

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas.



$$\Gamma_{\mu}(k, p)$$

T E S I S

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en el Área de Física.

Autor:

Rocío Angélica Bermúdez Ramos

Asesor:

Dr. Adnan Bashir

Morelia, Michoacán

Agosto de 2011

Contenido

Introducción	1
Capítulo 1: Ecuaciones de Schwinger-Dyson para QED	3
1.1 El propagador del electrón	3
1.1.1 El propagador del fotón y la ecuación para el vértice	6
1.1.2 Sobre las ESD	7
1.2 Forma analítica del propagador	8
1.2.1 Forma de $S(p)$	8
1.2.2 Identidades de Ward-Takahashi	9
1.3 Aproximación <i>quenched</i>	10
1.4 Aproximación del vértice desnudo	12
1.4.1 Ecuación para $F(p)$	12
1.4.2 Rotación de Wick	13
1.4.3 Integración angular en cuatro dimensiones	14
1.4.4 Ecuación para $M(p)$	15
Capítulo 2: Rompimiento dinámico de la simetría quiral	17
2.1 Simetría quiral	17
2.1.1 Hadrones	20
2.2 Ejemplo: vértice desnudo	21
2.2.1 Análisis de bifurcaciones	22
Capítulo 3: Vértice para QED	25
3.1 Requerimientos del vértice	25
3.2 Vértice longitudinal	26

3.3	Vértice transversal	27
3.3.1	Propiedades de τ_i	28
3.3.2	Forma de τ_i	30
3.4	Ecuaciones para $F(p)$ y $M(p)$	31
3.4.1	Ecuación para $F(x)$	32
3.4.2	Ecuación para $M(x)$	34
3.5	Solución multiplicativamente renormalizable	37
3.5.1	Solución para $F(x)$	38
3.5.2	Solución para $M(x)$	40
3.6	Ejemplos de <i>ansatz</i>	41
3.6.1	Vértice de Curtis-Pennington	41
3.6.2	Vértice de Bashir-Pennington	45
Capítulo 4: Propuesta para el vértice		53
4.1	Momento magnético anómalo para <i>quarks</i>	53
4.1.1	Sobre la base de Chang, Liu y Roberts	55
4.2	Forma matemática	55
4.2.1	Ecuación para $F(x)$	56
4.2.2	Agregando τ_5	56
4.2.3	Agregando τ_4	58
4.2.4	Ecuaciones finales	60
4.3	Los términos con τ_1 y τ_7	63
4.3.1	El término de τ_1	64
4.3.2	El término de τ_7	64
4.3.3	Resultados para los términos con momento magnético anómalo	65
Conclusiones		67
Apéndice A: Integrales angulares		70
Apéndice B: Integrales radiales		71
Apéndice C: Propiedades de las funciones ψ		73
Referencias		74

Introducción

“All mass is interaction”

Richard P. Feynman (1950)

Vivimos en un universo masivo: todo lo que existe y se puede tocar tiene masa, desde el electrón hasta los inmensos cúmulos de galaxias. Se trata de algo tan natural que a veces ignoramos la complejidad y los misterios asociados a la materia. Este trabajo trata justamente de uno de esos misterios.

El cuerpo del ser humano esta formado por sistemas de órganos que, a su vez, estan formados por tejidos. Los tejidos son un conjunto organizado de células y estas están compuestas por moléculas que están formadas por átomos. Pese a su raíz etimológica, los átomos tienen electrones, protones y neutrones. El electrón es una partícula fundamental, es decir, no esta formada por otras partículas, mientras que cada protón y cada neutrón son estructuras de *quarks*, los cuales sí son fundamentales.

Pensemos en una linda señorita de $1.52m$ de altura y complexión delgada. En una báscula, su peso es de alrededor de $50kg$. Sin embargo, si sumáramos la masa de cada *quark* y electrón que la forman, no seríamos capaces de llegar ni al kilogramo. Aunque suene contraintuitivo este resultado, en realidad se trata de lo más natural.

La razón se explica a través de la generación dinámica de masas. Los elementos del núcleo atómico o nucleones son partículas compuestas por tres *quarks*, es decir, bariones. Un nucleón tiene una masa aproximada de $1GeV$ mientras que la de cada *quark* es aproximadamente de $3MeV$, esto es que la suma de las masas de los *quarks* es del orden de $10^{-2}GeV$. Entonces, en algún momento de la interacción entre *quarks* vemos la aparición de masa de la nada, en el sentido de que ya hemos sumado toda la masa que hay.

Si bien se dice que el mecanismo de Higgs está relacionado con el origen de la masa, el proceso que este describe es un rompimiento espontáneo de simetría. Cuando hablamos de generación dinámica de masa implicamos un rompimiento dinámico de la simetría que, a diferencia del antes mencionado, involucra interacciones y procesos entre elementos del sistema, sin necesidad de campos externos.

Así, en esta tesis desarrollaremos un modelo para la descripción de la generación dinámica de masas, enfocándonos en el término de interacción. Nuestra meta será buscar la invariancia de norma del acoplamiento, en el punto donde hay un cambio de fase. La estructura que presentamos está dada de la manera que se describe a continuación.

En el primer capítulo de esta tesis explicaremos el formalismo a utilizar, que consiste en las *ecuaciones de Schwinger-Dyson* (ESD), aplicado en el contexto de la *electrodinámica cuántica* (QED, por sus siglas en inglés). Describiremos los elementos involucrados e introduciremos el proceso a seguir en el desarrollo de las ecuaciones que necesitaremos más adelante.

En el segundo capítulo presentaremos una breve descripción de lo que es simetría quiral y su rompimiento. Explicaremos cómo la interacción *quark-gluón* se traduce en generación dinámica de masas y daremos un ejemplo. Además explicaremos por qué, pese a que los fenómenos que queremos explicar están en el campo de la *cromodinámica cuántica* (QCD, por sus siglas en inglés), el tratamiento lo hacemos en una aproximación de QED.

Como mencionamos, la masa se genera mediante interacciones y esto, matemáticamente, se describe en lo que llamamos *vértice*. Así es como en el tercer capítulo hablaremos de la estructura que debe tener este vértice y su efecto en las observables físicas, específicamente, en el acoplamiento. Terminaremos con algunos ejemplos de la literatura y los compararemos considerando sus resultados.

En el último capítulo veremos cómo mejorar los resultados hasta ahora encontrados en un *ansatz* que incorpora información de la fenomenología, la invariancia de norma y que cumple con los requisitos que se presentan en los capítulos anteriores.

Capítulo 1

Ecuaciones de Schwinger-Dyson para QED

enemos que una *teoría cuántica de campos* (QFT, por sus siglas en inglés) queda definida completamente por un conjunto completo de ecuaciones integrales acopladas llamadas ecuaciones de Schwinger-Dyson. Estas ecuaciones corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange en este contexto y relacionan diferentes funciones de Green entre sí [1, 2].

Las ESD incluyen las ecuaciones de Bethe-Salpeter. Estas ecuaciones describen la dispersión relativista de dos partículas y sus estados ligados. Similarmente, los estados ligados de tres partículas se pueden estudiar a través de las ecuaciones de Faddeev.

1.1 El propagador del electrón

Denotamos como $S(p)$ al propagador completo del electrón, mientras que podemos llamar propagador desnudo a $S^0(p)$, y la representación como diagrama de Feynman de estos elementos está dada en la figura 1.1.

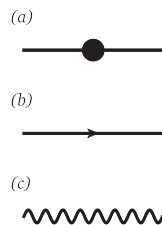


Fig. 1.1: Representaciones como diagramas de Feynman de (a) un propagador completo, (b) un propagador desnudo y (c) un fotón desnudo.

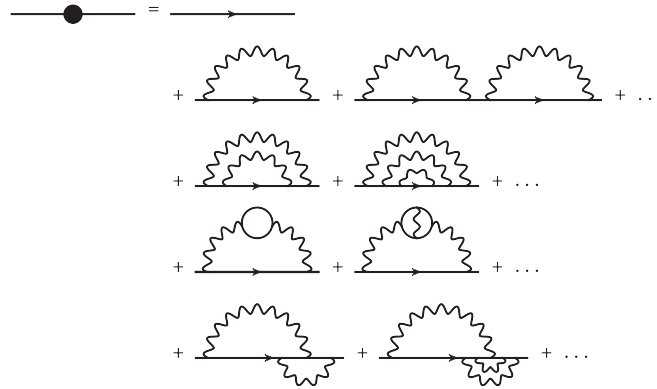


Fig. 1.2: Términos en la serie perturbativa del propagador del electrón.

