



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**FENÓMENOS DE LOCALIZACIÓN EN ESTRUCTURAS
ALEATORIAS DE MULTICAPAS BINARIAS ESFÉRICAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:
KARLA SOFÍA ZAVALA ÁLVAREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. LUCA TESSIERI



MORELIA MICH.

AGOSTO 2019

AGRADECIMIENTOS

Que estas líneas sirvan para expresar mi total gratitud al Dr. Luca Tessieri, asesor de la tesis, quien guió el trabajo y aportó supervisión al mismo. De igual manera agradezco profundamente la disposición y confianza de los integrantes de la mesa sinodal: Dr. Emilio Tejeda Rodríguez y Dr. Ulises Nucamendi Gómez. De manera especial quisiera agradecer al Dr. Olivier Sarbach por su acompañamiento en el aprendizaje e instrucción que fundamentaron el trabajo presente.

Tanto a mi familia y como a Gil agradezco su amor y apoyo incondicional. En fin a todos los que han estado presentes y acompañandome en cualquier forma les reitero mi gratitud.

RESUMEN

En esta tesis se analiza la propagación de ondas electromagnéticas en una estructura desordenada tridimensional constituida por una sucesión de cascarones esféricos concéntricos. Cada cascarón está formado por dos capas de materiales con distintos índices de refracción. El desorden se introduce variando aleatoriamente el espesor de las capas de un cascarón al otro. La tesis contiene una parte introductiva en la que se introduce el fenómeno de la localización de Anderson y algunas de las herramientas matemáticas que se usan para su estudio. En esta parte se reproducen los resultados más relevantes ya conocidos para algunos modelos unidimensionales (modelo de Anderson, modelo de Kronig-Penney, estructura formada por una sucesión de bicapas). En la segunda parte de la tesis se introduce el modelo formado por una sucesión de bicapas esféricas y se muestra cómo la simetría esférica del sistema permite reducir el problema al análisis de un modelo unidimensional. Se muestra además cómo se puede, por lo menos en principio, estudiar la propagación de ondas electromagnéticas en la estructura esférica estratificada por medio del formalismo de las matrices de transferencia.

Palabras clave: localización, sistemas desordenados, ondas electromagnéticas, modelo de Kronig-Penney, modelos tridimensionales.

ABSTRACT

In this thesis we analyze the propagation of electromagnetic waves in a tridimensional random structure formed by a sequence of concentric spherical shells. Each shell is constituted by two layers with different refractive index. Disorder is introduced in the model via the widths of the layers which fluctuate from one shell to the next one. In the first part of the thesis we introduce the concept of Anderson localization and some mathematical tools which are commonly used in the study of this phenomenon. In this part of the thesis we summarize the most relevant results which have been obtained for some one-dimensional models (Anderson model, Kronig-Penney model, binary multi-layered structures). In the second part of this work we present a tridimensional model formed by a sequence of bilayered spherical shells; we show how the spherical symmetry of the model allows one to reduce the problem to the analysis of a one-dimensional model. We also show how the transfer matrix technique can be used (in principle at least) to study the propagation of electromagnetic waves through the sequence of random spherical bilayers.

Índice general

Introducción	1
1. Sistemas cristalinos	4
1.1. Sistemas cristalinos	4
1.1.1. Red de Bravais	4
1.1.2. Red recíproca	10
1.2. Teorema de Bloch	11
1.2.1. Modelo de Kronig-Penney	13
2. Sistemas desordenados	18
2.1. Tipos de desorden	18
2.2. Localización	20
2.3. Transición de Anderson	21
2.4. Teoría de un único parámetro de escala	22
2.5. Modelo de Anderson	24
2.6. Teorema de Furstenberg	26
2.7. Conjetura de Borland	28
2.8. Método del mapa hamiltoniano	29
2.8.1. Variables acción-ángulo	31
2.8.2. Exponente de Lyapunov	32
3. Modelo de Kronig Penney unidimensional	37
3.1. Desorden compositivo y estructural en el modelo de Kronig Penney	37
3.2. Mapa hamiltoniano del modelo	38
3.3. Modelo sin desorden	42
3.4. Modelo con desorden débil	44
3.5. Longitud de localización	47

4. Modelo unidimensional de bicapas con desorden	51
4.1. Condiciones de Frontera	53
4.2. Mapa Hamiltoniano	54
4.3. Modelo sin desorden	60
4.4. Modelo con desorden débil	64
4.5. Longitud de Localización	72
5. Modelo de bicapas con simetría esférica	78
5.1. Solución a la ecuación de onda esférica monocromática	79
5.2. Condiciones de frontera de los campos	87
5.3. Matriz de transferencia	90
Conclusiones	97

Introducción

La localización de Anderson es un fenómeno cuyo estudio se ha venido desarrollando desde la publicación del trabajo pionero de P. W. Anderson. [1] Aunque la teoría nació en el ámbito de la materia condensada, el hecho de que la localización se genera como efecto de la interferencia destructiva de ondas electrónicas conlleva que el fenómeno de la localización de Anderson puede presentarse en cualquier campo donde se tenga propagación de ondas (electrónicas, electromagnéticas, acústicas, etc.) en un medio desordenado. Por esta razón hoy en día los fenómenos de localización se estudian en muchos sectores de la física, que van desde la materia condensada a la propagación de ondas electromagnéticas en guías de onda, desde la física de los átomos fríos al estudio de dispositivos mesoscópicos. [2, 3]

En el estudio de los fenómenos de localización, los sistemas unidimensionales (1D) han desempeñado un papel de suma importancia ya que es posible obtener resultados analíticos para esta clase de sistemas que están fuera del alcance para modelos de dimensionalidad superior [4]. En particular, el estudio de los sistemas desordenados 1D ha conocido un desarrollo particularmente intenso a partir del descubrimiento de que es posible producir una transición efectiva metal-aislante en modelos de esta categoría por medio de específicas correlaciones espaciales del desorden. Este resultado ha abierto la posibilidad de crear dispositivos 1D que funcionen como filtros efectivos, permitiendo el transporte (de electrones o de ondas, según el caso) en ventanas energéticas predefinidas.

A pesar de las obvias ventajas que presenta el estudio de modelos estrictamente 1D desde un punto de vista matemático, desde un punto de vista físico el estudio de esta clase de sistemas no es totalmente satisfactorio ya que muchas de las propiedades para modelos 1D no resultan válidas para los modelos correspondientes en dos y/o tres dimensiones. Además, desde un punto de vista experimental las aplicaciones de los modelos 1D resultan limitadas, pues en la mayoría de los casos hay que tomar en cuenta la naturaleza tridimensional de los dispositivos utilizados y de los arreglos experimentales.

El presente trabajo pretende extender los resultados obtenidos para estructuras 1D multicapas binarias con desorden correlacionado [4] a un modelo generalizado de éste en tres dimensiones. En efecto, esta tesis constituye un estudio preliminar de las propiedades de localización de ondas electromagnéticas a través de una estructura formada por capas esféricas concéntricas de dos tipos que se alternan entre sí.

El modelo que se considera es tridimensional pero su simetría esférica permite reducir el estudio al análisis de un sistema de tipo 1D, lo que posibilita un estudio analítico de las propiedades de localización y transporte de ondas electromagnéticas. Los resultados principales de este trabajo preliminar son la reducción del problema original al estudio de un modelo 1D y la construcción de las matrices de transferencia para la estructura multicapa binaria, con lo que se abre el camino para determinar la longitud de localización y las propiedades de transporte del modelo 3D.

La tesis se divide en dos partes. En la primera, que abarca los capítulos 1 a 4, se introduce el fenómeno de la localización de Anderson y las herramientas teóricas necesarias para su estudio. Se dedica una atención especial al modelo de Anderson y al modelo de Kronig-Penney aperiódico *unidimensionales*, ya que representan las aplicaciones más sencillas del método del mapa hamiltoniano para el estudio de las propiedades de localización y transporte en modelos desordenados. Posteriormente se discute la propagación de ondas electromagnéticas en estructuras de multicapas binarias 1D, mostrando cómo se puede extender a este problema el método del mapa hamiltoniano.

La segunda parte de la tesis (cap. 5) representa la parte innovadora de este trabajo. En esta parte se introduce una generalización tridimensional del modelo de multicapas binarias. El modelo está constituido por una sucesión de cascarones esféricos, cada uno de los cuales consta de dos capas de materiales con índices de refracción distintos. El desorden se introduce variando el espesor de las capas (desorden estructural) y los valores de los índices de refracción (desorden compositivo). En la tesis se muestra cómo es posible reducir la construcción de los campos electromagnéticos mediante la solución de un campo *escalar* ψ (conocido como potencial de Debye [5]) utilizando las propiedades de simetría del modelo. Al analizar las condiciones de frontera de los campos entre los dos materiales es posible reducir el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas esféricas en esta estructura multicapa al análisis de la propagación en la variable radial del campo escalar ψ .

La estructura espacial de la propagación se obtiene por medio de la técnica de las matrices de transferencia, que permite calcular el valor de la variable radial del campo ψ y de su derivada en la frontera de la capa $(n + 1)$ -ésima en función de los valores correspondientes en la frontera en la n -ésima capa. En la tesis se ha obtenido una expresión analítica para esta matriz de transferencia, lo que abre el camino para determinar las propiedades de transmisión y localización de las ondas electromagnéticas a través de una estructura formada por N bicapas por medio del análisis de la matriz de transferencia global . Este análisis se llevará a cabo después de la conclusión de la tesis.

Capítulo 1

Sistemas cristalinos

Un sistema cristalino es aquel que posee un orden donde los elementos que lo componen están colocados en posiciones con una regularidad periódica. Periodicidad que permitirá introducir herramientas para su estudio tales como el teorema de Bloch que se expondrá más adelante en este Capítulo. Pese a que el estudio de los sistemas cristalinos es exhaustivo a continuación sólo se exponen algunas definiciones y propiedades generales para contrastarse posteriormente con un sistema desordenado.

1.1. Sistemas cristalinos

Un cristal se caracteriza por ser un arreglo regular de átomos repetidos periódicamente en el espacio.

Una estructura cristalina tiene dos componentes:

- Red de Bravais
- Una base en cada sitio de la red

1.1.1. Red de Bravais

Una red de Bravais es un conjunto de la forma $\{n_1\mathbf{t}_1 + n_2\mathbf{t}_2 + \cdots + n_d\mathbf{t}_d\}$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ y $\{\mathbf{t}_i\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^d , llamados *primitivos*. En el caso tres dimensional se tendrá

$$\mathbf{t}_n = n_1\mathbf{t}_1 + n_2\mathbf{t}_2 + n_3\mathbf{t}_3 \quad (1.1)$$

En otra forma, una red Bravais es un arreglo regular y periódico de puntos en el espacio, donde todos los puntos se conectan entre sí mediante vectores de translación [6]. Los vectores $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ forman un paralelepípedo denominado *celda primitiva*, en el caso de tres dimensiones el volumen Ω de la celda primitiva está dado por el determinante $|\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3|$

$$\Omega = \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_3)$$

De tal forma que las celdas primitivas contienen sólo un punto de la red y llenan el espacio sin traslapes. Dichas celdas están definidas por las longitudes a, b, c de los bordes y los ángulos α, β, γ entre cada par.

Nótese de la ec. (1.1) que la elección de los vectores primitivos no es única y en consecuencia la forma de la celda primitiva tampoco será única. Para destacarlo se consideran los vectores $\tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2, \tilde{\mathbf{t}}_3$

$$\tilde{\mathbf{t}}_1 = m_{11}\mathbf{t}_1 + m_{12}\mathbf{t}_2 + m_{13}\mathbf{t}_3$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_2 = m_{21}\mathbf{t}_1 + m_{22}\mathbf{t}_2 + m_{23}\mathbf{t}_3$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_3 = m_{31}\mathbf{t}_1 + m_{32}\mathbf{t}_2 + m_{33}\mathbf{t}_3$$

Donde m_{ij} son números enteros y elementos de la matriz de transformación M con determinante unitario. Así M^{-1} es también una matriz unitaria de números enteros lo que significa que el conjunto de vectores $\{\mathbf{t}_n\}$ generado por $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ coincide con el conjunto de vectores $\{\tilde{\mathbf{t}}_n\}$ generado por $\tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2, \tilde{\mathbf{t}}_3$. Se muestra un ejemplo en la Figura 1.1.

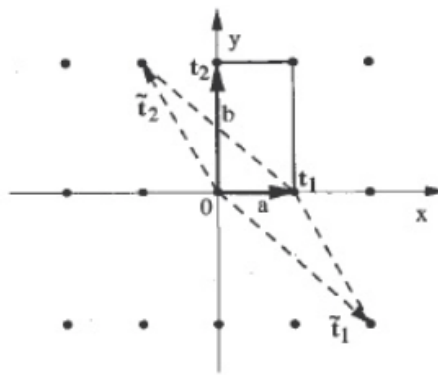


Figura 1.1: En la imagen se muestran una red de Bravais descrita de dos maneras distintas, por los vectores $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ en un caso y los vectores $\tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2$ en otro de tal forma que el área es igual para cualquier elección. [6]

Los volúmenes de las celdas Ω y $\tilde{\Omega}$ son iguales, lo que puede demostrarse como si-

gue.

Lema

Sean $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_d$ y $\mathbf{t}'_1, \mathbf{t}'_2, \dots, \mathbf{t}'_d$ dos bases de \mathbb{R}^d que generan sus redes de Bravais \mathcal{R} y \mathcal{R}' , respectivamente. Entonces $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \iff \exists$ una matriz $M = (m_{ij})$, $d \times d$ con coeficientes $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ tal que $|M| = \pm 1$

Corolario

$$|\mathbf{t}'_1, \mathbf{t}'_2, \dots, \mathbf{t}'_d| = |M| |\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_d|$$

esto es, el volumen de las celdas primitivas es invariante respecto a cambios de bases primitivas.

Alternativamente es posible describir la red de manera satisfactoria utilizando una celda no primitiva. Este tipo de celdas, llamadas convencionales, pueden contener un número entero de celdas primitivas y, consecuentemente, más de un punto de la red. Generalmente se eligen celdas convencionales que poseen las mismas simetrías de la red, como ilustra el ejemplo de la Figura 1.2.

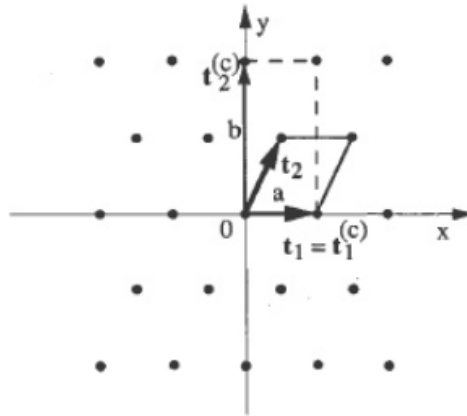


Figura 1.2: En la imagen se muestra la celda primitiva descrita por los vectores $\{t_i\}$ y la celda convencional descrita por los vectores $\{t_i^{(c)}\}$. [6]

El énfasis en la simetría traslacional será destacado más adelante en la sección 1.2, donde se introduce el teorema de Bloch.

Siendo más exigentes, se puede elegir una celda primitiva que posea la misma simetría de la red a este tipo de celdas se les llama *celda de Wigner-Seitz*.

Una *celda de Wigner-Seitz* se obtiene utilizando un punto de la red como referencia y seleccionando los puntos del espacio que se hallen más cercanos al punto de referencia que a cualquier otro punto de la red.

Los casos de identidad entre cristal y red son específicos y suceden cuando la posición de equilibrio de cada átomo del cristal ocupa un sitio de la red. A estas redes se le llama redes de Bravais.

Para completar la definición de red cristalina se necesita definir una base.

Base

El contenido de una celda primitiva es descrito por un conjunto apropiado de *vectores base* $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_v$ que individualizan las posiciones de equilibrio del núcleo de cada átomo en la celda unitaria y las posiciones de cada átomo no pueden ser relacionadas mediante vectores de traslación.[6]

Clasificación de redes de Bravais

Los tipos de redes de Bravais son determinados por consideraciones de simetría. El conjunto completo de los elementos de simetría depende de las magnitudes y direcciones relativas de los vectores base [7].

La teoría de grupos permite demostrar que en dos dimensiones hay cinco redes distintas: [6] [8]

- Oblicuas.

- Rectangulares: primitivas y centradas.

- Cuadradas.

- Hexagonales.

En tres dimensiones, las mismas consideraciones de simetría inducen catorce redes diferentes, algunas de las cuales se pueden asociar con las caracterizaciones en dos

dimensiones, sin embargo hay más variables por lo que las redes son agrupadas en siete sistemas cristalinos: [6]

- Tricíclico.

- Monocíclico: primitivo y centrado en la base.

- Ortorómbico: primitivo, centrado en la base, centrado en el cuerpo y centrado en las caras. Correspondiente al grupo Rectangular en 2D.

- Trigonal.

- Tetragonal: primitivo y centrado en el cuerpo.

- Hexagonal.

- Cúbico: primitivo, centrado en el cuerpo y centrado en las caras.

Las relaciones entre magnitudes y direcciones relativas se muestra en la Fig 1.3

Sistema cristalino	Red de Bravais			
	Primitiva	Centrada en la base	Centrada en cuerpo	Centrada en caras
Triclínico $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$				
Monoclínico $a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2} \neq \beta$				
Ortorómbico $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$				
Trigonal $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq \frac{\pi}{2}$				
Tetragonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$				
Hexagonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ $\gamma = 2\pi/3$				
Cúbico $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$				

Figura 1.3: Clasificación de las catorce redes de Bravais en los siete sistemas cristalinos. Descritas con las celdas convencionales. [6]

1.1.2. Red recíproca

Dada una red \mathcal{R} , el conjunto de vectores \mathbf{g} tales que

$$\mathcal{R}' := \{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{g} \cdot \mathbf{t} \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad \forall \mathbf{t} \in \mathcal{R}\} \quad (1.2)$$

\mathcal{R}' se llama red recíproca de \mathcal{R}

Lema

Sea \mathcal{R} una red de Bravais con vectores primitivos $\{\mathbf{t}_i\}$ y sea $\{\mathbf{g}_j\}$ la base dual tal que $\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_{ij}$ $i, j = 1, 2, \dots, d$
 $\Rightarrow \mathcal{R}'$ es una red de Bravais con vectores primitivos

$$\mathbf{t}_i = 2\pi\mathbf{g}_i$$

Donde $(\mathcal{R}')' = \mathcal{R}$

Tanto la red recíproca como la original satisfacen ciertas propiedades entre ellas:

- De la ecuación (1.2) el vector \mathbf{g}_1 debe ser ortogonal a \mathbf{t}_2 y \mathbf{t}_3 simultáneamente, por lo que se tendrá:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{2\pi}{\Omega} \mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_3, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{2\pi}{\Omega} \mathbf{t}_3 \times \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{2\pi}{\Omega} \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2$$

donde $\Omega = \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_3)$ es el volumen de una celda primitiva en en la red original y los vectores \mathbf{g}_2 y \mathbf{g}_3 se obtienen de bajo el mismo argumento.

- El volumen Ω_k de la celda unitaria del espacio recíproco es $(2\pi)^3$ veces el recíproco del volumen de la celda unitaria en la red original.

$$\Omega_k = \frac{(2\pi)^3}{\Omega}$$

- Sea \mathbf{q} tal que

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{t}_n = 2\pi l$$

con $l \in \mathbb{Z}$, para cualquier \mathbf{t}_n . Entonces \mathbf{q} debe ser un vector de la red recíproca. Una consecuencia inmediata es

- Una onda plana $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ tiene la periodicidad de la red si y sólo si el vector de onda \mathbf{k} es igual a un vector recíproco de la red.
- Una función $f(\mathbf{r})$ en la red original, siempre podrá expresarse como:

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}_m} f_m e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{g}_m}$$

Donde la sumatoria es sobre los vectores de la red recíproca. Similarmente:

- Una función $F(\mathbf{k})$ en la red recíproca podrá expresarse de la forma:

$$F(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{t}_m} F_m e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{t}_m}$$

Una de las razones por las que es importante definir la red recíproca es que permite introducir la *zona de Brillouin*, la cual queda unívocamente definida por una celda primitiva de la red recíproca en el dominio de frecuencias y la *primera zona de Brillouin* es reducida por todo el grupo de simetrías que presente la red manteniendo el origen de la celda

1.2. Teorema de Bloch

El teorema de Bloch es una consecuencia de la simetría traslacional de los cristales, para enunciarlo se considera un cristal tridimensional y para analizarlo se estudian las propiedades generales de la ecuación de Schrödinger de un solo electrón con potencial $V(\mathbf{r})$

$$\left[-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (1.3)$$

En el caso en que $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \mathbf{t}_n)$ sea un potencial con la periodicidad de la red cristalina en cuestión, se estudia su transformada de Fourier

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}_m} V(\mathbf{g}_m) e^{i\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{r}} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

El espectro de Fourier será discreto [6] y se escribirá en términos de vectores de

onda plana de la red recíproca tales que su número de onda sea $g_m = \frac{m\pi}{a}$. Analizando los elementos de matriz, sean \mathbf{k} y \mathbf{k}' dos vectores de onda plana distintos de cero

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \middle| V(\mathbf{r}) \middle| \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right\rangle &= \sum_{\mathbf{g}_m} V(\mathbf{g}_m) \int \frac{1}{V} e^{i(-\mathbf{k}' + \mathbf{k} + \mathbf{g}_m) \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{k}' \neq \mathbf{k} + \mathbf{g}_m \\ V(\mathbf{g}_m) & \text{si } \mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{g}_m \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde \mathbf{k} y \mathbf{k}' son dos vectores de onda distintos en la primer zona de Brillouin es decir $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k} + \mathbf{g}_m \forall \mathbf{g}_m$. [6]

De acuerdo a la ec. (1.5) el potencial periódico no puede mezclar ondas de vectores $\mathbf{k} + \mathbf{g}_n$ con ondas de vectores $\mathbf{k}' + \mathbf{g}'_n$, así las autofunciones del cristal Hamiltoniano (ec. (1.3)) pueden ser etiquetadas como $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ con \mathbf{k} un vector de onda definido en la primer zona de Brillouin [6].

Las funciones de onda de un cristal hamiltoniano $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ del vector de onda \mathbf{k} deben ser una combinación lineal apropiada de funciones de onda plana de vectores $\mathbf{k} + \mathbf{g}_n$ en general se tiene [6]

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{g}_n} a_n(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{g}_n) \cdot \mathbf{r}} \\ &= e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde $u(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ denota una función con periodicidad de la red, así las soluciones de la ec.(1.3) son ondas planas moduladas con la periodicidad de la red. Estas ondas se llaman ondas de Bloch y se extienden sobre toda la red por lo que tienen una naturaleza no localizada.

Cabe señalar que de manera equivalente

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r} + \mathbf{t}_n) &= e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{t}_n)} u(\mathbf{k}, \mathbf{r} + \mathbf{t}_n) \\ &= e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{t}_n} u(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \\ &= e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{t}_n} \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

pese a que la periodicidad de la solución es más evidente en la ec.(1.7), ambas formulaciones son equivalentes.

Las autofunciones de un cristal Hamiltoniano con potencial periódico son caracterizadas por un vector de onda \mathbf{k} definido en la primer zona de Brillouin. Para cualquier vector \mathbf{k} se tiene en general un conjunto infinito y numerable de soluciones correspondientes al número de onda $k = \frac{n\pi}{a}$ y se asocia con los autoestados energéticos del cristal. Por lo que se puede añadir una etiqueta adicional a las soluciones, el subíndice n , correspondiente al nivel de energía E_n que son autovalores del cristal así las funciones de onda del cristal siguen esta notación $\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})$. Donde los autovalores $E_n(\mathbf{k})$ describen la estructura de banda del cristal.

