniciales.

1.4.2. Modelo Sherrington-Kirkpatrick

En los años setenta se descubrió un comportamiento nuevo para bajas temperaturas en metales que presentan cierta concentración de átomos con momentos magnéticos. Estos átomos se encuentran dispersos dentro del metal de forma aleatoria y fija. La nueva propiedad consiste que a bajas temperaturas los momentos magnéticos se encuentran orientados aleatoriamente pero congelados en el tiempo. De forma análoga, los átomos en un vidrio están fijos pero localizados en forma aleatoria; por esta analogía, a estos materiales se les llamó *vidrios de espín*. Los grados de libertad magnéticos interactúan entre sí de forma complicada. Pero el resultado efectivo es que la interacción tiende a alinear o desalinear los momentos magnéticos dependiendo de la distancia. Ya que las posiciones de los átomos no cambian con el tiempo, los acoplamientos son aleatorios, fijos en la evolución del sistema e independientes de otros parámetros como la temperatura y los campos externos.

El modelo Sherrington-Kirkpatrick intenta capturar las principales características de los vidrios de espín [25]. En este modelo los acoplamientos entre los espines son variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas. Estas variables tienen distribución Gaussiana con promedio $E(J_{ij}) = J_0$ y varianza $E(J_{ij}^2) = J^2$

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp \left[-\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2} \right] \quad i < j,$$

con $J_0 = \tilde{J}_0/N$, $J^2 = \tilde{J}^2/N$, $J_{ij} = J_{ji}$ y $J_{ii} = 0$ para toda i .

El análisis de la estática de este modelo es complejo. Para describir el equilibrio son necesarios dos parámetros de orden, la magnetización m y el traslape entre espines q . En una primera aproximación, llamada aproximación de *simetría de réplica*, se demuestra que los parámetros necesarios se definen por $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i \rangle$ y $q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i \rangle^2$. En el diagrama de fase, se presentan tres fases: la fase paramagnética, la fase ferromagnética y una fase adicional llamada *vidrio-espín*. La fase paramagnética se puede encontrar para $m = q = 0$, es decir, el desorden es completo. La fase ferromagnética se encuentra cuando T tiene un valor pequeño y α grande, con los parámetros de orden dados por $m \neq 0$ y $q \neq 0$, es decir, los espines tienden a alinearse en la misma dirección (igual al signo de J_0). Por último, la fase vidrio-espín se encuentra cuando T y α tienen valores pequeños, con los parámetros de orden dados por $m = 0$ y $q \neq 0$, es decir, no hay un orden global como en la fase ferromagnética, sin embargo, localmente sí lo hay.

Desde el punto de vista de la energía, en la fase vidrio-espín, también encontramos mínimos de la energía separados por barreras de energía infinita, pero, adicionalmente se tiene un número infinito de mínimos locales con barreras de altura finita entre ellos. Estos mínimos locales surgen de la alta frustración que presenta este modelo. Por tanto, una vez fijadas las condiciones iniciales el sistema queda restringido a un subespacio de la hipersuperficie de la energía, sin embargo, dentro de este subespacio el sistema no es ergódico ya que se presenta un número infinito de mínimos locales con barreras de distintas alturas y el sistema no puede alcanzar el equilibrio en un tiempo finito.

Para describir la dinámica del sistema desde un estado inicial definimos la magnetización dependiente del tiempo $m(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i(t) \rangle$. Para valores de

los parámetros correspondientes a la fase paramagnética, la magnetización converge a $m = 0$ independientemente de las condiciones iniciales. Si los valores corresponden a la fase ferromagnética tenemos una dependencia en las condiciones iniciales. Por último, para valores de los parámetros en la fase vidrio-espín la convergencia del sistema a un estado estacionario es muy lenta, la magnetización converge a cero lentamente pero sin alcanzar un valor final en un tiempo finito.

1.5. Redes de neuronas

Las redes neuronales que nos interesa estudiar en esta tesis son redes de binarias. En estas redes cada unidad de la red representa una neurona con dos posibles estados y los acoplamientos representan sinapsis. Cada neurona está conectada con el resto de las neuronas por sinapsis que siguen la regla de Hebb. El análisis de estos sistemas se puede efectuar con las herramientas de mecánica estadística. Los resultados expuestos corresponden al límite termodinámico.

1.5.1. Modelo de neuronas Curie-Weiss

Como se ha visto en la fase ferromagnética del modelo de espines el estado final de la red depende de las condiciones iniciales del sistema. Para $T = 0$, la magnetización puede ser $m = 1$ para ciertas condiciones iniciales. Esta magnetización implica que todos los espines de la red están alineados en la misma dirección, con $\sigma_i = +1$, $i \in \{1, \dots, N\}$. En forma análoga, podemos definir una red neuronal que almacena solamente un patrón ξ , cuyos elementos son iguales a uno, es decir, $\xi = \{\xi_i = 1\}$, $i \in \{1, \dots, N\}$. De acuerdo a la regla de Hebb, las sinapsis de la red serán constantes y están dadas por $J_{ij} = \xi_i \xi_j / N = 1/N$. Es decir, el modelo de la red neuronal es equivalente al modelo de espines Curie-Weiss para $J = 1$.

El parámetro de orden importante en el estudio de la estática de este modelo

es el traslape entre el estado de la red y el patrón almacenado $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i \rangle$. Nótese que en este caso el traslape es equivalente a la magnetización del modelo de espines. La red neuronal también tiene dos fases y el cambio entre las fases se da a una temperatura crítica $T_c = 1$. En la fase paramagnética ($T > 1$), todas las neuronas se encuentran en completo desorden en el equilibrio, por tanto, el sistema no puede recuperar el patrón almacenado. Por otra parte en la fase ferromagnética ($T < 1$), para ciertas condiciones iniciales, la red es capaz de recuperar el patrón almacenado.

Para describir la dinámica del sistema desde un estado inicial definimos la magnetización dependiente del tiempo $m(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \langle \sigma_i(t) \rangle$. Para valores de los parámetros correspondientes a la fase paramagnética, el traslape converge a $m = 0$, independientemente de las condiciones iniciales. Si los valores corresponden a la fase ferromagnética tenemos una dependencia en las condiciones iniciales. El estado inicial se puede describir en términos del traslape inicial m_0 . Si el estado inicial del sistema se encuentra dentro de la cuenca de atracción del patrón almacenado, entonces la red puede tener una convergencia a este patrón. Mediante un análisis de la dinámica se puede determinar la cuenca de atracción del patrón almacenado. Esta cuenca está determinada por los valores de m_0 donde el sistema recupera el patrón almacenado.

1.5.2. Modelo Little-Hopfield

El modelo Little-Hopfield está inspirado en el modelo de espines Sherrington-Kirkpatrick. Al igual que el modelo de espines este modelo también es un sistema que presenta desorden, ya que las sinapsis son variables aleatorias. El modelo Little-Hopfield describe una red neuronal binaria completamente conectada y de actualización paralela. Comúnmente se conoce como modelo de Hopfield al caso de la actualización secuencial. Sin embargo, los resultados cualitativos que vamos a describir se encuentran en ambos tipos de actualización. Estamos interesados

en almacenar p patrones $\xi^\mu = \{\xi_i^\mu \in S\}$ con $i \in \{1, \dots, N\}$, $\mu \in \{1, \dots, p\}$. Los componentes de los patrones forman una colección de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d), tomando los valores ± 1 con probabilidad $1/2$. La generalización al caso de p patrones desde el caso de un patrón almacenado es directa mediante la regla de Hebb $J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu$, $J_{ii} = 0$. La capacidad α de una red neuronal se define como la razón del número de patrones almacenados en la red y el número de acoplamientos por neurona. Por lo tanto la capacidad en el modelo Little-Hopfield es $\alpha = p/N$. El caso más interesante de estudiar se tiene cuando $N \rightarrow \infty$, pero α se mantiene finito. Es decir, el número de patrones almacenados en la red también es infinito.

El análisis de la estática de este modelo es aún más complejo que el modelo Sherrington-Kirkpatrick. Por lo general, se buscan soluciones donde el sistema tiene una correlación finita, en el límite termodinámico, solamente con un patrón al cual denominamos *condensado*. Sin pérdida de generalidad decimos que el patrón condensado es ξ^1 . Para describir el equilibrio son necesarios dos parámetros de orden, el traslape entre el sistema y el patrón condensado m y el traslape entre neuronas q . En la aproximación de simetría de réplica, se demuestra que los parámetros necesarios se definen por $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \langle \sigma_i \rangle$ y $q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i \rangle^2$. En el diagrama de fase se presentan tres fases: la fase paramagnética, la fase ferromagnética y una fase adicional llamada vidrio-espín. La fase paramagnética se puede encontrar para T y α grandes, con los parámetros de orden dados por $m = q = 0$, es decir, el desorden es completo. La fase ferromagnética se encuentra para valores pequeños de T y α , con los parámetros de orden dados por $m \neq 0$ y $q \neq 0$, es decir, la red neuronal puede recuperar patrones en esta fase. Por último, la fase vidrio-espín se encuentra cuando T es pequeña y α grande, con los parámetros de orden dados por $m = 0$ y $q \neq 0$, es decir, no hay recuperación de patrones.

Para describir la dinámica del sistema desde un estado inicial definimos el traslape dependiente del tiempo $m(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \langle \sigma_i(t) \rangle$. Para encontrar

soluciones que proporcionen información sobre la recuperación del patrón condensado introducimos el *ansatz condensado*. Suponemos que el sistema, en su evolución, solamente tiene una correlación finita con el patrón condensado en el límite termodinámico. Es decir, $m(t)$ es de orden $\mathcal{O}(1)$. Esta situación es inducida por las condiciones iniciales. El estado inicial se puede describir en términos del traslape inicial finito m_0 .

Al analizar la dinámica se encuentra que para valores de los parámetros correspondientes a la fase paramagnética, el traslape converge a $m = 0$, independientemente de las condiciones iniciales. Si los valores corresponden a la fase ferromagnética tenemos una dependencia en las condiciones iniciales. Si el estado inicial del sistema se encuentra dentro de la cuenca de atracción del patrón almacenado, entonces la red puede tener una convergencia a este patrón. Por último, para valores de los parámetros en la fase vidrio-espín la convergencia del sistema a un estado estacionario es muy lenta, la magnetización converge a cero lentamente pero sin alcanzar un valor final en un tiempo finito.

1.6. Análisis señal-ruido

El estudio de la dinámica mediante el método AFG proporciona resultados exactos, pero su aplicación a modelos complejos puede ser difícil matemáticamente. Un método alternativo es el análisis señal-ruido (ASR) donde el campo local de una neurona se divide en dos partes, la primera representa una *señal* que viene del patrón condensado y la otra representa *ruido de interferencia*, el cual se opone a la recuperación del patrón condensado, originado por el resto de los patrones. Hay muchas variantes de este método, las diferencias entre ellos consiste en los diferentes tratamientos que se le da al ruido de interferencia. Los detalles de este método dependen principalmente de la arquitectura de la red. La contribución macroscópica al campo por parte de la señal se obtiene fácilmente aplicando la ley de números grandes (LNG). En [26] suponen que

las variables del ruido de interferencia no están correlacionadas y que el teorema del límite central (TLC) puede ser aplicado. Otras variantes de este método parten de la suposición que el ruido de interferencia tiene distribución Gaussiana con promedio cero y hacen diferentes suposiciones para encontrar la varianza [27, 28]. Esta variación del método es llamada *neurodinámica estadística*. En modelos con simetría en las sinapsis, las correlaciones entre los elementos del ruido de interferencia no pueden ser ignoradas. Las simulaciones numéricas demuestran que la suposición Gaussiana es válida aproximadamente sólo cuando toma lugar un proceso exitoso de recuperación del patrón condensado [29]. En [30] se supone que la distribución del ruido de interferencia está compuesto por la suma de dos Gaussianas; la teoría resultante coincide mejor con los resultados numéricos, pero todavía se encuentran diferencias. En otra variación del método, se obtiene una distribución para el campo local sin hacer una suposición *a priori* acerca del ruido de interferencia tratando de considerar todas las correlaciones [31, 32] (una revisión de esta variante se puede encontrar en [33]).

Recientemente han surgido estudios comparativos entre los métodos ASR y AFG. Para modelos con sinapsis asimétricas, partiendo de una suposición Gaussiana del ruido de interferencia, las ecuaciones son idénticas a las obtenidas con el método AFG [34, 35, 36]. En este caso el ruido de interferencia tiene una distribución Gaussiana y la neurodinámica estadística da resultados exactos. Para modelos que presentan simetría en las sinapsis encontramos correlaciones debido a *bucles de retroalimentación* y se puede demostrar [37, 38] que cuando algunas de estas correlaciones son ignoradas, las ecuaciones resultantes del método ASR son solamente una aproximación a las ecuaciones exactas del método AFG. Encontrar todas las correlaciones relevantes, por ejemplo en el modelo Little-Hopfield completamente conectado, no ha sido una tarea trivial y el método AFG ha servido como una guía en esta búsqueda. En [38], Bollé *et al* aplicaron el método ASR con una formulación de la dinámica en términos de funciones de ganancia en el modelo Little-Hopfield completamente conectado. Un análisis

detallado y extenso demuestra que el método ASR puede ser extendido, formando una teoría completa para la dinámica de redes neuronales de Hopfield con conectividad infinita. Los autores obtienen la contribución de todas las fuentes de las correlaciones al ruido de interferencia, empleando un método de teoría de perturbaciones. Su método considera la fuente de las correlaciones como perturbaciones al campo local de una neurona para todos los pasos temporales en la evolución de esta neurona. Las ecuaciones que obtienen son equivalentes a las obtenidas con el método AFG en el límite de temperatura cero.

El método ASR es más intuitivo y matemáticamente más simple que el método AFG pero no ha sido implementado en todas las arquitecturas en las cuales el método AFG ha sido aplicado, por ejemplo en redes neuronales con conectividad finita. Como se puede ver en el párrafo anterior, los estudios comparativos entre ASR y AFG han servido para entender las deficiencias del método ASR y posibles mejoras. Sin embargo, la comparación de los resultados es difícil cuando la formulación de la dinámica es diferente en los dos métodos. Por otra parte, se han implementado varias herramientas para analizar las ecuaciones resultantes del método AFG. Algunos ejemplos de esas herramientas son el método Eissfeller-Opper, la derivación de las ecuaciones estacionarias y el análisis de la línea Almeida-Thouless. Podríamos aplicar esas herramientas sin cambios en los resultados del método ASR, en el caso de coincidencia en las ecuaciones de los parámetros de orden.

Por lo tanto, es deseable desarrollar el método ASR con la misma formulación de la dinámica utilizada en el método AFG y reproducir sus ecuaciones de los parámetros de orden. En el siguiente capítulo, desarrollamos el método ASR para el modelo Little-Hopfield completamente conectado con una formulación de la dinámica en términos de probabilidades de transición. Introducimos un análisis de la probabilidad de trayectoria de una neurona con el fin de obtener la contribución de las fuentes de las correlaciones a la dinámica de esta neurona. Esta contribución se obtiene haciendo una expansión de la probabilidad

de trayectoria. La expansión se realiza alrededor del punto donde las fuentes de las correlaciones son eliminadas en los campos locales de la neurona para todos los tiempos de la trayectoria. Obtenemos, en forma simple y directa, las ecuaciones de los parámetros de orden encontradas con el método AFG para temperatura finita.

1.6.1. Fuentes de las correlaciones

En el análisis señal-ruido es muy importante el estudio de las correlaciones que se generan entre las variables del sistema en su evolución. El modelo Little-Hopfield completamente conectado, presenta el caso más general (así como el más difícil) para el análisis de estas correlaciones.

En el ASR se busca obtener el campo local en el límite termodinámico. A partir del campo local podemos determinar los parámetros de orden relevantes. El método ASR consiste en dividir el campo local (1.3) en dos partes. La primera, contiene el patrón condensado ξ^1 el cual representa una señal; la segunda, contiene el resto de los patrones actuando como ruido de interferencia. Entonces, reescribimos el campo local de la neurona i dado por (1.3) de la siguiente forma

$$h_i(t) = \xi_i^1 \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \xi_j^1 \sigma_j(t) + \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \xi_i^\mu \sum_{j \neq i} \xi_j^\mu \sigma_j(t). \quad (1.26)$$

Al aplicar la LNG al primer término se obtiene un objeto macroscópico. En el caso que los elementos de la suma en el ruido de interferencia son estadísticamente independientes entre sí, podemos aplicar el TLC obteniendo un objeto macroscópico y concluyendo el análisis señal-ruido. Sin embargo, en general las variables en la sumatoria están correlacionadas entre sí debido a la regla de evolución.

Cualquier elemento de la suma en el ruido de interferencia se puede desarrollar de la siguiente forma (por facilidad estudiamos el caso $T = 0$)

$$\begin{aligned}
\xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j(t) &= \xi_i^\mu \xi_j^\mu \operatorname{sgn} \left(\xi_j^\mu \frac{1}{N} \sum_{k \neq j} \xi_k^\mu \sigma_k(t-1) + \frac{1}{N} \sum_{\nu \neq \mu} \xi_j^\nu \sum_{k \neq j} \xi_k^\nu \sigma_k(t-1) \right) \\
&= \operatorname{sgn} \left(\frac{\sigma_i(t-1)}{N} + \xi_i^\mu \frac{1}{N} \sum_{k \neq i} \xi_k^\mu \sigma_k(t-1) + \xi_i^\mu \xi_j^\mu \frac{1}{N} \sum_{\nu \neq \mu} \xi_j^\nu \sum_{k=1}^N \xi_k^\nu \sigma_k(t-1) \right. \\
&\quad \left. - \alpha \xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j(t-1) \right). \tag{1.27}
\end{aligned}$$

El primer y segundo términos dentro del último paréntesis de (1.27) podemos encontrarlos en los elementos $\xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j(t)$ para $j \in \{1, \dots, N\}$. El primer término podemos encontrarlo en los elementos $\xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j(t)$ para $\mu \in \{1, \dots, p\}$. Estos términos en común están evaluados al tiempo $t-1$ y representan una fuente de las correlaciones entre los elementos de la suma del ruido de interferencia. Procediendo de forma iterativa, se puede demostrar que también hay elementos comunes para todos los tiempos menores a $t-1$ utilizando el último término dentro del paréntesis de (1.27).

La forma precisa de los términos en el último paréntesis de (1.27) depende de la arquitectura de la red, sin embargo ya que el modelo Little-Hopfield completamente conectado es el caso más general, las fuentes en otras arquitecturas representan un subconjunto de las fuentes encontradas en este modelo. El primer y último término en el último paréntesis de (1.27) aparecen debido a la simetría de las sinapsis. Estos términos estarían ausentes si no hubiera simetría. Por tanto, ya que el último término es la razón de que exista el primer término al tiempo $t-2$, podemos demostrar de forma iterativa que el primer término está ausente para todo tiempo y no es fuente de las correlaciones en redes que no presentan simetría. Por otra parte, en redes diluidas al extremo, con probabilidad uno cualquier conjunto finito de neuronas tienen grupos de ancestros comunes disjuntos. Por tanto, el segundo término está ausente para todo tiempo y no es fuente de correlaciones para redes con dilución extrema.

Para tratar de forma correcta las correlaciones descritas en los párrafos an-

teriores, es necesario obtener una relación entre el sistema original y un sistema donde las fuentes de las correlaciones están ausentes en la dinámica. Por el *ansatz* condensado, las fuentes de las correlaciones son pequeñas para N grande, por tanto la relación buscada se obtiene haciendo una expansión de la regla de evolución alrededor del punto donde las fuentes desaparecen. Ya que las correlaciones no se forman en sistemas donde las fuentes están ausentes, podemos aplicar la LNG y el TLC a sumatorias donde están involucradas neuronas de este sistema.

1.7. Estructura de la tesis

El método señal-ruido usado en esta tesis fue desarrollado en [39]. Los principales resultados de este trabajo son discutidos en los capítulos 2 y 3. La estructura de la tesis es la siguiente: En el segundo capítulo presentamos el método ASR del modelo Little-Hopfield con una formulación de la dinámica en términos de probabilidades de transición. Se introduce un análisis de la probabilidad de trayectoria de una neurona con el fin de obtener la contribución de las fuentes de las correlaciones a la dinámica de esta neurona. Se obtienen, en forma simple y directa, las ecuaciones de los parámetros de orden encontradas con el método AFG para temperatura finita. Las ecuaciones obtenidas se resuelven numéricamente usando el método Eissfeller-Opper. Simulaciones numéricas desarrolladas en un sistema finito dan soporte a las predicciones teóricas. En el tercer capítulo aplicamos el método desarrollado en el primer capítulo al modelo Ashkin-Teller completamente conectado. En este modelo las neuronas están compuestas de dos espines de diferentes tipos. El modelo presenta acoplamientos de dos y cuatro espines. La contribución de las fuentes de las correlaciones se obtiene haciendo un análisis de la probabilidad de trayectoria de los dos espines de una neurona. Las ecuaciones obtenidas se resuelven numéricamente con una extensión del método Eissfeller-Opper. Simulaciones numéricas desarrolladas en un sistema finito dan soporte a las predicciones teóricas. Los resultados demuestran que la calidad

de la recuperación de patrones es mejorada con la introducción de acoplamientos de cuatro espines. En el cuarto capítulo, exploramos arquitecturas que no son completamente conectadas o con sinapsis simétricas. En primer lugar se estudia la dinámica de redes neuronales con dilución extrema, tanto simétrica como asimétrica. Se obtienen los mismos resultados encontrados con el método AFG, pero con menos dificultad. En segundo lugar se estudia la dinámica de redes neuronales que recuperan patrones secuencialmente. Las sinapsis en este modelo son asimétricas. Nuevamente, se obtienen los resultados encontrados con el método AFG, pero de forma más simple y directa. Los resultados en el análisis de estas arquitecturas demuestran que para modelos con simetría en las sinapsis, el campo local en el límite termodinámico presenta un término de autointeracción, el cual está ausente en modelos con sinapsis asimétricas. Esta autointeracción, se explica por la presencia de bucles de autointeracción en la arquitectura de la red.

Capítulo 2

Modelo Little-Hopfield

2.1. Introducción

En este capítulo, usando un análisis señal-ruido estudiamos la dinámica del modelo Little-Hopfield completamente conectado con una formulación de la dinámica en términos de probabilidades de transición. Introducimos un análisis de la probabilidad de trayectoria de una neurona con el fin de obtener la contribución de las fuentes de las correlaciones al ruido de interferencia. Esta contribución se obtiene haciendo una expansión de la probabilidad de trayectoria. La expansión se realiza alrededor del punto donde las fuentes de las correlaciones son eliminadas en los campos locales de la neurona para todos los tiempos de la trayectoria. Obtenemos, en forma simple y directa, las ecuaciones de los parámetros de orden encontradas en el análisis con funciones generadoras para temperatura finita.

Las ecuaciones de los parámetros de orden obtenidas se resuelven numéricamente usando el método Eissfeller-Opper. Simulaciones numéricas desarrolladas en un sistema finito dan soporte a las predicciones teóricas. Usando el método Eissfeller-Opper, obtenemos la fase de recuperación y la presentamos en un

diagrama de fase de este modelo. Por otra parte, para una temperatura fija, presentamos en una gráfica la cuenca de atracción de este modelo.

2.2. Modelo

Consideraremos una red que consiste de N neuronas binarias $\sigma_i \in S$ con $S = \{-1, 1\}$. Un estado de la red es descrito por

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \{\sigma_i(t)\} \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.1)$$

y la historia del sistema hasta el tiempo t es descrita por

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_i(t')\} \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad t' \in \{0, \dots, t\}. \quad (2.2)$$

Estamos interesados en almacenar p patrones $\boldsymbol{\xi}^\mu = \{\xi_i^\mu \in S\}$ con $i \in \{1, \dots, N\}$, $\mu \in \{1, \dots, p\}$. Los componentes de los patrones forman una colección *vaaid*, tomando los valores ± 1 con probabilidad $1/2$. Cada neurona está conectada con todas las neuronas restantes por acoplamientos de acuerdo a la regla de Hebb

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \quad J_{ii} = 0. \quad (2.3)$$

La capacidad de una red neuronal se define como la razón del número de patrones almacenados en la red y el número de acoplamientos por neurona. Por lo tanto, la capacidad del modelo Little-Hopfield es $\alpha = p/N$.

