



UNIVERSIDAD MICHUACANA
DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

**“HIPERESPACIOS DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS
Y PSEUDOCOMPACIDAD”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

IVÁN MARTÍNEZ RUIZ

ASESOR:

DR. FERNANDO HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

DICIEMBRE DE 2006

Índice general

1. HIPERESPACIOS DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS	7
1.1. Compacidad y Axiomas de Separación de 2^X	8
1.2. Propiedad de normalidad de 2^X	13
1.3. Compacidad Local en 2^X	27
2. COMPACIDAD NUMERABLE Y PSEUDOCOMPACIDAD	29
2.1. p -compacidad y p -pseudocompacidad	29
2.2. Algunos resultados de Ginsburg	31
2.3. Hiperespacios de Espacios Homogéneos	35
3. PREGUNTAS DE GINSBURG	43
3.1. Ejemplo de Compacidad Numerable	47
3.2. Pseudocompacidad en Hiperespacios de Ψ -espacios	50
3.3. Un ejemplo en ZFC	60
4. CONCLUSIONES	67

Introducción

Cuando se define un espacio topológico a partir de algún otro o algunos otros, resulta natural preguntarse qué propiedades hereda el nuevo espacio respecto del espacio que lo origina o incluso si el espacio inducido permite estudiar mejor al espacio topológico original. Ernest Michael realiza un trabajo de esta forma y aborda en *Topologies on spaces of subsets* una gran variedad de propiedades que cumple el hiperespacio de un espacio topológico a partir de las propiedades que guarda este último o viceversa, mostrando en particular la equivalencia que guardan ambos espacios respecto de la propiedad de compacidad.

Establecida entonces la equivalencia anterior, lo siguiente es estudiar el comportamiento que guardan un espacio y su hiperespacio respecto de algunas propiedades más débiles que compacidad. En el artículo *Some results on the countable compactness and pseudocompactness of hyperspaces*, John Ginsburg hace un estudio interesante acerca de algunas de estas propiedades y la relación que guardan un espacio topológico y su hiperespacio respecto de ellas. En particular se interesa por el comportamiento de potencias de un espacio y de su hiperespacio. A partir de tales resultados, plantea un par de preguntas acerca del comportamiento del producto numerable de un espacio y del hiperespacio del mismo respecto de las propiedades de compacidad numerable y pseudocompacidad, siendo dichas preguntas, y en particular la correspondiente a la propiedad de pseudocompacidad, la motivación principal para el desarrollo del presente trabajo.

En el Capítulo 1 exponemos algunos resultados básicos que relacionan a un espacio con su hiperespacio. En particular, se presenta la relación respecto a los Axiomas de Separación y la equivalencia que preservan ambos espacios respecto de la propiedad de compacidad y compacidad local.

En la primera sección del Capítulo 2 se introduce la noción de p -compacidad

y p -pseudocompacidad y se presentan algunas propiedades para ellas. A lo largo de la segunda sección, se aborda el estudio realizado por John Ginsburg en el artículo atrás indicado, destacando aquellos resultados que involucran a las potencias de un espacio y al hiperespacio del mismo. En la última sección de este capítulo, se presentan algunos resultados parciales presentados por J. Cao, T. Nogura y A. H. Tomita, que en cierto tipo de espacios topológicos permiten contestar de manera afirmativa a las preguntas de Ginsburg en uno de sus sentidos.

Finalmente, en el Capítulo 3 se aborda el otro sentido de las preguntas de Ginsburg, que en el caso de la propiedad de compacidad numerable fue estudiado por los autores mencionados en el párrafo anterior. En lo referente a la propiedad de pseudocompacidad, se presenta un estudio de Michael Hrušák acerca del hiperespacio de ciertos espacios topológicos llamados Espacios de Mwróka-Isbell o Ψ -espacios, que en particular responde la pregunta de Ginsburg correspondiente a pseudocompacidad en una extensión de **ZFC**. Por último, en la tercera sección del capítulo presentamos un ejemplo, en **ZFC**, que permite responder la pregunta anterior en la axiomática usual de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección.

NOTACIÓN Y TERMINOLOGÍA

Las definiciones y propiedades topológicas que se utilizarán en lo subsecuente y no se establecen de manera explícita en esta sección o a lo largo del trabajo, pueden consultarse en [Eng89].

Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, denotaremos a la cerradura de A por $cl_X(A)$ o bien \bar{A} si no existe confusión. El interior de A se representará por $int_X(A)$ o $int(A)$.

Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$ es su producto cartesiano, $\pi_j : X \rightarrow X_j$ representa la j -ésima proyección de X para cada $j \in I$.

Si X es un espacio completamente regular, βX representa la compactación de Čech-Stone de X . En particular, $\beta\omega$ es la compactación de (ω, τ_d) , donde τ_d es la topología discreta para ω .

Utilizaremos letras griegas como $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., para referirnos a números ordinales y letras griegas como κ ó θ para referirnos a números cardinales. Si A es un conjunto bien ordenado, $type(A)$ es el único número ordinal isomorfo a A . Como es usual, $|A|$ representará la cardinalidad del conjunto A .

Si α es un ordinal infinito, denotaremos por $\lim(\alpha)$ a la colección de ordinales límite menores que α .

Si A es un conjunto y κ es un número cardinal entonces $A^{<\kappa} = \bigcup_{\theta < \kappa} A^\theta$ y $[A]^\kappa = \{B \subseteq A : |B| = \kappa\}$.

$\omega_1 = \aleph_1$ representa el primer ordinal no numerable y $\mathfrak{c} = 2^\omega$ es la cardinalidad de $\wp(\omega)$, el conjunto potencia de ω .

CH es la proposición $\aleph_1 = \mathfrak{c}$. K. Gödel demostró que **CH** es consistente con los axiomas de **ZFC** y P. J. Cohen demostró años después que la ne-

gación de **CH** es también consistente con tales axiomas. Esto es, **CH** es independiente de los axiomas de **ZFC**.

Si $\mathcal{F} \subseteq \wp(\omega)$, entonces diremos que \mathcal{F} es un filtro en ω si:

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- (ii) si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ y
- (iii) si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Si para cada $A \subseteq \omega$ se cumple que $A \in \mathcal{F}$ o $\omega \setminus A \in \mathcal{F}$, diremos que \mathcal{F} es un ultrafiltro en ω .

Similar a lo anterior, se puede establecer la noción de filtro y ultrafiltro en un espacio topológico dado, los cuales resultan ser una herramienta fundamental en el estudio de propiedades topológicas tales como compacidad.

Denotaremos por ω^* a la colección de ultrafiltros libres de ω . Es decir:

$$\omega^* = \{\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega : \mathcal{F} \text{ es ultrafiltro en } \omega \text{ y } \bigcap \mathcal{F} = \emptyset\}.$$

Capítulo 1

HIPERESPACIOS DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Si X es un espacio topológico, denotaremos por 2^X a la colección de subconjuntos cerrados no vacíos en X .

Definición 1.1. Dado U un subconjunto no vacío de X , se definen los siguientes subconjuntos en 2^X :

- 1) $U^+ = \{F \in 2^X : F \subseteq U\}$,
- 2) $U^- : \{F \in 2^X : F \cap X \neq \emptyset\}$.

Los conjuntos de la forma antes descrita permiten establecer una topología para 2^X , conocida como *topología de Vietoris* de 2^X y denotada por τ_V , la cual es aquella que tiene como subbase a

$$\mathcal{B} = \{U^+ : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{U^- : U \text{ es abierto en } X\}.$$

Por tanto, un abierto básico en τ_V es de la forma

$$U_0^+ \cap U_1^- \cap \cdots \cap U_n^- = \{F \in 2^X : F \subseteq U_0, F \cap U_k \neq \emptyset \text{ para } k \leq n\}$$

donde U_k es abierto para todo $k \leq n$. Convenimos denotar por $\langle U_0; U_1, \dots, U_n \rangle$ al subconjunto anterior.

Se cumple que los abiertos de la forma $\langle \bigcup \{U_k : k \leq n\}; U_0, U_1, \dots, U_n \rangle$, los cuales denotaremos únicamente por $\langle U_0, U_1, \dots, U_n \rangle$, forman también una

base para τ_γ . A lo largo del presente trabajo utilizaremos indistintamente abiertos básicos de cualquiera de los dos tipos anteriores.

Nótese que si $A \subseteq X$ es no vacío entonces $2^X \setminus A^+ = (X \setminus A)^-$ y $2^X \setminus A^- = (X \setminus A)^+$. Así en particular, si A es un subconjunto cerrado no vacío en X entonces A^+ y A^- son cerrados en 2^X .

Definición 1.2. *Para cada $n \in \omega$, se define $\mathcal{F}_n(X) \subseteq 2^X$, el cual consiste de los subconjuntos de X con a lo más n puntos. Se define también $\mathfrak{Fin}(X)$, el conjunto de subconjuntos finitos de X ; es decir, $\mathfrak{Fin}(X) = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n(X)$.*

Si $\mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_k \rangle$ es una vecindad básica en 2^X , para cada $n \leq k$ podemos elegir $x_n \in U_k$. Ocurre entonces que $F = \{x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{F}_n$. Se muestra así que $\mathfrak{Fin}(X)$ es un subconjunto denso en 2^X . En particular, si X es un espacio separable entonces 2^X también lo es, pues en este caso la colección de subconjuntos finitos del conjunto numerable y denso de X forma un subconjunto denso en 2^X .

Teorema 1.1. *Para cada $n \in \omega$, sea $f_n : X^n \rightarrow \mathcal{F}_n(X)$ definida por*

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Se cumple que f_n es una función continua, cerrada y sobreyectiva. En particular, X es un subespacio cerrado de 2^X .

Demostración. Es fácil ver que f_n es sobreyectiva. Demostremos que f_n es continua. Sea $F = \{x_0, \dots, x_m\} \in 2^X$ y sea $\mathcal{U} = \langle U_0, U_1, \dots, U_k \rangle$ vecindad de F . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $k \leq m < n$. Para cada $i \leq m$ es posible encontrar V_i vecindad de x_i tal que si $j \leq k$ y $x_i \in U_j$ entonces $V_i \subseteq U_j$. Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$, donde $x_q = x_0$ si $q > m$. Es claro que $f_n(\mathbf{x}) = F$ y $\mathbf{V} = V_1 \times \dots \times V_m \times (V_0)^{n-m}$ es vecindad de \mathbf{x} . Más aún, $f_n[\mathbf{V}] \subseteq \langle V_0, \dots, V_k \rangle \subseteq \mathcal{U}$, de lo cual se sigue que f_n es continua en F . Podemos concluir así que f_n es continua.

De manera similar se puede verificar que f_n es una función cerrada. ■

1.1. Compacidad y Axiomas de Separación de 2^X

Como se mencionó en la introducción del trabajo, nuestro objetivo es presentar las relaciones existentes entre un espacio y su hiperespacio respecto

de ciertas propiedades, como la propiedad de compacidad y algunas otras más débiles. Antes de abordar tal propósito, conviene establecer la relación entre los espacios en cuestión respecto de propiedades más elementales, como son aquellas determinadas por los axiomas de separación o incluso la propiedad de metrizable. En lo que se refiere a esta última, es claro que si un espacio X cumple que su hiperespacio es metrizable entonces, como consecuencia del teorema anterior, él también es metrizable. Por otro lado, si X es compacto, además de ser metrizable, será posible definir una métrica que genera la topología de Vietoris de 2^X , con lo cual 2^X será metrizable. El solicitar que nuestro espacio X sea compacto es motivado en cierto sentido por el hecho de que los abiertos básicos en 2^X están determinados sólo por una cantidad finita de abiertos en X .

Definición 1.3. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Defínase entonces $d_X : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$d_X(A, B) = \max\{d^*(A, B), d^*(B, A)\},$$

donde $d^*(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : B \subseteq \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a)\}$ y $d^*(B, A) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq \bigcup_{b \in B} B_\epsilon(b)\}$.

Es fácil verificar que la función anterior es una métrica para 2^X , la cual se conoce como métrica de Hausdorff.

Proposición 1.1. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces τ_d , la topología determinada por la métrica de Hausdorff en 2^X , es equivalente a la topología de Vietoris.

Demostración. Sean $F \in 2^X$ y $\mathcal{U} = \langle U_0, \dots, U_n \rangle$ vecindad de F . Esto implica que $F \subseteq \bigcup_{i \leq n} U_i$ y $F \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \leq n$. Para cada $x \in F$ es posible encontrar $\epsilon_x > 0$ tal que si $k \leq n$ es tal que $x \in U_k$ entonces $B_{\epsilon_x} \subseteq U_k \subseteq \bigcup_{i \leq n} U_i$. Se sigue entonces que

$$F \subseteq \bigcup_{x \in F} B_{\frac{\epsilon_x}{2}}(x) \subseteq \bigcup_{x \in F} B_{\epsilon_x}(x) \subseteq \bigcup_{i \leq n} U_i.$$

Dado que F es compacto, existen $x_0, \dots, x_k \in F$ con $F \subseteq \bigcup_{i \leq k} B_{\frac{\epsilon_{x_i}}{2}}(x_i)$. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_{x_i} : i \leq k\}$. Veamos que $B_\epsilon(F) \subseteq \mathcal{U}$. Sea $Y \in 2^X$ tal que $d_X(F, Y) < \epsilon$. Esto es, $d^*(F, Y) < \epsilon$ y $d^*(Y, F) < \epsilon$, lo cual implica que

$Y \subseteq \bigcup_{x \in F} B_\epsilon(x)$ y $F \subseteq \bigcup_{y \in Y} B_\epsilon(y)$. En particular si $y \in Y$, existe $x \in F$ tal que $y \in B_\epsilon(x)$, i.e. $d(x, y) < \epsilon$. Dado que $x \in F$, existe $m \leq k$ tal que $x \in B_{\frac{\epsilon x_m}{2}}(x_m)$, i.e. $d(x, x_m) < \frac{\epsilon x_m}{2}$, obteniendo así que

$$d(x_m, y) \leq d(x_m, x) + d(x, y) < \frac{\epsilon x_m}{2} + \epsilon \leq \epsilon_{x_m},$$

de lo cual se concluye que $y \in \bigcup_{i \leq n} U_i$. Hemos probado que $Y \subseteq \bigcup_{i \leq n} U_i$.

Veamos ahora que para cada $i \leq n$, $Y \cap U_i \neq \emptyset$. Sea $i \leq n$ y elijase $x \in F \cap U_i$. Lo anterior implica que $B_{\frac{\epsilon x}{2}} \subseteq U_i$. Dado que $F \subseteq \bigcup_{y \in Y} B_\epsilon(y)$, existe $y \in Y$ tal que $x \in B_\epsilon(y)$, es decir $d(y, x) < \epsilon \leq \frac{\epsilon x}{2}$. Por lo tanto $y \in B_{\frac{\epsilon x}{2}}(x) \subseteq U_i$ y así $y \in Y \cap U_i$. Se concluye entonces que $Y \in \mathcal{U}$, con lo cual $F \in B_\epsilon(F)$.

Por otro lado, supongamos que $F \in 2^X$ y sea $\epsilon > 0$. Como F es compacto, existen $x_0, \dots, x_n \in F$ tal que $F \subseteq \bigcup_{i \leq n} B_{\frac{\epsilon}{4}}(x_i)$. Para cada $i \leq n$ sea $U_i = B_{\frac{\epsilon}{4}}(x_i)$ y sea

$$\mathcal{U} = \langle U_0, U_1, \dots, U_n \rangle.$$

Es claro que $F \in \mathcal{U}$. Probemos ahora que $\mathcal{U} \subseteq B_\epsilon(F)$, con lo cual habremos concluido la demostración.

Sea $Y \in \mathcal{U}$, entonces $Y \subseteq \bigcup_{i \leq n} B_{\frac{\epsilon}{4}}(x_i) \subseteq \bigcup_{x \in F} B_{\frac{\epsilon}{4}}(x)$, de lo cual se sigue que $d^*(F, Y) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Ahora, si $x \in F$ entonces existe $i \leq n$ tal que $x \in U_i$. Dado que \mathcal{U} es vecindad de Y , existe $y \in Y$ con $d(x_i, y) < \frac{\epsilon}{4}$, de lo cual se sigue que $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$. Esto último implica que $x \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(y)$. Hemos probado así que $F \subseteq \bigcup_{y \in Y} B_{\frac{\epsilon}{2}}(y)$ y por tanto $d^*(Y, F) \leq \frac{\epsilon}{2}$. ■

El siguiente resultado establece la relación existente entre un espacio y su hiperespacio respecto de los Axiomas de Separación, excepto la propiedad de normalidad del hiperespacio. Esta última se abordará más adelante pues se requerirán antes algunos resultados auxiliares.

Teorema 1.2. *Sea X un espacio topológico, entonces:*

- (1) 2^X es un espacio T_0 ,
- (2) Si X es un espacio T_1 entonces 2^X es T_1 ,
- (3) 2^X es Hausdorff si y sólo si X es regular,
- (4) 2^X es regular si y sólo si 2^X es completamente regular,
- (5) 2^X es completamente regular si y sólo si X es normal.

Demostración. Sean $F, G \in 2^X$ tales que $F \neq G$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $F \setminus G \neq \emptyset$. Entonces $F \in (X \setminus G)^-$ y $G \notin (X \setminus G)^-$. Se verifica así (1).

Supongamos ahora que X es T_1 . Sean F y G cerrados distintos en X y supongamos que $x \in F \setminus G$. Luego, para verificar (2), basta elegir $\mathcal{U} = (X \setminus G)^-$ y $\mathcal{V} = (X \setminus \{x\})^+$.

Supongamos que ahora 2^X es Hausdorff. Sean $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X$ tales que $x \notin F$.

Considérense los subconjuntos cerrados F y $F \cup \{x\}$. Entonces existen $\mathcal{U} = \langle U_0, U_1, \dots, U_n \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_0, V_1, \dots, V_m \rangle$ abiertos ajenos en 2^X tales que $F \in \mathcal{U}$ y $F \cup \{x\} \in \mathcal{V}$. Nótese que $F \subseteq V_0$, lo cual implica que existe $j \in \{0, \dots, m\}$ tal que $(F \cup \{x\}) \cap V_j = \{x\}$.

Por otro lado, como $(F \cup \{x\}) \cap U_k \neq \emptyset$ para todo $k \leq n$, entonces $x \notin \bigcup \{U_k : k \leq n\}$.

Sean $U = \bigcup \{U_k : k \leq n\}$ y $V = \bigcap \{V_j : (F \cup \{x\}) \cap V_j = \{x\}\}$. Se cumple que $F \subseteq U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Esto prueba que X es regular.

Supongamos que X es regular y sean F, G subconjuntos cerrados en X tal que $F \neq G$. Sin pérdida de generalidad supongamos que existe $x \in F \setminus G$.

Como X es regular entonces existen U y V subconjuntos abiertos ajenos en X , tales que $x \in U$ y $G \subseteq V$. Nótese que U^+ y V^- son abiertos ajenos en 2^X tales que $F \in U^-$ y $G \in V^+$. Esto prueba que 2^X es Hausdorff y se verifica así (3).

Para demostrar (4) y (5) basta probar que 2^X regular implica X normal y X normal implica 2^X completamente regular.

Veamos primero que la regularidad de 2^X implica la normalidad de X . Sean A cerrado en X y U abierto en X tales que $A \subseteq U$. Se cumple que U^+ es una vecindad abierta de A ; por tanto, existe una vecindad abierta $\mathcal{V} = \langle V_1, \dots, V_n \rangle$ de A tal que $A \subseteq \langle V_1, \dots, V_n \rangle \subseteq \overline{\langle V_1, \dots, V_n \rangle} \subseteq U^+$. Afirmamos que $\overline{\langle V_1, \dots, V_n \rangle} = \overline{\mathcal{V}}$, donde $\overline{\langle V_1, \dots, V_n \rangle}$ está definido como en el caso de los abiertos básicos de 2^X .

En efecto, nótese que $\overline{\langle V_1, \dots, V_n \rangle} = (\bigcup_{i=1}^{i=n} \overline{V_i})^+ \cap (\overline{V_1})^- \cap \dots \cap (\overline{V_n})^-$ y por tanto es cerrado. Luego, dado que $\mathcal{V} \subseteq \overline{\langle V_1, \dots, V_n \rangle}$, se concluye que $\overline{\mathcal{V}} \subseteq \overline{\langle V_1, \dots, V_n \rangle}$.

Por otro lado, sea $F \in \overline{\langle V_1, \dots, V_n \rangle}$ y considérese $\mathcal{W} = \langle W_1, \dots, W_m \rangle$, vecindad abierta de F . Demostremos que $\mathcal{W} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.

Sea $x_1 \in F \cap W_1$. Entonces, dado que $F \subseteq \bigcup_{j=1}^{j=m} \overline{V_j}$, existe j_1 tal que $x_1 \in \overline{V_{j_1}}$, lo cual implica que $W_1 \cap V_{j_1} \neq \emptyset$. Elijase $y_1 \in W_1 \cap V_{j_1}$.

Sea $x_2 \in W_2 \cap F$. Existe $j_2 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $W_2 \cap V_{j_2} \neq \emptyset$. Elijase $y_2 \in W_2 \cap V_{j_2}$ y así sucesivamente para todo $k \leq m$. De esta forma se obtiene que $\{y_1, \dots, y_m\} \in \mathcal{W}$.

Si ocurre que $\{y_1, \dots, y_m\} \in \mathcal{V}$, hemos concluido la demostración de la afirmación. En otro caso, elijase $z_1 \in \overline{V_1} \cap F$. Entonces existe l_1 tal que $z_1 \in W_{l_1}$, lo cual implica que $V_1 \cap W_{l_1} \neq \emptyset$. Elijase $m_1 \in V_1 \cap W_{l_1}$ y sucesivamente elijanase $m_k \in V_k \cap W_{l_k}$, para $k \in \{1, \dots, n\}$. Se cumple que $\{y_1, \dots, y_m, m_1, \dots, m_n\} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Por lo tanto, $F \in \overline{\mathcal{V}}$, con lo cual se demuestra la afirmación.

Consecuentemente, $A \in \langle \overline{V_1}, \dots, \overline{V_n} \rangle \subseteq U^+$. Por último, sea $V = \bigcup_{i=1}^{i=n} V_i$. Entonces $A \subseteq V$ y $\overline{V} \subseteq U$, lo cual implica que X es normal.

Finalmente, probemos que si X es normal entonces 2^X es completamente regular. Sea $F_0 \in 2^X$ y $\mathcal{W} = \langle V_1, \dots, V_n \rangle$ vecindad de F_0 . Como X es normal, existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f[F_0] = \{0\}$ y $f[X \setminus \bigcup_{i=1}^{i=n} V_i] = \{1\}$. Sea $f^- : 2^X \rightarrow [0, 1]$ definida por $f^-(F) = \inf_{x \in F} f(x)$. Probemos que f^- es continua.

Sea $F \in 2^X$ y sea $\epsilon > 0$. Existe $x_1 \in F$ tal que $f(x_1) < f^-(F) + \epsilon$. Por la continuidad de f , existe U_1 vecindad abierta de x_1 tal que $x_1 \in U_1$ y

$$f[U_1] \subseteq (f^-[F] - \epsilon, f^-[F] + \epsilon).$$

Sea $t = f^-(F) - \frac{\epsilon}{2}$. Defínase $\mathcal{W} = U_1^+ \cap (X \setminus f^{-1}[[0, t])^-$.

Si $G \in U_1^-$ entonces $G \cap U_1 \neq \emptyset$, lo cual implica que $f^-(G) < f^-(F) + \epsilon$. Si $G \in (X \setminus f^{-1}[[0, t])^-$ entonces $f[G] \subseteq (t, 1]$, lo cual implica que $f^-(G) > f^-(F) - \epsilon$. Por lo tanto, $f^-[\mathcal{W}] \subseteq (f^-(F) - \epsilon, f^-(F) + \epsilon)$. Se establece así que f^- es continua.

Por otro lado, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ elijase $p_i \in F_0 \cap V_i$. Sea $g_i : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $g_i(p_i) = 1$ y $g_i(X \setminus V_i) = \{0\}$. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ sea $g_i^+ : 2^X \rightarrow [0, 1]$ definida como $g_i^+(F) = \sup_{x \in F} g_i(x)$.