Aunque la derivación de las ESD es independiente del valor del acoplamiento α , es más intuitivo deducirlas por argumentos perturbativos. Así, el propagador del electrón se puede escribir como una serie de correcciones al propagador desnudo, como en la figura 1.2, donde la interacción está mediada por el fotón.

En 1949, Freeman Dyson [1], al darse cuenta de que existía una cierta regularidad en las correcciones del propagador desnudo, las agrupó de la siguiente forma:

- a) correcciones de arcoíris que corrigen al propagador interno,
- b) correcciones para el fotón,
- c) correcciones al vértice,
- d) re-correcciones, que son repeticiones y combinaciones de todas las posibles correcciones.

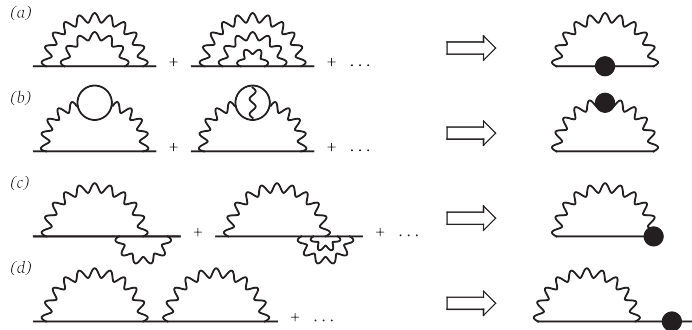
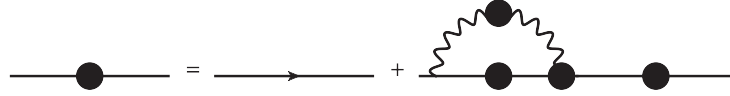


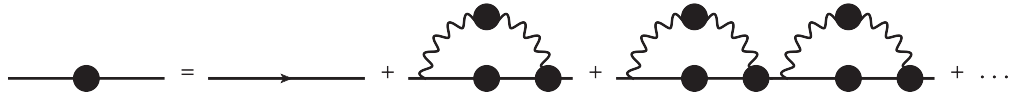
Fig. 1.3: Correcciones.

Haciendo uso de esto, podemos simplificar los diagramas en la ecuación de la figura 1.2 de la forma siguiente



donde la extensión al final del término de correcciones corresponde a las re-correcciones. Esto significa que podemos tener todas las posibilidades que para el caso del mismo propagador completo.

Expandiendo este último término, tenemos una ecuación como sigue:



Sea $\Sigma(p)$ el término de correcciones.

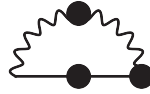


Fig. 1.4: $\Sigma(p)$

Entonces, podemos escribir la ecuación diagramática anterior como

$$\begin{aligned}
 S(p) &= S^0(p) + S^0(p)\Sigma(p)S^0(p) + S^0(p)\Sigma(p)S^0(p)\Sigma(p)S^0(p) + \dots \\
 &= S^0(p) + S^0(p)\Sigma(p)\underbrace{[S^0(p) + S^0(p)\Sigma(p)S^0(p) + \dots]}_{S(p)} \\
 &= S^0(p) + S^0(p)\Sigma(p)S(p)
 \end{aligned}$$

Multiplicando por $S^{0-1}(p)$ y luego por $S^{-1}(p)$, tenemos que

$$S^{-1}(p) = S^{0-1}(p) - \Sigma(p) \tag{1.1}$$

Esta misma ecuación puede ser escrita de forma diagramática como en la figura siguiente, que es la ESD para el electrón.

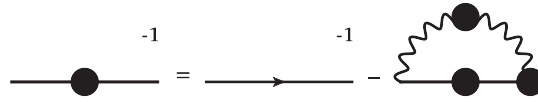


Fig. 1.5: Ecuación de Schwinger-Dyson para el electrón en QED.

En el marco de QED, esta misma ecuación se puede aplicar a un *quark*, de tal forma que esta ESD es válida para todo fermión cargado electromagnéticamente. De manera similar podemos obtener una ESD para QCD, tomando al *quark* y al gluón como partícula y mediador, respectivamente. Esto es,

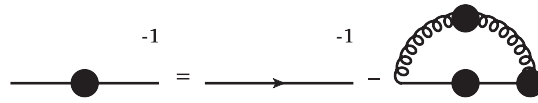


Fig. 1.6: Ecuación de Schwinger-Dyson para un quark en QCD.

Y podemos ver que ambas interacciones son estructuralmente iguales, pero de eso hablaremos en el siguiente capítulo.

1.1.1 El propagador del fotón y la ecuación para el vértice

Al igual que para el electrón, podemos tener correcciones para el fotón y para la interacción, la cual esta descrita en el vértice. De esta forma tenemos tres ESD acopladas que describen directamente la dinámica de un fermión, en QED, y se representan de la siguiente forma

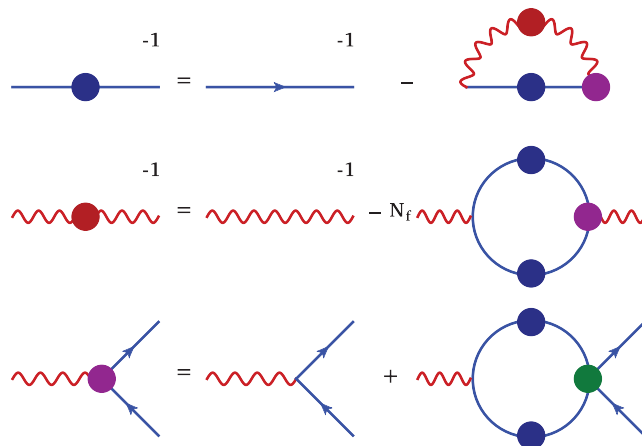


Fig. 1.7: Ecuaciones de Schwinger-Dyson para el propagador del electrón, el propagador del fotón y la ecuación del vértice.

En lo anterior, N_f es el número de sabores (cuantos tipos de fermiones son). Este número es una constante que no cambia significativamente la física del sistema. Para el caso de QED, podemos hacer $N_f = 0$ que es la *aproximación quenched*.

1.1.2 Sobre las ESD

Tomamos las siguientes consideraciones:

1. Las ESD son infinitas en número.
2. Su estructura es tal que la función de n -puntos está relacionada con la función de $n + 1$ -puntos; la función de $n + 1$ -puntos está relacionada con la de $n + 2$ -puntos y así sucesivamente.
3. Hemos visto la “derivación” de las ESD a través de una expansión perturbativa del propagador del electrón, pero la derivación de estas ecuaciones, a través de la formulación de integrales de caminos, no requiere la aproximación de acoplamiento pequeño. Por lo tanto, las ESD son **no perturbativas**.
4. Como las ecuaciones son infinitas, tenemos que truncarlas de alguna manera para poder reducir este número de ecuaciones a uno que sea resoluble. Una truncación es la serie perturbativa cuando nuestro acoplamiento $\alpha \ll 1$ ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137}$).
5. Cuando $\alpha \sim 1$, necesitamos otra truncación. Esto ocurre para ciertos fenómenos físicos, además de ser útil para algunas teorías, por ejemplo:
 - (a) Nos lleva a un modelo simple para estudiar QCD. Por ejemplo, el vértice de electrón-fotón tiene una estructura muy parecida al vértice de *quark*-gluón.
 - (b) En el estudio de dispersiones de iones pesados tenemos grupos del orden de 100 nucleones que nos lleva a una $\alpha_{eff} \sim 1$.
 - (c) Cuando hay campos magnéticos externos presentes, efectos no perturbativos se pueden presentar aun cuando $\alpha \ll 1$. Estos campos se pueden generar en colisiones de iones pesados, estrellas compactas y el universo temprano.

1.2 Forma analítica del propagador

Identificando los momentos en la ESD para el electrón, podemos escribirla como en la siguiente figura

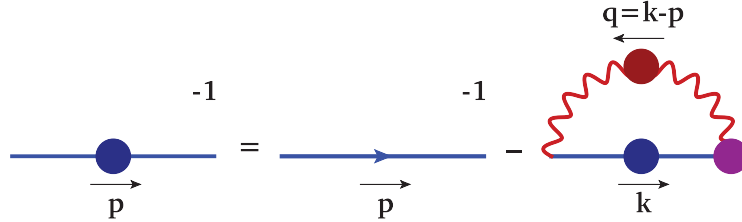


Fig. 1.8: ESD para el propagador del electrón, con sus momentos.

