



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

**“El Punto Crítico del Diagrama de Fase de la  
Cromodinámica Cuántica”**

TESIS

para obtener el grado de:

**Doctor en Ciencias en el Área de Física**

presenta:

**Maestra en Ciencias en el Área de Física**

**Enif Guadalupe Gutiérrez Guerrero**

Asesor:

Doctor en Física Adnan Bashir

Agosto de 2013

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Cromodinámica Cuántica . . . . .	5
1.2. Cromodinámica Cuántica a Temperatura y Potencial Químico Finitos: . . . . .	7
<b>2. Diagrama de QCD desde el Experimento</b>	<b>10</b>
2.1. Accesando al Diagrama de Fase . . . . .	10
2.2. Identificando las Señales del Plasma de Quarks y Gluones (QGP)	14
2.3. Colisionadores Relativistas . . . . .	16
2.3.1. Bevatrón-Bevelac . . . . .	17
2.3.2. Síncrotrón de gradiente alternativo AGS . . . . .	18
2.4. Colisionadores de Iones Pesados . . . . .	21
2.4.1. Colisionador de Iones Relativistas (RHIC) . . . . .	22
2.4.2. El Gran Colisionador de Hadrones (LHC) . . . . .	24
2.4.3. Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR) . . . . .	26
<b>3. Simetrías de QCD</b>	<b>29</b>
3.1. Simetría $SU_c(3)$ . . . . .	31
3.2. Simetrías $U(1)$ . . . . .	33
3.3. Simetría de Isospin . . . . .	33
3.4. Simetría Quiral . . . . .	34
3.4.1. Origen de las Masas . . . . .	38
3.4.2. Rompimiento Espontáneo de la Simetría Quiral . . . . .	40
<b>4. Resolución de las Ecuaciones de Schwinger Dyson (SDE)</b>	<b>42</b>
4.1. Acoplamientos en QED y QCD . . . . .	42
4.2. Propagador del Fermión . . . . .	44
4.2.1. Ecuaciones de Schwinger Dyson en QED . . . . .	45

4.3.	Propagador fotónico . . . . .	48
4.4.	El vértice completo fermión-fotón . . . . .	49
4.5.	Propagadores en QCD . . . . .	53
4.6.	QCD a Temperatura finita . . . . .	55
4.7.	Formalismo de tiempo imaginario . . . . .	56
4.8.	Propagador Fermiónico a Temperatura Finita . . . . .	57
4.9.	Propagador del Gluón . . . . .	59
4.10.	Masa de Debye . . . . .	61
<b>5.</b>	<b>Simetría Quiral y Desconfinamiento</b>	<b>63</b>
5.1.	Propagador del Quark y el Condensado . . . . .	63
5.2.	Diagrama de Fase de QCD . . . . .	71
5.3.	Reglas de suma a Energía Finita . . . . .	72
5.4.	Párametro de orden para el Desconfinamiento . . . . .	72
5.5.	Reglas de Suma a Energía Finita . . . . .	75
<b>6.</b>	<b>Diagrama de Fase de QCD a través de las Ecuaciones de Schwinger Dyson</b>	<b>80</b>
6.1.	Deducción de la Función de Masa . . . . .	80
6.2.	Condensado Fermiónico . . . . .	85
6.3.	Límite Quiral . . . . .	86
6.4.	Condensado Quiral para Quarks Ligeros . . . . .	87
6.5.	Diagrama de Fase de QCD a través de las Ecuaciones de Schwinger Dyson . . . . .	88
<b>7.</b>	<b>Discusiones y Conclusiones</b>	<b>96</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En esta tesis, tenemos como objetivo primordial, aportar información que sea valiosa para el conocimiento científico actual, sobre uno de los temas más importantes en las últimas décadas, como lo es el estudio del Diagrama de Fase de la Cromodinámica Cuántica (QCD). Muy pocos datos se conocen a este respecto, y solo en los límites de condiciones extremas de temperatura  $T$  y/o potencial químico  $\mu$ , es decir a  $T = 0$  y/o  $\mu = 0$ . Nosotros estudiamos el rango completo del diagrama de fase de QCD, así como las transiciones de fase que ahí ocurren, tales como la fase quiral y la fase de desconfinamiento. El fuerte acoplamiento que caracteriza a QCD en el régimen infrarrojo, hace imposible la utilización de métodos perturbativos, lo que ha dificultado el rápido avance de su entendimiento. En particular, en esta tesis usamos las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE), para tratar de descifrar el enigma del comportamiento de los parámetros de orden asociados a cada una de las transiciones de fase. Sin embargo, existen otros métodos de los cuales podemos aprovechar sus resultados, como es el caso de lattice a  $T$  finita pero con  $\mu = 0$ , esto debido a los problemas intrínsecos que posee en el caso de  $\mu$  finita. Por otro lado, tenemos la oportunidad de comparar los resultados que pueden obtenerse en los colisionadores de iones pesados, que entre sus objetivos tienen precisamente el estudio del diagrama de fase de QCD. Con esto, se le da un mayor realce en la convergencia del interés de la comunidad de físicos en este tipo de trabajos.

Sabedores de la complejidad del estudio que pretendemos realizar, hemos desarrollado este trabajo de tesis de manera que nos vaya dando las armas suficientes para llegar a nuestro objetivo final, el diagrama de fase de QCD. Con este fin, iniciamos presentando un breve resumen de lo que es QCD,

en sus distintas facetas, así como los fenómenos que exhibe en la región no perturbativa, que sirve como marco teórico para este trabajo de tesis.

## 1.1. Cromodinámica Cuántica

QCD es una teoría de norma, que exhibe la faceta perturbativa y la no perturbativa. Fue propuesta como una teoría para entender la estructura de los hadrones en términos de los grados de libertad más fundamentales, es decir, quarks y gluones.

1. **QCD perturbativa:** Su validez se limita a aquellos regímenes de altas energías en los que la constante de acoplamiento  $\alpha_{\text{QCD}}$ , tenga un valor pequeño. El enfoque de QCD perturbativo se basa en la *Libertad Asintótica* que significa que a cortas distancias, los quarks y los gluones son prácticamente libres [1]. QCD predice este comportamiento que fue descubierto por David Politzer, Frank Wilczek y David Gross y gracias al cual les fue concedido el Premio Nobel de Física del año 2004.
2. **QCD no perturbativa:** QCD es no perturbativa para energías del orden de las masas de los hadrones y menores, donde el valor del acoplamiento es suficientemente elevado como para anular todos los desarrollos perturbativos. Tal como hemos mencionado antes, el confinamiento y la generación dinámica de masas son dos fenómenos inherentemente no perturbativos en la naturaleza.
  - **Rompimiento Dinámico de la Simetría Quiral o Generación de las Masas:** A pesar de que en QCD quiral no existe ninguna escala de masa, ésta se genera mediante la dinámica fuerte de QCD. La generación dinámica de masas es responsable de dar grandes masas constituyentes a los quarks que se encuentran confinados dentro de los hadrones.
  - **Confinamiento:** Los objetos de color como los quarks y los gluones no son estados que se hayan observado, pues los estados físicos corresponden a estados sin color. El potencial entre los quarks estacionarios crece linealmente con la distancia, es decir que se requiere una cantidad infinita de energía para separar dos quarks. Por esta razón, los quarks permanecen unidos dentro de los hadrones [2].

Para el estudio de QCD no perturbativa, hay varios métodos. Brevemente discutiremos los mas relevantes para nosotros.

3. **QCD en la red:** Consiste en la utilización de poderosas computadoras, para simular la dinámica de QCD en un espacio-tiempo discretizado, en los nodos de un retículo. Esto introduce una escala natural  $1/a$  de momentos ultravioletas, donde  $a$ , es la distancia entre dos puntos vecinos de la red. Recuperamos QCD continua cuando hacemos  $a \rightarrow 0$ . Debemos tomar en cuenta además, que los momentos mayores del orden de aproximadamente  $1/a$ , no pueden ser representados en la red, y que el valor de  $a$  debe ser suficientemente pequeño, comparado con las distancias relevantes del problema. La otra escala natural serán claramente las dimensiones de la misma red. Sin embargo, el volumen de la red esta limitado por la velocidad y memoria de la computadora que se use.

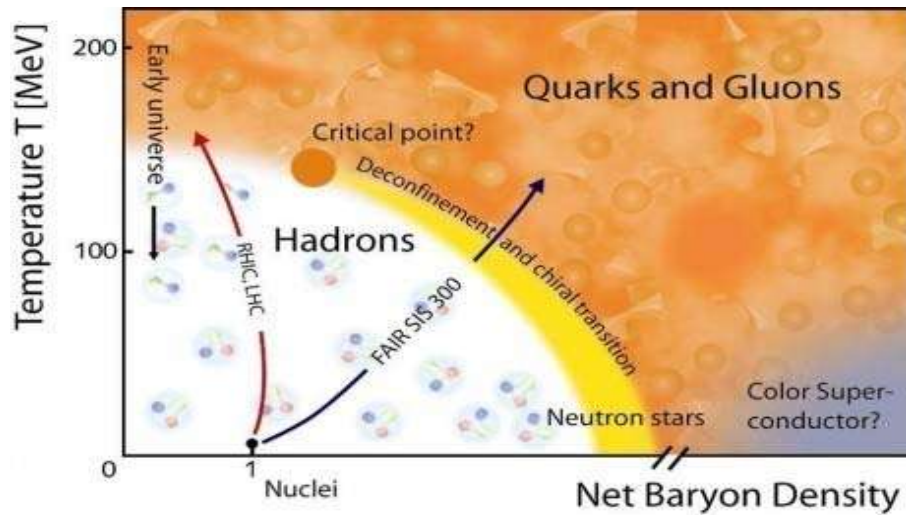


Figura 1.1: Diagrama de transición de fase de QCD

4. **Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE):** Debido a que la red tiene un volumen finito y la separación entre dos puntos cercanos de la red también es finita, es necesaria una extrapolación para conectar estos resultados con QCD continua. Por ejemplo, las masas de los quarks

ligeros son muy difíciles de tratar con Lattice, debido a que la longitud de onda de Compton asociada a éstas, es muy grande, logrando exceder las dimensiones de la red. Un método complementario para investigar los aspectos no perturbativos de QCD, son las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE) [3, 4], que son un conjunto de ecuaciones no lineales acopladas, que contienen la información completa de la teoría cuántica de campos de la que son derivadas. A diferencia del método de la red, estas ecuaciones nos permiten un estudio continuo de las teorías de norma y no hay ningún problema para incorporar el límite no masivo.

El ámbito no perturbativo de QCD se vuelve aún más interesante en la presencia de altas temperaturas y densidades nucleares.

## 1.2. Cromodinámica Cuántica a Temperatura y Potencial Químico Finitos:

QCD a temperatura finita  $T$  y/o potencial químico  $\mu$  es de fundamental importancia, dado que describe características relevantes de la física de partículas en el universo temprano, estrellas de neutrones y colisiones de iones pesados [5]. QCD es asintóticamente libre, lo cual significa que a  $T$  y/o  $\mu$  altos, los grados de libertad son los quarks y los gluones. A esta fase se le conoce como el plasma de quarks y gluones (QGP) y corresponde a la región donde las simetrías de QCD han sido restauradas.

1. **Diagrama de fase de QCD:** El diagrama de fase de QCD, se obtiene mediante la variación de  $T$ ,  $\mu$  como se muestra en la figura 1.1. El eje horizontal es la densidad neta bariónica. En el eje vertical esta la temperatura medida en MeV. Los detalles exactos de los diagramas de fase de materia nuclear son desconocidos, y todas las características cualitativas son predichas mediante QCD. Ésta es la razón por la cual los diagramas de fase de materia nuclear son llamados los diagramas de fase de QCD. Cuando se incrementa el valor de la  $T$  y/o  $\mu$  suceden las transiciones de fase que nos interesa estudiar, es decir: La restauración de la simetría quiral y el desconfinamiento.
  - **Restauración de la Simetría Quiral:** Si estamos en presencia de altas temperaturas y/o potenciales químicos, sucede que

la masa de los quarks, que se encontraba confinada dentro de los hadrones, que originalmente tenía una masa de alrededor de 300 MeV, baja de manera considerable hasta valores cercanos a los 5 MeV. Decimos entonces, que ocurrió una **transición quiral**, lo cual logra restaurar la simetría quiral, dado que la masa de los quarks es aproximadamente cero. En el diagrama de fase 1.1, la región correspondiente a la restauración de la simetría quiral ocupa la parte sombreada en naranja.

- **Desconfinamiento:** El aumento de la temperatura y/o densidad, logran que eventualmente el confinamiento se rompa, liberando los quarks y los gluones de su fuerte acoplamiento. Este fenómeno recibe el nombre de **desconfinamiento de hadrones**, que da origen al plasma del quark gluón. El rango de densidades y temperaturas donde la fase confinada prevalece, esta mostrada en la parte luminosa localizada en la parte inferior izquierda del diagrama de fase. El resto del diagrama corresponde a la fase desconfinada. El desconfinamiento a altas densidades se cree que sucede en el interior de las estrellas de neutrones. Las mismas transiciones por calentamiento nuclear se logra en colisiones de iones pesados en el Colisionador Relativista de Iones Pesados (RHIC) y en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC). Una de las preguntas claves en el estudio del diagrama de fase es si la transición de la fase quiral y la transición de fase confinada-desconfinada son simultáneas

2. **Lattice y Modelos de QCD:** A temperatura finita  $T$ , y potencial químico  $\mu = 0$ , Lattice provee pruebas, de que ambas transiciones que ocurren en el diagrama de fase, suceden a temperaturas críticas cercanas, en el rango de  $170\text{MeV} \lesssim T_c \lesssim 200\text{MeV}$  (tal vez coincidentes), para masas desnudas finitas de los quarks [6, 7, 8]. La situación es mucho menos clara, cuando los dos ingredientes  $T$  y  $\mu$  son finitos. No podemos usar Lattice para  $\mu \neq 0$ , dado que el determinante fermiónico asociado es complejo, y entonces los métodos estándares de Monte Carlo fallan. Sin embargo, estas técnicas se pueden adaptar para extraer parte de la información acerca del diagrama de fase de QCD a  $\mu \neq 0$  [9], aunque los resultados no son precisos. Si comparamos las conclusiones de las simulaciones de Monte Carlo y los cálculos de los modelos con y sin el lazo de Polyakov (o variantes) parecen estar en conflicto. El primero da valores más pequeños (grandes) para el *punto crítico* del

potencial químico(temperatura). La situación incluso empeora, si consideramos que usando el método de potencial químico imaginario, que es un método bien posicionado en el estudio de potenciales químicos  $\mu$  no muy grandes, se encuentra que la región de transición de fase quiral se contrae cuando aumentamos  $\mu$  y la transición se debilita, sugiriendo que no hay un punto crítico para  $\mu \lesssim 500$  MeV [10]. Para descubrir la verdad sobre este comportamiento, se necesita analizar métodos alternativos del diagrama de QCD. Una posibilidad es estudiar variables que describan el desconfinamiento y que no sean el lazo de Polyakov.

3. **Ecuaciones de Schwinger Dyson (SDE)** : Las ecuaciones fundamentales de QCD, son las ecuaciones de Schwinger Dyson (SDE), no tienen restricciones para acceder a toda la región concerniente al diagrama de fase de QCD, dado que su derivación no depende de la pequeñez de la magnitud de la interacción. Estas ecuaciones nos proporcionan un marco de referencia natural para explorar los rincones del diagrama de fase de QCD con facilidad. Además las masas desnudas de los quarks pueden ser tan pequeñas como se requiera, incluso se puede estudiar la simetría quiral si se desea [11]. La dependencia de la temperatura de las SDE, se logra reemplazando la primera componente del momento del quark por las frecuencias de Matsubara. En tanto que la introducción del potencial químico tan solo requiere modificar el término que incluye las frecuencias de Matsubara con un término adicional. Una vez con todos los ingredientes, podemos resolver cada una de estas ecuaciones (una por cada frecuencia de Matsubara), para obtener el propagador del quark, que nos servirá como llave para encontrar los dos parámetros de orden, que necesitaremos para describir las transiciones que ocurren en el diagrama de fase de QCD, la existencia del punto crítico, su localización así como el punto final de las líneas de transición de la fase quiral y de la fase de desconfinamiento.

Los resultados de Lattice (exactos) y los de SDE (no exactos), se complementan muy bien. Aún así se desconoce con exactitud el diagrama de fase de QCD en toda la región de  $\mu, T$ . Por ello se espera que los colisionadores de iones pesados puedan contribuir a entender estos fenómenos. En el próximo capítulo, hablaremos acerca de la forma en la que los experimentales pueden acceder al diagrama de fase y hacer conclusiones sobre la posible existencia de un punto crítico y las fronteras del QGP.

# Capítulo 2

## Diagrama de QCD desde el Experimento

Los colisionadores de iones pesados, se encargan del estudio de la materia nuclear, bajo condiciones extremas de densidad y temperatura. En condiciones controladas en laboratorio, se puede encausar la temperatura de las colisiones, cambiando la energía de los haces, así como su densidad. De manera que se puede tener acceso al diagrama de fase de QCD, variando estos dos parámetros. Si se desea aumentar la temperatura, se eleva la energía de los haces que colisionan, en tanto que si deseamos modificar el potencial químico, debemos variar la densidad de partículas que se envían en cada haz.

### 2.1. Accesando al Diagrama de Fase

Si definimos el término *Chemical Freeze Out*, para denotar un estado donde las razones entre partículas ( $\pi$ ,  $K$ ,  $p$ ,  $\Lambda$ ,  $K_s^0$ ,  $\phi$ ) permanecen fijas, la manera de obtenerlo, consiste en medir de forma experimental, las razones entre las diferentes partículas que se producen durante las colisiones. De los resultados obtenidos en los experimentos, podemos entender la física que esta rigiendo todo el sistema. Si la fuente de partículas envía un haz con muy alta densidad y energía, existirá una temperatura muy grande, así que después de la colisión, se genera un medio denso formado por las partículas que conforme comienza a expandirse se enfría. Cuando la expansión alcanza cierto punto, cesan las colisiones inelásticas, es decir, que ya no hay suficiente energía para cambiar la naturaleza de los hadrones. Es entonces, que el número

de partículas de cada tipo ya no cambian conforme el sistema evoluciona. Por lo tanto, cuando las proporciones entre cualesquiera dos partículas se encuentran estáticas, diremos que hemos alcanzado el *chemical freeze out*.

Podemos extraer dos parámetros asociados: La temperatura concerniente al *chemical freeze out* ( $T_{ch}$ ) y el potencial químico bariónico ( $\mu_B$ ), que mide la densidad bariónica. En la figura (2.1), se cambia el rango de las energías de los haces y se observa cual es la variación de los valores de ( $T_{ch}, \mu_B$ ), modificando la centralidad de la colisión. De esta gráfica, observamos que cuando las energías son pequeñas, el valor obtenido para la ( $T_{ch}, \mu_B$ ) muestra una variación notoria conforme cambia la centralidad. De hecho, ambos valores, decrecen conforme cambiamos de colisiones centrales a periféricas. En términos simples, cuando el gas hadrónico (que consiste de quarks ligeros u y d y/o quarks extraños) alcanza el equilibrio, la abundancia de las partículas, esta descrita por el potencial químico y por la temperatura. De manera que la información acerca de estos parámetros, se obtiene de las razones entre las partículas, directamente medidas en el experimento. La gráfica (2.1) nos indica, que el papel que juega tanto la temperatura como el potencial químico, es contribuir a la restauración de la simetría quiral y eventualmente lograr el desconfinamiento, que es justamente el comportamiento que se ha encontrado de forma teórica [12], [13]. Visualmente esto es aún mas claro si comparamos el comportamiento descrito con el mostrado en la figura (1.1). Éste argumento muestra la conexión con el hecho de que  $T_{ch}$  es muy cercano al valor esperado para la transición de fase de QCD dado por lattice, y que es de aproximadamente 170 MeV.

Cuando la temperatura ha disminuido de manera notoria, la energía de las partículas desciende también, provocando que las interacciones disminuyan, hasta llegar a un punto donde son nulas. A esta temperatura se le denomina *Kinetic Freeze Out Temperature* ( $T_{kin}$ ), que es el punto en el que las colisiones elásticas se detienen y los momentos de las partículas permanecen fijos. Resulta evidente que ( $T_{kin} < T_{ch}$ ), ver la figura (2.2).

El modelo estadístico térmico, ha sido muy exitoso, en describir las razones entre las partículas medidas en las colisiones de iones pesados, hasta energías superiores a las que se pueden alcanzar en RHIC de alrededor de los 200 GeV. Este modelo se basa en la obtención de la temperatura del chemical freeze out. En particular, STAR (llamado así por sus siglas en inglés, Solenoidal Tracker at RHIC), tiene datos de gran precisión además de numerosos, y agreguemos también su enorme capacidad para detectar las diferentes partículas producidas. Esto hace de STAR una de las mejores ar-

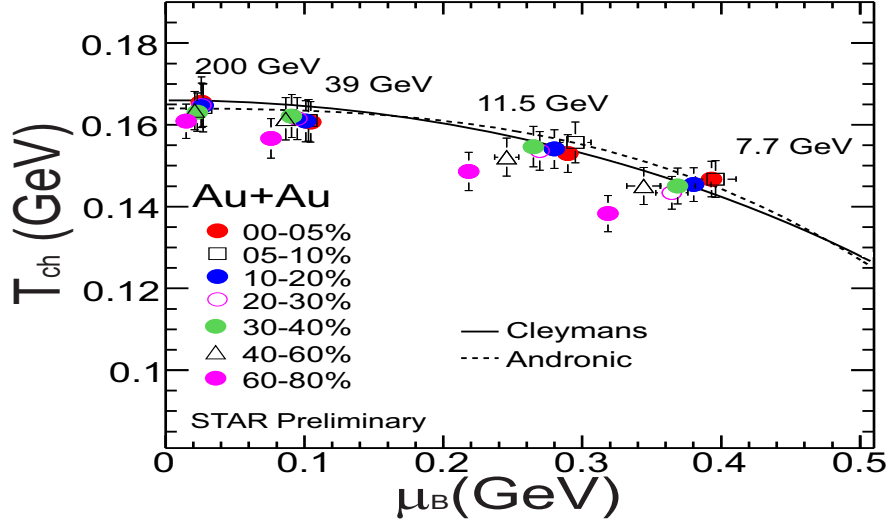


Figura 2.1: La posible localización del punto crítico usando el rango del programa Beam Energy Scan (BES) de RHIC. Los círculos en negro son cálculos experimentales de las colisiones de iones pesados, basados en ajustes estadísticos, para el chemical freeze out. Las curvas en amarillo, corresponden a las trayectorias estimadas de las posibles energías de colisión en RHIC.

mas que tenemos en la actualidad para lograr un entendimiento cabal del diagrama de fase. Una descripción detallada de la forma en que funciona STAR se encuentra en las referencias [15],[16]. En la figura (2.2), podemos apreciar el diagrama de fase de QCD, que se ha construido usando el modelo estadístico. Que si bien es cierto, puede aportar información mas precisa sobre la localización del *punto crítico* (que es el punto que une dos transiciones de distinto orden), que tiene lugar para un valor finito de  $\mu_B$  y  $T$ , es posible que este perdiendo información sobre el diagrama de fase de QCD mas allá de este punto. Por esta razón, uno de los retos principales del Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) consiste en la exploración del diagrama de fase de QCD a temperatura finita  $T$  y potencial químico  $\mu_B$ . Es importante entender que las lecturas que se tienen de las partículas, se toman al final de la evolución del sistema, lo cuál complica obtener información acerca de las etapas tempranas, por esta razón es necesario obtener observables asociadas a estas primeras etapas que sobreviven las interacciones hasta la etapa final. Para hacer una conexión entre los datos experimentales y los cálculos teóricos, se

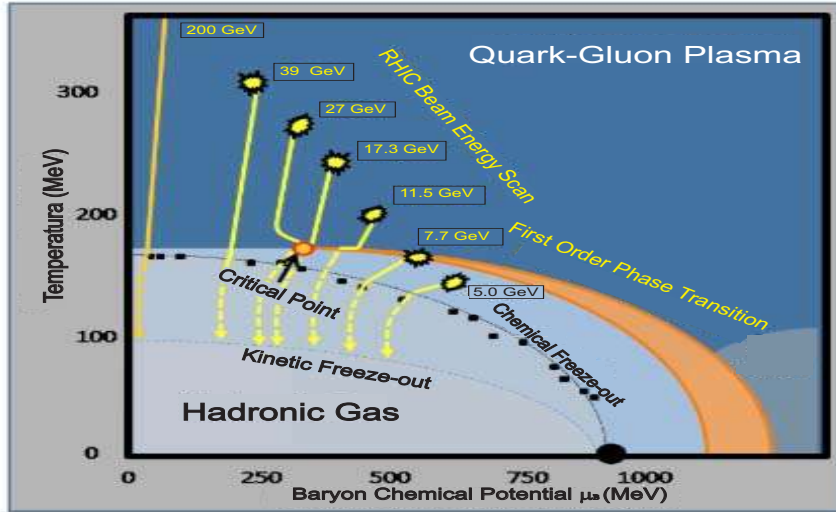


Figura 2.2: Variación de la temperatura ( $T_{ch}, \mu_B$ ) cambiando la centralidad de las colisiones a distintas energías. Donde las líneas sólidas corresponden a cálculos teóricos de las referencias [12],[13]. Esta gráfica fue tomada de la referencia [14].

requiere de observables que puedan medirse experimentalmente y también puedan ser calculadas en QCD. Las cantidades conservadas forman este conjunto de observables accesibles en ambos esquemas. Con esta finalidad, los detectores están diseñados para realizar un seguimiento de las cantidades conservadas, como los números bariónicos netos, las cargas eléctricas y la extrañeza [17], [18]. La medición de fluctuaciones de cantidades conservadas, juegan un papel muy importante en la búsqueda del comportamiento crítico y en la exploración del diagrama de fase de QCD [19], y en particular en la búsqueda de un punto crítico.

Durante las colisiones de iones pesados, donde los núcleos están interactuando, gran cantidad de energía se deposita en el medio haciéndolo denso y caliente, pero conforme el sistema evoluciona se va enfriando. Pero si la expansión es muy rápida como para que las fluctuaciones locales sigan la termodinámica promedio del sistema, tiene sentido estudiar fluctuaciones locales de cantidades conservadas tales como el número bariónico, la carga, y la extrañeza. La señal definitiva de la existencia del punto crítico es justamente un incremento en estas fluctuaciones [20]. Por ejemplo, Lattice QCD [21]

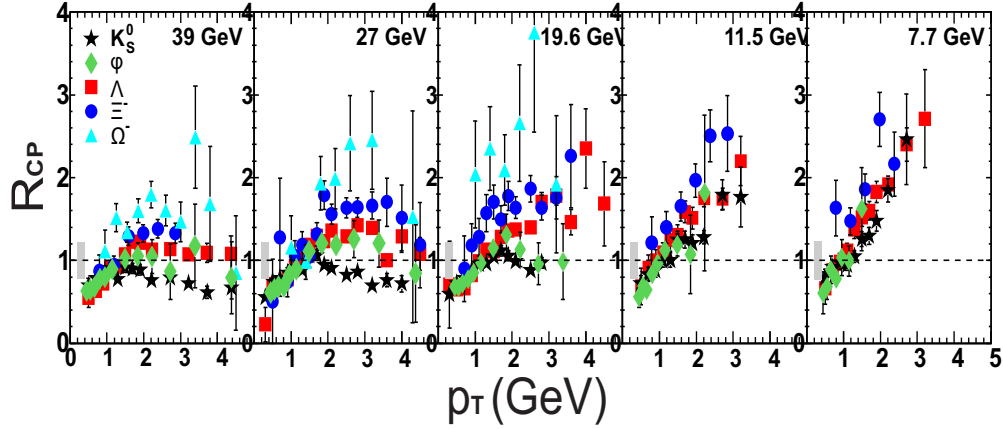


Figura 2.3: El factor  $R_{cp}$  para hadrones extraños  $K_s^0$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi^-$ ,  $\Omega^-$  a  $R_{cp}(0 - 10\%/40 - 60\%)$  para el meson  $\phi$ , en colisiones  $A_u + A_u$ . Está gráfica fue tomada de la referencia [14].

muestra la existencia de enormes fluctuaciones en las derivadas de las funciones asociadas al número bariónico, a la carga y a la extrañeza con respecto de la temperatura del sistema. Se espera, que justamente en el punto crítico, estas fluctuaciones diverjan. Las fluctuaciones de cantidades conservadas que se generan durante las colisiones de iones pesados, pueden reflejar las condiciones térmicas del medio en expansión (que se crea durante las colisiones), conforme se enfría y se diluye lo suficiente para que los hadrones se formen de nuevo. Es importante localizar las fronteras  $(\mu_B, T)$  mas allá de las cuáles se crea el plasma de quarks gluones, lo cuál tiene relevancia en el contexto del entendimiento de los primeros microsegundos de la existencia de nuestro universo.