El teorema de Bloch no sólo es fundamental por su simetría traslacional en las funciones de onda sino que además del teorema se deriva que los niveles de energéticos se agrupan en bandas, esto es, se encuentran en determinadas ventanas de energía separadas por intervalos de energías prohibidas.[6]

1.2.1. Modelo de Kronig-Penney

Consta de la repetición periódica de barreras de potencial que puede tratarse como un modelo de un arreglo cristalino periódico. Su nombre rinde homenaje a sus autores que lo introdujeron en 1931 [9] originalmente para estudiar las propiedades del espectro de energía de un sistema cuántico idealizado [4] con la intención de reemplazar el potencial real de un cristal con uno constante a trozos, de manera que las soluciones de la ecuación de Schrödinger se reducen a funciones exponenciales [6]

Modelo 1-dimensional

Se considera una secuencia infinita de barreras rectangulares de anchura b y altura V_0 que están separadas por regiones de potencial nulo de anchura c , la constante de periodicidad de red es $a = c + b$, la celda unitaria se define en $-c < x < b$ donde hay dos regiones, denotadas por I , donde $-c < x < 0$ y II tal que $0 < x < b$. Donde se tiene el siguiente potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -c < x < 0 \\ V_0 & 0 < x < b \end{cases} \quad (1.8)$$

Tal modelo se ilustra en la Figura 1.4

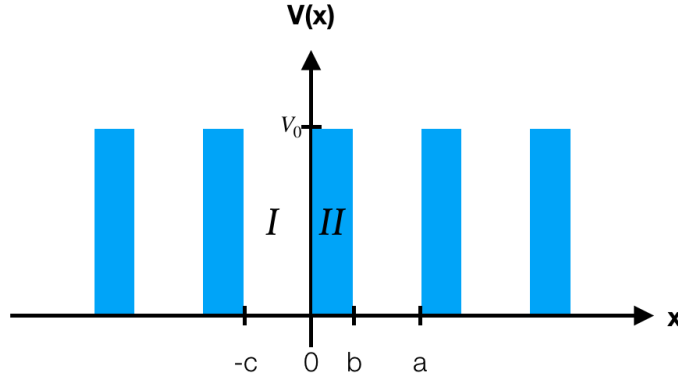


Figura 1.4: Barreras de potencial unidimensional periódicas. [6]

Las soluciones a la ecuación de Schrödinger para energías $0 < E < V_0$ tienen la forma

$$\begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{iqx} + Be^{-iqx} & -c < x < 0 & q(E) = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ \psi_{II}(x) = Ce^{\beta x} + De^{-\beta x} & 0 < x < b & \beta(E) = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \end{cases} \quad (1.9)$$

donde $q(E)$ es el número de onda en la región I y las constantes A, B, C, D se deben elegir de tal forma que satisfagan las siguientes condiciones de frontera en los bordes de cada región

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0), \quad \left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0} \quad (1.10)$$

$$\psi_{II}(b) = e^{ika}\psi_I(-c), \quad \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=b} = e^{ika}\left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=-c} \quad (1.11)$$

Las ecs. (1.10) imponen continuidad en la función de onda y su derivada en $x = 0$, cuando se imponen las condiciones de frontera para $x = b$ y $x = -c$, ecs. (1.11), se recurre al teorema de Bloch por lo que se manifiesta un factor de fase e^{ika} , donde k es el vector de onda de Bloch en 1 dimensión. Además las ecs. (1.10) y (1.11) conducen a las siguientes expresiones para las constantes A, B, C, D

$$\begin{cases} A + B = C + D \\ Aiq - Biq = C\beta - D\beta \\ Ce^{\beta b} + De^{-\beta b} = e^{ika} [Ae^{-iqc} + Be^{iqc}] \\ C\beta e^{\beta b} - D\beta e^{-\beta b} = e^{ika} [Aiqe^{-iqc} - Biqe^{iqc}] \end{cases} \quad (1.12)$$

tal sistema de ecuaciones tiene solución si la matriz de coeficientes tiene determinante nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ iq & -iq & -\beta & -\beta \\ -e^{ika}e^{-iqc} & -e^{ika}e^{iqc} & e^{\beta b} & e^{-\beta b} \\ -iqe^{ika}e^{-iqc} & +iqe^{ika}e^{iqc} & \beta e^{\beta b} & -\beta e^{-\beta b} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.13)$$

Después de ciertos cálculos se obtiene

$$\frac{\beta^2 - q^2}{2q\beta} \sinh \beta b \sin qc + \cosh \beta b \cos qc = \cos ka \quad (1.14)$$

La ec. anterior permite asociar de lado izquierdo una función de la energía, pues $q(E) = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ y $\beta(E) = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$, de acuerdo a la ec. (1.9), mientras que de lado derecho se tiene una expresión en términos del vector de Bloch, sin embargo esta ecuación resulta difícil de visualizar el comportamiento de la energía en términos del vector de Bloch, pues involucra funciones trigonométricas e hiperbólicas. Con el afán de extraer la información de la energía se consideran las barreras como funciones delta espaciadas con lo que se simplifica la solución anterior, el comportamiento deseado se obtiene en el límite $b \rightarrow 0$ y $V_0 \rightarrow \infty$ bajo la condición de mantener constante el área de las barreras de potencial, esto es, $bV_0 = cte$. En este límite la ec. (1.14) se reduce a

$$P \frac{\sin qa}{qa} + \cos qa = \cos ka \quad (1.15)$$

donde $P = \frac{mV_0ba}{\hbar^2}$ es un parámetro adimensional proporcional a la “intensidad” de la barrera.

Resulta ilustrativo considerar los casos límite del parámetro P . En el caso $P = 0$ se recupera la solución para un electrón libre. En contra parte, el caso $P \rightarrow \infty$, las bandas de energía resultan demasiado estrechas y el espectro de energía se describe con líneas en las energías tales que $q(E)a = n\pi$ $n = 1, 2, \dots$ es el número de sitios en la red.

Para ampliar el entendimiento de la solución, fuera de los casos límite del parámetro P , se recurre a la herramienta gráfica

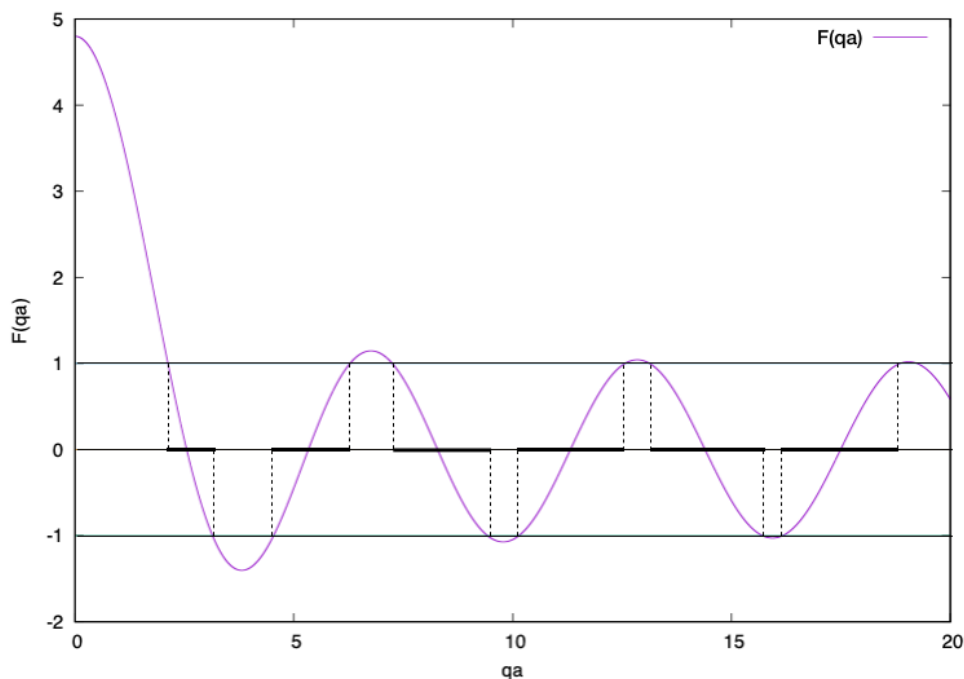


Figura 1.5: Solución gráfica del modelo de Kronig Penney. El parámetro adimensional P se fijó en $P = 3,8$ y las regiones de compatibilidad con el teorema de Bloch están marcadas con la línea gruesa en el eje x . [6]

En la Figura 1.5 se grafica el lado izquierdo de la ec.(1.15) como $F(qa)$, y las regiones que están con línea continua en sobre el eje x indican las regiones de compatibilidad con la parte derecha de la ec.(1.15), $|F(qa)| \leq 1$, estas regiones satisfacen los valores de energía permitidos es decir $E = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$, como se visualiza en la Figura 1.5 los valores de energía permitidos están seccionados en bandas de energía permitidas determinados por la ec. (1.15), separadas por intervalos prohibidos.

En congruencia con la Fig 1.5 se ilustra a continuación la energía como función del vector de Bloch \mathbf{k} , donde se exhiben las bandas permitidas y prohibidas de forma más evidente.

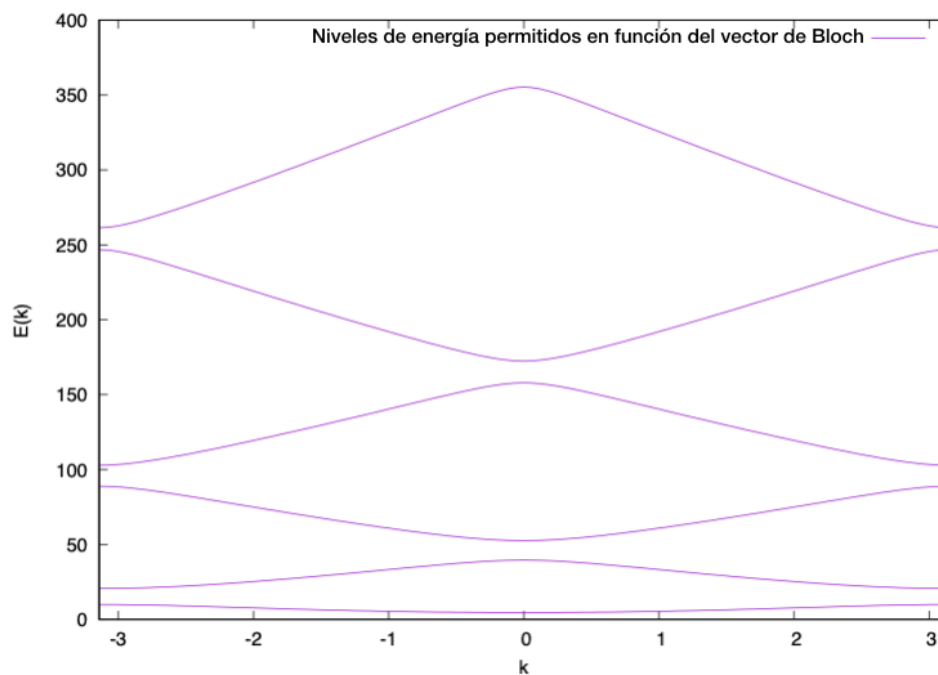


Figura 1.6: Solución numérica para la ecuación de compatibilidad ec.(1.15). El parámetro adimensional $P = 3,8$, y las unidades de la energía son tales que $\frac{2m}{\hbar^2} = 1$ y $a = 1$. [6]

Las bandas de energía permitidas para el modelo de Kronig Penney se pueden calcular para cualquier valor de P , dependiendo de las condiciones físicas de interés.

Con la Figura 1.6 se clarifica el concepto de estructura de bandas energéticas, mencionado en la sección 1.2 pues ilustra que el espectro de energía consiste en regiones permitidas separadas por saltos de energía.

Capítulo 2

Sistemas desordenados

La caracterización de las propiedades de los materiales ordenados es difícilmente una forma de describir la realidad, que es más complicada, pues siempre hay distorsiones asociadas a las impurezas, vacancias, dislocalizaciones y otros defectos [10].

En este capítulo se presentan las herramientas necesarias para analizar los sistemas desordenados y se introduce el concepto de localización de Anderson.

2.1. Tipos de desorden

El desorden rompe la invarianza traslacional del sistema y puede manifestarse en distintas intensidades desde distorsiones en una red de Bravais hasta la ausencia total de una red de Bravais subyacente. Para los objetivos de este trabajo el desorden será construido partiendo de un cristal ideal que al perturbarse da origen a distintos tipos de desorden, que según [10] se caracterizan cinco tipos.

- **Desorden compositivo:** Describe impurezas en el material, es decir cuando hay al menos dos tipos distintos de átomos distribuidos de manera aleatoria en los sitios de la red, por lo que están dotados de una estructura geométrica subyacente.
- **Desorden estructural:** Describe un solo tipo de elementos en la red con sitios de la red localizados en posiciones espaciales azarosas, es decir la estructura geométrica subyacente se altera o rompe, dependiendo de la intensidad del desorden.

- Desorden topológico: Cuando el número de vecinos cercanos es constante, no hay estructura regular subyacente.
- Desorden orientacional: Se describe con un colectivo de vectores con orientaciones aleatorias.
- Desorden de energía cinética: Red de átomos idénticos conectados con dos tipos distintos de interacciones entre vecinos inducidas por un vector aleatorio de potencial.

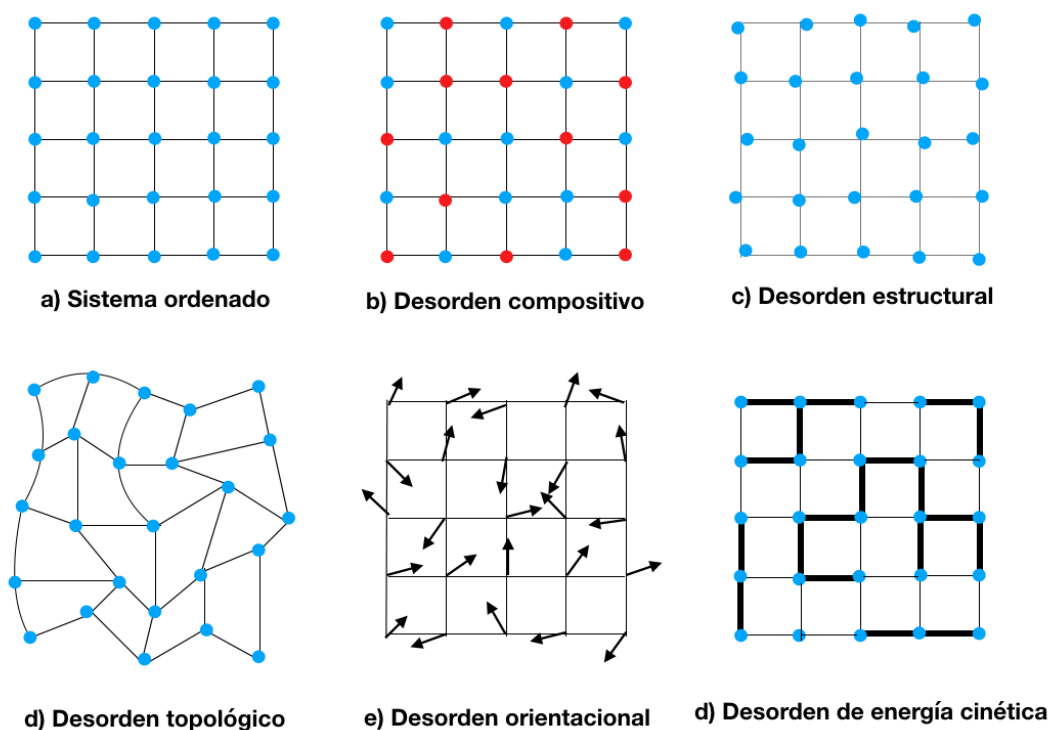


Figura 2.1: En la imagen se muestra una representación 2 dimensional de los tipos de desorden descritos anteriormente.

Estos son algunos tipos de desorden sin embargo se destacarán del compositivo y el estructural debido al objetivo de esta tesis.

Cabe destacar que en un sólido cristalino los estados electrónicos son extendidos, sin embargo cuando se presentan distorsiones en la estructura cristalina se generan fenómenos de interferencia que reducen la trayectoria libre media. En este sentido, a más imperfecciones menor conductividad. Phillip Anderson fue quien en 1958 descubrió que cuando el desorden de una muestra tridimensional aumenta más allá de un punto crítico, la movilidad del electrón no sólo se reduce sino que se desaparece

por completo, generando así una región finita en la que el electrón queda atrapado y la conductividad se anula, a este fenómeno se le conoce como localización de Anderson [2].

2.2. Localización

Se puede definir de maneras alternas, en particular se exponen las siguientes

- Comportamiento asintótico de la función de onda.
La envolvente de la función de onda decrece exponencialmente

$$\psi(\mathbf{r}) \widetilde{f}(\mathbf{r}) e^{-\lambda r}$$

donde $f(\mathbf{r})$ es un función aleatoria y acotada

$$\frac{1}{\lambda} = l_{loc} \quad (2.1)$$

es la longitud de localización.

- Transmisión a través de un potencial aleatorio
Se calcula el coeficiente de transmisión T , esto es la probabilidad de que un electrón pase de un sitio \mathbf{r} a un sitio \mathbf{r}' . Si los estados electrónicos son localizados, el coeficiente de transmisión decrece exponencialmente a largas distancias

$$\frac{2}{l_{loc}} = - \lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \frac{\ln(T(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.2)$$

Estas definiciones son de carácter fundamental para determinar el comportamiento electrónico en el sistema de estudio. El fenómeno de localización depende de la dimensión del sistema de estudio, para sistemas de dimensión uno y dos los estados del sistema se localizan independientemente del grado del desorden, no así para sistemas en tres dimensiones, por lo que a continuación se define la transición de fase metal-aislante.

2.3. Transición de Anderson

La dimensionalidad del sistema de estudio es indispensable para estudiar las propiedades de transporte. En los sistemas tridimensionales el grado de localización de los autoestados del sistema depende de la intensidad del desorden.

- Cuando la intensidad del desorden es débil, una parte de los estados del sistema se localiza mientras que los demás estados son extendidos, véase la siguiente Figura obtenida de [10].

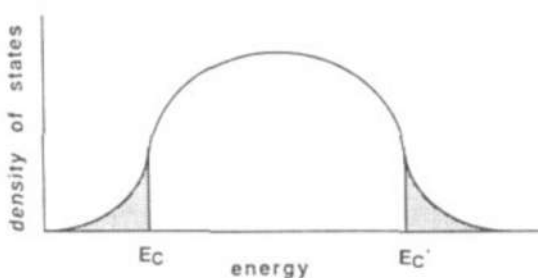


Figura 2.2: Imagen cualitativa de la densidad de estados en función de la energía. Donde E_c y E'_c denotan los bordes de movilidad que separan la región de estados extendidos en el centro y la región de los estados localizados en las colas.

Los estados extendidos y los estados localizados no pueden coexistir en los mismos intervalos de energía, para vislumbrar este hecho supongamos hay un estado localizado en la región de estados extendidos para alguna configuración de desorden. Luego se cambia infinitesimalmente el potencial desordenado, lo que introduce un acoplamiento del edo. localizado con los edos. extendidos y estos se mezclan generando edos. extendidos. Por lo cual si existiese un edo. localizado en tal región éste sería inestable. Razón por la cual no hay regiones de coexistencia, lo que genera una segmentación entre los estados extendidos y los localizados, separados por ciertas energías E_c y E'_c (en la Figura 2.2) conocidas como bordes de movilidad, presentados por Mott en 1968.[10]

- Si el desorden del sistema es lo suficientemente grande los bordes se irán acercando al centro de la banda de forma que para algún valor crítico del desorden los bordes de movilidad coincidan $E_c = E'_c$ lo que significa que todos los estados del sistema serán localizados convirtiendo el material conductor en un material aislante de forma que genera una transición de fase, conocida como transición de Anderson.[10]

No hay una prueba rigurosa de que los estados extendidos deban existir en el centro de la banda. Encontrar tal prueba es uno de los problemas actuales de la teoría de localización.[10]

Hasta ahora la única certeza matemática es para sistemas unidimensionales, donde independientemente de grado del desorden los estados son localizados. Para sistemas bidimensionales la actual creencia es que tampoco hay estados extendidos, ni siquiera para grados de desorden infinitesimalmente pequeños. Esta creencia está fundada en la teoría del único parámetro de escala. [10]

2.4. Teoría de un único parámetro de escala

La teoría de un único parámetro de escala o SPS por sus siglas en inglés (single parameter scaling) está fundada en la hipótesis de formular la teoría de localización con un único parámetro, este parámetro se suele representar con la conductancia g . La hipótesis consta en que la función de escala $\beta(g)$ describe con qué exponente la conductancia promedio crece en un sistema de tamaño L [2].

$$g \sim L^\beta \quad (2.3)$$

Por lo que se puede describir el comportamiento de la conductancia en función de L de la siguiente manera

$$\frac{\ln g}{\ln L} = \beta[g] \quad (2.4)$$

Para obtener el comportamiento cualitativo de $\beta(g)$ se interpolan los comportamientos asintóticos.

- $g \gg 1$: Se espera que la ley de Ohm sea válida

$$\begin{aligned} R &= \rho \frac{L}{A} \\ &= \rho \frac{1}{L^{d-2}} \end{aligned}$$

Donde $g = \frac{1}{R}$, A la sección transversal, d la dimensión y ρ la resistividad del material, es decir σ la conductividad

$$\Rightarrow g \sim \sigma L^{d-2}$$

- $g \ll 1$ se espera que los estados electrónicos sean exponencialmente locali-

zados

$$g \sim e^{-\alpha L}$$

Con lo que se tiene

$$\beta \sim \begin{cases} d - 2 & \text{régimen metálico} \\ \ln g & \text{régimen localizado} \end{cases} \quad (2.5)$$

Para interpolar la solución de $\beta(g)$, ésta se supone una función continua y monótona. Sin embargo aunque estas hipótesis sean necesarias no son suficientes para determinar el comportamiento cualitativo de la función $\beta(g)$, para eso es necesario un análisis más profundo, realizado en [11] que permite determinar un comportamiento para los casos $d = 1, 2, 3$ como se muestra en la Figura 2.3

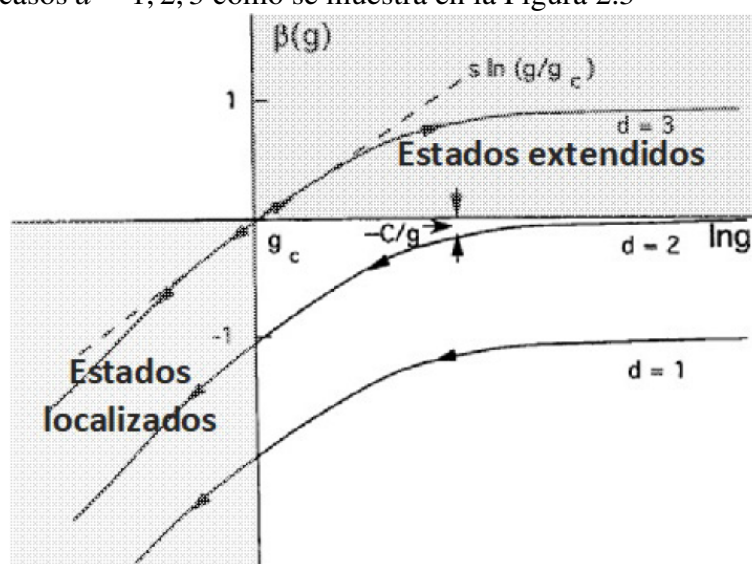


Figura 2.3: En la imagen se muestra $\beta(g)$ para las dimensiones 1,2 y 3. Donde las flechas indican el comportamiento de la conductancia respecto al tamaño del sistema L . [12]

La función $\beta(g)$ depende de la dimensión del material de estudio. Para lo cual se distinguen los valores positivos y negativos de g .

- g Positiva.
Para conductores en 3 dimensiones la conductancia es positiva, para conductores dos dimensionales es cero y negativa en una dimensión [2]. Cómo se ven en el eje positivo de g de la Figura 2.3.
- g Negativa.
En el régimen localizado, g decae exponencialmente con el tamaño de modo que $\beta(g)$ es negativo para las 3 dimensiones, lo que genera un punto crítico de

β en la dimensión 3, en el cual β desaparece para algunos valores especiales de g asociados con los bordes de movilidad. En los sistemas con dimensión más baja no sucede esta transición de fase porque la conductancia siempre decrece con el tamaño del sistema.[2]

Un conductor pequeño 2 dimensional, en cambio, lucirá como un metal en el régimen casi extendido, pero todos sus estados se localizarán eventualmente en un medio lo suficientemente grande.[2]

El interés principal de esta tesis se enfoca en modelos desordenados unidimensionales o cuyo estudio sea reducible al análisis unidimensional. Por esta razón en lo consiguiente se considerará con especial atención sistemas de esta clase. Entre los modelos unidimensionales, el más sencillo y el más importante es sin duda el modelo que introdujo P. W. Anderson y que lleva ahora su nombre

2.5. Modelo de Anderson

Para explicar la transición de fase del tipo metal-aislante, Anderson utilizó un modelo de enlace fuerte de un electrón en una red desordenada [2]. Para estudiar sistemas desordenados es necesario introducir la ec. de Schrödinger, para el modelo de Anderson unidimensional es

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \epsilon_n \psi_n = E \psi_n \quad (2.6)$$

Contrario a los modelos cristalinos, la ec. de Schrödinger no es suficiente para estudiar modelos con desorden, para estos es necesario además especificar las propiedades estadísticas del mismo. Donde las variables aleatorias están dadas por ϵ_n que son idénticamente distribuidas y tienen distribución uniforme

$$p(\epsilon_n) = \begin{cases} \frac{1}{W} & \text{si } \epsilon_n \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right] \\ 0 & \text{si } \epsilon_n \notin \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right] \end{cases} \quad (2.7)$$

la intensidad del desorden es $\sigma^2 = \frac{W^2}{12}$. Cabe señalar que para este modelo las variables aleatorias ϵ_n representan las energías de sitio de la red.

La ec. (2.6) puede escribirse en términos de matrices de transferencia como

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{T}_n \mathbf{u}_n$$

con

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} E - \epsilon_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dados los valores de la función de onda en los sitios 0 y 1 de la red, se puede obtener una solución de la ec. de Scödinger por medio de un producto de matrices

$$\mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{T}_N \mathbf{T}_{N-1} \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_N \mathbf{u}_1 \quad (2.8)$$

dónde es difícil determinar la forma de la matriz de transferencia total \mathbf{P}_N pues es el producto de matrices aleatorias y hacen falta algunos elementos para poder trabajar este modelo en el régimen de desorden débil. Por lo que primero se estudia el caso sin desorden.

Caso sin desorden

En ausencia del desorden el modelo se Anderson se reduce a

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = E\psi_n$$

y la matriz de transferencia

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El análisis de autovalores de \mathbf{T} muestra que

$$\begin{aligned} |E| > 2 &\Rightarrow \psi_n \sim C e^{\pm \mu n} \quad \text{con} \quad \mu = \cosh^{-1} \left(\frac{|E|}{2} \right) \\ |E| < 2 &\Rightarrow \psi_n \sim C e^{\pm i \mu n} \quad \text{con} \quad E = 2 \cos \mu \end{aligned}$$

Las soluciones físicamente aceptables en ausencia de desorden se hallan en el intervalo de energías $[-2, 2]$, que se conoce como *la banda de energía*.

Para estudiar el caso desordenado es necesario el estudio del producto de las matrices aleatorias $\mathbf{P}_N = \mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_1$ que se presentó en la ec. (2.8). Por lo que será necesario introducir elementos de la teoría de probabilidad, como el teorema de Furstenberg, que proporciona información sobre los productos de matrices aleatorias $\mathbf{P}_N = \mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_1$ en el límite $N \rightarrow \infty$.