Usando las reglas de Feynman

$$-iS^{-1}(p) = -iS^{0-1}(p) - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [-ie\gamma^\mu][iS(k)][-ie\Gamma^\nu(k, p)][-i\Delta_{\mu\nu}(q)]$$

donde $q = k - p$. Reescribiendo,

$$S^{-1}(p) = S^{0-1}(p) + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S(k) \Gamma^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q) \quad (1.2)$$

donde, además, tomamos orden contrareloj y se resuelve para $S(p)$ y $S(k)$, obteniendo así 16 ecuaciones.

1.2.1 Forma de $S(p)$

Buscando elementos que conserven paridad, $S(p)$ puede depender de p^μ , γ^μ , $g^{\mu\nu}$, p^2 , m , etc. Así, la estructura más general para $S(p)$ es

$$\begin{aligned} S(p) &= A \gamma_\mu p^\mu + \text{“constantes”} \\ &= A(p^2) \not{p} + B(p^2) \end{aligned}$$

Una expresión equivalente¹ es

$$S(p) = \frac{F(p^2)}{\not{p} - M(p^2)} \quad (1.3)$$

¹Son equivalentes dado que podemos llegar de una a la otra, como sigue

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{F(p^2)}{\not{p} - M(p^2)} \frac{\not{p} + M(p^2)}{\not{p} + M(p^2)} = \frac{F(p^2) (\not{p} + M(p^2))}{p^2 - M^2(p^2)} \\ &= \underbrace{\frac{F(p^2)}{p^2 - M^2(p^2)}}_{A(p^2)} \not{p} + \underbrace{\frac{F(p^2)M(p^2)}{p^2 - M^2(p^2)}}_{B(p^2)} \end{aligned}$$

la cual nos es más conveniente dado que conserva la forma del propagador desnudo

$$S^0(p) = \frac{1}{\not{p} - m} \quad (1.4)$$

Como mencionamos anteriormente, en principio tenemos 16 ecuaciones pero, en realidad, solo tendremos 2 ecuaciones independientes. Estas ecuaciones se pueden obtener apartir de la traza. Esto es

$$\begin{aligned} i) \text{Tr}[\not{p} ec.] &\rightarrow F(p^2) \\ ii) \text{Tr}[ec.] &\rightarrow M(p^2) \end{aligned}$$

Es decir, la primera nos da una ecuación para la renormalización de la función de onda $F(p^2)$, mientras que la segunda es para la función de masa $M(p^2)$.

1.2.2 Identidades de Ward-Takahashi

Las identidades de Ward-Takahashi (IWT) son relaciones no perturbativas que existen entre diferentes funciones de Green y son consecuencia de la invariancia de norma. Una de estas identidades es:

$$(k-p)_\mu \Gamma^\mu(k,p) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p) \quad (1.5)$$

donde $q_\mu = (k-p)_\mu$, mientras que $\Gamma^\mu(k,p)$ es el vértice completo de la interacción electrón-fotón.

A nivel árbol, esta identidad nos da

$$\begin{aligned} q_\mu \gamma^\mu &= S^{0^{-1}}(k) - S^{0^{-1}}(p) \\ &= (\not{k} - m) - (\not{p} - m) \\ &= \not{k} - \not{p} \end{aligned}$$

Además existe una identidad para el propagador del fotón que dice

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = \frac{G(q^2)}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \quad (1.6)$$

pero hablaremos de ella en la próxima sección.

Para reducir el número de problemas al momento de resolver las ESD, es imperativo asegurar la satisfacción de las IWT. Las razones por las cuales hacemos uso de estas identidades son las siguientes:

1. Vamos a utilizar corte ultravioleta para analizar las integrales porque las ESD son difíciles de resolver usando la regularización dimensional.
2. El corte ultravioleta viola la simetría de norma, mientras que la regularización dimensional la respeta.
3. La simetría de norma se asegura con las identidades de Ward.
4. Si usamos las identidades, no tendremos problemas con la simetría de norma ya que las utilizamos antes de realizar el corte.
5. En $d = 3$ no hay divergencias, aunque este trabajo se desarrollará en $d = 4$.

1.3 Aproximación *quenched*

Para el propagador fermiónico en QED, tomamos $N_f = 0$ en la ecuación para el propagador del fotón (ver figura 1.7), es decir, el propagador del fotón queda

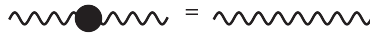


Fig. 1.9: Aproximación *quenched*.

esto es,

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu\nu}(q) &= \Delta_{\mu\nu}^0(q) = \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \\ &= \Delta_{\mu\nu}^T(q) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}\end{aligned}$$

donde $\Delta_{\mu\nu}^T(q) = \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]$ es la parte transversa del propagador fotónico.²

Así que,

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu\nu}^T(q) &\quad \text{es la parte transversa} \\ \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} &\equiv \Delta_{\mu\nu}^L(q) \quad \text{es la parte longitudinal}\end{aligned}$$

²Si al multiplicar (con el producto interior) dos cantidades da cero, entonces son transversales. En este caso multiplicamos por q^μ , así

$$q^\mu \Delta_{\mu\nu}^T(q) = \frac{1}{q^2} \left[q^\mu g_{\mu\nu} - \frac{q^\mu q_\mu q_\nu}{q^2} \right] = \frac{1}{q^2} [q_\nu - q_\nu] = 0$$

y es transverso al momento del fotón, es decir, a su dirección de movimiento.

Hay que hacer notar que la identidad de Ward para el fotón, ecuación (1.6), nos dice que

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = \frac{G(q^2)}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}$$

donde $G(q^2) = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$, lo cual indica que la parte longitudinal es no perturbativa, es decir, las correcciones son sólo en la parte transversa. Entonces aquí es claro que estamos trabajando a nivel árbol.

En la aproximación *quenched* tenemos

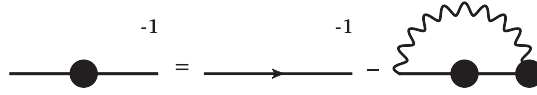


Fig. 1.10: Propagador del electrón en la aproximación *quenched*.

Esto es,

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= S^{0^{-1}}(p) + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S(k) \Gamma^\nu(k, p) \left[\Delta_{\mu\nu}^T(q) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right] \\ &= S^{0^{-1}}(p) + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S(k) \Gamma^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}^T(q) \\ &\quad + ie^2 \xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu}{q^4} \gamma^\mu S(k) [q_\nu \Gamma^\nu(k, p)] \end{aligned}$$

Usando la ecuación (1.5) sobre la identidad de Ward que relaciona al propagador fermiónico con el vértice, tenemos

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= S^{0^{-1}}(p) + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S(k) \Gamma^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}^T(q) \\ &\quad + ie^2 \xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} - ie^2 \xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} S(k) S^{-1}(p) \end{aligned}$$

Ahora, observando la segunda integral, podemos reescribirla en términos de $q = k - p$, lo cual nos da un factor de

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} = 0$$

porque es impar, entonces nos queda

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= S^{0^{-1}}(p) + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S(k) \Gamma^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}^T(q) \\ &\quad - ie^2 \xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} S(k) S^{-1}(p) \end{aligned}$$

(1.7)

1.4 Aproximación del vértice desnudo

Llamamos vértice desnudo al elemento a nivel árbol en el desarrollo perturbativo del vértice. Esto es,

$$\Gamma^\mu(k, p) = \gamma^\mu$$

para obtener la siguiente ecuación diagramática



Fig. 1.11: Propagador del electrón en la aproximación arcoíris.