Similar a f^- , se prueba que g_i^+ es continua, para todo i . Se cumple que $h = f^- g_1^+ \cdots g_n^+$ es una función continua tal que $h(F_0) = 0$ y $h[2^X \setminus \mathcal{W}] = \{1\}$. Por lo tanto, 2^X es completamente regular. ■

Para concluir esta sección presentamos el resultado de Michael-Vietoris que establece la equivalencia entre un espacio y su hiperespacio respecto de la propiedad de compacidad.

Teorema 1.3. *Sea X un espacio regular. Entonces X es compacto si y sólo si 2^X lo es.*

Demostración. Como X es regular entonces 2^X es Hausdorff. Luego, dado que X es un subconjunto cerrado de 2^X y 2^X es compacto, X es compacto.

Supongamos por otro lado que X es compacto y probemos que 2^X lo es. Para esto nos valdremos del Lema de Alexander (vease por ejemplo [Kur66]) y demostraremos que toda cubierta abierta de 2^X que consta de elementos subbásicos, tiene una subcubierta finita. Sea $\mathcal{B} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ una cubierta abierta de 2^X , donde $\mathcal{U} = \{U_i^+ : i \in I\}$ y $\mathcal{V} = \{V_j^- : j \in J\}$.

Nótese que $\{x\} \in 2^X$ para cada $x \in X$ y así $\{U_i : i \in I\} \cup \{V_j : j \in J\}$ es una cubierta abierta de X . Considérese $F = X \setminus \bigcup_{j \in J} V_j$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $F \neq \emptyset$. Ocurre que $F \cap V_j = \emptyset$ para todo $j \in J$. Luego, dado que \mathcal{B} es cubierta de 2^X , existe $i_0 \in I$ tal que $F \in U_{i_0}^+$; es decir, $F \subseteq U_{i_0}$. Por otro lado, $X \setminus U_{i_0}$ es un subconjunto cerrado en X y por tanto compacto. Dado que $X \setminus U_{i_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$, existen $j_0, \dots, j_n \in J$ tales que $X \setminus U_{i_0} \subseteq \bigcup_{k \leq n} V_{j_k}$. Afirmamos que $\mathcal{C} = \{U_{i_0}^+, V_{j_0}^-, \dots, V_{j_n}^-\}$ es una subcubierta de 2^X .

En efecto, si $G \in 2^X$ es tal que $G \notin U_{i_0}^+$ entonces $G \cap (X \setminus U_{i_0}) \neq \emptyset$, lo cual implica que $G \cap V_{j_k} \neq \emptyset$ para algún $k \leq n$. Se sigue entonces que $G \in V_{j_k}^-$ y así \mathcal{C} es subcubierta de 2^X . ■

1.2. Propiedad de normalidad de 2^X .

Obsérvese que si ocurre que 2^X es normal entonces X también lo es, por el hecho de ser un subconjunto cerrado de 2^X . Basta entonces estudiar lo referente a la normalidad de 2^X .

Lema 1.1. [Kee70] *Si X es un espacio discreto infinito de cardinalidad κ , entonces 2^X tiene un subconjunto denso de cardinalidad κ y un subconjunto cerrado discreto de cardinalidad 2^κ .*

Demostración. Sabemos que $\mathfrak{Fin}(X)$ es denso en 2^X y $|\mathfrak{Fin}(X)| = |X| = \kappa$. Basta demostrar entonces la última afirmación del lema; para esto, sea $X = X_0 \cup X_1$ unión disjunta de X tal que $|X_i| = \kappa$ para $i < 2$ y sea $f_i : X \rightarrow X_i$ una función biyectiva. Defínase $F : 2^X \rightarrow 2^X$ por $F(A) = f_0(A) \cup f_1(X \setminus A)$ y sea $\mathcal{C} = \{F(A) : A \subseteq X\}$. Note que F está bien definida por ser X discreto.

Dado $A \subseteq X$, se cumple que $\mathcal{U}_A = A^+$ es un abierto en 2^X tal que $\mathcal{U}_A \cap \mathcal{C} = \{F(A)\}$. En efecto, pues dado $B \subseteq X$, $F(B) \subseteq F(A)$ si y sólo si

$$f_0(B) \subseteq f_0(A) \text{ y } f_1(X \setminus B) \subseteq f_1(X \setminus A),$$

pero lo anterior implica que $B \subseteq A$ y $X \setminus B \subseteq X \setminus A$, de lo cual se concluye que $B = A$. Por lo tanto, \mathcal{C} es discreto.

Por otro lado, para demostrar que \mathcal{C} es cerrado, si $B \in 2^X$ y $B \notin \mathcal{C}$ entonces $f_0^{-1}(B \cap X_0) \cup f_1^{-1}(B \cap X_1) \neq X$ ó $f_0^{-1}(B \cap X_0) \cap f_1^{-1}(B \cap X_1) \neq \emptyset$, pues en otro caso $B = F(f_0^{-1}(B \cap X_0))$.

Si ocurre que $f_0^{-1}(B \cap X_0) \cup f_1^{-1}(B \cap X_1) \neq X$, sean $\mathcal{U} = B^+$ y $D \in \mathcal{U}$. Asumamos que $D = f_0(U) \cap f_1(X \setminus U)$, para algún $U \subseteq X$. Entonces

$$f_0(U) \subseteq B \cap X_0 \text{ y } f_1(X \setminus U) \subseteq B \cap X_1,$$

lo cual implica que $U \subseteq f_0^{-1}(B \cap X_0)$ y $X \setminus U \subseteq f_1^{-1}(B \cap X_1)$. Pero lo anterior es una contradicción. Por tanto, $D \notin \mathcal{C}$ y así $B \notin cl_{2^X}(\mathcal{C})$.

Si ocurre por otro lado que $x \in f_0^{-1}(B \cap X_0) \cap f_1^{-1}(B \cap X_1)$, sea $\mathcal{U} = (\{f_0(x)\})^- \cap (\{f_1(x)\})^-$. Es claro que \mathcal{U} es vecindad de B . Ahora, si probamos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ podremos concluir que $B \notin cl_{2^X}(\mathcal{C})$. Sea $D \in \mathcal{U}$ y supongamos que $D \in \mathcal{C}$, digamos $D = f_0(U) \cup f_1(X \setminus U)$ para algún $U \subseteq X$. Dado que $f_0(x) \in D$ entonces $f_0(x) \in f_0(U)$, de lo cual se sigue que $x \in U$. Similarmente, como $f_1(x) \in D$ entonces $f_1(x) \in f_1(X \setminus U)$, lo cual implica que $x \in X \setminus U$, lo cual es una contradicción.

Se prueba así que \mathcal{C} es cerrado y discreto. Como F es una inyección entonces $|\mathcal{C}| = 2^\kappa$. ■

Teorema 1.4. [Kee70] Si X es un espacio infinito y discreto, entonces 2^X no es normal.

Demostración. Sea $\kappa = |X|$. Entonces 2^X tiene un subconjunto denso de cardinalidad κ , lo cual implica que existen a lo más 2^κ funciones continuas con valores reales en 2^X . Por el lema anterior, 2^X tiene un subconjunto discreto y

cerrado \mathcal{C} de cardinalidad 2^κ . Luego, si 2^X fuera normal entonces, extendiendo la función característica respecto de cada elemento de \mathcal{C} a 2^X , se obtienen al menos 2^{2^κ} funciones continuas, lo cual es una contradicción. Esto prueba que 2^X no es normal. ■

Definición 1.4. *Un espacio X es numerablemente compacto si toda cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita.*

Es claro que todo espacio compacto es numerablemente compacto. Se cumple que un espacio X es numerablemente compacto si y sólo si todo subconjunto infinito (numerable) de X tiene un punto de acumulación. Por tanto, si un espacio X no es numerablemente compacto, existe $F \subseteq X$ subconjunto infinito, cerrado y discreto, lo cual implica que 2^F es cerrado en 2^X . El resultado anterior garantiza que 2^F no es normal y por tanto 2^X tampoco lo es. Esto es, la normalidad de 2^X implica la compacidad numerable de X .

En la clase de espacios métricos se presenta la equivalencia entre compacidad numerable y compacidad. De lo anterior se puede concluir que el recíproco de la Proposición 1.1 es cierto; es decir si 2^X es metrizable entonces X es metrizable y compacto.

Definición 1.5. *Dado un espacio X , diremos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la sucesión $\{A_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos de X si para toda vecindad U de x se cumple que $|\{n \in \omega : U \cap A_n \neq \emptyset\}| = \omega$.*

Diremos que $\{A_n : n \in \omega\}$ es una sucesión discreta de subconjuntos en X si para cada $n \in \omega$, existe U_n subconjunto abierto de X tal que $U_n \cap A_n \neq \emptyset$ y $U_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

Definición 1.6. *Un espacio X es pseudocompacto si toda colección de subconjuntos abiertos de X tiene un punto de acumulación.*

La definición usual de pseudocompacidad, la cual difiere de la anterior, requiere que el espacio en cuestión sea completamente regular. Para poder extender tal propiedad para espacios que no necesariamente cumplan la condición de ser Tychonoff, convenimos utilizar la definición anterior que, como lo muestra el siguiente resultado, es una generalización de la definición usual. La demostración de la siguiente proposición se puede consultar en [Eng89].

Proposición 1.2. *Un espacio completamente regular X es pseudocompacto si y sólo si toda función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada.*

En lo que corresponde a hiperespacios de espacios topológicos, el comportamiento es como el que se indica en el resultado anterior; esto es, se presenta la equivalencia entre las dos caracterizaciones establecidas de pseudocompacidad.

Proposición 1.3. *Sea X un espacio completamente regular. Entonces 2^X es pseudocompacto si y sólo si toda función continua $f : 2^X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada.*

Demostración. Supongamos que 2^X no es pseudocompacto. Entonces existe una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos abiertos básicos en 2^X sin algún punto límite en 2^X . Para cada $n \in \omega$, sea

$$\mathcal{U}_n = \langle U_{0,n}, U_{1,n}, \dots, U_{k_n,n} \rangle,$$

donde $U_{0,n} = \bigcup_{i=1}^{k_n} U_{i,n}$. Elijase $x_{n,m} \in U_{m,n}$ para $n \in \omega$ y $1 \leq m \leq k_n$. Defínase ahora $F_n = \{x_{m,n} : m \leq k_n\}$ para cada $n \in \omega$. Dado que X es completamente regular y F_n es un subconjunto finito de $U_{0,n}$ para cada $n \in \omega$, existe $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ función continua tal que $f_n[F_n] = \{1\}$ y $f_n[X \setminus U_{0,n}] = \{0\}$. Similarmente, dados $n \in \omega$ y $1 \leq m \leq k_n$, existe $g_{m,n} : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $g_{m,n}(x_{m,n}) = 1$ y $g_{m,n}[X \setminus U_{m,n}] = \{0\}$. Para cada $n \in \omega$ y $m \in \{1, \dots, k_n\}$, defínase $f_n^- : 2^X \rightarrow [0, 1]$ y $g_{m,n} : 2^X \rightarrow [0, 1]$ por $f_n^-(F) = \inf\{f_n(x) : x \in F\}$ y $g_{m,n}(F) = \sup\{g_{m,n}(x) : x \in F\}$. Como en la demostración de (5) del Teorema 1.2, se verifica que tales funciones son continuas en 2^X . Ahora, para cada $n \in \omega$ sea $h_n : 2^X \rightarrow [0, 1]$, donde $h_n = f_n^+ \cdot g_{1,n}^+ \cdot \dots \cdot g_{k_n,n}^+$. Nótese que h_n es continua, $h_n(F_n) = 1$ y $h_n[2^X \setminus \mathcal{U}_n] = \{0\}$.

Por último, defínase $h : 2^X \rightarrow [0, 1]$ dada por $h(F) = \sum_{n \in \omega} n \cdot h_n(F)$. Por hipótesis, $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ no tiene puntos límite, lo cual garantiza que cada $F \in 2^X$ tiene una vecindad que interseca únicamente a una cantidad finita de \mathcal{U}_n 's. Por tanto, de manera local, h se comporta como suma finita de funciones continuas. Luego, h es continua en 2^X . Más aún, h es no acotada. ■

Recordemos que aún falta establecer la relación existente entre un espacio y su hiperespacio respecto de la propiedad de normalidad. Hasta ahora hemos presentado únicamente algunos resultados parciales. El objetivo será mostrar que la normalidad de 2^X implica la compacidad de X . Para poder desarrollar la demostración de lo anterior, la cual se debe a Veličko [Vel76], presentamos antes algunos resultados auxiliares, todos ellos obtenidos por Keesling [Kee2].

Lema 1.2. *Supóngase que X^n tiene un subconjunto $B = \{x^i : i \in \omega\}$ numerable cerrado y discreto, donde $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$ para cada $i \in \omega$, y una colección $\{U_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos abiertos que cumplen:*

- (1) Para cada $i \in \omega$, $x_j^i \neq x_k^i$ si $j \neq k$,
- (2) $x^i \in U_i$ para todo $i \in \omega$ y
- (3) para cada subsucesión $B' = \{x^{i_j} : j \in \omega\}$ de B y cada proyección π_k , $cl_X(\pi_k[B'])$ no es compacto.

Entonces existen una subsucesión $B' = \{x^{i_j} : j \in \omega\}$ de B y una colección $\{V_k^j : k = 1, \dots, n, j \in \omega\}$ de subconjuntos abiertos en X tales que :

- (a) $\overline{V_h^i} \cap \overline{V_k^j} = \emptyset$ si $(i, h) \neq (j, k)$,
- (b) $x^{i_j} \in V_1^j \times \dots \times V_n^j$,
- (c) $V_1^j \times \dots \times V_n^j \subseteq U_{i_j}$.

Demostración. Sea $B = \{x^i : i \in \omega\} \subseteq X^n$ tal que satisface las hipótesis dadas y sea $x^{i_0} = x^0$. Sea O_1^0 una vecindad abierta de x_1^0 tal que $\{x \in B : (\forall k \in \{1, \dots, n\})(\pi_k(x) \notin \overline{O_1^0})\}$ es infinito. Nótese que tal vecindad existe por la propiedad (3) de las hipótesis del lema. Más aún, por la propiedad (1) podemos suponer que $x_j^0 \notin \overline{O_1^0}$ si $2 \leq j \leq n$. Sea

$$B_1 = \{x \in B : (\forall k \in \{1, \dots, n\})(\pi_k(x) \notin \overline{O_1^0})\}.$$

Similar a lo anterior, como consecuencia de (1) y (3) de las hipótesis, sea O_2^0 vecindad de x_2^0 tal que $\{x \in B_1 : (\forall k \in \{1, \dots, n\})(\pi_k(x) \notin \overline{O_2^0})\}$ es infinito, $x_j^0 \notin \overline{O_2^0}$ para $j \neq 2$ y además $O_2^0 \cap O_1^0 = \emptyset$. Sea

$$B_2 = \{x \in B_1 : (\forall k \in \{1, \dots, n\})(\pi_k(x) \notin \overline{O_2^0})\}.$$

Nótese que si $x \in B_2$ entonces $x \in B_1$ y así también $\pi_k(x) \notin \overline{O_1^0}$.

Continuando inductivamente este proceso, obtenemos una colección de conjuntos infinitos $\{B_1, \dots, B_n\}$ y otra de conjuntos abiertos $\{O_1^0, \dots, O_n^0\}$, que cumplen:

- (a) $O_i^0 \cap O_j^0 = \emptyset$ si $i \neq j$,
- (b) $x_j^0 \in O_j^0$ para $j = 1, \dots, n$,
- (c) $B_j = \{x \in B_{j-1} : (\forall k \in \{1, \dots, n\})(\forall q \in \{1, \dots, j\})(\pi_k(x) \notin \overline{O_q^0})\} \cup \{x^0\}$.

Sean $\{V_1^0, \dots, V_n^0\}$ familia de subconjuntos abiertos en X tal que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $x_j^0 \in V_j^0 \subseteq \overline{V_j^0} \subseteq O_j^0$ y $V_1^0 \times \dots \times V_n^0 \subseteq U_0$, donde U_0 es como en (2) de las hipótesis. Ahora, sean $C_0 = B_n \setminus \{x^0\}$ y $X_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{i=n} O_i^0$.

Afirmamos que $C_0 \subseteq [int_X X_0]^n$.

Nótese que $int_X [X \setminus \bigcup_{i=1}^{i=n} O_i^0] = X \setminus \bigcup_{i=1}^{i=n} \overline{O_i^0}$. Luego, si $x \in B_n \setminus \{x^0\}$, entonces $\pi_k(x) \notin \overline{O_i^0}$ para $k = 1, \dots, n$ y $i = 1, \dots, n$, lo cual implica que $\pi_k(x) \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{i=n} \overline{O_i^0}$. Por tanto, $C_0 \subseteq [X \setminus \bigcup_{i=1}^{i=n} \overline{O_i^0}]^n = [int_X X_0]^n$.

Sea $i_1 = \min\{i \in \omega : x^i \in C_1\}$. Repitiendo la construcción anterior, ahora respecto a i_1 , se pueden obtener conjuntos abiertos de $int_X X_0$, y por tanto abiertos de X , $\{O_1^1, \dots, O_n^1\}, \{V_1^1, \dots, V_n^1\}$, así como una subsucesión infinita C_1 de C_0 tal que:

- (a) $x_j^{i_1} \in V_j^1 \subseteq \overline{V_j^1} \subseteq O_j^1$ para todo j ,
- (b) $V_1^1 \times \dots \times V_n^1 \subseteq U_{i_1}$,
- (c) $C_1 \subseteq [int_X X_1]^n$, donde $X_1 = X_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{i=n} O_i^1$.

Sea $i_2 = \min\{i \in \omega : x^i \in C_1\}$. Continuando este proceso de manera inductiva obtenemos una subsucesión $B' = \{x^{i_j} : j \in \omega\}$ de B y una colección de conjuntos abiertos $\{V_k^j : k = 1, \dots, n; j \in \omega\}$, las cuales satisfacen la conclusión del lema. ■

La demostración del siguiente resultado se presenta en [Eng89] :

Teorema 1.5. *El producto Cartesiano $X \times Y$ de un espacio pseudocompacto X y un espacio compacto Y es pseudocompacto.*

Proposición 1.4. *Si X^n no es pseudocompacto, entonces existe una colección de conjuntos $\{U_k^i : k = 1, \dots, n; i \in \omega\}$ abiertos no vacíos en X tal que $\overline{U_k^i} \cap \overline{U_l^j} = \emptyset$ si $(i, k) \neq (j, l)$ y si $O_i = U_1^i \times \dots \times U_n^i$ entonces $\{O_i : i \in \omega\}$ es una colección discreta en X^n .*

Demostración. Lo haremos por inducción sobre n . Es claro que si $n = 1$, la proposición es cierta. Supongamos que $n > 1$ y consideremos los siguientes casos:

(i) Si X^{n-1} no es pseudocompacto, por hipótesis inductiva se obtiene una familia de conjuntos $\{U_k^i : 1 \leq k < n, i \in \omega\}$, los cuales satisfacen la conclusión de la proposición para X^{n-1} .

Defínase $\{V_j^i : j = 1, \dots, n; i \in \omega\}$ tal que $V_j^i = U_j^{2i}$ si $j = 1, \dots, n-1$ y $V_n^i = U_1^{2i+1}$. Es claro que si $(i, k) \neq (j, l)$ entonces $\overline{V_j^i} \cap \overline{V_l^j} = \emptyset$. Además si

U es un abierto en X^{n-1} tal que $O_i \cap U \neq \emptyset$ y $O_j \cap U = \emptyset$ si $j \neq i$, donde $O_j = V_1^j \times \cdots \times V_{n-1}^j$ para todo $j \in \omega$, entonces $U \times X$ es un abierto en X^n tal que $(O_i \times V_n^i) \cap (U \times X) \neq \emptyset$ y $(O_j \times V_n^j) \cap (U \times X) = \emptyset$ si $j \neq i$. Por lo tanto, $\{V_j^i : i \in \omega, 1 \leq j \leq n\}$ satisface la conclusión de la proposición.

(ii) X^{n-1} es pseudocompacto. Como X^n no es pseudocompacto entonces existe una sucesión discreta de conjuntos abiertos $\{U_i : i \in \omega\}$. Considérese $B = \{x^i : i \in \omega\}$ una sucesión en X^n tal que $x^i \in U_i$ para cada $i \in \omega$.

Veamos que B cumple las condiciones del Lema 1.2. Supongamos que existe $k \in \omega$ tal que $cl_X(\pi_k[B'])$ es compacto, para alguna subsucesión $B' = \{x^{i_l} : l \in \omega\}$ de B . Entonces el teorema anterior garantiza que $cl_X(\pi_i[B']) \times X^{n-1}$ es pseudocompacto y además contiene a B' . Se cumple entonces que $\{U_i \cap (cl_X(\pi_i[B']) \times X^{n-1}) : i \in \omega\}$ es una sucesión discreta de subconjuntos abiertos no vacíos en $cl_X(\pi_i[B']) \times X^{n-1}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto B y $\{U_i : i \in \omega\}$ cumplen (2) y (3) del Lema 1.2.

Por otro lado, dados $j, k \in \{1, \dots, n\}$, defínase $X_{j,k} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j = x_k\}$ y sea $A = \bigcup_{j \neq k} X_{j,k}$. Para cada $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $X_{j,k} \cong X^{n-1}$, lo cual implica que $U_i \cap A = \emptyset$ para todo $i \in \omega$, excepto una cantidad finita, pues en otro caso existirían j y k tal que $|\{U_i : i \in \omega\} \cap X_{j,k}| = \omega$, con lo cual X^{n-1} no sería pseudocompacto.

De esta forma, eliminando aquellos conjuntos no ajenos con A si es necesario, podemos suponer que $B \subseteq X^n \setminus A$ y por tanto B satisface la condición (1) de lema anterior.

Sean $\{V_k^i : k = 1, \dots, n; j \in \omega\}$ y B' tales que satisfacen la conclusión del Lema 1.2. Entonces, definiendo para cada $i \in \omega$ $O_i = V_1^i \times \cdots \times V_n^i$, se obtiene que $\{O_i : i \in \omega\}$ satisface la conclusión de la proposición. ■

Por el Teorema 1.1 sabemos que para cada $n \in \omega$, la función $f_n : X^n \rightarrow \mathcal{F}_n(X)$ definida por $f_n((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$ es continua y cerrada. Se puede verificar también que $f_n \upharpoonright (X^n \setminus A)$ es una función abierta sobre $\mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_{n-1}(X)$, donde A es como en la demostración de la proposición anterior.

Podemos entonces relacionar el producto finito de un espacio, digamos X^n , con la colección de sus subconjuntos con a lo más puntos n puntos, con lo cual es natural preguntarse que relación existe entre ellos respecto a la propiedad de pseudocompacidad. El siguiente resultado responde a esa pregunta.

Teorema 1.6. *Para cada $n \in \omega$, $\mathcal{F}_n(X)$ es pseudocompacto si y sólo si X^n lo es.*

Demostración. Si X^n es pseudocompacto entonces \mathcal{F}_n lo es, pues tal propiedad se preserva bajo funciones continuas.

Supongamos ahora que X^n no es pseudocompacto. Considérese la familia $\{U_k^i : k = 1, \dots, n; i \in \omega\}$ tal que satisface las propiedades de la Proposición 1.4. Para cada $i \in \omega$, sea $O_i = U_1^i \times \dots \times U_n^i$. Entonces $O_i \in X^n \setminus A$ para cada $i \in \omega$ y se sigue entonces que $\{f_n[O_i] : i \in \omega\}$ es una colección discreta de conjuntos abiertos no vacíos en $\mathcal{F}_n(X)$. Se concluye entonces que $\mathcal{F}_n(X)$ no es pseudocompacto. ■

Resulta ahora natural preguntarse acerca de lo que ocurre en el caso infinito. Esto es: ¿Existirá alguna relación entre el producto infinito (numerable) de un espacio y su hiperespacio respecto de la propiedad de pseudocompacidad? Esta pregunta fue establecida por J. Ginsburg [Gin75]. Abordaremos más adelante este caso.

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [Eng89].