2.6. Teorema de Furstenberg

Como se vio para el modelo de Anderson, cuando se pretende describir un sistema desordenado a diferencia de un sistema ordenado, el Hamiltoniano no es suficiente, se necesitan además las propiedades estadísticas de las variables aleatorias, dadas mediante la función de distribución de probabilidad.

Para definir una función de probabilidad se necesitan tres ingredientes:

- Ω : Conjunto no vacío
- \mathcal{A} : σ -álgebra sobre Ω
- $P : \rightarrow [0, 1]$ función de probabilidad.

σ -álgebra

σ -álgebra \mathcal{A} sobre Ω es una familia de subconjuntos $A \subset \Omega$ que satisfaga:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

álgebra de Borel

$\mathcal{A} = \mathcal{B}$: El σ -álgebra más pequeño que contiene $(a, b]$ con $0 \leq a < b < 1$

Variable aleatoria

Las variables aleatorias son la herramienta matemática que permite describir la aleatoriedad de un modelo y de ahí deriva la importancia para su estudio.

Una variable aleatoria X es un mapeo $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ que es medible, es decir $X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$.

Distribución de X

$\mu_X(B) := P(X)$ donde $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \forall B \in \mathcal{B}$ y satisface las siguientes dos propiedades

1. $\mu_X(\mathbb{R}) = 1$

$$\mu_X(\mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$$

2. Si $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ disconjuntos

$$\mu_X \left(\bigcup_{n \geq 1} B_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu_X(B_n)$$

El uso de las distribuciones para caracterizar las variables aleatorias de un modelo permite cuantificar la intensidad del desorden así como las relaciones entre las variables aleatorias, pues la función de distribución incluye todos los momentos, en general las variables pueden separarse en dos categorías: independientes y correlacionadas.

Variables independientes

Las variables aleatorias se llaman independientes o estocásticas si vale

$$\mu_{\vec{X}}(B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n) = \prod_{i=1}^n \mu_{x_i}(B_i) \quad (2.9)$$

Variables independientes e idénticamente distribuidas

Las variables i.i.d si son independientes y además

$$\mu_{x_1} = \mu_{x_2} = \dots = \mu_{x_n} \quad (2.10)$$

Variables correlacionadas

Sean X_1, X_2 dos variables aleatorias tal que su momento cuadrático sea finito. La **covarianza** entre X_1 y X_2 es

$$C(X_1, X_2) = \langle X_1, X_2 \rangle - \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle \quad (2.11)$$

Si la covarianza es distinta de cero entonces las variables son **correlacionadas**.

Teorema de Furstenberg

Se considera una sucesión de matrices unimodulares $\{T_i\}$ de transformaciones lineales, tales que forman un grupo denotado por $SL(k, \mathbb{R})$. Donde los elementos de matriz serán variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Sea G el grupo más pequeño de $SL(k, \mathbb{R})$ que contiene soporte μ_r . Si

- G no es compacto

- G no contiene subgrupos de índice finito reducibles. G es fuertemente irreducible

Entonces vale con probabilidad 1 que $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ tal que $\mathbf{u} \neq 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log |T_N T_{N-1} \cdots T_1 \mathbf{u}| = \lambda > 0 \quad (2.12)$$

La hipótesis de no compactes implica un crecimiento no lineal de la multiplicación de los elementos del grupo. La segunda hipótesis garantiza que ninguna iteración finita de elementos del grupo resulta un elemento del grupo. Y el teorema de Furstenberg garantiza un crecimiento exponencial donde λ representa el exponente de Lyapunov (tasa de crecimiento).

2.7. Conjetura de Borland

Si para alguna energía arbitraria se encuentra ψ_1 y ψ_2 soluciones que satisfagan las condiciones de frontera homogéneas en la izquierda y en la derecha respectivamente para una cadena larga de valores aleatorios, y luego se encuentra la solución general, éstas no concuerdan [13].

Esto sucede para energías arbitrarias, sin embargo cuando se construyen soluciones para los autovalores del Hamiltoniano, Borland conjeturó que la envolvente puede seguir un comportamiento con un único máximo en cierta región espacial que en promedio decrezca exponencialmente en los alrededores del máximo [13] y entonces es posible determinar una longitud de localización. Borland demostró que esto sucede en el límite de altas energías.

Después Ishii [14] determinó que con ayuda del teorema de Furstenberg la conjetura de Borland sería aplicable a todos los autovalores energéticos pues hay un vínculo lógico entre el crecimiento exponencial de las matrices aleatorias y la localización exponencial de autofunciones en un sistema lo suficientemente grande.

Lo anterior aunado a que las soluciones deben satisfacer las condiciones de frontera, entonces las soluciones construidas a partir de las extremidades izquierda y derecha de la red embonan, lo que conlleva a la identificación de la tasa de crecimiento exponencial con el inverso de la longitud de localización:

$$\lambda = \frac{1}{l_{\text{loc}}} \quad (2.13)$$

que es precisamente la conjunción de la ec.(2.2) con el teorema de Furstenberg.

2.8. Método del mapa hamiltoniano

Conociendo el exponente de Lyapunov se tienen las propiedades de transporte del sistema, el teorema de Furstenberg garantiza bajo ciertas condiciones que éste será mayor que cero. Pero no especifica el valor de λ . El cálculo de una expresión analítica para el exponente de Lyapunov no es una tarea sencilla, de hecho, a la fecha no se conoce una expresión válida para cualquier intensidad del desorden. En el caso del desorden débil es posible usar métodos perturbativos para obtener una fórmula analítica que muestre a λ como función de la intensidad del desorden y de la energía de la partícula cuántica. En esta sección se expone el método del mapa hamiltoniano, que se construye estableciendo una analogía entre la localización de estados electrónicos en el modelo de Anderson y la inestabilidad energética de un oscilador paramétrico clásico.

Donde el hamiltoniano del oscilador paramétrico es

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} (1 + \xi(t)) x^2 \quad (2.14)$$

con

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \delta(t - nT)$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad (2.15)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\omega^2 (1 + \xi(t)) x \quad (2.16)$$

Estas ecuaciones están descritas de manera dependiente de las patadas tanto antes, t_n^- , como después, t_n^+ . Integrando las ecs. de movimiento en el intervalo (x_n^+, x_{n+1}^-) se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^- \\ p_{n+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega T) & \frac{1}{\omega} \sin \omega T \\ -\omega \sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^+ \\ p_n^+ \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Integrando ahora las ecs. de movimiento entre t_n^- y t_n^+ se tiene

$$\begin{pmatrix} x(t_n^+) \\ p(t_n^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 \xi_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t_n^-) \\ p(t_n^-) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

sustituyendo la ec. anterior anterior en las ecs. (2.17) se induce un mapeo que permite asociar los valores de la n -ésima patada x_n y p_n con los valores de la siguiente patada.

$$x_{n+1} = [\cos(\omega T) - \omega \xi_n \sin(\omega T)] x_n + \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega T) \right] p_n \quad (2.19)$$

$$p_{n+1} = -[\omega \sin(\omega T) + \omega^2 \xi_n \cos(\omega T)] x_n + [\cos(\omega T)] p_n \quad (2.20)$$

Eliminando p_n se obtiene la siguiente relación

$$x_{n+1} + x_{n-1} + \omega \xi_n \sin(\omega T) x_n = 2 \cos(\omega T) x_n$$

que es idéntica a la ec. (2.6) para el modelo de Anderson mientras resulten válidas las siguientes correspondencias entre parámetros de los dos modelos

$$\epsilon_n = \omega \xi_n \sin(\omega T) \quad (2.21)$$

$$E = 2 \cos(\omega T) \quad (2.22)$$

Y se puede comprobar que en el caso de desorden débil ambas condiciones se satisfacen. Más aún, se puede interpretar al información del mapa en términos del modelo de Anderson.

- En el diagrama fase del oscilador las órbitas acotadas representan estados extendidos en el modelo de Anderson.
- La inestabilidad energética en el oscilador paramétrico implica localización en el modelo de Anderson
- Y el exponente de Lyapunov del sistema se asocia con el inverso de la longitud de localización.

Sin embargo aún no se está en condiciones de calcular el exponente de Lyapunov del sistema. Para estudiar la evolución del mapa es conveniente hacer una transformación canónica pues de este modo se pueden identificar las coordenadas cíclicas del sistema y su cantidad conservada asociada, de tal forma que el sistema puede simplificarse.

2.8.1. Variables acción-ángulo

Con el afán de simplificar el estudio de la localización en sistemas desordenados y conservar la dinámica del sistema se introducen las variables acción- ángulo, de modo que se tenga, en términos del oscilador paramétrico las siguientes relaciones

$$x_n = \sqrt{\frac{2J_n}{\omega}} \sin \theta_n \quad (2.23)$$

$$p_n = \sqrt{2\omega J_n} \cos \theta_n \quad (2.24)$$

Este cambio permite reescribir el mapa ecs.(2.19) y (2.20) como

$$\begin{aligned} \sqrt{2J_{n+1}} \sin(\theta_{n+1}) &= \sin(\theta_n + \omega T) \sqrt{2J_n} - \omega \xi_n \sin(\omega T) \sin \theta_n \sqrt{2J_n} \\ \sqrt{2J_{n+1}} \cos(\theta_{n+1}) &= \cos(\theta_n + \omega T) \sqrt{2J_n} - \omega \xi_n \cos(\omega T) \sin \theta_n \sqrt{2J_n} \end{aligned}$$

Sea $D_n^2 = \frac{J_{n+1}}{J_n}$, así

$$D_n \sin(\theta_{n+1}) = \sin(\theta_n + \omega T) - \omega \xi_n \sin(\omega T) \sin \theta_n \quad (2.25)$$

$$D_n \cos(\theta_{n+1}) = \cos(\theta_n + \omega T) - \omega \xi_n \cos(\omega T) \sin \theta_n \quad (2.26)$$

elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumándolas se obtiene

$$D_n^2 = \frac{J_{n+1}}{J_n} = 1 - 2\omega \xi_n \sin \theta_n \cos \theta_n + \omega^2 \xi_n^2 \sin^2 \theta_n \quad (2.27)$$

Este cambio de variable es importante porque se obtiene la dinámica de la variable θ_n de manera desacoplada respecto a la variable J_n y se obtiene

$$\theta_{n+1} = \tan^{-1} \left[\frac{\sin(\theta_n + \omega T) - \omega \xi_n \sin(\omega T) \sin \theta_n}{\cos(\theta_n + \omega T) - \omega \xi_n \cos(\omega T) \sin \theta_n} \right] \quad (2.28)$$

en el caso del desorden débil se puede considerar el desarrollo en potencias de ξ_n y despreciar al orden cuadrático

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega T + \omega \xi_n \sin^2 \theta_n + O(\xi_n^2) \quad (2.29)$$

ecuación a partir de la cual se puede concluir que si las variables aleatorias son independientes también lo son θ_n y ϵ_n .

Otra consecuencia que se puede inferir a partir de este mapeo es que las variables ángulo se distribuyen uniformemente en el intervalo $(0, 2\pi)$ excepto para $\omega T = \frac{M\pi}{M}$, valores resonantes de la energía.

2.8.2. Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov para el oscilador es, de acuerdo al teorema de Furstenberg

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \quad (2.30)$$

que en términos de las variables acción-ángulo es igual a

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| \frac{\sqrt{J_{n+1}} \sin \theta_{n+1}}{\sqrt{J_n} \sin \theta_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| \frac{\sqrt{J_{n+1}}}{\sqrt{J_n}} \right| + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| \frac{\sin \theta_{n+1}}{\sin \theta_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |D_n| + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \{ \ln |\sin \theta_{n+1}| - \ln |\sin \theta_1| \} \end{aligned}$$

Con excepción de los bordes y el centro de la banda, el valor esperado de θ_{n+1} es algo finito, así cuando N tiende a infinito el límite tiende a cero

$$\lambda = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln D_n^2 \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \ln D_n^2 \rangle \quad (2.32)$$

y sustituyendo D_n^2 por la ec. (2.27) se obtiene lo siguiente

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left\langle \ln(1 - 2\omega\xi_n \sin \theta_n \cos \theta_n + \omega^2 \xi_n^2 \sin^2 \theta_n) \right\rangle$$

y considerando el desarrollo de $\ln(1+x)$ se tiene

$$\lambda = -\frac{1}{2} \langle \xi_n \sin(2\theta_n) \rangle + \frac{\omega}{8} \langle \xi_n^2 \rangle - \frac{\omega^2}{4} \langle \xi_n^2 \cos(2\theta_n) \rangle + \frac{\omega^2}{8} \langle \xi_n^2 \cos(4\theta_n) \rangle + \mathcal{O}(\xi_n^2) \quad (2.33)$$

Los valores medios involucrados en la expresión anterior se pueden calcular dependiendo de la correlación del desorden. En el caso en que las variables ξ_n sean

independientes se tiene

$$\langle \xi_n \sin(2\theta_n) \rangle = \langle \xi_n \rangle \langle \sin(2\theta_n) \rangle = 0 \quad (2.34)$$

$$\langle \xi_n^2 \cos(2\theta_n) \rangle = \langle \xi_n^2 \rangle \langle \cos(2\theta_n) \rangle = 0 \quad (2.35)$$

$$\langle \xi_n^2 \cos(4\theta_n) \rangle = \langle \xi_n^2 \rangle \langle \cos(2\theta_n) \rangle = 0 \quad (2.36)$$

Con lo que

$$\lambda = \frac{\omega}{8} \langle \xi_n^2 \rangle + \mathcal{O}(\xi_n^2) \quad (2.37)$$

Retomando las variables del modelo de Anderson ecs. (2.21) y (2.22) se tiene

$$\lambda = \frac{\langle \epsilon_n^2 \rangle}{8 \left(1 - \frac{E^2}{4}\right)} + \mathcal{O}(\epsilon_n^2) \quad (2.38)$$

que es la fórmula de Thouless.

Si se tuvieran variables correlacionadas los términos (2.34), (2.35) y (2.36) no son válidos pues

$$\langle \xi_n f(\theta_n) \rangle \neq \langle \xi_n \rangle \langle f(\theta_n) \rangle$$

Lo que implica que los términos mencionados ya no se anulan y la fórmula anterior ya no tiene validéz.

Supongamos ahora que se tienen variables correlacionadas, partiendo de la ec.(2.33), a segundo orden se tiene

$$\lambda = -\frac{1}{2} \langle \xi_n \sin(2\theta_n) \rangle + \frac{\omega}{8} \langle \xi_n^2 \rangle$$

para calcular el correlador $\langle \xi_n \sin(2\theta_n) \rangle$ hasta segundo orden se introducen las variables de correlación ruido-ángulo definidas como

$$q_k := \langle \xi_n e^{2i\theta_{n-k}} \rangle \quad (2.39)$$

y considerando el mapa de la variable angular ec.(2.29)

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega T + \omega \xi_n \sin^2 \theta_n + \mathcal{O}(\xi_n^2)$$

relación a partir de la cual se puede escribir el correlador ruido-ángulo como

$$\begin{aligned}
q_{k-1} &= \langle \xi_n e^{2i \theta_{n-k+1}} \rangle \\
&= \langle \xi_n e^{2i [\theta_{n-k} + \omega T' + \xi_{n-k} \sin^2 \theta_{n-k}]} \rangle \\
&= \langle \xi_n e^{2i \theta_{n-k}} e^{2i \omega T'} e^{2i \xi_{n-k} \sin^2 \theta_{n-k}} \rangle \\
&= e^{2i \omega T'} \langle \xi_n e^{2i \theta_{n-k}} [1 + 2i \xi_{n-k} \sin^2 \theta_{n-k}] \rangle \\
&= e^{2i \omega T'} \langle \xi_n e^{2i \theta_{n-k}} + 2i \xi_{n-k} \xi_n e^{2i \theta_{n-k}} \sin^2 \theta_{n-k} \rangle \\
&= e^{2i \omega T'} [\langle \xi_n e^{2i \theta_{n-k}} \rangle + \langle 2i \xi_{n-k} \xi_n e^{2i \theta_{n-k}} \sin^2 \theta_{n-k} \rangle] \\
&= e^{2i \omega T'} [q_k + \langle 2i \xi_{n-k} \xi_n \rangle \langle e^{2i \theta_{n-k}} \sin^2 \theta_{n-k} \rangle]
\end{aligned}$$

de manera que se obtiene una ecuación recursiva del correlador

$$q_{k-1} = e^{2i \omega T} q_k - \frac{i\omega}{2} \langle \xi_n \xi_{n-k} \rangle \quad (2.40)$$

Después de iterar el algoritmo anterior k veces se obtiene q_0

$$q_0 = e^{2ik\omega T} q_k - \frac{i\omega}{2} \sum_{j=1}^k e^{2ij\omega T} \langle \xi_n \xi_{n-j} \rangle \quad (2.41)$$

supongamos que para $k \rightarrow \infty$ $q_k \rightarrow 0$, entonces

$$q_0 = -\frac{i\omega}{2} \sum_{j=1}^k e^{2ij\omega T} \langle \xi_n \xi_{n-k} \rangle \quad (2.42)$$

ahora, retomando el exponente de Lyapunov de la ec.(2.33) en términos de q_0 se tiene

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{1}{2} \langle \xi_n \sin(2\theta_n) \rangle + \frac{\omega}{8} \langle \xi_n^2 \rangle \\ &= \frac{\omega}{8} \langle \xi_n^2 \rangle - \frac{\omega}{4i} (q_0 - q_0^*) \\ &= \frac{\omega}{8} \langle \xi_n^2 \rangle + \frac{\omega^2}{8} \left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{2ij\omega T} \langle \xi_n \xi_{n-j} \rangle \right]\end{aligned}\quad (2.43)$$

$$= \frac{\omega}{8} \langle \xi_n^2 \rangle + \frac{\omega^2}{8} \left[\sum_{j=1}^{\infty} 2 \cos(2j\omega T) \langle \xi_n \xi_{n-j} \rangle \right]\quad (2.44)$$

$$= \frac{\omega}{8} \langle \xi_n^2 \rangle \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos(2j\omega T) \frac{\langle \xi_n \xi_{n-j} \rangle}{\langle \xi_n^2 \rangle} \right]\quad (2.45)$$

$$(2.46)$$

Se obtiene la fórmula de Izrailev-Krohin desarrollada en [15]

$$\lambda = \frac{\omega^2 \langle \xi_n^2 \rangle}{8} W(\omega T)\quad (2.47)$$

que en términos de las variables del modelo de Anderson se reescribe como

$$\lambda = \frac{\langle \epsilon_n^2 \rangle}{8 \sin^2(\omega T)} W(\omega T)\quad (2.48)$$

donde

$$W(\mu) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \epsilon_n \epsilon_{n-k} \rangle}{\epsilon_n^2} \cos(2k\omega T)\quad (2.49)$$

es la densidad espectral o la transformada de Fourier de la función de correlación, donde la función de correlación es

$$\chi(k) = \frac{\langle \epsilon_n \epsilon_{n-k} \rangle}{\epsilon_n^2}\quad (2.50)$$

que es una función par en k y sus coeficientes son π -periódicos. La ec. (2.48) representa una generalización de la fórmula de Thouless al caso de desorden con correlaciones espaciales. Cuando la densidad espectral se vuelve nula en un intervalo continuo de energías, se generan bordes de movilidad efectivos en un sistema

unidimensional.

La función de correlación también se puede escribir a partir de la ec. (2.49) como

$$\chi(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(\omega T) \cos(2k\omega T) d(\omega T) \quad (2.51)$$

para normalizar la función de correlación a uno, $\chi(0) = 1$, $W(\omega T)$ se normaliza de la siguiente forma

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(\omega T) d(\omega T) = \pi \quad (2.52)$$

Finalmente se tienen todas las herramientas necesarias para el tratamiento de sistemas desordenados en el régimen de desorden débil por lo que ahora podemos estudiar otros modelos.

Capítulo 3

Modelo de Kronig Penney unidimensional

El modelo de Kronig Penney con barreras deltiformes de potencial está descrito por la siguiente ecuación

$$\psi''(x) + k^2\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n\psi(x_n)\delta(x - x_n) \quad (3.1)$$

Donde x_n es la posición de la n -ésima barrera y U_n su amplitud.

Este modelo puede describir más de un escenario físico, por ejemplo un electrón que se mueve en un sólido donde se consideran unidades tales que $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$ y k indica el número de onda del electrón. También puede describir la propagación de ondas electromagnéticas en una guía de onda donde el número de onda $k = \sqrt{E}$ es igual a $\frac{\omega}{c}$ para una onda escalar clásica de frecuencia ω [4], fenómeno estudiado experimentalmente por [16].

Puede observarse a partir de la ec. (3.1) que el desorden en el modelo se puede introducir ya sea por variaciones aleatorias en las amplitudes U_n de las barreras deltiformes del potencial o por la aleatoriedad en las posiciones x_n [4].

3.1. Desorden compositivo y estructural en el modelo de Kronig Penney

Sea el modelo con las barreras de potencial espaciadas aleatoriamente con x_n la fuente del desorden estructural y U_n la fuente de desorden compositivo.

El hamiltoniano del modelo está descrito por la ec. (3.1)

$$\psi''(x) + \left[k^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \delta(x - x_n) \right] \psi(x) = 0$$

Se considerará desorden débil por lo que las perturbaciones de la energía U_n pueden describirse en términos de un campo medio U de tal manera que $U_n = U + u_n$ donde u_n funge como la variable aleatoria y similarmente las posiciones pueden tener pequeñas variaciones respecto a una posición media d de tal manera que se tiene $x_n = q(d + \xi_n) = \mu + \mu_n$ aquí μ_n funge como la variable aleatoria respecto de posición en el sistema.

El análisis de este sistema incluirá correlaciones en ambos tipos de desorden así como correlaciones entre las variables de posición (μ_n) y energía (u_n).

$$\langle u_n \rangle = 0 \quad \langle u_n^2 \rangle \ll U^2 \quad (3.2)$$

y

$$\langle \mu_n \rangle = 0 \quad \langle \mu_n^2 \rangle \ll 1 \quad (3.3)$$

la condición 3.3 implica que la energía $E = k^2$ debe ser menor que $\frac{k^2}{\mu_n^2}$. Además se definen las correlaciones binarias

$$\chi_u(k) = \frac{\langle u_n u_{n+k} \rangle}{\langle u_n^2 \rangle}, \quad \chi_\mu(k) = \frac{\langle \mu_n \mu_{n+k} \rangle}{\langle \mu_n^2 \rangle}, \quad \chi_{u,\mu}(k) = \frac{\langle u_n \mu_{n+k} \rangle}{\langle u_n \mu_n \rangle} \quad (3.4)$$

Y como se mencionó en la sección 2.8.2 del capítulo 2 la función de correlación es par respecto a k . Para el correlador cruzado $\chi_{u,\mu}(k)$ también se considerará par aunque para éste puede ser impar lo que implicaría que el modelo no sea totalmente isotrópico [4].

El objetivo es determinar la longitud de localización mediante el exponente de Lyapunov del sistema para lo que nos serviremos de las herramientas desarrolladas anteriormente.

3.2. Mapa hamiltoniano del modelo

Para proceder con el mapa Hamiltoniano del modelo se introduce la ec. Dinámica del oscilador paramétrico que está constituida por una sucesión de patadas a

tiempos regulares con intensidades U_n y descrito por la ecuación

$$\ddot{x} + \left[q^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \delta(t - t_n) \right] x = 0 \quad (3.5)$$

con el objetivo de linealizar la ec. Dinámica se introduce la variable $p = \dot{x}$ que además es congruente con las ecuaciones de movimiento de Hamilton

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad (3.6)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left[q^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \delta(t - t_n) \right] \quad (3.7)$$

contrastando el oscilador en el modelo de Anderson y en el modelo de Kronig-Penney se tiene una relación entre ambos modelos.

$$E \leftrightarrow \omega^2, \quad U_n \leftrightarrow -\omega^2 \xi_n$$

En este desarrollo se conservará la notación del oscilador paramétrico, teniendo en cuenta que $x \rightarrow t, \psi(x) \rightarrow x(t)$ y $k \rightarrow q$. Por lo que el mapa Hamiltoniano queda como

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left[\frac{U_n}{q} \sin t_n + \cos t_n \right] x_n + \left[\frac{1}{q} \sin t_n \right] p_n \\ p_{n+1} &= [U_n \cos t_n - q \sin t_n] x_n + [\cos t_n] p_n \end{aligned}$$

donde $t_n = q(d + \xi_n) = \mu + \mu_n$ es el paso n -ésimo de la red.