Aquí, la aproximación *quenched* y vértice desnudo nos dan la *aproximación arcoíris*. Entonces,

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= S^{0-1}(p) + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S(k) \gamma^\nu \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \\ &\quad - ie^2 \xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} S(k) S^{-1}(p) \end{aligned}$$

Usando (1.3) y (1.4), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\not{p} - M(p^2)}{F(p^2)} &= \not{p} - m + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} \gamma^\mu \frac{F(k^2)}{\not{k} - M(k^2)} \gamma_\mu \\ &\quad - ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} \frac{F(k^2)}{\not{k} - M(k^2)} \not{q} \\ &\quad - ie^2 \xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} \frac{F(k^2)}{\not{k} - M(k^2)} \frac{\not{p} - M(p^2)}{F(p^2)} \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \frac{\not{p} - M(p^2)}{F(p^2)} &= \not{p} - m + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k^2)}{q^2(k^2 - M^2(k^2))} \gamma^\mu (\not{k} + M(k^2)) \gamma_\mu \\ &\quad - ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k^2)}{q^4(k^2 - M^2(k^2))} \not{q} (\not{k} + M(k^2)) \not{q} \\ &\quad - \frac{ie^2 \xi}{F(p^2)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k^2)}{q^4(k^2 - M^2(k^2))} \not{q} (\not{k} + M(k^2)) (\not{p} - M(p^2)) \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.4.1 Ecuación para $F(p)$

Ahora multiplicamos a la ecuación (1.8) por el lado izquierdo con \not{p} y tomamos la traza para obtener una ecuación para $F(p)$. Hasta ahorita no hemos especificado la dimensión de nuestro

espaciotiempo en el desarrollo matemático. Por ello, a partir de aquí debemos especificarlo para poder utilizar correctamente las propiedades de las trazas de las γ . Tomando $d = 4$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{4p^2}{F(p^2)} &= 4p^2 + ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^2(k^2 - M^2(k^2))} \text{Tr} [\not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma_\mu] \\ &\quad - ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^4(k^2 - M^2(k^2))} \text{Tr} [\not{p}\not{q}\not{k}\not{q}] \\ &\quad - \frac{ie^2\xi}{F(p^2)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^4(k^2 - M^2(k^2))} \text{Tr} [\not{p}\not{q}\not{k}\not{p} - \not{p}\not{q}M(k^2)M(p^2)] \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.4.2 Rotación de Wick

En el espacio de Minkowski $(+, -, -, -)$, tenemos que un cuadrivector $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ tiene como norma $x^2 = x^{0^2} - \vec{x}^2$. Dependiendo del signo de la norma podemos identificar lo siguiente

$$\begin{aligned} x^2 > 0 &\Rightarrow \textit{time-like} \\ x^2 < 0 &\Rightarrow \textit{space-like} \end{aligned}$$

Le llamamos rotación de Wick a la rotación de la componente temporal del momento hacia el eje imaginario, es decir, $p^0 \rightarrow ip^0$. De esta forma

$$p^2 = -p^{0^2} - \vec{p}^2 = -p_E^2$$

y tomamos $p_E^2 > 0$, entonces p^2 es *space-like*. La rotación de Wick implica que trabajamos en un espaciotiempo tipo euclidiano, así que podemos decir que estaremos trabajando en el espacio de Minkowski para momentos *space-like*.

Aplicamos la rotación de Wick a nuestras ecuaciones y obtenemos

$$\begin{aligned} k^2 &\rightarrow -k_E^2 = -k^2 \\ p^2 &\rightarrow -p_E^2 = -p^2 \\ k \cdot p &\rightarrow -k \cdot p \\ d^4k &\rightarrow id^4k \end{aligned}$$

Haciendo uso de las propiedades de las trazas³ en $d = 4$, tenemos que la ecuación (1.9) queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(p^2)} &= 1 + \frac{\alpha}{2\pi^3 p^2} \int d^4 k \frac{F(k^2) k \cdot p}{q^2 (k^2 - M^2(k^2))} \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi^3 p^2} \int d^4 k \frac{F(k^2)}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))} [2p \cdot q k \cdot q - k \cdot p q^2] \\ &+ \frac{\alpha \xi}{4\pi^3} \frac{1}{p^2 F(p^2)} \int d^4 k \frac{F(k^2)}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))} [p^2 k \cdot q + M(k^2) M(p^2) p \cdot q] \end{aligned} \quad (1.10)$$

con $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

Para hacer la integración de (1.10), primero notamos que podemos reescribir las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} 2p \cdot q k \cdot q - k \cdot p q^2 &= -2k^2 p^2 + (k^2 + p^2) k \cdot p \\ p^2 k \cdot q + M(k^2) M(p^2) p \cdot q &= p^2 (k^2 - k \cdot p) + M(k^2) M(p^2) (k \cdot p - p^2) \end{aligned}$$

para tener las integrales solo en términos de k y p .

1.4.3 Integración angular en cuatro dimensiones

Por la estructura cuatridimensional de nuestro espacio, haremos un cambio de coordenadas a hiper-esféricas en cuatro dimensiones, con

$$k^\mu = \left(k^0, \vec{k} \right) = (k \cos \psi, k \sin \psi \sin \theta \cos \varphi, k \sin \psi \sin \theta \sin \varphi, k \sin \psi \cos \theta) \quad (1.11)$$

donde $0 \leq k < \infty$, $0 \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Con esto, el jacobiano queda

$$d^4 k = \frac{1}{2} k^2 dk^2 \sin^2 \psi d\psi \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1.12)$$

3

- $Tr [\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n}] = 0$ si n es impar
- Por lo anterior, $Tr [\not{p}] = Tr [p_\mu \gamma^\mu] = 0$
- $\gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu = -2\not{k} \Rightarrow Tr [\not{p} \not{k}] = 4p \cdot k$
- $Tr [\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}] = 4[a \cdot b c \cdot d - a \cdot c b \cdot d + a \cdot d b \cdot c]$

Por otro lado, dado que p es un momento externo tenemos libertad para elegirlo. Así que escogemos

$$p^\mu = (p, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad k \cdot p = kp \cos \psi$$

y ahora p y k son números y no vectores. Además, tendremos expresiones que son independientes de los ángulos (θ, φ) , por lo que podemos hacer esta integración angular usando que

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \quad (1.13)$$

Al final, tendremos una expresión en donde podemos identificar las integrales del tipo

$$I_{nm} = \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \frac{(k \cdot p)^n}{(q^2)^m} \quad (1.14)$$

que se pueden resolver usando el apéndice A.

Además, hacemos el corte ultravioleta. Esto significa que la integración no es hasta ∞ sino hasta cierto valor Λ^2 , donde $\Lambda \rightarrow \infty$.

Haciendo uso de todo lo mencionado en esta sección, podemos reescribir la ecuación (1.10) de la siguiente forma

$$F(p^2) = 1 + \frac{\alpha\xi}{2\pi p^4} \int_0^{p^2} dk^2 \frac{F(k^2)M(k^2)M(p^2)}{k^2 - M^2(k^2)} - \frac{\alpha\xi}{4\pi} \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 - M^2(k^2)} \quad (1.15)$$

1.4.4 Ecuación para $M(p)$

De manera similar al desarrollo en la sección anterior, para obtener una ecuación para $M(p)$ tomamos directamente la traza de la ecuación (1.8)⁴, esto es

$$\begin{aligned} \frac{4M(p^2)}{F(p^2)} &= 4m - ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)M(k^2)}{q^2(k^2 - M^2(k^2))} Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu] \\ &+ ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)M(k^2)}{q^4(k^2 - M^2(k^2))} Tr[\not{q}\not{q}] \\ &+ \frac{ie^2\xi}{F(p^2)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^4(k^2 - M^2(k^2))} \{M(k^2)Tr[\not{q}\not{p}] - M(p^2)Tr[\not{q}\not{k}]\} \end{aligned}$$

Haciendo el álgebra correspondiente, podemos simplificar como sigue

$$\begin{aligned} \frac{M(p^2)}{F(p^2)} &= m - 3ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)M(k^2)}{q^2(k^2 - M^2(k^2))} \\ &+ \frac{ie^2\xi}{F(p^2)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^4(k^2 - M^2(k^2))} \{M(k^2)q \cdot p - M(p^2)q \cdot k\} \end{aligned}$$

⁴En la sección 4.1 se multiplicó por \not{p} antes de tomar la traza de la ecuación (1.8).

De forma análoga a la ecuación para $F(p)$, hacemos la rotación de Wick y nos queda

$$\begin{aligned} \frac{M(p^2)}{F(p^2)} &= m + 3e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)M(k^2)}{q^2(k^2 + M^2(k^2))} \\ &\quad - \frac{e^2 \xi}{F(p^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^4(k^2 + M^2(k^2))} \{M(k^2)q \cdot p - M(p^2)q \cdot k\} \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} \frac{M(p^2)}{F(p^2)} &= m + \frac{3\alpha}{4\pi^3} \int d^4 k \frac{F(k^2)M(k^2)}{q^2(k^2 + M^2(k^2))} \\ &\quad - \frac{1}{F(p^2)} \frac{\alpha \xi}{4\pi^3} \int d^4 k \frac{F(k^2)}{q^4(k^2 + M^2(k^2))} \\ &\quad \times \{M(k^2)(k \cdot p - p^2) - M(p^2)(k^2 - p \cdot k)\} \end{aligned}$$

Ahora hacemos el cambio de coordenadas usando las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.13). De esta forma, la ecuación anterior queda como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{M(p^2)}{F(p^2)} &= m + \frac{3\alpha}{2\pi^2} \int_0^\infty dk^2 k^2 \frac{F(k^2)M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \frac{1}{q^2} \\ &\quad - \frac{1}{F(p^2)} \frac{\alpha \xi}{2\pi^2} \int_0^\infty dk^2 k^2 \frac{F(k^2)M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \frac{1}{q^4} \\ &\quad \times \{M(k^2)(k \cdot p - p^2) - M(p^2)(k^2 - p \cdot k)\} \end{aligned}$$

Identificamos las integrales del tipo I_{nm} de la ecuación (1.14) y utilizamos el apéndice A para integrarlas. Haciendo las simplificaciones correspondientes, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{M(p^2)}{F(p^2)} &= m + \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\int_0^{p^2} dk^2 \frac{k^2}{p^2} \frac{F(k^2)M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} + \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{F(k^2)M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{F(p^2)} \frac{\alpha \xi}{4\pi} \left[\int_0^{p^2} dk^2 \frac{k^2}{p^2} \frac{F(k^2)M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} + \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{F(k^2)M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \right] \end{aligned} \tag{1.16}$$

Si resolvemos simultáneamente las ecuaciones (1.15) y (1.16), obtendremos los valores para las funciones F y M en esta aproximación.