Proposición 1.5. *Sean X e Y espacios completamente regulares tales que $X \times Y$ es pseudocompacto. Entonces $\beta(X \times Y) = \beta X \times \beta Y$.*

Teorema 1.7. *Sea $n \geq 2$ y sea X un espacio normal. Entonces $\beta\mathcal{F}_n(X) = \mathcal{F}_n(\beta X)$ si y sólo si $\mathcal{F}_n(X)$ es pseudocompacto.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(X)$ es pseudocompacto. Por el teorema anterior, X^n es pseudocompacto y así, dado que cualquier función continua $f : X^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una extensión continua a X^n , se sigue que X^{n-1} es pseudocompacto. Luego, por la Proposición 1.5, $\beta(X^n) = (\beta X)^n$.

Sea $f : \mathcal{F}_n(X) \rightarrow [0, 1]$ una función continua arbitraria y considérese $F : X^n \rightarrow [0, 1]$ tal que $F = f \circ f_n$, donde $f_n : X^n \rightarrow \mathcal{F}_n(X)$ es como antes.

Se cumple que F tiene una extensión $F^* : (\beta X)^n \rightarrow [0, 1]$. Ahora, sea $f_n^* : (\beta X)^n \rightarrow \mathcal{F}_n(\beta X)$ dada por $f_n^*((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Es claro que f_n^* es una extensión de f_n . Más aún, f_n^* es una función cociente, por ser cerrada y sobreyectiva.

Si probamos que F^* es constante en $(f_n^*)^{-1}[\{x\}]$ para cada x , entonces $f^* := F^* \circ (f_n^*)^{-1}$ será una función continua y extensión de f a $\mathcal{F}_n(\beta X)$ y por tanto, $\mathcal{F}_n(\beta X) = \beta(X^n)$. Probemos entonces que F^* es constante sobre cada $(f_n^*)^{-1}[\{x\}]$.

Sea $x = \{x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{F}_n(\beta X)$, donde $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Sean $y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in (\beta X)^n$ tales que $f_n^*(y) = f_n^*(z) = x$.

Es posible construir una red $\{\{x_1^\alpha, \dots, x_k^\alpha\} : \alpha \in I\}$ en X^n que converge a x en $\mathcal{F}_n(\beta X)$ tal que $x_i^\alpha \rightarrow x_i$ y $x_i^\alpha \neq x_j^\alpha$ si $i \neq j$. Si $z_i = x_j$ entonces sea $z_i^\alpha = x_j^\alpha$ y similarmente sea $y_i^\alpha = x_j^\alpha$ si $y_i = x_j$. Entonces

$$(y_1^\alpha, \dots, y_n^\alpha) \rightarrow y \text{ y } (z_1^\alpha, \dots, z_n^\alpha) \rightarrow z.$$

Por lo tanto, $F^*((y_1^\alpha, \dots, y_n^\alpha)) \rightarrow F^*(y)$ y $F^*((z_1^\alpha, \dots, z_n^\alpha)) \rightarrow F^*(z)$, lo cual implica que $F^*(y) = F^*(z)$, pues para todo $\alpha \in I$, $F^*((y_1^\alpha, \dots, y_n^\alpha)) = F^*((z_1^\alpha, \dots, z_n^\alpha))$.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}_n(X)$ no es pseudocompacto, lo cual implica que X^n no lo es. Sea $\{U_k^i : k = 1, \dots, n; i \in \omega\}$ como en la Proposición 1.4. Para cada $i \in \omega$, sea $\mathcal{U}_i = \langle U_1^i, \dots, U_n^i \rangle \cap \mathcal{F}_n(X) = f_n[U_1^i \times \dots \times U_n^i]$. Se cumple que $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ es una colección discreta de conjuntos abiertos en $\mathcal{F}_n(X)$. Para cada $i \in \omega$, elíjase $B_i \in \mathcal{U}_i$. Sea $f : \mathcal{F}_n(X) \rightarrow [0, 1]$ tal que $f[\{B_i : i \in \omega\}] = \{1\}$ y $f[\mathcal{F}_n(X) \setminus \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{U}_i] = \{0\}$. Probemos que ninguna extensión de f a $\mathcal{F}_n(\beta X)$ es continua, con lo cual $\beta(\mathcal{F}_n(X))$ será diferente de $\mathcal{F}_n(\beta X)$.

Sea B_0 un punto límite de $\{B_i : i \in \omega\}$ en $\mathcal{F}_n(\beta X)$ y sea

$$\mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_m \rangle \cap \mathcal{F}_n(\beta X)$$

una vecindad de B_0 en $\mathcal{F}_n(\beta X)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $m = n$. Sean $i_1, i_2 \in \omega$ tales que $B_{i_1}, B_{i_2} \in \mathcal{U}$ y $B_{i_1} \neq B_{i_2}$. Defínase $B = \{p_1, \dots, p_n\}$, donde $p_j \in B_{i_1} \cap U_j$ para j impar y $p_j \in B_{i_2} \cap U_j$ para j par. Luego, $B \in \mathcal{U}$; por otro lado, $B \notin \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{U}_i$.

Por tanto, $\{0, 1\} \subseteq f^*[\mathcal{U}]$ para toda vecindad \mathcal{U} de B_0 en $\mathcal{F}_n(\beta X)$. Esto confirma que f no tiene una extensión continua y se prueba así que $\mathcal{F}_n(\beta X) \neq \beta\mathcal{F}_n(X)$. ■

Lema 1.3. Si X es un espacio normal y $\{F_0, \dots, F_k\}$ es una colección finita de subconjuntos cerrados de X , entonces

$$\bigcap_{i \leq k} cl_{\beta X}(F_i) = cl_{\beta X}\left(\bigcap_{i \leq k} F_i\right).$$

Demostración. Basta demostrarlo para dos conjuntos cerrados F_0 y F_1 . Es claro que $cl_{\beta X}(F_0 \cap F_1) \subseteq (cl_{\beta X}F_0 \cap cl_{\beta X}F_1)$. Supongamos ahora que

$$x \in (cl_{\beta X}(F_0) \cap cl_{\beta X}(F_1)) \setminus cl_{\beta X}(F_0 \cap F_1).$$

Sea V una vecindad abierta de x en βX tal que $cl_{\beta X}(V) \cap cl_{\beta X}(F_0 \cap F_1) = \emptyset$. Sea $A_i = F_i \cap cl_X(V \cap X)$ para $i \in 2$. Como $x \in cl_{\beta X}(F_0) \cap cl_{\beta X}(F_1)$ entonces $x \in cl_{\beta X}(A_0) \cap cl_{\beta X}(A_1)$.

Por otro lado, dado que $cl_X(V) \cap (F_0 \cap F_1) = \emptyset$, se cumple que $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Nótese que A_0 y A_1 son cerrados en X , lo cual implica, por la normalidad de X , que $cl_{\beta X}(A_0) \cap cl_{\beta X}(A_1) = \emptyset$. Pero esto último es una contradicción. ■

Lema 1.4. *Si $\{F_i : i \in \omega\}$ es una colección de subconjuntos cerrados en un espacio X normal y numerablemente compacto, entonces*

$$cl_{\beta X}\left(\bigcap_{i \in \omega} F_i\right) = \bigcap_{i \in \omega} cl_{\beta X}(F_i).$$

Demostración. La contención de izquierda a derecha es clara. Veamos como establecer la otra.

Supongamos que existe $x \in \bigcap_{i \in \omega} cl_{\beta X}(F_i) \setminus cl_{\beta X}\left(\bigcap_{i \in \omega} F_i\right)$. Sea V un conjunto abierto en βX tal que $x \in V$ y $cl_{\beta X}(V) \cap cl_{\beta X}\left(\bigcap_{i \in \omega} F_i\right) = \emptyset$. Sea $U = V \cap X$ y nótese que $cl_{\beta X}(U) = cl_{\beta X}(V)$. Es claro que $cl_X(U) \cap \left(\bigcap_{i \in \omega} F_i\right) = \emptyset$; ésto es, $cl_X(U) \subseteq \bigcup_{i \in \omega} X \setminus F_i$. Por lo tanto, por la compacidad numerable de $cl_X(U)$ existe $n \in \omega$ tal que $cl_X(U) \cap \left(\bigcap_{i \in n} F_i\right) = \emptyset$. Por el lema anterior, $cl_{\beta X}(U) \cap \left(\bigcap_{i \in n} cl_{\beta X}(F_i)\right) = \emptyset$. Pero $x \in cl_{\beta X}(V) \cap \left(\bigcap_{i \in n} cl_{\beta X}(F_i)\right)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $cl_{\beta X}\left(\bigcap_{i \in \omega} F_i\right) = \bigcap_{i \in \omega} cl_{\beta X}(F_i)$. ■

Proposición 1.6. *Si 2^X es normal y X no es compacto, entonces existe $n \in \omega$ tal que X^n no es pseudocompacto.*

Demostración. Supongamos que X^n es pseudocompacto, para todo $n \in \omega$. Nótese que, como se indicó anteriormente, la normalidad de 2^X implica la compacidad numerable de X .

Sea $x \in \beta X \setminus X$ y defínase $\mathcal{G}_x = \{F \in 2^X : x \in cl_{\beta X}(F)\}$. Defínase también $\widehat{X} := \mathcal{F}_1(X)$. Se cumple que \mathcal{G}_x y \widehat{X} son subconjuntos cerrados ajenos en 2^X .

Afirmación: “ \mathcal{G}_x y \widehat{X} no pueden separarse por una función continua en 2^X ”

Sea $f : 2^X \rightarrow [0, 1]$ una función continua tal que $f[\widehat{X}] = \{0\}$. Para cada $n \in \omega$, sea $f_n = f \upharpoonright \mathcal{F}_n(X)$. Dado que X^n es pseudocompacto para todo n , entonces $\mathcal{F}_n(X)$ lo es. Por tanto, $\beta(\mathcal{F}_n(X)) = \mathcal{F}_n(\beta X)$. Así, f_n tiene una

extensión f_n^* a $\mathcal{F}_n(\beta X)$, para cada $n \in \omega$. Nótese que, para todo $n \in \omega$, $f_n^*({x}) = 0$.

Para cada n , sea U_n una vecindad abierta de x en βX tal que si $A \in (U_n)^+ \cap \mathcal{F}_n(\beta X)$, entonces $f_n^*(A) \leq 2^{-n}$.

Dado $n \in \omega$, sea $F_n = cl_X(U_n \cap X)$. Si V es una vecindad abierta de x en βX , $(V \cap U_n) \cap X \neq \emptyset$, lo cual implica que $V \cap F_n \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in cl_{\beta X} F_n$. Así, por el lema anterior, $x \in cl_{\beta X} [\bigcap_{n \in \omega} F_n]$. Esto último implica que $F := \bigcap_{n \in \omega} F_n \in \mathcal{G}_x$.

Sea $B \subseteq F$ subconjunto finito, digamos que $|B| = k$. Entonces $B \in (U_n)^+ \cap \mathcal{F}_n(\beta X)$, para todo $n \geq k$. Por tanto, $f_n(B) = f(B) \leq 2^{-n}$, para $n \geq k$, de lo cual se concluye que $f(B) = 0$. Luego, $f(F) = 0$.

Se concluye así que \widehat{X} y \mathcal{G}_x no pueden separarse, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X^n no es pseudocompacto para algún $n \in \omega$. ■

Utilizaremos el siguiente resultado, el cual se debe a Kuratowski. Su demostración se puede consultar en [Kur66].

Lema 1.5. *Sean $F, G \in 2^X$ tales que $F \cap G = \emptyset$. Entonces $2^{F \cup G} \approx 2^F \times 2^G$.*

Estamos ahora en condición de establecer la equivalencia entre la compacidad de un espacio y la normalidad de su hiperespacio. El resultado se debe a Veličko. Keesling había demostrado antes el resultado asumiendo la Hipótesis del Continuo.

Teorema 1.8. *Sea X un espacio regular. Entonces 2^X es normal si y sólo si X es compacto.*

Demostración. Supongamos que X es compacto. Entonces 2^X también lo es y, dado que X es regular, 2^X es Hausdorff, lo cual implica que 2^X es normal.

Supongamos ahora que 2^X es normal. Por la proposición anterior, basta probar que $\mathcal{F}_n(X)$ es numerablemente compacto (y por tanto pseudocompacto) para todo $n \in \omega$. Consideremos el caso en que $n = 2$. Los demás casos se pueden resolver de manera similar.

Sea $\mathcal{Z} = \{Z_n : n \in \omega\}$ una sucesión en $\mathcal{F}_2(X)$.

Caso I: Supongamos que existen $a \in X$ y una subsucesión $\{Z_{n_k} : k \in \omega\}$ de \mathcal{Z} tales que $a \in Z_{n_k}$, para todo $k \in \omega$. Entonces, sea $B = \{b_{n_k} : k \in \omega\}$, donde $Z_{n_k} = \{a, b_{n_k}\}$ para todo k . Dado que X es numerablemente

compacto, existe $b \in X$ punto de acumulación de B . Luego, $\{a, b\}$ es punto de acumulación de $\{Z_{n_k} : k \in \omega\}$, y por tanto de \mathcal{Z} .

Por lo tanto, podemos suponer que $Z_n \cap Z_m = \emptyset$ si $n \neq m$ y $|Z_n| = 2$ para todo n . Para cada $n \in \omega$, sea $Z_n = \{a_n, b_n\}$.

Caso II: Supongamos que existe una sucesión $\{x_k : k \in \omega\}$ en X tal que $x_k \rightarrow x$ y, para algún $I \subseteq \omega$ infinito, $|\{x_k : k \in \omega\} \cap Z_n| = 1$, para todo $n \in I$. Consideremos el conjunto $C = \bigcup_{n \in I} Z_n \setminus \{x_k : k \in \omega\}$ y sea $y \in X$ un punto de acumulación de C . Se cumple que $\{x, y\}$ es punto de acumulación de $\{Z_n : n \in I\}$ y por tanto de \mathcal{Z} .

Luego, podemos suponer que, para todo $a \in X$, a no es punto de convergencia de alguna sucesión de puntos en $\bigcup_{n \in \omega} Z_n$. Más aún, podemos suponer que $\bigcup_{n \in \omega} Z_n$ es discreto en sí mismo.

Sean $A = \{a_n : n \in \omega\}$, $B = \{b_n : n \in \omega\}$ y $\hat{A} = cl_X(A)$. Como X es numerablemente compacto, existe $a \in \hat{A} \setminus A$ y no hay alguna sucesión en A que converja a a . Sea η_a la familia de vecindades abiertas de a en X . Entonces $\mathcal{U} = \{V \cap A : V \in \eta_a\}$ es un filtro sobre A . Por otro lado, a cada $H \subseteq A$ le corresponde un conjunto $H^* = \{b_{n_k} : a_{n_k} \in H\} \subseteq B$. Defínase el filtro \mathcal{U}^* asociado a \mathcal{U} como $\mathcal{U}^* = \{H^* : H \in \mathcal{U}\}$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que \mathcal{U} y \mathcal{U}^* son ultrafiltros sobre A y B respectivamente. Debe observarse que $a = \lim \mathcal{U}$.

Caso III: Supongamos que \mathcal{U}^* converge a un punto $b \in X$.

Afirmamos que $\{a, b\}$ es punto de acumulación de \mathcal{Z} . En efecto, sea $\langle U, V \rangle$ una vecindad de $\{a, b\}$ en $\mathcal{F}_2(X)$ tal que $a \in U$ y $b \in V$. Nótese que $U \cap A \neq \emptyset$, digamos $U \cap A = \{a_{n_k} : k \in \omega\}$. Basta probar que $\{b_{n_k} : k \in \omega\} \cap V \neq \emptyset$.

Se cumple que $V \cap B \in \mathcal{U}^*$, lo cual implica que $V \cap B \cap \{b_{n_k} : k \in \omega\} \neq \emptyset$. Luego, existe $l \in \omega$ tal que $\{a_{n_l}, b_{n_l}\} \in \langle U, V \rangle$. Se prueba así que $\{a, b\}$ es punto de acumulación de \mathcal{Z} .

Caso IV: Supongamos que \mathcal{U}^* no tiene un punto límite, lo cual implica que \mathcal{U}^* no tiene puntos de acumulación en X .

En este caso, $\bigcap_{H \in \mathcal{U}} cl_X(H^*) = \emptyset$. En particular, existe $H \in \mathcal{U}$ tal que $a \notin cl_X(H^*)$. Como 2^X es normal entonces X es normal y por tanto regular. Así, existe V vecindad cerrada de a tal que $V \cap cl_X(H^*) = \emptyset$. Sea $\hat{H} \in \mathcal{U}$ tal que $\hat{H} \subseteq V$ y definamos $H_0 = H \cap \hat{H}$.

Sean $P_1 = cl_X(H_0)$ y $P_2 = cl_X(H_0^*)$. Notemos que $cl_X(H_0) \subseteq cl_X(\hat{H}) \subseteq V$, $H_0^* \subseteq H^*$ y $V \cap cl_X(H^*) = \emptyset$, de lo cual se concluye que $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Se cumple así que $2^{P_1 \cup P_2} \cong 2^{P_1} \times 2^{P_2}$.

Defínanse los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{U \cap P_1 : U \in \mathcal{U}\}, \\ \hat{\mathcal{L}} &= \{cl_X(K) : K \in \mathcal{L}\}, \\ \mathcal{L}^* &= \{cl_X(K^*) : K \in \mathcal{L}\}, \\ \mathcal{N} &= cl_{2^X}(\mathcal{L}^*), \\ \mathcal{A} &= \{\{a\} \cup K : K \in \mathcal{N}\}.\end{aligned}$$

Se cumple que \mathcal{A} es cerrado en 2^X y $\mathcal{L}^* \subseteq 2^{P_2}$, pues $K^* \subseteq P_2$ para todo $K \in \mathcal{L}$, lo cual implica que $\mathcal{N} \subseteq 2^{P_2}$.

Defínase $\mathcal{B} = \{W \cup \tilde{W} : W \in \mathcal{L}\}$, donde $\tilde{W} = cl_X[(W \cap A)^*]$.

Afirmación: “ $\mathcal{A} \cap cl_{2^X}(\mathcal{B}) = \emptyset$ ”

En efecto, sea $\{a\} \cup T \in \mathcal{A}$, entonces $T \subseteq P_2$. Sea $y \in T$. Elijase $M \subseteq X$ vecindad abierta de a tal que $cl_X(M) \cap P_2 = \emptyset$ y $y \notin cl_X(N^*)$, donde $N = M \cap A$.

Sea $U_1 = X \setminus (cl_X(N^*) \cup cl_X(M))$ y sean U_2, \dots, U_n subconjuntos abiertos en X tales que $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ forman una vecindad básica de T en 2^X tal que $U_i \cap P_1 = \emptyset$ para todo i . Esto último es posible por la normalidad de X . Defínase $\mathcal{M} = \langle M, U_1, \dots, U_n \rangle$. Se cumple que \mathcal{M} es una vecindad de $\{a\} \cup T$. Probemos que $W \cup W^* \notin \mathcal{M}$.

Si ocurre que $W \subseteq M$ entonces $W \cap A \subseteq M \cap A = N$, lo cual implica que $(W \cap A)^* \subseteq N^* \subseteq cl_X(N^*) \subseteq X \setminus U_1$. Como $W \subseteq P_1$, $W \cap U_1 = \emptyset$, lo cual implica que $W \cup W^* \notin \mathcal{M}$.

En otro caso, si ocurre que $W \not\subseteq M$, dado que $W \cap U_i = \emptyset$ para $i > 1$, $W \not\subseteq (M \cup \bigcup_{i=1}^{i=n} U_i)$ y por tanto $W \cup W^* \notin \mathcal{M}$.

Se prueba así que $\mathcal{M} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, lo cual implica que $\{a\} \cup T \notin cl_{2^X}(\mathcal{B})$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \cap cl_{2^X}(\mathcal{B}) = \emptyset$.

Por último, probemos que \mathcal{A} y $cl_{2^X}(\mathcal{B})$ no se pueden separar por abiertos ajenos, lo cual contradice la normalidad de 2^X .

Sea \mathcal{U}_A un abierto en 2^X tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}_A$. Se construye inductivamente una sucesión $\{T_n : n \geq 1\}$ en 2^X , con las siguientes propiedades:

- (a) $T_n = (W_{1,n} \cup W_{2,n}^*)$, donde $W_{1,n}, W_{2,n} \in \hat{\mathcal{L}}$,
- (b) para todo $k < n$, $W_{1,n} \cup W_{2,n} \subseteq W_{j,k}$, donde $j \in \{1, 2\}$,
- (c) $T_n \in \mathcal{B}$ si n es impar y $T_n \in \mathcal{U}_A$ si n es par.

Elíjase $T_1 \in \mathcal{B}$ arbitrario. Supongamos ahora que hemos elegido T_1, \dots, T_{k-1} tal que cumplen (a) – (c).

- 1) Si $k = 2n$, para algún $n \in \omega$, defínase $W = \bigcup_{j=1}^{j=2} \bigcap_{i=1}^{i=2n-1} W_{j,m}$. Se cumple que $W \in \hat{\mathcal{L}}$. Sea $\langle U_1, \dots, U_l \rangle$ una vecindad básica de $\{a\} \cup W^*$ contenida en \mathcal{U}_A , tal que $a \in U_1$ y $U_1 \cap (\bigcup_{i=2}^{i=l} U_i) = \emptyset$.

Elíjase $W_{1,k} \in \hat{\mathcal{L}}$ tal que $W_{1,k} \subseteq U_1 \cap W$. Por otro lado, basta considerar $W_{2,k} = W$. Entonces $W_{1,k} \cup W_{2,k}^* \subseteq \langle U_1, \dots, U_l \rangle \subseteq \mathcal{U}_A$,

- 2) Si $k = 2n + 1$, basta elegir $W_{1,k} = W_{2,k} = W$.

Hemos construído así la sucesión con las propiedades deseadas.

Sean $M_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} W_{1,k}$, $M_2 = \bigcap_{k=1}^{\infty} W_{2,k}^*$. Dado que X es numerablemente compacto, M_1 y M_2 son no vacíos. Más aún, $M \setminus \{a\} \neq \emptyset$ pues, por suposición, no existe sucesión en A que converge a a .

Por último, como $W_{1,n} \rightarrow M_1$ y $W_{2,n} \rightarrow M_2$ entonces $W_{1,n} \cup W_{2,n} \rightarrow M_1 \cup M_2$ en 2^X , lo cual implica que $M_1 \cup M_2 \in cl_{2^X}(\mathcal{B}) \cap cl_{2^X}(\mathcal{U}_A)$.

Así, para toda vecindad \mathcal{V} de \mathcal{A} , $cl_{2^X}(\mathcal{B}) \cap cl_{2^X}(\mathcal{V}) = \emptyset$, lo cual implica que \mathcal{A} y \mathcal{B} no se pueden separar.

Se prueba así que no puede ocurrir el caso IV y por tanto $\mathcal{Z}s$ tiene un punto de acumulación. ■

Corolario 1.1. *Sea X un espacio completamente regular. Los siguientes son equivalentes:*

- (a) X es compacto,
- (b) 2^X es normal,
- (c) 2^X es compacto,
- (d) 2^X es Lindelöf,
- (e) 2^X es paracompacto.

Demostración. Por el Teorema anterior, (a) y (b) son equivalentes. Se cumple además (a) \Rightarrow (c); es claro que (c) \Rightarrow (d) y (d) \Rightarrow (e) se sigue del hecho de que 2^X es regular.

Verifiquemos ahora que se cumple (e) \Rightarrow (a). Como 2^X es paracompacto entonces 2^X es normal, de lo cual se sigue que X es compacto. ■

1.3. Compacidad Local en 2^X

Para concluir este capítulo, estudiemos el comportamiento que tienen un espacio y su hiperespacio respecto de la propiedad de compacidad local. Los resultados de esta sección, obtenidos por C. Constantini, S. Levi y J. Pelant, se presentan en [CLP02].

Lema 1.6. *Sean X un espacio topológico, $n \in \omega$ y $M, M_1, \dots, M_n \subseteq X$ tal que $\mathcal{F} = M^+ \cap M_1^- \cap \dots \cap M_n^- \neq \emptyset$. Si \mathcal{F} es compacto en 2^X entonces M es compacto.*

Demostración. Verifiquemos primero que M es cerrado. En otro caso, existe una red $\{a_i : i \in I\}$ en M que converge a un punto $a \in X \setminus M$. Para cada $j \leq n$ elíjase $x_j \in M \cap M_j$ y sea $C_i = \{x_1, \dots, x_n, a_i\}$ para cada $i \in I$.