## 2.2. Identificando las Señales del Plasma de Quarks y Gluones (QGP)

Dado que la única manera de estudiar experimentalmente el diagrama de fase de QCD, consiste en variar la energía de los haces y/o la densidad de los haces de iones pesados, Solenoidal Tracker at RHIC (STAR) se ha encargado del estudio de colisiones de  $A_u + A_u$  a distintas energías que van desde 7.7,

11.5, 17.3, 27 a 39 GeV, vea la figura (2.2). Estas energías de colisión, permiten cubrir un amplio rango de potencial químico que va de 100 – 400 MeV en el diagrama de fase de QCD. Experimentalmente, no es posible la observación directa del QGP, sin embargo, existen varias observables que pueden servirnos como evidencia de su existencia:

- **Aumento de la Extrañeza:** Esta es una de la señales mas claras. Recordemos, que en colisiones de iones pesados, donde solo participan protones y neutrones (que están compuestos por quarks up ( $u$ ) y down ( $d$ )), éstas son las únicas partículas que tenemos antes de la colisión y por supuesto no contienen quarks strange ( $s$ ). En consecuencia, cada partícula que contiene quarks  $s$ , fué producida durante la colisión [22]. Los quarks  $s$  se forman mediante procesos de producción de pares, donde se forman partículas elementales junto con sus antipartículas. El mecanismo dominante de su producción involucra gluones ( $gg \rightarrow s\bar{s}$ ). En el caso donde existan gluones en abundancia, nos conducirá a un aumento significativo de la producción de quarks strange. De esta forma, de manera intuitiva, podemos entender que en la presencia del plasma de quarks y gluones, existirá una gran cantidad de quarks strange comparados con los que se producen en colisiones protón antiprotón.
- **Factor de Modificación Nuclear ( $R_{cp}$ ):** Este es el factor que mide la supresión hadrónica, se mide a través de la razón entre los datos centrales y los periféricos, escalados con el número promedio de colisiones de cada tipo ( $N_b$ ),

$$R_{cp} = \frac{\text{Yield}^{\text{central}} / \langle N_{\text{centrales}}^{\text{colisiones}} \rangle}{\text{Yield}^{\text{periférico}} / \langle N_{\text{periféricas}}^{\text{colisiones}} \rangle}. \quad (2.1)$$

donde  $N_{\text{centrales}}^{\text{colisiones}}$  y  $N_{\text{periféricas}}^{\text{colisiones}}$  son el número de colisiones centrales y periféricas, respectivamente. De la gráfica (2.1) se lee que las variables termodinámicas asociadas a las colisiones centrales, son notoriamente más grandes que las asociadas a las colisiones periféricas, para energías pequeñas. En el caso en donde las energías son grandes, las variables asociadas a las colisiones centrales y periféricas son prácticamente iguales, por lo cuál esperamos que si calculamos la razón de ambas, obtengamos un valor muy próximo a uno. Sin embargo, cuando vamos al experimento, es sorprendente encontrar que  $R_{cp} < 1$  para momentos transversos grandes ( $p_T$ ). Ésto podríamos atribuirlo a la pérdida

de energía en un medio denso, que podemos identificar con el plasma de quarks y gluones. En ausencia de este medio denso, no esperamos que exista una supresión para  $R_{cp}$  a grandes momentos. En la figura (2.3), se muestra el factor de modificación nuclear para varios hadrones extraños  $K_s^0$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi^-$ ,  $\Omega^-$  en colisiones  $A_u + A_u$ , en un rango de energías que van desde 7.7–39 GeV. De esta gráfica podemos observar que para valores de  $p_T > 2\text{GeV}$ , el valor de modificación nuclear para el kaón  $R_{cp}(K_s^0)$  es menor a uno para una energía de 39 GeV, pero conforme disminuimos la energía del haz, el valor de  $R_{cp}$  aumenta (este comportamiento se repite para cada una del resto de las partículas). Para un valor menor de 19.6 GeV,  $R_{cp} > 1$ , indicando que el efecto de la pérdida de energía debida al medio se ha cancelado. Una manera de explicar esto, es precisamente, que estamos en un régimen de energías suficientemente pequeñas, como para que se produzca el plasma de quarks y gluones.

Los colisionadores de iones pesados, nos aportan información clave en el entendimiento del diagrama de fase de QCD. En las siguientes secciones de este capítulo, nos enfocaremos en dar un breve repaso a través de la historia de los principales colisionadores hasta llegar a la actualidad, mencionando en cada caso las principales contribuciones.

## 2.3. Colisionadores Relativistas

A altas temperaturas y/o densidades, la materia nuclear normal sufre una transición de fase a un nuevo estado de materia. Esta observación condujo en un principio a una intensa búsqueda de una materia muy caliente y densa, llamada plasma del quark gluón (QGP). Actualmente, existen varios experimentos que colisionan núcleos a energías relativistas, que intentan recrear estas condiciones de alta temperatura y densidad en el laboratorio. La búsqueda y estudio del QGP de manera experimental, comenzó a principios de los ochentas con la aceleración de haces de protones de oro en el Bevelac (1975-1993) en Berkeley, Estados Unidos. Hablaremos de esto en mas detalle en la siguiente subsección.

### 2.3.1. Bevatrón-Bevelac

El Bevatrón fué uno de los primeros sincrotrones que aceleraban protones. Su diseño comenzó desde 1947, bajo la dirección de E.O. Lawrence. Se construyó en las instalaciones del Laboratorio Nacional Lawrence en Berkeley durante 5 años y comenzó operaciones en la primavera de 1952. Se le conoce con este nombre debido a su habilidad de producir energías de miles de millones de  $eV$  (**B**illions of **eV** **S**ynchro**t**ron). El Bevatrón aceleraba protones de hidrógeno a una energía de  $6.2 \times 10^9$  eV, la mayor de las energías que hasta ese momento se habían alcanzado. Consistía en un círculo con un radio de 18.2m, que definía la trayectoria de las partículas que participaban en las colisiones. El principal componente del Bevatrón era un imán con forma circular de 15.24 m y un peso ligeramente menor a las 10,000 toneladas. Su única función era guiar los protones que eran acelerados a lo largo de la órbita circular cerrada. El haz de protones que se insertaba en el Bevatrón tenía una energía de 10 MeV, después de su inserción en el acelerador, los protones circulaban a razón de 360,000 revoluciones por segundo. Cuando se alcanza la mas alta energía, se coloca un objetivo (generalmente láminas de algún metal), justo en medio de la órbita circular, este proceso duraba 1/10 seg y se logró utilizando dispositivos magnéticos. En muchos de los experimentos, el centro de interés está en las partículas secundarias que se generán después de la colisión. Particularmente, el Bevatrón ganó su lugar en la historia de los colisionadores de iones pesados, debido a que alcanzaba una energía de  $6.2 \times 10^9$  eV, suficiente para realizar cambios en la naturaleza de los hadrones . Lo cuál lo hacía el instrumento ideal para resolver el enigma de la época, consistente en la sospecha de que por cada partícula, existía una antipartícula. Por ejemplo, en 1932, Carl D. Anderson descubrió el positrón que se considera la primer evidencia de la existencia de antimateria. Si acaso existía un antiprotón, la forma mas simple de probarlo sería justo con protones extraídos de hidrogeno (puesto que esta compuesto tan solo por un protón y un electrón). En 1955, Emilio Segré y Owen Chamberlain, descubren una partícula idéntica al protón, pero con carga negativa, que consistía de dos anti quarks up y un anti down ( $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$ ), es decir, habían encontrado el antiprotón. Éste descubrimiento les mereció ganar el el premio nobel en 1959, comenzando así una afanosa búsqueda por la antimateria. La siguiente partícula que se prentendería encontrar sería el antineutrón  $\bar{n}$ , que es la anti partícula de neutrón, que esta compuesto por un anti quark up y dos antiquarks down ( $\bar{u}\bar{d}\bar{d}$ ). Tiene la misma masa que el neutrón y ninguna

carga eléctrica neta, pero número bariónico  $N_B = (N_q - N_{\bar{q}})/3 = -1$ , debido a que esta formado por antiquarks. Su detección no es tan evidente, debido al hecho de que no posee carga eléctrica. Fué descubierto por Bruce Cork en 1956. Se logró haciendo pasar un haz de antiprotones através de la materia ordinaria. Recordemos que los antineutrones decaen en antiprotones, positrones y neutrinos.

En 1971 se unió el Bevatrón a un acelerador lineal llamado SuperHILAC que funcionaba como un inyector de iones pesados [23], dicha combinación fue concebida por Albert Ghiorso, quien lo llamó Bevelac [24] y era capaz de acelerar cualquier núcleo existente en la tabla periódica a energías relativistas. En 1973 se propuso la posibilidad de creación de materia nuclear densa y caliente mediante la colisión de núcleos [25]. Para entonces, el Bevelac era el colisionador mas poderoso, así que si se iba a producir materia en un nuevo rango de temperatura y densidad eso sucedería en el Laboratorio Nacional Lawrence de Berkeley. En 1984 se obtuvieron las primeras pruebas de que un acelerador de partículas podía comprimir la materia nuclear en un estado de alta densidad y temperatura, indicando el camino de la formación de plasma de quarks y gluones.

Sin embargo, la nueva generación de colisionadores era cada vez mas potente, con lo cuál se requería de cada vez magnetos mas pequeños y baratos en el Sincrotron de gradiente alternativo (AGS) en 1960, que alcanzaban una energía de hasta 30 GeV. Por esta razón fue desmantelado en 1993. Gracias a los estudios realizados en Bevelac se logró dar los primeros pasos en el entendimiento de lo que es el comportamiento de la materia nuclear densa y caliente. Este estudio sería mas tarde desarrollado por aceleradores más potentes.

### 2.3.2. Sincrotón de gradiente alternativo AGS

Ante la necesidad de acceder a regiones donde la temperatura grande, es necesario aumentar cada vez más la energía de las colisiones. Como respuesta, surge un nuevo mecanismo denominado *gradiente alternativo ó enfoque fuerte*, que fué desarrollado en 1959 por Courant, Livingston y Snyder en el Laboratorio Nacional de Brookhaven y de manera independiente, dos años antes por Christofilos, un ingeniero eléctrico griego (que aunque nunca publicó sus resultados si los patento).

En un sincrotón se define el parámetro  $n = (-RdH/HdR)$ , con  $R$  el radió del sincrotrón y  $H$  la intensidad del campo magnético. Hablamos de

un *enfoque vertical* del haz, si  $n > 0$  y de un *enfoque horizontal* si  $n < 1$ . Para  $1 > n > 0$ , el enfoque tiene lugar en ambos planos, pero las fuerzas de enfoque son débiles, produciéndose grandes oscilaciones de las partículas alrededor de la órbita de equilibrio. A medida que el radio de la máquina aumenta (a fin de obtener mayores energías), aumenta también la amplitud de las oscilaciones de las partículas. El tamaño de la apertura del imán requerido, para contener el haz oscilante debe aumentarse también. Esto es un problema, puesto que entre mayor sea la apertura del imán mayor será también su costo. Con la intención de optimizar el mecanismo de los colisionadores, se concluyó que se debía de realizar enfoques fuertes en todo momento. Ésto se logra haciendo que las partículas del haz pasen alternativamente, a través de sectores del imán que poseen elevados valores positivos y negativos de  $n$ . Este principio se aplica tanto al plano horizontal, donde los valores elevados negativos de  $n$  son fuertemente enfocantes y los valores positivos elevados de  $n$  son fuertemente desenfocentes, como al plano vertical, donde el efecto se produce a la inversa. El principio del AGS, reduce de manera considerable las oscilaciones en el haz, haciendo factible el uso de un imán de menor apertura, más económicos y al mismo tiempo de mayor energía.

El AGS se convirtió en el acelerador mas importante cuando alcanzó la energía máxima de 33 GeV, el 29 de julio de 1960. El AGS consiguió 3 premios Nobel.

- **Descubrimiento del quark charm:** En 1974, dos resonancias angostas, llamadas  $\psi$  y  $\psi'$ , fueron observadas en Centro de Acelerador Lineal de Stanford (SLAC), en colisiones  $e^+e^-$  a 3.1 y 3.7 GeV. Al mismo tiempo, otra resonancia llamada  $J$ , fué descubierta en las colisiones de protón protón en Laboratorio de Brookhaven. Ambas resonancias estaban asociadas a la misma partícula, cuya existencia no podía ser explicada en términos de los tres sabores conocidos de los quarks ( $u, d, s$ ). Así que se interpreto como un mesón, que consistía de un nuevo quark, el quark charm. Éste fué un gran avance para el modelo Estándar dado que su existencia había sido propuesta varios años antes por Sheldon Glashow, John Iliopoulos y Luciano Maiani en 1970 [26]. El grupo de SLAC liderado por B. Richter y el de Brookhaven liderado por S. Ting dieron la noticia el 11 de Noviembre de 1974 y a ambos se les concedió el premio Nobel en 1976. La primer partícula que contenía quarks charm fué el el mesón  $J/\psi$ .
- **Violación de la Simetría CP:** La simetría  $CP$  esta basada en la

simetría  $C$ , que es la conjugación de carga que transforma una partícula en su antipartícula, y la simetría  $P$  que crea una imagen en el espejo de un sistema físico. Entonces, la simetría  $CP$  es el cumplimiento de estas dos simetrías. Su violación podría explicar porque existe más materia que antimateria en nuestro Universo. En 1964 James W. Cronin y Val L. Fitch, de la Universidad de Princeton, propusieron usar el acelerador AGS de Brookhaven, para verificar el cumplimiento de la simetría  $CP$ , para ello, eligieron mesones  $K$  neutros, que son fáciles de obtener en las colisiones entre un haz de protones y una lámina de metal estacionaria. Existen dos mesones neutros ( $K_L^0$ ) y ( $K_S^0$ ), los subíndices  $L, S$  hacen referencia a la vida media larga y corta respectivamente. Las paridades de ( $K_L^0$ ) y ( $K_S^0$ ) son  $CP = -1$  y  $CP = 1$ , por lo que en el experimento se pretendía demostrar de en millones de colisiones los mesones de vida corta  $K$  siempre decaen en dos mesones  $\pi$ , pero jamás los kaones de vida larga. Sorprendentemente lo que encontraron fué que en ocasiones los kaones de vida larga decaían en dos mesones  $\pi$ , que poseen  $CP = -1$ . Encontrando así un ejemplo de una violación  $CP$ , se había encontrado un defecto de la creencia de que el universo es simétrico. James Cronin y Val Fitch, recibieron el premio Nobel por su descubrimiento en 1980.

- **Descubrimiento del muón neutrino ( $\nu_\mu$ ):** En 1962, cuando tan solo se sabía de la existencia del electrón-neutrino, la comunidad científica se preguntaba si sería posible encontrar más de estas partículas tipo fantasma, que pasaban através de todo. Fué entonces que en el AGS dió respuesta a la interrogante. El experimento usaba un haz muy energético para producir piones en abundancia, los cuáles decaían en muones y neutrinos, pero solo éstas últimas podían atravesar las paredes de los detectores de neón. El impacto de los neutrinos sobre las placas de aluminio producía un centelleo, que podía ser detectado y fotografiado. De esta manera se encontro la existencia del muón neutrino. En 1980, se les concedió el premio Nobel a Leon Lederman, Melvin Schwartz y Jack Steinberger por este descubrimiento.

Con el surgimiento de RHIC, el AGS dejo de ser un colisionador competente para el descubrimiento de nueva física hadrónica. En la actualidad, AGS sirve como inyector para el colisionador de iones relativistas de Brookhaven.

## 2.4. Colisionadores de Iones Pesados

Una de las grandes interrogantes desde el inicio de la humanidad, consiste en tratar de explicar el origen de nuestro universo. Hasta el momento, la teoría más aceptada es la *Teoría del Big Bang*, a penas unos microsegundos después de esto, se ha estudiado afanosamente la posibilidad de una fase de materia consistente en quarks y gluones, que estaba presente cuando las temperaturas eran tan elevadas que impedían la formación de partículas materiales como los protones y neutrones. Conforme el universo se expandió y se enfrió, los quarks y gluones permanecieron juntos de manera natural, y desde ese momento permanecieron juntos en hadrones (singuletes de color), por los siguientes 13 billones de años. Para entender la magnitud de las temperaturas que requerimos, para lograr recrear artificialmente esta sopa caliente de quarks y gluones de valores superiores a los 100 MeV, recordemos que  $1 GeV = 1000 MeV \approx m_N$  la masa del nucleón, y además

$$100 MeV \equiv 116 \times 10^{10} \text{ }^\circ K \approx 10^{12} \text{ }^\circ C. \quad (2.2)$$

Para apreciar la magnitud de esta temperatura, comparemos con la temperatura del centro del sol  $T = 11 \times 10^6 \text{ }^\circ K$ , es decir, que nuestra escala de interés es 100000 veces más grande. Para alcanzar dichas temperaturas debemos tomar en cuenta algunos hechos teóricos. Cuando los núcleos atómicos, generalmente llamados iones pesados, colisionan a altas energías, de manera que la energía cinética es muy alta, se produce una materia hadrónica muy densa ( $\rho \approx 10^{15} \text{ gr cm}^{-3}$ ). Este tipo de reacciones son llamadas ultrarelativistas, colisiones relativistas de iones pesados, o colisiones nucleares. Este tipo de materia, debió existir en el universo temprano unos  $10 \mu s$  después del Big Bang. Las condiciones extremas de temperatura y densidad pueden reproducirse de manera experimental en un ambiente controlado. Esta recreación nos dará las pistas que necesitamos en el entendimiento de la física del universo temprano. Los experimentos requieren en principio de un volumen infinito de materia, por esta razón, es necesario el estudio de colisiones de iones de los núcleos más pesados y no de aquellos más ligeros, aunque estos últimos sean más fáciles de obtener y de estudiar. De los elementos químicos más usados en los colisionadores, están el oro ( $A_u$ ) (con 79 protones) y el plomo ( $P_b$ ) (con 82 protones), porque son los elementos pesados más comunes, puesto que su núcleo está densamente poblado por partículas. Si las condiciones de la colisión son adecuadas, los quarks y gluones son liberados de su confinamiento en los protones y neutrones. Justo después de las colisiones, se

forman miles de partículas. Cada una de éstas, proporciona una pista sobre lo que ocurrió dentro de la zona de colisión, que se producen miles de veces por segundo.

### 2.4.1. Colisionador de Iones Relativistas (RHIC)

Uno de los colisionadores que mayor impacto ha tenido, en el esclarecimiento de la física que ocurre en la presencia de condiciones extremas de temperatura, ha sido sin lugar a duda, el acelerador relativista de iones pesados RHIC. Se encuentra localizado en el Laboratorio Nacional Brookhaven en New York y fué el primer colisionador que logró hacer chocar iones pesados, de manera controlada. Usa primordialmente, iones de oro que ubica en dos haces que colisionan frontalmente, cuando están viajando a casi la velocidad de la luz. Los dos haces viajan en direcciones opuestas alrededor del anillo de RHIC de 2.4 kilómetros, en dos carriles antiparalelos con seis intersecciones. Cuando los haces colisionan a velocidades tan altas ocurren cosas fascinantes. RHIC posee 1740 imanes super conductores a temperaturas de 4 grados Kelvin ( $-269^{\circ}\text{C}$ ). Tiene dos detectores pequeños, *Broad Range Hadron Magnetic Spectrometers* (BRAHMS) y (PHOBOS), y dos detectores grandes, *Pioneering High Energy Nuclear Interaction Experiment* (PHENIX) y *Solenoidal Track at RHIC* (STAR). El detector BRAHMS se encarga de estudiar las propiedades de la materia nuclear excitada, que se forma durante las reacciones de las colisiones de iones pesados. La primera vez que tomó datos fué en 2000. El detector PHOBOS se basa en la premisa de que las colisiones interesantes son raras, pero cuando ocurren podemos detectar nueva física. Por esta razón este detector se diseñó para analizar un gran número de colisiones de iones de oro. Esta formado de muchos detectores de silicón que rodean la región de interacción y mediante los cuales los físicos son capaces de contar el número total de partículas producidas y su distribución. Después se analizan los resultados en busca de eventos inusuales, como fluctuaciones. Esto último debido a que experimentalmente se puede reconocer una transición de fase, mediante las fluctuaciones en los eventos de un observable y las razones de éstas. Con esta información es posible detectar y estudiar una transición de fase, que puede ocurrir entre el plasma del quark gluón y la materia ordinaria. El detector PHENIX, registra muchos tipos distintos de partículas que surgen en las colisiones. Los fotones y los leptones (electrones y muones) no son afectados por la fuerza nuclear fuerte, que mantiene a los quarks y a los gluones dentro de los hadrones. Esto implica que este tipo de

partículas que surgen en la colisión no sufren alguna modificación. Es decir, que los fotones y los leptones poseen información inalterada de la colisión. Por ejemplo, los fotones nos dan información acerca de la temperatura de la colisión. El detector STAR se especializa en las miles de partículas que se producen en cada colisión en RHIC, es un detector masivo que pesa 1,200 toneladas y busca señales del plasma del quark gluón que es el principal objetivo de RHIC. Con su entendimiento, podríamos conocer mejor el universo unos momentos después del Big Bang, en el momento donde las simetrías (o la falta de las mismas) de todo nuestro entorno aparecieron por primera vez. A diferencia de otros experimentos físicos donde una idea conceptual puede probarse directamente mediante la medición, STAR debe hacer una variedad de estudios simultáneos antes de hacer alguna conjetura sobre el diagrama de fase de QCD, debido a la complejidad del sistema que se forma durante las colisiones nucleares a alta energía, y al panorama físico desconocido que se estudia. El detector STAR consiste en varios tipos de detectores, cada uno especializado en detectar cierto tipo de partículas, todos estos detectores trabajan en conjunto en la detección y posterior análisis que permite hacer afirmaciones sobre las colisiones. Para realizar sus análisis RHIC usa el beam energy scan que es un programa científico que se puso en marcha con el objetivo primordial de explorar el diagrama de fase de QCD, dándole un énfasis a la búsqueda de las señales que deben existir en los límites que separan las posibles fases existentes y por ende el punto crítico, la primera corrida con colisiones del tipo  $A_u - A_u$  alcanzaron una energía de 7.7, 11.5 y 39 GeV y se realizó en el 2010. En el año del 2011 se agregaron energías de 19.6 y 27 GeV. Ahora, recalcaremos, los resultados aportados hasta la fecha por RHIC, en materia del diagrama de fase de QCD:

- El detector STAR nos ha permitido explorar el diagrama de fase de QCD utilizando el parámetro del freeze out, del cuál podemos inferir las parejas  $(T, \mu)$ , que lo conforman. Haciendo variar la energía de los haces que colisionan. Aportando datos suficientes, que permiten realizar una extrapolación en la región donde  $\mu > 500$  GeV, mediante un modelo estadístico, ver figuras (2.1) y (2.2). La cuáles están de acuerdo a las predicciones teóricas [12], [13].
- RHIC mediante su detector STAR, también ha sido capaz de aportar pruebas, que sostienen la aseveración de la existencia del plasma de quark y gluones a altas temperaturas. Para ello, ha utilizado el parámetro de modificación nuclear, que muestra evidencia de que a  $T$

grandes, existe un medio denso y caliente, que hace que las partículas que lo cruzan pierdan parte de su energía. Ver la sección 2.2 y la figura (2.3).

El acelerador de RHIC es el segundo colisionador de iones pesados más potente del mundo, solo superado por el *Gran Colisionador de Hadrones*.

### 2.4.2. El Gran Colisionador de Hadrones (LHC)

Desde el 2008, que entró en funcionamiento, el acelerador del LHC se convirtió en el más grande y potente del mundo. Consiste en un anillo de 27 km de magnetos superconductores y alcanza energías de hasta 7 TeV. En el LHC, existen seis áreas a lo largo de la circunferencia, donde se recopilan datos y realizan experimentos. En cada una de ellas, se encuentra localizado un detector. Algunos, buscan el mismo tipo de información aunque no de la misma manera. Cuatro de los detectores son grandes y dos de ellos más pequeños.

- **A. Toroidal ATLAS:** Es el más grande de todos, mide 46 metros de largo por 25 metros de ancho. Se encarga de detectar y analizar un amplio rango de la física: La búsqueda del bosón de Higgs, las dimensiones extra y partículas que pudieran formar la materia oscura. Estudia también, las fluctuaciones del campo magnético en el detector. Los haces de partículas en el LHC, colisionan en el centro del detector ATLAS, generando nuevas partículas que se esparcen en todas direcciones, y es tarea de los detectores identificar sus trayectorias, energías y momentos. Más de 3,000 científicos de 174 instituciones en 38 países trabajan en este experimento.
- **El Compact Muon Solenoid (CMS):** Es otro de los grandes detectores, al igual que ATLAS, se encarga de estudiar las partículas que se liberan durante las colisiones. A pesar de que tiene los mismo objetivos que ATLAS, utiliza diferentes soluciones técnicas y su imán es distinto. El detector CMS está construido alrededor de un enorme imán solenoidal que genera un campo magnético de unos 4 Teslas, alrededor de 100,000 veces el campo magnético de la tierra, que se encuentra confinado mediante un yugo de acero, que forma la mayor parte del peso del detector de 12,500 toneladas. El CMS es una de las mayores colaboraciones científicas de la historia, con la participación de 4,300 físicos

de partículas, ingenieros, técnicos y estudiantes de 179 universidades y 41 países.

- **A Large Ion Collider Experiment (ALICE):** Esta encargado de buscar evidencias sobre el plasma de quark y gluones. Está diseñado para estudiar la física que ocurre con la materia, durante la interacción fuerte a energías extremas, donde la fase del quark gluón se forma. Las colisiones en el LHC alcanzan temperaturas mayores que 100,000 veces más caliente que la temperatura en el centro del sol, colisionando iones de plomo que intentan recrear en condiciones de laboratorio similares a las que existieron poco después del Big Bang. ALICE, estudia la formación del plasma del quark gluón y sigue el proceso de expansión y enfriamiento, que da lugar progresivamente a las partículas que constituyen la materia de nuestro universo actual. El detector de ALICE pesa 10,000 toneladas, mide 26m de largo y 16m de ancho. La colaboración cuenta con más de 1,000 científicos de más de 100 institutos de física en 30 países.
- **Large Hadron collider beauty (LHCb):** Su objetivo es darnos luz, sobre el por qué vivimos en un universo que parece estar compuesto casi en su totalidad de materia, pero no de antimateria. Se especializa en las pequeñas diferencias entre la materia y la antimateria, mediante el estudio del quark beauty o quark  $b$ . En lugar de rodear todo el punto de colisión con un detector cerrado al igual que ATLAS y CMS, ALICE, utiliza una serie de subdetectores, para detectar las partículas después de la colisión, cada subdetector se encuentra 20 metros del otro. Una gran cantidad de diferentes quarks son creados en el LHC antes de que decaigan rápidamente en otras formas. Para atrapar los quarks  $b$ , el LHCb ha desarrollado sofisticados detectores de seguimiento de móviles cerca de la trayectoria de los haces circulando el LHC. Este detector pesa 5,600 toneladas de 21m de largo, 10m de altura y 13m de ancho. Cerca de 700 científicos de 52 institutos y universidades se encuentran colaborando en el LHCb.