Capítulo 2

Rompimiento dinámico de la simetría quiral

La idea de estudiar QED a través de las ESD consiste en usar un formalismo no perturbativo que está basado en las ecuaciones fundamentales de la QED para explicar la generación dinámica de masas. Por ello, en este capítulo estudiaremos el rompimiento de la simetría quiral y su relación con las masas físicas de los electrones. El mecanismo es, cualitativamente, muy parecido al que da masa a las partículas que forman la materia hadrónica, es decir, *quarks*, a través de las interacciones fuertes.

2.1 Simetría quiral

En la mecánica clásica podemos definir la dinámica de un sistema a partir de la función lagrangiana, entonces podemos obtener las ecuaciones de movimiento a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange. De forma similar en QFT podemos encontrar, vía la lagrangiana de QED, ecuaciones de movimiento o funciones de Green.

La lagrangiana de QED contiene información de los fermiones que interactúan a través de fotones. Así, esta función tiene una parte correspondiente a la lagrangiana de Dirac y una parte que corresponde a la lagrangiana de interacciones electromagnéticas y de fotones libres. La lagrangiana de Dirac es

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) \quad (2.1)$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$. Así, las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\psi}} = 0$$

nos llevan a la ecuación de Dirac

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0$$

de tal forma que podemos definir una simetría quiral sobre esta lagrangiana.

Sea $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, con las siguientes propiedades

$$i) \quad \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0 \quad (2.2)$$

$$ii) \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{I} \quad (2.3)$$

es decir, γ^5 es el producto de todas las matrices de Dirac. Entonces podemos definir la transformación

$$\psi \rightarrow e^{i\theta\gamma^5}\psi \quad (2.4)$$

como transformación quiral. Al aplicarla en la lagrangiana de Dirac, asociada a ella tenemos la corriente quiral o corriente vectorial axial $j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ que satisface

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (2.5)$$

y esta corriente se conserva para partículas sin masa, es decir, si $m = 0$. Entonces la simetría quiral es simetría de la lagrangiana de Dirac.

Por otro lado, j_5^μ nos permite definir dos nuevas corrientes como combinaciones lineales de esta con la densidad de corriente eléctrica j^μ , de tal forma que tenemos

$$\begin{aligned} j_L^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi \\ j_R^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \psi \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde j_L^μ y j_R^μ corresponden a las densidades de corriente eléctrica para fermiones izquierdos y derechos, respectivamente. Además, estas corrientes se conservan separadamente si $m = 0$, por lo que la lagrangiana de Dirac tiene una simetría asociada a la conservación de la separación de número para fermiones izquierdos y derechos en una teoría sin masa.

Para entender que significa que la lagrangiana tenga una simetría, específicamente simetría quiral, hagamos la transformación (2.4) sobre la lagrangiana (2.1), considerando que j_5^μ es una corriente de Noether, es decir, la transformación quiral es una transformación continua. De esta

forma, para pequeños cambios en θ , tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \bar{\psi}' (i\cancel{\partial} - m)\psi' \\
&= \psi^\dagger e^{i\theta\gamma_5} \gamma_0 (i\cancel{\partial} - m) e^{i\theta\gamma_5} \psi \\
&= \psi^\dagger (1 - i\theta\gamma_5) \gamma_0 (i\cancel{\partial} - m) (1 + i\theta\gamma_5) \psi \\
&= \bar{\psi} (1 + i\theta\gamma_5) (i\cancel{\partial} - m) (1 + i\theta\gamma_5) \psi \\
&= i\bar{\psi} (1 + i\theta\gamma_5) \cancel{\partial} (1 + i\theta\gamma_5) \psi + m\bar{\psi} (1 + i\theta\gamma_5) (1 + i\theta\gamma_5) \psi \\
&= i\bar{\psi} (1 + \theta^2) \cancel{\partial} \psi + m\bar{\psi} (1 + 2i\theta\gamma_5 - \theta^2) \psi \\
&= i\bar{\psi} \cancel{\partial} \psi + m\bar{\psi} \psi + 2im\theta\bar{\psi}\gamma_5\psi \\
&= \mathcal{L}_D + 2im\theta\bar{\psi}\gamma_5\psi
\end{aligned}$$

Esto nos indica que las lagrangianas difieren por un término con m , es decir, la lagrangiana es invariante ante transformaciones quirales si $m \rightarrow 0$. Por esto, nos referimos a restauración de la simetría quiral cuando tenemos $m = 0$.

En teoría de perturbaciones¹, tenemos que

$$\begin{aligned}
F(p^2) &= 1 + \mathcal{O}(\alpha) \\
M(p^2) &= m(1 + \mathcal{O}(\alpha))
\end{aligned} \tag{2.7}$$

donde esta m es la masa desnuda del fermión en la lagrangiana. Podemos ver que si $m = 0$ entonces $M(p^2) = 0$. Es decir, la restauración de la simetría quiral implica que la función de masa es idénticamente cero. Más aún, la simetría quiral no se rompe dinámicamente a ningún orden en QFT.

La simetría se puede romper de dos formas:

1. Dinámicamente. Esto es, debido a la presencia de interacciones y autointeracciones. En nuestro caso, el rompimiento dinámico de la simetría nos lleva a obtener $M(p^2) \neq 0$, es decir, podemos “obtener” masa aún si empezamos con $m = 0$.
2. Espontáneamente. Esto implica la introducción de un campo escalar externo. Por ejemplo, el mecanismo de Higgs.

¹Esto lo podemos ver en la forma de los propagadores en la sección 1.2.1

Hasta este momento sabemos que la función de masa $M(p^2)$ esta relacionada con la masa física del electrón o, en general, del fermión. La diferencia de esta con la masa de la lagrangiana m se explica mejor en la siguiente sección.

2.1.1 Hadrones

La materia esta compuesta por átomos pero, a nivel más fundamental, los elementos que conforman a los átomos son también compuestos. Así es como, en el modelo estándar, tenemos que los átomos estan formados por fermiones: leptones, que corresponden a los electrones, y *quarks*, que forman a los nucleones. En general, cualquier partícula formada por *quarks* se le llama hadrón. Siendo el núcleo la mayor aportación de masa en un átomo, es natural referirnos a la materia ordinaria como materia hadrónica. Entonces podemos decir que la materia esta compuesta por *quarks*.

Aún así, sabemos que los *quarks* que forman a los nucleones (el *up* y el *down*) tienen masas muy pequeñas en comparación con los nucleones en sí. Se estima [3] que la masa del *quark up* está entre 1.7 y 3.3 *MeV*, mientras que la del *down* esta entre 4.1 y 5.8 *MeV*. En contraste, los nucleones tienen masas de 940 *MeV*. Esta diferencia de masas se explica a través de la generación dinámica de masas.

Como mencionábamos antes, el rompimiento dinámico de la simetría, donde la masa es generada dinámicamente, viene de las interacciones y autointeracciones. En QCD, la interacción fuerte entre *quarks* esta mediada por los gluones, los cuales no tienen masa y tienen carga de color. Asimismo, los gluones están constantemente siendo intercambiados entre los *quarks*, mediante el proceso de emisión y absorción virtual. Cuando esto ocurre, también ocurre un cambio en el color. De esta forma, los *quarks* están cambiando constantemente de color.

Esto causa libertad asintótica, es decir, cuando los *quarks* están más cerca los unos de los otros, la fuerza entre ellos es más pequeña comparada a la resultante de cuando están más alejados. Así, a cierta distancia, pares de *quark-antiquark* se crean debido a la enorme cantidad de energía, impidiendo que estos puedan estar separados. Este fenómeno se conoce como confinamiento.