El campo local de la neurona i se define por

$$h_i(t) = \sum_j J_{ij} \sigma_j(t). \quad (2.4)$$

Suponemos que el sistema tiene un estado inicial muy cercano con el patrón condensado $\boldsymbol{\xi}^1$. Al tiempo $t = 0$, todas las neuronas se escogen *vaaid* de acuerdo

a la distribución de probabilidad

$$P(\sigma_i(0) = \pm 1) = \frac{1 \pm m_0 \xi_i^1}{2} \quad (2.5)$$

y por lo tanto el traslape entre el estado inicial $\sigma(0)$ y el patrón ξ^1 es m_0 , en el límite termodinámico.

Todas las neuronas se actualizan simultáneamente de acuerdo a la siguiente probabilidad de transición

$$P(\sigma_i(t+1) | \sigma_{(i)}(t), \xi) = \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh(\beta h_i(t))] \quad (2.6)$$

donde

$$\sigma_{(i)}(t) = \sigma(t) \setminus \{\sigma_i(t)\} \quad (2.7)$$

$$\xi = \{\xi_j^\nu\} \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad \nu \in \{1, \dots, p\} \quad (2.8)$$

con $\beta = T^{-1}$. La probabilidad de trayectoria de una neurona σ_i , condicionada en los patrones y en el resto de las neuronas a todos los pasos temporales está dada por

$$\begin{aligned} P(\sigma_i | \sigma_{(i)}, \xi) &= P(\sigma_i(0)) \prod_{r=0}^{t-1} P(\sigma_i(r+1) | \sigma_{(i)}(r), \xi) \\ &= P(\sigma_i(0)) \prod_{r=0}^{t-1} \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(r+1) \tanh(\beta h_i(r))] \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde

$$\sigma_i = \{\sigma_i(0), \dots, \sigma_i(t)\} \quad (2.10)$$

$$\sigma_{(i)} = \sigma \setminus \sigma_i. \quad (2.11)$$

A partir de $P(\sigma_i | \sigma_{(i)}, \xi)$ podemos obtener todos los promedios relevantes de la neurona σ_i . Denotaremos $\langle f(\sigma_i) \rangle$ al promedio de una función $f(\sigma_i)$ sobre trayectorias de una neurona. Es decir,

$$\langle f(\sigma_i) \rangle = \sum_{\sigma_i(0), \dots, \sigma_i(t)} P(\sigma_i | \sigma_{(i)}, \xi) f(\sigma_i).$$

2.3. Análisis señal-ruido

En el análisis señal-ruido se busca obtener el campo local en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$. A partir del campo local podemos determinar los parámetros de orden relevantes. El método ASR consiste en dividir el campo local (2.4) en dos partes. La primera, contiene el patrón condensado ξ^1 , el cual representa una señal; la segunda, contiene el resto de los patrones actuando como ruido. Entonces, reescribimos el campo local (2.4) como

$$h_i(t) = \xi_i^1 \sum_{j \neq i} \xi_j^1 \sigma_j(t) + \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \xi_i^\mu \sum_{j \neq i} \xi_j^\mu \sigma_j(t)$$

El traslape $m(t)$ y el traslape residual $r^\mu(t)$ se definen de la siguiente forma

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^1 \sigma_j(t) \quad r^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \sigma_j(t) \quad \mu \neq 1; \quad (2.12)$$

por tanto

$$h_i(t) = \xi_i^1 m(t) + z_i(t) - \alpha \sigma_i(t) \quad (2.13)$$

donde

$$z_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu \neq 1} \xi_i^\mu r^\mu(t). \quad (2.14)$$

Por el ansatz condensado, el traslape $m(t)$ y el traslape residual $r^\mu(t)$ ($\mu \neq 1$) son de orden $\mathcal{O}(1)$. Esta situación es inducida desde las condiciones iniciales (2.5).

La aplicación de la ley de números grandes (LNG) en el traslape $m(t)$ genera como resultado un objeto macroscópico

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^1 \sigma_j(t) \stackrel{\text{Pr}}{=} E [\xi^1 \langle \sigma(t) \rangle], \quad (2.15)$$

donde $\sigma(t)$ representa una neurona efectiva, Pr denota convergencia en probabilidad y E el valor esperado. En la siguiente sección reescribiremos el traslape en términos de un promedio efectivo.

Si todos los elementos en la suma del ruido de interferencia fueran independientes, podríamos aplicar el TLC. Sin embargo, la aplicación directa del TLC, en general, no es correcta para $t > 0$, como se puede ver en la sección 1.6. Para cualquier término $\xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j(t)$, $j \neq i$, $\mu \neq 1$ en la sumatoria del ruido de interferencia, el problema es causado por las fuentes de las correlaciones de este término con otros términos de la sumatoria. Las fuentes de estas correlaciones, se encuentran en los términos donde aparece ξ_j^μ como factor en el campo h_j de la neurona σ_j , para todo tiempo de la trayectoria $\sigma_j(0) \rightarrow \sigma_j(1) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_j(t)$. Eliminando estos términos en la trayectoria de la neurona, se eliminan todas fuentes de las correlaciones que pueden tener una contribución macroscópica al ruido de interferencia [38]. La probabilidad de esta trayectoria se obtiene si extraemos de $P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \xi)$ las dependencias fuertes en ξ_j^μ . Entonces reemplazamos $h_j(r)$ por $h_j^{(\mu)}(r)$, $r \in \{0, \dots, t-1\}$, en esta probabilidad de trayectoria, donde

$$h_j^{(\mu)}(r) = h_j(r) + \delta h_j^\mu(r) \quad (2.16)$$

con

$$\delta h_j^\mu(r) = -\frac{\xi_j^\mu}{\sqrt{N}} r^\mu(r). \quad (2.17)$$

El campo $h_j^{(\mu)}(r)$ tiene dependencia débil en ξ_j^μ . Por otra parte, el término $\delta h_j^\mu(r)$ tiene dependencia fuerte en ξ_j^μ y es pequeño para N grande. Por lo tanto, haciendo una expansión de $P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \xi)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
P\left(\sigma_j|\sigma_{(j)}, \xi^{(\mu)}\right) &= P(\sigma_j(0)) \prod_{r=0}^{t-1} P\left(\sigma_j(r+1)|\sigma_{(j)}(r), \xi^{(\mu)}\right) \\
&= P\left(\sigma_j|\sigma_{(j)}, \xi\right) + \sum_{t'=0}^{t-1} \delta h_j^\mu(t') \frac{\partial P\left(\sigma_j|\sigma_{(j)}, \xi^{(\mu)}\right)}{\partial \delta h_j^\mu(t')} \Bigg|_{\{\delta h_j^\mu(r)=0\}} \\
&\quad + \mathcal{O}(\dots)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

donde

$$\xi^{(\mu)} = \xi \setminus \xi^\mu. \tag{2.19}$$

Podemos reescribir las derivadas parciales con la ayuda de un campo externo $\theta_j(r)$ que vamos a introducir al campo local $h_j(r)$

$$\frac{\partial P\left(\sigma_j|\sigma_{(j)}, \xi^{(\mu)}\right)}{\partial \delta h_j^\mu(t')} \Bigg|_{\{\delta h_j^\mu(r)=0\}} = \frac{\partial P\left(\sigma_j|\sigma_{(j)}, \xi\right)}{\partial \theta_j(t')} \Bigg|_{\{\theta_j(r)=0\}} \tag{2.20}$$

con $h_j(r) = \frac{1}{N} \sum_\nu \sum_{k \neq j} \xi_j^\nu \xi_k^\nu \sigma_k(r) + \theta_j(r)$. Denotando $\sigma_j^{(\mu)}$ a la neurona σ_j con dependencia débil en ξ_j^μ y evaluando el promedio sobre trayectorias, cada una con probabilidad (2.18), obtenemos

$$\langle \sigma_j^{(\mu)}(t) \rangle = \langle \sigma_j(t) \rangle + \sum_{t'=0}^{t-1} \delta h_j^\mu(t') \frac{\partial \langle \sigma_j(t) \rangle}{\partial \theta_j(t')} \Bigg|_{\{\theta_j(r)=0\}} + \mathcal{O}(\dots). \tag{2.21}$$

El traslape residual se puede escribir de la siguiente forma

$$r^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \sigma_j^{(\mu)}(t) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \left(\sigma_j(t) - \sigma_j^{(\mu)}(t) \right). \tag{2.22}$$

En el límite termodinámico, aplicando el TLC al primer término en el lado derecho y la LNG al segundo, obtenemos un objeto macroscópico. Alternativamente,

se obtiene una ecuación equivalente, en el límite termodinámico, sustituyendo las variables neuronales en el segundo término por los promedios sobre trayectorias de estas neuronas. Por tanto,

$$z_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \sum_{j \neq i} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j^{(\mu)}(t) + \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \sigma_i^{(\mu)}(t) + \sum_{t'=0}^{t-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu \neq 1} \xi_i^\mu r^\mu(t') \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \langle \sigma_j(t) \rangle}{\partial \theta_j(t')} \Big|_{\{\theta_j(r)=0\}} \right) + \mathcal{O}(\dots). \quad (2.23)$$

El primer término en el lado derecho es una suma de variables aleatorias independientes y por el TLC obtenemos una contribución Gaussiana $\mathbb{N}(0, \alpha)$. El segundo término tiene una contribución $\alpha \sigma_i(t)$ en el límite termodinámico [38]. La aplicación de la LNG al tercer término resulta en un objeto macroscópico. Por tanto,

$$z_i(t) = \psi_i(t) + \alpha \sigma_i(t) + \sum_{t'=0}^{t-1} z_i(t') G(t, t') \quad (2.24)$$

con

$$\psi_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \sum_{j \neq i} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j^{(\mu)}(t) \stackrel{D}{=} \mathbb{N}(0, \alpha), \quad (2.25)$$

donde D denota convergencia en distribución, y

$$G(t, t') = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \langle \sigma_j(t) \rangle}{\partial \theta_j(t')} \Big|_{\{\theta_j(r)=0\}} \stackrel{\text{Pr}}{=} E \left[\frac{\partial \langle \sigma(t) \rangle}{\partial \theta(t')} \Big|_{\{\theta(r)=0\}} \right]. \quad (2.26)$$

donde se ha eliminado la dependencia de los sitios en los campos externos, por la libertad que tenemos de escogerlos. Suponemos que $G(t, t') = 0$ para $t' \geq t$.

En el límite termodinámico la siguiente covarianza de las variables aleatorias ψ_i es obtenida

$$E[\psi_i(t) \psi_i(t')] = \alpha C(t, t') \quad (2.27)$$

donde

$$C(t, t') = E \left[\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \sigma_j(t) \sigma_j(t') \right] \stackrel{\text{Pr}}{=} E [\langle \sigma(t) \sigma(t') \rangle]. \quad (2.28)$$

Los objetos macroscópicos $C(t, t')$ y $G(t, t')$ son las funciones de correlación y respuesta, respectivamente. En la siguiente sección obtendremos las ecuaciones de esos objetos macroscópicos en términos de un promedio efectivo.

Las condiciones iniciales descritas en la sección 2.2 implican que $z_i(0) = \psi_i(0) + \alpha \sigma_i(0)$. Introduciendo iterativamente la relación recursiva (2.24) para $z_i(t)$ en el campo local (??) y usando las propiedades de la función respuesta, obtenemos

$$h_i(t) = \xi_i^1 m(t) + \alpha \sum_{t'=0}^{t-1} R(t, t') \sigma_i(t') + \sqrt{\alpha} \phi_i(t) + \theta_i(t) \quad (2.29)$$

donde

$$R(t, t') = [\mathbf{G}(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1}] (t, t') \quad (2.30)$$

$$\sqrt{\alpha} \phi_i(t) = \sum_{t'=0}^{t-1} [(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1}] (t, t') \psi_i(t'). \quad (2.31)$$

El factor $\sqrt{\alpha}$ ha sido introducido (anticipando resultados) por simplificación. Las variables aleatorias ϕ_i tienen distribución Gaussiana con promedio cero y covarianza

$$\begin{aligned} D(t, t') &= E [\phi_i(t) \phi_i(t')] \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{s'=0}^{t'-1} [(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1}] (t, s) [(\mathbf{1} - \mathbf{G}^\dagger)^{-1}] (s', t') E [\psi_i(s) \psi_i(s')] \\ &= [(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{1} - \mathbf{G}^\dagger)^{-1}] (t, t'), \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $\mathbf{C} = \{C(s, s')\}$ y $\mathbf{G} = \{G(s, s')\}$.

2.3.1. Dinámica efectiva

Las ecuaciones de los parámetros de orden $m(t)$, $C(t, t')$ y $G(t, t')$ pueden ser escritas en términos de un promedio efectivo

$$m_1(t) = \langle \xi \sigma(t) \rangle_* \quad C(t, t') = \langle \sigma(t) \sigma(t') \rangle_* \quad (2.33)$$

$$G(t, t') = \left. \frac{\partial \langle \sigma(t) \rangle_*}{\partial \theta(t')} \right|_{\{\theta(r)=0\}}. \quad (2.34)$$

El promedio efectivo de una función $f(\boldsymbol{\sigma})$, para $t_f > 0$, está dada por (omitiendo el índice en el patrón condensado) :

$$\begin{aligned} \langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle_* &= E[\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle] \\ &= \sum_{\sigma(0) \dots \sigma(t_f)} \sum_{\xi} \int d\phi P(\phi) P(\xi) P(\boldsymbol{\sigma} | \xi, \phi) f(\boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma(0), \dots, \sigma(t_f)) \quad (2.36)$$

$$\boldsymbol{\phi} = (\phi(0), \dots, \phi(t_f - 1)) \quad (2.37)$$

$$d\boldsymbol{\phi} = \prod_{t=0}^{t_f-1} d\phi(t). \quad (2.38)$$

Las variables aleatorias ϕ tienen distribución Gaussiana con promedio cero y matriz de covarianza $\mathbf{D} = \{D(t, t')\}$, con $D(t, t')$ dada por (2.32). En este promedio efectivo, $P(\boldsymbol{\phi})$ es una distribución de probabilidad Gaussiana multidimensional

$$P(\boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{D})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t, t'=0}^{t_f-1} \phi(t) \mathbf{D}^{-1}(t, t') \phi(t')\right). \quad (2.39)$$

Por otra parte, $P(\boldsymbol{\sigma} | \xi, \boldsymbol{\phi})$ es la distribución de probabilidad de trayectoria de la neurona efectiva

$$P(\boldsymbol{\sigma} \mid \xi, \phi) = P(\sigma(0)) \prod_{r=0}^{t_f-1} \frac{1}{2} [1 + \sigma(r+1) \tanh(\beta h(r))], \quad (2.40)$$

la cual depende del campo efectivo

$$h(t) = \xi m(t) + \alpha \sum_{t'=0}^{t-1} R(t, t') \sigma(t') + \sqrt{\alpha} \phi(t) + \theta(t). \quad (2.41)$$

donde $R(t, t')$ está dada por (2.30). Las ecuaciones (2.33)-(2.34) para los parámetros de orden son equivalentes a las que se obtienen en [?] con el método AFG. Así que, usando el método ASR con una formulación de la dinámica en términos de probabilidades de transición recuperamos las mismas ecuaciones exactas obtenidas con el método AFG (ver Apéndice B), pero de forma más simple y directa.

En el Apéndice C, las ecuaciones de los parámetros de orden encontradas en este capítulo son presentadas de forma explícita. Adicionalmente, son presentados los primeros pasos temporales de los parámetros de orden. Se observa que la complejidad para obtener estos parámetros crece de forma importante desde los primeros pasos temporales.

2.4. Análisis numérico

En esta sección vamos a resolver numéricamente las ecuaciones de los parámetros de orden del modelo Little-Hopfield completamente conectado. Como se puede ver en el Apéndice C, el proceso para encontrar los parámetros de orden se complica desde los primeros pasos temporales. Por ejemplo, al tiempo t , es necesario realizar una integral sobre t variables y una traza sobre t neuronas. Por tal razón, la solución se debe encontrar en forma numérica. Si se desea resolver el promedio efectivo (2.35) con un método del tipo Monte Carlo es necesario obtener muestras del ruido Gaussiano $\phi(t)$ para las integrales, muestras de la neurona efectiva $\sigma(t)$ para las sumatorias y muestras del patrón condensado ξ .

Sin embargo, con este método se tienen que generar las variables involucradas una y otra vez para cada paso temporal. En su lugar, nosotros vamos a utilizar el método Eissfeller-Opper [40], el cual es una variante de los métodos del tipo Monte Carlo.

2.4.1. Método Eissfeller-Opper

En este método se generan un número M grande de réplicas del sistema efectivo, las cuales evolucionan formando M trayectorias de las variables involucradas en el promedio efectivo. Cada réplica al tiempo t , consiste de una muestra del patrón condensado, $t+1$ muestras del ruido Gaussiano y $t+1$ muestras de la neurona efectiva. El promedio efectivo (2.35) es reemplazado por un promedio sobre el ensamble de réplicas para M grande.

El algoritmo necesita como parámetros: el número de réplicas M del sistema, el tiempo final t_f , la capacidad de la red α , la temperatura $T = \beta^{-1}$ y el traslape inicial m_0 . Para una réplica i , al tiempo t , las variables del algoritmo son, el patrón condensado $\xi_i \in \{-1, 1\}$, la neurona efectiva $\sigma_i(t) \in \{-1, 1\}$ y el ruido Gaussiano $\phi_i(t) \in \mathbb{R}$. Al tiempo $t = 0$, para cada réplica $j \in \{1, \dots, M\}$, la neurona efectiva se inicializa tomando los valores ± 1 con probabilidad $P(\sigma_j(0) = \pm 1) = (1 \pm m_0 \xi_j)/2$, mientras que el patrón condensado toma los valores ± 1 con probabilidad $P(\xi_j = \pm 1) = 1/2$. El único elemento de la matriz de covarianza al tiempo $t = 0$ se inicializa con $D(0, 0) = 1$. El algoritmo procede de forma recursiva. Para predecir el valor de los parámetros de orden al tiempo t es necesario conocer, para cada réplica $j \in \{1, \dots, M\}$, el patrón condensado ξ_j , las neuronas efectivas $\sigma_j(t')$ para $t' \in \{0, \dots, t\}$, los ruidos Gaussianos $\phi_j(t')$ para $t' \in \{0, \dots, t-1\}$ y la matriz de covarianza $D(t', t'')$ para $t', t'' \in \{0, \dots, t-1\}$.

Antes de hacer una descripción del algoritmo, es necesario reescribir la función respuesta en términos de cantidades conocidas. Usando integración por partes se obtiene

$$G(t, t') = \frac{\partial \langle \sigma(t) \rangle_*}{\partial \theta(t')} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial \langle \sigma(t) \rangle_*}{\partial \phi(t')} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{t''=0}^{t-1} \langle \sigma(t) \phi(t'') \rangle_* \mathbf{D}^{-1}(t', t''). \quad (2.42)$$

El algoritmo Eissfeller-Opper consiste de los siguientes pasos ($t < t_f$) :

1. Los parámetros de orden del sistema $m(t)$, $C(t, t') = C(t', t)$, $t' \leq t$, $G(t, t')$, $t' < t$, se calculan promediando sobre el ensamble de réplicas:

$$m(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \xi_i \sigma_i(t) \quad (2.43)$$

$$C(t, t') = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_i(t) \sigma_i(t') \quad (2.44)$$

$$G(t, t') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{t''=0}^{t-1} \mathbf{D}^{-1}(t', t'') \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_i(t) \phi_i(t''). \quad (2.45)$$

2. Se obtienen las matrices $\mathbf{S} = (\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{S}^\dagger$ y $\mathbf{R} = \mathbf{S} - \mathbf{1}$.
3. Se generan los ruidos Gaussianos con matriz de covarianza \mathbf{D} para cada réplica

$$\phi_i(t) = \frac{\eta_i(t)}{\sqrt{\mathbf{D}^{-1}(t, t)}} - \frac{1}{\mathbf{D}^{-1}(t, t)} \sum_{t'=0}^{t-1} \mathbf{D}^{-1}(t, t') \eta_i(t') \quad (2.46)$$

donde los términos $\eta_i(t)$ son vauid, para toda i y t , con distribución Gaussiana estándar $N(0, 1)$.

4. Se genera el campo local efectivo para cada réplica

$$h_i(t) = \xi_i m(t) + \alpha \sum_{t'=0}^{t-1} R(t, t') \sigma_i(t') + \sqrt{\alpha} \phi_i(t). \quad (2.47)$$

5. Usando el campo local efectivo, se genera la neurona efectiva al tiempo $t + 1$ para cada réplica

$$P(\sigma_i(t+1) | h_i(t)) = \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh(\beta h_i(t))]. \quad (2.48)$$

6. Si $t < t_f$ se incrementa t y se repite el algoritmo desde el paso 1, en caso contrario el proceso se detiene.

2.4.2. Resultados

En esta sección discutimos los resultados numéricos obtenidos a partir de las ecuaciones de los parámetros de orden derivadas para el modelo Little-Hopfield completamente conectado. Se han resuelto las ecuaciones de los parámetros de orden numéricamente, usando el método Eissfeller-Opper. En nuestros cálculos el número de réplicas es $M = 5 \cdot 10^5$.

La evolución del traslape m en los primeros pasos temporales es mostrada en la figura 2.1 para $T = 0.15$, $\alpha = 0.08$. Las líneas sólidas representan las predicciones teóricas obtenidas con el método Eissfeller-Opper. Las líneas con guiones fueron obtenidas mediante la simulación de una red de $N = 5000$ neuronas promediadas sobre 200 corridas. Los resultados de las simulaciones soportan nuestras predicciones teóricas.

La línea de la figura 2.2 representa el diagrama capacidad-temperatura del sistema. El sistema es inicializado con un traslape $m(0) = 0.99$ y la dinámica se obtiene con el método Eissfeller-Opper. Registramos la temperatura cuando el traslape m ha disminuido por debajo de 0.4 después de 200 pasos temporales. Por debajo de la línea resultante encontramos la fase donde el sistema puede recuperar patrones y arriba de la línea el sistema no puede recuperar patrones. En la gráfica podemos ver que la capacidad crítica es grande a bajas temperaturas mientras que a temperaturas mayores es más pequeña.

La línea de la figura 2.3 representa la cuenca de atracción del sistema con $T = 0.35$. El sistema es inicializado con varios valores del traslape m y la dinámica se obtiene con el método Eissfeller-Opper. Registramos la temperatura cuando el traslape m tiene un valor por debajo de 0.4 después de 200 pasos temporales. Por debajo de la línea resultante el estado inicial del sistema se encuentra dentro de la cuenca de atracción del patrón condensado, por tanto, se puede recuperar este patrón. Arriba de la línea el sistema no puede recuperar el patrón condensado. Para valores pequeños del traslape inicial la capacidad

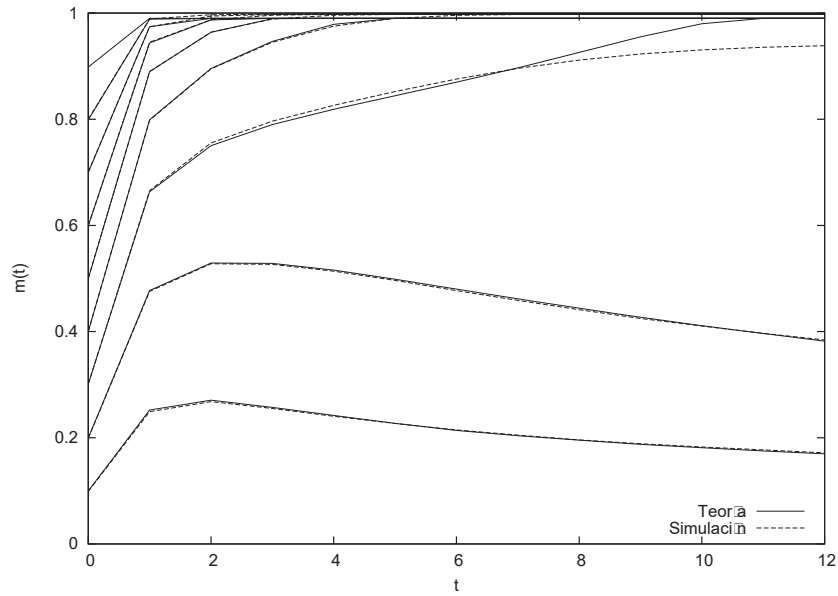


Figura 2.1: Evolución temporal del traslape m con $T = 0.15$, $\alpha = 0.08$. Las líneas sólidas denotan resultados teóricos y las líneas con guiones los resultados obtenidos por simulación en computadora con $N = 5000$ neuronas promediados sobre 200 corridas.