El detector *Total Elastic and Diffractive cross-section measurement* (TOTEM) es uno de los mas pequeños en el LHC, donde se mide el tamaño de los protones y la luminosidad del LHC. En la física de partículas, la luminosidad se refiere a la precisión con que un acelerador de partículas produce colisiones

(número de partículas por unidad de área por unidad de tiempo). Para realizar correctamente su misión TOTEM debe ser capaz de detectar partículas producidas muy cerca de los haces del LHC. Éste detector pesa 20 toneladas, con 5 m de altura y 5 m de ancho, hay 143 científicos de 9 instituciones en 7 países. Por último, está el Large Hadron Collider forward (*LHCf*), este experimento simula los rayos cósmicos dentro de un ambiente controlado. El estudio de como las colisiones dentro del LHC ayudará a calibrar los grandes experimentos de rayos cósmicos. Se compone de dos detectores que están a 140 m a cada lado del punto de colisión de ATLAS. Cada uno de los detectores pesa solo 40 kilos y mide 30 cm de largo por 80 cm de alto y 10 cm de ancho. La colaboración en el LHCf consiste de 30 científicos de 9 institutos en 5 países. Hasta este momento, la mayor de las contribuciones del LHC a la física, es el posible descubrimiento del bosón de Higgs. La existencia de esta partícula fue propuesta en 1964 por el científico británico, Peter Higgs, y podría explicar el origen de las masas. Los científicos del CERN, anunciaron en julio del 2012, que había encontrado algo, que parecía el bosón de Higgs.

Hasta ahora, solo hemos hablado acerca de la reproducción de las condiciones extremas en temperatura atribuidas a unos microsegundos después del Big Bang, en la siguiente sección abordaremos el caso de condiciones de densidad extremas.

### 2.4.3. Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR)

Las investigaciones relevantes para el entendimiento de la evolución del universo temprano después del Big Bang, consiste en el conocimiento del comportamiento de la materia en condiciones extremas de temperatura (que pueden reproducirse a través de colisiones de iones pesados a altas temperaturas como sucede en RHIC y en el LHC), pero también en el estudio de la formación de estrellas de neutrones, donde la alta densidad es el parámetro mas relevante. Éste última región es la de interés para el FAIR, que se está contruyendo cerca del laboratorio *Helmholtz Centre for Heavy Ion Research* (GSI, abreviado de esta manera por sus siglās en alemán) en Darmstadt (Alemania). Está diseñado para estudiar la ecuación de estado para la materia, incluyedo la búsqueda de las señales de desconfinamiento y restauración de la simetría quiral, así como el punto crítico en una región de energías de  $\sqrt{s_{NN}} = 3 - 9$  GeV. Los haces del FAIR, serán mucho menos energéticos que los que se tienen en RHIC y en el LHC, pero estarán en la región mas alta donde la densidad bariónica es el parámetro mas elevado.

El concepto propuesto para FAIR tiene como parte esencial un anillo de almacenamiento de alta energía (*High Energy Storage Ring* (HESR)), con una luminosidad superior a los  $10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . El HESR ha sido construido para estudios sobre las interacciones fuertes con antiprotones en un rango de momentos de 1.5 a 15 GeV, como el estudio de la espectroscopía del charmonium, la estructura hadrónica, la dinámica del plasma quark gluón. Dentro de este anillo de almacenamiento suceden procesos como el enfriamiento del haz, la interacción del haz con un blanco ó la dispersión del haz. Cada uno de estos procesos contribuye al estado final de equilibrio del haz. Para garantizar la calidad y la luminosidad para realizar los experimentos en HESR se realiza un sistema de enfriamiento de electrones que ocupa una parte de la sección recta. También se ha considerado la posibilidad de dar un área para lograr trabajar con haces polarizados [27]. El FAIR trabajará de la siguiente manera: Se producirán antiprotones derivados de un haz de protones primarios que luego serán introducidos en el anillo de almacenamiento del HESR y chocarán contra un blanco fijo en el interior del detector PANDA. Que esta dedicado a estudios precisos de las interacciones fuertes en el rango de energía de transición de la teoría de perturbaciones y el régimen de QCD no perturbativa, que exhibe una gran complejidad, pero que es esencial para la comprensión de la naturaleza (por ejemplo régimen de confinamiento, la generación dinámica de masas). La colaboración internacional en PANDA, consiste de 450 científicos de 17 países, con la intención de hacer investigación sobre distintos temas, en torno a las fuerzas débiles y fuertes así como la estructura de los hadrones. Los antiprotones almacenados en el HESR llegarán a golpear un blanco (generalmente un cúmulo de hidrógeno). La interacciones entre el haz de protones y antiprotones generará entre otras, mesones y bariones compuestos de los quarks más pesados strange y charm quarks, produciendo una gran cantidad de gluones. Lo cuál será una herramienta poderosa para entender la dinámica de QCD. FAIR, cuenta también con dos sincrotrones SIS100 y SIS300 que forman la médula de los experimentos [28]. Son dos conceptos de etapas de aceleración, permitiendo una optimización de ambos sincrotrones para tareas específicas, también permite realizar experimentos paralelos con haces de diferentes propiedades. Se planea que el SIS300 sea una máquina muy versátil y el primer sincrotón superconductor capaz de proveer haces lentos de iones pesados extraídos hacia las regiones experimentales. Esto después de que el SIS300 sea puesto en operación en el 2016.

Los haces que se pueden hacer colisionar serán de todo tipo de iones

pesados incluso de uranio, y tendrá una intensidad 100 veces superior a la de todos los aceleradores juntos existentes en la actualidad. Como puede verse de este pequeño resumen, las ambiciones físicas que pueden ser solventadas en FAIR son numerosas y significativas para el desarrollo científico por lo cual podemos justificar plenamente el gasto que en él se ha hecho, se estima que el costo total del proyecto hasta el 2025, incluidos los costos operativos, ascienda a 3000 millones de euros. Una vez que hemos visto la forma experimental y las herramientas que se requieren para analizar el diagrama de fase de QCD dentro de los colisionadores, en el próximo capítulo revisaremos las bases teóricas sobre las cuáles basamos el desarrollo de este trabajo de tesis.

# Capítulo 3

## Simetrías de QCD

Nuestro entendimiento actual sobre las interacciones fuertes, comenzó con la identificación de los fermiones elementales que forman los protones, neutrones y por supuesto los hadrones. Conforme logramos entender mejor las propiedades de estas partículas, logramos entender la naturaleza de las interacciones que tienen lugar entre ellas. En 1963, Gell Mann y Zweig, propusieron el modelo *Eighfold Way* (denominados así por Gell Mann), que explicaba el espectro de las interacciones fuertes, en términos de constituyentes elementales, llamados quarks. Los mesones estaban formados por parejas de quark-anti quark, en tanto que los bariones fueron concebidos como estados ligados de tres quarks. Para explicar las cargas eléctricas y los números cuánticos de los hadrones, Gell Mann y Zweig, propusieron tres especies de quarks, up(u), down(d) y strange(s). Con el tiempo, se descubrió la existencia de tres especies más, charm(c), bottom(b) y top(t). Para explicar todo el espectro de hadrones, los quarks  $u, c, t$  y  $-1/3$  para los quarks  $d, s, b$ . El protón quedó conformado por dos quarks up y uno down  $uud$ , y el neutrón por un quark up y dos quarks down  $udd$ , de manera que sus cargas eléctricas fuerán 1 y 0 respectivamente. Estos seis tipos de quarks son convencionalmente referidos como **sabores**.

El carácter de la interacción fuerte esta determinada por el grupo  $SU_c(3)$  que es una simetría especial entre las cargas de color de los quarks. El grupo  $SU_c(3)$  esta formado por las matrices unitarias de  $3 \times 3$  con determinante uno y  $3^2 - 1 = 8$  generadores, que son matrices hermíticas de  $3 \times 3$  con traza cero y linealmente independientes. Las tres cargas de color del quark: rojo, verde y azul (R, G, B), forman la representación fundamental del grupo de simetría  $SU_c(3)$ . En esta representación los generadores son matrices de  $3 \times 3$

denotadas por  $\lambda_i$  con  $i = 1, \dots, 8$  que son las matrices de Gell Mann:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Con las herramientas anteriormente descritas, surge lo que conocemos como Cromodinámica Cuántica ó QCD, como la teoría que logra explicar las interacciones fuertes. En Cromodinámica Cuántica el color de los quarks juega el mismo rol que juega la carga eléctrica en QED. El color, fué introducido por Greenberg, para restaurar el principio de Pauli, dado que los quarks son partículas de espín 1/2, dos quarks del mismo tipo no podían tener los mismos números cuánticos. QCD es entonces, una teoría de color con algunas propiedades esenciales como:

- Los quarks tienen carga eléctrica y de color. Ésta última puede tener tres variaciones, por ejemplo, roja(R), verde(G) y azul(B).
- Los colores de los quarks se intercambian a través de los gluones, que juegan el mismo papel que los fotones en QED.
- Los gluones también poseen carga, y por lo tanto pueden interactuar entre ellos mismos, contrario al caso de los fotones.
- La teoría de campos de las interacciones fuertes es asintóticamente libre, de manera que los quarks interactúan débilmente para momentos grandes. Si  $\alpha_s$  es suficientemente pequeño podemos usar técnicas perturbativas.

Es tiempo de abordar de manera técnica la dinámica que envuelve esta asombrosa teoría de norma, a esto dedicaremos la siguiente sección.

### 3.1. Simetría $SU_c(3)$

Consideramos los quarks libres

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)q \quad (3.2)$$

donde  $q$  es un triplete de color de cualquier sabor del quark

$$\begin{pmatrix} q_R \\ q_G \\ q_B \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Es fácil ver que este Lagrangiano es invariante ante las siguientes transformaciones globales  $SU_c(3)$ :

$$q(x) \rightarrow Uq(x) \equiv e^{i\alpha_a T_a} q(x),$$

donde  $\alpha_a$  son ocho parámetros reales e independientes de  $x$  y  $T_a$  son los generadores del grupo  $SU(3)$ . Donde se debe satisfacer que  $\det U = 1$ , podemos aplicar la propiedad de que  $\det e^A = e^{\text{Tr } A}$ , con  $A = i\alpha_a T_a$ , lo cual implica que  $\text{Tr}(T_a) = 0$ . Si además, debe cumplirse que  $U^\dagger = U^{-1}$ , esto impone la condición  $\alpha_a T_a = \alpha_a T_a^\dagger$ . Podemos concluir entonces que  $T_a$  son el conjunto de matrices  $3 \times 3$  linealmente independientes, con traza igual a cero. Las matrices  $\lambda_a/2$  definidas en (3.1), son el conjunto convencional usado para las matrices  $T_a$ . El grupo es no abeliano, dado que los generadores  $T_a$  no conmutan, de hecho,

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c, \quad (3.4)$$

donde  $f_{abc}$  son constantes reales, llamadas constantes de estructura de grupo y son antisimétricas bajo el intercambio de cualquier par de índices. Como consecuencia de esta simetría, la carga de color se conserva.

Consideremos ahora el caso de la simetría local correspondiente, es decir,  $\alpha_a \rightarrow \alpha_a(x)$ . Requerimos que este Lagrangiano sea invariante, ante estas transformaciones locales, para generar las interacciones entre quarks y gluones. Consideremos la transformación de fase infinitesimal:

$$\begin{aligned} q(x) &\rightarrow [1 + i\alpha_a(x)T_a]q(x), \\ \partial_\mu q(x) &\rightarrow [1 + i\alpha_a(x)T_a]\partial_\mu q(x) + iT_a q(x)\partial_\mu \alpha_a(x). \end{aligned} \quad (3.5)$$

El último término, impide la invarianza del Lagrangiano. A primera vista, es posible proceder de manera análoga a QED. Esto es, introducir ocho campos

de norma  $G_\mu^a$ , que se transforman de la siguiente manera

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a, \quad (3.6)$$

con  $g$  el acoplamiento entre los quarks y los campos gluónicos (comparese con la expresión de QED,  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha$ ). Formamos la derivada covariante, con la intención de que el  $\mathcal{L}_{QCD}$ , sea invariante ante transformaciones locales SU(3):

$$D_\mu = \partial_\mu + igT_a G_\mu^a. \quad (3.7)$$

Al hacer el cambio  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$  en el Lagrangiano (3.2), obtenemos

$$\mathcal{L} = \bar{q}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q(x) - g(\bar{q}(x)\gamma^\mu T_a q(x))G_\mu^a. \quad (3.8)$$

Esta expresión es similar al  $\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$ . Sin embargo, para una transformación no abeliana, esta no es una condición suficiente para obtener un Lagrangiano invariante de norma. El problema es que si observamos la transformación del segundo término, vemos que

$$\begin{aligned} (\bar{q}(x)\gamma^\mu T_a q(x)) &\rightarrow (\bar{q}(x)\gamma^\mu T_a q(x)) + i\alpha_b \bar{q}(x)\gamma^\mu (T_a T_b - T_b T_a)q(x) \\ &= (\bar{q}(x)\gamma^\mu T_a q(x)) - f_{abc}\alpha_b (\bar{q}(x)\gamma^\mu T_c q(x)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde hemos usado el resultado del conmutador descrito en (3.4). De este resultado, observamos que para lograr la invarianza de  $\mathcal{L}$  es necesario que

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a - f_{abc}\alpha_b G_\mu^c. \quad (3.10)$$

Finalmente, podemos agregar el término cinético para cada uno de los campos  $G_\mu^a$ . El Lagrangiano invariante de norma para QCD es entonces

$$\mathcal{L} = \bar{q}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q(x) - g(\bar{q}\gamma^\mu T_a q)G_\mu^a - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (3.11)$$

donde  $G_{\mu\nu}^a$  es:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - gf_{abc}G_\mu^b G_\nu^c, \quad (3.12)$$

que garantiza que el Lagrangiano sea invariante ante transformaciones de norma SU(3). De esta manera pudimos generar el Lagrangiano de QCD, con interacciones entre quarks y gluones.

## 3.2. Simetrías U(1)

Podemos verificar que el Lagrangiano de QCD (3.11), posee una invarianza global ante transformaciones  $U(1)$ . Para esto, consideremos la siguiente transformación global

$$q(x) \rightarrow Uq(x) \equiv e^{-i\alpha}q(x), \quad (3.13)$$

con  $\alpha$  una constante real arbitraria. La transformación de fase  $U(\alpha) \equiv e^{-i\alpha}$ , corresponde al grupo abeliano unitario de  $U(1)$ . Esta transformación es aplicable a cualquier sabor. La invarianza de la parte fermiónica del  $\mathcal{L}_{QCD}$ , garantiza la conservación de cada sabor de los quarks, bajo transformaciones  $U(1)$ , así como la conservación del número bariónico.

## 3.3. Simetría de Isospin

El isospin fué introducido por Werner Heisenberg en 1932 para explicar la semejanza entre el neutrón y el protón. Dado que la masa del neutrón y la del protón son prácticamente la misma, la diferencia entre ellos radica en la carga que poseen. Usualmente nos referimos a los protones y neutrones como nucleones. Dadas estas circunstancias, era factible considerarlos como estados de una misma partícula. Al protón se le asigno el isospin  $I_3 = \frac{1}{2}$ , y al neutrón el isospin  $I_3 = -\frac{1}{2}$ . Ya que sabemos que el protón esta conformado por  $(uud)$  y el neutrón por  $(ddu)$  asignamos el isospin  $1/2$  al quark up y  $-1/2$  y el quark down, por el hecho de que son muy similares en masa y forman un doblete de isospin. Las observaciones de quarks ligeros (hechos de quarks up, down), nos llevan a pensar que al menos algunas de estas partículas son similares respecto a las interacciones fuertes. Si tenemos dos partículas en el mismo multiplete de isospin, sabemos que tendrán masas similares, aunque su carga sea distinta, puesto que los quarks up tienen carga  $2/3$  en tanto que los quarks down tienen carga de  $-1/3$ . Consideremos por ejemplo, a los bariones delta con spin  $3/2$ ,  $\Delta^{++}(uuu)$ ,  $\Delta^+(uud)$ ,  $\Delta^0(udd)$ ,  $\Delta^-(ddd)$ , formados por 3 quarks (la mezcla de quarks up y down). Tenemos 4 de estas partículas, todas con masas muy similares debido a que pertenecen al mismo cuarteto de isospin. El tercer componente de isospin asociado a cada una de estas partículas se calcula iniciando con el spin  $3/2$  y restando una unidad en cada paso hasta llegar a  $-3/2$ , es decir  $I_3 = (3/2, 1/2, -1/2, -3/2)$  respectivamente. Estas relaciones conceptuales, dieron origen a una fórmula

matemática simple, consistente en analizar el contenido de quarks de la siguiente manera:  $I_3 = \frac{1}{2}[(n_u - n_{\bar{u}}) - (n_d - n_{\bar{d}})]$ , con  $n_u, n_d$  son el número de quarks up y down en tanto que  $n_{\bar{u}}$  y  $n_{\bar{d}}$  se refieren al número de anti quarks up y down.

En la física de partículas elementales, hablamos de simetría de isospin cuando el Lagrangiano es invariante bajo la acción del grupo  $SU(2)$ . La simetría de  $SU_I(2)$  implica que los quarks  $u$  y  $d$  tienen masas idénticas. El grupo  $SU(2)$  de matrices unitarias  $2 \times 2$  con determinante uno, tiene como generadores:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

estas matrices tienen traza cero y son anti hermíticas. Están asociadas a las matrices de Pauli, de acuerdo a las siguientes relaciones  $u_1 = i\sigma_1$ ,  $u_2 = -i\sigma_2$  y  $u_3 = i\sigma_3$ . El grupo  $SU(2)$ , actúa como una rotación unitaria de los estados de los quarks  $u$  y  $d$  escritos en forma de un doblete  $q$

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

La transformación es

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Realicemos un simple ejercicio para convencernos de este argumento. Consideremos la transformación  $u_1$ :

$$\begin{aligned} q &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id \\ iu \end{pmatrix} \\ \bar{q} &\rightarrow (u \quad d) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -id \\ -iu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

De manera que al sustituir en (3.2), obtendremos una invarianza ante transformaciones  $u_1$  (de manera análoga para  $u_2$  y  $u_3$ ), siempre y cuando se satisfaga la condición de que  $m_u = m_d = m$ .

### 3.4. Simetría Quiral

En el límite quiral, que es el límite idealizado, donde los dos quarks que estamos considerando, se toman como si no tuvieran masa. El  $\mathcal{L}_{QCD}$  adquiere

simetría quiral. Para entender el proceso, consideremos nuevamente solo la parte fermiónica del Lagrangiano de QCD, dado en la ecuación (3.11), pero ahora escrita en términos de los dos sabores de quarks más ligeros,  $u$  y  $d$ :

$$\mathcal{L} = i\bar{u}\gamma^\mu\partial_\mu u + i\bar{d}\gamma^\mu\partial_\mu d - m_u\bar{u}u - m_d\bar{d}d, \quad (3.18)$$

si los quarks  $u$  y  $d$  son muy ligeros, los últimos dos términos son pequeños y podemos despreciarlos. Estudiemos las implicaciones de esta aproximación, para ello, debemos introducir el concepto de helicidad, que será de vital importancia, para el desarrollo de esta sección:

- **Helicidad:** La helicidad de una partícula está íntimamente relacionada a su spin. Para visualizarlo, concentremos nuestra atención en la

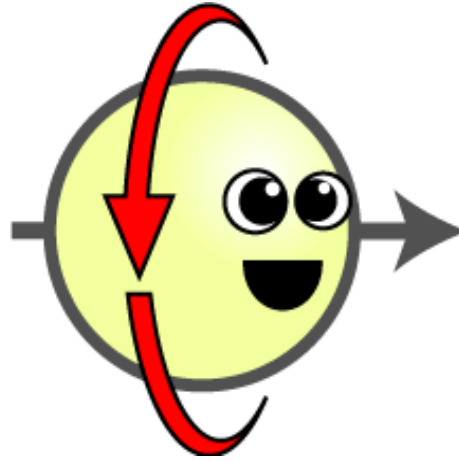


Figura 3.1: Ejemplo de una partícula right handed .

figura (3.1), donde la flecha roja (que indica el spin) y la gris (que indica la dirección del movimiento), definen la orientación de la partícula. Decimos que la partícula es *right handed*, si al colocar el pulgar de la mano derecha, en dirección del movimiento, nuestros dedos cierran en dirección del spin. En caso contrario, decimos que la partícula es *left handed*, ver figura (3.2). De esta manera, la helicidad se refiere al signo asociado a la proyección del momento y el spin de una partícula. Hablamos de helicidad positiva, para partículas *right handed* y helicidad negativa, para partículas *left handed*.

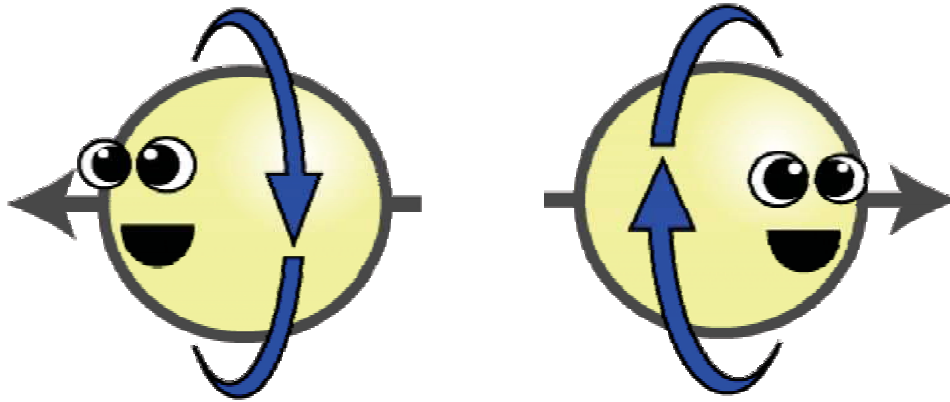


Figura 3.2: Ejemplo de una partícula left handed .

Veamos ahora, como es que la helicidad y la masa de la partícula están relacionadas. Iniciemos considerando una partícula no masiva (como el límite de quarks  $u$  y  $d$ ), las cuáles se mueven a velocidad de la luz. Para estas partículas, no existe en sistema de referencia en el cuál, podamos considerarlas en reposo. Caso contrario al que ocurre con las partículas masivas, en donde podemos ubicarnos en dos sistemas de referencia, uno de ellos viajando a velocidad menor que la partícula y otro a una velocidad mayor. En este último caso, la partícula parecerá estarse moviendo en dirección contraria al movimiento que realiza según un observador en el sistema a menor velocidad. Es decir, que la masa de las partículas nos indica cuando la helicidad es una propiedad intrínseca. Si una partícula no tiene masa, su helicidad no depende del sistema de referencia. En tanto que en el caso de partículas masivas la helicidad no corresponde a una propiedad intrínseca, como lo es la quiralidad.

- **Quiralidad:** De la misma manera que hemos dicho, que una partícula puede poseer helicidad right handed o helicidad left handed, se puede definir quiralidad right y left handed. En el caso de que la partícula sea no masiva, la helicidad y la quiralidad son iguales, una partícula con helicidad right handed(left handed) tendrá una quiralidad right handed (left handed). Para el caso de una partícula masiva, una partícula con quiralidad left handed puede tener helicidad left o right depen-

endo del sistema de referencia relativo a la partícula, y su quiralidad seguirá siendo left en todos los sistemas de referencia, sin importar su helicidad. El operador de quiralidad esta dado por

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

que satisface que  $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$ . Donde,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

con  $i = 1, 2, 3$  y  $\sigma_i$  las tres matrices de Pauli.

Una vez comprendidos estos conceptos, podemos considerar ahora, el límite quiral de los quarks  $u$  y  $d$  en la ec. (3.18). Se puede ver que el Lagrangiano de QCD es invariante bajo las transformaciones unitarias:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \rightarrow U_L \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R \rightarrow U_R \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Donde los subíndices  $L$  y  $R$  indican transformaciones left y right respectivamente. Sea  $q$  el doblete, con componentes  $q_L$  y  $q_R$  tal que  $q = q_L + q_R$  donde

$$q_L = \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad q_R = \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

y lo sustituimos en el Lagrangiano (3.18)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q = i[\bar{q}_L + \bar{q}_R]\gamma^\mu\partial_\mu[q_L + q_R] \\ &= i\bar{q}_L\gamma^\mu\partial_\mu q_L + i\bar{q}_R\gamma^\mu\partial_\mu q_R \\ &\quad + i\bar{q}_L\gamma^\mu\partial_\mu q_R + i\bar{q}_R\gamma^\mu\partial_\mu q_L, \end{aligned}$$

pero dado que  $\left(1 - \frac{\gamma_5}{2}\right)\left(1 + \frac{\gamma_5}{2}\right) = 0$ , tendrá la consecuencia lógica de que los términos  $\bar{q}_L\gamma^\mu\partial_\mu q_R$  y  $\bar{q}_R\gamma^\mu\partial_\mu q_L$  se anulen. Finalmente:

$$\mathcal{L} = i\bar{q}_L\gamma^\mu\partial_\mu q_L + i\bar{q}_R\gamma^\mu\partial_\mu q_R. \quad (3.23)$$

Este Lagrangiano es invariante ante transformaciones quirales, cuando la masa de los quarks up y down es la misma y además es nula. La simetría

quiral nos garantiza que los sectores left y right no se comunican entre ellos. En el caso de que tomemos las masas físicas de los quarks, la simetría quirial se rompe, dando lugar a combinaciones entre los quarks left y right, dados por

$$m\bar{q}q = m(\bar{q}_R q_L + \bar{q}_L q_R). \quad (3.24)$$

Aunque la masa de los quarks ligeros es muy pequeña, haciendo factible el uso del límite quirial y sus bondades, la realidad física, consiste de quarks masivos.

### 3.4.1. Origen de las Masas

Como sabemos, en el núcleo de los átomos, se encuentran dos partículas llamadas neutrones y protones, que colectivamente son referidas como nucleones. A niveles fundamentales, las interacciones entre ellas, están descritas por la Cromodinámica Cuántica (QCD), que es una teoría que contiene quarks y gluones con carga de color, que son asintóticamente libres a cortas distancias (momentos grandes). El entendimiento de la masa del nucleón y su dependencia de las masas de los quarks ligeros, es una de las preocupaciones fundamentales de los físicos que trabajan en física nuclear y física de partículas. El Modelo Estándar de la física, que es consistente con la mecánica cuántica y la relatividad especial, agrupa dos grandes teorías, la cromodinámica cuántica y la teoría electrodébil, proporcionando una teoría, que permite describir las interacciones entre las partículas observadas experimentalmente. El Modelo Estándar, predijo la existencia de los bosones W y Z, antes de que esas partículas hubieran sido observadas. Para explicar por qué unas partículas tienen masa y otras no, el físico británico Peter Higgs (y simultánea pero independientemente, también Francois Englert, Robert Brout, Gerald Guralnik, Dick Hagen y Tom Kibble) postuló en los años 60 del siglo XX un mecanismo que se conoce como el *Campo de Higgs*, que resulta ser el primer intento exitoso, para explicar la masa de las partículas elementales. Este mecanismo, se encuentra incorporado en el Modelo Estándar de la física de partículas. El Campo de Higgs del Modelo Estándar resulta en la existencia de una partícula que los físicos llaman bosón de Higgs. El Campo de Higgs sería una especie de continuo, que se extiende por todo el espacio, adquiriendo un valor esperado no cero en el vacío. La masa de las partículas, estaría causada por una especie de fricción con el Campo de Higgs. En el estado actual de desarrollo del Modelo Estándar, y mientras no se haya

detectado el bosón de Higgs, y no se hayan estudiado sus propiedades es detalle, no es posible determinar si se trata en realidad de una nueva partícula elemental o es tan solo una partícula compuesta por otros constituyentes más fundamentales. Lo único que sabemos, es que su presencia dentro del Modelo Estándar, es necesaria para que la teoría sea autoconsistente y predictiva. En caso de que se logre descubrir este bosón, en los experimentos que se están realizando en el CERN, como fué sugerido el 4 de julio de 2012, esta será la primera vez en que una teoría pueda explicar el origen de la masa, a partir de primeros principios. Incluso cuando el Modelo Estándar ha tenido gran éxito en explicar los resultados experimentales, tiene ciertos defectos importantes: El problema del número de constantes físicas fundamentales. No describe la fuerza gravitatoria. Dentro de él, la materia y la antimateria son simétricas.