En resumen, dentro de los hadrones se llevan a cabo interacciones entre *quarks* y gluones, pero también autointeracciones entre gluones. Esto conlleva a tener grandes cantidades de energía involucrada entre partículas con masas muy pequeñas o iguales a cero. Es por esto que decimos que, aquí, la masa de los hadrones se genera dinámicamente.

Por otro lado, en este trabajo estamos haciendo un análisis en QED, donde no hay autointeracciones entre los fotones; además, el valor del acoplamiento electromagnético es muy pequeño. Por esto, no hay generación dinámica de masas en QED. No obstante, si aumentamos el valor del acoplamiento, encontramos que arriba de cierto valor crítico cercano a 1, vemos masas fermiónicas generadas también en QED.

Como mencionamos en la sección 1.1, la forma de la ESD para el quark en QCD (ver figura 1.6) es estructuralmente bastante similar a la correspondiente para un fermión en QED (ver figura 1.5). Esto es que podemos aproximar la interacción *quark-gluón* por la de fermión-fotón, suponiendo que la parte no abeliana del vértice de QCD se separa de la siguiente manera

$$\Gamma_{qg}^a \sim \frac{\lambda^a}{2} \Gamma_{f\gamma} \quad (2.8)$$

donde λ^a , con $a = 1, 2, \dots, 8$, son las matrices de color de Gell-Mann. Es por esto que se nos permite vincular fenómenos de QCD en un trabajo en QED, considerando que aquí buscamos un *ansatz* para el vértice.

2.2 Ejemplo: vértice desnudo

Ahora veremos como se aplica todo esto en un ejemplo sencillo, como lo es el vértice desnudo γ^μ . Además, vamos a trabajar en la norma de Landau, es decir, con $\xi = 0$.

Usando lo anterior, podemos ver que la ecuación (1.15) nos dice que, para $F(p^2)$, tenemos

$$F(p^2) = 1 \quad (2.9)$$

que es congruente con lo expuesto en (2.7). Esto implica que la ecuación para $M(p^2)$ es

$$M(p^2) = m + \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\int_0^{p^2} dk^2 \frac{k^2}{p^2} \frac{M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} + \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \right] \quad (2.10)$$

Para resolver la ecuación anterior consideramos lo siguiente:

1. Linealizamos, es decir, tomamos $M^2 = 0$. Esto se puede hacer si la masa generada es tan pequeña que su cuadrado y potencias más altas se pueden despreciar.
2. Imponemos simetría quiral explícita, esto es, $m = 0$.
3. Por lo anterior, tenemos que $M(p^2) = 0$ es solución trivial.
4. Tenemos invariancia bajo reescalamiento, es decir, si $M(p^2)$ es solución entonces también lo es $nM(p^2)$, con n cualquier número.
5. La contribución de los momentos pequeños es casi despreciable en la ecuación (2.10). Al tomar la aproximación linealizada, esta contribución resulta ser significativa.

Así, la ecuación a resolver es la siguiente

$$M(p^2) = \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\int_0^{p^2} dk^2 \frac{M(k^2)}{p^2} + \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{M(k^2)}{k^2} \right] \quad (2.11)$$

2.2.1 Análisis de bifurcaciones

Como hemos mencionado, $M(p^2) = 0$ es una solución, visible en la ecuación (2.10) para $m = 0$. Por esto podemos suponer que existen, por lo menos, dos soluciones y esta corresponde a la solución trivial. Asimismo, este resultado es congruente con la teoría de perturbaciones, mencionado en (2.7) y se refiere al hecho de que, en este contexto, esta solución no permite generación dinámica de masas en ausencia de una masa desnuda en la lagrangiana.

El rompimiento dinámico de la simetría quiral se da si el valor del acoplamiento α es mayor a cierto valor crítico α_c , en este caso, cuando $\alpha_c \sim 1$. Este acoplamiento crítico es potencialmente una cantidad física medible, dado que es señal de un cambio de fase, entonces debe ser invariante de norma. Además, en el punto crítico, donde emerge la otra solución para $M(p^2)$, tenemos una bifurcación. Es decir, la solución no trivial se distancia de la trivial.

Para encontrar este punto pedimos que, en la criticalidad, $M(p^2)$ sea multiplicativamente renormalizable. En otras palabras, queremos que tenga la forma de una ley de potencias. En este caso proponemos

$$M(p^2) = (p^2)^{-s} \quad (2.12)$$

De esta forma, la ecuación (2.11) es

$$\begin{aligned} (p^2)^{-s} &= \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\int_0^{p^2} dk^2 \frac{(k^2)^{-s}}{p^2} + \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 (k^2)^{-s-1} \right] \\ &= \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\frac{(p^2)^{-s}}{1-s} - \frac{(\Lambda^2)^{-s}}{s} + \frac{(p^2)^{-s}}{s} \right] \end{aligned}$$

O bien,

$$1 = \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(\frac{(\Lambda^2)}{p^2} \right)^{-s} \right]$$

Imponemos la condición $s > 0$; esto nos permite anular el último término de la ecuación anterior en el límite de $\Lambda \rightarrow \infty$. De esta forma tenemos,

$$1 = \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right]$$

Reescribiendo

$$s^2 - s + \frac{3\alpha}{4\pi} = 0$$

Las soluciones a esta ecuación son

$$s_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\alpha_c}}$$

donde $\alpha_c = \frac{\pi}{3}$ separa las soluciones reales de las complejas, es decir, conlleva una transición de fase. Más aún, la bifurcación se lleva a cabo cuando las dos raíces son iguales. Para entender como y cuando pasa esto, analicemos el comportamiento de α .

Para valores pequeños de α , las raíces son reales. Mientras α crece, las raíces se aproximan una a la otra, siendo iguales en la criticalidad, cuando $\alpha_c = 1.047$. El rompimiento de simetría quiral ocurre cuando las raíces son complejas, es decir, cuando $\alpha > \alpha_c$.

Podemos ver en la figura 2.1 la variación de la masa física, definida como $M^2(p) = p^2 = m^2$ con respecto al acoplamiento α .

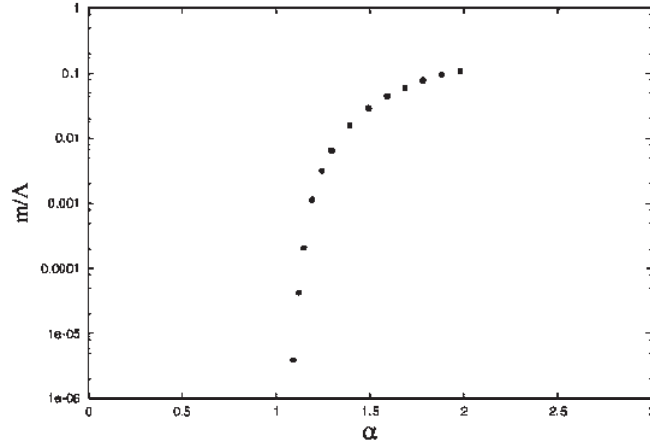


Fig. 2.1: Variación de la masa física respecto a α .

2.2.1.1 Condición para la criticalidad

En otra norma distinta a la de Landau (cuando $\xi \neq 0$) vamos a obtener más de dos soluciones, particularmente cuando ξ es grande. No obstante, solo nos interesan aquellas que están continuamente conectadas con las que se presentan en la norma de Landau. Es por ello que una condición necesaria para la igualdad de las dos raíces es

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = 0 \quad (2.13)$$

En los siguientes capítulos esta condición será muy importante para poder establecer un sistema de ecuaciones con el fin de resolver las ecuaciones para $F(p)$ y $M(p)$, considerando que estamos en la criticalidad y que tenemos, en efecto, rompimiento dinámico de la simetría quiral.

Capítulo 3

Vértice para QED



asta el momento hemos tratado con una aproximación al vértice desnudo. A partir de aquí trabajaremos con el vértice completo pero aun en la aproximación *quenched*.

Volvamos a la ecuación (1.2), que es la ESD para el electrón, pero en $d = 4$,

$$S^{-1}(p) = S^{0-1}(p) + ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S(k) \Gamma^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q)$$

y usamos las formas analíticas para los propagadores, de tal forma que obtenemos la ecuación siguiente

$$\frac{\not{p} - M(p^2)}{F(p^2)} = \not{p} - m + i \frac{\alpha}{4\pi^3} \int d^4 k \gamma^\mu \frac{F(k^2)}{\not{k} - M(k^2)} \Gamma^\nu(k, p) \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \quad (3.1)$$

Con el fin de encontrar las soluciones para $F(p)$ y $M(p)$ debemos realizar el mismo procedimiento del cálculo de las trazas, como en el capítulo 1¹. Aún así, primero hay que especificar la interacción por medio del vértice $\Gamma^\mu(k, p)$.