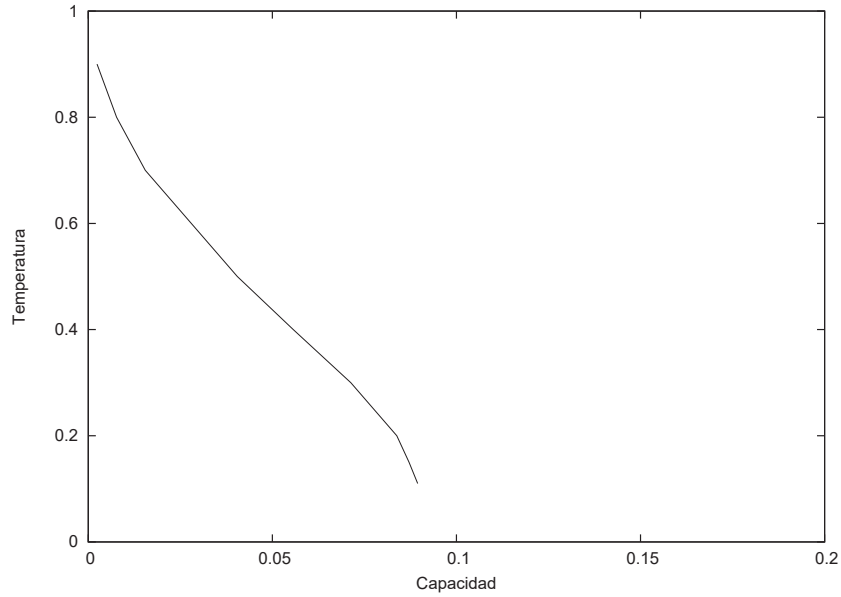


Figura 2.2: Diagrama Capacidad-Temperatura

crítica aumenta de forma notoria cuando el traslape aumenta. Por otra parte, para valores grandes del traslape inicial la capacidad crítica no tiene cambios notorios al aumentar el traslape.

Conclusiones

En este capítulo estudiamos la dinámica del modelo Little-Hopfield usando el método ASR con una formulación de la dinámica en términos de probabilidades de transición. Las ecuaciones de los parámetros de orden que se obtienen son idénticas a las obtenidas con el método AFG en el Apéndice B.

En el límite termodinámico, se obtiene lo que puede ser interpretado como una teoría describiendo una neurona efectiva $\sigma(t)$, sometida a un campo local efectivo $h(t)$ (2.41), con la dinámica de esta neurona descrita por la probabilidad de trayectoria $P(\sigma | \xi, \phi)$ (2.40). El campo efectivo $h(t)$ tiene tres contribuciones: la señal que depende del patrón a recuperar, ξ , ruido discre-

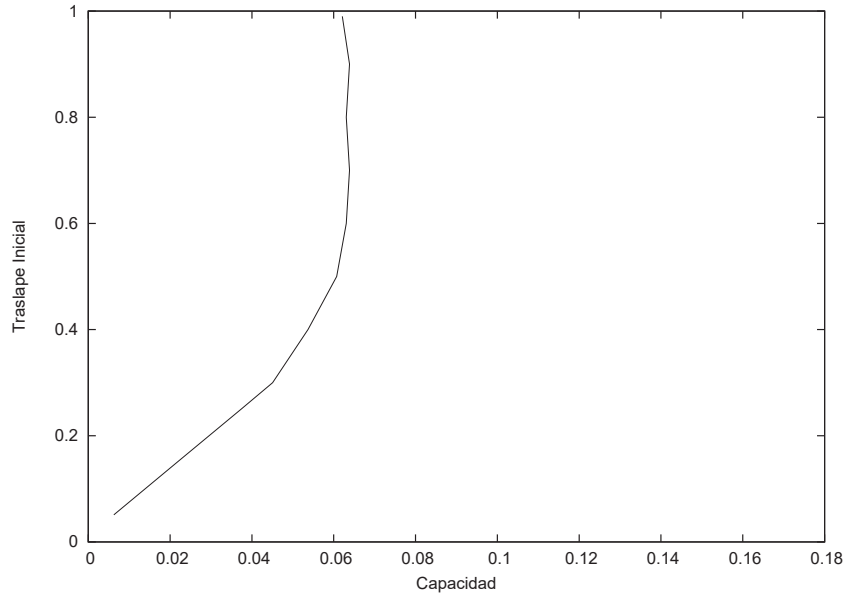


Figura 2.3: Cuenca de atracción del sistema con $T = 0.35$

to que depende de todos los estados anteriores de la neurona efectiva, $\sigma(t)$, y contribuciones de ruido Gaussiano, $\phi(t)$, con promedio cero y temporalmente correlacionado. Por tanto, el sistema efectivo, que fue derivado de un sistema que evoluciona como un proceso de Markov, está descrito por un proceso que no es de Markov.

Las ecuaciones de los parámetros de orden se resolvieron numéricamente usando el método Eissfeller-Opper. Se realizaron simulaciones numéricas en un sistema finito. Los resultados de las simulaciones tienen una muy buena correspondencia con las predicciones teóricas. Se elaboraron diagramas capacidad-temperatura y cuenca de atracción. Se demostró que la capacidad crítica es grande a bajas temperaturas mientras que a temperaturas mayores es más pequeña. La capacidad crítica mejora de forma notoria con el aumento del traslape inicial cuando éste es pequeño.

En su desarrollo, el método AFG es muy elegante y proporciona resultados exactos, pero presenta muchas dificultades matemáticas. Por otra parte, el

método ASR genera resultados idénticos a los obtenidos con el método AFG de forma directa y con mucho menos esfuerzo matemático. Se puede esperar que el método desarrollado en este capítulo nos permitirá resolver modelos más complejos con mayor facilidad. En el siguiente capítulo, aplicamos este método al modelo Ashkin-Teller completamente conectado, el cual presenta acoplamientos más complejos que el modelo Little-Hopfield.

Capítulo 3

Modelo Ashkin-Teller

3.1. Introducción

Las neuronas en la red neuronal Ashkin-Teller están compuestas de dos espinos de diferentes tipos. La interacción entre dos neuronas en la red se realiza mediante acoplamientos de dos y cuatro espinos. Cuando la interacción de cuatro espinos desaparece, el sistema evoluciona como dos redes neuronales Little-Hopfield independientes. Este modelo tiene la capacidad de recuperar dos patrones diferentes simultáneamente. Se cree que la recuperación de los dos patrones es más eficiente cuando la interacción de cuatro espinos está presente. En [41] se presenta una posible justificación biológica de esta red. La estática y dinámica del modelo completamente conectado con capacidad $\alpha = 0$ fue estudiado en [42]. La estática de este modelo, pero con capacidad $\alpha \neq 0$ se describe en [43] usando el método de réplicas. Por otra parte, la estática y dinámica del modelo con dilución extrema asimétrica y capacidad finita se estudió en [41] con el método ASR.

En este capítulo, vamos a estudiar la dinámica del modelo Ashkin-Teller completamente conectado usando el método ASR desarrollado en el capítulo

anterior. La contribución de las fuentes de las correlaciones al ruido de interferencia se obtiene expandiendo la probabilidad de trayectoria de los dos espines en una neurona. Se demuestra que la calidad en la recuperación de patrones es mejorada con la introducción de los acoplamientos de cuatro espines. Las simulaciones numéricas tienen una muy buena correspondencia con las predicciones teóricas.

3.2. Modelo

Consideraremos una red que consiste de N neuronas. El estado de cada neurona es descrito por dos espines $\sigma_i \in S$ y $v_i \in S$, $S = \{-1, +1\}$. Un estado de la red es descrito por

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \{\sigma_i(t)\} \quad \boldsymbol{v}(t) = \{v_i(t)\} \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (3.1)$$

y la historia del sistema hasta el tiempo t es descrita por

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_i(t')\} \quad \boldsymbol{v} = \{v_i(t')\} \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad t' \in \{0, \dots, t\}. \quad (3.2)$$

Estamos interesados en almacenar $2p$ patrones: p patrones $\boldsymbol{\xi}^\mu = \{\xi_i^\mu \in S\}$ en la parte σ de la red y p patrones $\boldsymbol{\eta}^\mu = \{\eta_i^\mu \in S\}$ en la parte v , con $i \in \{1, \dots, N\}$, $\mu \in \{1, \dots, p\}$. Los componentes de los $2p$ patrones son ± 1 , tomando los valores ± 1 con probabilidad $1/2$. Cada neurona está conectada con todas las neuronas restantes mediante acoplamientos, definidos en analogía con la regla de Hebb, de dos espines

$$J_{ij}^1 = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \quad J_{ij}^2 = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \eta_i^\mu \eta_j^\mu \quad (3.3)$$

y cuatro espines

$$J_{ij}^3 = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \gamma_i^\mu \gamma_j^\mu, \quad (3.4)$$

donde

$$\gamma_i^\mu = \xi_i^\mu \eta_i^\mu. \quad (3.5)$$

En la literatura, esta opción de los patrones, en la definición de los acoplamientos de cuatro espines, se conoce como *el caso vinculado* (the linked case). En el siguiente desarrollo siempre se tiene $J_{ii}^n = 0$, $n \in \{1, 2, 3\}$. En este modelo queremos almacenar $2p$ patrones y se tienen $3N$ acoplamientos (3 por cada neurona), por tanto la capacidad de la red Ashkin-Teller es

$$\alpha_{ATNN} = \frac{2}{3}\alpha \quad (3.6)$$

donde $\alpha = \frac{p}{N}$.

Dada una configuración de la red, podemos definir tres tipos de campos locales

$$h_{1,i}(t) = \sum_j J_{ij}^1 \sigma_j(t) \quad h_{2,i}(t) = \sum_j J_{ij}^2 v_j(t) \quad (3.7)$$

y

$$h_{3,i}(t) = \sum_j J_{ij}^3 \sigma_j(t) v_j(t). \quad (3.8)$$

Los campos $h_i^1(t)$ y $h_i^2(t)$ miden la contribución por espines del mismo tipo en la dinámica de los espines σ_i y v_i , respectivamente. Por otra parte, el campo $h_i^3(t)$ mide el efecto en la dinámica de los espines de la neurona i causado por ambos espines en las otras neuronas. El traslape y el traslape residual están definidos de la siguiente forma

$$m_1(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^1 \sigma_j(t) \quad r_1^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \sigma_j(t) \quad \mu \neq 1 \quad (3.9)$$

$$m_2(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j^1 v_j(t) \quad r_2^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \eta_j^\mu v_j(t) \quad \mu \neq 1 \quad (3.10)$$

$$m_3(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^1 \eta_j^1 \sigma_j(t) v_j(t) \quad (3.11)$$

$$r_3^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \eta_j^\mu \sigma_j(t) v_j(t) \quad \mu \neq 1. \quad (3.12)$$

Suponemos que el sistema tiene traslapes $m_1(t)$, $m_2(t)$ y traslapes residuales $r_1^\mu(t)$, $r_2^\mu(t)$, ($\mu \neq 1$), de orden $\mathcal{O}(1)$ (ansatz condensado). Esta situación es inducida por las condiciones iniciales. Al tiempo $t = 0$, todos los espines se escogen como vaaid de acuerdo a las siguientes distribuciones de probabilidad

$$P(\sigma_i(0) = \pm 1) = \frac{1 \pm m_{1,0} \xi_i^1}{2} \quad P(v_i(0) = \pm 1) = \frac{1 \pm m_{2,0} \eta_i^1}{2} \quad (3.13)$$

y por lo tanto los traslapes iniciales $m_1(0)$ y $m_2(0)$, en el límite termodinámico, son $m_{1,0}$ y $m_{2,0}$, respectivamente.

Dados los campos locales y la temperatura $T = 1/\beta$, las neuronas de la red se actualizan simultáneamente de acuerdo a las siguientes probabilidades

$$\begin{aligned} & P(\sigma_i(t+1) | \boldsymbol{\sigma}_{(i)}(t), \mathbf{v}(t), \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh \beta (h_{1,i}(t) + J v_i(t) h_{3,i}(t))] \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & P(v_i(t+1) | \boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{v}_{(i)}(t), \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \\ &= \frac{1}{2} [1 + v_i(t+1) \tanh \beta (h_{2,i}(t) + J \sigma_i(t) h_{3,i}(t))] \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma}_{(i)}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) \setminus \{\sigma_i(t)\} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{v}_{(i)}(t) = \mathbf{v}(t) \setminus \{v_i(t)\} \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \{\xi_j^\nu\} \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_j^\nu\}, \quad (3.19)$$

con $j \in \{1, \dots, N\}, \nu \in \{1, \dots, p\}$. El parámetro J nos permite variar la contribución de los acoplamientos de cuatro espines en la dinámica de las neuronas. En el límite $J \rightarrow 0$, la red Ashkin-Teller es equivalente a dos redes Little-Hopfield independientes. La probabilidad de trayectoria de los espines σ_i y v_i condicionada en los patrones y los espines restantes a todos los pasos temporales está dada por

$$\begin{aligned} & P(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{v}_i | \boldsymbol{\sigma}_{(i)}, \mathbf{v}_{(i)}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = P(\sigma_i(0)) P(v_i(0)) \\ & \times \prod_{r=0}^{t-1} P(\sigma_i(r+1) | \boldsymbol{\sigma}_{(i)}(r), \mathbf{v}(r), \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) P(v_i(r+1) | \boldsymbol{\sigma}(r), \mathbf{v}_{(i)}(r), \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \\ & = P(\sigma_i(0)) P(v_i(0)) \prod_{r=0}^{t-1} \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(r+1) \tanh \beta (h_{1,i}(r) + J v_i(r) h_{3,i}(r))] \\ & \times \frac{1}{2} [1 + v_i(r+1) \tanh \beta (h_{2,i}(r) + J \sigma_i(r) h_{3,i}(r))] \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \{\sigma_i(0), \dots, \sigma_i(t)\} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{v}_i = \{v_i(0), \dots, v_i(t)\} \quad (3.22)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(i)} = \boldsymbol{\sigma} \setminus \sigma_i \quad (3.23)$$

$$\mathbf{v}_{(i)} = \mathbf{v} \setminus v_i. \quad (3.24)$$

Podemos obtener de $P(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{v}_i | \boldsymbol{\sigma}_{(i)}, \mathbf{v}_{(i)}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ todos los promedios relevantes de los espines σ_i y v_i . Vamos a denotar $\langle f(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{v}_i) \rangle$ al promedio de una función $f(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{v}_i)$ sobre trayectorias, es decir,

$$\langle f(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{v}_i) \rangle = \sum_{\sigma_i(0), \dots, \sigma_i(t)} \sum_{v_i(0), \dots, v_i(t)} P(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{v}_i | \boldsymbol{\sigma}_{(i)}, \mathbf{v}_{(i)}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) f(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{v}_i). \quad (3.25)$$

3.3. Análisis señal-ruido

Queremos obtener los campos $h_{1,i}(t)$, $h_{2,i}(t)$ y $h_{3,i}(t)$ en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ utilizando el método ASR descrito en el segundo capítulo para el modelo Little-Hopfield. En el caso de los campos $h_{1,i}(t)$ y $h_{2,i}(t)$ el análisis se puede realizar de forma análoga al segundo capítulo. Por lo tanto, solamente desarrollaremos en detalle el análisis correspondiente al campo $h_{3,i}(t)$.

El campo local $h_{3,i}(t)$ en (3.8) puede ser escrito de la siguiente forma

$$h_{3,i}(t) = \xi_i^1 \eta_i^1 m_3(t) + z_{3,i}(t) - \alpha \sigma_i(t) v_i(t) \quad (3.26)$$

donde

$$z_{3,i}(t) = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \xi_i^\mu \eta_i^\mu \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \eta_j^\mu \sigma_j(t) v_j(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu \neq 1} \xi_i^\mu \eta_i^\mu r_3^\mu(t). \quad (3.27)$$

La aplicación de la LNG en el traslape $m_3(t)$ da como resultado un objeto macroscópico

$$m_3(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^1 \eta_j^1 \sigma_j(t) v_j(t) \stackrel{\text{Pr}}{\cong} E[\xi^1 \eta^1 \langle \sigma(t) v(t) \rangle], \quad (3.28)$$

donde $\sigma(t)$ y $v(t)$ representan espines efectivos, Pr denota convergencia en probabilidad y E el valor esperado. En la siguiente sección reescribiremos el traslape en términos de un promedio efectivo.

No podemos aplicar el TLC directamente al ruido de interferencia. Para cualquier término $\xi_i^\mu \eta_i^\mu \xi_j^\mu \eta_j^\mu \sigma_j(t) v_j(t)$, $j \neq i$, $\mu \neq 1$ en la sumatoria del ruido de interferencia, el problema es causado por las fuentes de las correlaciones de este término con otros términos de la sumatoria. Las fuentes de estas correlaciones, se encuentran en los términos donde aparecen ξ_j^μ , η_j^μ o $\xi_j^\mu \eta_j^\mu$ como factores en los campos $h_{1,j}$, $h_{2,j}$ y $h_{3,j}$ de la neurona j , para todo tiempo de la trayectorias $\sigma_j(0) \rightarrow \sigma_j(1) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_j(t)$ y $v_j(0) \rightarrow v_j(1) \rightarrow \dots \rightarrow v_j(t)$. Eliminando estos términos en las trayectorias de los espines, se eliminan todas fuentes de las correlaciones que pueden tener una contribución macroscópica al ruido de interferencia [38]. La probabilidad de estas trayectorias se obtiene si extraemos de $P(\boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{v}_j | \boldsymbol{\sigma}_{(j)}, \mathbf{v}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ las dependencias en ξ_j^μ , η_j^μ y $\xi_j^\mu \eta_j^\mu$. Entonces reemplazamos $h_{n,j}(r)$ por $h_{n,j}^{(\mu)}(r)$, $n \in \{1, 2, 3\}$, $r \in \{0, \dots, t-1\}$, en esta probabilidad de trayectoria, donde

$$h_{n,j}^{(\mu)}(r) = h_{n,j}(r) + \delta h_{n,j}^\mu(r) \quad (3.29)$$

con

$$\delta h_{1,j}^\mu(r) = -\frac{\xi_j^\mu r_1^\mu(r)}{\sqrt{N}} \quad \delta h_{2,j}^\mu(r) = -\frac{\eta_j^\mu r_2^\mu(r)}{\sqrt{N}} \quad (3.30)$$

$$\delta h_{3,j}^\mu(r) = -\frac{\xi_j^\mu \eta_j^\mu r_3^\mu(r)}{\sqrt{N}}. \quad (3.31)$$

Los campos $h_{n,j}^{(\mu)}(r)$ tienen dependencia débil en ξ_j^μ , η_j^μ y $\xi_j^\mu \eta_j^\mu$. Por otra parte, los términos $\delta h_{n,j}^\mu(r)$ tienen una fuerte dependencia y son pequeños para N grande. Al expandir $P(\boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{v}_j | \boldsymbol{\sigma}_{(j)}, \mathbf{v}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, obtenemos términos de los tres campos, sin embargo, en el siguiente desarrollo, obtendremos contribuciones macroscópicas a $z_{3,i}(t)$ solamente de los términos $\delta h_{3,j}^\mu(r)$, $r \in \{0, \dots, t-1\}$. Por lo tanto, escribiendo solamente las contribuciones relevantes en el límite termodinámico, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & P\left(\boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{v}_j \mid \boldsymbol{\sigma}_{(j)}, \mathbf{v}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}^{(\mu)}, \boldsymbol{\eta}^{(\mu)}\right) = P(\sigma_j(0)) P(v_j(0)) \\
 & \times \prod_{r=0}^{t-1} \frac{1}{2} \left[1 + \sigma_j(t+1) \tanh \beta \left(h_{1,j}^{(\mu)}(t) + J v_j(t) h_{3,j}^{(\mu)}(t) \right) \right] \\
 & \times \frac{1}{2} \left[1 + v_j(t+1) \tanh \beta \left(h_{2,j}^{(\mu)}(t) + J \sigma_j(t) h_{3,j}^{(\mu)}(t) \right) \right] \\
 & = P\left(\boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{v}_j \mid \boldsymbol{\sigma}_{(j)}, \mathbf{v}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\right) \\
 & + \sum_{t'=0}^{t-1} \beta J v_j(t') \delta h_{3,j}^\mu(t') \frac{\partial P\left(\boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{v}_j \mid \boldsymbol{\sigma}_{(j)}, \mathbf{v}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}^{(\mu)}, \boldsymbol{\eta}^{(\mu)}\right)}{\partial (\beta J v_j(t') \delta h_{3,j}^\mu(t'))} \Bigg|_{\{\delta h_{n,j}^\mu(r)=0\}} \\
 & + \sum_{t'=0}^{t-1} \beta J \sigma_j(t') \delta h_{3,j}^\mu(t') \frac{\partial P\left(\boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{v}_j \mid \boldsymbol{\sigma}_{(j)}, \mathbf{v}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}^{(\mu)}, \boldsymbol{\eta}^{(\mu)}\right)}{\partial (\beta J \sigma_j(t') \delta h_{3,j}^\mu(t'))} \Bigg|_{\{\delta h_{n,j}^\mu(r)=0\}} \\
 & + \mathcal{O}(\dots) \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

donde

$$\boldsymbol{\xi}^{(\mu)} = \boldsymbol{\xi} \setminus \boldsymbol{\xi}^\mu \tag{3.33}$$

$$\boldsymbol{\eta}^{(\mu)} = \boldsymbol{\eta} \setminus \boldsymbol{\eta}^\mu. \tag{3.34}$$

Podemos reescribir las derivadas parciales con la ayuda de la introducción de un campo externo $\theta_{3,j}(r)$ al campo local $h_{3,j}(r)$ y la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
 & \beta J v_j(t') \frac{\partial P\left(\boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{v}_j \mid \boldsymbol{\sigma}_{(j)}, \mathbf{v}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}^{(\mu)}, \boldsymbol{\eta}^{(\mu)}\right)}{\partial (\beta J v_j(t') \delta h_{3,j}^\mu(t'))} \Bigg|_{\{\delta h_{3,j}^\mu(r)=0\}} \\
 & + \beta J \sigma_j(t') \frac{\partial P\left(\boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{v}_j \mid \boldsymbol{\sigma}_{(j)}, \mathbf{v}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}^{(\mu)}, \boldsymbol{\eta}^{(\mu)}\right)}{\partial (\beta J \sigma_j(t') \delta h_{3,j}^\mu(t'))} \Bigg|_{\{\delta h_{3,j}^\mu(r)=0\}} \\
 & = \frac{\partial P\left(\boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{v}_j \mid \boldsymbol{\sigma}_{(j)}, \mathbf{v}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\right)}{\partial \theta_{3,j}(t')} \Bigg|_{\{\theta_{3,j}(r)=0\}} \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

con $h_{3,j}(r) = \frac{1}{N} \sum_{\nu} \sum_{k \neq j} \xi_j^{\nu} \eta_j^{\nu} \xi_k^{\nu} \eta_k^{\nu} \sigma_k(r) v_k(r) + \theta_{3,j}(r)$. Denotando $\sigma_j^{(\mu)}$ y $v_j^{(\mu)}$ a los espines σ_j y v_j con dependencia débil en ξ_j^{μ} , η_j^{μ} y $\xi_j^{\mu} \eta_j^{\mu}$, y evaluando el promedio sobre sus trayectorias, cada una con probabilidad (3.32), obtenemos

$$\left\langle \sigma_j^{(\mu)}(t) v_j^{(\mu)}(t) \right\rangle = \langle \sigma_j(t) v_j(t) \rangle + \sum_{t'=0}^{t-1} \delta h_{3,j}^{\mu}(t') \left. \frac{\partial \langle \sigma_j(t) v_j(t) \rangle}{\partial \theta_{3,j}(t')} \right|_{\{\theta_{3,j}(r)=0\}} + \mathcal{O}(\dots). \quad (3.36)$$

El traslape residual puede ser escrito de la siguiente forma

$$r_3^{\mu}(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^{\mu} \eta_j^{\mu} \sigma_j^{(\mu)}(t) v_j^{(\mu)}(t) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^{\mu} \eta_j^{\mu} \left(\sigma_j(t) v_j(t) - \sigma_j^{(\mu)}(t) v_j^{(\mu)}(t) \right). \quad (3.37)$$

En el límite termodinámico, aplicando el TLC al primer término en el lado derecho y la LNG al segundo, se obtiene un objeto macroscópico. Alternativamente, se obtiene una ecuación equivalente, en el límite termodinámico, al sustituir el segundo término por el promedio sobre trayectorias de los espines en este término. Por lo tanto,

$$z_{3,i}(t) = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \sum_{j \neq i} \xi_i^{\mu} \eta_i^{\mu} \xi_j^{\mu} \eta_j^{\mu} \sigma_j^{(\mu)}(t) v_j^{(\mu)}(t) + \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \sigma_i^{(\mu)}(t) v_i^{(\mu)}(t) + \sum_{t'=0}^{t-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu \neq 1} \xi_i^{\mu} \eta_i^{\mu} r_3^{\mu}(t') \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \langle \sigma_j(t) v_j(t) \rangle}{\partial \theta_j^3(t')} \right) + \mathcal{O}(\dots). \quad (3.38)$$

El primer término en el lado derecho es una suma de variables aleatorias independientes y por el TLC obtenemos una contribución Gaussiana $N(0, \alpha)$. El segundo término tiene una contribución $\alpha \sigma_i(t) v_i(t)$ en el límite termodinámico. La aplicación de la LNG al tercer término resulta en un objeto macroscópico. Por lo tanto,

$$z_{3,i}(t) = \psi_{3,i}(t) + \alpha \sigma_i(t) v_i(t) + \sum_{t'=0}^{t-1} z_{3,i}(t') G_3(t, t') \quad (3.39)$$

con

$$\psi_{3,i}(t) = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \sum_{j \neq i} \xi_i^\mu \eta_i^\mu \xi_j^\mu \eta_j^\mu \sigma_j^{(\mu)}(t) v_j^{(\mu)}(t) \stackrel{D}{=} N(0, \alpha), \quad (3.40)$$

donde D denota convergencia en distribución, y

$$G_3(t, t') = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \langle \sigma_j(t) v_j(t) \rangle}{\partial \theta_{3,j}(t')} \Big|_{\{\theta_{3,j}(r)=0\}} \stackrel{\text{Pr}}{=} E \left[\frac{\partial \langle \sigma(t) v(t) \rangle}{\partial \theta_3(t')} \Big|_{\{\theta_3(r)=0\}} \right]. \quad (3.41)$$

Suponemos que $G_3(t, t') = 0$ para $t' \geq t$. En el límite termodinámico se obtiene la siguiente covarianza de las variables aleatorias $\psi_{3,i}$

$$E[\psi_{3,i}(t) \psi_{3,i}(t')] = \alpha C_3(t, t') \quad (3.42)$$

donde

$$C_3(t, t') = E \left[\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \sigma_j(t) v_j(t) \sigma_j(t') v_j(t') \right] \stackrel{\text{Pr}}{=} E[\langle \sigma(t) v(t) \sigma(t') v(t') \rangle]. \quad (3.43)$$

Los objetos macroscópicos $C_3(t, t')$ y $G_3(t, t')$ son las funciones de correlación y respuesta, respectivamente. En la siguiente sección obtendremos las ecuaciones de esos objetos macroscópicos en términos de un promedio efectivo.