Es necesario recalcar que además que el Modelo Estándar falla en predecir los valores de las masas de las partículas, aún así, solo son responsables de una pequeña porción de la masa visible del universo. El Higgs no es responsable de toda la masa de las partículas. En realidad, lo único que se puede obtener a partir de este mecanismo es el 1% de la masa. La mayor parte de la masa observada, se explica por las fuertes interacciones que mantienen unidos a los protones y neutrones en el núcleo. Sin embargo, la manera en que esto ocurre aun es un misterio no resuelto de manera exacta y cuantitativa en la física.

Una de las preguntas claves, se refiere al origen de la masa del nucleón:

- ¿Cómo es que partículas prácticamente no masivas como los quarks up y down, cuya masa es de entre 3 – 7 MeV, cooperan de forma dinámica para formar un compuesto bariónico de masa de alrededor de 1 GeV?

Una posible respuesta a esta interrogante, se encuentra en el rompimiento espontáneo de la simetría quiral. En la teoría de superconductividad, una atracción pequeña entre dos electrones, genera la aparición de un condensado de pares de electrones en el estado base del metal. En QCD, quarks y antiquarks sufren de una interacción atractiva fuerte que permite la aparición de un condensado, si además consideramos los quarks como partículas no masivas, la energía necesaria para crear un par quark-antiquark es pequeña. Por lo tanto, se espera que el vacío de QCD contenga un condensado de pares quark-antiquark caracterizado por un valor de expectación distinto de cero para el operador escalar:

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{q}_R q_L + \bar{q}_L q_R | 0 \rangle \neq 0. \quad (3.25)$$

El valor de expectación distinto de cero, nos indican que el vacío tiene mezclado las dos posibles helicidades para los quarks (left y right) y por lo tanto, cuando estos atraviezan el vacío, pueden adquirir masas efectivas. Este resultado, esta asociado a la generación dinámica de masas, como veremos en mas detalle en la siguiente sección.

### 3.4.2. Rompimiento Espontáneo de la Simetría Quiral

Es bien sabido que la mayor parte de la masa visible en el universo se determina por la suma de las masas de los nucleones en el cosmos. Para el mejor entendimiento del origen de la masa, debemos analizar los condensados de quarks en QCD  $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ . Cuando el valor de este condensado de quarks es distinto de cero, implica que existen transiciones de campos left a campos right. Los condensados de los quarks en QCD se toman como parámetros de orden correspondientes a la violación espontánea de la simetría quiral, para entender el porqué de estas afirmaciones, será necesario desarrollar algunos cálculos. Para los condensados de los quarks se satisface la relación de Gell-Mann-Oakes-Renner (GMOR)

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle = -\frac{1}{2} \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{m_u + m_d}, \quad (3.26)$$

donde  $m_\pi$  y  $f_\pi$  son la masa y la constante de decaimiento del pión, respectivamente. Con  $m_\pi = 140$  MeV y  $f_\pi = 92$  MeV. Para estimar el valor del condensado del quark, se puede usar los valores de las masas  $m_u + m_d = 13$  MeV [29], y por lo tanto:

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle = -(0.23\text{GeV})^3. \quad (3.27)$$

Este condensado es una medida del rompimiento espontáneo de la simetría. Por otro lado, la masa del pión (cuyo valor no es cero), refleja la simetría rota explícitamente, debida a la existencia de una pequeña masa del quark. Si aplicamos ahora la fórmula de Ioffe [30],

$$m_N \approx -\left(8\pi^2 \langle 0|\bar{q}q|0\rangle\right)^{1/3}. \quad (3.28)$$

Ésta fórmula nos muestra la conexión cercana existente entre la generación dinámica de la masa y la ruptura espontánea de la simetría quiral en QCD.

Tomando en cuenta el valor obtenido para el condensado de los quarks, dado en la ecuación (3.27), podemos calcular la masa del nucleon

$$m_N = 986.4 \text{ MeV}. \quad (3.29)$$

El valor obtenido para  $m_N$  difiere del experimental  $m_N$  en apenas el 5 %.

Es importante recalcar dos aspectos que hemos abordado:

- Debido a la pequeñez de la masa de los quarks ligeros, el límite quiral, puede ser una buena aproximación al mundo hadrónico de los quarks ligeros.
- La simetría quiral, es una simetría global de manera que su rompimiento espontáneo está manifiesto a través de la existencia de bosones de Goldstone, que son piones.
- En el mundo real, las masas físicas de los quarks ligeros, actúan como perturbaciones del esquema quiral, y el bosón de Goldstone puede adquirir una masa pequeña.

En esta capítulo hemos aprendido que la mayor parte de la masa que podemos observar en el universo, proviene de las interacciones fuertes que sufren los quarks y los gluones. A este mecanismo de producción de masa lo llamamos *Generación Dinámica de Masas*, y es uno de los principales objetivos de este trabajo de tesis. Dedicaremos el siguiente capítulo a desarrollar la teoría que nos permita calcular esta masa que se genera en forma dinámica, a través de métodos no perturbativos, como las ecuaciones de Schwinger Dyson.

# Capítulo 4

## Resolución de las Ecuaciones de Schwinger Dyson (SDE)

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE), son llamadas así en honor a Julian Schwinger y Freeman Dyson [3, 4], y son las ecuaciones que nos permiten estudiar el rompimiento dinámico de la simetría quiral, es decir, la generación de masa para fermiones en las teorías de campo. Las ecuaciones de SDE, son un conjunto de ecuaciones integrales acopladas, que relacionan las ecuaciones de Green de una teoría cuántica de campos. En general una teoría de campos, puede considerarse resuelta una vez que se conocen todas sus funciones de Green, debido a esto, la teoría se puede representar mediante un sistema de SDE, que tenga por solución a estas funciones.

### 4.1. Acoplamientos en QED y QCD

Las SDE, pueden ser formalmente derivadas a través de integrales de trayectoria de Feynman y son un conjunto infinito de ecuaciones integrales acopladas. En consecuencia el sistema debe de ser truncado. El método de truncamiento típico es el cálculo perturbativo, y solo puede emplearse cuando existe un parámetro suficientemente pequeño para realizar dicha expansión. Este parámetro es precisamente la constante de acoplamiento, sin embargo, podemos encontrarnos con situaciones donde no se cumpla que este parámetro sea suficientemente pequeño, como en el caso de QCD. Entonces, es necesario buscar otro método para truncarlas, dichos métodos se llaman no perturbativos. Los cálculos no perturbativos, muestran efectos muy impor-

tantes que no se pueden alcanzar mediante la teoría de perturbación, como la generación dinámica de masas para los fermiones fundamentales y el confinamiento de quarks y gluones en QCD. Nosotros estamos particularmente interesados en la generación dinámica de masas, pues sabemos que aproximadamente el noventa y nueve por ciento de la masa de la materia ordinaria es de origen dinámico, además del estudio del confinamiento, al cual están sujetos los quarks y gluones dentro de los hadrones. El estudio cuantitativo de la generación dinámica de masa de los quarks ligeros, la aparición del espectro hadronico, así como el estudio de la temperatura finita, son tareas muy difíciles, pero debido a su gran importancia, mucha energía esta siendo canalizada a desarrollar esta línea de investigación. Es bien sabido que en QED y QCD perturbativa, aún a todos los ordenes de resumación de los diagramas de Feynman, falla para generar masa fermiónica, si iniciamos con una masa desnuda nula en el Lagrangiano. La forma general de la función de masa de un fermión en cualquiera de estas teorías es de la siguiente forma

$$M(p^2) = m \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \log \left[ \frac{p^2}{m^2} \right] + \dots \right), \quad (4.1)$$

Donde es obvio, que en el caso de que  $m = 0$ , la función  $M(p^2)$  también se anula. Sin embargo, los fermiones pueden adquirir masa dinámicamente, es decir, mediante interacciones por medio de efectos no perturbativos sin la necesidad de una masa desnuda no cero [31], [32]. Por ejemplo, en quenched QED, la Generación Dinámica de Masas (DMG), sucede si el acoplamiento electromagnético  $\alpha_{em}$  es superior a un valor crítico:

$$\alpha_c \simeq 1. \quad (4.2)$$

Lo cual nos provee un mecanismo simple pero estructuralmente similar al existente en QCD, para investigar los métodos no perturbativos como las ecuaciones de Schwinger-Dyson. El valor actual del acoplamiento electromagnético es:

$$\alpha_{em} \simeq 1/137 \quad (4.3)$$

es claramente lejano a la unidad. Sin embargo, podemos esperar que en colisiones de iones pesados donde cientos de protones están juntos en pequeñas regiones del espacio, el acoplamiento efectivo de QED puede ser:

$$\alpha \simeq 100 \times 1/137 \simeq 1, \quad (4.4)$$

permitiendo la posibilidad de ver esta transición de fase aún en QED. Ver la estructura de las SDE en QED es mucho más simple que en QCD, por esta razón, iniciaremos nuestro estudio de la Generación Dinámica de Masas en QED y posteriormente lo haremos en QCD.

## 4.2. Propagador del Fermión

Al buscar una solución a la ecuación de Dirac para una partícula con carga  $e$ , en un campo electromagnético, el propagador aparece de manera natural. Intentaremos encontrar la solución a esta ecuación utilizando el método de Green. Como hemos visto la ecuación de Dirac para un electrón en un campo electromagnético esta dado por la ecuación:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0 , \quad (4.5)$$

con  $A_\mu$  el potencial electromagnético. Resolveremos esta ecuación, buscando primero la solución de la ecuación dictada por la expresión:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)G_F(x, y) = \delta^4(x - y) , \quad (4.6)$$

donde hemos usado la notación  $G_F(x, y)$ , para representar al propagador fermiónico en el espacio de coordenadas. Para llevarlo a una expresión mas familiar en el espacio de momentos, solo necesitaremos tomar su transformada de Fourier. Una vez obtenida  $G_F$  podemos escribir la solución de la ecuación (4.5) como

$$\psi(x) = \psi_0(x) - e \int d^4y G_F(x, y) \gamma_\mu A^\mu \psi(y) , \quad (4.7)$$

donde  $\psi_0(x)$  es la función de onda del electrón en la ausencia del campo electromagnético. Como podemos ver, el miembro derecho queda también en términos de la función  $\psi$ . Para resolver la ecuación (4.6), transformamos  $G_F(x, y)$  al espacio de momentos, es decir:

$$G_F(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_F^0(p) e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p , \quad (4.8)$$

donde  $S_F(p)$  es el propagador fermiónico desnudo en el espacio de momentos. Sustituyendo el valor del propagador fermiónico en (4.6) obtenemos

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int (\not{p} - m) S_F^0(p) e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p = \delta^4(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p , \quad (4.9)$$

donde es claro, que hemos utilizado una representación conveniente para la función delta en el espacio de momentos en el segundo miembro de la expresión, la cuál nos ayudará a reconocer de manera sencilla la condición

$$(\not{p} - m)S_F^0(p) = 1, \quad (4.10)$$

es decir,

$$S_F^0(p) = \frac{1}{\not{p} - m}. \quad (4.11)$$

La masa del fermión, se puede definir como la posición del polo en la expresión del propagador. Una vez que hemos entendido la relación existente entre el condensado quiral y el propagador fermionico con el valor de la masa, estamos interesados ahora, en intentar explicar los mecanismos que derivan en la generación dinámica de este parámetro. Ésto nos lleva a la discusión de las ecuaciones de Schwinger Dyson, las cuáles son el objeto de estudio de la siguiente sección.

### 4.2.1. Ecuaciones de Schwinger Dyson en QED

Iniciemos nuestro estudio, viendo la manera en que los propagadores del fermión y del fotón se modifican a través de autointeracciones. Por ejemplo, un electrón puede emitir y reabsorber fotones en varias maneras, como veremos en figuras posteriores. Comencemos por ver la representación diagramática del propagador completo que muestra la figura (4.1).



Figura 4.1: El propagador completo

Este propagador se expresa mediante una serie infinita de correcciones, que clasificamos en tres:

- Las correcciones al propagador fermiónico.
- Las correcciones al propagador fotónico.

- Las correcciones correspondientes al vértice.

El proceso de autointeracciones genera tres series infinitas. Dichas series se encuentran esquemáticamente representadas por las figuras (4.2), (4.3), y (4.4) respectivamente.

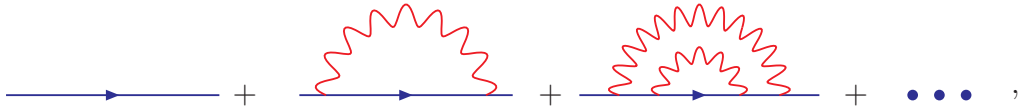


Figura 4.2: Correcciones al propagador fermiónico.

Utilizamos un círculo relleno sobre el propagador fermiónico, para representar la suma de todas las interacciones, que pueden afectar al fermión en su propagación. Sucede lo mismo para el propagador completo del fotón y el vértice completo del fermión, que también poseen dichos círculos rellenos a diferencia de los propagadores desnudos que no lo tienen.

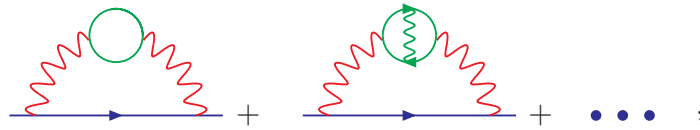


Figura 4.3: F Correcciones al propagador del fotón.

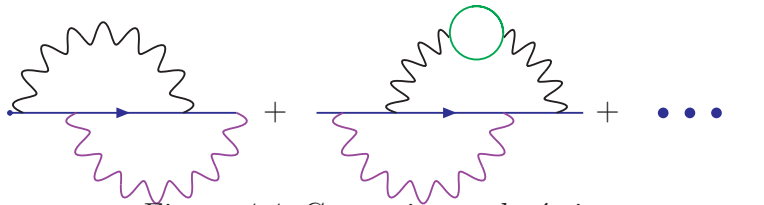


Figura 4.4: Correcciones al vértice.

Las series anteriormente mencionadas, se pueden dibujar en una forma compacta como se exhibe en la figura (6.1). Debemos observar que en el tercer

diagrama, uno de los vértices no lleva un círculo relleno, porque de ponerlo estaríamos contando doble. Esta ecuación que representamos con diagramas, es llamada la ecuación de Schwinger Dyson para el propagador del fermión y corresponde a la ecuación

$$S_F(p) = S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F(p) , \quad (4.12)$$

donde  $S_F^0(p) = 1/(\not{p} - m)$  como vimos en la sección anterior y  $\Sigma(p)$  representa la autoenergía.

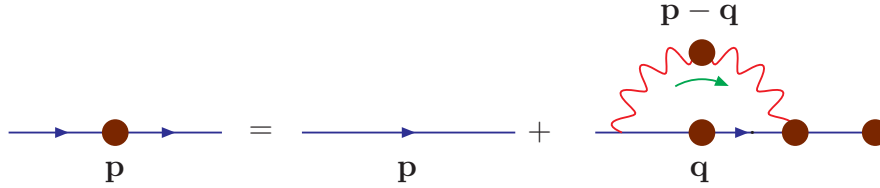


Figura 4.5: El propagador completo.

Si multiplicamos la ecuación anterior a la derecha por  $S_F^{-1}(p)$  obtenemos

$$1 = S_F^0(p)S_F^{-1}(p) + S_F^0(p)\Sigma(p) , \quad (4.13)$$

y a continuación multiplicamos a la ecuación (4.13) por  $S_F^{0^{-1}}(p)$  por la izquierda, para obtener la expresión

$$S_F^{0^{-1}}(p) = S_F^{-1}(p) + \Sigma(p) . \quad (4.14)$$

Es claro finalmente que podemos reescribir al propagador completo inverso en una forma mucho más simple de manejar, es decir de la siguiente manera

$$S_F^{-1}(p) = S_F^{0^{-1}}(p) - \Sigma(p) , \quad (4.15)$$

cuyo diagrama asociado esta representado en la figura (4.6).

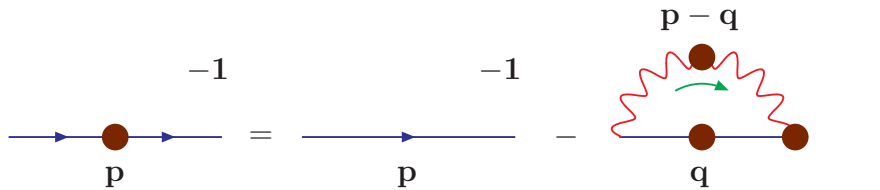


Figura 4.6: El propagador completo inverso.

Procederemos ahora, a obtener la forma analítica que podamos resolver para las ecuaciones de Schwinger Dyson, para el propagador fermiónico. Usemos las Reglas de Feynman para QED dadas en la figura (4.7), de las cuales concluimos:

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{---} \xrightarrow{\mathbf{p}} \bullet &= iS_0(\mathbf{p}) \\
 \mu \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \nu &= -iD_{\mu\nu}^0(\mathbf{p}) \\
 \begin{array}{c} \mu \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \end{array} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{p}} \bullet &= ie\gamma^\mu
 \end{aligned}$$

Figura 4.7: Reglas de Feynman para QED.

$$-iS_F^{-1}(p) = -iS_F^{0-1}(p) - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\mu) [iS_F(q)] (-ie\Gamma^\nu) (-i\Delta_{\mu\nu}(p-q)) . \quad (4.16)$$

Análogamente, podemos encontrar las expresiones para el propagador fotónico y el vértice electrón fotón.

### 4.3. Propagador fotónico

El propagador fotónico se encuentra representado gráficamente en la figura (4.8), que corresponde a la expresión

$$\begin{aligned}
 -i\Delta_{\mu\nu}(p) &= -i\Delta_{\mu\nu}^0(p) + (-i)\Delta_{\mu\alpha}^0(p) i\Pi^{\alpha\beta}(p) (-i)\Delta_{\beta\nu}^0(p) \\
 &+ (-i)\Delta_{\mu\alpha}^0(p) i\Pi^{\alpha\beta}(p) (-i)\Delta_{\beta\gamma}^0(p) i\Pi^{\gamma\delta}(p) (-i)\Delta_{\gamma\nu}^0(p) + \dots
 \end{aligned}$$

y puede reescribirse de forma mas compacta por:

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \Delta_{\mu\nu}^0(p) + \Delta_{\mu\alpha}^0(p) \Pi^{\alpha\beta}(p) \Delta_{\beta\nu}(p) , \quad (4.17)$$

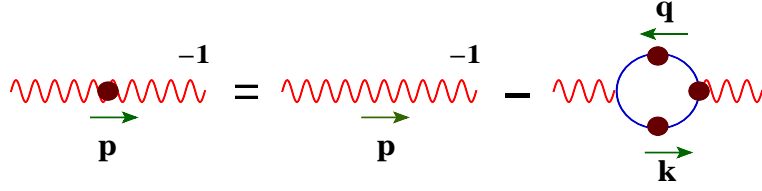


Figura 4.8: Propagador del fotón .

donde  $i\Pi^{\mu\nu}(p)$  (que corresponde a los círculos sombreados de la figura (4.8)) es la autoenergía del fotón. El inverso de la ecuación (4.17) es:

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) = (\Delta^0)_{\mu\nu}^{-1}(p) - \Pi_{\mu\nu}(p). \quad (4.18)$$

El propagador del fotón a nivel árbol en una norma covariante arbitraria  $\xi$  es

$$\Delta_{\mu\nu}^0(p) = -\frac{1}{(p)^2} \left[ g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right]. \quad (4.19)$$

La norma de Feynmann corresponde a  $\xi = 1$ , y la norma de Landau a  $\xi = 0$ .

## 4.4. El vértice completo fermión-fotón

El vértice  $\Gamma^\mu(k, p)$  corresponde a la interacción de fermiones con fotones. En esta sección, mostramos una forma general, para expresar el vértice no perturbativo, siguiendo los pasos descritos por Ball y Chiu [33]. El vértice depende de los momentos del fermión entrante y saliente  $k^\mu$  y  $p^\mu$ . Por lo tanto, podemos escribir  $\Gamma^\mu(k, p)$  en términos de los vectores  $\gamma^\mu, k^\mu, p^\mu$  y de los escalares  $1, \not{k}, \not{p}, \not{k}\not{p}$ . De acuerdo con lo dicho, el vértice puede expresarse como una combinación lineal de los siguientes vectores base:

$$\begin{aligned} V_1^\mu &= \gamma^\mu, & V_2^\mu &= k^\mu, & V_3^\mu &= p^\mu, \\ V_4^\mu &= \not{k}\gamma^\mu, & V_5^\mu &= \not{k}k^\mu, & V_6^\mu &= \not{k}p^\mu, \\ V_7^\mu &= \not{p}\gamma^\mu, & V_8^\mu &= \not{p}k^\mu, & V_9^\mu &= \not{p}p^\mu, \\ V_{10}^\mu &= \not{k}\not{p}\gamma^\mu, & V_{11}^\mu &= \not{k}\not{p}k^\mu, & V_{12}^\mu &= \not{k}\not{p}p^\mu, \end{aligned} \quad (4.20)$$

De modo que en esta base tenemos:

$$\Gamma^\mu(k, p) = \sum_{i=1}^{12} v_i(k, p) V_i^\mu, \quad (4.21)$$

donde los  $v_i(k, p)$  son coeficientes que dependen solamente de  $k^2, p^2$ , y  $k \cdot p$ . Estos coeficientes se pueden calcular en la teoría perturbativa orden por orden, pero dicho método no puede explicar fenómenos como la generación dinámica de masas. Por esta razón, buscamos la forma no perturbativa de estos coeficientes. Es mejor escribir el vértice en una base más conveniente para los resultados no perturbativos. Podemos empezar a hacerlo partiendo de la Identidad de Ward-Takahashi (WTI). Esta identidad relaciona al propagador de fermión con el vértice en la forma:

$$\begin{aligned} (k_\mu - p_\mu)\Gamma^\mu(k, p) &= S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p) \\ &= \frac{\not{k}}{F(k^2)} - \frac{\not{p}}{F(p^2)} - \frac{M(k^2)}{F(k^2)} + \frac{M(p^2)}{F(p^2)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Recordemos las definiciones para el vértice y el propagador desnudo:

$$S_F^0(k) = \frac{1}{\not{k} - m}, \quad (4.23)$$

$$\Gamma_0^\mu(k, p) = \gamma^\mu \quad (4.24)$$

Podemos ver que para el primer orden

$$\begin{aligned} S_F^{0-1}(k) - S_F^{0-1}(p) &= \not{k} - m - \not{p} + m \\ &= (k_\mu - p_\mu)\gamma^\mu \\ &= (k_\mu - p_\mu)\Gamma_0^\mu(k, p), \end{aligned}$$

y es claro que la identidad se cumple. La WTI es entonces una generalización de este hecho para el vértice y el propagador completos. Además, observamos que en el límite cuando  $k \rightarrow p$ , esta igualdad se reduce a

$$\Gamma^\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F^{-1}(p). \quad (4.25)$$

Esta última expresión se conoce como la Identidad de Ward (WI). La WTI nos permite dividir el vértice en dos partes, la parte longitudinal y la parte transversal:

$$\Gamma^\mu = \Gamma_L^\mu(k, p) + \Gamma_T^\mu(k, p), \quad (4.26)$$

con las condiciones  $(k_\mu - p_\mu)\Gamma_T^\mu = 0$  y  $\Gamma_T^\mu(p, p) = 0$ . Es decir, nos damos cuenta de que es posible agregar al vértice  $\Gamma_L^\mu$ , fijado por la WTI, cualquier término  $\Gamma_T^\mu$  con la condición dicha y obtendremos otro vértice que también respeta la WTI. Comencemos entonces la construcción del vértice longitudinal. Si sustituimos la expresión del propagador de fermión en la WI obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Gamma_L^\mu(p, p) &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F^{-1}(p) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\not{p} - M(p^2)}{F(p^2)} \\ &= \frac{\gamma^\mu}{F(p^2)} + 2p^\mu \frac{\partial}{\partial p^2} - 2p^\mu \frac{\partial}{\partial p^2} \frac{M(p^2)}{F(p^2)}.\end{aligned}$$

Analizando la WTI, notamos que  $\Gamma_L^\mu(k, p)$  deberá ser una función simétrica respecto a un intercambio de  $k$  con  $p$ , pero además debe reducirse a la última expresión en el límite cuando  $k \rightarrow p$ . Una forma de conseguir esto es usar la propuesta de Ball y Chiu [33] en la que hacemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{F(p^2)} &\rightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right], \\ p^\mu &\rightarrow \frac{1}{2} (k^\mu + p^\mu), \\ \not{p} &\rightarrow \frac{1}{2} (\not{k} + \not{p}), \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \frac{1}{F(p^2)} &\rightarrow \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right], \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \frac{M(p^2)}{F(p^2)} &\rightarrow \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right].\end{aligned}$$

Con estas sustituciones obtenemos un término longitudinal:

$$\begin{aligned}\Gamma_L^\mu(k, p) &= \frac{\gamma^\mu}{2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right] \\ &+ \frac{1}{2} (k^\mu + p^\mu) \frac{\not{k} + \not{p}}{k^2 - p^2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right] \\ &- \frac{k^\mu + p^\mu}{k^2 - p^2} \left[ \frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right].\end{aligned}\tag{4.27}$$

Para escribir el vértice mas comodamente definimos

$$\begin{aligned} a(k^2, p^2) &\equiv \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right], \\ b(k^2, p^2) &\equiv \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right], \\ c(k^2, p^2) &\equiv -\frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right]. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\Gamma_L^\mu(k, p) = \gamma^\mu a(k^2, p^2) + (k^\mu + p^\mu)(\not{k} + \not{p})b(k^2, p^2) + (k^\mu + p^\mu)c(k^2, p^2). \quad (4.28)$$

Agregar el término transversal  $\Gamma_T^\mu(k, p)$  resulta necesario para que el vértice completo reproduzca los resultados obtenidos perturbativamente a un lazo. Como se había mencionado en un principio, el vértice es una combinación lineal de doce vectores independientes. Hemos escrito el vértice longitudinal, en una base distinta de la que mostramos al principio, estando en términos de los vectores  $\gamma^\mu, (k^\mu + p^\mu)(\not{k} + \not{p}), k^\mu + p^\mu$ . La parte transversal del vértice se escribe en términos de ocho vectores restantes:

$$\Gamma_T^\mu(k, p) = \sum_{i=1}^8 \tau_i(k, p) T_i^\mu(k, p). \quad (4.29)$$

Por comodidad, deseamos que  $q_\mu T_i^\mu(k, p) = 0$  para  $i = 1, \dots, 8$ . Sabemos de antemano que la expresión para el vértice deberá estar libre de singularidades cinemáticas (singularidades en el límite  $k^2 \rightarrow p^2$ ). Ball y Chiu [33] propusieron una base (en el caso de QED4) para la cual cada coeficiente  $\tau_i(k, p)$  obtenido mediante el cálculo perturbativo de primer orden en la nor-

ma de Feymman,  $\xi = 1$ , no presenta dichas singularidades:

$$\begin{aligned}
T_1^\mu &= p^\mu(q \cdot k) - k^\mu(p \cdot k), \\
T_2^\mu &= [p^\mu(q \cdot k) - k^\mu(p \cdot k)](\not{k} + \not{p}), \\
T_3^\mu &= q^2 \gamma^\mu - q^\mu \not{q}, \\
T_4^\mu &= [p^\mu(q \cdot k) - k^\mu(p \cdot k)]k^\lambda p^\nu \sigma_{\lambda\nu}, \\
T_5^\mu &= q_\nu \sigma^{\nu\mu}, \\
T_6^\mu &= \gamma^\mu(p^2 - k^2) + (p + k)^\mu \not{q}, \\
T_7^\mu &= \frac{1}{2}(p^2 - k^2)[\gamma^\mu(\not{k} + \not{p}) - p^\mu - k^\mu] + (k + p)^\mu k^\lambda p^\nu \sigma_{\lambda\nu}, \\
T_8^\mu &= -\gamma^\mu k^\nu p^\lambda \sigma_{\nu\lambda} + k^\mu \not{p} - p^\mu \not{k}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Notamos que  $q_\mu T_i^\mu = 0$ , en todos los casos. Sin embargo, al cambiar a una norma arbitraria aparecerán las singularidades en  $\tau_4^\mu(k, p)$  y  $\tau_7^\mu(k, p)$ . Esta situación se resuelve si modificamos  $T_4^\mu$  según la propuesta de Kizilersü, Reenders y Pennington [ref 10] (en el caso de QED4) en la siguiente manera:

$$T_4^\mu = q^2[\gamma^\mu(\not{k} + \not{p}) - p^\mu - k^\mu] + 2(p - k)^\mu k^\lambda p^\nu \sigma_{\lambda\nu} \tag{4.31}$$

Con esto hemos escrito en su totalidad la base para el vértice completo. Los trabajos de Bashir, Kizilersü y Pennington [ref 11, 12, 13] y después de Bashir y Raya [ref 14, 15], confirman que la misma base funciona perfectamente bien en el caso de QED3. En la próxima sección hablaremos acerca de los propagadores fermiónico y gluónico así como del vértice quark-gluón en QCD.