Afirmación: $\{C_i : i \in I\} \rightarrow C = \{x_1, x_2, \dots, x_n, a\}$ en 2^X

En efecto, sea $\mathcal{U} = \langle U_0; U_1, \dots, U_m \rangle$ una vecindad básica de C . En particular $a \in U_0$, lo cual implica que existe $j \in I$ tal que $a_k \in U_0$ para $k \leq j$, de lo cual se sigue que $C_k \in \mathcal{U}$. Se verifica así la afirmación.

Sin embargo, ocurre que $C \notin \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción, pues \mathcal{F} es compacto. Por tanto M es cerrado.

Supongamos ahora que M no es compacto. Como M es cerrado, existe una red $\{a_i : i \in I\} \subseteq M$ sin puntos de acumulación en X . Por tanto, para cada $x \in X$, existen una vecindad abierta U_x de x y $k_x \in I$ tal que $a_j \notin U_x$ para $j \geq k_x$. Como antes, para cada $i \in I$, sea $C_i = \{x_1, \dots, x_n, a_i\}$, donde $x_j \in M_j \cap M$ para cada $j \leq n$.

Afirmamos que $\{C_i : i \in I\}$ no tiene puntos de acumulación en 2^X . En efecto; para verificar ésto consideremos los dos posibles casos:

Si ocurre que $C \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ entonces, por la elección de los abiertos U_x y por ser una cantidad finita de subconjuntos abiertos, $\mathcal{U} = (U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n})^+$ es una vecindad de C tal que eventualmente $C_i \notin \mathcal{U}$, lo cual implica que C no es punto de acumulación de $\{C_i : i \in I\}$.

Supongamos por otro lado que existe $x \in C \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Elíjase una vecindad abierta U de x ajena con $\{x_1, \dots, x_n\}$ y sea $V = U \cap U_x$. Se cumple que para cada $j \leq n$ $x_j \notin V$ y $a_j \notin V$ eventualmente en U y por tanto en V . Luego, $C_i \notin V^-$ eventualmente.

Por tanto, en cualquiera de los dos casos posibles, $\{C_i : i \in I\}$ no tiene puntos de acumulación en 2^X , lo cual contradice el hecho de que \mathcal{F} es compacto, pues $C_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$. ■

Teorema 1.9. *Sean X un espacio regular y $C \in 2^X$. Entonces 2^X es localmente compacto en C si y sólo si existe un subconjunto abierto $A \subseteq X$ tal que $C \subseteq A$ y \bar{A} es compacto.*

Demostración. Supongamos que $C \subseteq A$ y A es abierto en X tal que \bar{A} es compacto. Entonces $(\bar{A})^+$ también lo es. Pero $(\bar{A})^+ = cl_{2^X}(A^+)$, como se muestra en el desarrollo de la demostración de Teorema 1.2. Se verifica así la primera parte.

Supongamos ahora que $C \in 2^X$ tiene una vecindad básica compacta $\mathcal{U} = \langle U_0; U_1, \dots, U_n \rangle$ en 2^X . Para $j \in \{1, \dots, n\}$ elijase $x_j \in U_j \cap C$. Sea $\mathcal{F} = C^+ \cap \{x_1\}^- \cap \dots \cap \{x_n\}^-$. Se verifica fácilmente que \mathcal{G} es cerrado y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Por tanto \mathcal{F} es compacto, lo cual implica, por el lema anterior, que C es compacto.

Sea D subconjunto abierto de X tal que $C \subseteq D \subseteq \bar{D} \subseteq U_0$, el cual existe por la regularidad de X y la compacidad de C . Esto implica que $(\bar{D})^+ \cap \{x_1\}^- \cap \dots \cap \{x_n\}^- \subseteq \mathcal{U}$ y por tanto es compacto. Luego, de nueva cuenta por el lema anterior, \bar{D} es compacto y así C está contenido en un conjunto abierto con cerradura compacta. ■

Corolario 1.2. *Si X es un espacio regular, los siguientes son equivalentes:*

- (a) X es localmente compacto,
- (b) Para cada $x \in X$, 2^X es localmente compacto en $\{x\}$.

Corolario 1.3. *Si X es un espacio regular, los siguientes equivalentes:*

- (a) X es compacto,
- (b) 2^X es localmente compacto.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) es consecuencia de Teorema 1.9. Por último, si 2^X es localmente compacto entonces es localmente compacto en X , lo cual implica, por Lema 1.6, que X es compacto. ■

Capítulo 2

COMPACIDAD NUMERABLE Y PSEUDOCOMPACIDAD

Por el Teorema 1.3 sabemos que un espacio y su hiperespacio se comportan de manera equivalente respecto de la propiedad de compacidad. Conviene entonces analizar el comportamiento que guardan dichos espacios respecto de algunas propiedades más débiles, como por ejemplo compacidad numerable o pseudocompacidad. John Ginsburg[Gin75] abordó este estudio y obtuvo varios resultados importantes, los cuales expondremos en este capítulo.

2.1. p -compacidad y p -pseudocompacidad

Definición 2.1. Sean X un espacio topológico y $p \in \omega^*$. Entonces:

- (1) $x \in X$ es un punto p -límite de una sucesión $\{A_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos de X si para toda vecindad abierta W de x , $\{n \in \omega : W \cap A_n \neq \emptyset\} \in p$,
- (2) X es p -compacto si toda sucesión de puntos en X tiene un punto p -límite,
- (3) X es p -pseudocompacto si toda sucesión de subconjuntos abiertos de X tiene un punto p -límite.

Es fácil ver que si $p \in \omega^*$ y X es p -compacto entonces toda sucesión de puntos en X tiene un punto de acumulación. Esto es, si X es p -compacto entonces X es numerablemente compacto. Similarmente se cumple que todo espacio p -pseudocompacto es pseudocompacto.

Teorema 2.1. *Para cada $p \in \omega^*$, la propiedad de p -compacidad es productiva y hereditaria en subconjuntos cerrados.*

Demostración. Supongamos que X es p -compacto y F es un subconjunto cerrado en X . Si $\{x_n : n \in \omega\}$ es una sucesión en F entonces todo punto que es p -límite de $\{x_n : n \in \omega\}$ es un punto de acumulación y por tanto pertenece a F . Se concluye así que F es p -compacto.

Por otro lado, sea $X = \prod \{X_i : i \in I\}$, tal que cada X_i es p -compacto y sea $\{f_n : n \in \omega\}$ sucesión en X . Se cumple que $A_i = \{f_n(i) : n \in \omega\} \in X_i$ para cada $i \in I$, lo cual implica que existe $x_i \in X_i$ que es p -límite de A_i para cada i . Defínase $f \in X$ por $f(i) = x_i$. Verifiquemos que f es punto p -límite de $\{f_n : n \in \omega\}$.

Sea U vecindad básica de f . Por tanto, existen $F \subseteq I$ subconjunto finito y para cada $j \in F$, U_j vecindad de $x_j = f(j)$, tal que $V = \bigcap \{\pi_j^{-1}(U_j) : j \in F\}$. Para cada $j \in F$, $C_j = \{n \in \omega : f_n(i) \in U_j\} \in p$. Para concluir la demostración, nótese que

$$\{n \in \omega : f_n \in V\} = \{n \in \omega : \forall i \in F (f_n(i) \in U_i)\} = \bigcap \{C_j : j \in F\} \in p. \blacksquare$$

Teorema 2.2. *Si X es un espacio compacto entonces X es p -compacto para todo $p \in \omega^*$*

Demostración. Sean $p \in \omega^*$ y $\{x_n : n \in \omega\}$ sucesión en X . Para cada $U \in p$, sea $F_U = cl_X(\{x_n : n \in U\})$. Es claro que $\{F_U : U \in p\}$ es una familia de cerrados que cumple la Propiedad de la Intersección Finita (pues p la cumple). Sea $x \in \bigcap \{F_U : U \in p\}$ y sea V vecindad abierta de x . Si ocurre que $\{n \in \omega : x_n \in V\} \notin p$ entonces, dado que p es ultrafiltro, $U_0 = \{n \in \omega : x_n \notin V\} \in p$. Esto implica que $F_{U_0} \cap V = \emptyset$, lo cual contradice que $x \in F_{U_0}$. Por tanto, $\{n \in \omega : x_n \in V\} \in p$. \blacksquare

Por tanto, la propiedad de p -compacidad es más fuerte que la propiedad de compacidad numerable pero más débil que compacidad. Sin embargo, si se garantiza la compacidad numerable de todas las potencias de un espacio, se puede establecer una equivalencia entre la propiedad de compacidad numerable y la propiedad de p -compacidad.

Teorema 2.3. [GS75] Sea X un espacio Hausdorff. Los siguientes son equivalentes:

- (1) X^κ es numerablemente compacto para todo cardinal κ ,
- (2) X^{2^c} es numerablemente compacto,
- (3) X es p -compacto para algún ultrafiltro libre $p \in \omega^*$.

Demostración. Es evidente que (1) \Rightarrow (2).

Supongamos ahora que X no es p -compacto para todo $p \in \omega^*$. Así, para cada $p \in \omega^*$ existe una sucesión $\{x_n^p : n \in \omega\}$ tal que para cada $x \in X$ existe U_x vecindad de x tal que $\{n \in \omega : x_n^p \notin U_x\} \in p$, es decir x no es p -límite de $\{x_n^p : n \in \omega\}$. Luego, dado que $|\omega^*| = 2^c$, $X^{2^c} \simeq X^{\omega^*}$. Para cada $n \in \omega$, sea $f_n \in X^{\omega^*}$ dada por $f_n(p) = x_n^p$ para cada $p \in \omega^*$. Afirmamos que $\{f_n : n \in \omega\}$ es un conjunto discreto y cerrado.

En efecto; supongamos lo contrario y sea $f \in X^{\omega^*}$ punto de acumulación. Para cada vecindad U de f en X^{ω^*} , sea $V_U = \{n \in \omega : f_n \in U\}$. Se cumple que $\mathcal{V} = \{V_U : U \text{ es vecindad de } f\}$ cumple la propiedad de la intersección finita. Por tanto, existe un ultrafiltro $p \in \omega^*$ tal que $\mathcal{V} \subseteq p$. Por construcción se cumple que f es p -límite de $\{f_n : n \in \omega\}$. Esto implica que $f(p)$ es p -límite de $\{f_n(p) : n \in \omega\} = \{x_n^p : n \in \omega\}$, lo cual es una contradicción. Se prueba así que (2) \Rightarrow (3).

Por último, para cualquier cardinal infinito κ , si X es p -compacto entonces el Teorema 2.1 garantiza que X^κ es p -compacto y por tanto numerablemente compacto. ■

2.2. Algunos resultados de Ginsburg

Teorema 2.4. Sean X un espacio Hausdorff y $p \in \omega^*$. Entonces X es p -compacto si y sólo si 2^X lo es.

Demostración. Si X es un espacio Hausdorff entonces $\{\{x\} : x \in X\}$ es un subconjunto cerrado en 2^X homomomorfo a X . Luego, si 2^X es p -compacto entonces por el Teorema 2.1, X también lo es.

Por otro lado, supongamos que X es p -compacto y probemos que 2^X lo es. Para ésto, sea $\{F_n : n \in \omega\}$ una sucesión en 2^X . Sea $x_0 \in X$ punto p -límite de $\{x_n : n \in \omega\}$, donde $x_n \in F_n$ para cada $n \in \omega$. Nótese que dada U vecindad de x_0 , $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$ y $\{n \in \omega : x_n \in U\} \subseteq \{n \in \omega : U \cap F_n \neq \emptyset\}$,

lo cual implica que $x_0 \in M = \{x \in X : x \text{ es } p\text{-límite de } \{F_n : n \in \omega\}\}$. Se verifica así que M es no vacío. Más aún, se cumple que M es cerrado. Esto es, $M \in 2^X$. Verifiquemos que M es p -límite de $\{F_n : n \in \omega\}$ en 2^X .

Sea $\mathcal{U} = \langle U_0; U_1, \dots, U_n \rangle$ una vecindad básica de M . Defínase $A_0 = \{n \in \omega : F_n \subseteq U_0\}$. Para $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $A_i = \{n \in \omega : F_n \cap U_i \neq \emptyset\}$. Se cumple que $\{n \in \omega : F_n \in \mathcal{U}\} = \bigcap \{A_i : i \leq n\}$. Luego, para concluir la prueba basta demostrar que $A_i \in p$ para todo $i \leq n$. Para $i \in \{1, \dots, n\}$, elíjase $m_i \in U_i \cap M$. Entonces m_i es p -límite de $\{F_n : n \in \omega\}$ y U_i es vecindad de m_i , lo cual implica que $A_i \in p$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Supongamos ahora que $A_0 \notin p$. Esto implica que $\omega \setminus A_0 \in p$. Para cada $n \in \omega \setminus A_0$ elíjase $m_n \in F_n \setminus U_0$ y sea $m_n \in F_n$ arbitrario para $n \in A_0$. Dado que X es p -compacto, existe $x \in X$ punto p -límite de $\{m_n : n \in \omega\}$, el cual es también p -límite de $\{F_n : n \in \omega\}$. Se sigue entonces que $x \in M$. Ahora, dado que $M \in \mathcal{U}$, $M \subseteq U_0$, lo cual implica que U_0 es vecindad de x . Así, $V = \{n \in \omega : m_n \in U_0\} \in p$. Sin embargo, por construcción, V es ajeno con $\omega \setminus A_0$, el cual también pertenece a p , esto es una contradicción. Por tanto, $A_0 \in p$ y se concluye así la prueba. ■

Abordemos ahora la propiedad de compacidad numerable.

Corolario 2.1. *Sea X un espacio Hausdorff. Si X^κ es numerablemente compacto para todo cardinal κ entonces 2^X también lo es. Si 2^X es numerablemente compacto entonces X^n lo es para todo $n \in \omega$.*

Demostración. Si toda potencia de X es numerablemente compacta entonces, por el resultado anterior, existe $p \in \omega^*$ tal que X es p -compacto. Luego, por el Teorema 2.1, 2^X es p -compacto y en particular, numerablemente compacto.

Por otro lado, supongamos que 2^X es numerablemente compacto. Dado $n \in \omega$, se cumple que $\mathcal{F}_n(X)$ es un subconjunto cerrado en 2^X . Luego, $\mathcal{F}_n(X)$ es numerablemente compacto. Sabemos que la función $f_n : X^n \rightarrow \mathcal{F}_n(X)$ definida en 1.1 es continua, sobreyectiva y cerrada. Más aún, para cada $F \in \mathcal{F}_n$, $|f_n^{-1}(F)| < \omega$ para todo $F \in \mathcal{F}_n(X)$. Se cumple entonces que X^n es numerablemente compacto (vease por ejemplo [Eng89]). ■

En lo que corresponde a p -pseudocompacidad, para $p \in \omega^*$ dado, el resultado que se enuncia a continuación establece la equivalencia entre un espacio y su hiperespacio.

Teorema 2.5. *Sea $p \in \omega^*$. Entonces X es p -pseudocompacto si y sólo si 2^X es p -pseudocompacto.*

Demostración. Supongamos que 2^X es p -pseudocompacto y sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos no vacíos en X . Se cumple que $\{U_n^+ : n \in \omega\}$ es una sucesión de subconjuntos abiertos en 2^X y por tanto existe un p -límite $F \in 2^X$. Elijase $x \in F$. Afirmamos que x es p -límite de $\{U_n : n \in \omega\}$.

En efecto, sea V vecindad de x en X . Entonces V^- es una vecindad de F en 2^X . Por tanto, $\{n \in \omega : U_n^+ \cap V^- \neq \emptyset\} \in p$. Nótese que $U_n^+ \cap V^- \neq \emptyset$ si y sólo si $U_n \cap V \neq \emptyset$. Se concluye entonces que $\{n \in \omega : U_n \cap V \neq \emptyset\} \in p$ y se tiene así lo deseado.

Supongamos ahora que X es p -pseudocompacto y sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ una sucesión de abiertos no vacíos en 2^X . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que \mathcal{U}_n es un abierto básico para cada $n \in \omega$. Para cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{U}_n = \langle U_{1,n}, \dots, U_{k_n,n} \rangle$ y sea $U_{0,n} = \bigcup_{m=1}^{m=k_n} U_{m,n}$. Sea $F = \{x \in X : x \text{ es } p\text{-límite de } \{U_{0,n} : n \in \omega\}\}$. Dado que X es p -pseudocompacto, F es no vacío. Más aún, F es cerrado; esto es, $F \in 2^X$. Afirmamos que F es p -límite en 2^X de la sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$. Para verificar ésto, sea $\mathcal{W} = \langle W_0; W_1, \dots, W_m \rangle$ una vecindad básica de F , donde $W_0 = \bigcup_{k=1}^{k=m} W_k$. Nótese que $\{n \in \omega : \mathcal{U}_n \cap \mathcal{W} \neq \emptyset\}$ es igual a

$$\{n \in \omega : W_0^+ \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset\} \cap \bigcap_{k=1}^{k=m} \{n \in \omega : W_k^- \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset\}.$$

Por tanto, dado que p es cerrado bajo intersecciones finitas, basta verificar que cada uno de los interseccionados de la expresión anterior pertenece a p .

Sea $A = \{n \in \omega : W_0^+ \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset\}$ y supongamos que $A \notin p$. Esto implica que $B = \omega \setminus A \in p$. Se verifica que $W_0^+ \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$ si y sólo si $W_0 \cap U_{m,n} \neq \emptyset$ para cada $m \in \{1, \dots, k_n\}$. Luego, para cada $n \in B$ elíjase $i_n \in \{1, \dots, k_n\}$ tal que $W_0 \cap U_{i_n,n} = \emptyset$. Constrúyase la sucesión de conjuntos abiertos $\{C_n : n \in \omega\}$, donde $C_n = U_{i_n,n}$ si $n \in B$ y $C_n = U_{1,n}$ en otro caso. Sea $x \in X$ punto p -límite de la sucesión anterior. Nótese que cualquier vecindad de x que intersecciona a C_n también intersecciona a $U_{0,n}$. Por tanto, x es p -límite de $\{U_{0,n} : n \in \omega\}$; es decir, $x \in F$ y entonces, puesto que $F \in W_0^+$, $x \in W_0$. Dado que x es p -límite de $\{C_n : n \in \omega\}$ y W_0 es vecindad de x , $C = \{n \in \omega : C_n \cap W_0 \neq \emptyset\} \in p$. Ahora, si $n \in C$ entonces $C_n \cap W_0 \neq \emptyset$, lo cual implica, por construcción, que $n \notin B$. Pero ésto significa que B y C son elementos ajenos de p ; es decir, es una contradicción. Se verifica así que $A \in p$.

Sea ahora $k \in \{1, \dots, m\}$. Nótese que $W_k^- \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset$ si y sólo si $W_k \cap U_{0,n} \neq$

\emptyset . Luego: $\{n \in \omega : W_k^- \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset\} = \{n \in \omega : W_k \cap U_{0,n} \neq \emptyset\}$. Por tanto, dado que $F \in W_k^-$, existe $x \in F \cap W_k$. Lo anterior garantiza que $\{n \in \omega : U_{0,n} \cap W_k \neq \emptyset\} \in p$, pues W_k es vecindad de x . Se prueba así que $\{n \in \omega : W_k^- \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset\} \in p$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$, con lo cual se concluye la demostración. ■

El siguiente resultado será de utilidad más adelante para el estudio de la pseudocompacidad de las potencias arbitrarias de un espacio y de su hiperespacio.

Teorema 2.6. *Sea X un espacio completamente regular. Entonces X^κ es pseudocompacto para todo cardinal infinito κ si y sólo si X^ω lo es.*

Demostración. Supongamos que X^ω es pseudocompacto y sea κ un cardinal infinito arbitrario. Supongamos que $\{U_n : n \in \omega\}$ es una sucesión infinita discreta de abiertos básicos no vacíos en X^κ , digamos $U_n = \bigcap_{i \in F_n} \pi_i^{-1}(V_i)$, donde $|F_n| < \omega$ y V_i es abierto para todo $i \in F_n$. Sea $Y = \bigcup_{n \in \omega} F_n$. Considérese ahora $\widetilde{U}_n = \bigcap_{i \in F_n} \pi_i^{-1}(V_i) \in X^Y$ para cada $n \in \omega$. Entonces $\{\widetilde{U}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión discreta de abiertos en $X^Y \approx X^\omega$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto X^κ es pseudocompacto. ■

En general, la propiedad de pseudocompacidad no es hereditaria sobre subconjuntos cerrados pero para subconjuntos regularmente cerrados si lo es, donde A es *regularmente cerrado* en X si $A = cl_X(int_X(A))$.

Observemos que si F es regularmente cerrado entonces 2^F también lo es.

Supongamos que $F \in 2^X$ y sea $G \in 2^X$ con $G \subseteq int_X(F)$. Se cumple que $G \in (int_X(F))^+$ y claro que $(int_X(F))^+ \subseteq 2^F$. Esto es, $G \in int_{2^X}(2^F)$ y por tanto $2^{int_X(F)} \subseteq int_{2^X}(2^F)$. Supongamos ahora que $G \in 2^{cl_X(F)}$ y sea $\mathcal{U} = \langle U_0, \dots, U_n \rangle$ vecindad de G . Para cada $i \leq n$ existe $x_i \in G \cap U_i$. Pero $G \subseteq cl_X(F)$, con lo cual $F \cap U_i \neq \emptyset$. Sea $y_i \in F \cap U_i$ para cada $i \leq n$. Se sigue entonces que $Y = \{y_0, \dots, y_n\} \in \mathcal{U} \cap 2^F$ y por tanto $2^{cl_X(F)} \subseteq cl_{2^X}(2^F)$.

Teorema 2.7. *Sea X un espacio regular. Si 2^X es pseudocompacto entonces X^n lo es para todo $n \in \omega$.*

Demostración. Supongamos que 2^X es pseudocompacto. Probemos primero que X es pseudocompacto. Para ésto, sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos no vacíos en X . Dado que $\{U_n^+ : n \in \omega\}$ es una sucesión de abiertos no vacíos en 2^X , tiene un punto límite $F \in 2^X$. Afirmamos que si $x \in F$ entonces x es límite de $\{U_n : n \in \omega\}$.

En efecto, sea U una vecindad de x en X . Entonces U^- es vecindad de F en 2^X . Esto implica que $U^- \cap \{U_n^+ : n \in \omega\} \neq \emptyset$, lo cual garantiza que $U \cap \{U_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$. Se prueba así que X es pseudocompacto.

Verifiquemos ahora que $X \times X$ es pseudocompacto, lo cual haremos por contradicción. Supongamos que existe una sucesión $\{U_n \times V_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos en $X \times X$ sin puntos límite. Por el caso anterior, X es pseudocompacto, lo cual implica que $\{U_n : n \in \omega\}$ tiene un punto límite en X , digamos x . Por nuestra suposición, (x, x) no puede ser punto límite de $\{U_n \times V_n : n \in \omega\}$, de lo cual se sigue que existe W vecindad de x en X tal que $(W \times W) \cap (U_n \times V_n) = \emptyset$ para todo $n \in \omega$ excepto una cantidad finita. Sin pérdida de generalidad supongamos que $(W \times W) \cap (U_n \times V_n) = \emptyset$ para todo $n \in \omega$.

Por la regularidad de X , es posible elegir W_1 vecindad de x tal que $cl_X(W_1) \subseteq W$. Sea $B = \{n \in \omega : W_1 \cap U_n \neq \emptyset\}$; cabe notar que $B \in [\omega]^\omega$, por ser x punto límite. Sean $F = cl_X(W_1)$ y $G = cl_X(\bigcup_{n \in B} V_n)$. Se cumple que $F \cap cl_X(V_n) = \emptyset$ para todo $n \in B$. Luego, $F \cap G = \emptyset$. Esto último garantiza que $F \cup G$ es homeomorfo a $F + G$, la suma directa de F y G . Por Lema 1.5, $2^{F+G} \simeq 2^F \times 2^G$. Nótese que $2^{F \cup G}$ es cerrado en 2^X y regularmente cerrado, pues $F \cup G$ lo es, lo cual garantiza que $2^F \times 2^G = 2^{F \cup G}$ es pseudocompacto. Similarmente, $F \times G$ es cerrado en $2^F \times 2^G$. Luego, $F \times G$ es pseudocompacto. Sin embargo, $\{(W_1 \cap U_n) \times V_n : n \in B\}$ es una sucesión de conjuntos abiertos no vacíos en $F \times G$ que, por construcción, no tiene puntos límite, lo cual es una contradicción. Se concluye así que $X \times X$ es pseudocompacto. Esto es, X^2 es pseudocompacto.