Las condiciones iniciales descritas en la sección 3.2 implican que $z_{3,i}(0) = \psi_{3,i}(0) + \alpha \sigma_i(0) v_i(0)$. Introduciendo iterativamente la relación recursiva (3.39) para $z_{3,i}(t)$ en el campo local (3.26) y usando las propiedades de la función respuesta, obtenemos

$$h_{3,i}(t) = \xi_i^1 \eta_i^1 m_3(t) + \alpha \sum_{t'=0}^{t-1} R_3(t, t') \sigma_i(t') v_i(t') + \sqrt{\alpha} \phi_{3,i}(t) + \theta_{3,i}(t) \quad (3.44)$$

donde

$$R_3(t, t') = [\mathbf{G}_3(\mathbf{1} - \mathbf{G}_3)^{-1}](t, t') \quad (3.45)$$

$$\sqrt{\alpha}\phi_{3,i}(t) = \sum_{t'=0}^{t-1} [(\mathbf{1} - \mathbf{G}_3)^{-1}](t, t')\psi_{3,i}(t'). \quad (3.46)$$

Las variables aleatorias $\phi_{3,i}$ tienen distribución Gaussiana con un promedio cero y covarianza

$$\begin{aligned} D_3(t, t') &= E[\phi_{3,i}(t)\phi_{3,i}(t')] \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{s'=0}^{t'-1} [(\mathbf{1} - \mathbf{G}_3)^{-1}](t, s) [(\mathbf{1} - \mathbf{G}_3^\dagger)^{-1}](s', t') E[\psi_{3,i}(s)\psi_{3,i}(s')] \\ &= [(\mathbf{1} - \mathbf{G}_3)^{-1}\mathbf{C}_3(\mathbf{1} - \mathbf{G}_3^\dagger)^{-1}](t, t'). \end{aligned} \quad (3.47)$$

En el caso de los campos $h_{1,i}(t)$ y $h_{2,i}(t)$, los términos en la expansión de $P(\boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{v}_j | \boldsymbol{\sigma}_{(j)}, \mathbf{v}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}^{(\mu)}, \boldsymbol{\eta}^{(\mu)})$ que producen contribuciones macroscópicas a los ruidos de interferencia asociados son $\delta h_{1,j}^\mu(r)$ y $\delta h_{2,j}^\mu(r)$, $r \in \{0, \dots, t-1\}$, respectivamente. Por lo tanto, haciendo un análisis similar al segundo capítulo, se obtienen campos locales con la misma estructura del campo local que en el modelo Little-Hopfield. Los campos resultantes $h_{1,i}(t)$ y $h_{2,i}(t)$ se describen en términos de objetos macroscópicos $m_1(t)$, $C_1(t, t')$, $G_1(t, t')$ y $m_2(t)$, $C_2(t, t')$, $G_2(t, t')$, respectivamente. En la siguiente sección obtendremos las ecuaciones de esos objetos macroscópicos en términos de un promedio efectivo.

3.4. Dinámica efectiva

Las ecuaciones de los parámetros de orden puede ser escrito en términos de un promedio efectivo

$$m_1(t) = \langle \xi \sigma(t) \rangle_* \quad m_2(t) = \langle \eta v(t) \rangle_* \quad m_3(t) = \langle \xi \eta \sigma(t) v(t) \rangle_* \quad (3.48)$$

$$C_1(t, t') = \langle \sigma(t)\sigma(t') \rangle_* \quad C_2(t, t') = \langle v(t)v(t') \rangle_* \quad (3.49)$$

$$C_3(t, t') = \langle \sigma(t)v(t)\sigma(t')v(t') \rangle_* \quad (3.50)$$

$$G_1(t, t') = \left. \frac{\partial \langle \sigma(t) \rangle_*}{\partial \theta_1(t')} \right|_{\{\theta_1(r)=0\}} \quad G_2(t, t') = \left. \frac{\partial \langle v(t) \rangle_*}{\partial \theta_2(t')} \right|_{\{\theta_2(r)=0\}} \quad (3.51)$$

$$G_3(t, t') = \left. \frac{\partial \langle \sigma(t)v(t) \rangle_*}{\partial \theta_3(t')} \right|_{\{\theta_3(r)=0\}}. \quad (3.52)$$

El promedio efectivo de una función $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v})$, para $t_f > 0$, está dada por (omitiendo el índice en los patrones condensados)

$$\begin{aligned} & \langle f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) \rangle_* = E[\langle f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) \rangle] \\ & = \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} \sum_{v(0)\dots v(t_f)} \sum_{\xi} \sum_{\eta} \int d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3 P(\phi_1) P(\phi_2) P(\phi_3) \\ & \quad P(\xi) P(\eta) P(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \mid \xi, \eta, \phi_1, \phi_2, \phi_3) f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma(0), \dots, \sigma(t_f)\} \quad (3.54)$$

$$\boldsymbol{v} = \{v(0), \dots, v(t_f)\} \quad (3.55)$$

$$\boldsymbol{\phi}_n = \{\phi_n(0), \dots, \phi_n(t_f - 1)\} \quad (3.56)$$

$$d\boldsymbol{\phi}_n = \prod_{t=0}^{t_f-1} d\phi_n(t), \quad (3.57)$$

con $n \in \{1, 2, 3\}$. Las variables aleatorias ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 tienen distribución Gaussiana con un promedio cero y matrices de covarianza $\mathbf{D}_1 = \{D_1(t, t')\}$, $\mathbf{D}_2 = \{D_2(t, t')\}$ y $\mathbf{D}_3 = \{D_3(t, t')\}$, respectivamente:

$$\begin{aligned}
D_1(t, t') &= E[\phi_1(t)\phi_1(t')] \\
&= \left[(\mathbf{1} - \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{C}_1 (\mathbf{1} - \mathbf{G}_1^\dagger)^{-1} \right] (t, t') \quad (3.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2(t, t') &= E[\phi_2(t)\phi_2(t')] \\
&= \left[(\mathbf{1} - \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{C}_2 (\mathbf{1} - \mathbf{G}_2^\dagger)^{-1} \right] (t, t') \quad (3.59)
\end{aligned}$$

con $D_3(t, t')$ dada por (3.47). En este promedio efectivo $P(\phi_n)$, $n \in \{1, 2, 3\}$, describe una distribución de probabilidad Gaussiana multidimensional

$$P(\phi_n) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi \mathbf{D}_n)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t, t'=0}^{t_f-1} \phi_n(t) \mathbf{D}_n^{-1}(t, t') \phi_n(t')\right) \quad n \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.60)$$

Por otra parte, $P(\sigma, \nu \mid \xi, \eta, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ es la distribución de probabilidad de trayectoria de los espines efectivos

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \nu \mid \xi, \eta, \phi_1, \phi_2, \phi_3) &= P(\sigma(0)) P(\nu(0)) \\
&\times \prod_{r=0}^{t_f-1} \frac{1}{2} [1 + \sigma(r+1) \tanh \beta (h_1(r) + J\nu(r)h_3(r))] \\
&\times \frac{1}{2} [1 + \nu(r+1) \tanh \beta (h_2(r) + J\sigma(r)h_3(r))], \quad (3.61)
\end{aligned}$$

la cual depende de los campos locales efectivos

$$h_1(t) = \xi m_1(t) + \alpha \sum_{t'=0}^{t-1} R_1(t, t') \sigma(t') + \sqrt{\alpha} \phi_1(t) + \theta_1(t) \quad (3.62)$$

$$h_2(t) = \eta m_2(t) + \alpha \sum_{t'=0}^{t-1} R_2(t, t') \nu(t') + \sqrt{\alpha} \phi_2(t) + \theta_2(t) \quad (3.63)$$

$$h_3(t) = \xi \eta m_3(t) + \alpha \sum_{t'=0}^{t-1} R_3(t, t') \sigma(t') \nu(t') + \sqrt{\alpha} \phi_3(t) + \theta_3(t) \quad (3.64)$$

donde

$$R_1(t, t') = [\mathbf{G}_1(\mathbf{1} - \mathbf{G}_1)^{-1}](t, t') \quad (3.65)$$

$$R_2(t, t') = [\mathbf{G}_2(\mathbf{1} - \mathbf{G}_2)^{-1}](t, t') \quad (3.66)$$

con $R_3(t, t')$ definida en (3.45).

3.5. Análisis numérico

En esta sección vamos a resolver numéricamente las ecuaciones de los parámetros de orden del modelo Ashkin-Teller completamente conectado extendiendo el método Eissfeller-Opper descrito en el capítulo 2 para el modelo Little-Hopfield. También estudiaremos la evolución de los parámetros de orden mediante simulaciones computacionales en un sistema finito.

3.5.1. Método Eissfeller-Opper

El método presentado a continuación es una extensión del método descrito para el modelo Little-Hopfield. Para un número grande M de réplicas, el promedio efectivo (3.53) es reemplazado por un promedio sobre el ensamble de réplicas.

Queremos predecir los parámetros de orden que forman los campos $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $h_3(t)$, utilizando el método Eissfeller-Opper. En el caso de los parámetros de orden que forman los campos $h_1(t)$ y $h_2(t)$, el análisis se puede realizar de forma análoga al capítulo 2. Por lo tanto, solamente desarrollaremos en detalle el análisis correspondiente a los parámetros de orden que forman el campo $h_3(t)$. Por otra parte, debido a las características del modelo, los traslapes m_1 y m_2 convergen al mismo estado de equilibrio. Por lo tanto, en el siguiente análisis numérico tenemos $m_1 = m_2$.

El algoritmo necesita como parámetros: el número de réplicas M del sistema, el tiempo final t_f , la capacidad de la red α , la temperatura $T = \beta^{-1}$, el traslape

inicial m_0 y el parámetro J . Para una réplica i , al tiempo t , las variables del algoritmo son los patrones condensados $\eta_i, \xi_i \in \{-1, 1\}$, los espines efectivos $\sigma_i(t), v_i(t) \in \{-1, 1\}$ y los ruidos Gaussianos $\phi_{1,i}(t), \phi_{2,i}(t), \phi_{3,i}(t) \in \mathbb{R}$. Al tiempo $t = 0$, para cada réplica $j \in \{1, \dots, M\}$, los espines efectivos se inicializan tomando los valores ± 1 con probabilidades $P(\sigma_j(0) = \pm 1) = (1 \pm m_0 \xi_j)/2$ y $P(v_j(0) = \pm 1) = (1 \pm m_0 \eta_j)/2$, mientras que los patrones condensados toman los valores ± 1 con probabilidades $P(\xi_j = \pm 1) = 1/2$ y $P(\eta_j = \pm 1) = 1/2$. El único elemento de las matrices de covarianza al tiempo $t = 0$ se inicializa con $D_1(0, 0) = 1$, $D_2(0, 0) = 1$ y $D_3(0, 0) = 1$. El algoritmo procede de forma recursiva. Para predecir el valor de los parámetros de orden al tiempo t es necesario conocer, para cada réplica $j \in \{1, \dots, M\}$, los patrones condensados η_i, ξ_j , los espines efectivos $\sigma_j(t'), \eta_j(t')$ para $t' \in \{0, \dots, t\}$, los ruidos Gaussianos $\phi_{1,j}(t'), \phi_{2,j}(t'), \phi_{3,j}(t')$ para $t' \in \{0, \dots, t-1\}$ y las matrices de covarianza $D_1(t', t''), D_2(t', t''), D_3(t', t'')$ para $t', t'' \in \{0, \dots, t-1\}$.

Antes de hacer una descripción del algoritmo, es necesario reescribir las funciones respuesta en términos de cantidades conocidas. Usando integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned}
 G_3(t, t') &= \frac{\partial \langle \sigma(t) v(t) \rangle_*}{\partial \theta_3(t')} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial \langle \sigma(t) v(t) \rangle_*}{\partial \phi_3(t')} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{t''=0}^{t-1} \langle \sigma(t) v(t) \phi_3(t'') \rangle_* \mathbf{D}_3^{-1}(t', t'') \quad (3.67)
 \end{aligned}$$

donde $G_1(t, t')$ y $G_2(t, t')$ se reescriben de forma análoga a (2.42). El algoritmo Eissfeller-Opper consiste de los siguientes pasos ($t < t_f$):

1. Los parámetros de orden del sistema $m_3(t)$, $C_3(t, t') = C_3(t', t)$, $t' \leq t$,

$G_3(t, t')$, $t' < t$, se calculan promediando sobre el ensamble de réplicas:

$$m_3(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \eta_i \xi_i \sigma_i(t) v_i(t) \quad (3.68)$$

$$C_3(t, t') = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_i(t) v_i(t) \sigma_i(t') v_i(t') \quad (3.69)$$

$$G_3(t, t') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{t''=0}^{t-1} \mathbf{D}_3^{-1}(t', t'') \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_i(t) v_i(t) \phi_{3,i}(t'') \quad (3.70)$$

donde $m_1(t)$, $m_2(t)$, $C_1(t, t')$, $C_2(t, t')$, $G_1(t, t')$ y $G_2(t, t')$ se obtienen de forma análoga al paso 1 en 2.4.1.

2. Se obtienen las matrices $\mathbf{S}_3 = (\mathbf{1} - \mathbf{G}_3)^{-1}$, $\mathbf{D}_3 = \mathbf{S}_3 \mathbf{C}_3 \mathbf{S}_3^\dagger$ y $\mathbf{R}_3 = \mathbf{S}_3 - \mathbf{I}_3$.

Las matrices \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 , \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 se obtienen de forma análoga al paso 2 en 2.4.1.

3. Se generan los ruidos Gaussianos con matriz de covarianza \mathbf{D}_3 para cada réplica

$$\phi_{3,i}(t) = \frac{\eta_{3,i}(t)}{\sqrt{\mathbf{D}_3^{-1}(t, t)}} - \frac{1}{\mathbf{D}_3^{-1}(t, t)} \sum_{t'=0}^{t-1} \mathbf{D}_3^{-1}(t, t') \eta_{3,i}(t') \quad (3.71)$$

donde los términos $\eta_{3,i}(t)$ son valid, para toda i y t , con distribución Gaussiana estándar $N(0, 1)$. Los ruidos Gaussianos $\phi_{1,i}(t)$ y $\phi_{2,i}(t)$, se generan de forma análoga al paso 3 en 2.4.1.

4. Se genera el campo local efectivo para cada réplica

$$h_{3,i}(t) = \eta_i \xi_i m_3(t) + \alpha \sum_{t'=0}^{t-1} R_3(t, t') \sigma_i(t') v_i(t') + \sqrt{\alpha} \phi_{3,i}(t). \quad (3.72)$$

Los campos $h_{1,i}(t)$ y $h_{2,i}(t)$ se generan de forma análoga al paso 4 en 2.4.1.

5. Usando los campos locales efectivos, se generan los espines efectivos al tiempo $t + 1$ para cada réplica

$$\begin{aligned} & P(\sigma_i(t+1) | h_{1,i}(t), h_{3,i}(t), v_i(t)) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh \beta (h_{1,i}(t) + J v_i(t) h_{3,i}(t))] \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned}
& P(v_i(t+1)|h_{2,i}(t), h_{3,i}(t), \sigma_i(t)) \\
&= \frac{1}{2} [1 + v_i(t+1) \tanh \beta (h_{2,i}(t) + J\sigma_i(t)h_{3,i}(t))]. \quad (3.74)
\end{aligned}$$

6. Si $t < t_f$ se incrementa t , y se repite el algoritmo desde el paso 1, en caso contrario el proceso se detiene.

3.5.2. Resultados

En esta sección discutimos los resultados numéricos obtenidos a partir de las ecuaciones de los parámetros de orden derivadas en la sección anterior para el modelo Ashkin-Teller completamente conectado. Hemos resuelto las ecuaciones de los parámetros de orden numéricamente, usando el método Eissfeller-Opper [40], el cual está basado en la evolución independiente de M réplicas de cada espín efectivo. Los promedios efectivos (3.53) son reemplazados por promedios sobre el ensamble de réplicas para M grande. En nuestros cálculos hemos tomado $M = 5 \cdot 10^5$.

La evolución de los traslapes m_1 y m_3 en los primeros pasos temporales es mostrado en la figura 3.1 para $T = 0.15$, $\alpha_{ATNN} = 0.05$ y $J = 1.0$. Las líneas sólidas representan las predicciones teóricas obtenidas con el método Eissfeller-Opper. Las líneas con guiones fueron obtenidas mediante la simulación de una red de $N = 5000$ neuronas promediada sobre 200 corridas. Los resultados de las simulaciones soportan nuestras predicciones teóricas.

La motivación de esta sección es determinar si se pueden mejorar las capacidades de la red para recuperar dos patrones diferentes simultáneamente mediante la introducción de acoplamientos de cuatro espines. Las líneas de la figura 3.2 representan los diagramas capacidad-temperatura del sistema con $J = 0.0$, $J = 0.3$ y $J = 0.5$. Para valores más grandes del parámetro, el sistema presenta una convergencia lenta al equilibrio a temperaturas bajas y la potencia computacional requerida aumenta substancialmente. El sistema es inicializado con un traslape $m_1(0) = 0.99$ y la dinámica se obtiene con el método Eissfeller-

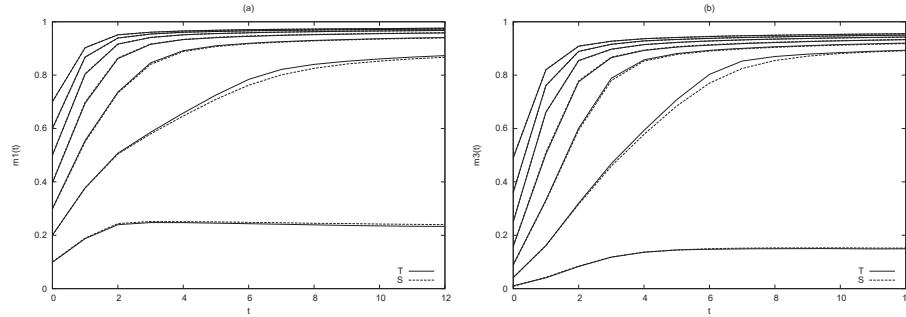


Figura 3.1: Evolución temporal de los traslapes (a) m_1 y (b) m_3 con $T = 0.15$, $\alpha_{ATNN} = 0.053$, $J = 1.0$. Las líneas sólidas denotan resultados teóricos y las líneas con guiones los resultados obtenidos por simulación en computadora con $N = 5000$ neuronas promediado sobre 200 corridas.

Opper. Registramos la temperatura cuando el traslape m_1 ha disminuido por debajo de 0.4 después de 200 pasos temporales. Por debajo de las líneas resultantes encontramos la fase donde el sistema puede recuperar patrones y arriba de las líneas el sistema no puede recuperar patrones. En la gráfica podemos ver que la capacidad crítica se incrementa a bajas temperaturas cuando se incrementa J mientras a temperaturas mayores este comportamiento se mantiene pero la diferencia es más pequeña. En todo el diagrama, la capacidad crítica es mayor que la del modelo Little-Hopfield. Estos resultados contrastan con el comportamiento encontrado en el modelo con dilución extrema asimétrica donde la capacidad crítica a temperaturas bajas decrece al incrementar J y donde el modelo sin acoplamiento de cuatro espines tiene una mayor capacidad crítica [41].

Las líneas de la figura 3.3 representan la cuenca de atracción del sistema para $J = 0.0$, $J = 0.3$ y $J = 0.5$, con $T = 0.35$. El sistema es inicializado con varios valores del traslape m_1 y la dinámica se obtiene con el método Eissfeller-Opper. Registramos la temperatura cuando el traslape m_1 tiene un valor por debajo de 0.4 después de 200 pasos temporales. Por debajo de las líneas resultantes el

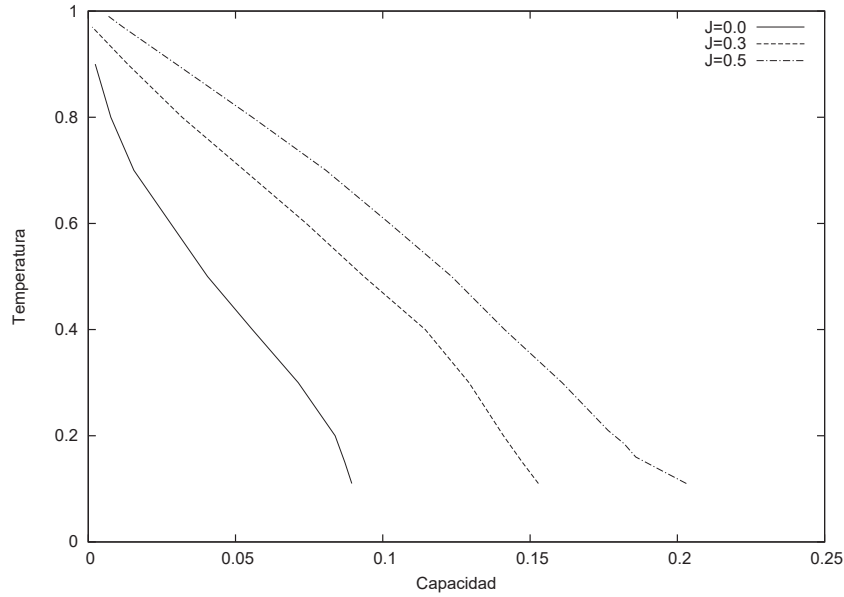


Figura 3.2: Diagramas Capacidad-Temperatura para (líneas sólidas) $J = 0.0$, (líneas con guiones) $J = 0.3$ y (líneas con puntos y guiones) $J = 0.5$.

estado inicial del sistema se encuentra dentro de la cuenca de atracción de los patrones condensados, por tanto, se pueden recuperar estos patrones de forma simultánea. Arriba de las líneas el sistema no puede recuperar los patrones condensados. En todas las líneas, para valores grandes del traslape inicial la capacidad crítica aumenta de forma notoria cuando el traslape aumenta. Por otra parte, para valores pequeños del traslape inicial la capacidad crítica no tiene cambios notorios al aumentar el traslape. En la gráfica podemos ver que la capacidad crítica se incrementa para valores grandes del traslape inicial cuando se incrementa J , mientras a traslapes menores este comportamiento se mantiene pero la diferencia es más pequeña. La cuenca de atracción es mayor que la del modelo Little-Hopfield.