## 4.5. Propagadores en QCD

En la figura (4.9), mostramos las reglas de Feymman correspondientes a la teoría de campos de QCD <sup>1</sup>, mediante la cual se puede deducir las ecuaciones de Schwinger Dyson y a través de ellas encontrar los parámetros asociados a la generación dinámica de masas y al desconfinamiento. En esta figura, se muestra el remplazo analítico, en primer lugar del propagador del quark, luego del propagador gluónico y finalmente, del vértice quark gluón. Donde  $D_{\mu\nu}^{ab}$  representa el propagador del quark gluón y  $g$  corresponde al acoplamiento de QCD. Para resolver las ecuaciones de Schwinger Dyson, necesitamos obtener expresiones analíticas para las representaciones diagramáticas correspondientes a las figuras (4.10) y (4.11).

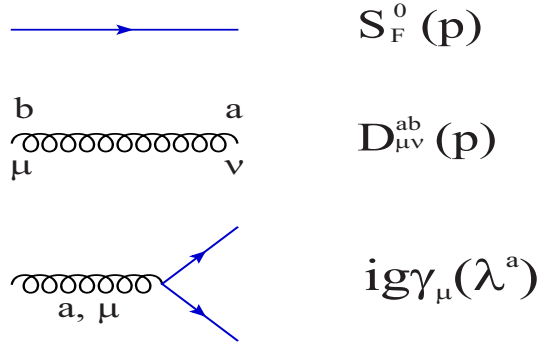


Figura 4.9: Reglas de Feynman para QCD.

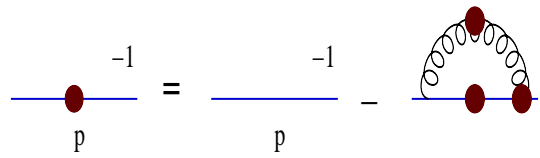


Figura 4.10: Propagador del quark.

Con estas representaciones, se obtiene la expresión para:

- Propagador del quark:

$$S^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m + \Sigma(p), \quad (4.32)$$

La función  $\Sigma(p)$  está definida por

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \frac{\lambda^a}{2} \Gamma_\nu(q,p), \quad (4.33)$$

y es la autoenergía del propagador del quark, las matrices  $\lambda^a$  son las matrices de Gell Mann y  $\Gamma_\nu(q,p)$  es el vértice completo del quark gluón. Donde  $p$  y  $q$  son vectores en 4 dimensiones, que corresponden a los momentos externo e interno del quark. En la figura (4.11) mostramos el propagador del gluón, el cual jugará un papel sumamente importante, especialmente en la inclusión de masa a temperatura distinta de cero. En la siguiente sección nos encargaremos de resolver las ESD en la presencia de temperatura finita.

<sup>1</sup>Para QCD a temperatura cero y finita, estaremos trabajando en el espacio Euclidiano

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1} \stackrel{-1}{=} \text{Diagram 2} \stackrel{-1}{=} \text{Diagram 3} + \frac{1}{2} \text{Diagram 4} \\
& + \frac{1}{2} \text{Diagram 5} + \frac{1}{6} \text{Diagram 6} + \frac{1}{2} \text{Diagram 7} \\
& - \text{Diagram 8} - \text{Diagram 9}
\end{aligned}$$

Figura 4.11: Propagador del gluón.

## 4.6. QCD a Temperatura finita

El estudio de la teoría cuántica de campos (QFT) a temperatura finita, inicialmente estuvo motivada por los problemas cosmológicos [34] y más recientemente, ha adquirido mucha mayor fuerza, debido a las colisiones de iones relativistas pesados y las especulaciones acerca de las posibles transiciones de fase. El estudio de la temperatura finita, adquiere importancia debido a que podría explicarnos las primeras etapas del universo, donde la temperatura era mucho más caliente, y las simetrías no habían sido rotas. En un fondo térmico, se espera la criticalidad en la temperatura, es decir, se espera desencadenar la generación dinámica de masas, por debajo de cierta temperatura crítica y restaurar la simetría quiral si superamos este valor. En este punto, el fuerte acoplamiento que caracteriza a los quarks y gluones dentro de los hadrones disminuye lo suficiente como para que estas partículas actúen como si fueran libres, a este fenómeno se le conoce como *Libertad Asintótica*. Pero a bajas energías, los quarks y gluones sufren de una esclavitud infrarroja: todos los quarks y gluones están ligados en objetos compuestos sin color, los hadrones. En particular, en este trabajo, nos interesa recorrer

todo el rango de temperaturas, desde que estas son pequeñas permitiendo el rompimiento de la simetría quiral, hasta que las alturas son suficientemente altas como para restaurarla. Para realizar este estudio, necesitaremos algunos formalismos que describiremos en las siguientes secciones.

## 4.7. Formalismo de tiempo imaginario

El *Formalismo de Tiempo Imaginario*, también es conocido con el nombre de *Formalismo de Matsubara*, debido a que fué Matsubara quien lo ideó. Consiste en tomar el tiempo como si estuviera únicamente sobre el eje imaginario. Para ver el procedimiento, consideremos la función de partición

$$Z = \text{Tr}[\exp(-\beta H)]. \quad (4.34)$$

Donde  $\beta = 1/T$  es la temperatura inversa. En particular, el operador  $\exp(-\beta H)$  es el operador de evolución temporal  $U(t', t)$ , si identificamos

$$\beta = i(t - t'). \quad (4.35)$$

En este sentido, el sistema a temperatura finita, corresponde a un sistema que se propaga solamente en el tiempo imaginario (Euclideo). En el formalismo de tiempo imaginario, se realiza una continuación analítica del eje de tiempo real mediante los siguientes reemplazos

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -i\tau, \\ x^0 &\rightarrow -ix^4, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde  $\tau$  es real. Este procedimiento es llamado formalmente, *rotación de Wick*. Estos cambios implican, que estamos cambiando del espacio de Mikowski al espacio Euclidiano, dado que la métrica de Mikowski se transforma en métrica Euclidea (con un cambio de signo), de la siguiente manera:

$$t^2 - \vec{x}^2 \rightarrow -(\tau^2 + \vec{x}^2). \quad (4.37)$$

En el espacio de momentos, esta operación corresponde a

$$p^0 \rightarrow -ip_4, \quad (4.38)$$

o de manera equivalente

$$d^4p = dp_0 d(\vec{p}) \rightarrow id^4p_E. \quad (4.39)$$

Cuando comparamos con las reglas de Feynman a temperatura cero, las únicas modificaciones que hay que realizar son:

- $$S_F(p_1, \dots, p_n) \rightarrow (-i)^n S_F(p_1, \dots, p_n), \quad (4.40)$$

- $$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (4.41)$$

- $$(2\pi)^4 \delta(p) \rightarrow -i\beta(2\pi)^3 \delta_{n,0} \delta(\vec{p}). \quad (4.42)$$

Con las técnicas desarrolladas, en la siguiente sección nos dedicaremos al estudio del propagador fermiónico a temperatura finita.

## 4.8. Propagador Fermiónico a Temperatura Finita

A temperatura suficientemente alta  $T \gg \Lambda_{QCD}$ , debido a la libertad asintótica de QCD, la teoría de perturbaciones puede aplicarse en la región próxima del gas de quarks y gluones libres, QGP. En este régimen la simetría quiral no está rota, por lo que esperamos una transición de un estado con simetría quiral rota a un estado de equilibrio con simetría quiral en un valor de temperatura alta. La disminución del acoplamiento también causa el desconfinamiento de los grados de libertad con color, es decir, quarks y gluones. Esperamos que la existencia de este punto de transición se refleje en el comportamiento anómalo de algunas funciones/parámetros termodinámicas(os) de QCD en la vecindad de este punto crítico. De hecho, esperamos la aparición de un punto extremo o bien de una singularidad cerca de  $T_c$ , dependiendo de la naturaleza de la transición. Otra de las transiciones de fase que puede ocurrir, sucede cuando se aumenta la densidad bariónica. De hecho, cuando la densidad aumenta más allá de un punto crítico, se da un apantallamiento de las interacciones entre los quarks y gluones. De esta manera se rompen las fuertes cadenas que los atan entre sí, como se ilustra en la figura 4.12, terminando con su confinamiento dentro de los hadrones y pueden viajar distancias mucho mayores que las que usualmente recorren. Debido al mismo apantallamiento, la simetría quiral se restaura. Estas transiciones son conocidas como la transición de fase desconfiada y la transición quiral respectivamente.



Figura 4.12: Los quarks y gluones se encuentran confinados dentro de los hadrones .

Si queremos analizar ambas transiciones de fase, a través de las ecuaciones de Schwinger Dyson, nuestro objeto central de estudio, será el propagador fermiónico. Iniciemos viendo la estructura a temperatura cero, que esta dado por

$$S_F(p)^{-1} = i\gamma \cdot pA(p^2) + B(p^2), \quad (4.43)$$

donde las funciones  $A(p^2)$  y  $B(p^2)$  satisfacen que:

$$M(p^2) = B(p^2)/A(p^2), \quad (4.44)$$

con  $M(p^2)$  la función de masa. Cuando introducimos la temperatura en el propagador anterior, tomando en cuenta que se rompe la invarianza de Lorentz, la cuál ya no es posible debido a efectos térmicos, encontramos que el propagador a temperatura finita es:

$$S_F(\vec{p})^{-1} = i\vec{\gamma} \cdot \vec{p}A(\vec{p}^2, w_n^2) + i\gamma_4 w_n C(\vec{p}^2, w_n^2) + B(\vec{p}^2, w_n^2), \quad (4.45)$$

con  $w_n = (2n + 1)\pi T$  las frecuencias de Matsubara fermiónicas. Como podemos notar por comparación entre las ecuaciones (4.43) y (4.45), hemos sustituido la primer componente del momento por las frecuencias de Matsubara, añadiendo de esta manera los efectos térmicos. Notemos además, que ahora

habrá que determinar las tres funciones  $A(\vec{p}^2, w_n^2)$ ,  $B(\vec{p}^2, w_n^2)$  y  $C(\vec{p}^2, w_n^2)$ , lo cuál aumenta de manera significativa la complejidad de la búsqueda de las posibles soluciones a la ecuación del propagador. Por otro lado, hasta ahora solo hemos hablado del límite quiral donde la masa corriente de los quarks es cero. Debemos encontrar la manera de introducir la masa física de los quarks, aunque esto rompa de entrada la simetría quiral. A esto dedicaremos la siguiente sección.

## 4.9. Propagador del Gluón

A temperatura finita, la simetría Euclidiana se rompe debido al efecto del baño térmico. Como consecuencia, el propagador del gluón, no puede ser descrito como una sola estructura tensorial. En lugar de esto, debemos considerar la descomposición

$$D_{\mu\nu}(p) = P_{\mu\nu}^T(p)D_T(p) = P_{\mu\nu}^L(p)D_L(p), \quad (4.46)$$

donde las estructuras  $P_{\mu\nu}^T(p)$  y  $P_{\mu\nu}^L(p)$  son transversas y longitudinales respectivamente a la dirección del momento tridimensional. En términos de momentos

$$\begin{aligned} P_{44}^T &= P_{4i}^T = 0, & P_{ij}^T(p) &= \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2}, \\ P_{\mu\nu}^L(p) &= \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - P_{\mu\nu}^T(p). \end{aligned} \quad (4.47)$$

En cada una de estas expresiones, hemos sido muy cuidadosos en la notación:  $\vec{p}$  implica las tres componentes espaciales  $(p_1, p_2, p_3)$ , pero cuando escribimos  $p$ , nos referimos a las cuatro componentes del cuadrivector. De acuerdo a la referencia [35], vemos en la figura (4.13), el comportamiento de los propagadores gluónicos longitudinales y transversales a temperatura  $T = 0$  GeV. Es claro, que ambos propagadores coinciden, es decir,  $D_T(p) = D_L(p) = D(p)$ . Si este es el caso, las ecuaciones de Schwinger Dyson, se simplifican de manera considerable, como se verá en secciones posteriores, haciendo el estudio de la generación dinámica de masas, más fácil.

Sin embargo, en la figura (4.14), se grafica el comportamiento del propagador gluónico transversal y el comportamiento el propagador longitudinal, pero ahora a temperatura  $T = 0.25$  GeV. En esta gráfica se exhibe el hecho

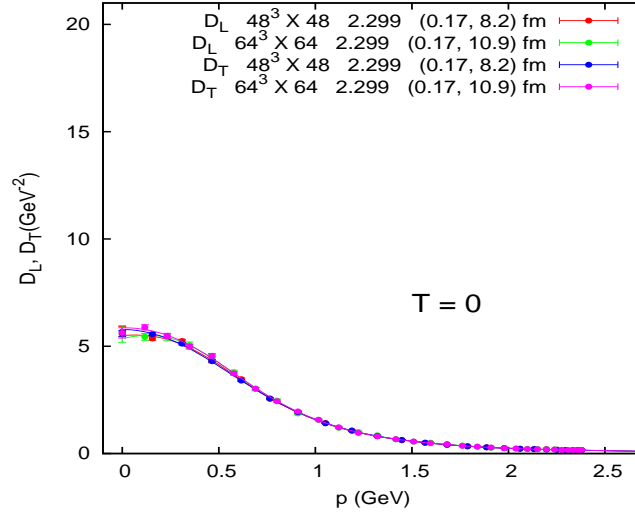


Figura 4.13: Propagadores longitudinal y transversal a  $T = 0$  GeV.

de que a temperaturas altas, estos dos propagadores son claramente distinguibles, de manera que para reproducir correctamente la física de partículas a altas temperaturas, es necesario incluir las distintas definiciones de cada uno de ellos de manera cuidadosa.

De hecho, la diferencia entre ellos, esta gobernada por la aparición del término conserniente a la *Masa de Debye* ( $m_g$ ), de la siguiente manera

$$\begin{aligned} D_T(p) &= \mathcal{D}(p^2, 0), \\ D_L(p) &= \mathcal{D}(p^2, m_g^2). \end{aligned}$$

Donde, hemos definido

$$\mathcal{D}(p^2, m_g^2) = \frac{4\pi^2}{\sigma^6} D(\Omega_n^2 + \vec{p}^2) e^{(-\Omega_n^2 + \vec{p}^2)}. \quad (4.48)$$

Los parámetros  $D$  y  $\sigma$ , son parámetros fijos y  $\Omega_n = 2n\pi T$ . En la siguiente sección daremos mas detalles acerca de la masa de Debye.

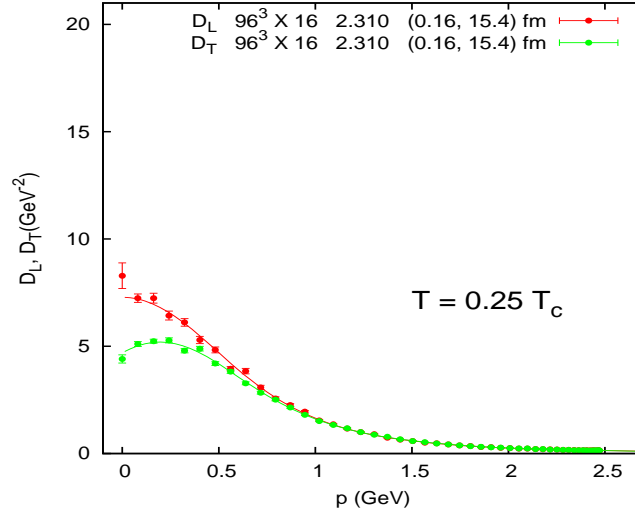


Figura 4.14: Propagadores longitudinal y transversal a  $T = 0.25 T_c$ .

## 4.10. Masa de Debye

Una de las propiedades fundamentales del plasma es la masa de apantallamiento de Debye  $m_g$ , dado por

$$m_g^2 = g^2 \left( \frac{N_f T^2}{6} + \frac{N_c T^2}{3} + \frac{N_f \mu^2}{2\pi^2} \right). \quad (4.49)$$

Donde  $N_f$  se refiere al número de sabores, y  $N_c$  corresponde al número de colores de los quarks. El potencial químico está representado por  $\mu^2$ . Como es claro en la expresión (4.49), cuando la temperatura del sistema aumenta, también lo hace la masa de Debye, y lo mismo pasa si incrementamos el potencial químico. De esta manera, observamos que cuando nos encontramos cerca del punto de transición de la fase quiral, el efecto de la masa de Debye es más significativo. En tanto que a condiciones bajas de temperatura y potencial químico, el efecto de la masa de Debye es prácticamente despreciable. El término de la masa de Debye, tiene mayor impacto justo en el momento en que las masas constituyentes de los quarks comienzan a desaparecer por los efectos térmicos y del potencial químico. Por lo que su inclusión en las ecuaciones más allá del límite quiral, parece ser de importancia.

En los siguientes dos capítulo de esta tesis, se encuentra un trabajo original, que trata de darnos luz sobre el diagrama de fase de QCD. Para ello, necesitaremos aplicar todos los conocimientos que hemos adquirido hasta este momento, así como los formalismos que hemos desarrollado en esta sección a temperatura finita, pero ahora incluyendo además la presencia de un potencial químico, que juega un papel tan relevante como la misma temperatura y que es capaz por si mismo de producir los dos fenómenos que intentamos entender: La restauración de la simetría quirial y el desconfinamiento de quarks y gluones.

# Capítulo 5

## Simetría Quiral y Desconfinamiento

En este capítulo, nos enfocaremos en tratar de obtener la respuesta de la incógnita acerca de si la transición de fase quiral y la de desconfinamiento son iguales en el diagrama de fase de QCD. Para esto, necesitaremos asociar un parámetro de orden a cada una de estas transiciones en el formalismo de tiempo imaginario, que hemos desarrollado en el capítulo anterior. En particular, en el caso de la transición de fase quiral, usaremos como parámetro de orden, el condensado quark antiquark. Para el confinamiento, usaremos el parámetro que se puede derivar a través de las reglas de suma a energía finita. Después de obtener ambos parámetros realizaremos un análisis de su comportamiento para deducir si son o no simultáneos.

### 5.1. Propagador del Quark y el Condensado

En esta sección, nos encargaremos de calcular el condensado de quarks usando el propagador  $S(k_0, \vec{k})$ , donde nuevamente hemos separado la primera componente del cuadrivector en el espacio euclideo  $k$ , de sus componentes espaciales  $\vec{k}$ , para incorporar los efectos del baño térmico. Comencemos por escribir el propagador del quark a temperatura finita  $T$  y potencial químico  $\mu$ . Para la introducción de  $\mu$  solo se hace un corrimiento respecto a la primera componente del cuadrivector del momento, es decir  $k_0 \rightarrow k_0 + i\mu$ . Por lo tanto,

se puede escribir el condensado quark antiquark de la siguiente manera

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S(k)], \quad (5.1)$$

y al introducir la temperatura y el potencial químico obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle(T, \mu) &= -N_c T \sum_n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \text{Tr}[S(k_0, \vec{k})] \\ &\times \delta[k_0 - (2n + 1)\pi T - i\mu] \\ &= -N_c T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \times \text{Tr} S[(2n + 1)\pi T + i\mu, \vec{k}]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Introduciendo la formula de Poisson,

$$\sum_l (-1)^l \exp\{(ik_0 + \mu)l/T\} = 2\pi T \sum_n \delta[k_0 - (2n + 1)\pi T - i\mu], \quad (5.3)$$

obtenemos una relación entre el primer término de la ecuación (5.2) con una expresión que es más fácil de usar en los cálculos, es decir:

$$\begin{aligned} T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr} S[(2n + 1)\pi T + i\mu, \vec{k}] = \\ \sum_l (-1)^l \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S(k_0, \vec{k})] \exp\{(ik_0 + \mu)l/T\}. \end{aligned}$$

Usando estos resultados en la ecuación (5.2), obtenemos una forma más compacta para el condensado de quarks.

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle(T, \mu) &= -N_c \sum_l (-1)^l \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\ &\times \text{Tr}[S(k_0, \vec{k})] \exp\{(ik_0 + \mu)l/T\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Podemos identificar que en la Ec. (5.4), la contribución del vacío para el condensado proviene del término con  $l = 0$ , sustituyendo  $(k_0, \vec{k})$  con  $k$ . El valor del condensado del vacío es

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle|_0 = -(0.241 \text{ GeV})^3. \quad (5.5)$$

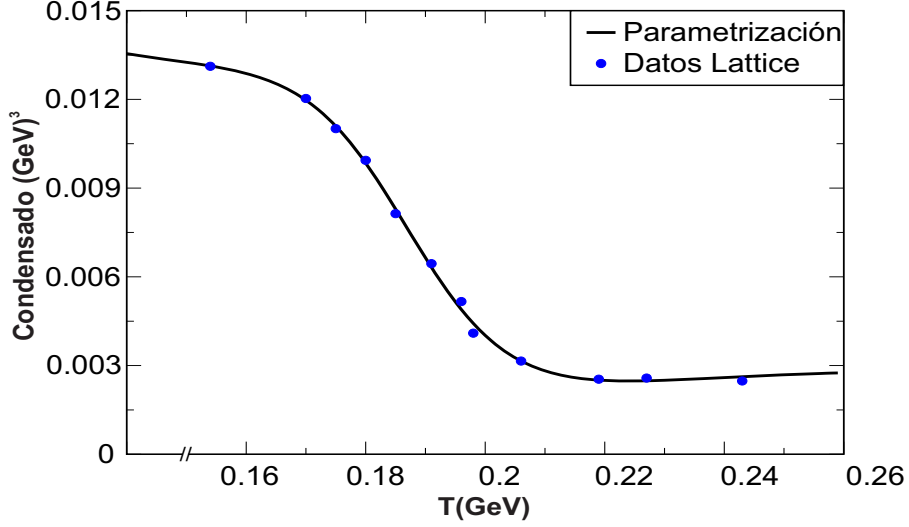


Figura 5.1: Los datos de Lattice y la parametrización del valor absoluto del condensado del quark como función de  $T$  en la región de transición de fase.

La contribución al condensado debido a la materia, proviene de todos los términos con  $l$  distintos de cero,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi}\psi \rangle(T, \mu) &= -N_c \sum_{l \neq 0} (-1)^l \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\
&\times \text{Tr}[S(k_0, \vec{k})] \exp\{(ik_0 + \mu)l/T\}. \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Necesitamos ahora, determinar la forma para el propagador  $S(k_0, \vec{k})$ , teniendo en cuenta la pérdida de la covarianza de Lorentz a temperatura finita  $T$  y/o  $\mu$ . La estructura general del propagador inverso esta dada por (4.43)

$$S^{-1}(k_0, \vec{k}) = A\gamma_0 k_0 + B\vec{\gamma} \cdot \vec{k} + C, \quad (5.7)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son funciones escalares de  $k_0^2$  y  $\vec{k}^2$ . Que pueden obtenerse mediante métodos no perturbativos como las soluciones de las SDE. Nosotros usaremos este procedimiento, motivados por el éxito de la truncación arcoiris a las SDE y la interacción efectiva de la Ref. [36] en la descripción de los pseudo escalares ligeros, mesones vectoriales, y la representación meromórfica del propagador del quark [37]. Nosotros haremos una extensión de este trabajo

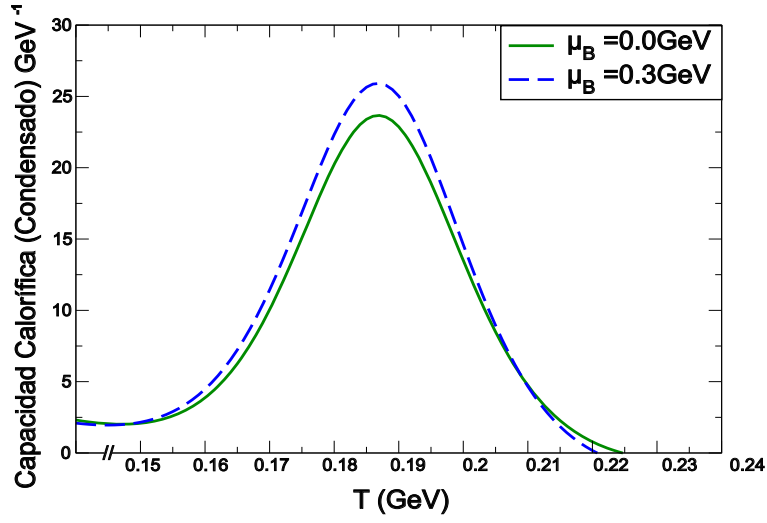


Figura 5.2: Capacidad calorífica para el condensado del quark normalizado (a su valor en el vacío) a  $T$  para  $\mu = 0$  (línea sólida) y  $\mu_B = 300$  MeV (línea punteada). La temperatura crítica  $T_c$  corresponde al máximo de la capacidad calorífica para un vaalor dado de  $\mu_B$ .

a temperatura finita y proponemos la parametrización

$$S(k_0, \vec{k}) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{r_i}{i\not{k} + m_i} \right) + \frac{r_4}{i\gamma_0 k_0 + ib\vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m_4}, \quad (5.8)$$

y escogemos  $b$ , las masas  $m_i$ , y los residuos  $r_i$ ,  $i = 1 \dots 4$ , como números reales. Esta parametrización esta inspirada en el propagador a temperatura cero (4.43), que podemos escribir en términos de  $S(p) = -i\not{p}\sigma_v(p) + \sigma_s(p)$ .

$i$	$m_i$ (GeV)	$r_i$
1	-0.490	-0.112
2	0.495	0.352
3	-0.879	0.259

Cuadro 5.1: Los parámetros  $m_i$  y  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  que describen la parte covariante de Lorentz del propagador del quark.