Modificando apropiadamente la demostración del caso anterior, se puede probar por inducción sobre $n \in \omega$ que la pseudocompacidad de 2^X implica aquella de X^n . ■

2.3. Hiperespacios de Espacios Homogéneos

En la sección anterior se mostró que la compacidad numerable (pseudocompacidad) del hiperespacio de un espacio implica la compacidad numerable (pseudocompacidad) de cualquier producto finito del mismo. J. Cao, T. Nogura y A.H. Tomita[CNT04] abordaron el problema para el producto infinito y obtuvieron un par de resultados parciales, los cuales presentamos a continuación.

Dado un espacio topológico X , denotemos por $Aut(X)$ a la colección de homeomorfismos de X sobre X y por id_X al homeomorfismo identidad en X .

Definición 2.2. *Un espacio X es homogéneo si para cualesquiera $x, y \in X$ existe $f \in Aut(X)$ tal que $f(x) = y$.*

Lema 2.1. *Sea X un espacio Hausdorff y sea κ un cardinal. Si existen sucesiones $\{U_\mu : \mu < \kappa\}$ y $\{V_\mu : \mu < \kappa\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos ajenos por pares en X tales que $cl_X(V_\mu) \subseteq U_\mu$ para todo $\mu < \kappa$ y existe una sucesión discreta cerrada $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq \prod V_\mu$, donde $x_n = \langle x_n(\mu) : \mu < \kappa \rangle$ para cada $n \in \omega$, entonces 2^X no es numerablemente compacto.*

Demostración. Para cada $n \in \omega$, sea $F_n = cl_X(\{x_n(\mu) : \mu < \kappa\})$. Mostremos que $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \omega\}$ no tiene puntos de acumulación en X , de lo cual podremos concluir que 2^X no es numerablemente compacto. Supongamos lo contrario y sea $F \in 2^X$ punto de acumulación de \mathcal{F} . Si existiera $\zeta < \kappa$ tal que $F \cap U_\zeta = \emptyset$ entonces $F \in (X \setminus cl_X(V_\zeta))^+$, lo cual implicaría que $\mathcal{F} \cap (X \setminus cl_X(V_\zeta))^+ \neq \emptyset$. Pero lo anterior no es posible pues $x_n(\zeta) \in V_\zeta$ para cada $n < \omega$. Por otro lado, supongamos que $|F \cap U_\zeta| > 1$ para algún $\zeta < \kappa$. Dado que X es Hausdorff, existen $A_0, A_1 \subseteq U_\zeta$ subconjuntos abiertos ajenos que intersectan a F . Se sigue entonces que $\mathcal{A} = (A_0)^- \cap (A_1)^-$ es una vecindad de F , por lo cual $\mathcal{A} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Ahora, si $F_n \in \mathcal{A}$ entonces $\{x_n(\mu) : \mu < \kappa\} \cap A_0 \neq \emptyset$ y $\{x_n(\mu) : \mu < \kappa\} \cap A_1 \neq \emptyset$. Dado que $x_n(\mu) \in V_\mu$ para cada $\mu < \kappa$, $V_\mu \neq V_\beta = \emptyset$ si $\mu \neq \beta$ y $A_0, A_1 \subseteq U_\zeta$, entonces $x_n(\zeta) \in A_0 \cap A_1$, lo cual es una contradicción. Se concluye entonces que $|F \cap U_\mu| = 1$ para cada $\mu < \kappa$, digamos que $F \cap U_\mu = \{a_\mu\}$.

Sea $x = \langle a_\mu : \mu < \kappa \rangle \in X^\kappa$ y sea $O = \bigcap_{k=0}^{k=t} \psi_{\zeta_k}^{-1}[O_{\zeta_k}]$ una vecindad básica de x , donde O_{ζ_k} es un subconjunto abierto en X_{ζ_k} para $k \leq t$. Sea

$$\mathcal{W} = \bigcap_{k=0}^{k=t} (0_{\zeta_k} \cap U_{\zeta_k})^-.$$

Nótese que \mathcal{W} es una vecindad de F y así, puesto que F es punto de acumulación de \mathcal{F} , existe $m \in \omega$ tal que $F_m \in \mathcal{W}$. Esto es, para todo $k \leq t$ se cumple que

$$\{x_m(\mu) : \mu < \kappa\} \cap (U_{\zeta_k} \cap O_{\zeta_k}) \neq \emptyset.$$

Se sigue así que $x_m(\zeta_k) \in O_{\zeta_k}$ para cada $k \leq t$ y por tanto $x_m \in O$. Como O es una vecindad arbitraria de x , hemos probado entonces que x es punto

de acumulación de $\{x_n : n \in \omega\}$. Pero esto contradice el hecho de que la sucesión anterior es cerrada discreta en X^κ . Por lo tanto \mathcal{F} no tiene puntos de acumulación en 2^X y así 2^X no es numerablemente compacto. ■

Teorema 2.8. *Sea X un espacio regular homogéneo. Si 2^X es numerablemente compacto entonces X^ω también lo es.*

Demostración. Es claro que si $|X| < \omega$ entonces no hay nada que probar. Supongamos entonces que X es un espacio infinito. Nótese que si X tuviera un punto aislado, digamos $x \in X$, entonces todo elemento de X también lo sería (si $y \in X$ entonces existe $f \in \text{Aut}(X)$ tal que $f(x) = y$, lo cual implica que y es un punto aislado). Lo anterior garantizaría entonces que $\{\{y\} : y \in X\}$ es un conjunto infinito en 2^X sin puntos de acumulación, contradiciendo el hecho de que 2^X es numerablemente compacto. Por tanto X no tiene puntos aislados.

Sea $\{x_n : n \in \omega\}$ una sucesión arbitraria en X^ω , donde $x_n = \{x_n(k) : k \in \omega\}$ para cada $n \in \omega$. Veamos que tal sucesión tiene un punto de acumulación en X^ω . Para esto recordemos que, por Corolario 2.1, X es numerablemente compacto y por tanto existe $z(0)$ punto de acumulación de $\{x_n(0) : n \in \omega\}$. Valiéndonos de la regularidad de X , elíjanse vecindades U_0, V_0 de $z(0)$ tales que $V_0 \subseteq \text{cl}_X(V) \subseteq U_0$ y $\text{cl}_X(U_0) \neq X$. Defínase posteriormente $A_0 = \{n \in \omega : f_0(x_n(0)) \in V_0\}$, donde $f_0 = \text{id}_X$. Como V_0 es vecindad de $z(0)$ y $z(0)$ es punto de acumulación, ocurre que $|A_0| = \omega$.

Sea ahora $z(1)$ un punto de acumulación de $\{x_n(1) : n \in A_0\}$ y considérese $w_1 \in X \setminus \text{cl}_X(U_0)$. Elíjanse $f_1 \in \text{Aut}(X)$ y U_1, V_1 subconjuntos abiertos en X tal que $w_1 = f_1(z(1)) \subseteq V_1 \subseteq \text{cl}_X(V_1) \subseteq U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ y $\text{cl}_X(U_0) \cup \text{cl}_X(U_1) \neq X$. En particular, si $z(1) \notin \text{cl}_X(U_0)$ basta elegir $w_1 = z(1)$ y $f_1 = f_0 = \text{id}_X$. Definamos ahora $A_1 = \{n \in A_0 : f_1(x_n(1)) \in V_1\}$. Similar a A_0 , ocurre que $|A_1| = \omega$. Sabemos que X no tiene puntos aislados, entonces podemos continuar este proceso de manera inductiva y obtener así sucesiones $\{z(j) : j < \omega\}$, $\{U_j : j < \omega\}$, $\{V_j : j < \omega\}$ y $\{f_j : j < \omega\}$ que cumplen:

- (i) $f_j \in \text{Aut}(X)$ para cada $j < \omega$,
- (ii) $\{U_j : j < \omega\}$ es sucesión de abiertos en X ajenos dos a dos y tal que para todo $k \in \omega$, $\bigcup_{n \leq k} \text{cl}_X(U_n) \neq X$,
- (iii) $\{V_j : j < \omega\}$ es sucesión de abiertos no vacíos en X tal que $V_j \subseteq \text{cl}_X(V_j) \subseteq U_j$ para todo $j \in \omega$,

- (iv) $A_{j+1} = \{n \in A_j : f_{j+1}(x_n(j+1)) \in V_{j+1}\}$ es un subconjunto infinito en ω para todo $j \in \omega$ y claro que $A_{j+1} \subseteq A_j$,
- (v) $z(j)$ es punto de acumulación de $\{x_n(j) : n \in A_j\}$ para cada $j \in \omega$ y
- (vi) $f_j(z(j)) \in V_j$ para cada $j \in \omega$.

Elíjase $A = \{a_j : j \in \omega\}$ sucesión estrictamente creciente en ω tal que $a_j \in A_j$ para cada $j \in \omega$. Por la propiedad (iv), $|A \setminus A_j| < \omega$ para todo j . Ahora, para cada $n \in \omega$ sea $y_n = \langle y_n(j) : j \in \omega \rangle$, donde $y_n(j) = f_j(x_{a_n}(j))$ para todo $j \in \omega$. Afirmamos que $\{y_n : n \in \omega\}$ tiene un punto de acumulación en X^ω .

En efecto, observemos primero que es posible construir una sucesión infinita $\{w_n : n \in \omega\}$ en X^ω , donde $w_n = \langle w_n(j) : j < \omega \rangle$ y tal que para cada $j < \omega$,

$$|\{n \in \omega : w_n(j) \neq y_n(j)\}| < \omega$$

y $w_n(j) \in V_j$ para $n \in \omega$. Para construir tal sucesión, para $j < \omega$ fijo, bastará elegir $w_n(j) \in V_j$ para $n < j$ y definir $w_n(j) = y_n(j)$ para $n \geq j$. El hecho de que V_j es infinito y la propiedad (iv) nos garantizan que $\{w_n : n \in \omega\}$ satisface las propiedades indicadas. Ahora, si demostramos que $\{w_n : n \in \omega\}$ tiene un punto de acumulación en X^ω entonces la sucesión original $\{y_n : n \in \omega\}$ también lo tendrá y habremos probado así la afirmación. Para esto, ocurre que las sucesiones de subconjuntos abiertos $\{U_n : n < \omega\}$ y $\{V_n : n < \omega\}$ junto con la sucesión $\{w_n : n \in \omega\}$ satisfacen las propiedades enunciadas en el Lema 2.1 y por tanto, dado que 2^X es numerablemente compacto, $\{w_n : n \in \omega\}$ debe tener un punto de acumulación, el cual por supuesto también es punto de acumulación de $\{y_n : n \in \omega\}$ (pues para cada $j \in \omega$, $w_n(j) = y_n(j)$ para todo n excepto una cantidad finita y toda vecindad básica de w en X^ω depende únicamente de una cantidad finita de subconjuntos abiertos en X). Sea $y = \langle y(n) : n \in \omega \rangle$ un punto de acumulación para $\{y_n : n \in \omega\}$.

Por último, demostremos que $x = \langle f_j^{-1}(y(j)) : j < \omega \rangle$ es un punto de acumulación de $\{x_{a_n} : n \in \omega\}$ y por tanto de $\{x_n : n \in \omega\}$. Para verificar ésto, sea $E = \bigcap_{i=0}^{i=k} \pi_{n_i}^{-1}[E_{n_i}]$ una vecindad básica de x en X^ω , donde E_{n_i} es un subconjunto abierto en X para cada $i \leq k$. Se cumple que $f_{n_i}^{-1}(y(n_i)) \in E_{n_i}$ para cada $i \leq k$, lo cual es equivalente a que $y_{n_i} \in f_{n_i}[E_{n_i}]$. Por tanto, si $E' = \bigcap_{i=0}^{i=k} \psi_{n_i}^{-1}(f_{n_i}[E_{n_i}])$ entonces E' es una vecindad de y . Luego, existe $m \in \omega$ tal que $y_m \in E'$, es decir $y_m(n_i) \in f_{n_i}(E_{n_i})$ para $i \leq k$, lo cual implica

que $f_{n_i}^{-1}(y_m(n_i)) \in E_{n_i}$. Se concluye así que $x_{a_m} \in E$, con lo cual se demuestra que x es punto de acumulación de $\{x_{a_n} : n \in \omega\}$. ■

Podemos estudiar la propiedad de pseudocompacidad de un espacio a partir del estudio del comportamiento de las sucesiones de subconjuntos abiertos. Luego, modificando de cierta forma la demostración del par de resultados anteriores para trabajar con subconjuntos abiertos en lugar de sucesiones de puntos, podemos obtener resultados análogos para la propiedad de pseudocompacidad.

Lema 2.2. *Sea X un espacio sin puntos aislados y tal que 2^X es pseudocompacto. Sean $\{U_j : j \in \omega\}$ y $\{V_j : j \in \omega\}$ sucesiones de subconjuntos abiertos no vacíos en X y ajenos por pares tal que para cada $n \in \omega$, $cl_X(V_n) \subseteq U_n$. Para cada $n \in \omega$ sea $\{O_{n,j} : j \in \omega\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos en X tal que $O_{n,j} \subseteq V_n$ para todo $j < \omega$, excepto una cantidad finita. Si $\{k_n : n \in \omega\}$ es una sucesión creciente y para cada $n \in \omega$:*

$$O_n = \prod_{j=0}^{j=k_n} O_{n,j} \times \prod \{X_j : j > k_n\},$$

donde $X_j = X$ si $j > k_n$, entonces $\{O_n : n \in \omega\}$ tiene un punto de acumulación en X^ω .

Demostración. Para cada $n \in \omega$ sea $\mathcal{G}_n = \langle O_{n,0}, \dots, O_{n,k_n} \rangle$. Como 2^X es pseudocompacto, existe $F \in 2^X$ punto de acumulación de $\{\mathcal{G}_n : n \in \omega\}$. Verifiquemos que $F \cap cl_X(V_j) \neq \emptyset$ para todo $j \in \omega$. Si ocurriera lo contrario, digamos si $F \cap cl_X(V_m) = \emptyset$ para algún $m \in \omega$, entonces $F \subseteq (X \setminus cl_X(V_m))$ y así $F \in (X \setminus cl_X(V_m))^+$. Sea entonces $I = \{n > m : \mathcal{G}_n \cap (X \setminus cl_X(V_m))^+ \neq \emptyset\}$. Para $n \in I$, elíjase $F_n \in \mathcal{G}_n \cap (X \setminus cl_X(V_m))^+$. Así, $F_n \cap O_{n,k} \neq \emptyset$ para todo $k \leq k_n$ y en particular $F_n \cap O_{n,m} \neq \emptyset$ y $F_n \cap O_{n,m} \subseteq V_m$. Pero esto contradice que $F_n \cap cl_X(V_m) = \emptyset$. Ahora, para cada $j < \omega$ elíjase $x(j) \in F \cap cl_X(V_j)$ y consideremos $x = \langle x(j) : j < \omega \rangle \in X^\omega$.

Afirmación: x es punto de acumulación de $\{O_n : n \in \omega\}$.

En efecto, sea W una vecindad básica de x en X^ω . Sin pérdida de generalidad supongamos que $W = (\prod_{i=1}^{i=k} W_i) \times \prod \{X_j : k < j < \omega\}$, donde W_i es un subconjunto abierto en X para todo $i \leq k$ y $X_i = X$ para $i > k$. Sea $\mathcal{W} = \bigcap_{i=0}^{i=k} (U_i \cap W_i)^-$. Dado que $x(i) \in F \cap cl_X(V_i) \subseteq F \cap U_i$ para $i \leq k$, ocurre que \mathcal{W} es una vecindad de F en 2^X y así $J = \{n > k : \mathcal{G}_n \cap \mathcal{W} \neq \emptyset\}$ es un subconjunto infinito en ω .

Sea $n \in J$ fijo (por el momento) y elijamos $H_n \in \mathcal{G}_n \cap \mathcal{W}$. Recordemos que $\mathcal{G}_n = \langle O_{n,0}, \dots, O_{n,k_n} \rangle$ y $O_{n,i} \subseteq V_i$ para $i \leq k_n$, lo cual implica que

$$H_n = \bigcup_{i=0}^{i=k_n} (H_n \cap O_{n,i})$$

es unión finita y disjunta. Sabemos que $H_n \in \mathcal{W}$, lo cual implica que :

$$H_n \cap (U_j \cap W_j) = \bigcup_{i=0}^{i=k_n} ((H_n \cap O_{n,i}) \cap (U_j \cap W_j))$$

es no vacío para $j \leq k_n$. Ahora, si $i, j \leq k_n$ son tales que $i \neq j$ entonces, dado que $U_i \cap U_j = \emptyset$ y $O_{n,j} \subseteq U_j$, ocurre que $(U_i \cap W_i) \cap (H_n \cap O_{n,j}) = \emptyset$.

Se concluye así que $H_n \cap (U_j \cap W_j) = (H_n \cap O_{n,j}) \cap (U_j \cap W_j)$ es no vacío para $j \leq k_n$. Lo anterior implica que $O_n \cap W \neq \emptyset$ para cada $n \in J$ y por tanto x es punto de acumulación de $\{O_n : n \in \omega\}$. ■

Teorema 2.9. *Sea X un espacio homogéneo completamente regular. Si 2^X es pseudocompacto entonces X^κ es pseudocompacto para cualquier cardinal κ .*

Demostración. Similar a la demostración del Teorema 2.8, podemos suponer que X es infinito y sin puntos aislados. Por el Teorema 2.7, X^n es pseudocompacto para todo $n \in \omega$. Por tanto, si probamos que X^ω es pseudocompacto, habremos demostrado el teorema.

Para ésto, sea $\{G_n : n < \omega\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos básicos no váios en X^ω y veamos que esta sucesión tiene un punto de acumulación. Sin pérdida de generalidad supongamos que para cada $n \in \omega$

$$G_n = \left(\prod_{i=0}^{i=k_n} G_{n,i} \right) \times \prod \{X_i : i > k_n\}$$

donde $k_n \in \omega$, $G_{n,i}$ es abierto no vacío en X para $i \leq k_n$ y $X_i = X$ para $i > k_n$. Más aún, podemos suponer que $\{k_n : n \in \omega\}$ es una sucesión estrictamente creciente en ω . Usando el hecho de que X es pseudocompacto, podemos elegir $z(0)$ punto de acumulación de la sucesión $\{G_{n,0} : n \in \omega\}$. Como X es regular, podemos elegir U_0, V_0 subconjuntos abiertos en X tal que $z(0) \in V_0 \subseteq cl_X(V_0) \subseteq U_0$ y $cl_X(U_0) \neq X$. Defínase $A_0 = \{n \in \omega : f_0(G_{n,0}) \cap V_0 \neq \emptyset\}$,

donde $f_0 = id_X$. Ahora, para cada $n \in A_0$, defínase el subconjunto abierto $O_{n,0} = f_0(G_{n,0}) \cap V_0$.

Similar al caso anterior, elíjase $z(1)$ punto de acumulación de la sucesión $\{G_{n,1} : n \in A_0\}$. Posteriormente elíjanse $w_1 \in X \setminus cl_X(U_0)$, U_1, V_1 subconjuntos abiertos en X y $f_1 \in Aut(X)$ tales que

- $w_1 = f_1(z(1)) \in V_1 \subseteq cl_X(V_1) \subseteq U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ y
- $cl_X(U_0) \cup cl_X(U_1) \neq X$.

En particular, si $z(1) \notin cl_X(U_0)$ basta elegir $w_0 = z(1)$ y $f_1 = id_X$. Sea $A_1 = \{n \in A_0 : f_1[G_{n,1}] \cap V_1 \neq \emptyset\}$ y para cada $n \in A_1$, sea $O_{n,1} = f_1[G_{n,1}] \cap V_1$.

Como X no tiene puntos aislados, podemos continuar este proceso inductivamente y construir así sucesiones $\{z(j) : j < \omega\}$, $\{U_j : j < \omega\}$, $\{V_j : j < \omega\}$, $\{A_j : j < \omega\}$, $\{f_j : j < \omega\}$, además de sucesiones $\{O_{n,j} : j < \omega\}$, donde $n \in \omega$, que satisfacen:

- (i) $f_j \in Aut(X)$ para cada $j < \omega$,
- (ii) $\{U_j : j < \omega\}$ es sucesión de subconjuntos abiertos de X ajenos dos a dos y tal que $\bigcup_{j \leq n} cl_X(U_j) \neq X$ para todo $n < \omega$,
- (iii) $\{V_j : j < \omega\}$ es sucesión de subconjuntos abiertos en X tal que $cl_X(V_j) \subseteq U_j$ para cada $j < \omega$,
- (iv) $A_{j+1} = \{n \in A_j : f_{j+1}[G_{n,j+1}] \cap V_{j+1} \neq \emptyset\}$ es un subconjunto infinito de ω para cada $j < \omega$ y claro que $A_{j+1} \subseteq A_j$,
- (v) para cada $j < \omega$, $z(j)$ es punto de acumulación de la sucesión $\{G_{n,j} : n \in \omega\}$,
- (vi) $f_j(z(j)) \in V_j$ para cada $j < \omega$ y finalmente
- (vii) para $j < \omega$, $O_{n,j} = f_j[G_{n,j}] \cap V_j$ para cada $n < \omega$.

Elíjase ahora un subconjunto infinito $A = \{a_j : j < \omega\}$ en ω tal que para cada $j < \omega$, $a_j \in A_j$ y $a_j < a_{j+1}$. Para cada $n \in \omega$ definamos

$$W_n = \left(\prod_{j=0}^{j=k_{a_n}} f_j[G_{a_n,j}] \right) \times \prod \{X_i : i > k_{a_n}\},$$

donde $X_j = X$ si $j > k_{a_n}$. Deseamos demostrar que $\{W_n : n \in \omega\}$ tiene un punto de acumulación. Para ésto, considérese la sucesión $\{O_n : n \in \omega\}$, tal que para cada $n \in \omega$:

$$O_n = \left(\prod_{j=0}^{j=n} O_{a_n, j} \right) \times \left(\prod_{j=n+1}^{j=k_{a_n}} f_j[G_{a_n, j}] \right) \times \prod \{X_i : i > k_{a_n}\},$$

donde $X_j = X$ si $j > k_n$. Nótese que $O_n \subseteq W_n$ para cada $n \in \omega$. Por tanto, todo punto de acumulación de $\{O_n : n \in \omega\}$ es también punto de acumulación de $\{W_n : n \in \omega\}$. Finalmente, para garantizar que $\{O_n : n \in \omega\}$ tiene un punto de acumulación en X^ω , observemos que las sucesiones $\{U_n : n \in \omega\}$, $\{V_n : n < \omega\}$ y $\{O_{n, j} : n \in \omega\}$, donde $j < \omega$, junto con la sucesión creciente $\{k_n : < \omega\}$ satisfacen las propiedades del lema anterior. Sea digamos $y = \langle y(j) : j \in \omega \rangle$ un punto de acumulación, el cual también es punto de acumulación de $\{W_n : n < \omega\}$.

Análogo a lo demostrado en el Teorema 2.8, se verifica entonces que $x = \langle f_j^{-1}(y(j)) : j < \omega \rangle$ es un punto de acumulación de la sucesión $\{G_{a_n} : n \in \omega\}$ en X^ω y por tanto de $\{G_n : n \in \omega\}$. Se concluye así que X^ω es pseudocompacto. ■

Capítulo 3

PREGUNTAS DE GINSBURG

En [Gin75], John Ginsburg plantea las siguientes preguntas:

- (1) *¿Existe alguna relación entre la compacidad numerable de X^ω y la compacidad numerable de 2^X ?*
- (2) *¿Existe alguna relación entre la pseudocompacidad de X^ω y la pseudocompacidad de 2^X ?*

En el capítulo anterior se presentaron un par de resultados que garantizan que si un espacio cumple la propiedad de homogeneidad, entonces la compacidad numerable (pseudocompacidad) de 2^X implica aquella de X^ω . El caso general aún es un problema abierto.

Abordaremos en este capítulo las preguntas anteriores en el otro sentido. Esto es: ¿la pseudocompacidad de X^ω implica la pseudocompacidad de 2^X ? y similarmente respecto de la propiedad de compacidad numerable. Conviene introducir antes algunas definiciones y resultados respecto de familias de subconjuntos infinitos del conjunto de números naturales.