Las líneas de la figura 3.4 representan diferentes evoluciones temporales del traslape m_1 para $J = 0.5$, $J = 1.5$, $J = 2.5$, con $T = 1.10$ y $\alpha_{ATNN} = 0.008$. El sistema es inicializado con varios valores del traslape m_1 y la dinámica se

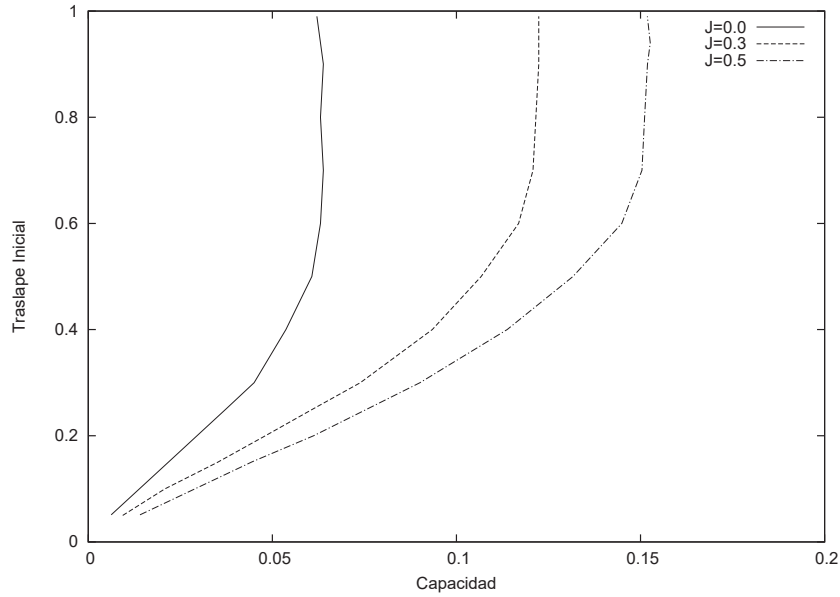


Figura 3.3: Diagramas Cuenca de atracción para (líneas sólidas) $J = 0.0$, (líneas con guiones) $J = 0.3$ y (líneas con puntos y guiones) $J = 0.5$, con $T = 0.35$.

obtiene con el método Eissfeller-Opper. En la gráfica podemos ver que la calidad en la recuperación de patrones es mejorada al incrementar el parámetro J . La recuperación de patrones es posible para $T > 1$ cuando el parámetro J es lo suficientemente grande. Estos resultados contrastan con el comportamiento encontrado en el modelo Little-Hopfield donde el sistema falla en recuperar patrones para $T > 1$.

En conclusión, a temperaturas bajas hay una mejora en la capacidad crítica con la introducción de acoplamientos de cuatro espines para valores bajos del parámetro J , no tenemos datos concluyentes para valores grandes de J debido al límite del poder de cómputo. Por otra parte, a temperaturas altas hay una mejora en la calidad en la recuperación de patrones para valores altos de J , los beneficios obtenidos en la capacidad crítica decrecen con la temperatura para valores pequeños de J . También se concluye que hay una mejora en la cuenca de atracción con la introducción de acoplamientos de cuatro espines para valores

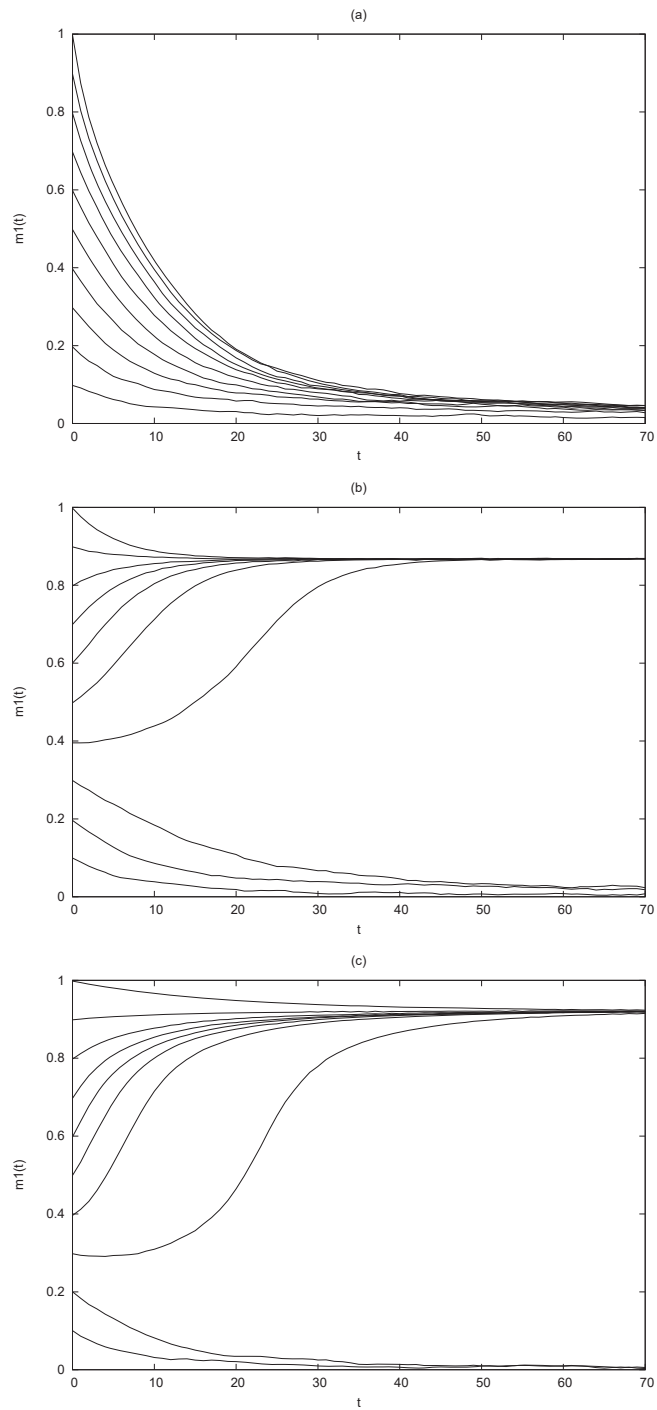


Figura 3.4: Evolución temporal del traslape m_1 con $T = 1.10$, $\alpha_{ATNN} = 0.008$, para (a) $J = 0.5$, (b) $J = 1.5$ y (c) $J = 2.5$.

bajos del parámetro J .

Conclusiones

En este capítulo estudiamos la dinámica del modelo Ashkin-Teller usando el método ASR desarrollado en el capítulo anterior. Este modelo incluye neuronas que están compuestas de dos espines de diferentes tipos y acoplamientos de dos y cuatro espines entre las neuronas. Por tanto, el método ASR se ha extendido para analizar el ruido de interferencia de campos con acoplamientos de cuatro espines con la probabilidad de trayectoria de los dos espines de una neurona.

En el límite termodinámico, se obtiene lo que puede ser interpretado como una teoría describiendo dos espines efectivos $\sigma(t)$ y $\nu(t)$, sometidos a campos locales efectivos $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $h_3(t)$ (3.62)-(3.64), con la dinámica de estos espines descrita por la probabilidad de trayectoria $P(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu} \mid \xi, \eta, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ (3.61). Los campos $h_1(t)$ y $h_2(t)$ tienen el mismo tipo de contribuciones encontradas en el campo local efectivo del modelo Little-Hopfield. Los campos efectivos $h_3(t)$ tienen tres contribuciones: la señal que depende de los dos patrones condensados, ξ y η , ruido discreto que depende de todos los estados anteriores de los espines efectivos, $\sigma(t)$ y $\nu(t)$, y contribuciones de ruido Gaussiano, ϕ_3 , con promedio cero y temporalmente correlacionado. Por tanto, el sistema efectivo, que fue derivado de un sistema que evoluciona como un proceso de Markov, está descrito por un proceso que no es de Markov.

Hemos resuelto numéricamente las ecuaciones de los parámetros de orden para el modelo Ashkin-Teller completamente conectado usando el método Eissfeller-Opper. Las predicciones teóricas del método ASR tienen una muy buena correspondencia con las simulaciones numéricas. Las capacidades de la red para recuperar dos patrones diferentes simultáneamente son mejoradas con la introducción de acoplamientos de cuatro espines. A temperaturas bajas, hay una mejora clara de la capacidad crítica para valores bajos del parámetro J . A temperaturas altas, la calidad en la recuperación es mejorada para valores grandes de J . Por otra parte, también hay una mejoría importante en la cuenca

de atracción para valores bajos del parámetro J .

Debido a la inclusión de acoplamientos de cuatro espines, las dificultades matemáticas se incrementan considerablemente si se intenta resolver el modelo Ashkin-Teller completamente conectado con el método AFG en relación al modelo Little-Hopfield. Por otra parte, con el método ASR las ecuaciones de los parámetros de orden se obtienen de forma simple con poco incremento en la dificultad matemática con respecto al modelo Little-Hopfield.

Capítulo 4

Otras arquitecturas

4.1. Introducción

En este capítulo estudiamos la dinámica de distintas arquitecturas de redes neuronales usando el método ASR propuesto en capítulos anteriores. En primer lugar estudiamos modelos con dilución al extremo. En estos tipos de modelos, la conectividad promedio es infinita, pero la distancia promedio entre dos neuronas cualquiera tiende a infinito. Analizaremos los casos con dilución asimétrica y simétrica, es decir, con sinapsis asimétricas y simétricas, respectivamente. En segundo lugar estudiaremos modelos completamente conectados con sinapsis asimétricas. Al final, discutiremos las consecuencias que tiene en la dinámica de la red la introducción de sinapsis simétricas.

Vamos a seguir la estrategia planteada en el primer capítulo para estudiar los ruidos de interferencia de las diferentes arquitecturas en este capítulo. Es decir, independientemente del tipo de arquitectura estudiada, en el análisis del ruido de interferencia consideramos como posibles fuentes de las correlaciones a todas las fuentes encontradas en el modelo completamente conectado con sinapsis simétricas. Al final de este capítulo discutiremos las consecuencias de

esta estrategia.

4.2. Definiciones

Consideraremos redes que consisten de N neuronas binarias $\sigma_i \in S$ con $S = \{-1, 1\}$. Un estado de la red es descrito por

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \{\sigma_i(t)\} \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (4.1)$$

y la historia del sistema hasta el tiempo t es descrita por

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_i(t')\} \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad t' \in \{0, \dots, t\}. \quad (4.2)$$

Estamos interesados en almacenar p patrones $\boldsymbol{\xi}^\mu = \{\xi_i^\mu \in S\}$ con $i \in \{1, \dots, N\}$, $\mu \in \{1, \dots, p\}$. Los componentes de los patrones forman una colección *vauid*, tomando los valores ± 1 con probabilidad $1/2$. Cada neurona está conectada con las neuronas restantes por sinapsis J_{ij} que definen el modelo a estudiar.

El campo local de la neurona i se define por

$$h_i(t) = \sum_j J_{ij} \sigma_j(t). \quad (4.3)$$

Al tiempo $t = 0$, todas las neuronas se escogen *vauid* de acuerdo a la distribución de probabilidad

$$P(\sigma_i(0) = \pm 1) = \frac{1 \pm m_0 \xi_i^1}{2} \quad (4.4)$$

y por lo tanto el traslape entre el estado inicial $\boldsymbol{\sigma}(0)$ y el patrón $\boldsymbol{\xi}^1$, es m_0 en el límite termodinámico.

4.3. Redes neuronales que presentan dilución al extremo

En una red con dilución al extremo, las sinapsis están definidas de la siguiente forma

$$J_{ij} = \frac{c_{ij}}{c} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \quad J_{ii} = 0. \quad (4.5)$$

donde c representa la conectividad promedio de las neuronas. La capacidad de estas redes está dada por $\alpha = p/c$. Las propiedades de la arquitectura están descritas por el conjunto de variables $\mathbf{c} = \{c_{ij}\}$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$, con $c_{ij} \in \{0, 1\}$. Estas variables se escogen, dependiendo el tipo de dilución, con las siguientes probabilidades:

simétrica

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad \forall i < j \quad P(c_{ij}) = \frac{c}{N} \delta_{c_{ij},1} + \left(1 - \frac{c}{N}\right) \delta_{c_{ij},0} \quad (4.6)$$

asimétrica

$$\forall i \neq j \quad P(c_{ij}) = \frac{c}{N} \delta_{c_{ij},1} + \left(1 - \frac{c}{N}\right) \delta_{c_{ij},0}. \quad (4.7)$$

Escogemos la conectividad c de tal forma que diverge con N , es decir, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c} = 0$. Cuando $c = N$ recuperamos el modelo Little-Hopfield completamente conectado. El modelo con dilución al extremo se obtiene cuando $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{c}{N} = 0$. El límite termodinámico se da cuando $c, N \rightarrow \infty$.

Todas las neuronas se actualizan simultáneamente de acuerdo a la siguiente probabilidad de transición

$$P(\sigma_i(t+1) | \boldsymbol{\sigma}_{(i)}(t), \mathbf{c}_{(i)}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh(\beta h_i(t))] \quad (4.8)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma}_{(i)}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) \setminus \{\sigma_i(t)\} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{c}_{(i)} = \mathbf{c} \setminus \{c_{ii}\} \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \{\xi_j^\nu\} \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad \nu \in \{1, \dots, p\} \quad (4.11)$$

con $\beta = T^{-1}$. La probabilidad de trayectoria de una neurona σ_i condicionada en los patrones y en el resto de las neuronas a todos los pasos temporales está dada por

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\sigma}_i | \boldsymbol{\sigma}_{(i)}, \mathbf{c}_{(i)}, \boldsymbol{\xi}) &= P(\sigma_i(0)) \prod_{r=0}^{t-1} P(\sigma_i(r+1) | \boldsymbol{\sigma}_{(i)}(r), \mathbf{c}_{(i)}, \boldsymbol{\xi}) \\ &= P(\sigma_i(0)) \prod_{r=0}^{t-1} \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(r+1) \tanh(\beta h_i(r))] \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \{\sigma_i(0), \dots, \sigma_i(t)\} \quad (4.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(i)} = \boldsymbol{\sigma} \setminus \boldsymbol{\sigma}_i. \quad (4.14)$$

A partir de $P(\boldsymbol{\sigma}_i | \boldsymbol{\sigma}_{(i)}, \mathbf{c}_{(i)}, \boldsymbol{\xi})$ podemos obtener todos los promedios relevantes de la neurona σ_i . Denotaremos $\langle f(\boldsymbol{\sigma}_i) \rangle$ al promedio de una función $f(\boldsymbol{\sigma}_i)$ sobre trayectorias de una neurona.

El traslape y el traslape residual están definidos de la siguiente forma

$$m_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N c_{ij} \xi_j^1 \sigma_j(t) \quad r_i^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N c_{ij} \xi_j^\mu \sigma_j(t) \quad \mu \neq 1. \quad (4.15)$$

El campo local está dado por

$$h_i(t) = \xi_i^1 m_i(t) + z_i(t) - \alpha c_{ii} \sigma_i(t) \quad (4.16)$$

donde

$$z_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu \neq 1} \xi_i^\mu r_i^\mu(t). \quad (4.17)$$

El último término en (4.16) es el resultado de sumar y restar términos con c_{ii} como factor a cada elemento del campo local $h_i(t)$. Por el ansatz condensado, el traslape $m_i(t)$ y el traslape residual $r_i^\mu(t)$ ($\mu \neq 1$) son de orden $\mathcal{O}(1)$. Esta situación es inducida desde las condiciones iniciales (4.4).

La aplicación de la ley de números grandes (LNG) en el traslape $m_i(t)$ genera como resultado un objeto macroscópico

$$m_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N c_{ij} \xi_j^1 \sigma_j(t) \stackrel{\text{Pr}}{=} E [\xi^1 \langle \sigma(t) \rangle], \quad (4.18)$$

donde $\sigma(t)$ representa una neurona efectiva, Pr denota convergencia en probabilidad y E el valor esperado.

Si todos los elementos en la suma del ruido de interferencia fueran independientes, podríamos aplicar el TLC. Sin embargo, como ya se ha visto en esta tesis, la aplicación directa del TLC, en general, no es correcta para $t > 0$. Para cualquier término $\xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j(t)$, $j \neq i$, $\mu \neq 1$ en la sumatoria del ruido de interferencia, el problema es causado por las fuentes de las correlaciones de este término con otros términos de la sumatoria. Vamos a proponer como posibles fuentes de estas correlaciones todas las fuentes encontradas en el modelo Little-Hopfield completamente conectado, es decir, todos los términos donde aparece ξ_j^μ como factor en el campo h_j de la neurona σ_j , para todo tiempo de la trayectoria $\sigma_j(0) \rightarrow \sigma_j(1) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_j(t)$. Eliminando estos términos en la trayectoria de la neurona, se eliminan todas las posibles fuentes de las correlaciones que pueden tener una contribución macroscópica al ruido de interferencia. La probabilidad de esta trayectoria se obtiene si extraemos de $P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \mathbf{c}_{(j)}, \boldsymbol{\xi})$ las dependencias en ξ_j^μ . Entonces reemplazamos $h_j(r)$ por $h_j^{(\mu)}(r)$, $r \in \{0, \dots, t-1\}$, en esta probabilidad de trayectoria, donde

$$h_j^{(\mu)}(r) = h_j(r) + \delta h_j^\mu(r) \quad (4.19)$$

con

$$\delta h_j^\mu(r) = -\frac{\xi_j^\mu}{\sqrt{N}} r_j^\mu(r). \quad (4.20)$$

El campo $h_j^{(\mu)}(r)$ tiene dependencia débil en ξ_j^μ . Por otra parte, el término $\delta h_j^\mu(r)$ tiene dependencia fuerte en ξ_j^μ y es pequeño para N grande. Por lo tanto, haciendo una expansión de $P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \mathbf{c}_{(j)}, \boldsymbol{\xi})$, obtenemos

$$\begin{aligned} P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \mathbf{c}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}^{(\mu)}) &= P(\sigma_j(0)) \prod_{r=0}^{t-1} P(\sigma_i(r+1) | \sigma_{(i)}(r), \mathbf{c}_{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(\mu)}) \\ &= P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \mathbf{c}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}) + \sum_{t'=0}^{t-1} \delta h_j^\mu(t') \frac{\partial P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \mathbf{c}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}^{(\mu)})}{\partial \delta h_j^\mu(t')} \Big|_{\{\delta h_j^\mu(r)=0\}} \\ &\quad + \mathcal{O}(\dots) \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde

$$\boldsymbol{\xi}^{(\mu)} = \boldsymbol{\xi} \setminus \xi^\mu. \quad (4.22)$$

Podemos reescribir las derivadas parciales con la ayuda de un campo externo $\theta_j(r)$ que vamos a introducir al campo local $h_j(r)$

$$\frac{\partial P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \mathbf{c}_{(j)}, \boldsymbol{\xi}^{(\mu)})}{\partial \delta h_j^\mu(t')} \Big|_{\{\delta h_j^\mu(r)=0\}} = \frac{\partial P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \mathbf{c}_{(j)}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \theta_j(t')} \Big|_{\{\theta_j(r)=0\}} \quad (4.23)$$

con $h_j(r) = \frac{1}{N} \sum_\nu \sum_{k \neq j} c_{ij} \xi_j^\nu \xi_k^\nu \sigma_k(r) + \theta_j(r)$. Denotando $\sigma_j^{(\mu)}$ a la neurona σ_j con dependencia débil en ξ_j^μ y evaluando el promedio sobre trayectorias, cada una con probabilidad (4.21), obtenemos

$$\langle \sigma_j^{(\mu)}(t) \rangle = \langle \sigma_j(t) \rangle + \sum_{t'=0}^{t-1} \delta h_j^\mu(t') \left. \frac{\partial \langle \sigma_j(t) \rangle}{\partial \theta_j(t')} \right|_{\{\theta_j(r)=0\}} + \mathcal{O}(\dots). \quad (4.24)$$

El traslape residual se puede escribir de la siguiente forma

$$r_i^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N c_{ij} \xi_j^\mu \sigma_j^{(\mu)}(t) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N c_{ij} \xi_j^\mu \left(\sigma_j(t) - \sigma_j^{(\mu)}(t) \right). \quad (4.25)$$

En el límite termodinámico, aplicando el TLC al primer término en el lado derecho y la LNG al segundo, obtenemos un objeto macroscópico. Alternativamente, se obtiene una ecuación equivalente, en el límite termodinámico, sustituyendo las variables neuronales en el segundo término por los promedios sobre trayectorias de estas neuronas. Por tanto,

$$\begin{aligned} z_i(t) \approx & \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \sum_{j \neq i} c_{ij} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j^{(\mu)}(t) + \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} c_{ii} \sigma_i^{(\mu)}(t) + \\ & + \sum_{t'=0}^{t-1} \sum_{\mu \neq 1} \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{N} \sum_{k \neq j} c_{ij} c_{jk} \xi_i^\mu \xi_k^\mu \sigma_k(t') \left. \frac{\partial \langle \sigma_j(t) \rangle}{\partial \theta_j(t')} \right|_{\theta_j=0}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

El primer término en el lado derecho es una suma de variables aleatorias independientes y por el TLC obtenemos una contribución Gaussiana $\mathbb{N}(0, \alpha)$. El segundo término tiene una contribución $\alpha c_{ii} \sigma_i(t)$ en el límite termodinámico. La contribución del tercer término, en el límite termodinámico, es diferente para cada tipo de dilución. Cuando la dilución es asimétrica, las variables c_{ij} y c_{ji} son estadísticamente independientes, por tanto, no hay una contribución macroscópica. En el caso de dilución simétrica, las variables c_{ij} y c_{ji} son iguales, obteniendo una contribución macroscópica. En el límite termodinámico, obtenemos

$$z_i(t) = \psi_i(t) + \alpha c_{ii} \sigma_i(t) + \alpha \Delta \sum_{t'=0}^{t-1} \sigma_i(t') G(t, t') \quad (4.27)$$

donde

$$\psi_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \sum_{j \neq i} c_{ij} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j^{(\mu)}(t) \stackrel{D}{=} \mathbb{N}(0, \alpha) \quad (4.28)$$

y

$$G(t, t') = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (c_{ij})^2 \left(\frac{\partial \langle \sigma_j(t) \rangle_j}{\partial \theta_j(t')} \Big|_{\theta_j=0} \right) \stackrel{\text{Pr}}{=} E \left[\frac{\partial \langle \sigma(t) \rangle}{\partial \theta(t')} \Big|_{\theta=0} \right]. \quad (4.29)$$

Con $\Delta = 0$ para dilución asimétrica y $\Delta = 1$ para dilución simétrica. En el límite termodinámico se obtiene la siguiente matriz de covarianza

$$E[\psi_i(t)\psi_i(t')] = \alpha C(t, t') \quad (4.30)$$

donde

$$C(t, t') \equiv E \left[\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} (c_{ij})^2 \sigma_j(t) \sigma_j(t') \right] \stackrel{\text{Pr}}{=} E[\langle \sigma(t) \sigma(t') \rangle]. \quad (4.31)$$

El campo local, en el límite termodinámico, está dado por

$$h_i(t) = \xi_i^1 m^1(t) + \alpha \Delta \sum_{t'=0}^{t-1} G(t, t') \sigma_i(t') + \sqrt{\alpha} \phi_i(t) \quad (4.32)$$

donde

$$\sqrt{\alpha} \phi_i(t) = \psi_i(t). \quad (4.33)$$

La variable $\phi_i(t)$, tiene una distribución Gaussiana con promedio cero y la siguiente matriz de covarianza

$$\begin{aligned} D(t, t') = E[\phi_i(t)\phi_i(t')] &= \frac{1}{\alpha} E[\psi_i(t)\psi_i(t')] \\ &= C(t, t'). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Podemos derivar la dinámica efectiva de forma análoga al análisis realizado en el modelo Little-Hopfield. El campo local efectivo resultante es

$$h(t) = \xi m(t) + \alpha \Delta \sum_{t'=0}^{t-1} G(t, t') \sigma(t') + \sqrt{\alpha} \phi(t) \quad (4.35)$$

donde $\phi(t)$ tiene distribución Gaussiana con promedio cero y matriz de covarianza (4.34), y ξ es el patrón condensado. Las ecuaciones de los parámetros de orden obtenidas en [?] usando el método AFG, se derivan directamente.