Donde

$$\sigma_s(p) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{r_i a_i}{k^2 + a_i^2} \right), \quad (5.9)$$

$$\sigma_s(v) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{r_i}{k^2 + a_i^2} \right). \quad (5.10)$$

Para determinar las primeras tres componentes de  $m$  y  $r$ , hemos realizado una minimización de estos parámetros reales, que deben satisfacer las siguientes condiciones

- $$\frac{r_1}{a_1} + \frac{r_2}{a_2} + \frac{r_3}{a_3} = \sigma_s(0) \quad (5.11)$$

- $$\frac{r_1}{a_1^2} + \frac{r_2}{a_2^2} + \frac{r_3}{a_3^2} = \sigma_v(0) \quad (5.12)$$

- $$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{1}{2} \quad (5.13)$$

de manera que reproduzcan la función de masa  $M(k) = \sigma_s(p)/\sigma_v(p)$ , dada en la referencia [38] (que usa parámetros complejos), la cuál posee las características claves del modelo arcoiris [36] a  $T = 0$ , y en particular, para ajustar al comportamiento ultra-violeta de la ecuación de gap para quarks masivos, el valor del condensado en el vacío y la masa constituyente de los quarks, de acuerdo a las SDE. La función de masa está graficada en la figura (5.3). Los valores concernientes a los parámetros  $m_i$ ,  $r_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , se encuentran en la tabla (5.1). También buscamos valores de  $b$ ,  $m_4$  y  $r_4$  que dependan explícitamente de la temperatura  $T$ . El último término en la Ec. (5.8) se agrega

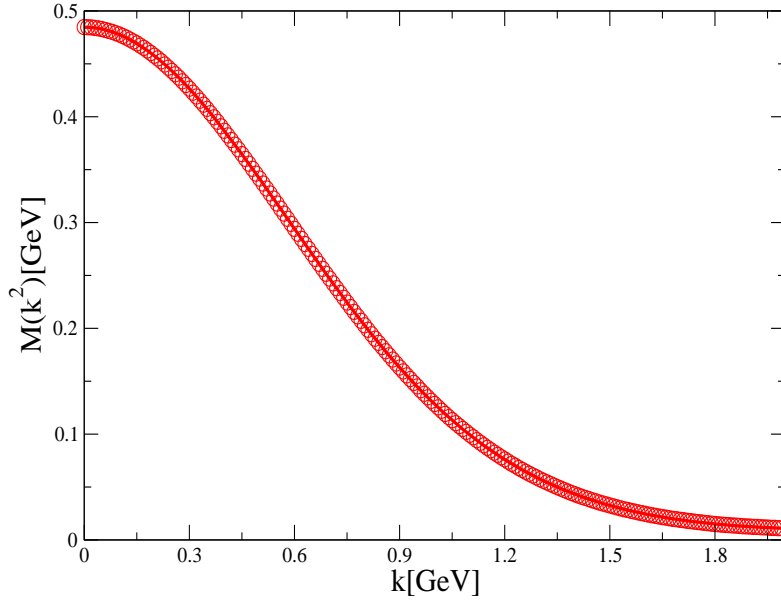


Figura 5.3: Función de masa que satisfacen los parámetros  $m_i, r_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ .

para que reproduzca los efectos del rompimiento de la covarianza de Lorentz inducido por el baño térmico a  $T \neq 0$  y/o  $\mu \neq 0$ . Los valores de  $b, m_4$  y  $r_4$  se ajustan para reproducir el condensado de los quarks ligeros como función de  $T$  para  $\mu_B = 0$ , Ec. (5.19) que hemos extraído de lattice QCD [7] usando un proceso de minimización sobre una malla de 1500 puntos a lo largo del intervalo de  $T$ . Estos parámetros no son funciones analíticas de  $T$ , las cuales en la práctica son interpoladas para obtener el propagador. En la Tabla II se muestra los valores de estos parámetros calculados en las temperaturas donde se conocen los puntos de lattice.

Retomando la expresión para la parametrización para el propagador fermiónico dado en la ecuación (5.8), reescribimos

Después de realizar la integración en la Ec. (5.6), y en términos de la parametrización del propagador del quark en Ec. (5.8), obtenemos

$$S(k_0, \vec{k}) = \sum_{i=1}^3 \frac{r_i(-i\not{k} + m_i)}{k^2 + m_i^2} + \frac{r_4(i\gamma_0 k_0 + ib\vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m_4)}{k_0^2 + b^2\vec{k}^2 + m_4^2}. \quad (5.14)$$

Calculando la traza de la expresión anterior, obtenemos

$$\text{Tr}[S(k_0, \vec{k})] = 4 \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{r_i m_i}{k^2 + m_i^2} + \frac{r_4 m_4}{k_0^2 + b^2\vec{k}^2 + m_4^2} \right] \quad (5.15)$$

De acuerdo a la ecuación (5.4), esto nos conduce a realizar una integral mas general, dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{i\beta k_0}}{k_0^2 + a^2\vec{k}^2 + m^2} = \frac{e^{-\sqrt{a^2\vec{k}^2 + m^2}|\beta}}{\sqrt{a^2\vec{k}^2 + m^2}} \quad (5.16)$$

A continuación, podemos realizar la integral sobre las componentes espaciales

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\sqrt{a^2\vec{k}^2 + m^2}|\beta}}{\sqrt{a^2\vec{k}^2 + m^2}} = \frac{m}{2\pi^2 a^3 |\beta|} K_1(|m|\beta), \quad (5.17)$$

$T$ (GeV)	$r_4 m_4^2 / b_4^3$ (GeV <sup>2</sup> )	$m_4$ (GeV)
0.139	-0.0651954	0.366218
0.154	-0.0494999	0.305228
0.170	-0.0377697	0.220547
0.175	-0.10482	0.321765
0.180	-0.0952544	0.279434
0.185	-0.352287	0.437673
0.191	-0.344934	0.19104
0.196	-0.123177	0.250567
0.198	-0.342024	0.397248
0.206	-1.39944	0.377043
0.219	-0.975465	0.387967
0.227	-0.460765	0.489013
0.243	-1.30498	0.802619
0.259	-0.851509	0.693332

Cuadro 5.2: Parámetros  $b$ ,  $m_4$  y  $r_4$  que describen el rompimiento de Lorentz del propagador en lattice en los puntos  $T$ .

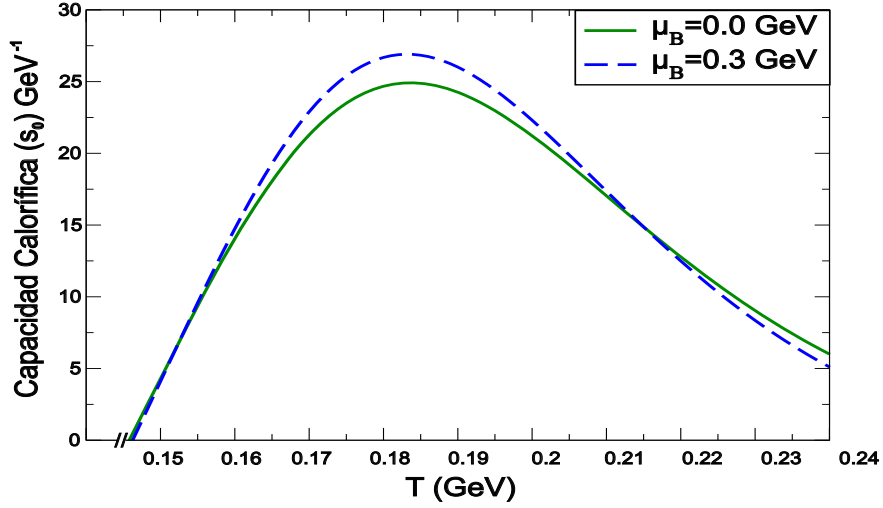


Figura 5.4: Capacidad calorífica para la PQCD normalizada (a su valor en el vacío) energía de umbral al cuadrado de  $s_0$  como función de  $T$  para  $\mu_B = 0$  (línea sólida) y  $\mu_B = 300$  MeV (línea punteada). La temperatura crítica  $T_c$  corresponde al máximo de la capacidad calorífica para un valor dado de  $\mu_B$ .

donde es claro que  $a$  toma los valores de 1 y  $b$ , finalmente, sustituyendo estos resultados en la ecuación para el condensado, con  $\mu = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned}
|\langle \bar{\psi}\psi \rangle(T, \mu)|_{\text{matt}} &= \frac{8TN_c}{2\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \sum_{i=1}^3 r_i m_i^2 K_1(lm_i/T) \\
&+ \frac{r_4 m_4^2}{b^3} K_1(lm_4/T), \tag{5.18}
\end{aligned}$$

cuando introducimos el potencial químico, en la ecuación (5.18), basta con multiplicar por el término  $e^{\mu l \beta}$ , ya que no depende de  $k$ . Un punto importante, es que al multiplicar este término por el factor  $(-1)^l$ , se obtendrán valores positivos y negativos para  $\mu l \beta$ . De donde finalmente obtenemos la expresión

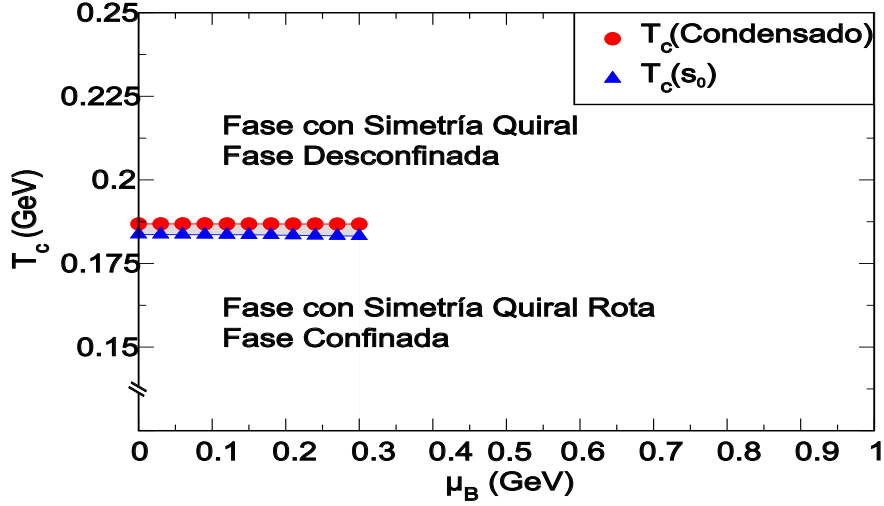


Figura 5.5: Temperaturas de transición para el condensado del quark y la energía de umbral al cuadrado  $s_0$  como función del potencial químico bariónico.

analítica para el propagador fermiónico

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\psi}\psi \rangle(T, \mu)|_{\text{matt}} &= -\frac{8TN_c}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \cosh\left(\frac{\mu l}{T}\right) \\
 &\times \sum_{i=1}^4 \frac{r_i m_i^2}{|b_i|^3} K_1\left(\frac{l|m_i|}{T}\right), \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

donde  $K_1(x)$  es una función de Bessel, y por conveniencia hemos definido  $b_i = 1$  para  $i = 1, 2, 3$ , y  $b_4 = b$ . Fig 6.6 muestra los datos de lattice QCD para los condensados de los quarks ligeros como función de  $T$  [7], junto con la curva obtenida para el valor absoluto de la suma de las Ecs. (5.5) y (5.19) para  $\mu_B = 0$ . Esta parametrización nos da una buena descripción del condensado en el rango de temperatura donde la transición de fase ocurre.

## 5.2. Diagrama de Fase de QCD

Con la parametrización de los datos de lattice a  $T$  finita y  $\mu_B = 0$ , podemos proceder a extender el análisis a  $\mu_B = 3\mu$  finitos. Para explorar

el diagrama de fase de QCD podemos hacer uso de los resultados del condensado ligero y de la energía de umbral  $s_0$  que describe las transiciones de fase quirial y de desconfinamiento respectivamente. Luego, calculamos las susceptibilidades correspondientes que son proporcionales a las capacidades caloríficas,  $-\partial\langle\bar{\psi}\psi\rangle/\partial T$  y  $-\partial s_0/\partial T$ . En las figuras (6.7) y (6.8) se muestra un ejemplo de estas capacidades caloríficas (normalizadas a su valor en el vacío) para dos valores de  $\mu_B = 0, 0.3$  GeV. Para un  $\mu_B$ , la temperatura de transición se indentifica por el valor  $T_c$  donde la capacidad calorífica alcanza su máximo. En la Fig 6.9 se muestran las temperaturas de transición para el condensado y para  $s_0$ . Estas temperaturas son básicamente idénticas en una pequeña ventana de apenas 3 MeV alrededor de  $T = 185$  MeV, para todos los valores de  $\mu_B$  hasta el valor máximo de  $\mu_B = 300$  MeV.

De esta manera hemos demostrado que la restauración de la simetría quirial y del desconfinamiento están relacionadas mediante la FESR y ambas fases poseen temperaturas de transición esencialmente iguales. En la simpleza de este escenario, hemos podido extender el análisis a un potencial químico  $\mu = 300$  más allá de este potencial se encontrará el potencial bariónico crítico para una T de alrededor de 185 MeV. Una localización mas precisa requiere una refinación de la parametrización para el propagador del quark. Una propuesta alternativa, está mostrada en el siguiente capítulo de esta tesis.

### 5.3. Reglas de suma a Energía Finita

### 5.4. Parámetro de orden para el Desconfinamiento

En Cromodinámica Cuántica (QCD) las interacciones entre los quarks depende de su carga de color. Cuando los quarks se encuentran dentro de un medio, la carga puede sufrir el efecto de un apantallamiento, cuando aumenta la densidad. El aumento en la densidad se logra mediante dos procedimientos, el primero de ello consiste en incrementar el valor de la temperatura, de esta manera, las colisiones entre quarks producen mas quarks o bien, mas gluones. Otra manera de lograr el aumento de la densidad es comprimiendo el sistema, de manera que se incrementa la densidad bariónica. Cuando la densidad aumenta más allá de un cierto valor crítico, esperamos que los quarks y gluones se liberen de su fuerte acoplamiento dentro de los hadrones, siendo

capaces de moverse a lo largo de trayectorias mucho mas grandes de las que puede moverse dentro de los hadrones. Esta transición se llama usualmente *Transición de Fase desconfinada*.

La masa de los quarks ligeros en el Lagrangiano de QCD es prácticamente cero, sin embargo, cuando estos se encuentran confinados dentro de los hadrones, los quarks poseen una masa del orden de 300 MeV. Esta masa es generada mediante la interacción de confinamiento. Es por lo tanto claro que cuando el desconfinamiento ocurre, la masa generada dinámicamente se pierde. El Lagrangiano de QCD, con fermiones no masivos poseen una simetría quiral, el confinamiento rompe esta simetría y el desconfinamiento consigue la restauración de la misma. Esta transición de fase se conoce como *Restauración de la simetría quiral*. En el límite de quarks sin masa, se logra una transición de fase cuando el condensado se anula. Es posible que las transiciones quirales y de desconfinamiento sean coincidentes. Para resolver esta incógnita, es usual analizar el comportamiento de los parámetros de orden de estas transiciones como función de la temperatura  $T$  y del potencial químico  $\mu_B$ . Por ejemplo, a través del lazo de Polyakov  $L$  [39] y del condensado de quarks ligeros  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ . El primero esta relacionado al potencial quark-antiquark  $V(r)$ , evaluado en una separación infinita del quark-antiquark, de manera que en la fase confinada  $L$  se anula o se suprime exponencialmente para quarks con masa finita, y tenga un valor finito en la fase desconfinada. En el caso del condensado, su valor es finito en el caso confinado, y se anula a altas temperaturas y también en el caso de quarks no masivos. Para quarks con masa finita, la simetría se encuentra explícitamente rota en el nivel del Lagrangiano.

A temperatura finita  $T$ , y  $\mu_B = 0$ , lattice QCD provee pruebas del comportamiento anterior, que arroja temperaturas críticas  $T_c$  coincidentes para las dos transiciones en el rango de  $170 \text{ MeV} \lesssim T_c \lesssim 200 \text{ MeV}$ , para masas finita de los quarks [6, 7, 8]. La situación es mucho menos clara cuando los dos ingredientes  $T$  y  $\mu_B$  son finitos. No podemos usar lattice QCD para  $\mu_B \neq 0$  dado que el determinante fermiónico es complejo y entonces los métodos estándares de Monte Carlo fallan. Sin embargo, estas técnicas se pueden adaptar para extraer parte de la información acerca del diagrama de fase de QCD a  $\mu_B \neq 0$  [9], aunque no sea exacta.

Actualmente estamos interesados en la búsqueda de un posible punto crítico [40], que muestre un cambio en el orden de transición, indicando el comienzo de una verdadera transición de la restauración de la simetría quiral o del desconfinamiento. Un parámetro de QCD fenomenológico asociado con

el desconfinamiento fue propuesto hace mucho tiempo en [41], y es la energía  $s_0$ , mas allá de la cual las resonancias hadrónicas del espectro se suavizan y pueden describirse por QCD perturbativa (PQCD). Cuando  $T = 0$ , este umbral de energía continua se encuentra en el rango  $s_0 \simeq 1 - 3 \text{ GeV}^2$ . A temperatura finita, se espera que  $s_0$  disminuya cuando aumentamos el valor de  $T$  y entonces, el umbral de energía se acerca a un valor crítico  $T = T_c$ , que identificaremos con la temperatura de desconfinamiento.

El marco natural para determinar  $s_0$ , son las reglas de suma de QCD [42]. Esta teoría cuántica de campos, esta basada en la expansión de productos de operadores (OPE), de las corrientes de los correladores a cortas distancias, y puede extenderse mas allá de la teoría de perturbaciones. Se basa en el teorema de Cauchy en el plano  $s$  complejo. En particular, para el desarrollo de esta tesis tenemos los resultados obtenidos para  $s_0(T)$ , usando las reglas de suma a energía finita (FESR). Una extensión de este método se estudió en [41] que ha sido comprobada con los estudios de [43], seguido por un largo número de aplicaciones [44]-[45]. En este trabajo, nos interesa de manera muy particular los resultados obtenidos para  $s_0(T)$  en [44] usando las reglas de suma a energía finita (FESR) para los quarks ligeros. La dimensión dominante de las FESR nos relaciona  $s_0(T)$  a la constante de decaimiento del pión  $f_\pi(T)$ , y está a su vez con el condensado ligero de quarks (usando la relación de Gell-Mann-Oakes-Renner [46]). En el límite quiral se satisface que

$$s_0(T)/s_0(0) \approx f_\pi(T)/f_\pi(0) \approx \langle \bar{\psi}\psi \rangle(T)/\langle \bar{\psi}\psi \rangle(0), \quad (5.20)$$

la cual es una muy buena aproximación. A partir de esta relación se comienza a vislumbrar, la posible coincidencia de la temperatura crítica para el desconfinamiento y para la restauración de la simetría quiral. En esta tesis, extenderemos este estudio a densidad finita, obteniendo  $s_0(T)$  de las FESR, usando como valor conocido el condensado de los quarks ligeros a temperatura y densidad finita, que vamos a obtener a través de las ecuaciones de Schwinger Dyson.

## 5.5. Reglas de Suma a Energía Finita

Para empezar con el estudio de las reglas de suma a energía finita, consideramos los vectores axiales de corriente a  $T = 0$

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q^2) &= i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(0)) | 0 \rangle, \\ &= -g_{\mu\nu} \Pi_1(q^2) + q_\mu q_\nu \Pi_0(q^2),\end{aligned}\quad (5.21)$$

donde  $A_\mu(x) =: \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(x)$  : es la corriente vectorial axial,  $q_\mu = (\omega, \vec{q})$  es el cuadrimomento transferido, y las funciones  $\Pi_{0,1}(q^2)$  son las singularidades cinemáticas. Si nos concentramos en la función  $\Pi_0(q^2)$  y escribimos el OPE mas allá de la teoría de perturbaciones en QCD [42], uno de los pilares del método de reglas de suma, es

$$\Pi_0(q^2)|_{\text{QCD}} = C_0 \hat{I} + \sum_{N=1} C_{2N}(q^2, \mu^2) \langle \hat{\mathcal{O}}_{2N}(\mu^2) \rangle, \quad (5.22)$$

donde  $\mu^2$  es una escala de renormalización, los coeficientes de Wilson  $C_N$  dependen de los índices de Lorentz y los números cuánticos de las corrientes y los operadores invariantes de norma  $\hat{\mathcal{O}}_N$ , son construidos a partir de los campos de quarks y gluones en el Lagrangino de QCD. Estos operadores se colocan en orden ascendente de las potencias de los coeficientes de Wilson, que se calculan en PQCD. El operador unitario tiene dimensión  $d = 0$  y  $C_0 \hat{I}$  que viene de la contribución perturbativa. El otro pilar de las reglas de suma es la técnica del teorema de Cauchy en el plano complejo  $s$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} ds f(s) \text{Im} \Pi_0(s) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(|s_0|)} ds f(s) \Pi_0(s), \quad (5.23)$$

donde  $f(s)$  es una función analítica, y el radio del círculo  $s_0$  es suficientemente grande para QCD y el OPE se puedan usar en el círculo (ver Fig.1). La integral a lo largo del eje real  $s$  involucra la función espectral hadrónica. Esta ecuación es la aseveración matemática, que se conoce como *dualidad quark hadrón*. Usando el OPE, Ec. (5.22), y el kernel de la integración  $f(s) = s^N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) se obtiene la FESR

$$\begin{aligned}(-)^{N-1} C_{2N} \langle \hat{\mathcal{O}}_{2N} \rangle &= 4\pi^2 \int_0^{s_0} ds s^{N-1} \frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi_0(s) \\ &- \frac{s_0^N}{N} [1 + \mathcal{O}(\alpha_s)] \quad (N = 1, 2, \dots).\end{aligned}\quad (5.24)$$

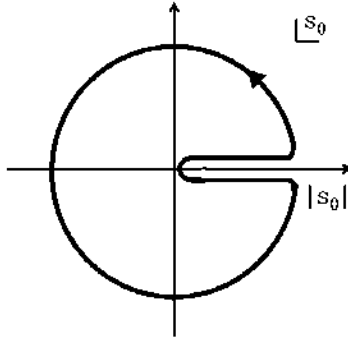


Figura 5.6: Integración de contorno  $C(|s_0|)$  en el plano complejo del cuadrado de la energía  $s$ . El umbral  $s_0$  de QCD en las FESR es el radio del círculo.

Para  $N = 1$  la dimensión del término  $d = 2$ , en el operador, no involucra ningún condensado, dado que no es posible contruir un operador de norma invariante para esta dimensión. Sin embargo, es concebible generar un término con  $d = 2$ , de alguna manera dinámica, por ejemplo en PQCD a un orden alto. Sin embargo, no hay evidencia de tal término (a  $T = 0$ ) de acuerdo al análisis de FESR de datos experimentales en la aniquilación de  $e^+e^-$  y decaimientos  $\tau$  en hadrones [47]. A altas temperaturas, parece haber evidencia de algún término [48]. El análisis que nosotros reportamos se realiza para valores mucho más pequeños de  $T$ , de manera que podemos ignorar dicha contribución.

La extensión de este programa a temperatura finita es clara [41, 43], con los coeficientes de Wilson en el OPE, Ec. (5.22) independientes de  $T$ , siendo el orden mas dominante en  $\alpha_s$ , y el condensado desarrolla una dependencia de la temperatura. Correcciones radiativas en QCD tienen ahora una escala adicional, es decir, la temperatura, tal que  $\alpha_s \equiv \alpha_s(\mu^2, T)$ . Este problema aún no esta resuelto de manera satisfactoría, sin embargo, debido a la pequeñes de las mismas a  $T = 0$  no espera que haya una gran pérdida de precisión en los resultados de FESR térmica al orden mas dominante PQCD, dado

que la temperatura no es tan alta,  $T \lesssim 200 \text{ MeV}$ . Esencialmente todas las aplicaciones de FESR a  $T \neq 0$  han sido realizadas en el orden dominante de PQCD, con lo cual tenemos una incertidumbre del 10%. Una nueva característica a  $T \neq 0$  es la aparición de un nuevo corte en el plano de la energía compleja  $\omega$  [41], y centrada en el origen con extensión  $-|\vec{q}| \leq \omega \leq |\vec{q}|$ . Debido a la contribución al correlador de corriente en la región tipo espacio ( $q^2 < 0$ ) que se anula a  $T = 0$ . Conceptualmente, esto origina una dispersión de la corriente para cualquiera de los quarks (antiquarks) o por los hadrones en el medio, en el caso de QCD o de la representación hadrónica, respectivamente. Cuando consideramos el sistema de referencia ( $\vec{q} \rightarrow 0$ ), este término de dispersión se convierte en una función delta de la energía o se anula, dependiendo del canal. Por ejemplo, en el caso de correladores de corrientes de vectores axiales, Ec. (5.21), el término de la dispersión de QCD es proporcional a  $\delta(\omega^2)$ . El término correspondiente en la representación hadrónica aunque no es cero, está suprimido al tercer nivel de contribuciones del pión, dado que el corriente de vectores axiales puede enlazarse solo a un número impar de piones. Otra nueva característica a temperatura finita es la posible existencia de condensados del vacío no escalares (que no son invariantes de Lorentz). Esto no afecta nuestro análisis, dado que consideramos FESR de dimensión  $d = 2$ . En el límite estático ( $\vec{q} \rightarrow 0$ ), en el orden más dominante en PQCD, y para  $T \neq 0$  y  $\mu \neq 0$ , donde  $\mu = \mu_B/3$  es el potencial químico de los quarks, la función  $\Pi_0(q^2)$  en Ec. (5.21) se convierte en  $\Pi_0(\omega^2, T, \mu)$ ; para simplificar la notación omitimos la dependencia de  $T$  y  $\mu$ . Un cálculo directo de la función espectral en QCD perturbativa nos da

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi_0(s)|_{\text{PQCD}} &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ 1 - \tilde{n}_+ \left( \frac{\sqrt{s}}{2} \right) - \tilde{n}_- \left( \frac{\sqrt{s}}{2} \right) \right] \\ &- \frac{2}{\pi^2} T^2 \delta(s) \left[ \text{Li}_2(-e^{\mu/T}) + \text{Li}_2(-e^{-\mu/T}) \right], \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde  $\text{Li}_2(x)$  es la función dilogaritmo,  $s = \omega^2$ , y

$$\tilde{n}_\pm(x) = \frac{1}{e^{(x \mp \mu)/T} + 1} \quad (5.26)$$

son las distribuciones térmicas de Fermi-Dirac para partículas y antipartículas, respectivamente. Hemos asumido que los quarks sin masa, y las correcciones a las masas de los quarks son despreciables.

En el límite donde  $T$  y/o  $\mu$  son grandes con respecto a la escala de masa del quark, podemos escribir la Ec. (5.25) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi_0(s)|_{\text{PQCD}} &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ 1 - \tilde{n}_+ \left( \frac{\sqrt{s}}{2} \right) - \tilde{n}_- \left( \frac{\sqrt{s}}{2} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \delta(s) \left( \mu^2 + \frac{\pi^2 T^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

En el sector hadrónico asumimos el dominio del polo del pión de la función espectral hadrónica, es decir, la energía de umbral  $s_0$  cae por debajo de la primera excitación radial con masa  $M_{\pi_1} \simeq 1300$  MeV. Esta es una muy buena aproximación a temperatura finita  $T$ , puesto que se espera que  $s_0$  decrezca de manera monótona, cuando aumentamos la temperatura. En este caso,

$$\frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi(s)|_{\text{HAD}} = 2 f_\pi^2(T, \mu) \delta(s), \quad (5.28)$$

donde  $f_\pi(T, \mu)$  es la constante de decaimiento del pión a temperatura finita  $T$  y  $\mu$ , con  $f_\pi(0, 0) = 92.21 \pm 0.14$  MeV [49].

Si usamos las FESR, Ec. (5.24), con  $N = 1$  y un condensado de dimensión distinta a  $d = 2$ , y usando Ecs. (5.25) y (5.28) encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0(T, \mu)} ds \left[ 1 - \tilde{n}_+ \left( \frac{\sqrt{s}}{2} \right) - \tilde{n}_- \left( \frac{\sqrt{s}}{2} \right) \right] = \\ 8\pi^2 f_\pi^2(T, \mu) + 8T^2 [\text{Li}_2(-e^{\mu/T}) + \text{Li}_2(-e^{-\mu/T})] \end{aligned} \quad (5.29)$$

Estas son ecuaciones trascendentales que determina  $s_0(T, \mu_q)$  en términos de  $f_\pi(T, \mu_q)$ . El último se relaciona al condensado de quarks ligeros a través de las relaciones de Gell-Mann-Oakes-Renner [46]

$$\frac{f_\pi^2(T, \mu_q)}{f_\pi^2(0, 0)} = \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle(T, \mu_q)}{\langle \bar{\psi}\psi \rangle(0, 0)}, \quad (5.30)$$

donde hemos asumido que las masas de los quark y de los piones son independiente de  $T$  y  $\mu_q$  [50]. Una buena aproximación a las FESR, Ec.(5.29), para grandes valores de  $T$  y/o  $\mu_q$  se obtiene usando Ec. (5.27) con  $\tilde{n}_+ \left( \frac{\sqrt{s}}{2} \right) \simeq$

$\tilde{n}_- \left( \frac{\sqrt{s}}{2} \right) \simeq 0$ , en cuyo caso

$$s_0(T, \mu_q) \simeq 8 \pi^2 f_\pi^2(T, \mu_q) - \frac{4}{3} \pi^2 T^2 - 4 \mu_q^2 . \quad (5.31)$$

Usando Ec. (5.30) puede reescribirse como

$$\frac{s_0(T, \mu_q)}{s_0(0, 0)} \simeq \frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle(T, \mu_q)}{\langle \bar{\psi} \psi \rangle(0, 0)} - \frac{(T^2/3 - \mu_q^2/\pi^2)}{2f_\pi^2(0, 0)} \quad (5.32)$$

El condensado del quark se puede calcular de in-medium propagador del quark, cuyas propiedades no perturbativas se pueden obtener, por ejemplo, de soluciones conocidas de las Ecuaciones de Schwinger-Dyson(SDE) como se verá en la siguiente sección.