Definición 3.1. *Dados $A, B \in [\omega]^\omega$, diremos que A está casi contenido en B , lo cual denotaremos por $A \subseteq^* B$, si $|A \setminus B| < \omega$. Similarmente, diremos que A es casi igual a B , lo cual se denota por $A =^* B$, si $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$.*

La noción anterior se puede aplicar en el estudio de funciones. Dados dos conjuntos A y B y funciones $f, g : A \rightarrow B$, diremos que f es casi igual a g , lo cual denotaremos por $f =^* g$, si $\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ es finito.

Definición 3.2. Sea $\mathcal{I} \subseteq [\omega]^\omega$. Entonces $A \in [\omega]^\omega$ es una pseudointersección de \mathcal{I} si $A \subseteq^* I$ para todo $I \in \mathcal{I}$.

Consideremos el siguiente ejemplo, el cual será de utilidad más adelante.

Ejemplo 3.1. Si $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ cumple que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para cada $n \in \omega$, entonces es posible elegir $a_n \in A_n \setminus \{a_k : k < n\}$ para cada n . Sea $A = \{a_n : n \in \omega\}$. Es claro que si $n \in \omega$ entonces $a_k \in A_n$ para todo $k \geq n$, con lo cual $A \subseteq^* A_n$ para cada $n \in \omega$ y por tanto A es pseudointersección de $\{A_n : n \in \omega\}$.

En el ejemplo anterior basta incluso suponer que $A_{n+1} \subseteq^* A_n$ para cada $n \in \omega$.

Definición 3.3. Una familia infinita $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es casi ajena si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B =^* \emptyset$. Si \mathcal{A} es maximal respecto de la propiedad anterior, diremos que \mathcal{A} es maximal casi ajena (**MAD**).

Para el desarrollo de este capítulo, utilizaremos algunos resultados concernientes a la Teoría de invariantes cardinales del continuo y que refieren en particular a cardinales asociados con ω y $\wp(\omega)$.

Definición 3.4. Una familia $\mathfrak{J} \subseteq [\omega]^\omega$ es centrada si:

$$(\forall \mathcal{F} \in [\mathfrak{J}]^{<\omega})(|\bigcap \mathcal{F}| = \omega).$$

Definición 3.5. El número de pseudointersección \mathfrak{p} , se define como la mínima cardinalidad de una familia centrada $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ sin pseudointersección (i.e. para cada $A \in [\omega]^\omega$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $|A \setminus F| = \omega$).

Si $\mathfrak{J} = \{A_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ es una familia centrada entonces para cada $n \in \omega$, es posible elegir $a_n \in (\bigcap_{k \leq n} A_k) \setminus \{a_k : k < n\}$. Luego, $A = \{a_n : n \in \omega\}$ es una pseudointersección de \mathfrak{J} , con lo cual $\omega_1 \leq \mathfrak{p}$. Es claro que también se cumple que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{c}$; más aún, se puede establecer la siguiente desigualdad cuya prueba se puede consultar en [Bas].

Proposición 3.1. $\mathfrak{p} \leq \text{cof}(\mathfrak{c})$.

En el estudio de los invariantes cardinales es posible determinar, a partir de pruebas de consistencia, cuándo las desigualdades entre invariantes cardinales pueden ser estrictas o bien cuándo se puede dar una igualdad entre

dos o más cardinales. Respecto a los invariantes cardinales que aparecen en esta sección, para cada uno de ellos es consistente con **ZFC** el ser estrictamente menores que \mathfrak{c} o estrictamente mayores que ω_1 . Nótese también que si suponemos que se cumple **CH**, entonces todos ellos coinciden con \mathfrak{c} .

Definición 3.6. Una familia $\mathfrak{T} \subseteq [\omega]^\omega$ es una torre si \mathfrak{T} es linealmente ordenado por \supseteq^* y no tiene pseudointersección.

Definición 3.7. \mathfrak{t} es la mínima cardinalidad de una torre.

Si \mathfrak{T} es una torre entonces, en particular es una familia centrada. Por lo tanto, se cumple que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$.

Definición 3.8. (a) Un subconjunto $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^\omega$ es denso en $[\omega]^\omega$ si para cada $A \in [\omega]^\omega$ existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $D \subseteq^* A$.

(b) $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ es abierto si $A \in \mathcal{U}$ y $B \subseteq^* A$ implica que $B \in \mathcal{U}$.

Definición 3.9. El número de distributividad de $[\omega]^\omega$, el cual se denota por \mathfrak{h} , es la mínima cardinalidad de una colección de subconjuntos infinitos de ω , densos y abiertos en $[\omega]^\omega$ y cuya intersección es vacía.

Proposición 3.2. $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{h}$.

Demostración. Sea $\kappa < \mathfrak{t}$. Verifiquemos que $\kappa < \mathfrak{h}$. Sea $\{\mathcal{H}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ familia de subconjuntos densos y abiertos. Construyamos recursivamente $\{T_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [\omega]^\omega$ tal que:

- 1) $T_\alpha \in \mathcal{H}$ para $\alpha < \kappa$,
- 2) $T_\alpha \subseteq T_\beta$ si $\beta < \alpha$.

Sea $T_0 \in \mathcal{H}_0$. Supongamos luego que hemos construido T_β para $\beta < \alpha$. Considerando $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$, existe $T \in [\omega]^\omega$ tal que $T \subseteq^* T_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Luego, dado que \mathcal{H}_α es denso, existe $T_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$ tal que $T_\alpha \subseteq^* T$. Hemos construido así la familia $\mathcal{T} = \{T_\alpha : \alpha < \kappa\}$ con las propiedades deseadas.

Ahora, $\kappa < \mathfrak{t}$ garantiza la existencia de $T \in [\omega]^\omega$, pseudointersección de \mathcal{T} . Esto es, $T \subseteq^* T_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$, lo cual implica que $T \in \bigcap_{\alpha < \kappa} \mathcal{H}_\alpha$. Se concluye así que $\kappa < \mathfrak{h}$. ■

Definición 3.10. Sea (\mathbb{P}, \leq) un conjunto parcialmente ordenado y sean $p, q \in \mathbb{P}$. Diremos que p y q son incompatibles, lo cual denotaremos por $p \perp q$, si no existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.

Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es una *anticadena* si cualesquiera dos de sus elementos son incompatibles. Por otro lado, A es una *cadena* si cualesquiera dos de sus elementos son comparables.

Definición 3.11. Un conjunto parcialmente ordenado (\mathbb{P}, \leq) es un árbol si $\{q \in \mathbb{P} : q < p\}$ es un conjunto bien ordenado para cada $p \in \mathbb{P}$.

Definición 3.12. Sea (\mathbb{P}, \leq) un árbol. Entonces:

- (a) si $p \in \mathbb{P}$ entonces la altura de p en \mathbb{P} , la cual se denota por $\text{ht}(p, \mathbb{P})$, es $\text{type}(\{q \in \mathbb{P} : q < p\})$.
- (b) Si α es un número ordinal entonces el α -ésimo nivel de \mathbb{P} , el cual se denota por $\text{Lev}_\alpha(\mathbb{P})$, es $\{p \in \mathbb{P} : \text{ht}(p, \mathbb{P}) = \alpha\}$.
- (c) La altura de \mathbb{P} , la cual se denota por $\text{ht}(\mathbb{P})$, es el menor ordinal α tal que $\text{Lev}_\alpha(\mathbb{P}) = \emptyset$.
- (d) Una rama en \mathbb{P} es un subconjunto de \mathbb{P} linealmente ordenado maximal.

Es claro que $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ es un conjunto parcialmente ordenado (módulo $\mathfrak{Fin}(\omega)$) y por tanto es posible referirnos a árboles de subconjuntos infinitos de ω respecto a \subseteq^* .

A continuación enunciamos una caracterización de \mathfrak{h} mediante árboles de $[\omega]^\omega$ como los indicados en el párrafo anterior. Esta caracterización se debe a B. Balcar, J. Pelant y P.Simon.

Teorema 3.1. [BPS80] \mathfrak{h} es la mínima altura de un árbol $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ que cumple:

- (1) cada nivel de \mathcal{T} es una familia maximal casi ajena.
- (2) Cada elemento $T \in \mathcal{T}$ tiene \mathfrak{c} sucesores inmediatos.
- (3) \mathcal{T} es un subconjunto denso de $[\omega]^\omega$.

A un árbol \mathcal{T} como en el Teorema anterior se le llama *árbol base* para $[\omega]^\omega$.

3.1. Ejemplo de Compacidad Numerable

Como se indicó en el capítulo 2, Ginsburg [Gin75] demostró que la compacidad numerable de todas las potencias de un espacio garantiza la compacidad numerable de su hiperespacio. Más aún, a partir de un espacio construido por Frolík, presentó un ejemplo de un espacio cuyas potencias finitas son numerablemente compactas pero su hiperespacio no es pseudocompacto y por tanto no es numerablemente compacto. A partir de lo anterior, Ginsburg formula la pregunta indicada al inicio de este capítulo, respecto de la propiedad de compacidad numerable. J. Cao, T. Nogura y A. Tomita estudiaron este problema y obtuvieron un ejemplo de un espacio X tal que X^t (y por tanto X^{ω_1}) es numerablemente compacto pero 2^X no lo es, respondiendo así negativamente a la pregunta (1). Expondremos en esta sección tal ejemplo.

Dada una familia $\{X_i : i \in I\}$ de espacios numerablemente compactos y considerando $\bigoplus_{i \in I} X_i$, su unión ajena, se define un espacio X asociado a $\{X_i : i \in I\}$, como sigue:

- (a) Si I es finito, sea $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$.
- (b) Si I es infinito, consideramos un punto ∞ no perteneciente a $\bigoplus_{i \in I} X_i$ y definimos $X = \bigoplus_{i \in I} X_i \cup \{\infty\}$, estableciendo además una topología para X de tal forma que para cada $i \in I$, X_i con su topología original es cerrado-abierto en X , mientras que las vecindades de ∞ contienen a X_i para cada $i \in I$, excepto una cantidad finita.

Es claro que si ocurre el caso (a) en el espacio del párrafo anterior, X es numerablemente compacto. Supongamos entonces que ocurre el caso (b) y sea $A = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$. Si existe $i \in I$ tal que $A \cap X_i$ es infinito entonces, dado que X_i es numerablemente compacto, A tiene un punto de acumulación en X_i y por tanto en X . En otro caso, ∞ es punto de acumulación de A , pues cualquier vecindad de ∞ contiene a todo x_n , excepto una cantidad finita. Se concluye entonces que X es numerablemente compacto.

Al espacio anterior se conoce como la *compactación numerable* por un punto de $\bigoplus_{i \in I} X_i$.

Teorema 3.2. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios numerablemente compactos y sea X la compactación numerable por un punto de $\bigoplus_{i \in I} X_i$. Si 2^X es numerablemente compacto entonces $\prod_{i \in I} X_i$ también lo es.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $X_i \cap X_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Si ocurre que $Y = \prod_{i \in I} X_i$ no es numerablemente compacto, entonces existe $A = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq Y$ subconjunto cerrado y discreto, donde $x_n = \langle x_n(i) : i \in I \rangle$ para cada $n \in \omega$. Afirmamos que Y es un subconjunto cerrado de $X^{|I|}$.

En efecto, si $\mathbf{x} \in X^{|I|} \setminus Y$ entonces existe $i \in I$ tal que $\mathbf{x} \in \pi_i^{-1}[X \setminus X_i]$. Sea $j \in I$ tal que $\mathbf{x}(i) \in X_j$. Luego, $\mathbf{x} \in \pi_i^{-1}[X \setminus X_i] \subseteq X^{|I|} \setminus Y$, con lo cual se concluye que Y es un subconjunto cerrado de $X^{|I|}$.

De lo anterior se sigue que A es un subconjunto cerrado en $X^{|I|}$. Similarmente se verifica que A es discreto en $X^{|I|}$. Usando el hecho de que X_i es abierto y cerrado, podemos elegir $U_i = V_i = X_i$ para cada $i \in I$ y aplicar el resultado establecido en el Lema 2.1 para concluir que 2^X no es numerablemente compacto. ■

Definición 3.13. *Un espacio X es totalmente numerablemente compacto si toda sucesión de puntos en X tiene una subsucesión contenida en un subconjunto compacto de X .*

Proposición 3.3. *[Vau84] Si $\{X_\alpha : \alpha < \mathfrak{t}\}$ es una familia de espacios totalmente numerablemente compactos, entonces $X = \prod\{X_\alpha : \alpha < \mathfrak{t}\}$ es numerablemente compacto.*

Demostración. Sea H un subconjunto infinito y numerable de X . Veamos que H tiene un punto de acumulación en X . Identifiquemos a H con ω . Constrúyase de manera recursiva una colección $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{t}\}$ de tal forma que para cada $\alpha < \mathfrak{t}$ se cumpla:

- (1) La cerradura de $\pi_\alpha(A_\alpha)$ es compacta en X_α .
- (2) Si $\alpha < \beta < \mathfrak{t}$, entonces $A_\beta \subseteq^* A_\alpha$.

Supongamos que $\gamma < \mathfrak{t}$ y que hemos construido A_α para todo $\alpha < \gamma$. Dado que $\gamma < \mathfrak{t}$, existe $A \in [H]^\omega$ pseudointersección de $\{A_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Como X_γ es totalmente numerablemente compacto, existe un subconjunto infinito $A_\gamma \subseteq A$ tal que $\pi_\gamma[A_\gamma]$ tiene cerradura compacta en X_γ , con lo cual se concluye la inducción.

Para cada $\alpha < \mathfrak{t}$ defínase $Y_\alpha = cl_{X_\alpha}(\pi_\alpha[A_\alpha])$ y sea $Y = \prod\{Y_\alpha : \alpha < \mathfrak{t}\}$. Nótese que Y_α es compacto para cada α y por tanto Y también lo es.

Supongamos que ningún punto de Y es punto de acumulación de H . Lo anterior implica que para cada $y \in Y$, existe una vecindad básica U_y de y en X

tal que $H \cap U_y = \emptyset$. Dado que Y es compacto, existen $y_0, \dots, y_n \in Y$ tales que $Y \subseteq \bigcup_{i \leq n} U_{y_i}$. Para cada $i \leq n$, sea $F_i = \{\alpha < \mathfrak{t} : \pi_\alpha[U_\alpha] \neq X_\alpha\}$. Nótese que $F = \bigcup_{i \leq n} F_i$ es un subconjunto finito, con lo cual existe $x \in \bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha \subseteq H$. Para cada $\alpha \in F$:

$$\pi_\alpha(x) \in \pi_\alpha(A_\alpha) \subseteq Y_\alpha,$$

lo cual implica que es posible elegir $y \in Y$ tal que $\pi_\alpha(y) = \pi_\alpha(x)$ para todo $\alpha \in F$. Sea $i \leq n$ tal que $y \in U_i$; entonces, dado que $x(\alpha) = y(\alpha)$ para cada $\alpha \in F_i$, x también pertenece a U_i . Por lo tanto, $H \cap U_i \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Se cumple entonces que H tiene un punto de acumulación en Y , con lo cual X es numerablemente compacto. ■

Teorema 3.3. [CNT04] *Existe un espacio topológico X tal que X^ω es numerablemente compacto y 2^X no lo es.*

Demostración. Para cada $p \in \omega^*$, defínase $X_p = \beta\omega \setminus \{p\}$ y sea su topología la relativa respecto de $\beta\omega$. Si H es subconjunto infinito en X_p entonces H tiene un punto de acumulación $q \in \beta\omega$ tal que $q \neq p$. Por lo tanto, cualquier vecindad cerrada de q que no contenga a p será un subconjunto compacto que contiene un subconjunto infinito de H . Luego, X_p es totalmente numerablemente compacto para cada $p \in \omega^*$. Ahora, sea X la compactación numerable por un punto de $\bigoplus_{p \in \omega^*} X_p$. Veamos que X es también totalmente numerablemente compacto.

Sea H un subconjunto infinito numerable de X . Si existe $r \in \omega^*$ tal que $H \cap X_r$ es infinito entonces, dado que X_r es totalmente numerablemente compacto, existe un subconjunto infinito en $H \cap X_r$ cuya cerradura es cerrada en X_r (y por tanto en X). En otro caso, si $H \cap X_r$ es finito para cada $r \in \omega^*$, entonces $H \cup \omega$ es compacto, pues toda vecindad de ω debe contener a X_r para todo $r \in \omega^*$ excepto una cantidad finita. Se concluye así que X es totalmente numerablemente compacto y se sigue de la Proposición anterior que $X^\mathfrak{t}$ también lo es.

Para demostrar que 2^X no es numerablemente compacto, basta probar que $Z = \prod\{X_p : p \in \omega^*\}$ no lo es y aplicar el Teorema 3.2. Mostremos entonces que Z no es numerablemente compacto.

Considérese $W = (\beta\omega)^{\omega^*}$ y sea $\Delta = \{f \in W : f \text{ es constante}\}$. Para cada $f \in W$, sea $c_f \in \beta\omega$ tal que $f(p) = c_f$ para todo $p \in \omega^*$. Sea $D = \{f \in \Delta : c_f \in \omega\}$. Se cumple que $\omega \subseteq X_p$ para cada $p \in \omega^*$ y si $c_f \in \omega^*$ entonces $f(c_f) \notin X_{c_f}$, con lo cual $f \notin D$. Luego, $D = \Delta \cap X \subseteq W$. Si $f \in W$ es un punto de acumulación de D , entonces $f(\alpha)$ es punto de acumulación de

$\{g(\alpha) : g \in D\} = \{c_g : g \in D\}$ para cada $\alpha \in \omega^*$. Lo anterior implica que $f \in \delta$ y $c_f \in \omega^*$, de lo cual se concluye que $f \notin Z$. Por lo tanto, Z no es numerablemente compacto. ■

3.2. Pseudocompacidad en Hiperespacios de Ψ -espacios

Definición 3.14. Sea \mathcal{A} una familia casi ajena. Entonces $\Psi(\mathcal{A}) = (\omega \cup \mathcal{A}, \tau_{\mathcal{A}})$ es el espacio de Mrówka-Isbell o Ψ -espacio asociado a \mathcal{A} , donde ω es un subespacio discreto respecto de $\tau_{\mathcal{A}}$ y si $A \in \mathcal{A}$ entonces

$$\mathcal{B}_A = \{\{A\} \cup A \setminus F : F \in [\omega]^{<\omega}\}$$

es una base local para A .

El concepto de Ψ -espacio o espacio de Mrówka-Isbell fue introducido de manera independiente por S. Mrówka y J. Isbell; el estudio de dichos espacios ha permitido presentar una gran cantidad de ejemplos y contraejemplos en topología, como es el caso de uno de los resultados de Michael Hrušák que expondremos en esta sección.

Lema 3.1. Si $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es una familia casi ajena, entonces el espacio $\Psi(\mathcal{A})$ cumple las siguientes propiedades:

- (1) $\Psi(\mathcal{A})$ es T_2 y primero numerable,
- (2) $\Psi(\mathcal{A})$ es localmente compacto,
- (3) $\Psi(\mathcal{A})$ es $T_{3\frac{1}{2}}$,
- (4) $\Psi(\mathcal{A})$ es separable,
- (5) \mathcal{A} es cerrado discreto en $\Psi(\mathcal{A})$,
- (6) \mathcal{A} es cero-dimensional,
- (7) $\Psi(\mathcal{A})$ es pseudocompacto si y sólo si \mathcal{A} es **MAD**.

Demostración. Demostraremos únicamente la propiedad (7); las demás se verifican fácilmente. Supongamos que \mathcal{A} es **MAD** y sea $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua no acotada. Para cada $n \in \omega$ existe $a_n \in \omega$ tal que $f(a_n) > n$. Dado que \mathcal{A} es **MAD**, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ converge a A . Luego, como f es continua, se cumple que $\langle f(a_n) : n \in \omega \rangle$ converge a $f(A)$, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, supongamos que \mathcal{A} no es **MAD** y sea $B = \{b_n : n \in \omega\}$ tal que $B \cap A =^* \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Sea $f : \Psi(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(b_n) = n$ y $f(x) = 0$ si $x \in \psi(\mathcal{A}) \setminus B$. Es claro que f es no acotada. Más aún, f es continua pues si $\{x_n : n \in \omega\}$ es una sucesión no trivial convergente en $\Psi(\mathcal{A})$, debe converger a un elemento de \mathcal{A} y así, dado que $B \cap A =^* \emptyset$, $\langle f(x_n) : n \in \omega \rangle$ converge a $0 = f(A)$. Se concluye entonces que $\Psi(\mathcal{A})$ no es pseudocompacto. ■

J Cao y T. Nogura formularon la pregunta: *¿Cuándo el hiperespacio de un Espacio de Mrówka-Isbell es pseudocompacto?*

En esta sección exponemos un par de resultados de M. Hrušák que muestran que es indecidible determinar cuando se cumple lo planteado en dicha pregunta.

Es posible demostrar, como veremos más adelante, que el producto numerable del Ψ -espacio de una familia \mathcal{A} es pseudocompacto cuando \mathcal{A} es **MAD**; por lo tanto, al garantizar la existencia de una familia **MAD** tal que el hiperespacio de su Ψ -espacio no es pseudocompacto, se habría demostrado que en general la respuesta a la segunda pregunta de Ginsburg es negativa.

Definición 3.15. *Un subconjunto Y de un espacio topológico X es relativamente secuencialmente compacto si toda sucesión de elementos de Y tiene una subsucesión que converge a un punto en X .*

Similarmente, Y es *relativamente numerablemente compacto* en X si todo subconjunto infinito de Y tiene un punto de acumulación en X .

El siguiente resultado además de ser un ejemplo interesante de la aplicación de los invariantes cardinales en problemas topológicos, permite estudiar el producto topológico de espacios secuencialmente compactos y análogamente de espacios relativamente secuencialmente compactos, lo cual utilizaremos más adelante.

Proposición 3.4. *Sea $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una colección de espacios secuencialmente compactos, donde $\kappa < \mathfrak{h}$. Entonces $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ es secuencialmente compacto.*

Demostración. Sea $\{f_n : n \in \omega\}$ una sucesión en $Y = \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$, donde $f_n = \langle f_n(\alpha) : \alpha < \kappa \rangle$ para cada $n \in \omega$. Para cada $\alpha < \kappa$ defínase el conjunto

$$\mathcal{D}_\alpha = \{A \in [\omega]^\omega : \{f_n(\alpha) : n \in A\} \text{ es convergente}\}.$$

Sea $\alpha < \kappa$; si $A \in [\omega]^\omega$, entonces, dado que X_α es secuencialmente compacto, existe $B \subseteq A$ tal que $B \in \mathcal{D}_\alpha$, de lo cual se sigue que \mathcal{D}_α es denso. Por otro lado, si $A \in [\omega]^\omega$ es tal que $\{f_n(\alpha) : n \in A\}$ es convergente y $B \subseteq^* A$ entonces claro que $\{f_n(\alpha) : n \in B\}$ es también convergente. Se prueba así que \mathcal{D}_α es abierto.

Dado que $\kappa < \mathfrak{h}$, existe $C \in \bigcap_{\alpha < \kappa} \mathcal{D}_\alpha$. Para concluir la demostración, basta observar que $\{f_n(\alpha) : n \in C\}$ es una sucesión convergente en X_α para cada $\alpha < \kappa$, con lo cual se obtiene que $\{f_n : n \in C\}$ es convergente en Y . ■

Del resultado anterior se obtiene que, en particular, el producto numerable de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto. Similarmente, se puede verificar que el producto numerable de espacios relativamente secuencialmente compactos es relativamente secuencialmente compacto

Es posible construir una familia de cardinalidad \mathfrak{h} de espacios secuencialmente compactos, cuyo producto no lo es; con lo cual se cumple que \mathfrak{h} es la menor cota superior que garantiza la propiedad productiva de compacidad secuencial.

Lema 3.2. *Sea X un espacio que contiene un subconjunto denso D de puntos aislados. Entonces los siguientes son equivalentes:*

- (1) X es pseudocompacto,
- (2) D es relativamente numerablemente compacto en X .