4.4. Redes neuronales que recuperan secuencias de patrones

El modelo completamente conectado que recupera patrones secuencialmente tiene sinapsis asimétricas. La capacidad de esta red está dada por $\alpha = p/N$. Los p patrones son recuperados en la secuencia $\xi^1 \rightarrow \xi^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi^p \rightarrow \xi^1$. En cada paso temporal, el patrón correspondiente en la secuencia recuperada representa el patrón condensado. Las sinapsis están definidas de la siguiente forma

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{\mu+1} \xi_j^\mu \quad (4.36)$$

donde $\xi^{p+1} = \xi^1$. Nótese que en este modelo J_{ii} es diferente de cero. Sin embargo, debido a la asimetría de las sinapsis, no hay una contribución macroscópica de los términos donde aparece J_{ii} en el campo $h_i(t)$ que contienen la neurona i , por tanto, se podrían omitir estos términos sin alterar el análisis.

Todas las neuronas se actualizan simultáneamente de acuerdo a la siguiente probabilidad de transición

$$P(\sigma_i(t+1) | \sigma_{(i)}(t), \xi) = \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh(\beta h_i(t))] \quad (4.37)$$

donde

$$\sigma_{(i)}(t) = \sigma(t) \setminus \{\sigma_i(t)\} \quad (4.38)$$

$$\xi = \{\xi_j^\nu\} \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad \nu \in \{1, \dots, p\} \quad (4.39)$$

con $\beta = T^{-1}$. La probabilidad de trayectoria de una neurona σ_i condicionada en los patrones y en el resto de las neuronas a todos los pasos temporales está dada por

$$\begin{aligned} P(\sigma_i | \sigma_{(i)}, \xi) &= P(\sigma_i(0)) \prod_{r=0}^{t-1} P(\sigma_i(r+1) | \sigma_{(i)}(r), \xi) \\ &= P(\sigma_i(0)) \prod_{r=0}^{t-1} \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(r+1) \tanh(\beta h_i(r))] \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde

$$\sigma_i = \{\sigma_i(0), \dots, \sigma_i(t)\} \quad (4.41)$$

$$\sigma_{(i)} = \sigma \setminus \sigma_i. \quad (4.42)$$

A partir de $P(\sigma_i | \sigma_{(i)}, \xi)$ podemos obtener todos los promedios relevantes de la neurona σ_i . Denotaremos $\langle f(\sigma_i) \rangle$ al promedio de una función $f(\sigma_i)$ sobre trayectorias de una neurona.

El traslape y el traslape residual están definidos por

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^t \sigma_j(t) \quad r^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \sigma_j(t) \quad \mu \neq t. \quad (4.43)$$

El campo local, para $t > 0$, está dado por

$$h_i(t) = \xi_i^{t+1} m(t) + z_i^t(t) \quad (4.44)$$

donde

$$z_i^n(s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu \neq t} \xi_i^{\mu+1} r^{\mu-(t-n)}(s) \quad n, s = 0, \dots, t. \quad (4.45)$$

Por el ansatz condensado, el traslape $m(t)$ y el traslape residual $r^\mu(t)$ ($\mu \neq t$) son de orden $\mathcal{O}(1)$. Esta situación es inducida desde las condiciones iniciales 4.4.

La aplicación de la ley de números grandes (LNG) en el traslape $m(t)$ genera como resultado un objeto macroscópico

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^t \sigma_j(t) \stackrel{\text{Pr}}{=} E [\xi^t \langle \sigma(t) \rangle], \quad (4.46)$$

donde $\sigma(t)$ representa una neurona efectiva, Pr denota convergencia en probabilidad y E el valor esperado.

Si todos los elementos en la suma en el ruido de interferencia fueran independientes, podríamos aplicar el TLC. Pero ya sabemos que, en general, no es así para $t > 0$. Para cualquier término $\xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j(t)$, $j \neq i$, $\mu \neq t$ en la sumatoria del ruido de interferencia procedemos de forma análoga al caso de dilución al extremo, eliminando todos los términos donde aparece ξ_j^μ como factor en el campo h_j de la neurona σ_j para todos los tiempos de la trayectoria $\sigma_j(0) \rightarrow \sigma_j(1) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_j(t)$. La probabilidad de esta trayectoria se obtiene si extraemos de $P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \xi)$ las dependencias en ξ_j^μ . Entonces reemplazamos $h_j(r)$ por $h_j^{(\mu)}(r)$, $r \in \{0, \dots, t-1\}$, en esta probabilidad de trayectoria, donde

$$h_j^{(\mu)}(r) = h_j(r) + \delta h_j^\mu(r) \quad (4.47)$$

con

$$\delta h_j^\mu(r) = -\frac{\xi_j^\mu}{\sqrt{N}} r^{\mu-1}(r). \quad (4.48)$$

El campo $h_j^{(\mu)}(r)$ tiene dependencia débil en ξ_j^μ . Por otra parte, el término $\delta h_j^\mu(r)$ tiene dependencia fuerte en ξ_j^μ y es pequeño para N grande. Por lo tanto, haciendo una expansión de $P(\sigma_j | \sigma_{(j)}, \xi)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 P\left(\sigma_j|\sigma_{(j)}, \xi^{(\mu)}\right) &= P(\sigma_j(0)) \prod_{r=0}^{t-1} P\left(\sigma_i(r+1)|\sigma_{(i)}(r), \xi^{(\mu)}\right) \\
 &= P\left(\sigma_j|\sigma_{(j)}, \xi\right) + \sum_{t'=0}^{t-1} \delta h_j^\mu(t') \frac{\partial P\left(\sigma_j|\sigma_{(j)}, \xi^{(\mu)}\right)}{\partial \delta h_j^\mu(t')} \Bigg|_{\{\delta h_j^\mu(r)=0\}} \\
 &\quad + \mathcal{O}(\dots)
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

donde

$$\xi^{(\mu)} = \xi \setminus \xi^\mu. \tag{4.50}$$

Podemos reescribir las derivadas parciales con la ayuda de un campo externo $\theta_j(r)$ que vamos a introducir al campo local $h_j(r)$

$$\frac{\partial P\left(\sigma_j|\sigma_{(j)}, \xi^{(\mu)}\right)}{\partial \delta h_j^\mu(t')} \Bigg|_{\{\delta h_j^\mu(r)=0\}} = \frac{\partial P\left(\sigma_j|\sigma_{(j)}, \xi\right)}{\partial \theta_j(t')} \Bigg|_{\{\theta_j(r)=0\}} \tag{4.51}$$

con $h_j(r) = \frac{1}{N} \sum_\nu \sum_{k \neq j} \xi_j^{\nu+1} \xi_k^\nu \sigma_k(r) + \theta_j(r)$. Denotando $\sigma_j^{(\mu)}$ a la neurona σ_j con dependencia débil en ξ_j^μ y evaluando el promedio sobre trayectorias, cada una con probabilidad (4.49), obtenemos

$$\left\langle \sigma_j^{(\mu)}(t) \right\rangle = \langle \sigma_j(t) \rangle + \sum_{t'=0}^{t-1} \delta h_j^\mu(t') \frac{\partial \langle \sigma_j(t) \rangle}{\partial \theta_j(t')} \Bigg|_{\{\theta_j(r)=0\}} + \mathcal{O}(\dots). \tag{4.52}$$

El traslape residual se puede escribir de la siguiente forma

$$r^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \sigma_j^{(\mu)}(t) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \left(\sigma_j(t) - \sigma_j^{(\mu)}(t) \right). \tag{4.53}$$

En el límite termodinámico, aplicando el TLC al primer término en el lado derecho y la LNG al segundo, obtenemos un objeto macroscópico. Alternativamente,

se obtiene una ecuación equivalente, en el límite termodinámico, sustituyendo las variables neuronales en el segundo término por los promedios sobre trayectorias de estas neuronas. Por tanto,

$$z_i^n(s) \approx \frac{1}{N} \sum_{\mu>t} \sum_{j=1}^N \xi_i^{\mu+1} \xi_j^\mu \sigma_j^{(\mu)}(s) + \sum_{s'=0}^{s-1} \sum_{\mu>t} \frac{\xi_i^{\mu+1}}{\sqrt{N}} r^{\mu-(t-(n-1))}(s') \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial \langle \sigma_j(s) \rangle}{\partial \theta_j(s')} \right|_{\theta_j=0}. \quad (4.54)$$

Ya que un número finito de términos no presenta una contribución macroscópica a $z_i^n(s)$ en el límite termodinámico, hemos removido los términos con $\mu \leq t$ para simplificar los cálculos. El primer término en el lado derecho de (4.54) es una suma de variables aleatorias independientes. La aplicación del TLC da una contribución Gaussiana $\mathbb{N}(0, \alpha)$. La aplicación de la LNG al segundo término da un objeto macroscópico. En el límite termodinámico, obtenemos la siguiente relación de recurrencia

$$z_i^n(s) = \psi_i^n(s) + \sum_{s'=0}^{s-1} z_i^{n-1}(s') G(s, s') \quad (4.55)$$

donde

$$\psi_i^n(s) = \frac{1}{N} \sum_{\mu>t} \sum_{j=1}^N \xi_i^{\mu+1} \xi_j^{\mu-(t-n)} \sigma_j^{(\mu-(t-n))}(s) \stackrel{D}{=} \mathbb{N}(0, \alpha) \quad (4.56)$$

y

$$G(s, s') = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial \langle \sigma_j(s) \rangle}{\partial \theta_j(s')} \right|_{\theta_j=0} \stackrel{\text{Pr}}{=} E \left[\left. \frac{\partial \langle \sigma(s) \rangle}{\partial \theta(s')} \right|_{\theta=0} \right]. \quad (4.57)$$

La matriz de covarianza $E[\psi_i^m(s) \psi_i^n(s')]$ es solamente diferente de cero en el caso $m = n$. En el límite termodinámico, obtenemos

$$E[\psi_i^n(s) \psi_i^n(s')] = \alpha C(s, s') \quad (4.58)$$

donde

$$C(s, s') = E \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sigma_j(s) \sigma_j(s') \right] \stackrel{\text{Pr}}{=} E[\langle \sigma(s) \sigma(s') \rangle]. \quad (4.59)$$

Usando las condiciones iniciales (4.4) se puede demostrar que $z_i^n(0) = \psi_i^n(0)$ para $n = 0, \dots, t$. Por tanto, introduciendo iterativamente la relación recursiva (4.55) para $z_i^t(t)$ en el campo local (4.44), obtenemos

$$h_i(t) = \xi_i^{t+1} m(t) + \sqrt{\alpha} \phi_i(t) \quad (4.60)$$

donde

$$\sqrt{\alpha} \phi_i(t) = \sum_{n \geq 0} \sum_{t' < t} (\mathbf{G})^n(t, t') \psi_i^{t-n}(t'). \quad (4.61)$$

La variable $\phi_i(t)$, tiene distribución Gaussiana con promedio cero y la siguiente matriz de covarianza

$$\begin{aligned} D(t, t') &= E[\phi_i(t) \phi_i(t')] \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n \geq 0} \sum_{t < s} \sum_{t' < s'} (\mathbf{G}^\dagger)^n(t, s) (\mathbf{G})^n(s', t') E[\psi_i^{t-n}(s) \psi_i^{t'-n}(s')] \\ &= \sum_{n \geq 0} [(\mathbf{G}^\dagger)^n \mathbf{C} (\mathbf{G})^n](t, t'). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Podemos derivar la dinámica efectiva de forma análoga al análisis realizado en el modelo Little-Hopfield. El campo local efectivo que se obtiene es

$$h(t) = \xi^{t+1} m(t) + \sqrt{\alpha} \phi(t) \quad (4.63)$$

donde $\phi(t)$ tiene distribución Gaussiana con promedio cero y matriz de covarianza (4.62), y ξ^{t+1} es el patrón condensado. Las ecuaciones obtenidas en [19] con el método AFG, pueden ser derivadas directamente. En [34], una versión simplificada de esas ecuaciones es obtenida usando que $G(s, s') = 0$ para $s \neq s' + 1$. Las ecuaciones simplificadas pueden ser obtenidas directamente con el método ASR propuesto en esta tesis. La simplificación de las ecuaciones podría haber sido anticipada mediante un análisis análogo al de la sección 1.6, observando que la asimetría de las sinapsis impide la aparición de bucles de retroalimentación. Por tanto, en la ecuación (4.55) existen términos que no contribuyen en esta versión simplificada de las ecuaciones. El origen de estos términos es la estrategia seguida en la ubicación de las fuentes de las correlaciones en el ruido de interferencia. En nuestra estrategia, consideramos todas las fuentes de las correlaciones encontradas en el modelo completamente conectado con sinapsis simétricas. Sin embargo, el modelo que estamos estudiando tiene sinapsis asimétricas y no todas las fuentes tienen contribución macroscópica al ruido de interferencia.

Conclusiones

En este capítulo estudiamos la dinámica de modelos que tienen dilución al extremo y que recuperan patrones secuencialmente usando el método ASR, los resultados que se obtienen son idénticos a los obtenidos, usando el método AFG, en [?] y [19], respectivamente. Se concluye, de la forma de los campos locales efectivos obtenidos, (4.35) y (4.63), que es la simetría en las sinapsis de la red (no la dilución) la responsable de la aparición de los términos de autointeracción en los campos.

En el estudio de las arquitecturas de este capítulo seguimos la estrategia de incluir como fuentes de las correlaciones en el ruido de interferencia, todas las fuentes encontradas en el modelo completamente conectado con sinapsis simétricas. Como resultado de esta estrategia, obtuvimos resultados idénticos a los obtenidos con el método AFG. Sin embargo, como se discutió al final de la sección (4.4), los resultados obtenidos pueden ser de una aparente mayor complejidad. Pero, un análisis cuidadoso de las fuentes en la arquitectura estudiada, puede mejorar los resultados del método ASR, eliminando las complejidades en las ecuaciones resultantes. Consideramos que esta flexibilidad del método ASR propuesto en esta tesis representa una ventaja sobre el método AFG, donde existen muchas complejidades matemáticas en el proceso de obtención de las ecuaciones de los parámetros de orden y , como se ha visto, también en las ecuaciones resultantes.

Recientemente, fueron obtenidos resultados exactos en modelos de redes neuronales con arquitecturas de redes complejas. En [44, 45], se estudian modelos con sinapsis asimétricas y conectividad infinita usando el método ASR. El método AFG es aplicado en [46, 47] para estudiar modelos con conectividad finita. Las ecuaciones obtenidas son muy difíciles de resolver. Por lo tanto, tiene relevancia el estudio de modelos con conectividad infinita y arquitecturas de redes complejas. Nuestro método puede ser aplicado para extender los resultados en

[44, 45] a modelos con sinapsis simétricas. Las probabilidades de trayectoria tienen un rol importante en las soluciones de modelos con conectividad finita. Por lo tanto, el lenguaje adecuado para buscar un método probabilístico en modelos con conectividad finita es en términos de probabilidades de transición. Usando un análisis de la probabilidad de trayectoria de una neurona, similar al desarrollado en esta tesis y un análisis comparativo con los resultados del método AFG en [46, 47], podríamos desarrollar este método probabilístico.

Apéndice A

Herramientas matemáticas

A.1. Ley de números grandes (LNG)

La ley de números grandes es una herramienta de teoría de probabilidades muy importante cuando se presentan sumatorias infinitas de variables aleatorias. Supongamos que tenemos un conjunto $\{x_n\}$, $n \in \{1, \dots, N\}$ de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (i.i.d), cada variable teniendo un valor esperado finito μ . La ley (débil) de números grandes dice

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \xrightarrow{\text{Pr}} \mu \quad (\text{A.1})$$

donde Pr denota convergencia en probabilidad. Este resultado es independiente de la condición impuesta a la desviación estándar de las variables.

A.2. Teorema del límite central (TLC)

El teorema del límite central es otra herramienta importante cuando se presentan sumatorias infinitas de variables aleatorias, con relación cercana a la ley de números grandes. Supongamos que tenemos un conjunto $\{x_n\}$, $n \in$

$\{1, \dots, N\}$ vaaid, cada variable teniendo un valor esperado finito μ y desviación estándar σ finita. Entonces se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)}{\sigma \sqrt{N}} \xrightarrow{D} \mathbb{N}(0, 1) \quad (\text{A.2})$$

donde D denota convergencia en distribución. En la relación anterior, $\mathbb{N}(0, 1)$ es una distribución normal (distribución normal estándar) con promedio cero y desviación estándar uno. De forma alternativa el teorema se puede expresar como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N x_i \xrightarrow{D} \mathbb{N}(N\mu, \sigma\sqrt{N}) \quad (\text{A.3})$$

o también

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \xrightarrow{D} \mathbb{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right). \quad (\text{A.4})$$

A.3. Integrales Gaussianas

Una integral necesaria en el análisis con funciones generadoras es la transformación de Hubbard-Stratonovich

$$\int dx \exp(-ax^2 \pm bx + c) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 + 4ac}{4a}\right). \quad (\text{A.5})$$

Un caso especial está dado por

$$\int Dz \exp(xz) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) \quad (\text{A.6})$$

donde $Dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$ es una medida Gaussiana.

A.4. Método punto-silla

Supongamos que queremos resolver la integral

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx \exp(Nf(x)) \quad (\text{A.7})$$

donde $f(x)$ es una función con segunda derivada. Supongamos que $f(x)$ tiene un único máximo en x_0 . Entonces haciendo una expansión de Taylor hasta segundo orden, alrededor de este punto, se obtiene

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^3). \quad (\text{A.8})$$

La primera derivada de $f(x)$ desaparece en x_0 . Por otra parte, la segunda derivada tiene signo negativo en este punto. Por tanto,

$$f(x) \approx f(x_0) - \frac{1}{2}(x - x_0)^2 |f''(x_0)|. \quad (\text{A.9})$$

La integral se puede escribir de la siguiente forma

$$I \approx \exp(Nf(x_0)) \int dx \exp\left(-\frac{N}{2}(x - x_0)^2 |f''(x_0)|\right) \quad (\text{A.10})$$

$$= \frac{2\pi}{N|f''(x_0)|} \exp(Nf(x_0)). \quad (\text{A.11})$$

De la misma forma se puede demostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left[\int dx \exp(Nf(x)) \right] = f(x_0). \quad (\text{A.12})$$

Apéndice B

Análisis con funciones generadoras

En las siguientes secciones resolveremos el modelo de Little-Hopfield completamente conectado mediante un análisis con funciones generadoras (AFG). Este modelo está definido en la sección 2.2.

B.1. La función generadora

El análisis con funciones generadoras es un método exacto para obtener la dinámica de una red neuronal recurrente. Todas las estadísticas relevantes sobre trayectorias se pueden obtener de la probabilidad $P(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\xi})$ de encontrar una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(0) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(1) \rightarrow \dots \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(t_f)$ desde el tiempo $t = 0$ hasta $t = t_f$, $t_f > 0$. La probabilidad de trayectoria tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\xi}) &= P(\boldsymbol{\sigma}(0)) \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^{t_f-1} P(\sigma_i(t+1)|\boldsymbol{\sigma}_{(i)}(t), \boldsymbol{\xi}) \\ &= P(\boldsymbol{\sigma}(0)) \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^{t_f-1} \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh(\beta h_i(t))]. \end{aligned}$$

Cualquier promedio del sistema puede ser evaluado usando $P(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\xi})$. Denotamos $\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle$ al promedio de una función $f(\boldsymbol{\sigma})$ sobre trayectorias de la red neuronal. Alternativamente, la función generadora $Z[\boldsymbol{\Psi}]$ produce todas las estadísticas relevantes con resultados equivalentes

$$\begin{aligned} Z[\boldsymbol{\Psi}] &= \left\langle \exp\left(-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{t_f} \Psi_i(t) \sigma_i(t)\right) \right\rangle \\ &= \sum_{\boldsymbol{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\boldsymbol{\sigma}(t_f)} P(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\xi}) \exp\left(-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{t_f} \Psi_i(t) \sigma_i(t)\right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

La función generadora nos permite obtener las estadísticas de un observable macroscópico $\Omega(\boldsymbol{\sigma})$ en cualquier tiempo de la evolución de la red neuronal. Como en toda teoría de campo medio, nos interesan observables que dependen sólo del promedio de los estados neuronales. Se supone que en el límite $N \rightarrow \infty$ sólo tiene relevancia las propiedades estadísticas de las neuronas. Derivando la función generadora respecto a los campos externos $\{\Psi_i\}$ se obtienen los promedios relevantes, incluyendo aquellos que involucran estados neuronales a distintos tiempos,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j(t) \rangle &= i \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial Z[\boldsymbol{\Psi}]}{\partial \Psi_j} \\ \langle \sigma_i(t) \sigma_j(t') \rangle &= - \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 Z[\boldsymbol{\Psi}]}{\partial \Psi_i(t) \partial \Psi_j(t')} \\ \partial \langle \sigma_i(t) \rangle / \partial \theta_j(t') &= i \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 Z[\boldsymbol{\Psi}]}{\partial \Psi_i(t) \partial \theta_j(t')}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Los patrones $\mu > 1$ son vistos como desorden. Suponemos que en el límite $N \rightarrow \infty$, el comportamiento macroscópico del sistema depende sólo de las propiedades estadísticas de este desorden, y no de su realización microscópica. Se cree que al hacer los promedios sobre el desorden en la función generadora, tendremos una simplificación significativa de las ecuaciones que se obtendrán al derivarla. Además, promediar sobre los patrones nos permite que las ecuaciones

obtenidas al final sean independientes de cualquier conjunto particular de ellos. El promedio sobre los patrones se realiza antes de calcular estadísticas con la función generadora. Por tanto, reemplazamos la función generadora original $Z[\Psi]$ por una función en la que se promedia sobre el desorden

$$\overline{Z[\Psi]} = \left\langle \exp\left(-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{t_f} \Psi_i(t) \sigma_i(t)\right) \right\rangle, \quad (\text{B.3})$$

donde el promedio sobre el desorden de cualquier cantidad X se denota por \overline{X} .

Todos los observables macroscópicos relevantes se obtendrán de la función generadora B.3. Para nuestros propósitos serán de utilidad los siguientes observables

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \overline{\langle \sigma_i(t) \rangle} = \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{i}{N} \sum_i \xi_i^1 \frac{\partial \overline{Z[\Psi]}}{\partial \Psi_i(t)} \quad (\text{B.4})$$

$$C(t, t') = \frac{1}{N} \sum_i \overline{\langle \sigma_i(t) \sigma_i(t') \rangle} = - \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial^2 \overline{Z[\Psi]}}{\partial \Psi_i(t) \partial \Psi_i(t')} \quad (\text{B.5})$$

$$G(t, t') = \frac{1}{N} \sum_i \overline{\partial \langle \sigma_i(t) \rangle / \partial \theta_i(t')} = \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{i}{N} \sum_i \frac{\partial^2 \overline{Z[\Psi]}}{\partial \Psi_i(t) \partial \theta_i(t')}. \quad (\text{B.6})$$

De esta forma hemos reducido el problema original al cálculo de la función generadora promediada en el desorden, la cual desempeña un papel similar al de la energía libre promediada sobre el desorden, utilizada en el análisis de la estática.

B.2. Evaluación de la función generadora

La motivación en esta sección es llegar a una expresión de la función generadora promediada en el desorden donde se pueda aplicar el método punto-silla (ver Apéndice A),

$$\overline{Z[\Psi]} \sim \int dx \exp(N\phi(x)), \quad (\text{B.7})$$

con la función $\phi(x)$ finita y dependiente de variables macroscópicas.