Antes de continuar con las variables acción-ángulo es prudente realizar una transformación canónica de la forma

$$x_n = \alpha \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) X_n + \frac{1}{q\alpha} \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) P_n \quad (3.8)$$

$$p_n = -q\alpha \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) X_n + \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) P_n \quad (3.9)$$

α es un parámetro que se define posteriormente por el momento el desarrollo se enfoca en construir el mapa en términos de las nuevas variables X_n y P_n . Combinando

las ecs. (3.8) y (3.9) con las ecs. de x_{n+1} y p_{n+1} se obtiene lo siguiente

$$\alpha \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) X_{n+1} + \frac{1}{q\alpha} \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) P_{n+1} = \left[\frac{U_n}{q} \sin t_n + \cos t_n \right] x_n + \left[\frac{1}{q} \sin t_n \right] p_n \quad (3.10)$$

$$-q\alpha \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) X_{n+1} + \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) P_{n+1} = [U_n \cos t_n - q \sin t_n] x_n + [\cos t_n] p_n \quad (3.11)$$

resolviendo primero para X_{n+1} es necesario multiplicar la ec.(3.10) por $q \cos\left(\frac{\mu}{2}\right)$ y la ec.(3.11) por $-\sin\left(\frac{\mu}{2}\right)$ y se suman, de tal forma que se tiene

$$\begin{aligned} q\alpha X_{n+1} &= \left[U_n \sin t_n \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) + q \cos t_n \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \right] x_n + \sin t_n \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) p_n \\ &- \left[U_n \cos t_n \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) - q \sin t_n \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \right] x_n - \cos t_n \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) p_n \end{aligned}$$

Usando las identidades para $\sin(a-b)$ y $\cos(a-b)$ y que $t_n = \mu + \mu_n$ se tiene

$$X_{n+1} = \left[\frac{U_n}{q\alpha} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) + \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \right] x_n + \frac{1}{q\alpha} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) p_n \quad (3.12)$$

y resolviendo para P_{n+1} se multiplica la ec.(3.10) por $q \sin\left(\frac{\mu}{2}\right)$ y la ec. (3.11) por $\cos\left(\frac{\mu}{2}\right)$ y se suman

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} P_{n+1} &= \left[U_n \sin t_n \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) + q \cos t_n \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \right] x_n + \sin t_n \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) p_n \\ &+ \left[U_n \cos t_n \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - q \sin t_n \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \right] x_n + \cos t_n \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) p_n \end{aligned}$$

de nuevo utilizando las identidades de resta de ángulos, se obtiene

$$P_{n+1} = \left[U_n \alpha \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) - q\alpha \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \right] x_n + \alpha \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) p_n \quad (3.13)$$

Para poder escribir el mapa en términos de las nuevas variables es necesario utilizar las ecs. (3.10) y (3.11) y sustituir directamente x_n, p_n primero en la ec. (3.12)

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= \left[\frac{U_n}{q\alpha} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) + \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \right] x_n + \frac{1}{q\alpha} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) p_n \\
&= \left[\frac{U_n}{q\alpha} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) + \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \right] \left[\alpha \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) X_n + \frac{1}{q\alpha} \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) P_n \right] \\
&\quad + \frac{1}{q\alpha} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \left[-q\alpha \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) X_n + \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) P_n \right] \\
&= \left[\frac{U_n}{q} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) + \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \right] X_n \\
&\quad + \left[\frac{U_n}{q^2\alpha^2} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) + \frac{1}{q\alpha^2} \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) + \frac{1}{q\alpha^2} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \right] P_n \\
&= \left[\frac{U_n}{q} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) + \cos(\mu + \mu_n) \right] X_n \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{U_n}{q^2} \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) + \frac{1}{q} \sin(\mu + \mu_n) \right] P_n \\
&= \left[\frac{U_n}{q} \left(\sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos \mu_n + \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin \mu_n \right) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) + \cos(\mu + \mu_n) \right] X_n \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{U_n}{q^2} \left(\sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos \mu_n + \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin \mu_n \right) \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) + \frac{1}{q} \sin(\mu + \mu_n) \right] P_n \\
\\
X_{n+1} &= \left[\frac{U_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n + \frac{U_n}{q} \cos^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin \mu_n + \cos(\mu + \mu_n) \right] X_n \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{U_n}{2q^2} \sin \mu \sin \mu_n + \frac{U_n}{q^2} \sin^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos \mu_n + \frac{1}{q} \sin(\mu + \mu_n) \right] P_n \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Si siguiendo el mismo algoritmo, para la ec.(3.13) se tiene

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \left[U_n \alpha \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) - q \alpha \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \right] \left[\alpha \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) X_n + \frac{1}{q \alpha} \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) P_n \right] \\
&\quad + \alpha \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \left[-q \alpha \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) X_n + \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) P_n \right] \\
&= \left[U_n \alpha^2 \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - q \alpha^2 \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - q \alpha^2 \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \right] X_n \\
&\quad + \left[\frac{U_n}{q} \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) - \sin\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) + \cos\left(\frac{\mu}{2} + \mu_n\right) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \right] P_n \\
P_{n+1} &= \alpha^2 \left[U_n \cos^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos \mu_n - \frac{U_n}{2} \sin \mu \sin \mu_n - q \sin(\mu + \mu_n) \right] X_n \\
&\quad + \left[\frac{U_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n - \frac{U_n}{q} \sin^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin \mu_n + \cos(\mu + \mu_n) \right] P_n \quad (3.15)
\end{aligned}$$

3.3. Modelo sin desorden

Para eliminar los efectos asociados al campo medio, U , y a la posición media, μ , se impone la condición de que en ausencia de desorden el mapa debe reducirse a una rotación

$$\tilde{X}_{n+1} = \cos \gamma \tilde{X}_n + \sin \gamma \tilde{P}_n \quad (3.16)$$

$$\tilde{P}_{n+1} = -\sin \gamma \tilde{X}_n + \cos \gamma \tilde{P}_n \quad (3.17)$$

La tilde se utiliza para exaltar que el mapa carece de desorden. Las variables γ y α pueden determinarse utilizando las ecs. (3.14) y (3.15)

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= \left[\frac{U_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n + \frac{U_n}{q} \cos^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin \mu_n + \cos(\mu + \mu_n) \right] X_n \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{U_n}{2q^2} \sin \mu \sin \mu_n + \frac{U_n}{q^2} \sin^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos \mu_n + \frac{1}{q} \sin(\mu + \mu_n) \right] P_n \\
P_{n+1} &= \alpha^2 \left[U_n \cos^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos \mu_n - \frac{U_n}{2} \sin \mu \sin \mu_n - q \sin(\mu + \mu_n) \right] X_n \\
&\quad + \left[\frac{U_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n - \frac{U_n}{q} \sin^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin \mu_n + \cos(\mu + \mu_n) \right] P_n
\end{aligned}$$

para establecer una relación con el caso sin desorden a partir de las ecuaciones anteriores es necesario considerar que $u_n = 0$ y $\mu_n = 0$, de forma que pueden reescribirse como

$$\tilde{X}_{n+1} = \left[\frac{U}{2q} \sin \mu + \cos \mu \right] \tilde{X}_n + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{U}{q^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) + \frac{1}{q} \sin \mu \right] \tilde{P}_n \quad (3.18)$$

$$\tilde{P}_{n+1} = \alpha^2 \left[U \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) - q \sin \mu \right] \tilde{X}_n + \left[\frac{U}{2q} \sin \mu + \cos \mu \right] \tilde{P}_n \quad (3.19)$$

y comparando estas ecuaciones, con las ecs. (3.16) y (3.17) se obtiene

$$\cos \gamma = \frac{U}{2q} \sin \mu + \cos \mu. \quad (3.20)$$

Es importante destacar que esta ecuación corresponde a la ec. (1.15)

$$\cos ka = P \frac{\sin qa}{qa} + \cos qa$$

que es la ecuación de compatibilidad de la energía con el teorema de Bloch para el modelo de Krong-Penney sin desorden, estudiada en el capítulo 1, a partir de la cual se obtienen las bandas de energía permitidas y prohibidas para el modelo. Por esta razón es importante introducir estas *nuevas* variables γ y α , ya que permiten asociar las funciones de onda de Bloch del modelo sin desorden al modelo con desorden.

Para el $\sin \gamma$ por el contrario se obtienen varias relaciones

$$\sin \gamma = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{U}{q^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) + \frac{1}{q} \sin \mu \right] \quad (3.21)$$

$$\sin \gamma = -\alpha^2 \left[U \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) - q \sin \mu \right] \quad (3.22)$$

la variable α logra determinarse dividiendo la ec. (3.21) entre la ec.(3.22)

$$1 = \frac{\left[\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{U}{q^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) + \frac{1}{q} \sin \mu \right] \right]}{\left[-\alpha^2 \left[U \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) - q \sin \mu \right] \right]}$$

$$\alpha^4 = \frac{1}{q^2} \left[\frac{q \sin \mu + U \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right)}{q \sin \mu - U \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right)} \right]$$

utilizando las identidades $\sin^2 \theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ y $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ la ec. anterior puede escribirse como

$$\alpha^4 = \frac{1}{q^2} \left[\frac{\sin \mu + \frac{U}{2q} (1 - \cos \mu)}{\sin \mu - \frac{U}{2q} (1 + \cos \mu)} \right] \quad (3.23)$$

Se busca ahora la forma de escribir el mapa en términos de las nuevas variables γ y α , con el fin de eliminar los efectos generados por U y μ , para establecer una relación entre las funciones de Bloch del modelo sin desorden al caso con desorden.

3.4. Modelo con desorden débil

Retomando las ecs. (3.14) y (3.15), que muestran tanto la posición y campo medios como las perturbaciones

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \left[\frac{(U + u_n)}{2q} \sin \mu \cos \mu_n + \frac{(U + u_n)}{q} \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \sin \mu_n + \cos \mu \cos \mu_n - \sin \mu \sin \mu_n \right] X_n \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{(U + u_n)}{2q^2} \sin \mu \sin \mu_n + \frac{(U + u_n)}{q^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \cos \mu_n + \frac{1}{q} \sin \mu \cos \mu_n + \frac{1}{q} \sin \mu_n \cos \mu \right] P_n \\ P_{n+1} &= \alpha^2 \left[(U + u_n) \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \cos \mu_n - \frac{(U + u_n)}{2} \sin \mu \sin \mu_n - q \sin \mu \cos \mu_n - q \sin \mu_n \cos \mu \right] X_n \\ &+ \left[\frac{(U + u_n)}{2q} \sin \mu \cos \mu_n - \frac{(U + u_n)}{q} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \sin \mu_n + \cos \mu \cos \mu_n - \sin \mu \sin \mu_n \right] P_n \\ \\ X_{n+1} &= \left[\left(\frac{(U + u_n)}{2q} \sin \mu + \cos \mu \right) \cos \mu_n + \left(\frac{(U + u_n)}{q} \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) - \sin \mu \right) \sin \mu_n \right] X_n \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \left[\left(\frac{(U + u_n)}{2q^2} \sin \mu + \frac{1}{q} \cos \mu \right) \sin \mu_n + \left(\frac{(U + u_n)}{q^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) + \frac{1}{q} \sin \mu \right) \cos \mu_n \right] P_n \\ P_{n+1} &= \alpha^2 \left[\left((U + u_n) \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) - q \sin \mu \right) \cos \mu_n - \left(\frac{(U + u_n)}{2} \sin \mu + q \cos \mu \right) \sin \mu_n \right] X_n \\ &+ \left[\left(\frac{(U + u_n)}{2q} \sin \mu + \cos \mu \right) \cos \mu_n - \left(\frac{(U + u_n)}{q} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) - \sin \mu \right) \sin \mu_n \right] P_n \end{aligned}$$

sustituyendo las nuevas variables, se tiene

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= \left[\cos \gamma \cos \mu_n - \frac{\sin \gamma}{q\alpha^2} \sin \mu_n + \frac{u_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n + \frac{u_n}{q} \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \sin \mu_n \right] X_n \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{1}{q} \cos \gamma \sin \mu_n + \alpha^2 \sin \gamma \cos \mu_n + \frac{u_n}{2q^2} \sin \mu \sin \mu_n + \frac{u_n}{q^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \cos \mu_n \right] P_n
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \alpha^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} \sin \gamma \cos \mu_n - q \cos \gamma \sin \mu_n + u_n \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \cos \mu_n - \frac{u_n}{2} \sin \mu \sin \mu_n \right] X_n \\
&+ \left[\cos \gamma \cos \mu_n - \alpha^2 \sin \gamma \sin \mu_n + \frac{u_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n - \frac{u_n}{q} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \sin \mu_n \right] P_n
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Con lo que ahora se está en condiciones de utilizar las variables acción-ángulo, que retomando lo visto en la sección 2.8.1 del capítulo 2

$$X_n = \sqrt{2J_n} \sin \theta_n \tag{3.26}$$

$$P_n = \sqrt{2J_n} \cos \theta_n \tag{3.27}$$

y escribir el nuevo mapa, comenzando con X_{n+1}

$$\begin{aligned}
\sqrt{2J_{n+1}} \sin \theta_{n+1} &= \left[\cos \gamma \cos \mu_n - \frac{\sin \gamma}{q\alpha^2} \sin \mu_n + \frac{u_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n + \frac{u_n}{q} \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \sin \mu_n \right] \sqrt{2J_n} \sin \theta_n \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{1}{q} \cos \gamma \sin \mu_n + \alpha^2 \sin \gamma \cos \mu_n + \frac{u_n}{2q^2} \sin \mu \sin \mu_n + \frac{u_n}{q^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \cos \mu_n \right] \sqrt{2J_n} \cos \theta_n
\end{aligned}$$

Considerando $D_n^2 = \frac{J_{n+1}}{J_n}$

$$\begin{aligned}
D_n \sin \theta_{n+1} &= \left[\cos \gamma \cos \mu_n - \frac{\sin \gamma}{q\alpha^2} \sin \mu_n + \frac{u_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n + \frac{u_n}{q} \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \sin \mu_n \right] \sin \theta_n \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{1}{q} \cos \gamma \sin \mu_n + \alpha^2 \sin \gamma \cos \mu_n + \frac{u_n}{2q^2} \sin \mu \sin \mu_n + \frac{u_n}{q^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \cos \mu_n \right] \cos \theta_n
\end{aligned} \tag{3.28}$$

mientras que para P_{n+1} se tiene

$$\begin{aligned}
D_n \cos \theta_{n+1} &= \alpha^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} \sin \gamma \cos \mu_n - q \cos \gamma \sin \mu_n + u_n \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \cos \mu_n - \frac{u_n}{2} \sin \mu \sin \mu_n \right] \sin \theta_n \\
&+ \left[\cos \gamma \cos \mu_n - \alpha^2 \sin \gamma \sin \mu_n + \frac{u_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n - \frac{u_n}{q} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \sin \mu_n \right] \cos \theta_n
\end{aligned} \tag{3.29}$$

De donde puede obtenerse el mapa de la variable angular que tiene la forma

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma - \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta_n + \gamma)] \tilde{u}_n + \frac{1}{2} [v - \cos(2\theta_n + 2\gamma)] \tilde{\Delta}_n \tag{3.30}$$

Donde

$$v = \frac{q \sin \gamma}{U} \left(q\alpha^2 + \frac{1}{q\alpha^2} \right) \tag{3.31}$$

$$\tilde{u}_n = \frac{\sin \mu}{q \sin \gamma} u_n \tag{3.32}$$

$$\tilde{\Delta}_n = \frac{U}{\sin \gamma} \frac{\mu_n}{q}. \tag{3.33}$$

Elevando las ecs. (3.28) y (3.29) al cuadrado y sumándolas se tiene

$$\begin{aligned}
D_n^2 &= \left\{ \left[\cos \gamma \cos \mu_n - \frac{\sin \gamma}{q\alpha^2} \sin \mu_n + \frac{u_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n + \frac{u_n}{q} \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \sin \mu_n \right] \sin \theta_n \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{1}{q} \cos \gamma \sin \mu_n + \alpha^2 \sin \gamma \cos \mu_n + \frac{u_n}{2q^2} \sin \mu \sin \mu_n + \frac{u_n}{q^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \cos \mu_n \right] \cos \theta_n \right\}^2 \\
&+ \left\{ \alpha^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} \sin \gamma \cos \mu_n - q \cos \gamma \sin \mu_n + u_n \cos^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \cos \mu_n - \frac{u_n}{2} \sin \mu \sin \mu_n \right] \sin \theta_n \right. \\
&+ \left. \left[\cos \gamma \cos \mu_n - \alpha^2 \sin \gamma \sin \mu_n + \frac{u_n}{2q} \sin \mu \cos \mu_n - \frac{u_n}{q} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2} \right) \sin \mu_n \right] \cos \theta_n \right\}^2
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Después del algebra pertinente se obtiene [4], en términos de ν , $\tilde{\Delta}$ y \tilde{u}

$$D_n^2 = 1 + \tilde{u}_n \sin(2\theta_n + \gamma) - \tilde{\Delta}_n \sin(2\theta_n + 2\gamma) + \frac{\tilde{\Delta}_n^2}{2} [1 - \nu \cos(2\theta_n - 2\gamma)] \\ + \frac{\tilde{u}_n^2}{2} [1 - \cos(2\theta + \gamma)] - \tilde{u}_n \tilde{\Delta}_n [\cos \gamma - \cos(2\theta_n + 2\gamma)] \quad (3.35)$$

En la ec. (3.35) se despreciaron términos de orden cúbico del desorden, dado que el desorden es débil.

3.5. Longitud de localización

Ahora se puede calcular el exponente de Lyapunov siguiendo la ec. (2.32)

$$\lambda = \frac{1}{2} \langle \ln D_n^2 \rangle \\ = \frac{1}{2} \left\langle \ln \left\{ 1 + \tilde{u}_n \sin(2\theta_n + \gamma) - \tilde{\Delta}_n \sin(2\theta_n + 2\gamma) + \frac{\tilde{\Delta}_n^2}{2} [1 - \nu \cos(2\theta_n - 2\gamma)] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\tilde{u}_n^2}{2} [1 - \cos(2\theta + \gamma)] - \tilde{u}_n \tilde{\Delta}_n [\cos \gamma - \cos(2\theta_n + 2\gamma)] \right\} \right\rangle \quad (3.36)$$

expandiendo el logaritmo se tiene

$$\lambda = \frac{1}{2d} \left\{ \left\langle \sin(2\theta_n + \gamma) \tilde{u}_n - \sin(2\theta_n + 2\gamma) \tilde{\Delta}_n + \frac{1}{4} [1 - 2\nu \cos(2\theta_n + 2\gamma) + \cos(4\theta_n + 4\gamma)] \tilde{\Delta}_n^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} [1 - 2 \cos(2\theta_n + \gamma) + \cos(4\theta_n + 2\gamma)] \tilde{u}_n^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} [\cos \gamma - 2 \cos(2\theta_n + 2\gamma) + \cos(4\theta_n + 3\gamma)] \tilde{u}_n \tilde{\Delta}_n \right\} \right\rangle \quad (3.37)$$

Con la teoría de perturbaciones a segundo orden se pueden despreciar las correlaciones entre θ_n y los términos cuadráticos de \tilde{u}_n^2 , $\tilde{\Delta}_n^2$ y $\tilde{u}_n \tilde{\Delta}_n$. Así para los sumandos que contienen los términos anteriores se puede computar el valor esperado de θ_n por separado de los valores esperados de u_n y Δ_n . [4]

Con lo que se tiene

$$\langle \cos(2\theta_n + 2\gamma) \rangle \langle \widetilde{\Delta}_n^2 \rangle = 0 \quad (3.38)$$

$$\langle \cos(4\theta_n + 4\gamma) \rangle \langle \widetilde{\Delta}_n^2 \rangle = 0 \quad (3.39)$$

$$\langle \cos(2\theta_n + \gamma) \rangle \langle \widetilde{u}_n^2 \rangle = 0 \quad (3.40)$$

$$\langle \cos(4\theta_n + 2\gamma) \rangle \langle \widetilde{u}_n^2 \rangle = 0 \quad (3.41)$$

$$\langle \cos(2\theta_n + 2\gamma) \rangle \langle \widetilde{u}_n \widetilde{\Delta}_n \rangle = 0 \quad (3.42)$$

$$\langle \cos(4\theta_n + 3\gamma) \rangle \langle \widetilde{u}_n \widetilde{\Delta}_n \rangle = 0 \quad (3.43)$$

mientras el valor esperado para las variables lineales de \widetilde{u}_n y $\widetilde{\Delta}_n$ no es separable de la variable θ_n . Con lo que el exponente de Liapunov queda

$$\lambda = \frac{1}{8d} \left[\langle \widetilde{u}_n^2 \rangle + \langle \widetilde{\Delta}_n^2 \rangle - 2 \cos \gamma \langle \widetilde{u}_n \widetilde{\Delta}_n \rangle \right] + \frac{1}{2d} \left\langle \sin(2\theta_n + 2\gamma) \widetilde{\Delta}_n \right\rangle \left\langle \sin(2\theta_n + 2\gamma) \widetilde{\Delta}_n \right\rangle - \frac{1}{2d} \quad (3.44)$$

Este resultado no es válido ni para los bordes ni para el centro de la banda, por los mismos argumentos que en el modelo de Anderson.

La ec. (3.44) resulta complicada pues involucra las correlaciones del mapeo θ_n con las variables del sistema. Una manera de deshacerse de esos términos [4] es generalizando las variables de correlación ruido-ángulo e introducir los correladores

$$r_k = \langle \widetilde{u}_n e^{2i\theta_{n-k}} \rangle \quad (3.45)$$

$$s_k = \langle \widetilde{\Delta}_n e^{2i\theta_{n-k}} \rangle \quad (3.46)$$

Donde se puede utilizar la relación de recursión de la ec. (3.30) en ambos correladores para determinar r_{k-1} y s_{k-1} de manera análoga al desarrollo de la sección 2.8.2 del capítulo 2 y después obtener r_0 y s_0 para escribir una densidad espectral que permita reescribir el exponente de Lyapunov de la ec. (3.44) de acuerdo a [4]

$$\lambda = \frac{1}{8d} \left[\langle \widetilde{u}_n \rangle W_u + \langle \widetilde{\Delta}_n^2 \rangle W_\Delta - 2 \langle \widetilde{u}_n \widetilde{\Delta}_n \rangle \cos \gamma W_{u,\Delta} \right] \quad (3.47)$$

$$= \frac{\sin^2 \mu}{8dq^2 \sin^2 \gamma} \langle u_n \rangle W_u + \frac{U}{8d \sin^2 \gamma} \langle \Delta_n \rangle W_\Delta - \frac{1}{4d} \frac{U \sin \mu}{q \sin^2 \gamma} \cos \gamma \langle u_n \Delta_n \rangle W_{u,\Delta} \quad (3.48)$$

Donde las densidades espectrales son

$$W_i \equiv W_i(2\gamma) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \xi_i(k) \cos(2k\gamma) \quad (3.49)$$

donde de nueva cuenta son la transformada de Fourier de las funciones de correlación $\xi_i(k)$. Cabe destacar que la ec. (3.48) fue obtenida sin la hipótesis de que $E \gg U$. Por lo que se consideran efectos túnel tanto para $E < U$ como $E > U$. La única hipótesis fue sobre el desorden débil en ambos tipos.

Una característica subyacente en el exponente de Lyapunov se encuentra en la correlación cruzada, pues como se mencionó anteriormente puede ser impar de forma que se tenga $W_{u,\Delta} = 1$ o $W_{u,\Delta} = -1$ donde dependiendo del signo la localización será reforzada o suprimida.[4]

A fin de ilustrar el comportamiento de los bordes de movilidad con los dos tipos de desorden con correlación, $\{u_n\}$ y $\{\mu_n\}$, se hará uso de los resultados numéricos obtenidos en [4] donde introdujeron cuatro bordes de movilidad en la primera zona de Brillouin para el número de Bloch $k = \frac{\gamma}{a}$,

$$k_1 = c_1 \frac{\pi}{2a}, \quad k_2 = c_2 \frac{\pi}{2a}, \quad k_3 = \frac{pi}{a} - c_2 \frac{\pi}{2a}, \quad k_4 = \frac{\pi}{a} - c_1 \frac{\pi}{2a}, \quad (3.50)$$

con $0 < c_1 < c_2 < 1$.

Y consideraron que la longitud de localización, dada por el inverso de la ec. (3.48), se anule para los intervalos de energía

$$[0, k_1], \quad [k_2, k_3], \quad [k_4, \frac{\pi}{a}]. \quad (3.51)$$

en este caso las funciones de correlación W_u y W_Δ también deben anularse en los mismos intervalos, lo cual asegura que $W_{u\Delta} = 0$ en los mismos intervalos. En las regiones complementarias la densidad espectral se asume que es plana. donde los valores constantes para W_i se obtienen de la condición de normalización

$$\int_0^\pi W_i(2\gamma) d\gamma = \pi \quad (3.52)$$

de forma que se obtiene

$$W_u(2\gamma) = W_\Delta(2\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{c_2 - c_1} & \text{si } k \in [k_a, k_2] \text{ y } k \in [k_3, k_4] \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (3.53)$$

Nótese que la densidad espectral ec. (3.53) corresponde con los correladores binarios dados por las ecs. (3.4)

$$\chi_u(k) = \chi_\Delta(k) = \frac{1}{c_2 - c_1} \frac{1}{\pi k} [\sin(\pi c_2 k) - \sin(\pi c_1 k)]. \quad (3.54)$$

usando éstas expresiones para W_u , y W_Δ en la ec. (3.49) se puede obtener $\xi_u(k)$ y $\xi_\Delta(k)$, con lo que permite construir las variables correlacionadas $\{u_n\}$ y $\{\mu_n\}$ de manera explícita.