3.1 Requerimientos del vértice

La dinámica del propagador del fermión esta descrita en el vértice. En este caso, la interacción electrón-fotón. Para poder construir una estructura matemática congruente con los elementos clave de QED y lo comentado en los capítulos anteriores, es necesario considerar ciertos requerimientos para la función del vértice.

Esperamos que cualquier propuesta de vértice cumpla con lo siguiente:

1. Debe satisfacer las IWT² para todas las normas. Específicamente, buscamos satisfacer la ecuación (1.5) que dice

$$q_\mu \Gamma^\mu(k, p) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p)$$

¹Ver sección 1.2.1

²Ver sección 1.2.2

donde $q_\mu = (k - p)_\mu$. Esta ecuación nos dice que la parte del vértice que es paralela al momento del fotón es la que debe de satisfacer la IWT. Más aún, esto nos permite separar al vértice en una parte *longitudinal* y en otra *transversal*.

2. Debe asegurar que el propagador del fermión es multiplicativamente renormalizable. Esto es que la renormalización de la función de onda $F(p)$ debe mantener la forma de ley de potencias. Además, en la criticalidad³ también la función de masa $M(p)$ debe de tener una ley de potencias.
3. Debe tener un límite único y finito cuando $k^2 \rightarrow p^2$, esto implica que no hay singularidades cinemáticas.
4. Debe tener las mismas propiedades de transformación que el vértice desnudo γ^μ bajo las operaciones de conjugación de carga y paridad, debido a que este es el término a nivel árbol del desarrollo perturbativo de la función completa del vértice. Siguiendo con esta idea, el vértice debe reducirse a la expansión perturbativa para acoplamiento pequeño.
5. Debe asegurar la covarianza local de norma de las funciones de Green, es decir, tanto el propagador del fermión como el vértice deben de cambiar según las leyes de transformación de Landau, Khalatnikov y Fradkin (LKF) para cualquier variación de la norma.
6. Debe resultar en un acoplamiento crítico, donde la masa es generada dinámicamente, que sea independiente de norma.

Ahora bien, como mencionamos en el primer punto, podemos separar al vértice en dos partes, longitudinal y transversal, como sigue:

$$\Gamma^\mu(k, p) = \Gamma_L^\mu(k, p) + \Gamma_T^\mu(k, p) \quad (3.2)$$

3.2 Vértice longitudinal

En una teoría de norma, la función del vértice satisface la IWT que relaciona la parte longitudinal del vértice con una función simple; el inverso del propagador del electrón, en este caso. Aún así, la suposición crucial que lleva a una forma correcta para esta parte es que el vértice debe estar libre de singularidades cinemáticas.

³Ver sección 2.2.1

En 1980, James Ball y Ting-Wai Chiu [4] publicaron un artículo donde proponen una estructura sencilla para la parte longitudinal del vértice. Ellos toman en cuenta estas dos ideas para construir una forma general para el vértice que automáticamente satisface la IWT y esta libre de singularidades cinemáticas.

En esta dinámica, sabemos que están involucrados tres cuadvectores: γ^μ , p^μ y k^μ ; además, hay cuatro tipo de escalares: \mathbb{I} , \not{p} , \not{k} y $\not{p}\not{k}$. Esto resulta en 12 componentes. Pero, esta base no es conveniente. Ball y Chiu introducen 8 tensores que no contribuyen a la IWT, mientras que hay otros 4 que quedan determinados por los requisitos previos y por la forma que usamos para el propagador del electrón. Esto último nos lleva a quedarnos con sólo 3 tensores ya que $\not{p}\not{k}$ no aparece en el propagador fermiónico.

Así, la parte longitudinal del vértice queda fija como

$$\begin{aligned} \Gamma_{BC}^\mu(k, p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right] \gamma^\mu \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \frac{(k+p)^\mu (\not{k} + \not{p})}{k^2 - p^2} \\ &- \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \frac{(k+p)^\mu}{k^2 - p^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

y nos referimos a esta parte como el *vértice de Ball y Chiu*.

3.3 Vértice transversal

Como mencionamos anteriormente, Ball y Chiu proponen 8 tensores T_i^μ que no contribuyen a la IWT, es decir, cumplen con lo siguiente:

$$q_\mu T_i^\mu = 0, \quad i=1,2,\dots,8 \quad (3.4)$$

De esta forma, el vértice transverso se puede escribir como:

$$\Gamma_\mu^T(k, p) = \sum_{i=1}^8 \tau_i(k^2, p^2) T_\mu^i(k, p) \quad (3.5)$$

Si bien podemos elegir diferentes conjuntos de tensores independientes que cumplen con la ecuación (3.4), nosotros tomamos la base dada por el mismo artículo de Ball y Chiu que enuncia lo siguiente

$$\begin{aligned}
T_1^\mu(k, p) &= p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q) \\
T_2^\mu(k, p) &= T_1^\mu(\not{k} + \not{p}) \\
T_3^\mu(k, p) &= q^2 \gamma^\mu - q^\mu \not{q} \\
T_4^\mu(k, p) &= T_1^\mu p^\nu k^\rho \sigma_{\nu\rho} \\
T_5^\mu(k, p) &= \sigma^{\mu\nu} q_\nu \\
T_6^\mu(k, p) &= \gamma^\mu(k^2 - p^2) - (k + p)^\mu \not{q} \\
T_7^\mu(k, p) &= \frac{1}{2}(k^2 - p^2)[\gamma^\mu(\not{k} + \not{p}) - (k + p)^\mu] \\
&\quad + (k + p)^\mu p^\nu k^\rho \sigma_{\nu\rho} \\
T_8^\mu(k, p) &= -\gamma^\mu p^\nu k^\rho \sigma_{\nu\rho} + p^\mu \not{k} - k^\mu \not{p}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

Esta elección general para el vértice transversal tiene las siguientes propiedades

1. Como ya dijimos, $q_\mu T_i^\mu = 0$.
2. Esta estructura garantiza que las IWT se cumplan.
3. Si $k = p$ entonces $T_i^\mu(k, k) = 0$.
4. Si $\Gamma_T^\mu(k, p) = 0$ entonces $F(p)$ no es multiplicativamente renormalizable.
5. Los coeficientes de cada vector T_i^μ son libres de singularidades cinemáticas cuando $k^2 \rightarrow p^2$.

Consideremos el último punto. La construcción de la parte longitudinal se basa justamente en esto, es decir, esta parte del vértice no tiene singularidades cinemáticas. Por lo tanto, lo mismo debería de pasar para la parte transversal pero esto no es necesariamente cierto. La satisfacción de esta condición depende de la estructura y propiedades de los coeficientes τ_i de la ecuación (3.5).

3.3.1 Propiedades de τ_i

Para lograr un vértice transversal bien estructurado, los coeficientes τ_i deben cumplir lo siguiente:

1. Bajo la operación de conjugación de carga, el vértice debe transformarse con ciertas reglas. Esto nos lleva a requerir que todos los τ_i deben ser simétricos, excepto por τ_6 que debe ser antisimétrico, ante el intercambio de $k^2 \leftrightarrow p^2$.

2. Para asegurar un vértice adimensional, los τ_i deben tener las siguientes dimensiones

$$\begin{aligned} \tau_1 &\sim \frac{1}{M^3}, & \tau_2 &\sim \frac{1}{M^4}, & \tau_3 &\sim \frac{1}{M^2}, & \tau_4 &\sim \frac{1}{M^5}, \\ \tau_5 &\sim \frac{1}{M}, & \tau_6 &\sim \frac{1}{M^2}, & \tau_7 &\sim \frac{1}{M^3}, & \tau_8 &\sim \frac{1}{M^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3. Dado a que el propagador del electrón debe ser multiplicativamente renormalizable, el vértice transverso debe contener información acerca de $F(p)$ y de $M(p)$, ya que la parte longitudinal la contiene. Así, los τ_i deben ser funciones de $F(p)$ y $M(p)$.
4. Sabemos que a un lazo (ver figura 3.1), cuando uno de los momentos de las piernas de los fermiones es mucho más grande que el otro, es decir, cuando $k^2 \gg p^2$, el vértice se comporta como el siguiente término logarítmico [5]

$$\tau_3 + \tau_6 \simeq \frac{\alpha\xi}{8\pi} \frac{1}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \quad (3.8)$$

Además, en el mismo límite,

$$\begin{aligned} \tau_1 &< \frac{1}{k^2}, & \tau_2 &< \frac{1}{k^3}, & \tau_4 &< \frac{1}{k^3}, \\ \tau_5 &< \frac{1}{k^3}, & \tau_7 &< \frac{1}{k^3}, & \tau_8 &< \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

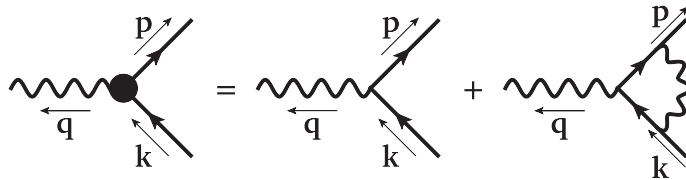


Fig. 3.1: Corrección del vértice fermión-fotón a un lazo.