El acoplamiento entre neuronas a distintos sitios y tiempos, dificultará la realización del promedio sobre el desorden. La realización de este promedio se facilita con la introducción de los campos locales usando la forma integral de la función delta, a todos los tiempos y sitios, en la función generadora B.3. Es decir,

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{i,t} \int dh_i(t) \delta \left[h_i(t) - \sum_j J_{ij} \sigma_j(t) - \theta_i(t) \right] \\ &= \int \frac{d\mathbf{h}d\hat{\mathbf{h}}}{(2\pi)^{N(t_f+1)}} \exp \left(i \sum_{i,t} \hat{h}_i(t) \left[h_i(t) - \sum_j J_{ij} \sigma_j(t) - \theta_i(t) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

con $d\mathbf{h}d\hat{\mathbf{h}} = \prod_{i,t} [d\hat{h}_i(t)dh_i(t)]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \overline{Z[\Psi]} &= \int \frac{d\mathbf{h}d\hat{\mathbf{h}}}{(2\pi)^{N(t_f+1)}} \exp \left(i \sum_{i,t} \hat{h}_i(t) [h_i(t) - \theta_i(t)] \right) \\ &\left\langle \exp \left(-i \sum_{i,t} \Psi_i(t) \sigma_i(t) \right) \overline{\left[\exp \left(-i \sum_{i,t} \hat{h}_i(t) \sum_j J_{ij} \sigma_j(t) \right) \right]} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Como consecuencia, el promedio $\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle$ se evalúa con una probabilidad de trayectoria condicional en los campos locales, los cuales son variables de integración independientes de los patrones, facilitando el promedio sobre el desorden, es decir,

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{h}) &= P(\boldsymbol{\sigma}(0)) \prod_{i,t} P(\sigma_i(t+1)|h_i(t)) \\ &= P(\boldsymbol{\sigma}(0)) \prod_{i,t} \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh(\beta h_i(t))] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde $\mathbf{h} = \{h_j(t')\}$ con $j \in \{1, \dots, N\}$, $t' \in \{0, \dots, t_f\}$. Así que

$$\begin{aligned} \overline{Z[\Psi]} &= \int \frac{d\mathbf{h}d\hat{\mathbf{h}}}{(2\pi)^{N(t_f+1)}} \sum_{\sigma(0)} \cdots \sum_{\sigma(t_f)} P(\sigma(0)) \prod_{i,t} P(\sigma_i(t+1)|h_i(t)) \\ &\quad e^{NF[\sigma, \hat{\mathbf{h}}]} \prod_{i,t} \exp\left(i\hat{h}_i(t)[h_i(t) - \theta_i(t)] - i\Psi_i(t)\sigma_i(t)\right). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Nótese que hemos aislado el desorden en el término

$$F[\sigma, \hat{\mathbf{h}}] = \frac{1}{N} \log \left(\overline{\exp\left(-i \sum_{i,t} \hat{h}_i(t) \sum_j J_{ij} \sigma_j(t)\right)} \right). \quad (\text{B.12})$$

Para N grande se espera que (ver [?])

$$F[\dots] = \Phi[\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{K}] + \dots \quad (\text{B.13})$$

con $\Phi[\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{K}]$ una función aún por determinar. Los términos extra no tienen contribución a los observables macroscópicos en el límite termodinámico. Los conjuntos de variables macroscópicas $\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{K}$ en la expresión anterior están formados con los siguientes elementos

$$a(t) = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \sigma_i(t) \quad k(t) = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \hat{h}_i(t) \quad (\text{B.14})$$

$$q(t, t') = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i(t) \sigma_i(t') \quad Q(t, t') = \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i(t) \hat{h}_i(t') \quad (\text{B.15})$$

$$K(t, t') = \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i(t) \sigma_i(t'). \quad (\text{B.16})$$

Estas variables se pueden introducir en la función generadora usando la forma integral de la función delta

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_t \int da(t) \delta\left[a(t) - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \sigma_i(t)\right] \\ &= \left[\frac{N}{2\pi}\right]^{t_f+1} \int d\mathbf{a}d\hat{\mathbf{a}} \exp\left(iN \sum_t \hat{a}(t) \left[a(t) - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \sigma_i(t)\right]\right) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned}
 1 &= \prod_t \int dk(t) \delta \left[k(t) - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \hat{h}_i(t) \right] \\
 &= \left[\frac{N}{2\pi} \right]^{t_f+1} \int d\mathbf{k} d\hat{\mathbf{k}} \exp \left(iN \sum_t \hat{k}(t) \left[k(t) - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \hat{h}_i(t) \right] \right) \quad (\text{B.18})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= \prod_{t,t'} \int dq(t,t') \delta \left[q(t,t') - \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i(t) \sigma_i(t') \right] \\
 &= \left[\frac{N}{2\pi} \right]^{(t_f+1)^2} \int d\mathbf{q} d\hat{\mathbf{q}} \exp \left(iN \sum_{t,t'} \hat{q}(t,t') \left[q(t,t') - \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i(t) \sigma_i(t') \right] \right) \quad (\text{B.19})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= \prod_{t,t'} \int dQ(t,t') \delta \left[Q(t,t') - \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i(t) \hat{h}_i(t') \right] \\
 &= \left[\frac{N}{2\pi} \right]^{(t_f+1)^2} \int d\mathbf{Q} d\hat{\mathbf{Q}} \exp \left(iN \sum_{t,t'} \hat{Q}(t,t') \left[Q(t,t') - \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i(t) \hat{h}_i(t') \right] \right) \quad (\text{B.20})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= \prod_{t,t'} \int dK(t,t') \delta \left[K(t,t') - \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i(t) \sigma_i(t') \right] \\
 &= \left[\frac{N}{2\pi} \right]^{(t_f+1)^2} \int d\mathbf{K} d\hat{\mathbf{K}} \exp \left(iN \sum_{t,t'} \hat{K}(t,t') \left[K(t,t') - \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i(t) \sigma_i(t') \right] \right). \quad (\text{B.21})
 \end{aligned}$$

Los factores N fueron introducidos en las exponenciales con el fin de preparar el camino para usar el método punto-silla. Por tanto, escribiendo sólo términos dominantes en N , obtenemos

$$\begin{aligned}
 \overline{Z[\Psi]} &= \int da d\hat{a} dk d\hat{k} dq d\hat{q} dQ d\hat{Q} dK d\hat{K} \exp \left(N \{ \psi[\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}, \mathbf{k}, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{K}, \hat{\mathbf{K}}] \right. \\
 &\quad \left. + \Phi[\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{K}] + \Xi[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{K}}] \} + O(\dots) \right) \quad (\text{B.22})
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \psi[\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}, \mathbf{k}, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{K}, \hat{\mathbf{K}}] &= i \sum_t [\hat{a}(t)a(t) + \hat{k}(t)k(t)] \\ &+ i \sum_{t,t'} [\hat{q}(t,t')q(t,t') + \hat{Q}(t,t')Q(t,t') + \hat{K}(t,t')K(t,t')] \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

y

$$\begin{aligned} \Xi[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{K}}] &= \frac{1}{N} \sum_i \log \int \frac{d\mathbf{h}d\hat{\mathbf{h}}}{(2\pi)^{(t_f+1)}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} P(\sigma(0)) \\ &\prod_t P(\sigma(t+1)|h(t)) \exp\left(\sum_t \{i\hat{h}(t)[h(t) - \theta_i(t)] - i\Psi_i(t)\sigma(t)\}\right) \\ &\exp\left(-i\xi_i^1 \sum_t [\hat{a}(t)\sigma(t) + \hat{k}(t)\hat{h}(t)] - i \sum_{t,t'} [\hat{q}(t,t')\sigma(t)\sigma(t') \right. \\ &\quad \left. + \hat{Q}(t,t')\hat{h}(t)\hat{h}(t') + \hat{K}(t,t')\hat{h}(t)\sigma(t')\right], \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

con

$$d\mathbf{h}d\hat{\mathbf{h}} = \prod_t [dh(t)d\hat{h}(t)] \quad (\text{B.25})$$

$$P(\sigma(0)) = \frac{1}{2} (1 + m_0) \delta_{\sigma,1} + \frac{1}{2} (1 - m_0) \delta_{\sigma,-1}. \quad (\text{B.26})$$

Nótese que las neuronas y los campos se han desacoplado con respecto a los sitios. Sin embargo, las variables $\xi_i^1, \theta_i(t)$ y $\Psi_i(t)$ aún tienen dependencia en éstos. En las siguientes secciones eliminaremos por completo esta dependencia, obteniendo expresiones derivadas de la función generadora descritas por una dinámica efectiva independiente de los sitios.

La función generadora en la expresión (B.22) tiene la forma deseada para poder aplicar el método punto-silla.

B.3. Promedio sobre el desorden

El promedio sobre el desorden sólo involucra los patrones con $\mu > 1$. Por tanto, introduciendo la definición (2.3) para las variables J_{ij} en (B.12) y separando el patrón $\mu = 1$ de los patrones restantes, obtenemos

$$F[\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{h}}] = i\alpha \left[\frac{1}{N} \sum_{i,t} \sigma_i(t) \hat{h}_i(t) \right] - i \sum_t \left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \sigma_i(t) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \hat{h}_i(t) \right] \right\} \\ + \frac{1}{N} \log \left(\prod_{\mu \neq 1} \exp \left(-i \sum_t [N^{-1/2} \sum_i \xi_i^\mu \hat{h}_i(t)] [N^{-1/2} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_i(t)] \right) \right). \quad (\text{B.27})$$

Denotaremos $W[\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{h}}]$ al último término de (B.27). Haciendo uso de la independencia de los patrones, obtenemos

$$W[\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{h}}] = \frac{1}{N} \log \left(\prod_{\mu \neq 1} \left[\exp \left(-i \sum_t [N^{-1/2} \sum_i \xi_i^\mu \hat{h}_i(t)] [N^{-1/2} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_i(t)] \right) \right] \right) \\ = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq 1} \log \left(\exp \left(-i \sum_t [N^{-1/2} \sum_i \xi_i^\mu \hat{h}_i(t)] [N^{-1/2} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_i(t)] \right) \right). \quad (\text{B.28})$$

Ya que cada patrón se escogió de la misma distribución de probabilidad, el promedio de la exponencial será el mismo para cada patrón. Es decir,

$$W[\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{h}}] = \frac{p-1}{N} \log \left(\exp \left(-i \sum_t [N^{-1/2} \sum_i \xi_i \hat{h}_i(t)] [N^{-1/2} \sum_i \xi_i \sigma_i(t)] \right) \right) \\ = \alpha \log \left(\exp \left(-i \sum_t [N^{-1/2} \sum_i \xi_i \hat{h}_i(t)] [N^{-1/2} \sum_i \xi_i \sigma_i(t)] \right) \right) + O(N^{-1}) \quad (\text{B.29})$$

donde solamente hemos escrito los términos relevantes en el límite termodinámico. Nótese que se ha suprimido el superíndice μ . Para poder desacoplar el lado derecho de la ecuación anterior y permitir el promedio sobre los patrones, introducimos variables auxiliares usando la forma integral de la función delta:

$$\begin{aligned}
 1 &= \prod_t \int dx(t) \delta \left(x(t) - N^{-1/2} \sum_i \xi_i \sigma_i(t) \right) \\
 &= \int \frac{d\mathbf{x}d\hat{\mathbf{x}}}{(2\pi)^{(t_f+1)}} \exp \left(i \sum_t \hat{x}(t) \left[x(t) - N^{-1/2} \sum_i \xi_i \sigma_i(t) \right] \right) \quad (\text{B.30})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= \prod_t \int dy(t) \delta \left(y(t) - N^{-1/2} \sum_i \xi_i \hat{h}_i(t) \right) \\
 &= \int \frac{d\mathbf{y}d\hat{\mathbf{y}}}{(2\pi)^{(t_f+1)}} \exp \left(i \sum_t \hat{y}(t) \left[y(t) - N^{-1/2} \sum_i \xi_i \hat{h}_i(t) \right] \right). \quad (\text{B.31})
 \end{aligned}$$

La introducción de las variables auxiliares en el término que se quiere desacoplar nos da como resultado

$$\begin{aligned}
 W[\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{h}}] &= \alpha \log \int \frac{d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\hat{\mathbf{x}}d\hat{\mathbf{y}}}{(2\pi)^{2(t_f+1)}} \exp(i[\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{y} \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}]) \\
 &\times \overline{\prod_i \exp \left(\frac{-i}{\sqrt{N}} \xi_i \sum_t [\hat{x}(t)\sigma_i(t) + \hat{y}(t)\hat{h}_i(t)] \right)} + O(N^{-1}). \quad (\text{B.32})
 \end{aligned}$$

Los elementos de los patrones fueron elegidos estadísticamente independientes, por tanto

$$\begin{aligned}
 W[\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{h}}] &= \alpha \log \int \frac{d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\hat{\mathbf{x}}d\hat{\mathbf{y}}}{(2\pi)^{2(t_f+1)}} \exp(i[\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{y} \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}]) \\
 &\times \overline{\prod_i \exp \left(\frac{-i}{\sqrt{N}} \xi_i \sum_t [\hat{x}(t)\sigma_i(t) + \hat{y}(t)\hat{h}_i(t)] \right)} + O(N^{-1}). \quad (\text{B.33})
 \end{aligned}$$

En este momento podemos realizar el promedio sobre la distribución de los patrones

$$\begin{aligned}
 W[\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{h}}] &= \alpha \log \int \frac{d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\hat{\mathbf{x}}d\hat{\mathbf{y}}}{(2\pi)^{2(t_f+1)}} \exp \left(i[\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{y} \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}] \right. \\
 &\left. + \sum_i \log \cos \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t [\hat{x}(t)\sigma_i(t) + \hat{y}(t)\hat{h}_i(t)] \right) \right) + O(N^{-1}). \quad (\text{B.34})
 \end{aligned}$$

Usando expansiones de Taylor para el coseno y el logaritmo, se obtiene

$$\begin{aligned}
 W[\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{h}}] &= \alpha \log \int \frac{d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\hat{\mathbf{x}}d\hat{\mathbf{y}}}{(2\pi)^{2(t_f+1)}} \exp\left(i[\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{y} \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2N} \sum_i \sum_t \sum_{t'} [\hat{x}(t)\hat{x}(t')\sigma_i(t)\sigma_i(t') + \hat{x}(t)\hat{y}(t')\sigma_i(t)\hat{h}_i(t') \right. \\
 &\quad \left. + \hat{y}(t)\hat{x}(t')\hat{h}_i(t)\sigma_i(t') + \hat{y}(t)\hat{y}(t')\hat{h}_i(t)\hat{h}_i(t')] + O(N^{-1})\right) + O(N^{-1}). \quad (\text{B.35})
 \end{aligned}$$

Sustituyendo $W[\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{h}}]$ de regreso en (B.27) e introduciendo las variables macroscópicas definidas en (B.14)-(B.16), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \Phi[\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{K}] &= i\alpha \sum_t K(t, t) - i\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} + \alpha \log \int \frac{d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\hat{\mathbf{x}}d\hat{\mathbf{y}}}{(2\pi)^{2(t_f+1)}} \\
 \exp\left(i[\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{y} \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}] - \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{Q}\hat{\mathbf{y}}] + O(N^{-1})\right) &+ O(N^{-1}). \quad (\text{B.36})
 \end{aligned}$$

Realizando las integraciones respecto a las variables \mathbf{x} y \mathbf{y} , y haciendo un cambio de variables, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \Phi[\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{K}] &= i\alpha \sum_t K(t, t) - i\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \\
 + \alpha \log \int \frac{d\mathbf{u}d\mathbf{v}}{(2\pi)^{t_f+1}} \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} - 2i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] + O(N^{-1})\right) &+ O(N^{-1}). \quad (\text{B.37})
 \end{aligned}$$

Nótese que la ecuación anterior tiene la forma predicha en (B.13).

B.4. Método punto-silla

La función generadora (B.22) es dominada en el límite $N \rightarrow \infty$ por el punto silla (ver Apéndice A) de la superficie macroscópica

$$\psi[\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}, \mathbf{k}, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{K}, \hat{\mathbf{K}}] + \Phi[\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{K}] + \Xi[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{K}}]. \quad (\text{B.38})$$

Derivando la superficie macroscópica respecto a las variables $\{a(t), k(t), q(t), Q(t), K(t)\}$ e igualando a cero el resultado, obtenemos

$$\hat{a}(t) = i \frac{\partial \Phi}{\partial a(t)} \quad \hat{k}(t) = i \frac{\partial \Phi}{\partial k(t)} \quad (\text{B.39})$$

$$\hat{q}(t, t') = i \frac{\partial \Phi}{\partial q(t, t')} \quad \hat{Q}(t, t') = i \frac{\partial \Phi}{\partial Q(t, t')} \quad \hat{K}(t, t') = i \frac{\partial \Phi}{\partial K(t, t')}. \quad (\text{B.40})$$

Sustituyendo (B.37) en las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\hat{a}(t) = k(t) \quad \hat{k}(t) = a(t) \quad (\text{B.41})$$

$$\hat{q}(t, t') = -\frac{1}{2} i \alpha \frac{\int d\mathbf{u} d\mathbf{v} u(t)u(t') \exp\left(-\frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v}]\right)}{\int d\mathbf{u} d\mathbf{v} \exp\left(-\frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v}]\right)} \quad (\text{B.42})$$

$$\hat{Q}(t, t') = -\frac{1}{2} i \alpha \frac{\int d\mathbf{u} d\mathbf{v} v(t)v(t') \exp\left(-\frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v}]\right)}{\int d\mathbf{u} d\mathbf{v} \exp\left(-\frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v}]\right)} \quad (\text{B.43})$$

$$\begin{aligned} \hat{K}(t, t') &= -\alpha \delta_{t, t'} \\ &- i \alpha \frac{\int d\mathbf{u} d\mathbf{v} v(t)u(t') \exp\left(-\frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v}]\right)}{\int d\mathbf{u} d\mathbf{v} \exp\left(-\frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v}]\right)}. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Por otra parte, después de la derivación de la superficie macroscópica respecto a las variables conjugadas $\{\hat{a}(t), \hat{k}(t), \hat{q}(t), \hat{Q}(t), \hat{K}(t)\}$ e igualación a cero, obtenemos

$$a(t) = \langle \xi^1 \sigma(t) \rangle_* \quad k(t) = \langle \xi^1 \hat{h}(t) \rangle_* \quad (\text{B.45})$$

$$q(t, t') = \langle \sigma(t) \sigma(t') \rangle_* \quad Q(t, t') = \langle \hat{h}(t) \hat{h}(t') \rangle_* \quad K(t, t') = \langle \hat{h}(t) \sigma(t') \rangle_* . \quad (\text{B.46})$$

El promedio efectivo $\langle f[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] \rangle_*$ se define por

$$\langle f[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] \rangle_* = \frac{1}{N} \sum_i \left\{ \frac{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0) \dots \sigma(t_f)} M_i[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] f[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}]}{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0) \dots \sigma(t_f)} M_i[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}]} \right\} \quad (\text{B.47})$$

con

$$\begin{aligned} M_i[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] = & P(\sigma(0)) \prod_t P(\sigma(t+1)|h(t)) \exp \left(\sum_t \{ i \hat{h}(t) [h(t) - \theta_i(t)] \right. \\ & \left. - i \Psi_i(t) \sigma(t) \} - i \xi_i^1 \sum_t [\hat{a}(t) \sigma(t) + \hat{k}(t) \hat{h}(t)] - i \sum_{t, t'} [\hat{q}(t, t') \sigma(t) \sigma(t') \right. \\ & \left. + \hat{Q}(t, t') \hat{h}(t) \hat{h}(t') + \hat{K}(t, t') \hat{h}(t) \sigma(t')] \right). \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Hemos denotado como $\boldsymbol{\sigma}$ la trayectoria de una neurona efectiva σ (la misma notación se utiliza en \mathbf{h} y $\hat{\mathbf{h}}$). Los valores para $\{\hat{a}(t), \hat{k}(t), \hat{q}(t), \hat{Q}(t), \hat{K}(t)\}$ en la ecuación (B.48) están evaluados en el punto silla de la superficie macroscópica (B.38).

B.5. Significado físico

A partir de la función generadora (B.22) podemos obtener expresiones explícitas de los observables macroscópicos. Las ecuaciones acopladas (B.41)-(B.46) se resuelven simultáneamente, sin embargo es un proceso complicado. Con el fin de facilitar la solución de las ecuaciones acopladas, podemos reescribir todas las ecuaciones obtenidas hasta este momento en función de los observables macroscópicos. En específico, obtendremos relaciones entre las variables

macroscópicas auxiliares y los observables macroscópicos, dando un significado físico claro a las ecuaciones obtenidas. Para este fin, serán útiles las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial \Xi[\dots]}{\partial \Psi_j(t)} = -\frac{i}{N} \left[\frac{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} M_j[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] \sigma(t)}{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} M_j[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}]} \right] \quad (\text{B.49})$$

$$\frac{\partial \Xi[\dots]}{\partial \theta_j(t)} = -\frac{i}{N} \left[\frac{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} M_j[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] \hat{h}(t)}{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} M_j[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}]} \right] \quad (\text{B.50})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Xi[\dots]}{\partial \Psi_j(t) \partial \Psi_j(t')} &= -\frac{1}{N} \left[\frac{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} M_j[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] \sigma(t) \sigma(t')}{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} M_j[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}]} \right] \\ &\quad -N \left[\frac{\partial \Xi[\dots]}{\partial \Psi_j(t)} \right] \left[\frac{\partial \Xi[\dots]}{\partial \Psi_j(t')} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Xi[\dots]}{\partial \theta_j(t) \partial \theta_j(t')} &= -\frac{1}{N} \left[\frac{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} M_j[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] \hat{h}(t) \hat{h}(t')}{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} M_j[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}]} \right] \\ &\quad -N \left[\frac{\partial \Xi[\dots]}{\partial \theta_j(t)} \right] \left[\frac{\partial \Xi[\dots]}{\partial \theta_j(t')} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Xi[\dots]}{\partial \Psi_j(t) \partial \theta_j(t')} &= -\frac{1}{N} \left[\frac{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} M_j[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] \sigma(t) \hat{h}(t')}{\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} M_j[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}]} \right] \\ &\quad -N \left[\frac{\partial \Xi[\dots]}{\partial \Psi_j(t)} \right] \left[\frac{\partial \Xi[\dots]}{\partial \theta_j(t')} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Por tanto, empleando las definiciones (B.4)-(B.6) y usando la condición de normalización $\overline{Z[\mathbf{0}]} = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} m(t) &= \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{i}{N} \sum_i \xi_i^1 \frac{1}{Z[\Psi]} \int d\mathbf{a} \dots d\hat{\mathbf{K}} \left[\frac{\partial \Xi[\dots]}{\partial \Psi_i(t)} \right] e^{N[\psi + \Phi + \Xi] + \mathcal{O}(\dots)} \\ &= \lim_{\Psi \rightarrow 0} \langle \xi^1 \sigma(t) \rangle_* \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

$$\begin{aligned}
 C(t, t') &= - \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \frac{1}{Z[\Psi]} \\
 &\times \int d\mathbf{a} \dots d\hat{\mathbf{K}} \left[\frac{N\partial^2 \Xi[\dots]}{\partial \Psi_i(t) \partial \Psi_i(t')} + \frac{N\partial \Xi[\dots]}{\partial \Psi_i(t)} \frac{N\partial \Xi[\dots]}{\partial \Psi_i(t')} \right] e^{N[\psi + \Phi + \Xi] + \mathcal{O}(\dots)} \\
 &= \lim_{\Psi \rightarrow 0} \langle \sigma(t) \sigma(t') \rangle_* \quad (\text{B.55})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(t, t') &= \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{i}{N} \sum_i \xi_i^1 \frac{1}{Z[\Psi]} \\
 &\times \int d\mathbf{a} \dots d\hat{\mathbf{K}} \left[\frac{N\partial^2 \Xi[\dots]}{\partial \Psi_i(t) \partial \theta_i(t')} + \frac{N\partial \Xi[\dots]}{\partial \Psi_i(t)} \frac{N\partial \Xi[\dots]}{\partial \theta_i(t')} \right] e^{N[\psi + \Phi + \Xi] + \mathcal{O}(\dots)} \\
 &= \lim_{\Psi \rightarrow 0} \langle \sigma(t) \hat{h}(t') \rangle_* \quad (\text{B.56})
 \end{aligned}$$

Además, debido a que $\overline{Z[\mathbf{0}]} = 1$, la derivada de la función generadora respecto a los campos externos θ_i no depende del valor de los campos auxiliares Ψ_i , es decir

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial \overline{Z[\Psi]}}{\partial \theta_i(t)} = \frac{\partial \overline{Z[\mathbf{0}]}}{\partial \theta_i(t)} = 0 \quad \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial \overline{Z[\Psi]}}{\partial \theta_i(t) \partial \theta_i(t')} = \frac{\partial \overline{Z[\mathbf{0}]}}{\partial \theta_i(t) \partial \theta_i(t')} = 0, \quad (\text{B.57})$$

por tanto

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^1 \frac{\partial \overline{Z[\Psi]}}{\partial \theta_i(t)} = \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{i}{N} \sum_i \xi_i^1 \frac{1}{Z[\Psi]} \\
 &= \times \int d\mathbf{a} \dots d\hat{\mathbf{K}} \left[\frac{\partial \Xi[\dots]}{\partial \theta_i(t)} \right] e^{N[\psi + \Phi + \Xi] + \mathcal{O}(\dots)} \\
 &= \lim_{\Psi \rightarrow 0} \langle \xi^1 \hat{h}(t) \rangle_* \quad (\text{B.58})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= - \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial \overline{Z[\Psi]}}{\partial \theta_i(t) \partial \theta_i(t')} = - \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{Z[\Psi]} \\
 &= \times \int d\mathbf{a} \dots d\hat{\mathbf{K}} \left[\frac{N\partial^2 \Xi[\dots]}{\partial \theta_i(t) \partial \theta_i(t')} + \frac{N\partial \Xi[\dots]}{\partial \theta_i(t)} \frac{N\partial \Xi[\dots]}{\partial \theta_i(t')} \right] e^{N[\psi + \Phi + \Xi] + \mathcal{O}(\dots)} \\
 &= \lim_{\Psi \rightarrow 0} \langle \hat{h}(t) \hat{h}(t') \rangle_* \quad (\text{B.59})
 \end{aligned}$$

Nótese que las variables macroscópicas auxiliares están evaluadas en el punto silla. Combinando las ecuaciones (B.54)-(B.59) con (B.45)-(B.46), se obtiene

$$a(t) = m(t) \quad k(t) = 0 \quad (\text{B.60})$$

$$q(t, t') = C(t, t') \quad Q(t, t') = 0 \quad K(t, t') = iG(t, t'). \quad (\text{B.61})$$

Insertando las ecuaciones (B.60)-(B.61) en (B.41)-(B.44), obtenemos

$$\hat{a}(t) = 0 \quad \hat{k}(t) = m(t) \quad (\text{B.62})$$

$$\begin{aligned} \hat{q}(t, t') &= -\frac{1}{2}i\alpha \frac{\int dudv u(t)u(t') \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \mathbf{C}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot [\mathbf{1} - \mathbf{G}]\mathbf{v}]\right)}{\int dudv \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \mathbf{C}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot [\mathbf{1} - \mathbf{G}]\mathbf{v}]\right)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t, t') &= -\frac{1}{2}i\alpha \frac{\int dudv v(t)v(t') \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \mathbf{C}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot [\mathbf{1} - \mathbf{G}]\mathbf{v}]\right)}{\int dudv \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \mathbf{C}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot [\mathbf{1} - \mathbf{G}]\mathbf{v}]\right)} \\ &= -\frac{1}{2}i\alpha [(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{1} - \mathbf{G}^\dagger)^{-1}](t, t') \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

$$\begin{aligned} \hat{K}(t, t') &= -i\alpha \frac{\int dudv v(t)u(t') \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \mathbf{C}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot [\mathbf{1} - \mathbf{G}]\mathbf{v}]\right)}{\int dudv \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \mathbf{C}\mathbf{u} - 2i\mathbf{u} \cdot [\mathbf{1} - \mathbf{G}]\mathbf{v}]\right)} - \alpha\delta_{t,t'} \\ &= \alpha[\mathbf{G}(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1}](t, t'). \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

con $G^\dagger(t, t') = G(t', t)$. En el cálculo anterior se han utilizado integrales Gaussianas (ver Apéndice A) al evaluar las expresiones así como la identidad $(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1} - \mathbf{1} = \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{G}^\ell - \mathbf{1} = \sum_{\ell > 0} \mathbf{G}^\ell = \mathbf{G}(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1}$.