Para los bordes de movilidad elegidos k_i en [4] consideraron los siguientes parámetros $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{4}{5}$, $U = 0,7$ y $a = 1$, la relación de dispersión, ec.(3.20) se determinan los bordes de la banda $[0,259\pi, \pi]$, mientras que los bordes de movilidad se localizan en

$$k_1 = 0 - 327\pi, \quad k_2 = 0,476\pi, \quad k_3 = 0,652\pi, \quad k_4 = 0,838\pi. \quad (3.55)$$

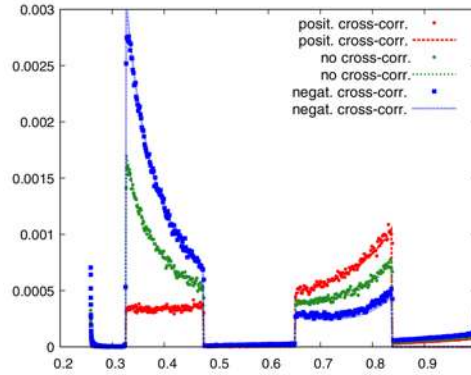


Figura 3.1: La línea de color es el exponente de Lyapunov en función de $\frac{k}{\pi}$. Las curvas corresponden a la predicción teórica y los puntos a los resultados numéricos de [4]. La información de la gráfica corresponde a $U = 0,7$, $a = 1$ y el desorden débil con varianzas $\sqrt{\langle u_n^2 \rangle} = 0,04$ y $\sqrt{\langle \mu_n^2 \rangle} = 0,05$. [4]

Como se observa en la Figura 3.1 los resultados numéricos coinciden con la predicción teórica. En la Figura 3.1 se consideraron los casos de correlación cruzada positiva $\frac{\pi}{4}$, correlación cruzada negativa $-\frac{\pi}{4}$ y sin correlación cruzada. Los resultados confirman que las correlaciones cruzadas pueden amplificar o reducir la localización además de los efectos causados por las correlaciones. Es importante también señalar que los efectos de los correladores cruzados impactan el comportamiento del exponente de Lyapunov dependiendo de la región en que se encuentren, por ejemplo para el correlador cruzado positivo se observa que de lado izquierdo favorece la localización para $\frac{k}{\pi} \geq 0,5$ y la suprime para $\frac{k}{\pi} \leq 0,5$

Capítulo 4

Modelo unidimensional de bicapas con desorden

En este modelo se presenta una estructura unidimensional, periódica en promedio, cuya celda consiste de dos componentes donde la naturaleza de cada componente depende del caso de estudio, en el electromagnetismo cada celda esta compuesta por dos medios y en electrónica por un par de barrera y pozo de potencial. El interés por tales estructuras de bicapas reside en sus múltiples aplicaciones como la elaboración de materiales, metamateriales, semiconductores con determinadas propiedades de transmisión.[4]

Con este modelo se generalizan las técnicas anteriores y se considera con desorden débil en los espesores de cada capa.

En particular se considera la propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas de frecuencia ω en un arreglo infinito de dieléctricos de dos materiales alternantes a y b . Donde cada material está especificado por sus propiedades electromagnéticas [4].

$$n_a = c \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad Z_a = \frac{\mu_a}{n_a}, \quad k_a = \frac{\omega}{c} n_a \quad (4.1a)$$

$$n_b = c \sqrt{\epsilon_b \mu_b}, \quad Z_b = \frac{\mu_b}{n_b}, \quad k_b = \frac{\omega}{c} n_b \quad (4.1b)$$

donde ϵ_i es la permitividad o constante dieléctrica, μ_i es la permeabilidad magnética, n_i el índice de refracción, Z_i la impedancia y k_i el número de onda.

El desorden del sistema se introduce en la estructura mediante el espesor de cada

capa

$$d_a(n) = d_a + \varrho_a(n), \quad \langle d_a(n) \rangle = d_a \quad (4.2a)$$

$$d_b(n) = d_b + \varrho_b(n), \quad \langle d_b(n) \rangle = d_b \quad (4.2b)$$

el entero n etiqueta la celda unitaria (a, b) , d_a y d_b denotan el espesor promedio de cada capa y ϱ_a y ϱ_b corresponden a las pequeñas variaciones de espesor en cada capa. En ausencia de desorden el arreglo de bicapacas es periódico con período $d = d_a + d_b$. Las variables aleatorias satisfacen las siguientes propiedades estadísticas [4].

$$\langle \varrho_a(n) \rangle = 0, \quad \langle \varrho_a^2(n) \rangle = \sigma_a^2, \quad \langle \varrho_a(n)\varrho_a(n') \rangle = \sigma_a^2 \xi_a(n - n') \quad (4.3a)$$

$$\langle \varrho_b(n) \rangle = 0, \quad \langle \varrho_b^2(n) \rangle = \sigma_b^2, \quad \langle \varrho_b(n)\varrho_b(n') \rangle = \sigma_b^2 \xi_b(n - n') \quad (4.3b)$$

$$\langle \varrho_a(n)\varrho_b(n) \rangle = \sigma_{ab}, \quad \langle \varrho_a(n)\varrho_b(n') \rangle = \langle \varrho_b(n)\varrho_a(n') \rangle = \sigma_{ab}^2 \xi_{ab}(n - n') \quad (4.4)$$

Las funciones de correlación están normalizadas a 1 $\xi_a(0) = \xi_b(0) = \xi_{ab}(0) = 1$. Pese a que las varianzas σ_a^2 y σ_b^2 son positivas, la varianza cruzada σ_{ab} es arbitraria pero su magnitud es proporcional a $|\sigma_{ab}| = \sigma_a \sigma_b$ [4].

Se supone además desorden débil

$$k_a^2 \sigma_a^2 \ll 1, \quad k_b^2 \sigma_b^2 \ll 1 \quad (4.5)$$

lo que permite utilizar las herramientas descritas anteriormente. en este caso las propiedades de transporte quedan completamente determinadas por la densidad espectral de las variables aleatorias definidas como

$$W(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \chi(r) e^{-ikr} = 1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \chi(r) \cos(kr) \quad (4.6)$$

$$\chi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(k) e^{ikr} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} W(k) \cos(kr) dk. \quad (4.7)$$

Por las ecs.(4.3) los correladores son funciones reales y pares de $r = n - n'$ entre índices de la celda, por lo que la transformadas de Fourier correspondientes a las densidades espectrales son también funciones reales e impares de la variable k que es una longitud de onda adimensional. Cabe destacar que las densidades espectrales son funciones positivas de k para cualquier secuencia real de variables aleatorias $\varrho_a(n), \varrho_b(n)$ [4].

Como cada celda contiene dos medios distintos es necesario que en la interfaz de los medios se cumplan ciertas condiciones de frontera para la onda incidente.

Sea onda plana monocromática, sin pérdida de generalidad se puede suponer que se propaga en la dirección \hat{x} , el campo eléctrico se puede escribir como

$$\mathbf{E}(x) = \psi(x)e^{-i\omega t}\hat{y} \quad (4.8)$$

y el campo magnético

$$\mathbf{B}(x) = -\frac{i}{\omega} \frac{d}{dx} \psi(x) e^{-i\omega t} \hat{z} \quad (4.9)$$

de forma que se satisface la ec. de Helmholtz unidimensional

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_{a,b} \right) \psi_{a,b}(x) = 0. \quad (4.10)$$

4.1. Condiciones de Frontera

Para obtener las condiciones de frontera se consideran las ecs. de Maxwell en su forma integral para deducir las relaciones entre los campos eléctrico y magnético [17].

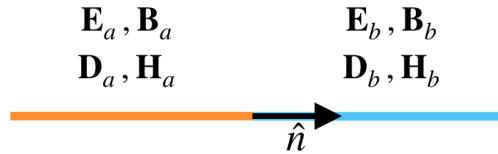


Figura 4.1: Representación de la interfaz entre dos medios a , naranja y b , azul, de un modelo unidimensional, el vector normal \hat{n} apunta del medio a al b (dirección de propagación) y el vector tangente será paralelo al plano $y-z$. En general puede haber una densidad de carga y una corriente en la interfaz.

Donde $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$.

Las componentes normales de \mathbf{D} y \mathbf{B} en ambos lados de la frontera cumplirán

$$(\mathbf{D}_b - \mathbf{D}_a) \cdot \hat{n} = \sigma \quad (4.11)$$

$$(\mathbf{B}_b - \mathbf{B}_a) \cdot \hat{n} = 0 \quad (4.12)$$

donde σ es la densidad de carga en la superficie y las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} en ambos lados de la superficie fronteriza están relacionadas por

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_b - \mathbf{E}_a) = 0 \quad (4.13)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_b - \mathbf{H}_a) = \mathbf{K} \quad (4.14)$$

donde \mathbf{K} es la corriente.

Dado que en 1 dimensión los campos no tiene componente normal se trabaja con las ecs. (4.69) y (4.14). Además entre las capas no hay fuentes por lo que $\mathbf{K} = 0$ de forma que

$$\hat{n} \times \left((\psi_b(x_i) - \psi_a(x_i)) e^{-i\omega t \hat{y}} \right) = 0 \quad (4.15)$$

$$\hat{n} \times \left(\frac{i}{\omega} \left(\frac{1}{\mu_b} \frac{d}{dx} \psi_b(x_i) - \frac{1}{\mu_a} \frac{d}{dx} \psi_a(x_i) \right) e^{-i\omega t \hat{z}} \right) = 0 \quad (4.16)$$

y las condiciones de frontera serán

$$\psi_b(x_i) = \psi_a(x_i) \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{\mu_b} \frac{d}{dx} \psi_b(x_i) = \frac{1}{\mu_a} \frac{d}{dx} \psi_a(x_i) \quad (4.18)$$

donde x_i es la posición de la interfaz de contacto entre los medios a y b .

4.2. Mapa Hamiltoniano

Una solución general para la ec. (4.10) dentro de una celda unitaria se presenta en su forma real como [4]

$$\psi_a(x) = A_1 \cos [k_a(x - x_{an})] + A_2 \sin [k_a(x - x_{an})] \quad (4.19a)$$

$$\psi_b(x) = B_1 \cos [k_b(x - x_{bn})] + B_2 \sin [k_b(x - x_{bn})] \quad (4.19b)$$

donde la ec.(4.19a) es válida para la región $x_{an} < x < x_{bn}$ y la ec. (4.19b) es válida para $x_{bn} < x < x_{a(n+1)}$.

Las coordenadas x_{an} y x_{bn} son las fronteras izquierda y derecha de interfaz entre los medios a_n y b_n , respectivamente. Nótese que $x_{bn} - x_{an} = d_a(n)$ y $x_{a(n+1)} - x_{bn} = d_b(n)$. Para determinar las constantes A_1 y A_2 primero, se evalúa la ec. (4.19a) y su derivada en $x = x_{an}$

$$\begin{aligned} \psi_a(x_{an}) &= A_1 \cos [k_a(x_{an} - x_{an})] + A_2 \sin [k_a(x_{an} - x_{an})] \\ &= A_1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \psi'_a(x_{an}) &= -A_1 \sin [k_a(x_{an} - x_{an})] + k_a A_2 \cos [k_a(x_{an} - x_{an})] \\ &= k_a A_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

de forma similar para determinar ahora las constantes B_1 y B_2 se evalúa la ec.(4.19b) en $x = x_{bn}$

$$\begin{aligned}\psi_b(x_{bn}) &= B_1 \cos [k_b(x_{bn} - x_{bn})] + B_2 \sin [k_b(x_{bn} - x_{bn})] \\ &= B_1\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}\psi'_b(x_{bn}) &= -B_1 \sin [k_b(x_{bn} - x_{bn})] + k_b B_2 \cos [k_b(x_{bn} - x_{bn})] \\ &= k_b B_2\end{aligned}\quad (4.23)$$

de forma que las constantes quedan determinadas y la solución real para una celda unitaria se puede escribir como

$$\psi_a(x) = \psi_a(x_{an}) \cos [k_a(x - x_{an})] + k_a^{-1} \psi'_a(x_{an}) \sin [k_a(x - x_{an})] \quad (4.24a)$$

$$\psi_b(x) = \psi_b(x_{bn}) \cos [k_b(x - x_{bn})] + k_b^{-1} \psi'_b(x_{bn}) \sin [k_b(x - x_{bn})] \quad (4.24b)$$

Evaluando las soluciones ψ_a y ψ_b en las fronteras opuestas de la misma celda unitaria se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\psi_a(x_{bn}) &= \psi_a(x_{an}) \cos(\tilde{\varphi}_a(n)) + k_a^{-1} \psi'_a(x_{an}) \sin(\tilde{\varphi}_a(n)) \\ \psi'_a(x_{bn}) &= -k_a \psi_a(x_{an}) \sin(\tilde{\varphi}_a(n)) + \psi'_a(x_{an}) \cos(\tilde{\varphi}_a(n))\end{aligned}\quad (4.25a)$$

$$\begin{aligned}\psi_b(x_{a(n+1)}) &= \psi_b(x_{bn}) \cos(\tilde{\varphi}_b(n)) + k_b^{-1} \psi'_b(x_{bn}) \sin(\tilde{\varphi}_b(n)) \\ \psi'_b(x_{a(n+1)}) &= -k_b \psi_b(x_{bn}) \sin(\tilde{\varphi}_b(n)) + \psi'_b(x_{bn}) \cos(\tilde{\varphi}_b(n))\end{aligned}\quad (4.25b)$$

donde

$$\tilde{\varphi}_a(n) = \varphi_a + \xi_a(n), \quad \varphi_a = k_a d_a, \quad \xi_a(n) = k_a Q_a(n) \quad (4.26a)$$

$$\tilde{\varphi}_b(n) = \varphi_b + \xi_b(n), \quad \varphi_b = k_b d_b, \quad \xi_b(n) = k_b Q_b(n) \quad (4.26b)$$

Combinando las ecs. (4.25) con las condiciones de frontera ecs. (4.18) en $x_i = x_{bn}$ y $x_i = x_{a(n+1)}$, se pueden escribir las ecuaciones de recurrencia que relacionan los bordes derecho e izquierdo de la celda unitaria n -ésima como

$$X_{n+1} = \tilde{A}_n X_n + \tilde{B}_n Y_n \quad Y_{n+1} = -\tilde{C}_n X_n + \tilde{D}_n Y_n \quad (4.27)$$

Donde

$$X_n = \psi_a(x_{an}), \quad Y_n = \frac{1}{k_a} \psi'_a(x_{an}) \quad (4.28)$$

Y los factores \tilde{A}_n , \tilde{B}_n , \tilde{C}_n y \tilde{D}_n

$$\tilde{A}_n = \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) - \frac{Z_b}{Z_a} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \quad (4.29a)$$

$$\tilde{B}_n = \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) + \frac{Z_b}{Z_a} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \quad (4.29b)$$

$$\tilde{C}_n = \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) + \frac{Z_a}{Z_b} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \quad (4.29c)$$

$$\tilde{D}_n = \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) - \frac{Z_a}{Z_b} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \quad (4.29d)$$

Las relaciones de recurrencia ecs.(4.27) representan el mapa Hamiltoniano en el espacio fase (X, Y) de un oscilador paramétrico.

Donde ahora se introduce la transformación canónica

$$X_n = \frac{1}{\nu} \cos \tau Q_n - \nu \sin \tau P_n \quad (4.30)$$

$$Y_n = \frac{1}{\nu} \sin \tau Q_n + \nu \cos \tau P_n \quad (4.31)$$

con el afán de escribir el mapa Hamiltoniano en términos de las nuevas variables se combinan las ecs. (4.30) y (4.31) con el mapa de la ec.(4.27)

$$\frac{1}{\nu} \cos \tau Q_{n+1} - \nu \sin \tau P_{n+1} = \tilde{A}_n \left[\frac{1}{\nu} \cos \tau Q_n - \nu \sin \tau P_n \right] + \tilde{B}_n \left[\frac{1}{\nu} \sin \tau Q_n + \nu \cos \tau P_n \right] \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{\nu} \sin \tau Q_{n+1} + \nu \cos \tau P_{n+1} = -\tilde{C}_n \left[\frac{1}{\nu} \cos \tau Q_n - \nu \sin \tau P_n \right] + \tilde{D}_n \left[\frac{1}{\nu} \sin \tau Q_n + \nu \cos \tau P_n \right] \quad (4.33)$$

resolviendo para Q_{n+1} se multiplica la ec. (4.32) por $\nu \cos \tau$ y la ec. (4.33) por $\nu \sin \tau$ y se suman obteniéndose

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \tilde{A}_n \left[\cos^2 \tau Q_n - \nu^2 \sin \tau \cos \tau P_n \right] + \tilde{B}_n \left[\sin \tau \cos \tau Q_n + \nu^2 \cos^2 \tau P_n \right] \\ &- \tilde{C}_n \left[\sin \tau \cos \tau Q_n - \nu^2 \sin^2 \tau P_n \right] + \tilde{D}_n \left[\sin^2 \tau Q_n + \nu^2 \sin \tau \cos \tau P_n \right] \\ &= \left[\tilde{A}_n \cos^2 \tau + \tilde{B}_n \sin \tau \cos \tau - \tilde{C}_n \sin \tau \cos \tau + \tilde{D}_n \sin^2 \tau \right] Q_n \\ &+ \left[-\tilde{A}_n \nu^2 \sin \tau \cos \tau + \tilde{B}_n \nu^2 \cos^2 \tau + \tilde{C}_n \nu^2 \sin^2 \tau + \tilde{D}_n \nu^2 \sin \tau \cos \tau \right] P_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} &= \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \cos^2 \tau Q_n - \frac{Z_b}{Z_a} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos^2 \tau Q_n \\
&+ \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \sin \tau \cos \tau Q_n + \frac{Z_b}{Z_a} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin \tau \cos \tau Q_n \\
&- \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \sin \tau \cos \tau Q_n - \frac{Z_a}{Z_b} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin \tau \cos \tau Q_n \\
&+ \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \sin^2 \tau Q_n - \frac{Z_a}{Z_b} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin^2 \tau Q_n \\
&- \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \sin \tau \cos \tau v^2 P_n + \frac{Z_b}{Z_a} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin \tau \cos \tau v^2 P_n \\
&+ \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \cos^2 \tau v^2 P_n + \frac{Z_b}{Z_a} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos^2 \tau v^2 P_n \\
&+ \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \sin^2 \tau v^2 P_n + \frac{Z_a}{Z_b} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin^2 \tau v^2 P_n \\
&+ \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \sin \tau \cos \tau v^2 P_n - \frac{Z_a}{Z_b} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin \tau \cos \tau v^2 P_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} &= \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) Q_n - \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_b}{Z_a} \cos^2 \tau + \frac{Z_a}{Z_b} \sin^2 \tau \right) Q_n \\
&+ \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) Q_n \\
&+ \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) v^2 P_n + \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_b}{Z_a} \cos^2 \tau + \frac{Z_a}{Z_b} \sin^2 \tau \right) v^2 P_n \\
&+ \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 P_n \tag{4.34}
\end{aligned}$$

utilizando las identidades $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ y $\sin^2 \theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} &= \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) Q_n - \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_b}{Z_a} \frac{1 + \cos 2\tau}{2} + \frac{Z_a}{Z_b} \frac{1 - \cos 2\tau}{2} \right) Q_n \\
&+ \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) Q_n \\
&+ \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) v^2 P_n + \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_b}{Z_a} \frac{1 + \cos 2\tau}{2} + \frac{Z_a}{Z_b} \frac{1 - \cos 2\tau}{2} \right) v^2 P_n \\
&+ \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 P_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} &= \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) Q_n - \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) Q_n \\
&+ \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) Q_n - \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) Q_n \\
&+ \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) v^2 P_n + \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 P_n \\
&+ \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 P_n + \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 P_n
\end{aligned}$$

Para obtener P_{n+1} se multiplica la ec. (4.32) por $-\frac{1}{v} \sin \tau$ y la ec. (4.33) por $\frac{1}{v} \cos \tau$ y se suman de forma que se tiene

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \tilde{A}_n \left[-\frac{1}{v^2} \cos \tau \sin \tau Q_n + \sin^2 \tau P_n \right] + \tilde{B}_n \left[-\frac{1}{v^2} \sin^2 \tau Q_n - \cos \tau \sin \tau P_n \right] \\
&- \tilde{C}_n \left[\frac{1}{v^2} \cos^2 \tau Q_n - \sin \tau \cos \tau P_n \right] + \tilde{D}_n \left[\frac{1}{v^2} \sin \tau \cos \tau Q_n + \cos^2 \tau P_n \right] \\
&= \left[-\frac{\tilde{A}_n}{v^2} \cos \tau \sin \tau - \frac{\tilde{B}_n}{v^2} \sin^2 \tau - \frac{\tilde{C}_n}{v^2} \cos^2 \tau + \frac{\tilde{D}_n}{v^2} \sin \tau \cos \tau \right] Q_n \\
&+ \left[\tilde{A}_n \sin^2 \tau - \tilde{B}_n \cos \tau \sin \tau + \tilde{C}_n \sin \tau \cos \tau + \tilde{D}_n \cos^2 \tau \right] P_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= -\cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \cos \tau \sin \tau \frac{Q_n}{v^2} + \frac{Z_b}{Z_a} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos \tau \sin \tau \frac{Q_n}{v^2} \\
&- \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \sin^2 \tau \frac{Q_n}{v^2} - \frac{Z_b}{Z_a} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin^2 \tau \frac{Q_n}{v^2} \\
&- \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \cos^2 \tau \frac{Q_n}{v^2} - \frac{Z_a}{Z_b} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos^2 \tau \frac{Q_n}{v^2} \\
&+ \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \cos \tau \sin \tau \frac{Q_n}{v^2} - \frac{Z_a}{Z_b} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos \tau \sin \tau \frac{Q_n}{v^2} \\
&+ \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \sin^2 \tau P_n - \frac{Z_b}{Z_a} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin^2 \tau P_n \\
&- \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \cos \tau \sin \tau P_n - \frac{Z_b}{Z_a} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos \tau \sin \tau P_n \\
&+ \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \cos \tau \sin \tau P_n + \frac{Z_a}{Z_b} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos \tau \sin \tau P_n \\
&+ \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \cos^2 \tau P_n - \frac{Z_a}{Z_b} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos^2 \tau P_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= -\sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \frac{Q_n}{v^2} - \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_a}{Z_b} \cos^2 \tau + \frac{Z_b}{Z_a} \sin^2 \tau \right) \frac{Q_n}{v^2} \\
&+ \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{Q_n}{v^2} \\
&+ \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) P_n - \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_a}{Z_b} \cos^2 \tau + \frac{Z_b}{Z_a} \sin^2 \tau \right) P_n \\
&- \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) P_n
\end{aligned}$$

utilizando las identidades $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ y $\sin^2 \theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= -\sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \frac{Q_n}{v^2} - \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_a}{Z_b} \frac{1+\cos 2\tau}{2} + \frac{Z_b}{Z_a} \frac{1-\cos 2\tau}{2} \right) \frac{Q_n}{v^2} \\
&+ \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{Q_n}{v^2} \\
&+ \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) P_n - \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_a}{Z_b} \frac{1+\cos 2\tau}{2} + \frac{Z_b}{Z_a} \frac{1-\cos 2\tau}{2} \right) P_n \\
&- \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) P_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= -\sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \frac{Q_n}{v^2} - \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \frac{Q_n}{v^2} \\
&+ \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{Q_n}{v^2} + \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{Q_n}{v^2} \\
&+ \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) P_n - \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) P_n \\
&- \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) P_n + \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) P_n
\end{aligned}$$

Lo anterior en términos de la matriz de transferencia se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} Q_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \tilde{T} \begin{pmatrix} Q_n \\ P_n \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Donde la matriz de transferencia por componentes es

$$\tilde{T}_{11} = \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) - \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \quad (4.36)$$

$$+ \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right)$$

$$\tilde{T}_{12} = \sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) v^2 + \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 \quad (4.37)$$

$$+ \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 + \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2$$

$$\tilde{T}_{21} = -\sin \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) \frac{1}{v^2} - \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \frac{1}{v^2} \quad (4.38)$$

$$+ \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{1}{v^2} + \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{1}{v^2}$$

$$\tilde{T}_{22} = \cos \tilde{\varphi}_a(n) \cos \tilde{\varphi}_b(n) - \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \quad (4.39)$$

$$- \frac{1}{2} \cos \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \sin \tilde{\varphi}_a(n) \sin \tilde{\varphi}_b(n) \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right)$$

Esta notación es útil pues más adelante servirá para determinar ciertas condiciones en el mapeo.