Demostración. Supongamos que X es pseudocompacto y sea $A = \{x_n \in \omega\}$ un subconjunto infinito en D . Por hipótesis, $\{x_n\}$ es abierto para cada $n \in \omega$. Luego, por la caracterización de la propiedad de pseudocompacidad indicada en la Proposición 1.2, existe $x \in X$ punto de acumulación de $\{\{x_n\} :$

$n \in \omega\}$, el cual por supuesto es punto de acumulación de A . Se concluye así que D es relativamente numerablemente compacto.

Supongamos por otro lado que D es relativamente numerablemente compacto y sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una colección de subconjuntos abiertos en X . Para cada $n \in \omega$, elíjase $x_n \in D \cap U_n$ y considérese $A = \{x_n : n \in \omega\}$. Entonces existe $x \in X$ punto de acumulación de A , el cual es también punto de acumulación de $\{U_n : n \in \omega\}$, con lo cual se prueba que X es pseudocompacto. ■

Nótese que para la segunda implicación de la demostración no se requiere que el subconjunto denso sea de puntos aislados.

Proposición 3.5. *Si X tiene un subconjunto denso y relativamente secuencialmente compacto en X entonces X^ω es pseudocompacto.*

Demostración. Sea $D \subseteq X$ un subconjunto denso relativamente secuencialmente compacto. Ocurre que D^ω es un subconjunto denso en X^ω ; además, por la observación posterior a la Proposición 3.4, D^ω es relativamente secuencialmente compacto en X^ω (y por tanto relativamente numerablemente compacto). Del resultado anterior se concluye que X^ω es pseudocompacto. ■

Denotemos por \mathfrak{Fin} a la colección de subconjuntos finitos de ω . Recordemos que si ω es un subconjunto denso y de puntos aislados en X entonces \mathfrak{Fin} es un subconjunto denso y de puntos aislados en 2^X .

Supongamos que \mathcal{A} es una familia **MAD** y sea $Y = \{x_n : n \in \omega\}$ una sucesión en ω . Existen $\{x_{n_k} : k \in \omega\}$ subsucesión de Y y $A \in \mathcal{A}$ tales que $\{x_{n_k} : k \in \omega\} \subseteq A$. Es claro que si F es un subconjunto finito de ω entonces existe $N \in \omega$ tal que $x_{n_k} \in A \setminus F$ para todo $k > N$. Por lo tanto, $\{x_{n_k} : k \in \omega\}$ converge a A en $\Psi(\mathcal{A})$, con lo cual se verifica que ω es un subconjunto denso y relativamente secuencialmente compacto en $\Psi(\mathcal{A})$. Luego, a partir de la Proposición 3.5, se obtiene el siguiente resultado.

Lema 3.3. *Si \mathcal{A} es **MAD** entonces $(\Psi(\mathcal{A}))^\omega$ es pseudocompacto.*

Introduzcamos ahora la siguiente notación, la cual se utilizará en lo sucesivo.

Definición 3.16. *Supongamos que X es un espacio topológico que contiene a ω como subconjunto, $Y = \{F_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto de \mathfrak{Fin} , $F \in 2^X$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y $A \subseteq \omega$. Se definen los siguientes conjuntos:*

- (1) $I_A^Y = \{n \in \omega : A \cap F_n \neq \emptyset\}$,
- (2) $M_A^Y = \{n \in \omega : F_n \subseteq A\}$,
- (3) $\mathcal{F}_F^Y = \{I_{A \setminus k}^Y : A \in F \cap \mathcal{A}, k \in \omega\} \cup \{I_{\{n\}}^Y : n \in F \cap \omega\}$.

Lema 3.4. *Sea \mathcal{A} una familia casi ajena. Si $F \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ es cerrado y $Y = \{F_n : n \in \omega\} \subseteq \mathfrak{Fin}$ es infinito entonces los siguientes son equivalentes:*

- (1) F es un punto de acumulación de Y en el hiperespacio $2^{\Psi(\mathcal{A})}$,
- (2) \mathcal{F}_F^Y es centrada y para cada $P \subseteq \omega$ ocurre uno de los siguientes casos:
 - (a) $(F \cap \omega) \setminus P \neq \emptyset$,
 - (b) existe $A \in F \cap \mathcal{A}$ tal que $A \setminus P$ es infinito ó
 - (c) $\mathcal{F}_F^Y \cup \{M_P^Y\}$ es centrada.

Demostración. Supongamos que F es punto de acumulación de Y y sea \mathcal{Q} un subconjunto finito de \mathcal{F}_F^Y , digamos que

$$\mathcal{Q} = \{I_{A_0 \setminus k_0}^Y, I_{A_1 \setminus k_1}^Y, \dots, I_{A_m \setminus k_m}^Y\} \cup \{I_{a_0}^Y, \dots, I_{a_l}^Y\},$$

donde $A_i \in F \cap \mathcal{A}$ para cada $i \leq m$ y $a_j \in F \cap \omega$ para cada $j \leq l$. Deseamos probar que $\bigcap \mathcal{Q}$ es infinito.

Considérese el subconjunto

$$\mathcal{U} = \langle \Psi(\mathcal{A}); \{A_0\} \cup A_0 \setminus k_0, \dots, \{A_m\} \cup A_m \setminus k_m, \{a_0\}, \dots, \{a_l\} \rangle$$

Nótese que \mathcal{U} es una vecindad de F y así, dado que F es punto de acumulación de Y , $\mathcal{U} \cap Y$ es infinito. Sea $I = \{n \in \omega : F_n \in \mathcal{U}\}$. Por lo tanto, si $i \in I$ entonces $(A_j \setminus k_j) \cap F_i$ y $a_k \in F_i$ para todo $j \leq m$ y $k \leq l$. Por definición se cumple que $I \subseteq \bigcap \mathcal{Q}$, de lo cual se concluye que \mathcal{F}_F^Y es centrada.

Ahora, sea $P \subseteq \omega$ y supongamos que no se cumple alguna de las propiedades (a) y (b) de (2) del lema. Esto es, $(F \cap \omega) \subseteq P$ y $A \subseteq^* P$ para todo $A \in F \cap \mathcal{A}$. Sea $V = P \cup (F \cap \mathcal{A})$. Nótese que P es un subconjunto abierto en $\Psi(\mathcal{A})$; más aún, si $A \in F \cap \mathcal{A}$ entonces $A \setminus P$ es finito y por tanto $U = \{A\} \cup A \setminus (A \setminus P) = \{A\} \cup (A \cap P)$ es una vecindad de A contenida en V . De lo anterior se concluye que V es un subconjunto abierto de $\Psi(\mathcal{A})$, el cual además contiene a F .

Verifiquemos que se cumple (c). Para esto, sea

$$\mathcal{Q} = \{I_{A_0 \setminus k_0}^Y, I_{A_1 \setminus k_1}^Y, \dots, I_{A_m \setminus k_m}^Y\} \cup \{I_{a_0}^Y, \dots, I_{a_l}^Y\} \cup \{M_P^Y\} \subseteq \mathcal{F}_F^Y \cup \{M_P^Y\},$$

donde A_i y a_j son como antes.

Dado que $F \subseteq V$, se cumple que

$$\mathcal{W} = \langle V; \{A_0\} \cup (A_0 \setminus k_0), \dots, \{A_m\} \cup (A_m \setminus k_m), \{a_0\}, \dots, \{a_l\} \rangle$$

es una vecindad de F en $2^{\Psi(\mathcal{A})}$. Similarmente, dado que F es punto de acumulación de Y , $I = \{n \in \omega : F_n \in \mathcal{W}\}$ es infinito. Ahora, si $i \in I$ entonces $F_n \subseteq P \cup (F \cap \mathcal{A})$, pero $F_n \subseteq \omega$, de lo cual se sigue que $F_n \subseteq P$ y por tanto $n \in M_P^Y$. Se concluye así que $I \subseteq \bigcap \mathcal{Q}$ y por tanto $\mathcal{F}_F^Y \cup \{M_P^Y\}$ es centrada.

Supongamos ahora que \mathcal{F}_F^Y es centrada y sea

$$\mathcal{U} = \langle U; \{A_0\} \cup (A_0 \setminus k_0), \dots, \{A_m\} \cup (A_m \setminus k_m), \{a_0\}, \dots, \{a_l\} \rangle$$

una vecindad básica de F . Como U es abierto en $\Psi(\mathcal{A})$, para cada $A \in F \cap \mathcal{A}$, existe $k_A \in \omega$ tal que:

$$F \subseteq V = \{n : n \in F \cap \omega\} \cup \bigcup \{\{A\} \cup A \setminus k_A : A \in F \cap \mathcal{A}\} \subseteq U.$$

Sea $P = V \cap \omega$. Se cumple que $F \cap \omega \subseteq P$, con lo cual no se satisface la condición (a). Además, para cada $A \in F \cap \mathcal{A}$, $A \setminus P$ es finito, con lo cual tampoco se cumple (b). Por lo tanto, debe ocurrir que $\mathcal{F}_F^Y \cup \{M_P^Y\}$ es centrado.

De lo anterior se sigue que $\bigcap \{I_{A_i \setminus k_i} : i \leq m\} \cap \bigcap \{I_{\{a_j\}} : j \leq l\} \cap M_P^Y$ es infinito y así también lo es $\{F_n : n \in \omega\} \cap V$. ■

A partir de la suposición de $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, o simplemente bajo **CH**, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.6. ($\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$) Si \mathcal{A} es una familia **MAD** entonces $2^{\Psi(\mathcal{A})}$ es pseudocompacto.

Demostración. Nótese que, por la proposición 3.1, \mathfrak{c} es regular si $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Sea \mathcal{A} una familia **MAD**. Dado que ω es un subconjunto denso de puntos aislados en $\Psi(\mathcal{A})$, lo cual implica que \mathfrak{Fin} es denso, por el lema 3.2 basta mostrar que todo conjunto infinito $Y \subseteq \mathfrak{Fin}$ tiene un punto de acumulación en $2^{\Psi(\mathcal{A})}$. Para esto, sea $Y = \{F_n : n \in \omega\} \subseteq \mathfrak{Fin}$ y sea $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una enumeración de $[\omega]^\omega$, donde cada elemento aparece \mathfrak{c} veces en la enumeración. Constrúyase recursivamente una familia $\{E_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ tal que para cada $\alpha < \mathfrak{c}$:

- (1) $E_\alpha \subseteq \Psi(\mathcal{A})$,
- (2) $|E_\alpha| \leq |\alpha| + \omega$,
- (3) si $\alpha < \beta$ entonces $E_\alpha \subseteq E_\beta$,
- (4) $\mathcal{F}_\alpha = \{I_{A \setminus k} : A \in E_\alpha \cap \mathcal{A}, k \in \omega\} \cup \{I_n^Y : n \in E_\alpha \cap \omega\}$ es centrada y
- (5) ocurre una de las siguientes condiciones:
 - (a) $(E_\alpha \setminus P_\alpha) \cap \omega \neq \emptyset$,
 - (b) existe $A \in E_\alpha \cap \mathcal{A}$ tal que $A \not\subseteq^* P_\alpha$ ó
 - (c) $\mathcal{F}_\alpha \cup \{M_{P_\alpha}^Y\}$ es centrada.

Si $P_0 = \omega$ o si $|\{n \in \omega : m \in F_n\}| < \aleph_0$ para cada $m \in \omega$, entonces sea $E_0 = \emptyset$; en otro caso, si existe $m \in \omega$ tal que $\{n \in \omega : m \in F_n\}$ es infinito, sea $E_0 = \{m\}$. Sea ahora $\alpha < \mathfrak{c}$ y supongamos que hemos construido E_β para cada $\beta < \alpha$. Por la propiedad (3) de la construcción y dado que \mathcal{F}_β es centrada para cada $\beta < \alpha$, $\mathcal{F} = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_\beta$ también lo es. Si ocurre que $\mathcal{F} \cup \{M_{P_\alpha}^Y\}$ es centrada entonces $E_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta$ satisface (1) – (5). En particular, la condición (2) se sigue de la regularidad de \mathfrak{c} . Podemos suponer entonces que $\mathcal{F} \cup \{M_{P_\alpha}^Y\}$ no es centrada. Dado que \mathcal{F} es centrada y $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c} = \mathfrak{p}$, existe $I \in [\omega]^\omega$ tal que $I \subseteq^* A$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Pero $\mathcal{F} \cup \{M_{P_\alpha}^Y\}$ no es centrada, lo cual implica que $|I \setminus M_{P_\alpha}^Y| = \aleph_0$. Sea $J = I \setminus M_{P_\alpha}^Y$ y consideremos dos casos:

Caso 1: Existe $m \in J \setminus P_\alpha$ tal que $\{n \in J : m \in F_n\}$ es infinito. Defínase $E_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta \cup \{m\}$. Es claro que E_α cumple (1) – (3). Además $\{m\} \in E_\alpha \setminus P_\alpha$, con lo cual se satisface la condición (a) de (5). Basta verificar que se satisface (4). Para esto, sea $\mathcal{G} = \{I_{A_0 \setminus k_0}^Y, \dots, I_{A_t \setminus k_t}^Y, I_{a_0}^Y, \dots, I_{a_l}^Y\} \cup \{I_m^Y\} \subseteq \mathcal{F}_\alpha$. Es claro que $\{n \in J : m \in F_n\} \subseteq I_m^Y$ y además, dado que I es pseudointersección de \mathcal{F} y $J \subseteq I$, $J \subseteq^* F$ para cada $F \in \mathcal{F}$, de lo cual se sigue que

$$\{n \in J : m \in F_n\} \subseteq^* \bigcap_{i \leq t} I_{A_i \setminus k_i}^Y \cap \bigcap_{j \leq l} I_{a_j}^Y \cap I_m^Y.$$

Se concluye así que $\bigcap \mathcal{G}$ es infinito y por tanto \mathcal{F}_α es centrada.

Caso 2: $\{n \in J : m \in F_n\}$ es finito para todo $m \in J \setminus P_\alpha$. Por lo anterior y dado que $J \cap M_{P_\alpha}^Y = \emptyset$, se cumple que $L = (\bigcup_{n \in J} F_n) \setminus P_\alpha$ es infinito. Dado que \mathcal{A} es **MAD**, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap L| = \omega$. Defínase $E_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta \cup \{A\}$. Es claro que E_α satisface (1) – (3). Más aún, $A \in E_\alpha \cap \mathcal{A}$ y $|A \setminus P_\alpha| = \omega$,

3.2. PSEUDOCOMPACIDAD EN HIPERESPACIOS DE Ψ -ESPACIOS 57

con lo cual se cumple (b) de (5). Basta entonces verificar que se satisface la condición (4). Sea

$$\mathcal{G} = \{I_{A_0 \setminus k_0}^Y, \dots, I_{A_t \setminus k_t}^Y, I_{a_0}^Y, \dots, I_{a_l}^Y, I_{A \setminus k}^Y\} \subseteq \mathcal{F}_\alpha,$$

donde $k \in \omega$ y A_i, a_j son como antes para $i \leq t$ y $j \leq l$.

Nótese que $A \cap \bigcup_{n \in J} F_n$ es infinito y F_n es finito para cada $n \in \omega$, lo cual implica que $\{n \in J : A \cap F_n \neq \emptyset\}$ es infinito; más aún, dado que $J \subseteq I$ y I es pseudointersección de \mathcal{F} , $\{n \in J : A \cap F_n \neq \emptyset\} \subseteq^* F$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\{n \in J : A \cap F_n \neq \emptyset\} \subseteq \bigcap \mathcal{G}$, con lo cual se prueba que \mathcal{F}_α es centrada. Se concluye así el paso inductivo y tenemos entonces la familia $\{E_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ con las propiedades deseadas.

Sea $E = cl_{\Psi(\mathcal{A})}(\bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} E_\alpha)$.

Afirmación: E es punto de acumulación de Y en $2^{\Psi(\mathcal{A})}$.

Por el lema 3.4, basta demostrar que \mathcal{F}_E^Y es centrada y que para cada $P \subseteq \omega$ se satisface una de las siguientes condiciones:

- (a) $(E \cap \omega) \setminus P \neq \emptyset$,
- (b) existe $A \in E \cap \mathcal{A}$ tal que $A \not\subseteq^* P$ ó
- (c) $\mathcal{F}_E^Y \cup \{M_{P_\alpha}^Y\}$ es centrada.

Por definición, $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} F_\alpha$ es centrada; además $E \setminus \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} E_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ pues ω es un subconjunto de \mathcal{A} de puntos aislados, con lo cual se obtiene que

$$\mathcal{F}_E^Y = \mathcal{F} \cup \{I_{A \setminus k}^Y : A \in E \setminus \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} E_\alpha, k \in \omega\}.$$

Ahora, si $A \in E \setminus \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} E_\alpha$ y $k \in \omega$ entonces $\{A\} \cup (A \setminus k)$ es una vecindad de A y así $(A \setminus k) \cap (\bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} E_\alpha) \neq \emptyset$. Luego, para cada $A \in E \setminus \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} E_\alpha$ y cada $k \in \omega$ existe $m \in (A \setminus k) \cap (\bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} E_\alpha)$, para el cual se cumple que $I_m^Y \in \mathcal{F}$ y $I_m^Y \subseteq I_{A \setminus k}^Y$. Para verificar entonces que \mathcal{F}_E^Y es centrada basta observar que si $F \in \mathcal{F}_E^Y$ y $F \notin \mathcal{F}$ entonces $F = I_{A \setminus k}^Y$ para algún $A \in \mathcal{A}$ y algún $k \in \omega$. Por lo tanto, si $F \in \mathcal{F}_E^Y$ entonces existe $G \in \mathcal{F}$ con $G \subseteq F$, donde $G = F$ si $F \in \mathcal{F}$ y $G = I_m^Y$ en otro caso, donde m es como antes; luego, el que \mathcal{F} es centrada implica que \mathcal{F}_E^Y también lo es.

Por último, sea $P \subseteq \omega$ y supongamos que $\mathcal{F}_E^Y \cup \{M_P^Y\}$ no es centrada. Podemos suponer que P es infinito, pues en otro caso se satisface trivialmente

la condición (b). Existen $A_0, \dots, A_n \in E \cap \mathcal{A}$, $k_0, \dots, k_n \in \omega$ y $m_0, \dots, m_l \in E \cap \omega$ tales que:

$$\left| \bigcap_{i \leq n} I_{A_i \setminus k_i}^Y \cap \bigcap_{j \leq l} I_{\{m_j\}}^Y \cap M_P^Y \right| < \omega.$$

Como se estableció en el parrafo anterior, para cada $i \leq n$ tal que $A \in E \setminus \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} E_\alpha$ existe un ordinal $\alpha_i < \mathfrak{c}$ y existe $m_i \in E_{\alpha_i}$ tal que $I_{\{m_i\}}^Y \subseteq I_{A_i \setminus k_i}^Y$. Elíjase $\beta < \mathfrak{c}$ tal que $\alpha_i < \beta$ para todo i y tal que $A_j \in E_\beta$ para todo $j \leq n$ con $A_j \in \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} E_\alpha$. Sea $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $P = P_\alpha$ y $\alpha > \beta$. Esto es posible pues P aparece enlistado \mathfrak{c} veces en la enumeración que se realizó de $[\omega]^\omega$. Se cumple entonces que $\mathcal{F}_\alpha \cup \{M_{P_\alpha}^Y\}$ no es centrada. Por la condición (5) debe ocurrir que $(E_\alpha \cap \omega) \setminus P \neq \emptyset$, lo cual implica que $(E \cap \omega) \setminus P \neq \emptyset$ ó existe $A \in E_\alpha \subseteq E$ tal que $A \not\subseteq^* P$. Se concluye así la demostración y por tanto E es punto de acumulación de Y en $2^{\Psi(A)}$. ■

Como se mencionó anteriormente, es consistente con **ZFC** que $\mathfrak{h} < \mathfrak{c}$ (y por tanto que $\mathfrak{p} < \mathfrak{c}$). Si suponemos tal desigualdad, la respuesta a la pregunta de Cao y Nogura es completamente distinta a la que se sigue de la proposición anterior, además de que brinda un ejemplo que responde negativamente a la pregunta de Ginsburg. Luego, resulta indecidible cuando el hiperespacio de un Ψ -espacio es pseudocompacto.

Teorema 3.4. ($\mathfrak{h} < \mathfrak{c}$) *Existe una familia \mathcal{A} maximal casi ajena tal que $2^{\Psi(A)}$ no es pseudocompacto.*

Demostración. Para construir la familia \mathcal{A} , trabajaremos con $2^{<\omega}$ en lugar de ω , con lo cual \mathcal{A} consistirá de subconjuntos infinitos de $2^{<\omega}$. Sin embargo, a lo largo de la demostración podremos identificar a $2^{<\omega}$ con ω cuando sea necesario. Consideremos una familia \mathcal{T} como en el Teorema 3.1 y enumeremos a $[2^{<\omega}]^\omega$ por $\{X_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Para cada $A \subseteq 2^{<\omega}$ defínase $\pi_A = \{n \in \omega : A \cap 2^n \neq \emptyset\}$. Construyamos recursivamente una colección $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de familias, tal que para cada $\alpha < \mathfrak{c}$:

- (1) $|\mathcal{A}_\alpha| < \mathfrak{c}$,
- (2) cada $A \in \mathcal{A}_\alpha$ es una cadena o una anticadena en $2^{<\omega}$,
- (3) $\pi_A \in \mathcal{T}$ para cada $A \in \mathcal{A}_\alpha$,
- (4) si $A, B \in \mathcal{A}_\alpha$ y $A \neq B$ entonces $\pi_A \cap \pi_B =^* \emptyset$ y
- (5) existe $A \in \mathcal{A}_\alpha$ tal que $\pi_A \subseteq^* \pi_{X_\alpha}$ y $|A \cap X_\alpha| = \omega$.

Supongamos que $\alpha < \mathfrak{c}$ y que hemos construido \mathcal{A}_β para cada $\beta < \alpha$. Si existe $A \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta$ tal que $A \cap X_\alpha$ es infinito y $\pi_A \subseteq^* \pi_{X_\alpha}$ entonces basta definir $\mathcal{A}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta$. Supongamos entonces que no se cumple lo anterior y elijase $T \in \mathcal{T}$ tal que $T \subseteq^* \pi_{X_\alpha}$, lo cual es posible por la densidad de \mathcal{T} en $[\omega]^\omega$. Dado que T tiene \mathfrak{c} sucesores inmediatos en \mathcal{T} y $\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta$ tiene cardinalidad menor que \mathfrak{c} , existe un sucesor inmediato T' de T en \mathcal{T} que es casi ajeno con π_A para cada $A \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta$. Por otro lado, ocurre que $C = X_\alpha \cap \bigcap_{n \in T'} 2^n$ es infinito, con lo cual existe B subconjunto infinito de C que es una cadena o bien una anticadena. Para concluir la construcción inductiva, basta definir $\mathcal{A}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta \cup \{B\}$. Finalmente, sea $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} \mathcal{A}_\alpha$. La condición (5) garantiza que \mathcal{A} es una familia **MAD**.

Veamos ahora que $2^{\Psi(\mathcal{A})}$ no es pseudocompacto. Para esto, consideremos la sucesión $Y = \langle F_n : n \in \omega \rangle$, donde $F_n = 2^n$ para cada $n \in \omega$. Afirmamos que Y no tiene puntos de acumulación.