De esta forma hemos expresado todas las variables macroscópicas auxiliares en función de los observables macroscópicos promediados en el desorden: el traslape $\mathbf{m} = \{m(t)\}$, la función de correlación $\mathbf{C} = \{C(t, t')\}$ y la función respuesta $\mathbf{G} = \{G(t, t')\}$.

B.6. Dinámica efectiva

En el promedio efectivo (B.47)-(B.48), las variables $\xi_i^1, \theta_i(t)$ y $\Psi_i(t)$ presentan una dependencia en los sitios. Para los campos externos $\theta_i(t)$ se tiene la libertad de escogerlos independientes de los sitios, por lo tanto hacemos $\theta_i(t) = \theta(t)$. Los campos $\Psi_i(t)$ han servido su propósito y se pueden llevar a cero, así que se eliminan las expresiones donde aparecen como factores. Por otra parte, la dependencia en los sitios de expresiones de la forma $\frac{1}{N} \sum_i f(\xi_i^1)$ se elimina al aplicar la ley de números grandes en el límite termodinámico (ver Apéndice A). Es decir,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i^1) \stackrel{\text{Pr}}{=} \sum_{\xi} P(\xi) f(\xi) \quad (\text{B.66})$$

donde $P(\xi)$ es la probabilidad del patrón condensado ξ y Pr denota convergencia en probabilidad.

Insertando (B.62)-(B.65) en (B.48) y realizando los pasos sugeridos en el párrafo anterior, obtenemos

$$\langle f[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] \rangle_* = \sum_{\xi} P(\xi) \left\{ \frac{\sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} \int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} M[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] f[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}]}{\sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} \int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} M[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}]} \right\} \quad (\text{B.67})$$

con

$$\begin{aligned} M[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] &= P(\sigma(0)) \prod_t P(\sigma(t+1)|h(t)) \exp\left(\sum_t \{i\hat{h}(t)[h(t) - \xi m(t) - \theta(t) \right. \\ &\quad \left. - \alpha \sum_{t'} [\mathbf{G}(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1}](t, t') \sigma(t')]\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \alpha \sum_{t, t'} [(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{1} - \mathbf{G}^\dagger)^{-1}](t, t') \hat{h}(t) \hat{h}(t')\right). \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Una segunda simplificación del promedio efectivo se obtiene considerando que $G(t, t') = 0$ para $t \leq t'$ debido a causalidad. De lo cual se puede demostrar (procediendo de forma iterativa) que la función $M[\dots]$ en (B.68) está normalizada

$$\sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} \int \frac{d\mathbf{h}d\hat{\mathbf{h}}}{(2\pi)^{(t_f+1)}} M[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] = 1.$$

De esta forma, el promedio efectivo puede escribirse en la forma simplificada

$$\langle f[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] \rangle_* = \sum_{\xi} P(\xi) \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} \int \frac{d\mathbf{h}d\hat{\mathbf{h}}}{(2\pi)^{(t_f+1)}} M[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] f[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] \quad (\text{B.69})$$

con $M[\dots]$ dado por (B.68).

Utilizando la identidad $\langle \sigma(t)\hat{h}(t') \rangle_* = i\partial\langle \sigma(t) \rangle_* / \partial\theta(t')$, los observables macroscópicos (B.54)-(B.56) pueden escribirse de la siguiente forma

$$m(t) = \langle \xi\sigma(t) \rangle_* \quad (\text{B.70})$$

$$C(t, t') = \langle \sigma(t)\sigma(t') \rangle_* \quad (\text{B.71})$$

$$G(t, t') = \frac{\partial\langle \sigma(t) \rangle_*}{\partial\theta(t')}. \quad (\text{B.72})$$

Podemos observar que necesitamos evaluar el promedio efectivo de funciones con dependencia solamente en los estados de las neuronas. Por tanto, introduciendo un cambio de variable para los campos y campos conjugados y usando integrales Gaussianas, obtenemos

$$\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle_* = \sum_{\sigma(0)\dots\sigma(t_f)} \sum_{\xi} \int d\boldsymbol{\phi} P(\boldsymbol{\phi}) P(\xi) P(\boldsymbol{\sigma} | \xi, \boldsymbol{\phi}) f(\boldsymbol{\sigma}). \quad (\text{B.73})$$

Las variables aleatorias $\boldsymbol{\phi}$ tienen distribución Gaussiana con promedio igual a cero y matriz de covarianza $\mathbf{D} = \{D(t, t')\}$:

$$D(t, t') = \left[(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{1} - \mathbf{G}^\dagger)^{-1} \right] (t, t'). \quad (\text{B.74})$$

En este promedio efectivo $P(\boldsymbol{\phi})$ representa una distribución de probabilidad Gaussiana multidimensional

$$P(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{D})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t,t'=0}^{t_f-1} \phi(t)\mathbf{D}^{-1}(t,t')\phi(t')\right). \quad (\text{B.75})$$

Por otra parte, $P(\boldsymbol{\sigma} \mid \xi, \phi)$ es la distribución de probabilidad de trayectoria de la neurona efectiva

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\sigma} \mid \xi, \phi) &= P(\sigma(0)) \prod_{t=0}^{t_f-1} P(\sigma(t+1) \mid h(t)) \\ &= P(\sigma(0)) \prod_{t=0}^{t_f-1} \left[\frac{1}{2} [1 + \sigma(t+1) \tanh[\beta h(t)]]\right], \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

la cual está descrita en función de un campo efectivo

$$h(t) = \xi m(t) + \alpha \sum_{t'=0}^{t-1} R(t,t')\sigma(t') + \sqrt{\alpha}\phi(t) + \theta(t), \quad (\text{B.77})$$

donde

$$R(t,t') = [\mathbf{G}(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1}](t,t'). \quad (\text{B.78})$$

Apéndice C

Ecuaciones de los parámetros de orden

C.1. Ecuaciones explícitas

A partir de (B.70)-(B.72) (también descritas en 2.33-2.34) podemos desarrollar expresiones explícitas para los parámetros de orden, obteniendo, para $t > 0$ y $t' < t$,

$$m(t) = \langle \xi \sigma(t) \rangle_* = \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0) \dots \sigma(t-1)} \int d\phi \xi P(\xi) P(\phi) P(\sigma(0)) \\ \times \tanh(\beta h(t-1)) \prod_{s=0}^{t-2} \frac{1}{2} [1 + \sigma(s+1) \tanh(\beta h(s))]. \quad (\text{C.1})$$

Para las correlaciones $C(t, t') = \langle \sigma(t) \sigma(t') \rangle_*$, distinguimos entre dos casos:

i) $t' = t - 1$

$$\begin{aligned}
 C(t, t') = \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0) \dots \sigma(t-2)} \int d\phi P(\xi) P(\phi) P(\sigma(0)) \tanh(\beta h(t-1)) \\
 \times \tanh(\beta h(t-2)) \prod_{s=0}^{t-3} \frac{1}{2} [1 + \sigma(s+1) \tanh(\beta h(s))]. \quad (C.2)
 \end{aligned}$$

ii) $t' < t-1$

$$\begin{aligned}
 C(t, t') = \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0) \dots \sigma(t-1)} \int d\phi \sigma(t') P(\xi) P(\phi) P(\sigma(0)) \\
 \times \tanh(\beta h(t-1)) \prod_{s=0}^{t-2} \frac{1}{2} [1 + \sigma(s+1) \tanh(\beta h(s))]. \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

Aplicando la identidad

$$\begin{aligned}
 \sigma(s+1) \operatorname{sech}^2(\beta h(s)) &= \sigma(s+1) [1 - \tanh^2(\beta h(s))] \\
 &= [1 + \sigma(s+1) \tanh(\beta h(s))] [\sigma(s+1) - \tanh(\beta h(s))], \quad (C.4)
 \end{aligned}$$

se obtiene, para $t' < t$, la siguiente ecuación de la función respuesta

$$\begin{aligned}
 G(t, t') = \frac{\partial \langle \sigma(t) \rangle_*}{\partial \theta(t')} = \beta \left\{ C(t, t'+1) \right. \\
 \left. - \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0)} \dots \sum_{\sigma(t-1)} \int d\phi P(\xi) P(\phi) P(\sigma(0)) \tanh(\beta h(t-1)) \right. \\
 \left. \times \tanh(\beta h(t')) \prod_{s \neq t'}^{t-2} \frac{1}{2} [1 + \sigma(s+1) \tanh(\beta h(s))] \right\}. \quad (C.5)
 \end{aligned}$$

En el límite $\alpha \rightarrow 0$ se pierden todos los términos complicados en los campos locales y recuperamos la expresión más simple $m(t+1) = \tanh(\beta[m(t) + \theta(t)])$ para el traslape.

C.2. Primeros pasos temporales

Con el fin de derivar los primeros pasos temporales de la dinámica vamos a obtener algunos resultados que serán de utilidad. Observamos que $C(t, t) = \langle \sigma^2(t) \rangle_* = 1$ y $G(t, t') = R(t, t') = 0$ para $t \leq t'$. Por tanto,

$$\begin{aligned} D(t, t') &= [(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{1} - \mathbf{G}^\dagger)^{-1}] (t, t') \\ &= \sum_{s=0}^t \sum_{s'=0}^{t'} [\delta_{t,s} + R(t, s)] C(s, s') [\delta_{s',t'} + R(t', s')]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Por otra parte, se puede demostrar que

$$\left(\mathbf{G}^\ell \right) (t, t') = 0 \quad \text{para } t' > t - \ell \quad (\text{C.7})$$

y

$$R(t, t') = \sum_{\ell > 0} \left(\mathbf{G}^\ell \right) (t, t') = \sum_{\ell=1}^{t-t'} \left(\mathbf{G}^\ell \right) (t, t'). \quad (\text{C.8})$$

Además, a partir de $(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1} = \mathbf{1} + \mathbf{R}$ obtenemos $(\mathbf{1} - \mathbf{G})^{-1}(t, t') = \delta_{t,t'}$ para $t' \geq t$.

Los parámetros de orden al tiempo inicial son sencillos de obtener:

$$m(0) = m_0 \quad C(0, 0) = 1 \quad G(0, 0) = 0. \quad (\text{C.9})$$

El campo $h(0)$ está dado por

$$h(0) = \xi m(0) + \alpha^{1/2} \phi(0) + \theta(0) \quad (\text{C.10})$$

con

$$D(0, 0) = 1. \quad (\text{C.11})$$

Por lo tanto, para el primer paso temporal, obtenemos

$$\begin{aligned}
 m(1) &= \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0)} \int d\phi(0) \xi P(\xi) P(\phi(0)) P(\sigma(0)) \tanh(\beta h(0)) \\
 &= \frac{1}{2} \int Dz \tanh(\beta[m_0 + z\sqrt{\alpha} + \theta(0)]) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int Dz \tanh(\beta[-m_0 + z\sqrt{\alpha} + \theta(0)]) \tag{C.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(1,0) &= \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0)} \int d\phi(0) \sigma(0) P(\xi) P(\phi(0)) P(\sigma(0)) \tanh(\beta h(0)) \\
 &= \frac{m(0)}{2} \int Dz \tanh(\beta[m_0 + z\sqrt{\alpha} + \theta(0)]) \\
 &\quad - \frac{m(0)}{2} \int Dz \tanh(\beta[-m_0 + z\sqrt{\alpha} + \theta(0)]) \\
 &= m(0)m(1) \tag{C.13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(1,0) &= \beta \left\{ C(1,1) - \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0)} \int d\phi(0) P(\xi) P(\phi(0)) P(\sigma(0)) \tanh^2(\beta h(0)) \right\} \\
 &= \beta \left\{ 1 - \frac{1}{2} \int Dz \tanh^2(\beta[m_0 + z\sqrt{\alpha} + \theta(0)]) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int Dz \tanh^2(\beta[-m_0 + z\sqrt{\alpha} + \theta(0)]) \right\}, \tag{C.14}
 \end{aligned}$$

donde $Dz = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$. Por tanto, de la ecuación (C.6) se concluye que $R(1,0) = G(1,0)$. Para el segundo paso temporal, se obtiene

$$m(2) = \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0)} \int d\phi(0) d\phi(1) \xi P(\xi) P(\phi(0), \phi(1)) P(\sigma(0)) \tanh(\beta h(1)) \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}
 C(2,1) &= \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0)} \int d\phi(0) d\phi(1) P(\xi) P(\phi(0), \phi(1)) P(\sigma(0)) \\
 &\quad \times \tanh(\beta h(1)) \tanh(\beta h(0)) \tag{C.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(2,0) &= \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0), \sigma(1)} \int d\phi(0) d\phi(1) \sigma(0) P(\xi) P(\phi(0), \phi(1)) P(\sigma(0)) \\
 &\times \tanh(\beta h(1)) \frac{1}{2} [1 + \sigma(1) \tanh(\beta h(0))] \quad (C.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(2,1) &= \beta \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0)} \int d\phi(0) d\phi(1) P(\xi) P(\phi(0), \phi(1)) P(\sigma(0)) \right. \\
 &\times \left. \tanh^2(\beta h(1)) \frac{1}{2} [1 + \sigma(1) \tanh(\beta h(0))] \right\} \quad (C.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(2,0) &= \beta \left\{ C(2,1) - \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\sigma(0)} \int d\phi(0) d\phi(1) P(\xi) P(\phi(0), \phi(1)) P(\sigma(0)) \right. \\
 &\times \left. \tanh(\beta h(1)) \tanh(\beta h(0)) \right\} = 0. \quad (C.19)
 \end{aligned}$$

Para obtener $P(\phi(0), \phi(1))$ es necesario conocer la matriz de covarianza en los pasos intermedios. De la ecuación (C.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
 D(1,0) &= \sum_{s=0}^1 [\delta_{1,s} + \delta_{0,s} R(1,0)] C(s,0) \\
 &= C(1,0) + G(1,0) \quad (C.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D(1,1) &= \sum_{s=0}^1 \sum_{s'=0}^1 [\delta_{1,s} + \delta_{0,s} R(1,0)] C(s, s') [\delta_{s',1} + \delta_{s',0} R(1,0)] \\
 &= G^2(1,0) + 2C(0,1)G(1,0) + 1. \quad (C.21)
 \end{aligned}$$

Usando $P(\phi(0), \phi(1))$, se pueden obtener todos los parámetros de orden para el segundo paso temporal, sin embargo, la expresiones no son sencillas. Para pasos temporales mayores el proceso se complica aún más.

Bibliografía

- [1] G.A. Thibodeau and K.T. Patton, *Anthony's textbook of anatomy and physiology*, Mosby Ed., 1994.
- [2] D.O. Hebb, *The organization of behavior*, Wiley, New York, 1949.
- [3] W.S. McCulloch and W. Pitts, A logical calculus of ideas immanent in nervous activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics* **5** (1943), 115.
- [4] B.G. Cragg and H.N.V. Temperley, Memory: The analogy with ferromagnetic hysteresis, *Brain* **78** (1955), II, 304.
- [5] E.R. Caianiello, Outline of a theory of thought and thinking machines, *Journal of Theoretical Biology* **1** (1961), 204.
- [6] W.A. Little, The existence of persistent states in the brain, *Math. Biosci.* **19** (1974), 101.
- [7] J.J. Hopfield, Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proc. Natl. Acad. Sci., USA* **79** (1982), 2554.
- [8] R.J. Glauber, Time-dependent statistics of the Ising model, *J. Math. Phys.* **4** (1963), 294.
- [9] A.C.C. Coolen, *Statistical mechanics of recurrent neural networks I - statistics*, Handbook of Biological Physics, Elsevier Science B.V., 2001, p. 531.

- [10] P. Peretto, Collective properties of neural networks: a statistical physics approach, *Biological Cybernetics*, **50** (1984), 51.
- [11] P. Peretto, *An introduction to the modeling of neural networks*, Cambridge University Press, 1992.
- [12] P.C. Martin, E.D. Siggia, and H.A. Rose, Statistical dynamics of classical systems, *Phys. Rev. A* **8** (1973), 423.
- [13] C. De Dominicis, Dynamics as a substitute for replicas in systems with quenched random impurities, *J. Phys. A* **18** (1978), 4913.
- [14] E. Gardner, B. Derrida, and P. Mottishaw, Zero temperature parallel dynamics for infinite range spin glass and neural network, *J. Physique* **48** (1987), 741.
- [15] H. Rieger, M. Schreckenberg, and J. Zittartz, Glauber dynamics of the Little-Hopfield model, *Z. Phys B* **72** (1988), 523.
- [16] B. Derrida, E. Gardner, and A. Zippelius, An exactly solvable asymmetric neural network model, *Europhys. Lett.* **4** (1987), 167.
- [17] T.L.H. Watkin and D. Sherrington, The parallel dynamics for a dilute symmetric Hebb-rule network, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991), 5427.
- [18] A.C.C. Coolen, *Statistical mechanics of recurrent neural networks II - dynamics*, *Handbook of Biological Physics*, Elsevier Science B.V., 2001, p. 597.
- [19] A. Düring, A.C.C. Coolen and D. Sherrington, Phase diagram and storage capacity of sequence processing neural networks, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, (1998), 8607.
- [20] W.K. Theumann, Mean-field dynamics of sequence processing neural networks with finite connectivity, *Physica A* **328** (2003), 1.

- [21] J.L. Van Hemmen and R.G. Palmer, The thermodynamic limit and the replica method for short-range random systems, *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** (1982), 3881.
- [22] D.C. Mattis, Solvable spin system with random interaction, *Phys. Lett.* **56A** (1976), 421.
- [23] S.F. Edwards and P.W. Anderson, Theory of spin glasses, *J. Phys. F: Metal Phys.* **5** (1975), 965.
- [24] G. Parisi, A sequence of approximated solutions to the S-K model for spin glasses, *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** (1980), L115.
- [25] D. Sherrington and S. Kirkpatrick, Solvable model of a spin-glass, *Phys. Rev. Letters* **35** (1975), 1792.
- [26] W. Kinzel, Learning and pattern recognition in spinglass models, *Z. Phys.* B **60** (1985), 205.
- [27] S. Amari and K. Maginu, Statistical neurodynamics of associative memory, *Neural Netw.* **1** (1987), 63.
- [28] M. Okada, A hierarchy of macrodynamical equations for associative memory, *Neural Netw.* **8** (1995), 833.
- [29] H. Nishimori and T. Ozeki, Phase diagrams of gauge glasses, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993), 859.
- [30] R.D. Henkel and M. Opper, Distribution of internal fields and dynamics of neural networks, *Europhys. Lett.* **11** (1990), 403.
- [31] A.E. Patrick and V.A. Zagrebnev, Parallel dynamics for an extremely diluted neural network, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (1990), L1323.

- [32] A.E. Patrick and V.A. Zagrebnov, A probabilistic approach to parallel dynamics for the Little-Hopfield model, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991), 3413.
- [33] D. Bollé, *Advances in Condensed Matter and Statistical Mechanics*, ed F Korutcheva and R Cuerno (Commack, NY: Nova Science Publishers), 2004, p 321.
- [34] M. Kawamura and M. Okada, Transient dynamics for sequence processing neural networks, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002), 253.
- [35] K. Mimura, M. Kawamura, and M. Okada, The path-integral analysis of an associative memory model storing an infinite number of finite limit cycles, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), 6437.
- [36] P. Zhang and Y. Chen, Statistical Neurodynamics for Sequence Processing Neural Networks with Finite Dilution, *Lect. Notes Comput. Sci.* **4491** (2007), 1144.
- [37] D. Bollé, J. Busquets Blanco, G.M. Shim, and T. Verbeiren, The Blume-Emery-Griffiths neural network: dynamics for arbitrary temperature, *Physica A* **331** (2003), 319.
- [38] D. Bollé, J. Busquets Blanco, and T. Verbeiren, The signal-to-noise analysis of the Little-Hopfield model revisited, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), 1951.
- [39] F. Reynaga, Signal-to-noise analysis of Hopfield neural networks with a formulation of the dynamics in terms of transition probabilities, *Physica A*, in press
- [40] H. Eissfeller and M. Opper, New method for studying the dynamics of disordered spin systems without finite-size effects, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992), 2094.

- [41] D. Bollé and G. Jongen, Parallel dynamics of the asymmetric extremely diluted Ashkin-Teller neural network, *Eur. Phys. J. B* **16** (2000), 749.
- [42] D. Bollé and P. Kozłowski, Statics and dynamics of an Ashkin-Teller neural network with low loading, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 6319.
- [43] D. Bollé and P. Kozłowski, The Ashkin-Teller neural network near saturation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999), 8577.
- [44] P. Zhang and Y. Chen, Transient dynamics of sparsely connected Hopfield neural networks with arbitrary degree distributions, *Physica A* **387** (2008), 1009.
- [45] P. Zhang and Y. Chen, Topology and dynamics of attractor neural networks: The role of loopiness, *Physica A* **387** (2008), 4411.
- [46] J. P. L. Hatchett, B. Wemmenhove, I. Pérez Castillo, T. Nikolettopoulos, N. S. Skantzos and A. C. C. Coolen, Parallel Dynamics of Disordered Ising Spin Systems on Finitely Connected Random Graphs, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), 6201.
- [47] J. P. L. Hatchett, Parallel dynamics of disordered Ising spin systems on random graphs, *AIP Conf. Proc.* **776** (2005), 150.