# Capítulo 6

## Diagrama de Fase de QCD a través de las Ecuaciones de Schwinger Dyson

En este capítulo, se encuentra un breve resumen de los resultados y avances que hemos tenido en el estudio del condensado fermiónico a temperatura finita de QCD, mediante las Ecuaciones de Schwinger Dyson. Este trabajo es una continuación del realizado previamente en la Ref. [51]. Iniciaremos calculando la función de masa a temperatura finita con un potencial químico cero y procederemos a calcular el condensado fermiónico en el límite quirral y fuera de él. A diferencia del capítulo anterior, en este construimos las Ecuaciones de Schwinger Dyson que nos permita tener acceso al rango completo del diagrama de fase.

### 6.1. Deducción de la Función de Masa

El sector de interacciones del modelo estándar de la física de partículas, involucra una transición de fase que es relevante en la evolución del universo temprano. A bajas temperaturas, los grados de libertad de la cromodinámica cuántica son hadrones. En tanto, que a altas energías de temperaturas las interacciones se debilitan, causando que los hadrones sufran una transición de fase donde los grados de libertad dominantes son los ingredientes de la física perturbativa de QCD, que son los quarks y los gluones. A esta transición de fase se le conoce como *transición de fase confinada-desconfinada*.

El mismo esquema físico prevalece cuando aumentamos el potencial químico. Los experimentos y los cálculos de lattice para quarks masivos sugieren que la transición que surge al aumentar la temperatura a un potencial químico  $\mu = 0$  no es una singularidad termodinámica, sino un rápido y suave crossover [52]. Cuando aumentamos el potencial químico  $\mu$ , surge otra transición de fase a temperatura  $T = 0$ , pero esta transición de fase es cualitativamente diferente y no puede ser accesada mediante estudios de lattice, debido a que el método de Monte Carlo, que es el estándar en los cálculos de lattice, falla. Existen diferentes modelos que indican que en esta región ocurre una transición de primer orden [53].

La restauración de la simetría quiral, es otra transición de fase que se espera ocurra cuando la temperatura y/o el potencial químico son suficientemente grandes. Esto sucede cuando la masa generada de manera dinámica por los quarks se anula. Como la magnitud de las interacciones de QCD disminuyen cuando aumenta  $T$  y  $\mu$ , únicamente las masas desnudas de los quarks sobreviven cuando estos parámetros exceden un conjunto crítico de valores. En conexión con estas transiciones de fase, hay varias preguntas claves cuyas posibles respuestas nos dan la motivación necesaria para la gran inversión realizada, por ejemplo, en el colisionador de iones pesados (RHIC), en el Laboratorio Nacional de Brookhaven (BNL), y en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) en el centro Europeo para investigaciones nucleares (CERN), solo por mencionar algunos, además de la gran cantidad de físicos teóricos que intentamos realizar aportaciones al tema. Analicemos algunas de las pistas que tenemos:

1. Dada la línea de primer orden que se origina para  $\mu$  alto en el diagrama de fase de QCD, ésta no puede terminar en el eje  $\mu = 0$ , que corresponde al punto inicial de la línea del crossover, más bien, debe terminar en algún otro punto del diagrama de fase. Este punto es conocido como el *punto crítico final*. Por otro lado, el valor dado por predicciones teóricas para su existencia y localización en el diagrama de fase pueden ser inexactos, debido a las enormes dificultades teóricas y experimentales que se tienen para acceder a la región completa de  $T$  y  $\mu$  finitos.
2. Existen dos transiciones de fase, correspondientes al desconfiamiento y a la restauración de la simetría quiral, la pregunta es, si ambas fases son coincidentes o no. Como ambas pertenecen a la región donde disminuye la interacción de QCD, uno esperaría trazar la misma curva en el diagrama de fase de QCD. Sin embargo, la predicción y la medida

del punto crítico, siguen escapando de nuestro dominio, convirtiéndose en un punto esencial además de un gran reto para los físicos.

Las ecuaciones fundamentales de QCD, las cuales son las ecuaciones de Schwinger Dyson (SDE), no tienen restricciones para acceder a toda la región concerniente al diagrama de fase de QCD, dado que su derivación no depende de la pequeñez de la magnitud de la interacción. Estas ecuaciones, nos proporcionan un marco de referencia natural, para explorar los rincones del diagrama de fase de QCD con facilidad. Además, las masas desnudas de los quarks pueden ser tan pequeñas como se requiera, incluso se puede estudiar la simetría quiral si se desea [11].

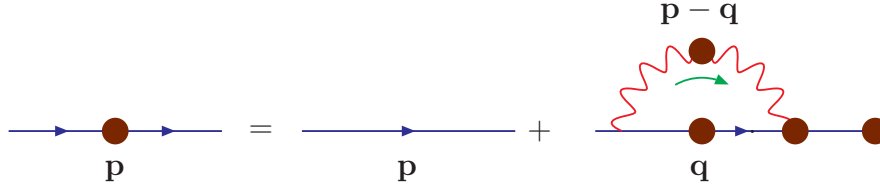


Figura 6.1: El propagador completo.

En este trabajo de tesis, iniciaremos con nuestra investigación analizando el propagador de quarks, que es un objeto básico para analizar el rompimiento de la simetría quiral y el confinamiento. Empezaremos por la forma general del propagador del quark a temperatura finita  $T$  y  $\mu$ ,

$$S^{-1}(\vec{p}, \tilde{w}_n) = iA(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2)\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + i\gamma_4\tilde{w}_n^2C(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2) + B(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2), \quad (6.1)$$

donde  $\tilde{w}_n = w_n + i\mu$  y  $w_n = 2(n+1)\pi T$  son las frecuencias de Matsubara.  $A(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2)$ ,  $B(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2)$  y  $C(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2)$  son las funciones escalares que deben determinarse de manera autoconsistente mediante la resolución de la SDE,

$$S^{-1}(\vec{p}, \tilde{w}_n) = i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + i\gamma_4\tilde{w}_n + \Sigma(\vec{p}, \tilde{w}_n), \quad (6.2)$$

donde el propagador inverso del quark está representado en la Fig. (6.1), mediante su diagrama de Feynmann correspondiente.  $\Sigma(\vec{p}, \tilde{w}_n)$  es la autoenergía expresada en términos del propagador vestido del gluón  $D_{\mu\nu}(\vec{p} - \vec{q}, \Omega_{nl})$ , con  $\Omega_{nl} = w_n - w_l$ , y el vértice el quark gluón completo  $\Gamma_\mu(\vec{q}, \tilde{w}_l, \vec{p}, \tilde{w}_n)$

definido como sigue

$$\begin{aligned}\Sigma(\vec{p}, \tilde{w}_n) &= T \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} g^2 D_{\mu\nu}(\vec{p} - \vec{q}, \Omega_{nl}) \\ &\times \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(\vec{q}, \tilde{w}_l) \frac{\lambda^a}{2} \Gamma_\nu(\vec{q}, \tilde{w}_l, \vec{p}, \tilde{w}_n) .\end{aligned}\quad (6.3)$$

donde  $g^2$  es la magnitud de la interacción de QCD. El propagador del gluón en la norma de Landau tiene la forma general

$$g^2 D_{\mu\nu}(\vec{k}, \Omega_{nl}) = P_{\mu\nu}^T D_T(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) + P_{\mu\nu}^L D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) , \quad (6.4)$$

$P_{\mu\nu}^{T,L}$  son los proyectores transverso y longitudinal definidos como

$$\begin{aligned}P_{\mu\nu}^L &= \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - P_{\mu\nu}^T , \\ P_{44}^T &= P_{4i}^T = 0, \quad P_{ij}^T = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} .\end{aligned}\quad (6.5)$$

Siguiendo la referencia de Qin *et. al.* [54], usamos

$$\begin{aligned}D_T(\vec{k}^2, \Omega_{nl}^2) &= \mathcal{D}(T) \frac{4\pi^2}{\sigma^6} (\vec{k}^2 + \Omega_{nl}^2) e^{-(\vec{k}^2 + \Omega_{nl}^2)/\sigma^2} , \\ D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl}^2) &= \mathcal{D}(T) \frac{4\pi^2}{\sigma^6} (\vec{k}^2 + \Omega_{nl}^2) e^{-(\vec{k}^2 + \Omega_{nl}^2 + m_g^2)/\sigma^2}\end{aligned}\quad (6.6)$$

donde  $\sigma = 0.5$  GeV. Las funciones  $A(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2)$ ,  $B(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2)$ ,  $C(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2)$  serán determinadas de manera numérica, debido a su autoconsistencia. Necesitaremos tres ecuaciones independientes para determinarlas que pueden ser obtenidas comparando las ecuaciones (6.1) y (6.2), puesto que al calcular las siguientes trazas tenemos que

$$\begin{aligned}Tr[S(\mathbf{p}, \tilde{w}_n)^{-1}] &= Tr[\Sigma(\mathbf{p}, \tilde{w}_n)] = 4B(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2) , \\ Tr[\gamma_0 S(\mathbf{p}, \tilde{w}_n)^{-1}] &= 4i\tilde{w}_n + Tr[\gamma_0 \Sigma(\mathbf{p}, \tilde{w}_n)] = 4i\tilde{w}_n C(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2) , \\ Tr[\vec{\gamma} S(\mathbf{p}, \tilde{w}_n)^{-1}] &= 4ip^j + Tr[\vec{\gamma} \Sigma(\mathbf{p}, \tilde{w}_n)] = 4ip^j A(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2) .\end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación para la autoenergía (6.3), tomando en cuenta que a partir de (6.1) podemos obtener la ecuación para el propagador, el cual debe de tener la forma funcional

$$S(\mathbf{p}, \tilde{w}_n) = \frac{i\gamma \cdot \mathbf{p} A(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2) + i\gamma_0 \tilde{w}_n C(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2) - B(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2)}{C^2(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2) \tilde{w}_n^2 + A^2(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2) \mathbf{p}^2 + B^2(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2)} , \quad (6.7)$$

por simplicidad, podemos representar  $S(\mathbf{p}, \tilde{w}_n)$  de manera equivalente

$$S(\mathbf{p}, \tilde{w}_n) = i\gamma \cdot \mathbf{p} \sigma_A(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2) + i\gamma_0 \tilde{w}_n \sigma_C(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2) - \sigma_B(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2). \quad (6.8)$$

Tenemos entonces las tres ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n^2) &= 1 + \frac{T}{3\pi^2 \mathbf{p}^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \mathbf{q}^2 dq \sin \theta \left[ 2A \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})}{k^2} D_T(\vec{k}^2, \Omega_{nl}^2) \right. \\ &+ A(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2) \left( \left( (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + 2 \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})}{k^2} - 2 \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})}{k^2} \right) \right. \\ &+ \left. \left. \frac{2\Omega_{nl}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})}{k^2} \tilde{w}_l C(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_l^2) \right) D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl}^2) \right] \\ &\times \frac{1}{\mathbf{q}^2 A^2(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2) + w_l^2 C^2(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2) + B^2(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2)}. \quad (6.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n) &= \frac{T}{3\pi^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{\mathbf{q}^2 dq \sin \theta B(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2)}{\mathbf{q}^2 A^2(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2) + w_l^2 C^2(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2) + B^2(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2)} \\ &\times \left( 2D_T(k^2, \Omega_{nl}^2) + D_L(k^2, \Omega_{nl}^2) \right). \quad (6.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(\mathbf{p}^2, \tilde{w}_n) &= 1 + \frac{T}{3\pi^2 \tilde{w}_n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \mathbf{q}^2 dq \sin \theta \left( D_T(k^2, \Omega_{nl}^2) (2\tilde{w}_l C(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2)) \right. \\ &+ \frac{D_L(k^2, \Omega_{nl}^2)}{k^2} (2\Omega_{nl} \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} A(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l) \\ &+ \left. (2\Omega_{nl}^2 - k^2) \tilde{w}_l C(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2)) \right) \\ &\times \frac{1}{\mathbf{q}^2 A^2(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2) + w_l^2 C^2(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2) + B^2(\mathbf{q}^2, \tilde{w}_l^2)}. \quad (6.11) \end{aligned}$$

Una vez obtenidas estas ecuaciones, estamos en condiciones de calcular el condensado fermiónico. Destinaremos la siguiente sección a dicho procedimiento.

## 6.2. Condensado Fermiónico

En esta sección usamos la relación existente entre el propagador en el espacio de momentos y el propagador en el espacio de posiciones, para calcular el condensado

$$\begin{aligned}
 S_f(x) &= T \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Exp}[-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}] S_f(q, \tilde{w}_n) \\
 \rightarrow S_f(x=0) &= T \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} S_f(q, \tilde{w}_n). \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

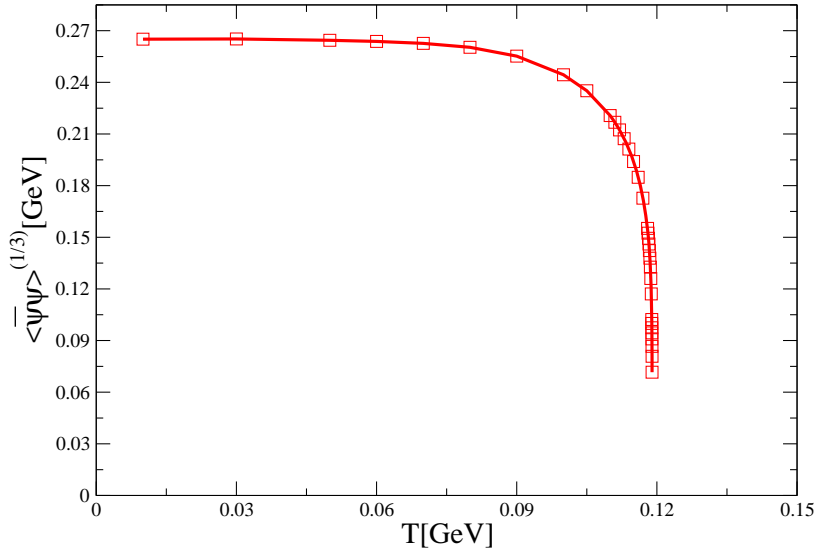


Figura 6.2: Condensado de quark ligero  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  a  $\mu_B = 0$ .

Dado que el condensado es

$$\langle \bar{\psi}\psi(x=0) \rangle = T \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Tr}[S_f(x=0)]. \quad (6.13)$$

Tenemos entonces finalmente

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi(x=0) \rangle &= T \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Tr}[S(q, \tilde{w}_n)] \\ &= \frac{2}{\pi^2} T \sum_n \int q^2 dq \frac{B(q^2, \tilde{w}_l^2)}{C^2 \tilde{w}_l^2 + A^2 q^2 + B^2(q^2, \tilde{w}_l^2)}, \end{aligned}$$

donde las funciones  $A(q^2, \tilde{w}_l^2)$ ,  $B(q^2, \tilde{w}_l^2)$  Y  $C(q^2, \tilde{w}_l^2)$  fueron calculadas en la sección anterior.

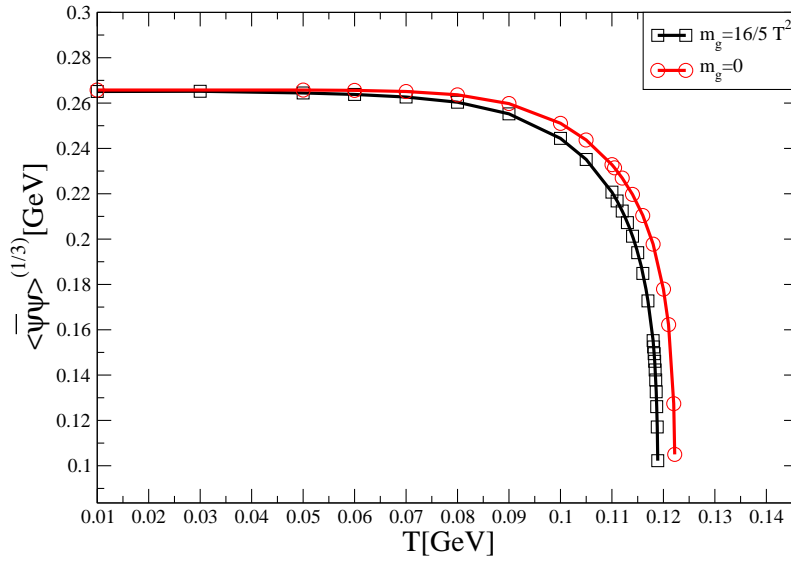


Figura 6.3: Diferencia entre condensado de quark ligero  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  a  $\mu_B = 0$  tomando  $D_T = D_L$  y  $D_T \neq D_L$ .

### 6.3. Límite Quiral

Hay indicativos de que para temperaturas menores a 0.2 GeV,  $D_T = D_L = D_0$  es una buena aproximación [35]. Usaremos además la notación

simplificada  $\kappa = \mathbf{k}^2 + \Omega_n^2$  para escribir

$$D_0(\kappa) = D \frac{4\pi^2}{\sigma^6} \kappa e^{-\kappa/\sigma^2}. \quad (6.14)$$

Los parámetros  $D, \sigma$  no son independientes. Usualmente  $\sigma = 0.5$  GeV y  $D = 0.8$  GeV<sup>3</sup>. Entonces usando las ecuaciones (6.11), podemos calcular el condensado fermiónico. Los resultados se muestran en la figura (6.2), lo cual nos da una temperatura crítica, es decir, la temperatura para la cual se anula la masa adquirida por los quarks de forma dinámica, de  $T_c \approx 0.12$  GeV, para los valores de  $D = 1$  GeV<sup>2</sup>,  $\sigma = 0.5$  GeV. El valor del condensado en el vacío es de  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{1/3} = 0.267$  GeV, ligeramnete mayor que el reportado en la Ref. [38] de  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{1/3} = 0.241$  GeV. Hay una diferencias que hemos hecho con respecto a la referencia anteriormente citada *ansatz*. Nosotros tomamos  $D_L \neq D_T$ , que es generalmente cierto cuando  $T, \mu \neq 0$ . La diferencia está en la masa de Debye del gluón  $m_g$ , que afecta solamente la parte longitudinal del propagador del gluón. Hemos tomado su valor como el mas bajo orden del resultado del *hard thermal loop*  $m_g^2 = 4g^2T^2/3$  [55], con  $g = 1$ . El efecto de la masa de Debye es despreciable en toda la evolución térmica, aun cuando usamos valores grandes de  $g$ . El rol de la masa de Debye es ayudar a la convergencia de las soluciones. Su efecto más notorio debe verse en la parte de altas temperaturas, en tanto que a  $T$  pequeñas su efecto es despreciable. Estos resultados fueron justamente los que encontramos, y se encuentran graficados en Fig. 6.3.

## 6.4. Condensado Quiral para Quarks Ligeros

En esta sección, nos interesa abordar el caso físico, en el cual los quarks ligeros up y down poseen una masa no nula, aunque muy pequeña, de alrededor de los 300 MeV. Cuando incluimos este hecho, podemos reproducir los resultados mas recientes que han sido recabados en lattice, en un rango de temperaturas que van desde [0.1479 a 0.2659]. El único cambio que debemos hacer a nuestro modelo del propagador gluónico, ecuación 6.6, es que permitimos que  $\mathcal{D}$  sea una función explicita de la temperatura. Después de aplicar apropiadamente las trazas y hacer simplificaciones, obtenemos tres ecuaciones acopladas que deben ser integradas para las funciones  $A(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2)$ ,  $B(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2)$  y  $C(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2)$ , las cuales deben resolverse de manera numérica. Los test de convergencia nos permiten sumar solo 14 frecuencias de Matsubara

sin sacrificar mas del 5 % en la precisión de los resultados. Una vez que calculamos el propagador del quark, podemos evaluar el condensado del quark anti quark como:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = N_c T \sum_n \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Tr}[S(\vec{q}, \tilde{w}_n)] . \quad (6.15)$$

Sin embargo, notemos que aun no hemos dicho nada acerca de  $\mathcal{D}(T)$  (que viene del propagador del gluón), del vértice del quark gluon o de su producto. La cuestión será ahora, de dónde obtener esta información. En este punto debemos introducir un importante ingrediente para nuestros cálculos. Como se espera los calculos de lattice proveen resultados confiables a lo largo del eje  $\mu = 0$  del diagrama de fase de QCD, haciendo ansatz:

$$\mathcal{D}(T) \Gamma_\nu(\vec{q}, \tilde{w}_l, \vec{p}, \tilde{w}_n) = D(T) \gamma_\nu \quad (6.16)$$

y deducir  $D(T)$ , tal que reproduce los resultados de lattice para la dependencia de la temperatura del quark anti quark dado en [56].

Utilizando las Ecuaciones de Schwinger Dyson, intentaremos describir el diagrama de fase de QCD donde existen quarks interactuando fuertemente. Es parte de nuestro objetivo, buscar la posible existencia de un punto crítico que marque un cambio de fase, así como su ubicación.

Con todos los ingredientes anteriores de los datos de lattice a  $T = 0$  y  $\mu_B = 0$ , finitos, procedemos a extender el análisis a  $\mu_B$  finita. Para explorar el diagrama de fase de QCD, hacemos uso de las expresiones para el condensado de quarks ligeros y de  $s_0$  que describen las transiciones de fase quirales y de desconfinamiento respectivamente.

## 6.5. Diagrama de Fase de QCD a través de las Ecuaciones de Schwinger Dyson

Debemos notar que en el límite quiral, podemos reproducir los resultados presentados en [54]. Si queremos introducir la masa desnuda de los quarks, debemos usar el hecho de que la función de masa se puede escribir de la siguiente manera  $M(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2) = B(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2)/A(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2)$  y entonces realizar la siguiente sustitución  $B(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2) \longrightarrow B(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2) + A(\vec{p}^2, \tilde{w}_n^2)m$ . La solución autoconsistente de las ecuaciones acopladas se obtienen del propagador del

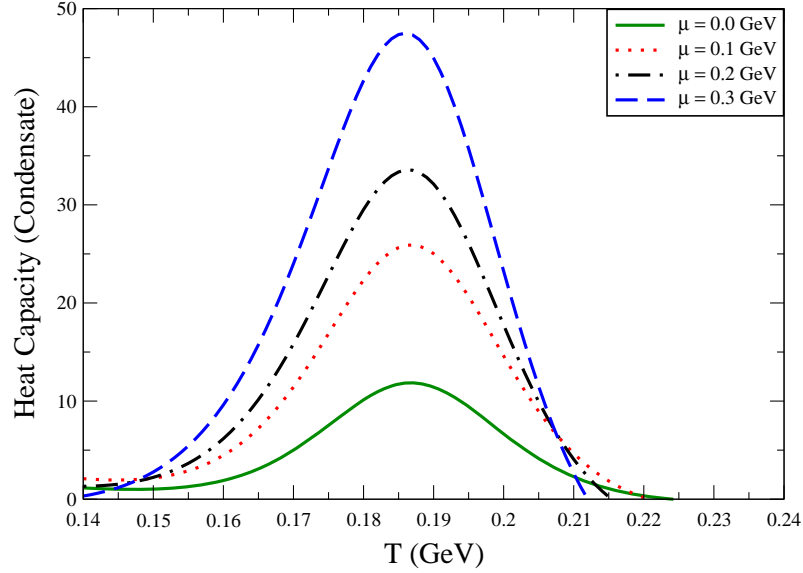


Figura 6.4: Condensado de quark ligero  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$  y energía de umbral continuo  $s_0$  como función de la temperatura para  $\mu_B = 0$ , normalizado a los valores de  $T = 0, \mu_B = 0$ .

quark. Usamos una forma muy simple para la función  $D(T)$ , es decir,

$$D(T) = a - bT^3 - c \tanh(d - eT^3), \quad (6.17)$$

a  $\mu = 0$  ( $a = 2.17, b = 343.64, c = 1.76, d = 0.78$  y  $e = 273.8$ ), con las dimensiones apropiadas de masa en GeV, los datos de lattice son bien reproducidos como se muestra en Fig. 6.5. Podemos graficar la capacidad calorífica dada por  $-\partial_T \langle\bar{\psi}\psi\rangle$ , la cual nos da una temperatura crítica de  $T_c \approx 0.153$  GeV, ver la Fig. 6.6. (comparemos con  $T_c = 0.154$  GeV que reporta lattice en [56]).

Ahora extenderemos nuestro modelo y emplearemos la misma  $D(T)$ , conforme vamos cambiando nuestros resultados para  $\mu \neq 0$ . La masa del gluón de Debye tiene una dependencia de  $\mu$ , es decir,  $m_g^2 = (4T^2/3 + \mu^2/\pi^2)g^2$ , con  $g = 1$ . Cuando crece  $\mu$ , observamos de manera natural la restauración de la simetría quiral a bajas temperaturas. Esto se muestra en la Fig. 6.7, la cual

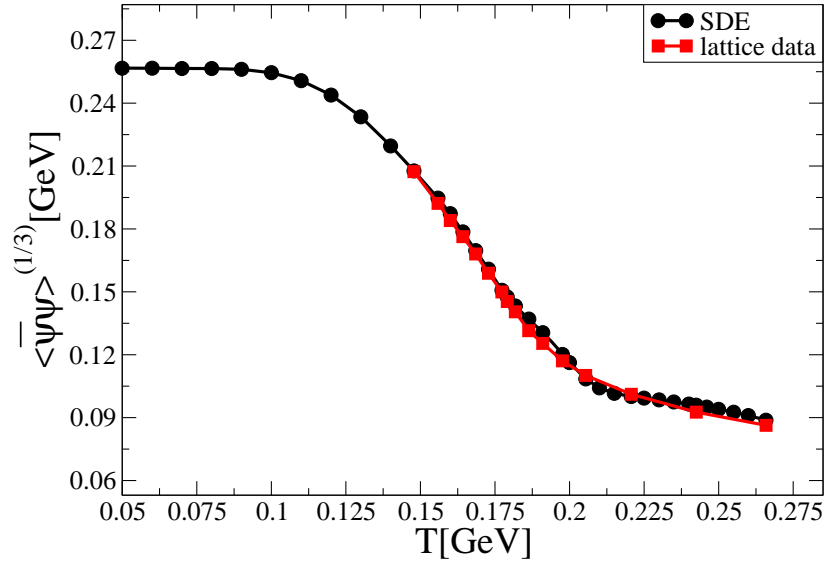


Figura 6.5: Función  $D(T) = a - bT^3 - c \tanh(d - eT^3)$  de Ec. (6.16) a  $\mu = 0$  reproduce los datos de lattice [56] para el condensado quark anti-quark  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , especialmente en la región de la transición de fase.

confirma que el efecto de incorporar el potencial químico  $\mu$ , tiende a restaurar la simetría quiral para bajas temperaturas. Hay un punto importante que es que cuando  $\mu$  crece, se empieza a formar una discontinuidad en la región donde se localiza la temperatura crítica. Dicha discontinuidad se incrementa con una variación pequeña de  $\mu$ . Además, la pendiente de una curva se incrementa drásticamente, así que eventualmente se consigue una caída vertical como resulta evidente en la Fig. 6.7, esto es una clara señal de un efecto físico. Para cuantificar este cambio en el comportamiento de la capacidad calorífica, lo graficamos como función de la temperatura a diferentes valores de  $\mu$  para encontrar la localización del punto crítico. Los resultados son mostrados en la Fig. 6.8. Las gráficas se estrechan más conforme incrementamos el valor de  $\mu$ , lo cual nos ayuda a localizar el punto que corresponde a la temperatura crítica con precisión progresiva. Por otro lado, la altura de cada una de las

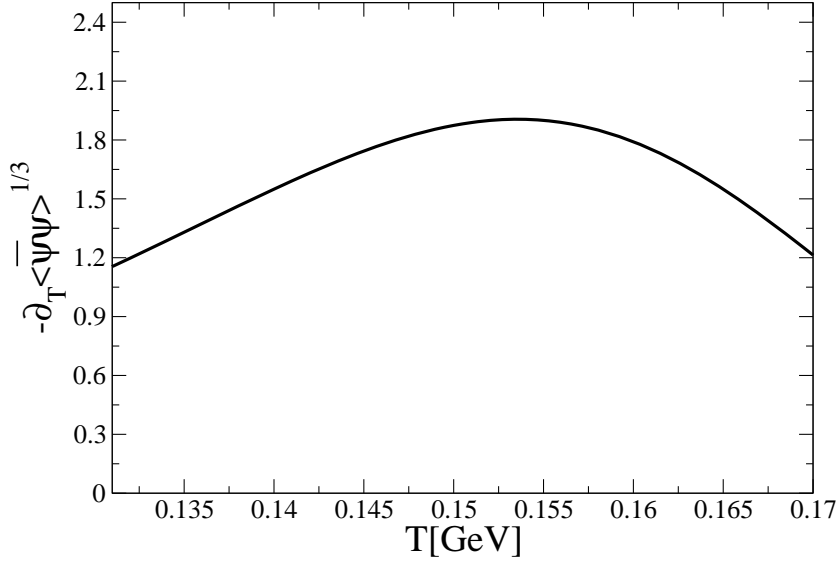


Figura 6.6: La capacidad calorífica  $-\partial_T \langle \bar{\psi} \psi \rangle$  calculada mediante las SDE para  $D(T)$  dado en Ec. (6.17) como función de temperatura. El máximo está en  $T_c \sim 0.153$  GeV que es suficientemente en acuerdo con [56]).

curvas se disparan a infinito, como se evidencia en la Fig. 6.8, antes de que el potencial químico alcance el máximo, alcanza un valor de alrededor de 0.22 GeV. Se puede identificar esta singularidad termodinámica con el embate de una transición de fase de primer orden. Antes de que se logre este punto, la transición de fase es un crossover. Notemos que en la Fig. 6.7, la simetría quiral se mantiene rota mas allá de  $\mu \approx 0.22$  GeV, donde la transición de primer orden se activa. Nuestra precisión numérica nos permite explorar el potencial químico alrededor de 0.3 GeV. Sin embargo, la trayectoria de los puntos a lo largo de la línea crítica, es suficientemente suave para hacer un ajuste cuadrático para estimar el valor  $\mu \approx 0.53$  GeV, para la temperatura cero, donde la simetría quiral finalmente se restaura, como se muestra en la Fig. 6.9. Todas estas características estan esbozadas en la Fig. 6.10.