En principio, nótese que si la sucesión anterior tuviera un punto de acumulación, digamos $F \subseteq \Psi(\mathcal{A})$, entonces $F \cap 2^{<\omega} = \emptyset$, pues en otro caso si $f \in 2^{<\omega} \cap F$ entonces $\mathcal{U} = (\{f\})^-$ es una vecindad de F tal que $Y \cap \mathcal{U} \leq 1$, lo cual es una contradicción. Luego, para mostrar que Y no tiene puntos de acumulación, sea $F \subseteq \mathcal{A}$ y consideremos los dos posibles casos:

Caso 1: $|F| < \mathfrak{c}$. Supongamos que para cada $f \in 2^\omega$ existe $A \in F$ tal que $U_{f,A} = \{n \in \omega : f \upharpoonright n \in A\}$ es infinito. Dado que $|F| < \mathfrak{c}$, existen $A \in 2^\omega$ y $f, g \in F$ tales que $U_{f,A}$ y $U_{g,A}$ son infinitos. Sea $m \in \omega$ tal que $f(m) \neq g(m)$. Sea $k_1 > m$ tal que $f \upharpoonright k_1 \in A$; similarmente, elijase $k_2 > m$ con $f \upharpoonright k_2 \in A$. Se cumple que $f \upharpoonright k_1$ y $g \upharpoonright k_2$ no pueden tener una extensión común en $2^{<\omega}$ (y por tanto en A), con lo cual A no es una cadena en $2^{<\omega}$. Pero A tampoco puede ser anticadena pues en particular $U_{f,A}$ es infinito, contradiciendo con esto la condición (2) de la construcción. Se concluye entonces que existe $f \in 2^\omega$ tal que $U_{f,A} = \{n \in \omega : f \upharpoonright n \in A\}$ es finito para cada $A \in F$. Sea

$$\mathcal{U} = \{H \subseteq \Psi(\mathcal{A}) : H \cap cl_{\Psi(\mathcal{A})}(B_f) = \emptyset\},$$

donde $B_f = \{f \upharpoonright n : n \in \omega\}$. Para cada $A \in F$, $B_f \cap A$ es finito y por tanto $A \notin cl_{\Psi(\mathcal{A})}$. Se cumple así que \mathcal{U} es vecindad de F y claro que $g \upharpoonright n$ no es punto de acumulación de B_f para todo $g \in 2^\omega$ y todo $n \in \omega$. Esto es, $F_n \notin \mathcal{U}$ para cada $n \in \omega$, con lo cual F no es punto de acumulación de Y .

Caso 2: $|F| > \mathfrak{h}$. Nótese que $I_A^Y = \pi_A$ para cada $A \in F$. Luego, dado que \mathcal{T} es de altura \mathfrak{h} , $\{I_A^Y : A \in F\}$ no puede ser una rama del árbol base \mathcal{T} .

Más aún, existen $A, B \in F$ tales que $A \neq B$ y $ht(\pi_A) = ht(\pi_B)$, con lo cual $I_A^Y \cap I_B^Y =^* \emptyset$. Por tanto $\{I_A^Y : A \in F\}$ no es centrada y a partir del Lema 3.4 se concluye que F no es punto de acumulación. ■

3.3. Un ejemplo en ZFC

El último teorema de la sección anterior muestra que es consistente que existe un espacio topológico tal que su producto numerable es pseudocompacto pero cuyo hiperespacio no lo es. En esta sección presentaremos un ejemplo de un espacio en **ZFC** que cumple las propiedades anteriores. Este resultado generaliza entonces el resultado obtenido por Hrušák y permite concluir que la respuesta a la pregunta (2) de Ginsburg es negativa. Este resultado así como los de la sección anterior están incluidos en [HHM06]

Para la construcción de nuestro ejemplo, conviene recordar algunas propiedades de la compactación de Čech-Stone de ω .

Podemos identificar a $\beta\omega$ con la colección de ultrafiltros de ω , donde en particular $\beta\omega \setminus \omega$ coincide con ω^* . Identificamos a $n \in \omega$ con $\{A \subseteq \omega : n \in A\}$, cumpliéndose además que $\{U^* : U \subseteq \omega\}$ es una base para ω^* , donde para cada $U \subseteq \omega$:

$$U^* = \{p \in \omega^* : U \in p\}.$$

Para cada función $f : \omega \rightarrow \omega$ existe una única función $\tilde{f} : \beta\omega \rightarrow \beta\omega$ que es extensión de f , la cual es llamada *extensión de Stone de f* .

Lema 3.5. *Sea $Y \subseteq \omega^*$ tal que $|Y| < \mathfrak{c}$. Entonces Y es nunca denso en $\beta\omega$.*

Demostración. Sea $U \subseteq \omega$ y consideremos $U^* \in \omega^*$. Sea también \mathcal{T} un árbol base para ω^* , como en el Teorema 3.1. Por la propiedad de densidad de \mathcal{T} , existe $B \in \mathcal{T}$ tal que $B \subseteq^* U$. Por otra de las propiedades que caracterizan a \mathcal{T} , B tiene \mathfrak{c} sucesores inmediatos. Ahora, para cada $p \in Y$, existe a lo más un sucesor inmediato A de B tal que $p \in A^*$. Lo anterior y el hecho de que $|Y| < \mathfrak{c}$, garantizan que $C^* \cap Y = \emptyset$ para algún C sucesor inmediato de B . Por lo tanto, si $D = U \cap C$, entonces se cumple que $D^* \cap Y = \emptyset$ y se concluye así que Y es nunca denso. ■

Definición 3.17. *Sean $p, q \in \beta\omega$. Entonces:*

(1) $p \leq_{RK} q$ si existe $f : \omega \rightarrow \omega$ tal que $\tilde{f}(q) = p$.

(2) $p \approx q$ si existe $f : \omega \rightarrow \omega$ función biyectiva tal que $\tilde{f}(p) = q$.

El orden anterior recibe el nombre de *orden de Rudin-Keisler*.

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [CN74].

Proposición 3.7. *Sea $f : \omega \rightarrow \omega$ y sean $p, q \in \omega^*$. Entonces:*

(a) $\tilde{f}(p) = q$ si y sólo si $(\forall Q \in q)(f^{-1}[Q] \in p)$.

(b) $\tilde{f}(p) \approx p$ si y sólo si existe $A \in p$ tal que $f \upharpoonright A$ es inyectiva.

Teorema 3.5. *Existe un espacio topológico X tal que X^ω es pseudocompacto pero 2^X no lo es.*

Demostración. Enumeremos al conjunto $(\omega^\omega)^\omega$ por $\{f_\alpha : \alpha \in \text{lim}(\mathfrak{c})\}$, donde para cada α , $f_\alpha : \omega \rightarrow \omega^\omega$ está dada por $f_\alpha = \langle f_{\alpha,n} : n \in \omega \rangle$. Nótese que para $\alpha \in \text{lim}(\mathfrak{c})$ y $n \in \omega$, $f_{\alpha,n}$ es una función definida en ω . Para cada $n \in \omega$ defínase $F_n = [2^n, 2^{n+1})$ y sea $Y = \langle F_n : n \in \omega \rangle$.

Si $p \in \omega^*$, sea $\pi(p) = \{I_U^Y : U \in p\}$. Afirmamos que $\pi(p)$ es un ultrafiltro. En efecto, el que $\pi(p)$ es un filtro se sigue del hecho de que p lo es. Ahora, sea $V \subseteq \omega$ y consideremos $U = \bigcup_{m \in V} F_m$. Si ocurre que $U \in p$ entonces, nótese que

$$V = \{n \in \omega : F_n \cap U \neq \emptyset\},$$

lo cual implica que $V \in \pi(p)$. En otro caso, si $U \notin p$ entonces $\omega \setminus U \in p$ y, similar al caso anterior,

$$\omega \setminus V = \{n \in \omega : F_n \cap (\omega \setminus U) \neq \emptyset\},$$

con lo cual $\omega \setminus V \in \pi(p)$.

Para realizar la construcción del espacio en cuestión, asumamos por el momento la siguiente afirmación, cuya demostración haremos al final:

Afirmación: Para cada $\alpha \in \text{lim}(\mathfrak{c})$ existen $q_\alpha \in \omega^*$, $C_\alpha \in [\omega]^\omega$ y $X_\alpha \in [\omega^*]^\omega$, donde $X_\alpha = \{p_{\alpha+m} : m \in \omega\}$, tales que:

- (1) Para cada $\alpha \in \text{lim}(\mathfrak{c})$ y $m \in \omega$, si la sucesión $\langle f_{\alpha,n}(m) : n \in C_\alpha \rangle$ no es eventualmente constante entonces $p_{\alpha+m}$ es un q_α -límite de $\langle f_{\alpha,n}(m) : n \in C_\alpha \rangle$, donde esto último es como en la definición 2.1.
- (2) Para cada $\alpha \in \text{lim}(\mathfrak{c})$ y $m \in \omega$, existe $U \in p_{\alpha+m}$ selectivo respecto a $\{F_k : k \in \omega\}$.

- (3) Para cada $M \subseteq \lim(\mathfrak{c})$ no numerable y $m, n \in \omega$, existen $\alpha, \beta \in M$ distintos, para los cuales existen $U_\alpha \in p_{\alpha+n}$ y $V_\beta \in p_{\beta+m}$ tales que $I_{U_\alpha}^Y \cap I_{V_\beta}^Y = \emptyset$.

Sea $\tilde{X} = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \in \lim(\mathfrak{c})\}$ y defínase $X = \omega \cup \tilde{X}$. Nótese que ω es un subconjunto denso y discreto en X ; por tanto ω^ω es denso en X^ω . Luego, para verificar que X^ω es pseudocompacto, basta probar que ω^ω es relativamente numerablemente compacto en X^ω .

Sea $\langle h_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión en ω^ω . Existe $\alpha \in \lim(\mathfrak{c})$ tal que $f_\alpha = \langle h_n : n \in \omega \rangle$. Sea C_α el subconjunto establecido en la Afirmación. Defínase $h \in X^\omega$ por $h(m) = k_m$ si $\langle f_{\alpha,n}(m) : n \in \omega \rangle$ es eventualmente constante con valor k_m y sea $h(m) = p_{\alpha+m}$ en otro caso. Por la condición (1) de la Afirmación, $h(m)$ es un q_α -límite de $\langle f_{\alpha,n}(m) : n \in C_\alpha \rangle$, con lo cual se concluye que h es un q_α -límite de $\langle h_n : n \in C_\alpha \rangle$ y por tanto un punto de acumulación. Se concluye entonces que X^ω es pseudocompacto.

Para demostrar que 2^X no es pseudocompacto, verifiquemos que Y no tiene un punto de acumulación en 2^X , de lo cual se concluye que \mathfrak{fin} no es relativamente numerablemente compacto. Para esto, sea $F \in 2^X \setminus Y$. Consideremos los siguientes casos:

Si $F \cap \omega \neq \emptyset$, elíjase $m \in F \cap \omega$. Sea $k \in \omega$ el único natural tal que $m \in F_k = [2^k, 2^{k+1})$ y defínase $\mathcal{W} = \langle X; \{m\}, X \setminus F_k \rangle$. Se cumple que \mathcal{W} es una vecindad de F y claro que $\mathcal{W} \cap Y = \emptyset$. Luego, F no es punto de acumulación de Y .

En otro caso, si ocurre que $F \subseteq \tilde{X}$ y $|F| \leq \omega$, pongamos $F = \{p_{\alpha_i+n_i} : i \in \omega\}$, entonces la propiedad (2) de la afirmación garantiza que para cada $i \in \omega$ existe $U_{\alpha_i} \in p_{\alpha_i+n_i}$ selectivo respecto a Y . Para cada $k \in \omega$ elíjase $x_k \in F_k \setminus \bigcup \{U_{\alpha_i+n_i} : i \leq k\}$ y sea $K = \{x_k : k \in \omega\}$. Por construcción, $|U_{\alpha_i+n_i} \cap K| < \omega$ para cada $i \in \omega$. Defínase $\mathcal{W} = (X \setminus cl_X(K))^+$. Para cada $i \in \omega$, $X \cap U_{\alpha_i+n_i}^*$ es una vecindad de $p_{\alpha_i+n_i}$ y $|U_{\alpha_i+n_i}^* \cap K| < \omega$, pues $U_{\alpha_i+n_i} \cap K$ es finito. De esto se sigue que $F \cap cl_X(K) = \emptyset$ y por tanto \mathcal{W} es vecindad de F . Por otro lado, $x_n \in cl_X(K) \cap F_n$ para cada $n \in \omega$, con lo cual $F_n \not\subseteq \mathcal{W}$. Se concluye entonces que $\mathcal{W} \cap Y = \emptyset$ y por tanto F no es punto de acumulación de Y .

Finalmente, si $F \subseteq \tilde{X}$ y $F = \{p_{\alpha_i+n_i} : i \in J\}$, donde J es no numerable, entonces la propiedad (3) implica que existen $(\alpha_i, n_i), (\alpha_j, n_j) \in J \times \omega$, $U_{\alpha_i} \in p_{\alpha_i+n_i}$ y $V_{\alpha_j} \in p_{\alpha_j+n_j}$ tales que $I_{U_{\alpha_i}}^Y \cap I_{V_{\alpha_j}}^Y = \emptyset$. Defínase

$$\mathcal{W} = \langle X; X \cap U_{\alpha_i}^*, X \cap V_{\alpha_j}^* \rangle.$$

Nótese que $p_{\alpha_i+n_i} \in F \cap U_{\alpha_i}^*$ y $p_{\alpha_j+n_j} \in F \cap V_{\alpha_j}^*$, lo cual implica que \mathcal{W} es vecindad de F . Por otro lado, si $F_k \cap U_{\alpha_i}$ para algún $k \in \omega$ entonces, dado que $I_{U_{\alpha_i}}^Y \cap I_{V_{\alpha_j}}^Y = \emptyset$, $F_k \cap V_{\alpha_j} = \emptyset$. De lo anterior se concluye que $Y \cap \mathcal{W} = \emptyset$ y por tanto F no es punto de acumulación de Y . Con todo esto, Y no tiene un punto de acumulación en X .

Para concluir la demostración del teorema, basta construir los conjuntos indicados en la Afirmación de tal forma que satisfagan las propiedades ahí establecidas. De manera recursiva construyamos los conjuntos C_α , X_α y los ultrafiltros q_α como sigue. Supongamos que lo hemos hecho para todo $\beta \in \lim(\alpha)$ y consideremos la sucesión $f_\alpha \in (\omega^\omega)^\omega$. Para cada $m \in \omega$, sea $g_m : \omega \rightarrow \omega$ definida por $g_m(n) = f_{\alpha,n}(m)$.

Construyamos ahora un conjunto $C_\alpha \in [\omega]^\omega$ de tal forma que cumpla:

- (a) Para cada $m \in \omega$, $g_m \upharpoonright C_\alpha$ es eventualmente constante o $g_m \upharpoonright C_\alpha$ es inyectiva y $g_m[C_\alpha]$ es selectiva respecto de Y ,
- (b) si $m, n \in \omega$ entonces $g_m \upharpoonright C_\alpha =^* g_n \upharpoonright C_\alpha$ o $g_m[C_\alpha] \cap g_n[C_\alpha] =^* \emptyset$ y
- (c) para cada $\beta \in \lim(\alpha)$ y cada $m \in \omega$ tal que $g_m \upharpoonright C_\alpha$ no es eventualmente constante, existe $V \in p_{\beta+m}$ tal que $I_{g_m[C_\alpha]}^Y \cap I_V^Y =^* \emptyset$.

Comencemos por construir $A \in [\omega]^\omega$ tal que cumpla (a). Si ocurre que $g_0[\omega]$ es finito, entonces existe $a_0 \in \omega$ tal que $|g_0^{-1}[\{a_0\}]| = \omega$. Elíjase en este caso $A_0 = g_0^{-1}[\{a_0\}]$. Si por otro lado ocurre que $g_0[\omega]$ es infinito, podemos construir de manera recursiva un conjunto $A_0 \in [\omega]^\omega$ tal que $g_0 \upharpoonright A_0$ es estrictamente creciente y $g_0[A_0]$ es selectivo.

Similar a la construcción anterior, es posible construir $A_1 \subseteq A_0$ tal que $g_1 \upharpoonright A_1$ es eventualmente constante ó $g_1 \upharpoonright A_1$ es inyectiva y $g_1[A_1]$ es selectiva respecto de Y . En general, para cada $m \in \omega$ se construye $A_m \in [A_{m-1}]^\omega$ que cumple, respecto a g_m , propiedades análogas a A_0 y A_1 . Luego, si $A \in [\omega]^\omega$ es una pseudointersección de $\{A_m : m \in \omega\}$, entonces A cumple la propiedad (a).

A partir del conjunto A , construyamos ahora $B \in [\omega]^\omega$ tal que satisfaga (a) y (b). Si $g_1 \upharpoonright A =^* g_0 \upharpoonright A$, es decir $\{n \in A : g_0(n) \neq g_1(n)\}$ es finito, sea $B_0 = \{n \in A : g_1(n) = g_0(n)\}$. En otro caso, de manera inductiva se construye $B_0 \in [A]^\omega$ tal que $g_0[B_0] \cap g_1[B_0] = \emptyset$, como se muestra a continuación. Elíjase $b_0 \in A$ tal que $g_0(b_0) \neq g_1(b_0)$. Sea $b_1 > b_0$ tal que

$g_0(b_1) \neq g_1(b_1)$ y $\max\{g_0(b_0), g_1(b_0)\} < \min\{g_0(b_1), g_1(b_1)\}$. Así sucesivamente, se elige b_n para cada $n \in \omega$, de tal forma que $B_0 = \{b_m : m \in \omega\}$ es tal que $g_0[B_0] \cap g_1[B_0] = \emptyset$. Análogo a lo anterior, se construye la familia $\{B_n : n \in \omega\}$ tal que $B_n \in [B_{n-1}]^\omega$ y si $k \leq n$ entonces $g_k \upharpoonright B_n =^* g_n \upharpoonright B_n$ ó $g_k[B_n] \cap g_n[B_n] = \emptyset$. Por tanto, si $B \in [\omega]^\omega$ es pseudointersección de $\{B_n : n \in \omega\}$ entonces B satisface (a) y (b).

Por último, construyamos un conjunto $C \in [\omega]^\omega$ que satisfaga las tres condiciones; para ésto, sea:

$$N_\alpha = \bigcup \{ \pi(p) : (\exists \beta < \alpha)(p \in X_\beta) \}.$$

Si $g_0 \upharpoonright B$ es eventualmente constante, sea $C_0 = B$. En otro caso, si $g_0 \upharpoonright B$ no es eventualmente constante entonces, dado que $g_0[A_0]$ es selectivo, $I_{g_0[B]}^Y \in [\omega]^\omega$. Debemos notar que $|N_\alpha| < \mathfrak{c}$, lo cual implica que N_α es nunca denso en $\beta\omega$ por el Lema 3.5. Luego, existe $V \subseteq I_{g_0[B]}^Y$ infinito tal que $V^* \cap N_\alpha = \emptyset$. Sea $D_0 \subseteq g_0[B]$ tal que $V_0 = I_{g_0[B]}^Y$, el cual cumple, por la inyectividad de g_0 , que $g_0[g_0^{-1}[D_0]] = D_0$. Defínase $C_0 = g_0^{-1}[D_0]$.

Consideremos ahora $g_1 \upharpoonright C_0$. Si ocurre que $g_1 \upharpoonright C_0$ es eventualmente constante, defínase $C_1 = C_0$; en otro caso, $I_{g_1[C_0]}^Y \in [\omega]^\omega$ y por tanto existe $D_1 \subseteq g_1[C_0]$ infinito tal que $(I_{D_1}^Y)^* \cap N_\alpha = \emptyset$. Sea $C_1 = g_1^{-1}[D_1]$. Similar al párrafo anterior, ocurre que $g_1[g_1^{-1}[D_1]] = D_1$; se cumple entonces que $(I_{g_1[C_1]}^Y)^* \cap N_\alpha = \emptyset$ y $C_1 \subseteq C_0$. Recursivamente, construimos una colección $\{C_m : m \in \omega\}$ tal que, para cada $m \in \omega$, $C_{m+1} \in [C_m]^\omega$ y $(I_{g_k[C_m]}^Y)^* \cap N_\alpha = \emptyset$ para cada $k < m$. Finalmente, basta elegir $C_\alpha \in [\omega]^\omega$ pseudointersección de $\{C_m : m \in \omega\}$. Es claro que C_α cumple (a), (b) y (c).

Sea q_α un ultrafiltro libre en ω tal que $q_\alpha \in C_\alpha^*$. Dado que $C_\alpha \subseteq^* C_m$, se cumple que $C_\alpha \cap C_m \in q_\alpha$. Para cada $m \in \omega$ ocurre que $g_m \upharpoonright (C_\alpha \cap C_m)$ es inyectiva. Así, la proposición anterior garantiza que $\widetilde{g}_m(q_\alpha) \approx q_\alpha$. Luego, definiendo $p_{\alpha+m} = \widetilde{g}_m(q_\alpha)$ para cada $m \in \omega$ se obtiene que q_α , C_α y $X_\alpha = \{p_{\alpha+m} : m \in \omega\}$ satisfacen las propiedades (1), (2) y (3) de la Afirmación.

En efecto, si $p_{\alpha+m} \in U^*$ (i.e. $U \in p_{\alpha+m}$), entonces

$$C_\alpha \cap g_m^{-1}[U] \subseteq \{n \in \omega : g_m[n] \in U\}.$$

Pero $C_\alpha \cap g_m^{-1}[U] \in q_\alpha$, con lo cual $\{n \in \omega : g_m[n] \in U\} \in q_\alpha$ y se verifica así (1). De la propiedad (a) de C_α , se sigue que $g_m[C_\alpha]$ es selectiva respecto de $\{F_k : k \in \omega\}$ y dado que $p_{\alpha+m} \in (g_m[C_\alpha])^*$, se cumple (2). Por último, sea

$M \subseteq \text{lim}(\mathfrak{c})$ un subconjunto no numerable y sean $m, n \in \omega$. Existen $\alpha, \beta \in M$ tal que $\beta + \omega < \alpha$. Por la propiedad (c) que cumple C_α , existe $U \in p_{\beta+n}$ tal que $I_{g_m[C_\alpha]}^Y \cap I_V^Y = \emptyset$ y por tanto basta considerar $V_\beta = U$ y $U_\alpha = g_m[C_\alpha]$ para verificar (3). ■

Capítulo 4

CONCLUSIONES

Se puede concluir que referente a las preguntas de Ginsburg, las dos respuestas son negativas en uno de los sentidos y por tanto no es posible establecer una equivalencia entre la propiedad de compacidad numerable o pseudocompacidad de un espacio y aquella de su hiperespacio. Se obtiene en particular que el análogo al Corolario 2.1 respecto de la propiedad de pseudocompacidad es falso.

Un problema que aún se mantiene abierto, y que resulta ser más complicado, es si es posible determinar las condiciones necesarias y suficientes para que el hiperespacio de un espacio cumpla alguna de las dos propiedades anteriores.

En lo referente a los ejemplos presentados en la última parte del capítulo 4, cabe establecer algunas preguntas; por ejemplo:

- ¿ Existe una familia **MAD** en **ZFC** tal que $2^{\Psi(A)}$ es pseudocompacto?.
- ¿ Es posible modificar la construcción del ejemplo del Teorema 3.5 de tal forma que 2^X sea pseudocompacto y X^ω no lo sea?

Bibliografía

- [Bas] Andreas Bass, *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum*.
- [BPS80] Bohuslav Balcar, Jan Pelant, and Petr Simon, *The space of ultrafilters on \mathbb{N} covered by nowhere dense sets*, Fund. Math. **110**(1980), no. 1, 11-24.
- [CLP02] Camillo Constantini, Sandro Levi, and Jan Pelant, *Compactness and local compactness in hyperspaces*, Topology Appl. **123**(2002), 573-608.
- [CN74] W. Confort, and S. Negropontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer, Berlin, 1974.
- [CNT04] Jiling Cao, Tsugunori Nogura, and A. H. Tomita, *Countable compactness of hyperspaces and Ginsburg's questions*, Topology Appl. **144**(2004), no. 1-3, 133-145.
- [Eng89] Ryszard Engelking, *General Topology*, second ed., Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, Translated por Polish by the author.
- [Gin75] John Ginsburg, *Some results on the countable compactness and pseudocompactness of hyperspaces*, Canad. J. Math. **27**(1975), no. 6, 1392-1399.
- [GS75] Jhon Ginsbug, Victor Saks, *Some applications of ultrafilters in Topology*, Pacific. J. math. **57**(1975), no. 2, 403-418.
- [HHM06] Fernando Hernández, Michael Hrušák, Iván Martínez, *Pseudocompactness of hyperspaces*, enviado a Topology Appl. (2006).

- [Kee70] J. Keesling, *Normality and properties related to compactness in hyperespaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **24**(1970), 760-766.
- [Kee2] J. Keesling, *On equivalence of normality and compactness in hyperespaces*, Pacific J. Math. **33**(1970), no. 3, 657-667.
- [Kur66] K. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press, 1966.
- [Mic51] Ernest Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. **71**(1951), 152-182.
- [Vau84] Jerry E. Vaughan, *Countably Compact and Sequentially Compact Spaces*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 569-602.
- [Vel76] N. V. Veličko, *On spaces of closed subsets; English Translation*, Siberian Math. Journ. **16**(1975), 484-486.