4.3. Modelo sin desorden

En el caso sin desorden los factores \tilde{A}_n , \tilde{B}_n , \tilde{C}_n y \tilde{D}_n no dependen del índice n (referente a la etiqueta *temporal*) y tendrán la notación A , B , C y D respectivamente, por lo que las fases $\tilde{\varphi}_a(n)$ y $\tilde{\varphi}_b(n)$ se cambian por sus correspondientes partes regulares φ_a y φ_b de las ecs. (4.26). De forma que la matriz de transferencia $\tilde{T} \rightarrow T$ se

escribe como

$$T_{11} = \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \quad (4.40)$$

$$+ \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right)$$

$$T_{12} = \sin \varphi_a \cos \varphi_b v^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 \quad (4.41)$$

$$+ \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2$$

$$T_{21} = -\sin \varphi_a \cos \varphi_b \frac{1}{v^2} - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \frac{1}{v^2} \quad (4.42)$$

$$+ \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{1}{v^2} + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{1}{v^2}$$

$$T_{22} = \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \quad (4.43)$$

$$- \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right)$$

Lo que genera trayectorias cíclicas en el espacio fase (X, Y) en correspondencia con el movimiento periódico y no perturbado

$$Q_{n+1} = \cos \gamma Q_n + \sin \gamma P_n \quad P_{n+1} = -\sin \gamma Q_n + \cos \gamma P_n \quad (4.44)$$

Comparando las ecs.(4.44) con la matriz de transferencia T se observa que debe cumplirse

$$\blacksquare T_{11} = T_{22} \text{ y } T_{12} = -T_{21}$$

entonces de $T_{11} = T_{22}$ se tiene

$$\begin{aligned}
& \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \\
& = \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \\
& - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \sin 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \cos 2\tau \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right)
\end{aligned}$$

cancelando los términos iguales

$$\begin{aligned}
\cos \varphi_a \sin 2\tau - \sin \varphi_a \cos 2\tau &= -\cos \varphi_a \sin 2\tau + \sin \varphi_a \cos 2\tau \\
\cos \varphi_a \sin 2\tau + \cos \varphi_a \sin 2\tau &= \sin \varphi_a \cos 2\tau + \sin \varphi_a \cos 2\tau
\end{aligned}$$

con lo que se tiene

$$\tan 2\tau = \tan \varphi_a \quad (4.45)$$

de forma que la variable $2\tau = \varphi_a$, que sustituyendo en la matriz de transferencia resulta

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \sin \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \cos \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \\
T_{11} &= \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \quad (4.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{12} &= \sin \varphi_a \cos \varphi_b v^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 \\
& + \frac{1}{2} \sin \varphi_b \sin^2 \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi_b \cos^2 \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{12} &= \sin \varphi_a \cos \varphi_b v^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 \\
&+ \frac{1}{2} \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
T_{21} &= -\sin \varphi_a \cos \varphi_b \frac{1}{v^2} - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \frac{1}{v^2} \\
&+ \frac{1}{2} \sin \varphi_b \sin^2 \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{1}{v^2} + \frac{1}{2} \sin \varphi_b \cos^2 \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{1}{v^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{21} &= -\sin \varphi_a \cos \varphi_b \frac{1}{v^2} - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \frac{1}{v^2} \\
&+ \frac{1}{2} \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{1}{v^2}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
T_{22} &= \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \\
&- \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \sin \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \cos \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right)
\end{aligned}$$

$$T_{22} = \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \tag{4.49}$$

comparando las ecs. (4.46) y (4.49) con la ec. (4.44) se obtiene la ecuación de compatibilidad del teorema de Bloch que exhibe las bandas permitidas y prohibidas de la energía.

$$\cos \gamma = \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \tag{4.50}$$

y comparando las ecs. (4.47) y (4.48) con la ec. (4.44) se tiene

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin \varphi_a \cos \varphi_b v^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin \varphi_a \cos \varphi_b \frac{1}{v^2} + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \frac{1}{v^2} \\ &- \frac{1}{2} \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{1}{v^2} \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde dividiendo la ec. (4.52) entre la ec.(4.51) se tiene

$$v^4 = \frac{\sin \varphi_a \cos \varphi_b + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) - \frac{1}{2} \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right)}{\sin \varphi_a \cos \varphi_b + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right)} \quad (4.53)$$

De forma que se está en condiciones de introducir las variables acción-ángulo.

$$Q_n = R_n \cos \theta_n, \quad P_n = R_n \sin \theta_n \quad (4.54)$$

Sustituyendo en las ecs.(4.44) se tiene

$$\begin{aligned} R_{n+1} \cos \theta_{n+1} &= \cos \gamma \cos \theta_n R_n + \sin \gamma \sin \theta_n R_n \\ &= R_n \cos(\theta_n - \gamma) \\ R_{n+1} \sin \theta_{n+1} &= -\sin \gamma \cos \theta_n R_n + \cos \gamma \sin \theta_n R_n \\ &= R_n \sin(\theta_n - \gamma) \end{aligned}$$

Por lo que se tiene que el radio de la trayectoria se conserva, mientras que el ángulo se desfasa por una fase de Bloch en cada paso temporal

$$R_{n+1} = R_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n - \gamma \quad (4.55)$$

Con lo que se muestra que efectivamente se describen círculos en el diagrama fase.

4.4. Modelo con desorden débil

De manera intuitiva se supone que al introducir pequeñas perturbaciones en las variables $\tilde{\varphi}_a$ y $\tilde{\varphi}_b$ el círculo sufrirá pequeñas distorsiones. Para analizar y determinar

estas perturbaciones expandimos los elementos de la matriz de transferencia ecs. (4.36), (4.37), (4.38) y (4.39) hasta segundo orden de las variables aleatorias $\xi_a \ll 1$ y $\xi_b \ll 1$ mediante las ecs. (4.26).

Para la expansión de cada elemento se necesitan los siguientes desarrollos

$$\cos(\varphi_i + \xi_i) = \cos \varphi_i - \sin \varphi_i * \xi_i - \cos \varphi_i * \frac{\xi_i^2}{2} + \dots \quad (4.56)$$

$$\sin(\varphi_i + \xi_i) = \sin \varphi_i + \cos \varphi_i * \xi_i - \sin \varphi_i * \frac{\xi_i^2}{2} + \dots \quad (4.57)$$

donde i indica el medio a o b . Además para los elementos de matriz se siguen las definiciones de τ y ν que se encontraron para el caso sin desorden, $2\tau = \varphi_a$, de forma que sustituyendo se tiene

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_{11} &= \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \xi_b - \cos \varphi_a \cos \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \\ &- \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a + \sin \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a \xi_b - \cos \varphi_a \cos \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \\ &- \frac{1}{2} \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\ &+ \left. \cos \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a - \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\ &- \left. \sin \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \sin \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \\ &- \frac{1}{2} \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\ &+ \left. \cos \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \cos \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{12} = & \left[\sin \varphi_a \cos \varphi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \xi_b - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
& + \left. \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a \xi_b - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] v^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
& - \left. \sin \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
& + \left. \cos \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a - \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \sin \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
& - \left. \sin \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \cos \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{21} = & - \left[\sin \varphi_a \cos \varphi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \xi_b - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
& + \left. \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a \xi_b - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \frac{1}{v^2} \\
& - \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
& - \left. \sin \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \frac{1}{v^2} \\
& + \frac{1}{2} \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
& + \left. \cos \varphi_a \sin \varphi_b - \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \sin \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{1}{v^2} \\
& + \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
& - \left. \sin \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \cos \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \frac{1}{v^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{22} &= \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \xi_b - \cos \varphi_a \cos \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \\
&- \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a + \sin \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a \xi_b - \cos \varphi_a \cos \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \\
&- \frac{1}{2} \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
&+ \left. \cos \varphi_a \sin \varphi_b - \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \left(\frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_b}{Z_a} \right) \\
&- \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
&- \left. \sin \varphi_a \sin \varphi_b \xi_a - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \cos \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \sin \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \sin \varphi_a \cos \varphi_b \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_b^2}{2} \right. \\
&+ \left. \cos \varphi_a \sin \varphi_b + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \xi_a \xi_b - \sin \varphi_a \sin \varphi_b \frac{\xi_a^2}{2} \right] \cos \varphi_a \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right)
\end{aligned}$$

que en términos de la matriz de transferencia sin desorden puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{11} &= T_{11} - T_{12} \frac{\xi_a}{v^2} - \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_b \\
&+ \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_a \xi_b - T_{11} \left(\frac{\xi_a^2}{2} + \frac{\xi_b^2}{2} \right) \\
\tilde{T}_{12} &= T_{12} - T_{11} \xi_a v^2 - \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_b v^2 \\
&- \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_a \xi_b v^2 \\
&- T_{12} \left(\frac{\xi_a^2}{2} + \frac{\xi_b^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{21} &= T_{21} + \left[\cos \varphi_a \cos \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \frac{\xi_a^2}{v^2} \\
&+ \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \frac{\xi_b^2}{v^2} \\
&- \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \sin \varphi_a \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \frac{\xi_a \xi_b}{v^2} \\
&- T_{21} \left(\frac{\xi_a^2}{2} + \frac{\xi_b^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{22} &= T_{22} + T_{21} v^2 \xi_a - \left[\cos \varphi_a \cos \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_b \\
&+ \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_a \xi_b - T_{22} \left(\frac{\xi_a^2}{2} + \frac{\xi_b^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

Considerando que $T_{11} = T_{22} = \cos \gamma$ y $T_{12} = -T_{21} = \sin \gamma$ se pueden reescribir las componentes de la matriz de transferencia como

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{11} &= \cos \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2} \right) - \sin \gamma \frac{\xi_a}{v^2} - \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_b \\
&+ \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_a \xi_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{12} &= \sin \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2} \right) - \cos \gamma \xi_a v^2 \\
&- \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_b v^2 \\
&- \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \sin \varphi_a \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_a \xi_b v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{21} &= -\sin \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2} \right) + \left[\cos \varphi_a \cos \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \frac{\xi_a^2}{v^2} \\
&+ \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \frac{\xi_b^2}{v^2} \\
&- \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \sin \varphi_a \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \frac{\xi_a \xi_b}{v^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{22} &= \cos \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2} \right) - \sin \gamma v^2 \xi_a - \left[\cos \varphi_a \cos \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_b \\
&+ \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_a \xi_b
\end{aligned}$$

De forma que se está en condiciones de utilizar las variables acción-ángulo ecs.(4.54).

$$Q_n = R_n \cos \theta_n, \quad P_n = R_n \sin \theta_n$$

Sustituyendo en las ecs.(4.44) se tiene

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} R_{n+1} \cos \theta_{n+1} \\ R_{n+1} \sin \theta_{n+1} \end{pmatrix} &= \tilde{T} \begin{pmatrix} R_n \cos \theta_n \\ R_n \sin \theta_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{T}_{11} R_n \cos \theta_n + \tilde{T}_{12} R_n \sin \theta_n \\ \tilde{T}_{21} R_n \cos \theta_n + \tilde{T}_{22} R_n \sin \theta_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{11} R_n \cos \theta_n &= R_n \cos \theta_n \cos \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2} \right) - R_n \cos \theta_n \sin \gamma \frac{\xi_a}{v^2} \\
&- R_n \cos \theta_n \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_b \\
&+ R_n \cos \theta_n \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_a \xi_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{12}R_n \sin \theta_n &= R_n \sin \theta_n \sin \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2}\right) - R_n \sin \theta_n \cos \gamma \xi_a v^2 \\
&- R_n \sin \theta_n \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b}\right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b}\right) \right] \xi_b v^2 \\
&- R_n \sin \theta_n \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b}\right) \right. \\
&\quad \left. - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b}\right) \right] \xi_a \xi_b v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{21}R_n \cos \theta_n &= -R_n \cos \theta_n \sin \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2}\right) \\
&+ R_n \cos \theta_n \left[\cos \varphi_a \cos \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b}\right) \right] \frac{\xi_a^2}{v^2} \\
&+ R_n \cos \theta_n \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b}\right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b}\right) \right] \frac{\xi_b^2}{v^2} \\
&- R_n \cos \theta_n \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b}\right) \right. \\
&\quad \left. + \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b}\right) \right] \frac{\xi_a \xi_b}{v^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{22}R_n \sin \theta_n &= R_n \sin \theta_n \cos \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2}\right) - R_n \sin \theta_n \sin \gamma v^2 \xi_a \\
&- R_n \sin \theta_n \left[\cos \varphi_a \cos \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b}\right) \right] \xi_b \\
&+ R_n \sin \theta_n \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b}\right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b}\right) \right] \xi_a \xi_b
\end{aligned}$$

ahora

$$\begin{aligned}
R_{n+1} \cos \theta_{n+1} &= \widetilde{T}_{11} \cos \theta_n R_n + \widetilde{T}_{12} \sin \theta_n R_n \\
&= R_n \cos \theta_n \cos \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2} \right) - R_n \cos \theta_n \sin \gamma \frac{\xi_a}{v^2} \\
&\quad - R_n \cos \theta_n \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_b \\
&\quad + R_n \cos \theta_n \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) - \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_a \xi_b \\
&\quad + R_n \sin \theta_n \sin \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2} \right) - R_n \sin \theta_n \cos \gamma \xi_a v^2 \\
&\quad - R_n \sin \theta_n \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_b v^2 \\
&\quad - R_n \sin \theta_n \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_a \xi_b v^2
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
R_{n+1} \sin \theta_{n+1} &= \widetilde{T}_{21} \cos \theta_n R_n + \widetilde{T}_{22} \sin \theta_n R_n \\
&= -R_n \cos \theta_n \sin \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2} \right) \\
&\quad + R_n \cos \theta_n \left[\cos \varphi_a \cos \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \frac{\xi_a^2}{v^2} \\
&\quad + R_n \cos \theta_n \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \frac{\xi_b^2}{v^2} \\
&\quad - R_n \cos \theta_n \left[\cos \varphi_a \sin \varphi_b - \frac{1}{2} \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \sin \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \frac{\xi_a \xi_b}{v^2} \\
&\quad + R_n \sin \theta_n \cos \gamma \left(1 - \frac{\xi_a^2}{2} - \frac{\xi_b^2}{2} \right) - R_n \sin \theta_n \sin \gamma v^2 \xi_a \\
&\quad - R_n \sin \theta_n \left[\cos \varphi_a \cos \varphi_b + \frac{1}{2} \sin \varphi_a \sin \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_b \\
&\quad + R_n \sin \theta_n \left[\sin \varphi_a \sin \varphi_b + \frac{1}{2} \cos \varphi_a \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} + \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{1}{2} \cos \varphi_b \left(\frac{Z_b}{Z_a} - \frac{Z_a}{Z_b} \right) \right] \xi_a \xi_b
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Para determinar el crecimiento de R_{n+1} en términos de R_n se elevan al cuadrado las ecs. (4.58) y (4.59) por ambos lados y se suman despreciando términos de orden mayor a $O(\xi_a^2)$, $O(\xi_b^2)$ y $O(\xi_a\xi_b)$. Después de estos engorrosos cálculos se obtiene el mapa [4]

$$\frac{R_{n+1}^2}{R_n^2} = 1 + \xi_a N_a(\theta_n) + \xi_b N_b(\theta_n) + \xi_a^2 M_a + \xi_b^2 M_b + \xi_a \xi_b M_{ab} \quad (4.60a)$$

$$\theta_{n+1} - \theta_n + \gamma = \xi_a U_a(\theta_n) + \xi_b U_b(\theta_n) \quad (4.60b)$$

Donde únicamente se conservan los términos lineales y cuadráticos del desorden. Y se introducen las funciones

$$N_a(\theta_n) = \frac{\alpha \sin \varphi_b}{\sin \gamma} \sin 2\theta_n, \quad N_b(\theta_n) = -\frac{\alpha \sin \varphi_a}{\sin \gamma} \sin(2\theta_n - \gamma) \quad (4.61a)$$

$$M_a = \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_b}{2 \sin^2 \gamma}, \quad M_b = \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_a}{2 \sin^2 \gamma}, \quad M_{ab} = \frac{\alpha^2 \sin \varphi_a \sin \varphi_b}{2 \sin^2 \gamma} \quad (4.61b)$$

$$U_a(\theta_n) = \frac{\alpha \sin \varphi_b}{2 \sin \gamma} \cos 2\theta_n, \quad U_b(\theta_n) = \frac{\alpha \sin \varphi_a}{2 \sin \gamma} \cos(2\theta_n - \gamma) \quad (4.61c)$$

Es importante subrayar que las ecs. (4.61b) y (4.61c) no son exactas. Se conservaron únicamente los términos que contribuyen a la longitud de localización L_{loc} [4].

Las ecs. (4.61) contienen el factor

$$\alpha = \left(\frac{Z_a}{Z_b} - \frac{Z_b}{Z_a} \right) \quad (4.62)$$

Constante que describe qué tan bien pegan los dos medios. En comparación con la ec. (4.55), las variaciones en el grosor de cada capa se reflejan en perturbaciones tanto en el radio R_n como en el ángulo θ_n .

4.5. Longitud de Localización

Las ecs.(4.60) son el punto de partida para determinar la longitud de localización. De manera análoga a los procedimientos anteriores ésta se define mediante el exponente de Lyapunov λ

$$\frac{d}{l_{loc}} = \lambda = \frac{1}{2} \left\langle \ln \left(\frac{R_{n+1}}{R_n} \right)^2 \right\rangle \quad (4.63)$$

Por lo que se sustituye $\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right)^2$ por la ec. (4.60a)

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\langle \ln \left(1 + \xi_a N_a(\theta_n) + \xi_b N_b(\theta_n) + \xi_a^2 M_a + \xi_b^2 M_b + \xi_a \xi_b M_{ab} \right) \right\rangle \quad (4.64)$$

y se expande el logaritmo de la forma $\ln(1+x)$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \left\langle \xi_a N_a(\theta_n) + \xi_b N_b(\theta_n) + \xi_a^2 M_a + \xi_b^2 M_b + \xi_a \xi_b M_{ab} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\xi_a N_a(\theta_n) + \xi_b N_b(\theta_n) + \xi_a^2 M_a + \xi_b^2 M_b + \xi_a \xi_b M_{ab} \right)^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \xi_a N_a(\theta_n) + \xi_b N_b(\theta_n) + \xi_a^2 M_a + \xi_b^2 M_b + \xi_a \xi_b M_{ab} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \left(\xi_a^2 N_a^2(\theta_n) + 2\xi_a N_a(\theta_n) \xi_b N_b(\theta_n) + \xi_b^2 N_b^2(\theta_n) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \langle \xi_a N_a(\theta_n) \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi_b N_b(\theta_n) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \xi_a^2 \left(M_a - \frac{1}{2} N_b^2(\theta_n) \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \xi_b^2 \left(M_b - \frac{1}{2} N_a^2(\theta_n) \right) \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \xi_a \xi_b (M_{ab} - N_a(\theta_n) N_b(\theta_n)) \rangle \end{aligned} \quad (4.65)$$

Con la teoría de perturbaciones a segundo orden se pueden despreciar las correlaciones entre θ_n y los términos cuadráticos de ξ_a^2, ξ_b^2 y $\xi_a \xi_b$. Así para los sumandos que contienen los términos anteriores se puede computar el valor esperado de θ_n por separado de los valores esperados de ξ_a^2, ξ_b^2 y $\xi_a \xi_b$. [4]

De forma que se tiene

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \langle \xi_a N_a(\theta_n) \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi_b N_b(\theta_n) \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi_a^2 \rangle \left(M_a - \frac{1}{2} \langle N_b^2(\theta_n) \rangle \right) + \frac{1}{2} \langle \xi_b^2 \rangle \left(M_b - \frac{1}{2} \langle N_a^2(\theta_n) \rangle \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \xi_a \xi_b \rangle (M_{ab} - \langle N_a(\theta_n) N_b(\theta_n) \rangle) \end{aligned} \quad (4.66)$$

se asume además que la distribución de la variable angular θ_n es uniforme en la aproximación a primer orden del desorden débil [4]. Hipótesis que es válida excepto para los bordes y centro de la banda. Lo que implica que

$$\begin{aligned} 2 \langle \sin^2 2\theta_n \rangle &= 2 \langle \cos^2 2\theta_n \rangle = 2 \langle \sin^2(2\theta_n - \gamma) \rangle = 1, \\ 2 \langle \sin 2\theta_n \sin(2\theta_n - \gamma) \rangle &= \cos \gamma, \quad \langle \sin 4\theta_n \rangle = \langle \cos 4\theta_n \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

después de sustituir las ecs. (4.61a) y (4.61b) en la ec. (4.66) y promediar respecto a θ_n se tiene

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_b}{8 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a^2 \rangle + \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_a}{8 \sin^2 \gamma} \langle \xi_b^2 \rangle - \frac{\alpha^2 \sin \varphi_a \sin \varphi_b}{4 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a \xi_b \rangle \cos \gamma \\ &+ \frac{\alpha \sin \varphi_b}{2 \sin \gamma} \langle \xi_a \sin 2\theta_n \rangle - \frac{\alpha \sin \varphi_a}{2 \sin \gamma} \langle \xi_b \sin(2\theta_n - \gamma) \rangle \end{aligned} \quad (4.68)$$

Nótese que por simplicidad de notación se ha escrito ξ_a y ξ_b sin embargo las variables aleatorias lo son para cada sitio n es decir $\xi_a(n)$ y $\xi_b(n)$. En lo consiguiente se hará uso de la segunda notación para determinar la variables en cuestión. A fin de calcular el exponente de Lyapunov se tienen que calcular los correladores no triviales $\langle \xi_a(n) \sin 2\theta_n \rangle$ y $\langle \xi_b(n) \sin(2\theta_n - \gamma) \rangle$ motivo por el cual se retoma la ec. (4.60b), en su desarrollo exponencial, que permite escribir lo siguiente [4]

$$\exp[2i(\theta_{n'+1} - \theta_{n'} + \gamma)] = 1 + \frac{i\alpha \sin \varphi_b}{\sin \gamma} \xi_a(n') \cos 2\theta_{n'} - \frac{i\alpha \sin \varphi_a}{\sin \gamma} \xi_b(n') \cos(2\theta_{n'} - \gamma) \quad (4.69)$$

donde el desarrollo de la exponencial se mantiene a primer orden. La ec.(4.69) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \exp[2i(\theta_{n'+1} + \gamma)] &= \exp[2i\theta_{n'}] + \frac{i\alpha \sin \varphi_b}{\sin \gamma} \xi_a(n') \cos 2\theta_{n'} \exp[2i\theta_{n'}] \\ &- \frac{i\alpha \sin \varphi_a}{\sin \gamma} \xi_b(n') \cos(2\theta_{n'} - \gamma) \exp[2i\theta_{n'}] \end{aligned} \quad (4.70)$$

Considerando $n' = n - r$ y multiplicando ambos lados de la ec. (4.70) por $\xi_a(n)$ y de manera paralela por $\xi_b(n)$ resultando las siguientes ecuaciones, que además han sido promediadas

$$\begin{aligned} \langle \xi_a(n) \exp[2i\theta_{n-r+1}] \rangle \exp[2i\gamma] &= \langle \xi_a(n) \exp[\theta_{n-r}] \rangle + \frac{i\alpha \sin \varphi_b}{2 \sin \gamma} \langle \xi_a(n) \xi_a(n-r) \rangle \\ &- \frac{i\alpha \sin \varphi_a}{2 \sin \gamma} \exp[i\gamma] \langle \xi_a(n) \xi_b(n-r) \rangle \end{aligned} \quad (4.71a)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi_b(n) \exp[2i\theta_{n-r+1}] \rangle \exp[2i\gamma] &= \langle \xi_b(n) \exp[\theta_{n-r}] \rangle + \frac{i\alpha \sin \varphi_b}{2 \sin \gamma} \langle \xi_b(n) \xi_a(n-r) \rangle \\ &- \frac{i\alpha \sin \varphi_a}{2 \sin \gamma} \exp[i\gamma] \langle \xi_b(n) \xi_b(n-r) \rangle \end{aligned} \quad (4.71b)$$

$$(4.71c)$$

Finalmente se multiplican las ecs.(4.71) por $\exp(-2i\gamma r)$ y se ejerce una suma sobre el r desde uno a infinito, utilizando las definiciones (4.3) y (4.26) se obtienen las expresiones para los dos correladores codiciados [4]

$$\langle \xi_a(n) \exp[2i\theta_n] \rangle = \frac{i\alpha \sin \varphi_b}{2 \sin \gamma} \langle \xi_a^2(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_a(r) \exp(-2i\gamma r) \quad (4.72a)$$

$$- \frac{i\alpha \sin \varphi_a}{2 \sin \gamma} \langle \xi_a(n) \xi_b(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{ab}(r) \exp(-2i\gamma r + i\gamma)$$

$$\langle \xi_b(n) \exp[2i\theta_n - i\gamma] \rangle = - \frac{i\alpha \sin \varphi_a}{2 \sin \gamma} \langle \xi_b^2(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_b(r) \exp(-2i\gamma r) \quad (4.72b)$$

$$+ \frac{i\alpha \sin \varphi_b}{2 \sin \gamma} \langle \xi_a(n) \xi_b(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{ab}(r) \exp(-2i\gamma r - i\gamma)$$

Recordando la ec. (4.68)

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_b}{8 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a^2 \rangle + \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_a}{8 \sin^2 \gamma} \langle \xi_b^2 \rangle - \frac{\alpha^2 \sin \varphi_a \sin \varphi_b}{4 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a \xi_b \rangle \cos \gamma \\ &+ \frac{\alpha \sin \varphi_b}{2 \sin \gamma} \langle \xi_a \sin 2\theta_n \rangle - \frac{\alpha \sin \varphi_a}{2 \sin \gamma} \langle \xi_b \sin(2\theta_n - \gamma) \rangle \end{aligned}$$

puede observarse que los correladores necesarios para calcular el exponente de Lyapunov son la parte imaginaria de sus correspondientes en las ecs. (4.72).