Tenemos que tener cuidado, la función  $D(T)$  en Ec. (6.16) y el vértice

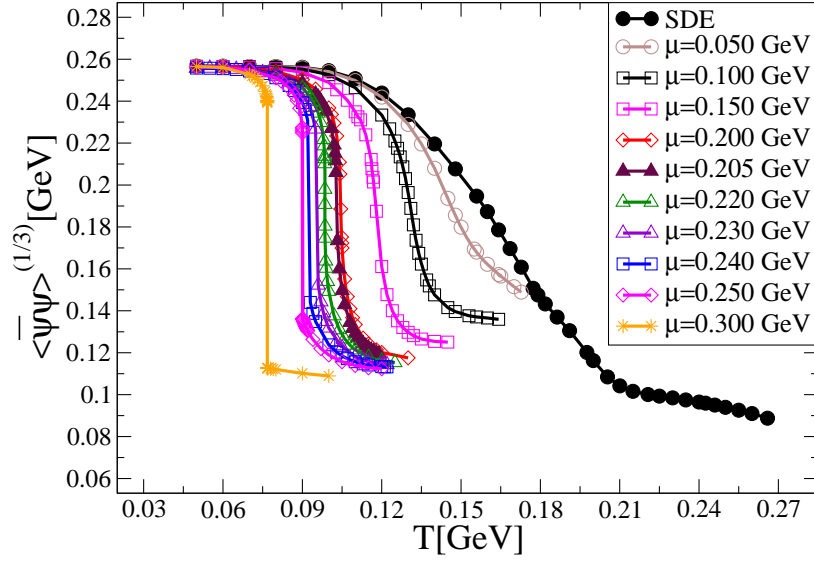


Figura 6.7: El condensado para diferentes valores de  $\mu$ . Para valores grandes de  $\mu$ , la curva desarrolla una discontinuidad la cual empieza a marcarse conforme se incrementa el valore de  $\mu$ .

completo del propagador de quark-gluón  $\Gamma_\nu(\vec{q}, \vec{w}_l, \vec{p}, \vec{w}_n)$ , que depende de  $\mu$  y una diferente elección de estas cantidades pueden cambiar la posición del punto crítico. Además, el vértice fermión-bosón debe construirse de manera teórica [57], y también de manera que satisfaga las constricciones fenomenológicas [58].

A temperatura finita  $T$  y/o  $\mu$ , las dificultades involucradas son altamente no-triviales pero ya se ha hecho trabajo a este respecto [59]. Hemos realizado estudios preliminares para explorar la naturaleza de la transición de confinamiento-desconfinamiento, y hemos encontrado que con este modelo la línea de transición, sigue los pasos de la transición de la restauración de la simetría quiral. Este trabajo muestra que las SDEs son una herramienta eficaz para explorar el diagrama de fase de QCD. Hemos utilizado esta herramienta para localizar el punto crítico y proveer señales claras de la existencia de un crossover cerca de  $\mu = 0$ , y una transición de fase de primer

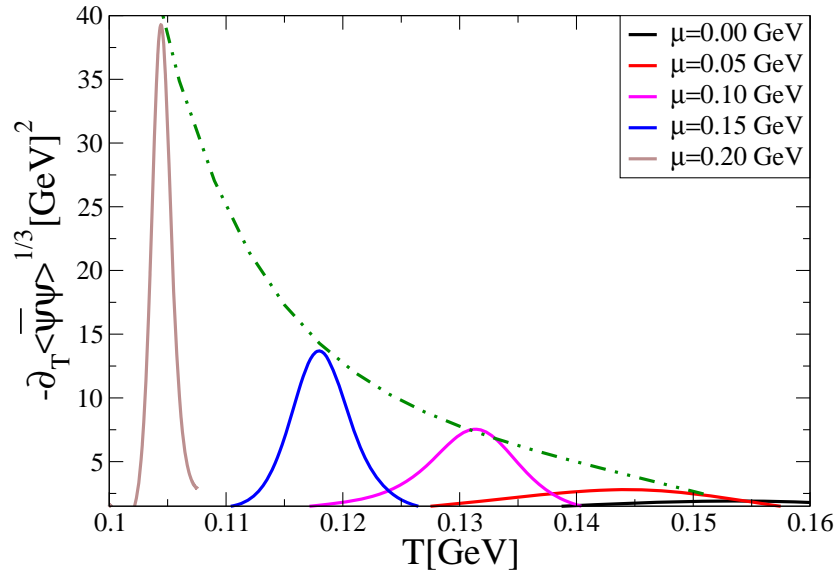


Figura 6.8: Graficamos la capacidad calorífica para el condensado como función de la temperatura para diferentes valores de  $\mu$ . El pico nos da el punto crítico  $(\mu_c, T_c)$ . Notemos que la altura de esta variable termodinámica se va a infinito. Para valores suficientemente grandes de  $\mu$ , que nos indica un cambio en el orden de la transición de fase.

orden conforme nos movemos en una trayectoria de  $\mu$  creciente, empezando por los resultados de lattice para la temperatura finita del condensado quark anti quark.

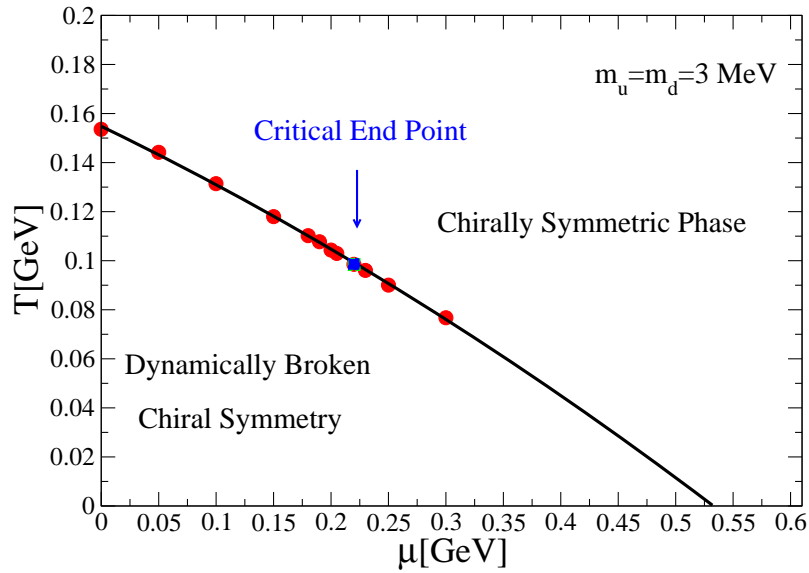


Figura 6.9: Graficamos el diagrama de fase de QCD, indicando también el punto crítico que corresponde a  $\mu \approx 0.22 \text{ GeV}$  y  $T = 0.097 \text{ GeV}$ . Debido a dificultades numéricas alrededor de  $\mu \approx 0.3 \text{ GeV}$ , hemos usado un ajuste cuadrático  $f_1 + f_2 T + f_3 T^2$ , para explorar nuestros resultados en el eje  $T = 0$  del diagrama de fase, el cual nos da  $\mu \approx 0.53 \text{ GeV}$  mas allá de este valor la simetría quiral se restaura.

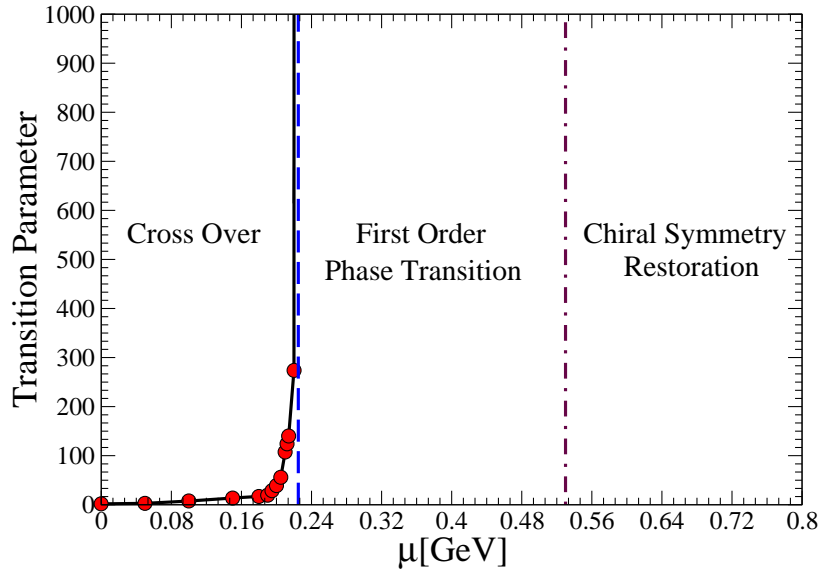


Figura 6.10: En esta gráfica se muestran las diferentes regiones del diagrama de fase de QCD como función del potencial químico  $\mu$ . Desde  $\mu = 0$  a la línea vertical punteada a  $\mu \approx 0.22$  GeV, la transición es un crossover. La altura de la capacidad calorífica, la variable termodinámica dibujada en la línea vertical, se vuelve singular conforme se aproxima a la línea punteada, sugiriéndonos un cambio en la naturaleza de la transición de fase de un crossover a una transición de orden de primer tipo. La simetría quiral continúa rota mas allá de  $\mu \approx 0.22$  GeV, como se logra evidenciar en la Fig. 6.7. Sin embargo, numéricamente es un verdadero reto encontrar los puntos de transición. La simetría quiral se restaura a  $\mu \approx 0.53$  GeV, representado por una línea dot-dashed.

# Capítulo 7

## Discusiones y Conclusiones

En este capítulo, resumiremos los resultados y conclusiones del presente trabajo de tesis. En el cual hemos abordado un tema de suma importancia en la física de partículas y que a adquirido particular importancia, debido a los actuales avances tecnológicos en los colisionadores de iones pesados, especialmente en RHIC y en el LHC. Hablamos del Diagrama de Fase de la Cromodinámica Cuántica, el cual es uno de los principales retos de los físicos, debido a que se desconoce a detalle su comportamiento en regiones de valores intermedios de la densidad bariónica  $\mu$  y de la temperatura  $T$ .

Para realizar este estudio, hemos comenzado con una breve descripción de la teoría cuántica de campos no abeliana que nos ha servido como marco teórico en todos nuestros cálculos: La Cromodinámica Cuántica, haciendo especial énfasis en nuestro caso de interés, donde existe una temperatura y un potencial químico. Hemos querido realizar una conexión entre la manera teórica y la forma experimental en la que se encuentran las señales de las transiciones de fase, que ocurren en condiciones extremas de potenciales químicos y/o temperaturas. Dando además, un recorrido a través de la historia de los principales colisionadores de partículas desde sus inicios hasta la actualidad, mencionando sus principales aportaciones en el entendimiento de la física relativista. Además, describimos formalmente la relación entre el Lagrangiano de QCD y sus simetrías, con respecto a la generación dinámica de masas y la ruptura de la simetría quiral. Tratando de poner en contexto la manera en la que surge la masa visible con el sonado mecanismo de Higgs, cuya partícula principal, llamada Higgs, posiblemente ya haya sido descubierta en el colisionador de iones pesados, LHC en el 2012.

Además del fenómeno del rompimiento de la simetría quiral, en esta tesis

hemos desarrollado mecanismos, para encontrar otra transición de fase asociada al diagrama de fase de QCD, que es el desconfinamiento. Ambas transiciones de fase, parecen estar ligadas a los mismos efectos de las condiciones extremas de temperatura y/o potenciales químicos. Por esta razón, gran parte del material contenido en esta tesis, está concentrado en la posible simultaneidad de las dos fases. Para este objetivo, hemos utilizado las ecuaciones de Schwinger Dyson, que al ser una torre de ecuaciones acopladas, hemos tenido que usar truncamientos que nos permitan seguir teniendo la confiabilidad en los resultados que obtuvimos, pero con mayor rapidez. Inmerso en estas ecuaciones de Schwinger Dyson, se encuentran los propagadores fermiónicos y fotónicos, así como un anzats en la elección del vértice quark gluón. De manera que tengamos un equilibrio razonable entre la dificultad de encontrar soluciones numéricas a estas ecuaciones, mediante aproximaciones razonables y la correcta reproducción cualitativa de los fenómenos que deseamos estudiar.

En los dos últimos capítulos de esta tesis, se encuentra la parte medular de este trabajo, consistente en las aportaciones que hemos podido obtener y que contribuyen a un mejor entendimiento de estos fenómenos. En el capítulo 6, hemos estudiado el diagrama de fase de QCD a temperatura y potencial químico no nulos, basados en el comportamiento del condensado de los quarks ligeros  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  y la energía de umbral  $s_0$ , como parámetros de orden, de la restauración de la simetría quiral y el desconfinamiento, respectivamente. Los principales puntos a destacar en esta sección son:

- El condensado del quark y la energía de umbral, fueron calculados usando el propagador del quark, en una representación meromórfica en términos de polos reales y sus residuos. Los cuales son fijados, requiriendo una consistencia con el truncamiento arcoiris de las ecuaciones de Schwinger Dyson a  $T=0$ , así como una buena descripción de los datos de lattice a temperatura finita.
- Los parámetros de orden  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  y  $s_0$  se pueden relacionar a través de las reglas de suma a energía finita, dando como resultado, temperaturas de transición prácticamente iguales, para la transición quiral y para el desconfinamiento.
- Con este simple escenario, hemos podido extender el análisis para introducir un potencial químico bariónico  $\mu_B \approx 300 MeV$ . Estimando la posición del punto crítico, donde ocurre un cambio en el orden de la

transición de  $\mu_{B_c} > 300$  MeV y  $T < 185$  MeV. Una localización mas precisa del punto crítico, requiere un tratamiento mas refinado en la parametrización del propagador del quark.

En el capítulo 6, nos concentramos en realizar una mejor parametrización del propagador del quark, con la finalidad de encontrar no solo la ubicación del punto crítico, sino además, el orden de la transición de fase. Resolvimos el propagador fermiónico con tres ecuaciones  $A(p^2, w_n^2)$ ,  $B(p^2, w_n^2)$ ,  $C(p^2, w_n^2)$ , encontrando una suma mínima de frecuencias de Matsubara, que nos mantienen inalterados los resultados en menos de un 5%, cuando aumentamos significativamente su valor. Los resultados que obtuvimos son:

- Estudiamos el diagrama de fase de QCD, usando la técnica de las ecuaciones de Schwinger Dyson. El truncamiento lo realizamos basados en una correcta reproducción de los datos de lattice a temperatura finita, con nuestro condensado quark antiquark, a potencial químico cero.
- Calculamos la evolución del diagrama de fase mas allá de  $T = 0$ . Por ejemplo, para el cálculo de la restauración de la simetría quiral, calculamos la evolución de la capacidad calorífica como función de  $T$  y  $\mu$ . Demostrando la existencia de un crossover para un valor de  $\mu$  menor que el del valor crítico.
- Encontramos que la capacidad calorífica desarrolla una singularidad cerca de  $\mu \approx 0.22$  GeV, que nos indica la existencia de un punto crítico, en el cual comienza una transición de orden del primer tipo.
- La línea crítica de transición continua hasta  $\mu \approx 0.53$  GeV donde  $T_c = 0$  y la simetría quiral es finalmente restaurada.
- Para la transición de fase asociada al desconfinamiento, buscamos la violación del axioma de reflexión positiva para el propagador del quark. Encontrando, dentro de la precisión numérica, que la transición de simetría quiral y la del desconfinamiento suceden simultáneamente.

De esta forma, cumplimos con el objetivo general de esta tesis. Encontrando que ambos parámetros  $\mu$  y  $T$ , cumplen con un rol similar dentro del diagrama de fase de la cromodinámica cuántica, logrando eventualmente la restauración de la simetría quiral y el desconfinamiento de los quarks y gluones, en valores prácticamente iguales.

# Bibliografía

- [1] D.J. Gross, Phys. Rev. Mod. Phys. **77** 837 (2005); H.D. Politzer, Rev. Mod. Phys. **77** 851 (2005); F. Wilczek, Rev. Mod. Phys. **77** (2005).
- [2] G. Bali *et al.* Nucl. Phys. Proc. Supp. **63** 209 (1997).
- [3] F.J. Dyson, Phys. Rev. **75** 1736 (1949).
- [4] J.S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sc. **37** 452 (1951).
- [5] F. Wilczek, hep-ph/0003183.
- [6] J. B. Kogut and D. K. Sinclair, Phys. Rev. D **73**, 074512 (2006); M. Cheng *et al.*, Phys. Rev. D **74**, 054507 (2006); Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabó, Phys. Lett. B **643**, 46 (2006); Y. Aoki, S. Borsányi, S. Durr, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg and K. K. Szabó, JHEP **0906**, 088 (2009); A. Bazavov *et al.*, Phys. Rev. D **80**, 014504 (2009); S. Borsányi, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. D. Katz, S. Krieg, C. Ratti and K. K. Szabó, JHEP **1009**, 073 (2010), S. Borsanyi *et al.*, JHEP **1011**, 077 (2010).
- [7] A. Bazavov *et al.*, **80**, 014504 (2009); M. Cheng *et al.*, **81**, 054504 (2010).
- [8] K. Kanaya, in PoS (Lattice 2010), 012 (2010).
- [9] F. Karsch *et al.*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **129**, 614 (2004).
- [10] O. Philipsen, Nucl. Phys. A **830**, 713c (2009).
- [11] M. Harada, A. Shibata, Phys. Rev. D **59** 014010 (1998); T. Ikeda, Prog. Theor. Phys. **107** 403 (2002); C. S. Fischer, J. Luecker, J. A. Mueller, Phys.Lett. B **702** 438 (2011); A. Ayala, A. Bashir, C.A. Dominguez,

- E. Gutierrez, M. Loewe, A. Raya, Phys. Rev. D **84** 056004 (2011);  
 S. Sasagawa, H. Tanaka, Phys. Rev. C **85** 045201 (2012).
- [12] J. Cleymans et. al. Phys. Rev. C **73** 034905, (2006).
- [13] A. Andronic, P. Braun-Munzinger and J. Stachel arXiv:0812.1186v2, (2008).
- [14] L. Kumar arXiv:1211.1350v1 [nucl-ex] (2012)
- [15] K. H. Ackermann et. al. Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A **31** S1061, (2003).
- [16] J. Takahashi Phys. G. Nucl. Part. Phys. **31** S1061.
- [17] M. M. Aggarwal et al. [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. 105, 022302 (2010).
- [18] A. Adare et al. [PHENIX Collaboration], Phys. Rev. C **78**, 044902 (2008).
- [19] B. Abelev et al., [ALICE Collaboration], arXiv:1207.6068 [nucl-ex].
- [20] V. Koch 0810.2520 (2008).
- [21] M. Cheng et al, Phys. Rev. D **79**, 074505, 0811.1006, (2009).
- [22] J. Rafelski, B. Muller. Phys. Rev. Lett., 48(16):1066-1069, (1982).
- [23] arXiv:nucl-ex/0405007.
- [24] LBL 3835 "Accelerator Division Annual Report", E.J. Lofgren, October 6, 1975.
- [25] G. Chapline, E. Teller. Phys. Rev D **8**, 4302-4308, (1973).
- [26] B.J. Bjorken, S.L. Glashow. Physics letters **11** (3):255-257, (1964).
- [27] A, Lehrach et al. Proc. of the 16th International Spin Physics Symposium SPIN 742 (2005).
- [28] P. Spiller. Status of the SIS100/300 design. Proc. PAC07.
- [29] A. Pich, J. Prades. Nucl. Phys. Proc. Suppl **86**, 236-241 (2000).

- [30] B.L. Ioffe. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **86**, 236-241 (2000).
- [31] R. Fukuda, T. Kugo, Nucl. Phys. B **117** 250 (1976).
- [32] V.A. Miransky, II Nuovo Ciminto **90A** 149 (1985).
- [33] J.S. Ball y T.-W. Chiu, Phys. Rev. **22** 2542 (1980).
- [34] D.A. Kirznits JETP Lett. 15 (1972) 529;
- [35] A. Cucchieri, D. Dudal, T. Mendes, N. Vandersickel, arXiv: 1202.0639v1 [hep-lat] (2012).
- [36] P. Maris and C.D. Roberts, Phys. Rev. C **56** 3369 (1997); P. Maris and P.C. Tandy, Phys. Rev. C **60** 055214 (1999); P. Maris and C.D. Roberts Int. J. Mod. Phys. E **12** 297 (2003).
- [37] M.S. Bhagwat, M.A. Pichowsky and P.C. Tandy, Phys. Rev. D **67** 054019 (2003); R. Alkofer. W. Detmold, C. S. Fischer and P. Maris, Phys. Rev. D **70** 014014 (2004); N. Souchlas, J. Phys. **G37** 115001 (2010).
- [38] N. Souchlas, J. Phys. G **37** 115001 (2010).
- [39] L. D. McLerran and B. Svetitsky, Phys. Lett. **98B**, 195 (1981).
- [40] See for example: S.-x. Qin, L. Chang, H. Chen, Y.-x. Liu and C. D. Roberts, **106**, 172301 (2011); P. K. Srivastava, S. K. Tiwari and C. P. Singh, arXiv:1101.1151; F. Xu, T. K. Mukherjee, H. Chen and M. Huang, EPJ Web of Conf. **13**, 02004 (2011).
- [41] A. I. Bochkarev and M. E. Shaposnikov, Nucl. Phys. B **268**, 220 (1986).
- [42] For a review see e.g. P. Colangelo and A. Khodjamirian, in *At the Frontier of Particle Physics/Handbook of QCD*, edited by M. Shifman (World Scientific, Singapore 2001), Vol.3, p. 1495.
- [43] C.A. Dominguez and M. Loewe, Physical Review D **52**, 3143 (1995).
- [44] C. A. Dominguez and M. Loewe, Phys. Lett. B **233**, 201 (1989). The (near) equality of the critical temperatures for chiral-symmetry restoration and deconfinement was shown analytically in A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto and G. Pettini, Phys. Lett. B **244**, 311

(1990). These authors used a result for the thermal quark condensate valid for  $0 \leq T \leq T_c$ , while the first reference only made use of the low-T expansion of chiral perturbation theory, obtaining somewhat different critical temperatures.

- [45] For recent applications see e.g. C.A. Dominguez, M. Loewe and J.C. Rojas, *J. High Energy Phys.* **0708**, 040 (2007); C. A. Dominguez, M. Loewe, J. C. Rojas, and Y. Zhang, *Phys. Rev. D* **81**, 014007 (2010); *ibid.* **D 83**, 034033 (2011), and references therein
- [46] C.A. Dominguez, M. S. Fetea, and M. Loewe, *Phys. Lett. B* **387**, 151 (1996).
- [47] C. A. Dominguez and K. Schilcher, *Phys. Rev. D* **61**, 114020 (2000); *J. High Energy Phys.* **0701**, 093 (2007).
- [48] E. Megias, E. R. Arriola, and L. L. Salcedo, *Phys.Rev. D* **81**, 096009 (2010).
- [49] K. Nakamura *et al.*, Particle Data Group, *J. Phys. G* **37**, 075021 (2010).
- [50] T. Altherr and D. Seibert, *Phys. Rev. C* **49**, 1684 (1994).
- [51] A. Ayala, A. Bashir, C.A. Dominguez, E. Gutiérrez, M. Loewe and A. Raya *Phys. Rev. D* **84** 056004 (2011).
- [52] F. R. Brown, F. P. Butler, H.C. , N. H. Christ, Z. Dong, W. Schaffer, L. I. Unger and A. Vaccarino, *Phys. Lett. C* **65** 2491 (1990); A. A. Khan *et. al.*, *Phys. Rev. D* **63** 034502 (2000); Y. Aoki, G. Endrödi, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabó, *Nature* **443** 675 (2006).
- [53] M. Asakawa and K. Yazaki, *Nucl. Phys. A* **504** 668 (1989); A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto, and G. Pettini, *Phys. Rev. D* **41** 1610 (1990); A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto, and G. Pettini, *Phys. Lett. B* **231**, 463 (1989); A. Barducci, R. Casalbuoni, G. Pettini, and R. Gatto, *Phys. Rev. D* **49** 426 (1994); J. Berges and K. Rajagopal, *Nucl. Phys. B* **538** 215 (1999); M. A. Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, M. A. Stephanov, and J. J. M. Verbaarschot, *Phys. Rev. D* **58** 096007 (1998); O. Scavenius, A. Mocsy, I.Ñ. Mishustin, and D. H. Rischke, *Phys. Rev. C* **64**, 045202 (2001);

- N. G. Antoniou and A. S. Kapoyannis, Phys. Lett. B **563** 165 (2003);  
Y. Hatta and T. Ikeda, Phys. Rev. D **67** 014028 (2003).
- [54] S.-X. Qin, L. Chang, H. Chen, Y-X. Liu, C. D. Roberts, Phys. Rev. Lett. **106** 172301 (2011).
- [55] E. Braaten, A.Ñieto, Phys. Rev. Lett. **73** 2402 (1994).
- [56] A. Bazavov, T. Bhattacharya, M. Cheng, C. DeTar, H.T. Ding, S. Gottlieb, R. Gupta, P. Hegde, U.M. Heller, F. Karsch, E. Laermann, L. Levkova, S. Mukherjee, P. Petreczky, C. Schmidt, R. A. Soltz, W. Soeldner, R. Sugar, D. Toussaint, W. Unger, P. Vranas, Phys. Rev. D **85**, 054503 (2012).
- [57] A. Kizilersu, M. R. Pennington, Phys. Rev. D **79** 125020 (2009);  
A. Bashir, A. Raya, S. Sanchez-Madrigal, Phys. Rev. D **84** 036013 (2011);  
A. Bashir, R. Bermudez, L. Chang, C.D. Roberts, Phys. Rev. C **85** 045205 (2012).
- [58] L. Chang, C. D. Roberts Phys. Rev. C **85** 052201 (2012).
- [59] A. Ayala, A. Bashir, Phys. Rev. D **64** 025015 (2001).