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_b}{8 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a^2(n) \rangle + \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_a}{8 \sin^2 \gamma} \langle \xi_b^2(n) \rangle - \frac{\alpha^2 \sin \varphi_a \sin \varphi_b}{4 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a(n) \xi_b(n) \rangle \cos \gamma \\
&+ \frac{\alpha \sin \varphi_b}{2 \sin \gamma} \left\{ \frac{\alpha \sin \varphi_b}{2 \sin \gamma} \langle \xi_a^2(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_a(r) \cos(2\gamma r) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha \sin \varphi_a}{2 \sin \gamma} \langle \xi_a(n) \xi_b(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{ab}(r) \cos(2i\gamma r - i\gamma) \right\} \\
&- \frac{\alpha \sin \varphi_a}{2 \sin \gamma} \left\{ -\frac{\alpha \sin \varphi_a}{2 \sin \gamma} \langle \xi_b^2(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_b(r) \cos(2\gamma r) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha \sin \varphi_b}{2 \sin \gamma} \langle \xi_a(n) \xi_b(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{ab}(r) \cos(2i\gamma r + i\gamma) \right\} \\
&= \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_b}{8 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a^2(n) \rangle + \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_a}{8 \sin^2 \gamma} \langle \xi_b^2(n) \rangle - \frac{\alpha^2 \sin \varphi_a \sin \varphi_b}{4 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a(n) \xi_b(n) \rangle \cos \gamma \\
&+ \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_b}{4 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a^2(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_a(r) \cos(2\gamma r) \\
&- \frac{\alpha^2 \sin \varphi_a \sin \varphi_b}{4 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a(n) \xi_b(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{ab}(r) \cos(2i\gamma r - i\gamma) \\
&+ \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_a}{4 \sin^2 \gamma} \langle \xi_b^2(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_b(r) \cos(2\gamma r) \\
&- \frac{\alpha^2 \sin \varphi_a \sin \varphi_b}{4 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a(n) \xi_b(n) \rangle \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{ab}(r) \cos(2i\gamma r + i\gamma) \\
\lambda &= \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_b}{4 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a^2(n) \rangle \left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \chi_a(r) \cos(2\gamma r) \right) + \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi_a}{4 \sin^2 \gamma} \langle \xi_b^2(n) \rangle \left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \chi_b(r) \cos(2\gamma r) \right) \\
&- \frac{\alpha^2 \sin \varphi_a \sin \varphi_b}{2 \sin^2 \gamma} \langle \xi_a(n) \xi_b(n) \rangle \left(\frac{\cos \gamma}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{ab}(r) \cos(2i\gamma r + i\gamma) \right) \tag{4.73}
\end{aligned}$$

que junto con la ec. (5.6) (la densidad de correlación) y la ec.(5.7) permiten escribir la expresión final para el exponente de Lyapunov

$$\lambda = \frac{\alpha^2}{8 \sin^2 \gamma} \left[k_a^2 \sigma_a^2 \sin^2 \varphi_b W_a(2\gamma) + k_b^2 \sigma_b^2 + \sin^2 \varphi_a W_b(2\gamma) - 2k_a k_b \sigma_{ab}^2 \sin \varphi_a \sin \varphi_b \cos \gamma W_{ab}(2\gamma) \right] \quad (4.74)$$

ecuación que es simétrica respecto a cambio de índices $a \leftrightarrow b$. Donde los primeros dos términos del exponente de Lyapunov se atribuyen a las correlaciones dentro de una capa en sí misma, a o b , respectivamente, indicadas por los auto-correladores $W_a(2\gamma)$ y $W_b(2\gamma)$. El tercer término incluye el correlador cruzado $W_{ab}(2\gamma)$ que surge de las correlaciones del desorden entre las capas a y b . [4]

La ec.(4.74) debe ser complementada con la ec.(4.50) de dispersión determinando la estructura de bandas en función de la frecuencia $\omega(\gamma)$. El resultado dado por la ec. (4.74) es válido sólo para valores reales de la fase de Bloch, γ , con lo que se definen las bandas de energía. Dentro de las regiones prohibidas de energía con γ imaginario o complejo, la solución corresponde a un estado de Bloch evanescente situado en una escala del orden de $Im^{-1}(\gamma)$. Lo que resulta en una transmisión exponencialmente pequeña incluso en el caso sin desorden y la presencia del desorden débil solamente genera una pequeña corrección a las posiciones de las bandas. Debido a la paridad y periodicidad de las ecs. (4.50) y (4.74) respecto a γ se puede considerar solamente el intervalo $0 \leq \gamma \leq \pi$. Es importante enfatizar que el valor del exponente de Lyapunov es muy sensible a los parámetros del modelo, lo que resulta en varias dependencias de $l_{loc}(\omega)$ dentro de las bandas de energía. [4]

Capítulo 5

Modelo de bicapas con simetría esférica

En este capítulo se plantea un modelo de cascarones esféricos concéntricos donde cada celda está compuesta por dos medios alternantes a y b . En particular se considera la propagación de ondas esféricas electromagnéticas monocromáticas de frecuencia ω en un arreglo finito o infinito de dos dieléctricos. Donde cada material queda especificado por sus propiedades electromagnéticas. Al igual que en el Capítulo anterior [4]

$$n_a = \sqrt{\epsilon_a \mu_a} c, \quad Z_a = \frac{\mu_a}{n_a}, \quad k_a = \frac{\omega}{c} n_a \quad (5.1a)$$

$$n_b = \sqrt{\epsilon_b \mu_b} c, \quad Z_b = \frac{\mu_b}{n_b}, \quad k_b = \frac{\omega}{c} n_b \quad (5.1b)$$

donde ϵ_i es la permitividad o constante dieléctrica, μ_i es la permeabilidad magnética, n_i el índice de refracción, c la velocidad de la luz en el vacío, Z_i la impedancia y k_i el número de onda.

La simetría esférica del problema permite introducir el desorden del sistema en la estructura mediante el espesor r de cada cascarón

$$r_a(n) = r_a + \rho_a(n), \quad \langle r_a(n) \rangle = r_a \quad (5.2a)$$

$$r_b(n) = r_b + \rho_b(n), \quad \langle r_b(n) \rangle = r_b \quad (5.2b)$$

el entero n etiqueta la celda unitaria (a, b) que es diferente al índice de refracción n_i , r_a y r_b denotan el espesor promedio de cada cascarón y ρ_a y ρ_b corresponden a las pequeñas variaciones de espesor en cada capa. En ausencia de desorden el arreglo de bicapas es periódico con período $r = r_a + r_b$. Las variables aleatorias satisfacen

las mismas propiedades estadísticas que en el modelo unidimensional.

$$\langle \rho_a(n) \rangle = 0, \quad \langle \rho_a^2(n) \rangle = \sigma_a^2, \quad \langle \rho_a(n) \rho_a(n') \rangle = \sigma_a^2 \xi_a(n - n') \quad (5.3a)$$

$$\langle \rho_b(n) \rangle = 0, \quad \langle \rho_b^2(n) \rangle = \sigma_b^2, \quad \langle \rho_b(n) \rho_b(n') \rangle = \sigma_b^2 \xi_b(n - n') \quad (5.3b)$$

$$\langle \rho_a(n) \rho_b(n) \rangle = \sigma_{ab}, \quad \langle \rho_a(n) \rho_b(n') \rangle = \langle \rho_b(n) \rho_a(n') \rangle = \sigma_{ab}^2 \xi_{ab}(n - n') \quad (5.4)$$

Las funciones de correlación están normalizadas a 1, $\xi_a(0) = \xi_b(0) = \xi_{ab}(0) = 1$.

Se supone además desorden débil

$$k_a^2 \sigma_a^2 \ll 1, \quad k_b^2 \sigma_b^2 \ll 1 \quad (5.5)$$

lo que suponemos permitirá utilizar las herramientas descritas en capítulos anteriores.

Para determinar las propiedades de transporte es necesario introducir la densidad espectral de las variables aleatorias definida como

$$W(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi(j) e^{-ikj} = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \chi(j) \cos(kj) \quad (5.6)$$

$$\chi(j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(k) e^{ikj} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} W(k) \cos(kj) dk. \quad (5.7)$$

Por las ecs.(5.3) los correladores son funciones reales y pares de $j = n - n'$ entre índices de la celda, por lo que la transformadas de Fourier correspondientes a las densidades espectrales son también funciones reales e impares de la variable k que es una longitud de onda adimensional. Cabe destacar que las densidades espectrales son funciones positivas de k para cualquier secuencia real de variables aleatorias $\rho_a(n), \rho_b(n)$ [4].

Como cada celda contiene dos medios distintos es necesario que en la interfaz de los medios se cumplan ciertas condiciones de frontera para la onda incidente. Pero antes es necesario determinar los campos de las ondas esféricas.

5.1. Solución a la ecuación de onda esférica monocromática

Para las ondas esféricas el campo eléctrico satisface la ecuación de onda vectorial, que se construye a partir de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes

[17], con $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= 0 & \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= -\epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= 0 & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}\quad (5.8)$$

Para obtener las ecuaciones de onda correspondientes se aplica el rotacional a la ecuación de Faraday-Lenz, con lo que se tiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = -\mu \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t))}{\partial t} \quad (5.9)$$

$$= -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (5.10)$$

Esta ecuación puede ser reescrita utilizando la identidad vectorial siguiente

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (5.11)$$

de tal forma que se obtiene la ecuación de de onda vectorial para el campo eléctrico

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.12)$$

Por ser una onda monocromática se asume que la dependencia temporal de los campos tanto eléctrico como magnético está dada por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (5.14)$$

tal que la ec. (5.12) se puede escribir como

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \left(\frac{\omega}{\sqrt{\epsilon\mu}} \right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.15)$$

donde $\frac{\omega}{\sqrt{\epsilon\mu}} = k$ es el vector de onda.

Procediendo de manera análoga para el campo magnético se obtiene su equivalente de forma que

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.16)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + k^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.17)$$

con lo que ambos campos tanto eléctrico como magnético satisfacen la ecuación vectorial de Helmholtz.

Nótese que hasta aquí las ecuaciones son válidas para campos en cualquier sistema coordenado, sin embargo el problema puede simplificarse en el caso de las coordenadas esféricas, para lo cual se retoma la ecuación escalar

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \quad (5.18)$$

y se propone una solución a la ec. vectorial

$$\nabla^2\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + k^2\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.19)$$

en base a la solución escalar ψ como

$$\mathbf{V} \sim \mathbf{r} \times \nabla\psi \quad (5.20)$$

solución válida sólo para la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas.

Demostración

Para demostrar que la propuesta para el campo vectorial (5.20) satisface la ecuación vectorial de Helmholtz aplicamos el rotacional dos veces con la pretención de reproducir la ec. (5.19), por lo que es conveniente escribir las identidades vectoriales que serán de utilidad [17]

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (5.21)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{A} \quad (5.22)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.23)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A}\psi) = \psi\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla\psi \quad (5.24)$$

Por la ec. (5.21) el primer rotacional del campo \mathbf{V} se desarrolla como

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla\psi) &= \underbrace{\mathbf{r}\nabla^2\psi}_{-\mathbf{r}k^2\psi} - (\nabla\psi) \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{r}}_3 + \underbrace{(\nabla\psi \cdot \nabla)\mathbf{r}}_{\nabla\psi} - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\nabla\psi \\ &= -\mathbf{r}k^2\psi - 2\nabla\psi - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\nabla\psi \end{aligned}$$

desarrollando el último término según la ec.(5.23)

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{r} \cdot \nabla\psi) &= (\mathbf{r} \cdot \nabla)\nabla\psi + (\nabla\psi \cdot \nabla)\mathbf{r} + \mathbf{r} \times \nabla \times \nabla\psi + \nabla\psi \times \nabla \times \mathbf{r} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \nabla)\nabla\psi + \nabla\psi. \end{aligned}$$

Así el rotacional del campo eléctrico se puede reescribir como

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = -\mathbf{r}k^2\psi - \nabla\psi - \nabla(\mathbf{r} \cdot \nabla\psi)$$

ahora aplicando de nuevo el rotacional a la ec. anterior

$$\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi)) = -k^2 \nabla \times \mathbf{r}\psi$$

que aunado a las ecs. (5.11) y (5.24) permite escribir

$$-\nabla^2(\mathbf{r} \times \nabla \psi) = k^2(\mathbf{r} \times \nabla \psi)$$

que coincide con la ec. (5.20) para $\mathbf{V} \sim \mathbf{r} \times \nabla \psi$, con lo que queda demostrado ■.

Se pueden construir las soluciones para los campos eléctrico y magnético a partir de la solución vectorial \mathbf{V} .

Primero se considera la ec.(5.16) donde el campo eléctrico tiene solución de la forma $\mathbf{E} \sim \mathbf{r} \times \nabla \psi$.

En este caso ψ es una función de potencial eléctrico, y se deben ajustar las unidades de la solución para el campo eléctrico, de forma que se tiene

$$\mathbf{E}^{TE} = ik\mathbf{r} \times \nabla \psi^{TE} \quad (5.25)$$

de las ecs. de Maxwell se tiene $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}$, en consecuencia se puede construir el campo magnético a partir de la solución anterior

$$\mathbf{B}^{TE} = \frac{k}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi^{TE}). \quad (5.26)$$

donde se introdujo el superíndice TE ya que a estas soluciones se les conoce como Transversales Eléctricas porque el campo eléctrico es transversal a la dirección de propagación \hat{r} pese que representan los campos de un multipolo magnético [17].

Sin embargo éstas no son las únicas soluciones, se puede obtener un conjunto de soluciones linealmente independientes a las anteriores si ahora se considera el campo magnético de la forma $\mathbf{B} \sim \mathbf{r} \times \nabla \psi$. De nueva cuenta ajustando las unidades pero ahora el campo magnético se tendrá

$$\mathbf{B}^{TM} = -ik\sqrt{\epsilon\mu}\mathbf{r} \times \nabla \psi^{TM} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{E}^{TM} = \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi^{TM}) \quad (5.28)$$

Se introdujo el súper índice TM para indicar que ahora el campo magnético es transversal a la dirección de propagación y representan los campos de un multipolo eléctrico.

Las dos soluciones a la ecuación escalar, ψ^{TE} y ψ^{TM} se conocen como potenciales de Debye.[5]. Y la solución más general para un campo electromagnético puede expresarse como la suma de los dos tipos de campos.

Cual sea el caso, con lo anterior, resolver la ecuación vectorial de Helmholtz se ha reducido a resolver la ecuación escalar en coordenadas esféricas

$$\left(\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 + k^2 \right) \psi = 0 \quad (5.29)$$

con la ambición de encontrar la solución se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que la función ψ es de variables separables

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (5.30)$$

de tal manera que la ec. (5.29) se escribir como

$$\frac{1}{R} \sin^2 \theta \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} R \right) + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (5.31)$$

donde el tercer término depende únicamente de ϕ tal que

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + m^2 \Phi = 0 \quad (5.32)$$

por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \sin^2 \theta \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} R \right) + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta \right) - m^2 + k^2 r^2 \sin^2 \theta &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} R \right) + k^2 r^2 + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

así se tienen los primeros dos términos dependientes únicamente de la variable r y los últimos dos términos dependientes de la variable θ , esta parte de la ecuación se elige constante $-l(l+1)$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} R \right) + (k^2 r^2 - l(l+1)) R = 0 \quad (5.34)$$

por lo que los primeros dos términos de la ec. (5.33) deben ser iguales a $l(l+1)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta \right) - \left(\frac{m^2}{\sin^2 \theta} + l(l+1) \right) \Theta = 0 \quad (5.35)$$

Se tienen tres ecs. (5.32), (5.34) y (5.35) que son independientes y con la solución de cada una se construirá la función de onda ψ .

La solución de la ec. (5.32)

$$\Phi_m(\phi) = e^{\pm im\phi}. \quad (5.36)$$

La solución de la ec. (5.35) son los polinomios de Legendre

$$\Theta(\theta) = P_{lm}(\cos \theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l(\cos \theta) \quad (5.37)$$

donde $P_{l0}(\cos \theta) = P_l(\cos \theta)$ y

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(\cos^2 \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l \quad (5.38)$$

según la fórmula de Rodrigues.

Y finalmente la ec. (5.34) se somete al cambio de variable $R(r) = \sqrt{kr}Z(kr)$ del tal forma que la ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{d^2}{dr^2} Z + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} Z + \left(k^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right) Z = 0 \quad (5.39)$$

cuyas soluciones son

$$Z(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{kr} B_{l+\frac{1}{2}}(kr) \quad (5.40)$$

Donde $B_{l+\frac{1}{2}}(kr)$ es cualquier función de Bessel o de Hankel. Recuperando la función $R(kr)$ se tiene

$$R(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} B_{l+\frac{1}{2}}(kr) = b_l(kr) \quad (5.41)$$

que son las funciones esféricas de Bessel y de Hankel según corresponda. Cuando se busque construir un mapa iterativo con las soluciones entre las capas serán más convenientes las funciones de Bessel del tipo uno y dos $j_l(kr)$ y $y_l(kr)$ respectivamente, que representan una solución real y los comportamientos asintóticos de estas

funciones cuando $kr \gg l$ son

$$j_l(kr) \sim \frac{1}{kr} \cos\left(kr - \frac{\pi}{2}(l+1)\right) \quad (5.42)$$

$$y_l(kr) \sim \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}(l+1)\right) \quad (5.43)$$

En contra parte las funciones de Hankel de los tipos uno y dos corresponden a

$$h_l^{(1)}(kr) = j_l(kr) + iy_l(kr) \quad h_l^{(2)}(kr) = j_l(kr) - iy_l(kr) \quad (5.44)$$

que representan una solución compleja y serán convenientes para construir la matriz de transferencia con ondas progresivas y regresivas. Las funciones de Hankel tienen el siguiente comportamiento asintótico

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} h_l^{(1)}(kr) \rightarrow \frac{(-i)^{l+1} e^{ikr}}{kr} \quad (5.45)$$

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} h_l^{(2)}(kr) \rightarrow \frac{(i)^{l+1} e^{-ikr}}{kr} \quad (5.46)$$

La solución más general a la ec.(5.34) se escribirá como

$$R_l(kr) = A_1 b_l^{(1)}(kr) + A_2 b_l^{(2)}(kr) \quad (5.47)$$

donde $b_l^{(1)}(kr)$ corresponderá a la función de Bessel o de Hankel del tipo 1, $b_l^{(2)}(kr)$ corresponderá a la función de Bessel o de Hankel del tipo 2. Por lo que la solución a la ecuación escalar de Helmholtz se puede escribir como

$$\psi_{lm}(r, \theta, \phi) = R_l(kr) P_{lm}(\cos \theta) e^{-im\phi} \quad (5.48)$$

Como las funciones angulares no poseen unidades las constantes A_1 y A_2 de la función $R(kr)$ son constantes de dimensionalidad congruentes con las unidades de potencial, que dependerá del medio de propagación y del sistema de unidades utilizado. Es decir la función $R_l(kr)$ dependerá del medio.

Considerando primero ondas TE se construyen los campos eléctrico y magnético de acuerdo con las ecs. (5.25) y (5.26)

$$\mathbf{E}^{TE} = ikr \times \nabla \psi_{lm} \quad \mathbf{B}^{TE} = \frac{k}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}^{TE} \quad (5.49)$$

Para calcular el campo eléctrico se obtiene primero $\nabla\psi$

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= P_{lm}(\cos\theta)e^{-im\phi}\partial_r R_l(kr)\hat{r} \\ &+ \frac{1}{r}R_l(kr)e^{-im\phi}\partial_\theta P_{lm}(\cos\theta)\hat{\theta} \\ &- \frac{im}{r\sin\theta}R_l(kr)P_{lm}(\cos\theta)e^{-im\phi}\hat{\phi}\end{aligned}\quad (5.50)$$

Luego $\mathbf{E}^{TE} = \mathbf{r} \times \nabla\psi_{lm}$ en componentes se tiene

$$E_r^{TE} = 0 \quad (5.51)$$

$$E_\theta^{TE} = \frac{mk}{\sin\theta}e^{-im\phi}R_l(kr)P_{lm}(\cos\theta) \quad (5.52)$$

$$E_\phi^{TE} = ikR_l(kr)e^{-im\phi}\partial_\theta P_{lm}(\cos\theta) \quad (5.53)$$

Ahora el campo magnético es $\mathbf{B}^{TE} = \frac{k}{\omega}(\nabla \times \mathbf{E}^{TE})$ en componentes

$$B_r^{TE} = \frac{k}{r\omega}e^{-im\phi}R_l(kr)\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta P_{lm}(\cos\theta)) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}P_{lm}(\cos\theta)\right] \quad (5.54)$$

$$B_\theta^{TE} = -\frac{k}{r\omega}e^{-im\phi}\partial_r(rR_l(kr))\partial_\theta P_{lm}(\cos\theta) \quad (5.55)$$

$$B_\phi^{TE} = -\frac{imk}{r\omega\sin\theta}e^{-im\phi}P_{lm}(\cos\theta)\partial_r(rR_l(kr)) \quad (5.56)$$

de la ec. (5.54) se tiene que

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\Theta\right) - \left(\frac{m^2}{\sin^2\theta} + l(l+1)\right)\Theta = 0$$

por lo que la componente radial del campo magnético ec. (5.54) resulta

$$B_r^{TE} = \frac{-k}{r\omega}e^{-im\phi}R_l(kr)[l(l+1)P_{lm}(\cos\theta)] \quad (5.57)$$

con lo que se tiene la solución completa de los campos TE.

De manera análoga e inmediata se pueden obtener los campos denominados TM considerando las ecs.(5.27) y (5.28)

$$\mathbf{B}^{TM} = -ik\sqrt{\epsilon\mu}\mathbf{r} \times \nabla\psi \quad \mathbf{E}^{TM} = \omega\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla\psi)$$

de tal manera que se tiene

$$B_r^{TM} = 0 \quad (5.58)$$

$$B_\theta^{TM} = -k \sqrt{\epsilon\mu} \frac{m}{\sin \theta} e^{-im\phi} R_l(kr) P_{lm}(\cos \theta) \quad (5.59)$$

$$B_\phi^{TM} = -ik \sqrt{\epsilon\mu} e^{-im\phi} R_l(kr) \partial_\theta P_{lm}(\cos \theta) \quad (5.60)$$

$$E_r^{TM} = -\frac{l(l+1)}{r} e^{-im\phi} R_l(kr) P_{lm}(\cos \theta) \quad (5.61)$$

$$E_\theta^{TM} = -\frac{1}{r} e^{-im\phi} \partial_r (r R_l(kr)) \partial_\theta P_{lm}(\cos \theta) \quad (5.62)$$

$$E_\phi^{TM} = \frac{-im}{r \sin \theta} e^{-im\phi} P_{lm}(\cos \theta) \partial_r (r R_l(kr)) \quad (5.63)$$

Para el caso de $l = 0$ los campos tanto TE como TM desaparecen. De acuerdo a su simetría espacial son clasificados como campos multipolares de orden 2^l . [5]

5.2. Condiciones de frontera de los campos

La forma integral de las ecuaciones de Maxwell se puede utilizar directamente para deducir las relaciones de las diferentes componentes tanto tangenciales como normales de los campos eléctrico y magnético de ambos lados de una superficie entre medios distintos. [17]

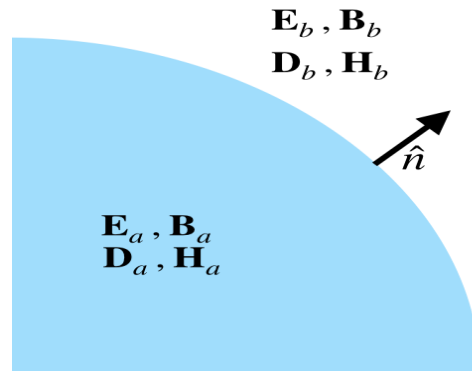


Figura 5.1: Representación 2 dimensional de la interfaz entre dos medios a y b , el vector normal \hat{n} apunta del medio a al b y el vector tangente lo será a la superficie. En general puede haber una densidad de carga y una corriente en la superficie.

Las componentes normales de \mathbf{D} y \mathbf{B} en ambos lados de la superficie frontera

cumplirán

$$(\mathbf{D}_b - \mathbf{D}_a) \cdot \hat{n} = \sigma \quad (5.64)$$

$$(\mathbf{B}_b - \mathbf{B}_a) \cdot \hat{n} = 0 \quad (5.65)$$

donde σ es la densidad de carga en la superficie y las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} en ambos lados de la superficie fronteriza están relacionadas por

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_b - \mathbf{E}_a) = 0 \quad (5.66)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_b - \mathbf{H}_a) = \mathbf{K} \quad (5.67)$$

donde \mathbf{K} es la corriente.

El sistema de estudio corresponde a dos medios dieléctricos y en la frontera no hay fuentes por lo que $\sigma = 0$ y $\mathbf{K} = 0$.

Como primera instancia consideramos ondas TE, en este caso $\hat{n} = \hat{r}$, y la ec. (5.64) se puede reescribir como

$$(\epsilon_b \mathbf{E}_b - \epsilon_a \mathbf{E}_a) \cdot \hat{r} = 0 \quad (5.68)$$

pero para ondas TE el campo magnético carece de componente paralela a la dirección de propagación, por lo que la condición anterior se satisface trivialmente. La siguiente condición es la correspondiente a la ec. (5.103)

$$(\mathbf{B}_b - \mathbf{B}_a) \cdot \hat{r} = 0 \quad (5.69)$$

lo que indica que las componentes radiales de los campos magnéticos para una onda TE son iguales en la frontera r_f

$$\begin{aligned} -k_a \frac{l(l+1)}{r_f \omega} e^{-im\phi} R_{al}(k_a r_f) [P_{lm}(\cos \theta)] &= -k_b \frac{l(l+1)}{r_f \omega} e^{-im\phi} R_{bl}(k_b r_f) [P_{lm}(\cos \theta)] \\ k_a R_{al}(k_a r_f) &= k_b R_{bl}(k_b r_f) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Luego, apartir de las ecs. (5.66) y (5.67) para las componentes tangenciales se tendrá

$$\begin{aligned} \hat{r} \times (\mathbf{E}_b - \mathbf{E}_a) &= 0 \\ -(\mathbf{E}_b - \mathbf{E}_a)_\phi \hat{\theta} + (\mathbf{E}_b - \mathbf{E}_a)_\theta \hat{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

así siguiendo la ec. (5.53) se tendrá, para la componente θ

$$\begin{aligned} i \left[k_a R_{al}(k_a r_f) - k_b R_{bl}(k_b r_f) \right] e^{-im\phi} \partial_\theta P_{lm}(\cos \theta) &= 0 \\ k_a R_{al}(k_a r_f) &= k_b R_{bl}(k_b r_f) \end{aligned} \quad (5.71)$$

y para la componente ϕ se tendrá, a partir de la ec. (5.52)

$$\begin{aligned} \frac{m}{\sin \theta} e^{-im\phi} \left[k_a R_{al}(k_a r_f) - k_b R_{bl}(k_b r_f) \right] P_{lm}(\cos \theta) &= 0 \\ k_a R_{al}(k_a r_f) &= k_b R_{bl}(k_b r_f) \end{aligned} \quad (5.72)$$

Para las componentes angulares las ecs.(5.71) y (5.72) dan exactamente la misma información que la ec.(5.70) para la componente radial, por lo que continuamos con la condición de frontera para el campo magnético

$$\begin{aligned} \hat{r} \times (\mathbf{H}_b - \mathbf{H}_a) &= 0 \\ -(\mathbf{H}_b - \mathbf{H}_a)_\phi \hat{\theta} + (\mathbf{H}_b - \mathbf{H}_a)_\theta \hat{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

así siguiendo la ec (5.56) se tendrá, para la componente θ

$$\begin{aligned} -\frac{im}{\omega \sin \theta} e^{-im\phi} P_{lm}(\cos \theta) \left[\frac{k_a}{r\mu_a} \partial_r (rR_{al}(k_a r)) - \frac{k_b}{r\mu_b} \partial_r (rR_{bl}(k_b r)) \right] \Big|_{r=r_f} &= 0 \\ \frac{k_a}{\mu_a} \partial_r (rR_{al}(k_a r)) \Big|_{r=r_f} &= \frac{k_b}{\mu_b} \partial_r (rR_{bl}(k_b r)) \Big|_{r=r_f} \end{aligned} \quad (5.73)$$

y para la componente ϕ se tendrá, a partir de la ec. (5.55)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\omega} e^{-im\phi} \partial_\theta P_{lm}(\cos \theta) \left[\frac{k_a}{r\mu_a} \partial_r (rR_{al}(k_a r)) - \frac{k_b}{r\mu_b} \partial_r (rR_{bl}(k_b r)) \right] \Big|_{r=r_f} &= 0 \\ \frac{k_a}{\mu_a} \partial_r (rR_{al}(k_a r)) \Big|_{r=r_f} &= \frac{k_b}{\mu_b} \partial_r (rR_{bl}(k_b r)) \Big|_{r=r_f} \end{aligned} \quad (5.74)$$

Las ecs. (5.73) y (5.74) dan la misma información. Las condiciones de frontera ecs. (5.70) y (5.73) permiten ver de manera explícita que el problema se puede analizar en una sola variable, la radial, simplificándolo y permitiendo utilizar las herramientas anteriores, como el formalismo de matrices de transferencia que más adelante se puede interpretar en terminos del mapa hamiltoniano y obtener el exponente de Lyapunov del modelo.

5.3. Matriz de transferencia

Para construir la matriz de transferencia del modelo hemos obtenido por considerar la solución real de la ec. de Helmholtz que representan ondas estacionarias, donde la parte relevante es la función radial. Como se vio anteriormente

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} R \right) + (k^2 r^2 - l(l+1)) R = 0$$

tiene como soluciones las funciones esféricas de Bessel cuya solución real es de la forma

$$R_l(r) = A_1 j_l(kr) + A_2 y_l(kr) \quad (5.75)$$

Por lo que la solución real dentro de una celda unitaria a la ecuación escalar de Helmholtz se puede escribir como, ver ec. (4.24)

$$\psi_{a, lm}(r, \theta, \phi) = [A_1 j_l(k_a r) + A_2 y_l(k_a r)] P_{lm}(\cos \theta) e^{-im\phi} \quad (5.76a)$$

$$\psi_{b, lm}(r, \theta, \phi) = [B_1 j_l(k_b r) + B_2 y_l(k_b r)] P_{lm}(\cos \theta) e^{-im\phi} \quad (5.76b)$$

donde la ec.(5.76a) es válida para la región $r_{an} < r < r_{bn}$ y la ec. (5.76b) es válida para $r_{bn} < r < r_{a(n+1)}$.

Las coordenadas r_{an} y r_{bn} son las fronteras izquierda y derecha de la capa a_n , las coordenadas r_{bn} y $r_{a(n+1)}$ son las fronteras izquierda y derecha de la capa b_n y cada interfaz debe satisfacer las condiciones de frontera.

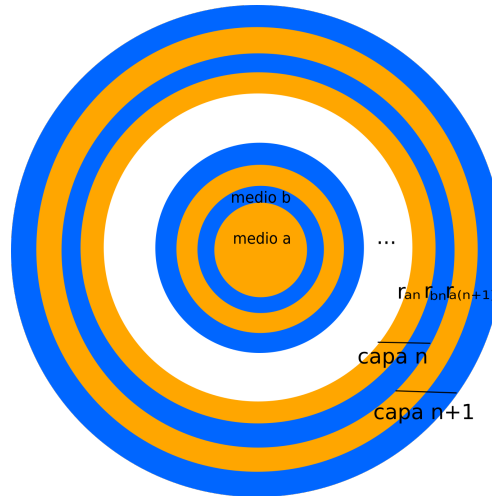


Figura 5.2: Representación 2 dimensional del modelo que indica las fronteras de las capas por analizar.

Para determinar las constantes A_1, A_2 y B_1, B_2 se necesitan las condiciones de frontera ecs. (5.70) y (5.73) que se transforman en

$$k_a [A_1 j_l(k_a r_0) + A_2 y_l(k_a r_0)] = k_b [B_1 j_l(k_b r_0) + B_2 y_l(k_b r_0)] \quad (5.77)$$

$$\frac{k_a}{\mu_a} \partial_r (r [A_1 j_l(k_a r) + A_2 y_l(k_a r)]) \Big|_{r=r_0} = \frac{k_b}{\mu_b} \partial_r (r [B_1 j_l(k_b r) + B_2 y_l(k_b r)]) \Big|_{r=r_0} \quad (5.78)$$

Se evalúa en r_0 , que puede indicar tanto r_{an} , como r_{bn} , como $r_{a(n+1)}$. La segunda condición de frontera, referente a la derivada radial, se puede desarrollar más pues se conocen las derivadas de las funciones esféricas de Bessel

$$\frac{1}{k} \partial_r b_l(kr) = \frac{l}{kr} b_l(kr) - b_{l+1}(kr) \quad (5.79a)$$

$$\frac{1}{k} \partial_r b_l(kr) = -\frac{l}{kr} b_l(kr) + b_{l-1}(kr) \quad (5.79b)$$

de forma que desarrollando por separado ambos lados de la ec. (5.78) se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{k_a}{\mu_a} \partial_r (r [A_1 j_l(k_a r) + A_2 y_l(k_a r)]) \Big|_{r=r_0} = \\ & \frac{k_a}{\mu_a} \left[A_1 j_l(k_a r_0) + A_2 y_l(k_a r_0) + r_0 A_1 \left(\frac{l}{r_0} j_l(k_a r_0) - k_a j_{l+1}(k_a r_0) \right) + r_0 A_2 \left(\frac{l}{r_0} y_l(k_a r_0) - k_a y_{l+1}(k_a r_0) \right) \right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{k_b}{\mu_b} \partial_r (r [B_1 j_l(k_b r) + B_2 y_l(k_b r)]) \Big|_{r=r_0} = \\ & \frac{k_b}{\mu_b} \left[B_1 j_l(k_b r_0) + B_2 y_l(k_b r_0) + r_0 B_1 \left(\frac{l}{r_0} j_l(k_b r_0) - k_b j_{l+1}(k_b r_0) \right) + r_0 B_2 \left(\frac{l}{r_0} y_l(k_b r_0) - k_b y_{l+1}(k_b r_0) \right) \right] \end{aligned}$$

finalmente la condición de frontera referente a la derivada, ec. (5.73)

$$\begin{aligned} & \frac{k_a}{\mu_a} \left[A_1 j_l(k_a r_0) + A_2 y_l(k_a r_0) + r_0 A_1 \left(\frac{l}{r_0} j_l(k_a r_0) - k_a j_{l+1}(k_a r_0) \right) + r_0 A_2 \left(\frac{l}{r_0} y_l(k_a r_0) - k_a y_{l+1}(k_a r_0) \right) \right] \\ & = \\ & \frac{k_b}{\mu_b} \left[B_1 j_l(k_b r_0) + B_2 y_l(k_b r_0) + r_0 B_1 \left(\frac{l}{r_0} j_l(k_b r_0) - k_b j_{l+1}(k_b r_0) \right) + r_0 B_2 \left(\frac{l}{r_0} y_l(k_b r_0) - k_b y_{l+1}(k_b r_0) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.80)$$

Recopilando las condiciones de frontera son

$$k_a [A_1 j_l(k_a r_0) + A_2 y_l(k_a r_0)] = k_b [B_1 j_l(k_b r_0) + B_2 y_l(k_b r_0)] \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_a}{\mu_a} \left[A_1 j_l(k_a r_0) + A_2 y_l(k_a r_0) + r_0 A_1 \left(\frac{l}{r_0} j_l(k_a r_0) - k_a j_{l+1}(k_a r_0) \right) + r_0 A_2 \left(\frac{l}{r_0} y_l(k_a r_0) - k_a y_{l+1}(k_a r_0) \right) \right] \\ & = \\ & \frac{k_b}{\mu_b} \left[B_1 j_l(k_b r_0) + B_2 y_l(k_b r_0) + r_0 B_1 \left(\frac{l}{r_0} j_l(k_b r_0) - k_b j_{l+1}(k_b r_0) \right) + r_0 B_2 \left(\frac{l}{r_0} y_l(k_b r_0) - k_b y_{l+1}(k_b r_0) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.82)$$

Con lo que se tienen las condiciones de frontera para la solución real a la ecuación de Helmholtz vectorial, que se enfocan solamente en la variable radial, pues las variables angulares no son matemáticamente relevantes y se está en condiciones de buscar la matriz de transferencia del modelo. Para lo cual es necesario evaluar la parte radial de soluciones a la ec. de onda esférica, ecs. (5.76a) y (5.76b)

$$R_{a,lm}(r) = A_1 j_l(k_a r) + A_2 y_l(k_a r) \quad (5.83)$$

$$R_{b,lm}(r) = B_1 j_l(k_b r) + B_2 y_l(k_b r) \quad (5.84)$$

tanto en las fronteras izquierdas como derechas de cada capa y explotar las condiciones de frontera de la sección anterior ecs. (5.81) y (5.82) que consideran sólo la parte radial de las soluciones.

con lo anterior se puede obtener el mapa de manera análoga al caso unidimensional donde se evalúa la parte radial de ec.(5.76a) y su derivada en $r_0 = r_{an}$, frontera izquierda de la capa an , se tiene

$$\begin{aligned} R_{a,l}(r_{an}) &= A_1 j_l(k_a r_{an}) + A_2 y_l(k_a r_{an}) \quad (5.85) \\ \partial_r R_{a,l}(r) \Big|_{r=r_{an}} &= A_1 \left(\frac{l}{r_{an}} j_l(k_a r_{an}) - k_a j_{l+1}(k_a r_{an}) \right) \\ &\quad + A_2 \left(\frac{l}{r_{an}} y_l(k_a r_{an}) - k_a y_{l+1}(k_a r_{an}) \right) \end{aligned} \quad (5.86)$$

las ecs. anteriores representan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas A_1 y A_2 de donde se puede obtener una solución de la forma

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{an}) \\ R'_{a,l}(r_{an}) \end{pmatrix} \quad (5.87)$$

la ec. (5.87) permite reescribir la función $R_{a,l}(r)$ en términos de $R_{a,l}(r_{an})$ y $R'_{a,l}(r_{an})$ de forma

$$R_{a,l}(r) = \begin{pmatrix} j_l(k_a r) \\ y_l(k_a r) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_l(k_a r) \\ y_l(k_a r) \end{pmatrix}^T M_1 \begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{an}) \\ R'_{a,l}(r_{an}) \end{pmatrix} = T_1(r) \begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{an}) \\ R'_{a,l}(r_{an}) \end{pmatrix} \quad (5.88)$$

Luego se evalua la parte radial de ec.(5.76b) y su derivada $r_0 = r_{bn}$

$$\begin{aligned} R_{b,l}(r_{bn}) &= B_1 j_l(k_b r_{bn}) + B_2 y_l(k_b r_{bn}) & (5.89) \\ \partial_r R_{b,l}(r) \Big|_{r=r_{bn}} &= B_1 \left(\frac{l}{r_{bn}} j_l(k_b r_{bn}) - k_b j_{l+1}(k_b r_{bn}) \right) \\ &\quad + B_2 \left(\frac{l}{r_{an}} y_l(k_b r_{bn}) - k_b y_{l+1}(k_b r_{bn}) \right) & (5.90) \end{aligned}$$

que también representa un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, en este caso, B_1 y B_2 donde se construye la solución

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} R_{b,l}(r_{bn}) \\ R'_{b,l}(r_{bn}) \end{pmatrix} \quad (5.91)$$

la ec. (5.91) permite rescribir la función $R_{b,l}(r)$ en términos de $R_{b,l}(r_{bn})$ y $R'_{b,l}(r_{bn})$ de forma

$$R_{b,l}(r) = \begin{pmatrix} j_l(k_b r) \\ y_l(k_b r) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_l(k_b r) \\ y_l(k_b r) \end{pmatrix}^T M_2 \begin{pmatrix} R_{b,l}(r_{bn}) \\ R'_{b,l}(r_{bn}) \end{pmatrix} = T_2(r) \begin{pmatrix} R_{b,l}(r_{bn}) \\ R'_{b,l}(r_{bn}) \end{pmatrix} \quad (5.92)$$

Ahora se utilizan las condiciones de frontera para establecer una relacion entre las funciones R_a y R_b en la capa n-ésima por lo que las confciones de frontera se evaluan en $r_0 = r_{bn}$, se tendrá de la ec.(5.81)

$$k_a R_{a,l}(r_{bn}) = k_b R_{b,l}(r_{bn}) \quad (5.93)$$

$$k_a [A_1 j_l(k_a r_{bn}) + A_2 y_l(k_a r_{bn})] = k_b [B_1 j_l(k_b r_{bn}) + B_2 y_l(k_b r_{bn})] \quad (5.94)$$

y de la ec.(5.82)

$$\begin{aligned}
\frac{k_a}{\mu_a} \partial_r (r R_{a,l}(r)) \Big|_{r_{bn}} &= \frac{k_b}{\mu_b} \partial_r (r R_{b,l}(r)) \Big|_{r_{bn}} & (5.95) \\
\frac{k_a}{\mu_a} A_1 \left[j_l(k_a r_{bn}) + r_{bn} \left(\frac{l}{r_{bn}} j_l(k_a r_{bn}) - k_a j_{l+1}(k_a r_{bn}) \right) \right] \\
+ \frac{k_a}{\mu_a} A_2 \left[y_l(k_a r_{bn}) + r_{bn} \left(\frac{l}{r_{bn}} y_l(k_a r_{bn}) - k_a y_{l+1}(k_a r_{bn}) \right) \right] \\
= \\
\frac{k_b}{\mu_b} B_1 \left[j_l(k_b r_{bn}) + r_{bn} \left(\frac{l}{r_{bn}} j_l(k_b r_{bn}) - k_b j_{l+1}(k_b r_{bn}) \right) \right] \\
+ \frac{k_b}{\mu_b} B_2 \left[y_l(k_b r_{bn}) + r_{bn} \left(\frac{l}{r_{bn}} y_l(k_b r_{bn}) - k_b y_{l+1}(k_b r_{bn}) \right) \right]
\end{aligned}$$

Estas condiciones permiten escribir $R_{a,l}(r_{bn})$ y $R'_{a,l}(r_{bn})$ en términos de las amplitudes B_1 y B_2

$$\begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{bn}) \\ R'_{a,l}(r_{bn}) \end{pmatrix} = M_3 \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (5.96)$$

de la ec. (5.88) se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{bn}) \\ R'_{a,l}(r_{bn}) \end{pmatrix} = T_1(r_{bn}) \begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{an}) \\ R'_{a,l}(r_{an}) \end{pmatrix} \quad (5.97)$$

Luego se evalúan las condiciones de frontera en $r_0 = r_{a(n+1)}$, frontera derecha de la capa bn , se tiene de la condición (5.81) se tiene

$$k_a R_{a,l}(r_{a(n+1)}) = k_b R_{b,l}(r_{a(n+1)}) \quad (5.98)$$

$$k_a [A_1 j_l(k_a r_{a(n+1)}) + A_2 y_l(k_a r_{a(n+1)})] = k_b [B_1 j_l(k_b r_{a(n+1)}) + B_2 y_l(k_b r_{a(n+1)})] \quad (5.99)$$

y de la condición (5.82) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{k_a}{\mu_a} \partial_r (r R_{a,l}(r)) \Big|_{r_{a(n+1)}} &= \frac{k_b}{\mu_b} \partial_r (r R_{b,l}(r)) \Big|_{r_{a(n+1)}} & (5.100) \\
\frac{k_a}{\mu_a} A_1 \left[j_l(k_a r_{a(n+1)}) + r_{a(n+1)} \left(\frac{l}{r_{a(n+1)}} j_l(k_a r_{a(n+1)}) - k_a j_{l+1}(k_a r_{a(n+1)}) \right) \right] \\
+ \frac{k_a}{\mu_a} A_2 \left[y_l(k_a r_{a(n+1)}) + r_{a(n+1)} \left(\frac{l}{r_{a(n+1)}} y_l(k_a r_{a(n+1)}) - k_a y_{l+1}(k_a r_{a(n+1)}) \right) \right] \\
= \\
\frac{k_b}{\mu_b} B_1 \left[j_l(k_b r_{a(n+1)}) + r_{a(n+1)} \left(\frac{l}{r_{a(n+1)}} j_l(k_b r_{a(n+1)}) - k_b j_{l+1}(k_b r_{a(n+1)}) \right) \right] \\
+ \frac{k_b}{\mu_b} B_2 \left[y_l(k_b r_{a(n+1)}) + r_{a(n+1)} \left(\frac{l}{r_{a(n+1)}} y_l(k_b r_{a(n+1)}) - k_b y_{l+1}(k_b r_{a(n+1)}) \right) \right]
\end{aligned}$$

de forma que se tenga

$$\begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{a(n+1)}) \\ R'_{a,l}(r_{a(n+1)}) \end{pmatrix} = M_4 \begin{pmatrix} R_{b,l}(r_{a(n+1)}) \\ R'_{b,l}(r_{a(n+1)}) \end{pmatrix} \quad (5.101)$$

de la ec. (5.92) se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{b,l}(r_{a(n+1)}) \\ R'_{b,l}(r_{a(n+1)}) \end{pmatrix} = T_2(r_{a(n+1)}) \begin{pmatrix} R_{b,l}(r_{bn}) \\ R'_{b,l}(r_{bn}) \end{pmatrix} \quad (5.102)$$

ahora, de la ec.(5.96) se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{b,l}(r_{bn}) \\ R'_{b,l}(r_{bn}) \end{pmatrix} = M_3^{-1} \begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{bn}) \\ R'_{a,l}(r_{bn}) \end{pmatrix} \quad (5.103)$$

combinando las ecs. (5.102) y (5.103) se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{b,l}(r_{a(n+1)}) \\ R'_{b,l}(r_{a(n+1)}) \end{pmatrix} = T_2(r_{a(n+1)}) M_3^{-1} \begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{bn}) \\ R'_{a,l}(r_{bn}) \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

por la ec. (5.97)

$$\begin{pmatrix} R_{b,l}(r_{a(n+1)}) \\ R'_{b,l}(r_{a(n+1)}) \end{pmatrix} = T_2(r_{a(n+1)}) M_3^{-1} T_1(r_{bn}) \begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{an}) \\ R'_{a,l}(r_{an}) \end{pmatrix} \quad (5.105)$$

Lo que permite escribir la matriz de transferencia del modelo a partir de todo lo anterior como

$$\begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{a(n+1)}) \\ R'_{a,l}(r_{a(n+1)}) \end{pmatrix} = M_4 T_2(r_{a(n+1)}) M_3^{-1} T_1(r_{bn}) \begin{pmatrix} R_{a,l}(r_{an}) \\ R'_{a,l}(r_{an}) \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

Lo que representa una relacion de recurrencia cabe destacar que a diferencia del modelo unidimensional ahora se tienen funciones de Bessel esféricas lo que significa que cada matriz está escrita en términos de la posición de la barrera y todas las matrices serán distintas entre sí.

Conclusiones

Esta tesis constituye un estudio preliminar de la propagación de ondas electromagnéticas en una estructura desordenada de multicapas binarias esféricas. La tesis se divide en dos partes: En la primera una se introducen los sistemas desordenados y los métodos analíticos que se usan en el estudio de los principales modelos unidimensionales con desorden débil. La segunda parte representa el trabajo innovador, donde se describe el problema planteado y se presentan los resultados preliminares obtenidos. A continuación se presentan los resultados conforme al desarrollo del trabajo.

En lo correspondiente a la introducción de los sistemas desordenados se abordaron conceptos fundamentales referentes a sistemas cristalinos y sistemas desordenados, lo que motivo a presentar los elementos de la teoría de probabilidad necesarios para el planteamiento y estudio de modelos unidimensionales con desorden.

Se presentaron los conceptos de localización, la teoría del único parámetro de escala, el teorema de Furstenberg, la conjetura de Borland y se desarrolló el método del mapa hamiltoniano para el modelo de Anderson 1D que permite obtener el exponente de Lyapunov del sistema en el caso de desorden compositivo en el régimen débil sin correlaciones, resultado conocido como la fórmula de Thoules, y se introdujeron las variables acción-ángulo con las que se reprodujo la expresión para la longitud de localización en el caso de desorden correlacionado.

Se estudió con detalle el modelo de Kronig-Penney 1D con desordenes compositivo y estructural, donde se reprodujo la fórmula analítica para el cálculo del exponente de Lyapunov en el caso sin correlaciones, y en base a [4] se construyó una fórmula para el caso de los desordenes correlacionados, se incluye el análisis numérico de [4] para correladores independientes y cruzados, y se observan sus efectos en la longitud de localización.

Posteriormente se estudió el modelo 1D de multicapas binarias para estructuras

en promedio periódicas, donde se consideró desorden estructural, siguiendo [4]. Para este modelo se estudió la propagación de ondas planas monocromáticas a través de la estructura considerando los índices de refracción de cada medio y se analizaron de las condiciones de frontera según las ecuaciones de Maxwell. Para el caso sin desorden se obtuvo la relación de dispersión dada por la ec. (3.20) característica de los modelos del tipo Kronig-Penney que establece una relación entre las ondas de Bloch periódicas y los autovalores de las energías. Para el régimen del desorden débil se generalizó el método del mapa hamiltoniano y se reprodujeron los resultados de [4] en términos del mapa sin desorden lo que permitió encontrar una expresión del exponente de Lyapunov para el modelo con correlaciones siguiendo [4].

Para la parte novedosa de esta tesis se trabajó con un modelo de multicapas binarias con simetría esférica que admite desorden estructural variando aleatoriamente el espesor de las capas de un cascarón al otro. La simetría esférica permitió construir los campos electromagnéticos para una onda esférica monocromática, mediante un potencial escalar ψ que constituye la solución a la ec. escalar de Helmholtz en coordenadas esféricas, conocidos como potenciales de Debye [17, 5].

Al analizar las condiciones de frontera de los campos electromagnéticos entre los dos medios se redujo el estudio de la propagación de ondas esféricas en esta estructura al análisis de la propagación en la variable radial del campo escalar ψ . Lo que permite generalizar los métodos para modelos unidimensionales con desorden

La estructura espacial de la propagación se obtuvo por medio de la técnica de las matrices de transferencia, que permite calcular el valor de la variable radial del campo ψ y de su derivada en la frontera de la capa $(n + 1)$ -ésima en función de los valores correspondientes en la frontera en la n -ésima capa. En la tesis se ha obtenido una expresión analítica para esta matriz de transferencia, lo que posteriormente permitirá determinar las propiedades de transmisión y localización de las ondas electromagnéticas a través de una estructura formada por N bicapas por medio del análisis de la matriz de transferencia global .

Bibliografía

- [1] Anderson P.W. (1958). *Absence of diffusion in certain random lattices* Phys. Rev. 109. pp. 1492-1505
- [2] Lagendijk A., van Tiggelen B. & Wiersma D. (agosto,2009). *Fifty years of Anderson Localization* Physics today. pp. 24-29.
- [3] Aspect A. & Inguscio M. (agosto,2009). *Anderson Localization of ultracold atoms* Physics today. pp. 30-34.
- [4] Izrailev F.M, Krokhin A.A. & Makarov N.M. (2011) *Anomalous localization in low-dimensional systems with correlated disorder* Physics Reports 512. pp.125-254.
- [5] Panofsky W. & Phillips M. (1955) *Classical electricity and magnetism*. United States of America: Addison-Wesley
- [6] Grosso G. & Pastori G. (2003) *Solid State Physics*. Academic press.
- [7] Hellmut j.(1974).*Crystal physics. Macroscopic Physics of Anisotropic Solids*
- [8] Feng D. & Jin G.(2005).*Introduction to Condensed Matter Physics, Vol. 1*
- [9] Kronig R. de L. & Penney W.G. (1931) *Quantum Mechanics of Electrons in Crystal Lattices* Proc. R. Soc. Lond. 130. pp.499-513.
- [10] Kramer B. & MacKinnon A. (1993) *Localization: theory and experiment* Rep. Prog. Phys. 56. pp 1469-1564.
- [11] Lee P. & Ramakrishnan T.V. (1985) *Disordered electronic systems* Rev. Mod. Phys. 57. pp. 287-337.
- [12] Imry Y. (2002) *Introduction to Mesoscopic Physics*. Mesoscopic physics and nanotechnology. Oxford University Press

-
- [13] Borland R. E. (1963) *The nature of the electronic states in disordered one-dimensional systems* Proc. R. Soc. Lond. 274. pp 529-545.
- [14] Matsuda H. & Ishii K. (1970) *Localization of normal modes and energy transport in the disordered harmonic chain* Supplement of the Progress of Theoretical Physics. 45. p 57.
- [15] Izrailev F.M. & Krokhin A.A. (1999) *Localization and the mobility edge in one-dimensional potentials with correlated disorder* Phys. Rev. Lett. 82. pp. 4062-4065
- [16] Kuhl, U., Izrailev F. M. & Krokhin A.A. (2000) *Experimental observation of the mobility edge in a waveguide with correlated disorder* Applied Physics Letters. 77(5)pp. 633-635
- [17] Jackson J. (1999) *Classical Electrodynamics. Third edition.* United States of America: John Wiley & Sons. Inc
- [18] Izrailev F. M., Krokhin A.A. & Ulloa S.E. (2001) *Mobility edge in aperiodic Kronig-Penney potentials with correlated disorder: Perturbative approach* Physical Review B. 63. pp. 041102-1-4