3.3.2 Forma de τ_i

Tomando en cuenta las propiedades anteriores y bajo la suposición de que los τ_i no dependen de q^2 , proponemos las siguientes formas para estos coeficientes

$$\begin{aligned}
\tau_1(k^2, p^2) &= a_1 \frac{1}{(k^2 + p^2)(k^2 - p^2)} \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \\
\tau_2(k^2, p^2) &= a_2 \frac{1}{(k^2 + p^2)(k^2 - p^2)} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \\
\tau_3(k^2, p^2) &= a_3 \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \\
\tau_4(k^2, p^2) &= a_4 \frac{1}{k^2 p^2 (k^2 - p^2)} \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \\
\tau_5(k^2, p^2) &= a_5 \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \\
\tau_6(k^2, p^2) &= a_6 \frac{k^2 + p^2}{(k^2 - p^2)^2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \\
\tau_7(k^2, p^2) &= a_7 \frac{1}{(k^2 + p^2)(k^2 - p^2)} \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \\
\tau_8(k^2, p^2) &= a_8 \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde los factores a_i son constantes.

Haciendo uso de estas propuestas, es decir, las ecuaciones (3.3) y (3.5), con (3.6) y (3.10), la forma general del vértice completo es

$$\Gamma^\mu(k, p) = \Gamma_{BC}^\mu(k, p) + \sum_{i=1}^8 \tau_i(k^2, p^2) T_\mu^i(k, p)$$

o bien,

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu(k, p) = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right] \gamma^\mu + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \frac{(k+p)^\mu (\not{k} + \not{p})}{k^2 - p^2} \\
& - \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \frac{(k+p)^\mu}{k^2 - p^2} \\
& + a_1 \frac{1}{(k^2 + p^2)(k^2 - p^2)} \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] [p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q)] \\
& + a_2 \frac{1}{(k^2 + p^2)(k^2 - p^2)} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] [p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q)] (\not{k} + \not{p}) \\
& + a_3 \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] [q^2 \gamma^\mu - q^\mu \not{q}] \\
& + a_4 \frac{1}{k^2 p^2 (k^2 - p^2)} \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] [p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q)] p^\nu k^\rho \sigma_{\nu\rho} \\
& + a_5 \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \sigma^{\mu\nu} q_\nu \\
& + a_6 \frac{k^2 + p^2}{(k^2 - p^2)^2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] [\gamma^\mu (k^2 - p^2) - (k+p)^\mu \not{q}] \\
& + a_7 \frac{1}{(k^2 + p^2)(k^2 - p^2)} \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] [(k+p)^\mu p^\nu k^\rho \sigma_{\nu\rho} \\
& + \frac{1}{2} (k^2 - p^2) [\gamma^\mu (\not{k} + \not{p}) - (k+p)^\mu]] \\
& + a_8 \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] [-\gamma^\mu p^\nu k^\rho \sigma_{\nu\rho} + p^\mu \not{k} - k^\mu \not{p}]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.4 Ecuaciones para $F(p)$ y $M(p)$

Ya con una descripción general para el vértice, solo nos queda resolver las ecuaciones para $F(p)$ y $M(p)$. Lo que debemos hacer es sustituir la forma general del vértice, ecuación (3.11), en la ecuación (3.1). Después, tomamos las trazas, como en la sección 1.2.1, y resolvemos para ciertas propuestas de solución.

Es importante considerar que vamos a tomar una aproximación de aquí en adelante. Como ya vimos en el capítulo 2, cuando $M(p)$ es muy pequeña entonces $M^2 \sim 0$ para $\alpha \sim \alpha_c$, es decir, en la criticalidad. Por esto vamos a despreciar todos los términos con M^2 . Además, por cuestiones de comodidad, hacemos el siguiente cambio de variable: $x = p^2$ y $y = k^2$.

3.4.1 Ecuación para $F(x)$

Realizando todos los pasos de la sección 1.4.1 sobre la ecuación (3.1), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F(x)} = & 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{F(y)}{y + M^2(y)} \left[\frac{y^2}{x^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \left[\frac{3}{2}(y+x) \right] \right. \right. \\
& + \left. \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \left[\frac{3}{2}M(y) \right] + \frac{\xi}{F(x)} \frac{M(y)M(x)}{y} \right. \\
& + M(y)a_1 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{4}(y-3x) \right] \\
& + a_2 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[-\frac{1}{4}(y+x)(y-3x) \right] \\
& - a_3 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(y-3x) \right] \\
& - M(y)a_4 \frac{1}{yx(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{8}(6x^2 - 4xy + y^2) \right] \\
& - M(y)a_5 \frac{1}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2} \frac{2x-y}{y} \right] \\
& - a_6 \frac{y+x}{(y-x)^2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2}(y-x) \right] \\
& + M(y)a_7 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2} \frac{2y^2 - 3x^2}{y} \right] \\
& - a_8 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(y-3x) \right] \left. \right\} \theta(x-y) \\
& + \left\{ -\frac{\xi}{F(x)} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \left[\frac{3}{2}(y+x) \right] \right. \\
& + \left. \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \left[\frac{3}{2}M(y) \right] \right. \\
& + M(y)a_1 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{4}(x-3y) \right] \\
& + a_2 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[-\frac{1}{4}(y+x)(x-3y) \right] \\
& - a_3 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(x-3) \right] \\
& - M(y)a_4 \frac{1}{yx(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{8}x(4y-x) \right] \\
& - M(y)a_5 \frac{1}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2} \right] \\
& - a_6 \frac{y+x}{(y-x)^2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2}(y-x) \right] \\
& + M(y)a_7 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(3y-4x) \right] \\
& - a_8 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(x-3y) \right] \left. \right\} \theta(y-x)
\end{aligned}$$

(3.12)

Ahora despreciamos los términos de M^2 , de tal forma que solo juegan los τ_i con $i = 2, 3, 6, 8$. Así, la ecuación (3.12) queda como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F(x)} = & 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{F(y)}{y} \left[\frac{y^2}{x^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \left[\frac{3}{2}(y+x) \right] \right. \right. \\
& + a_2 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[-\frac{1}{4}(y+x)(y-3x) \right] \\
& - a_3 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(y-3x) \right] \\
& - a_6 \frac{y+x}{(y-x)^2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2}(y-x) \right] \\
& \left. - a_8 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(y-3x) \right] \right\} \theta(x-y) \\
& + \left\{ -\frac{\xi}{F(x)} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \left[\frac{3}{2}(y+x) \right] \right. \\
& + a_2 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[-\frac{1}{4}(y+x)(x-3y) \right] \\
& - a_3 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(x-3) \right] \\
& - a_6 \frac{y+x}{(y-x)^2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2}(y-x) \right] \\
& \left. - a_8 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(x-3y) \right] \right\} \theta(y-x)
\end{aligned}$$

Considerando que

$$\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} = -\frac{F(y) - F(x)}{F(y)F(x)}$$

podemos hacer las siguientes simplificaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F(x)} &= 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} F(y) \left[\frac{\xi}{F(x)} \right] \theta(y-x) \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} F(y) \left[\frac{F(y)-F(x)}{F(y)F(x)} \right] \\
&\times \left[\frac{y^2}{x^2} \left\{ \frac{3}{4} \frac{y+x}{y-x} - \frac{1}{4} a_2 \frac{y-3x}{y-x} - \frac{1}{2} a_3 \frac{y-3x}{y-x} \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{3}{2} a_6 \frac{y+x}{y-x} - \frac{1}{2} a_8 \frac{y-3x}{y-x} \right\} \theta(x-y) \right. \\
&+ \left. \left\{ \frac{3}{4} \frac{y+x}{y-x} - \frac{1}{4} a_2 \frac{x-3y}{y-x} - \frac{1}{2} a_3 \frac{x-3y}{y-x} \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{3}{2} a_6 \frac{y+x}{y-x} - \frac{1}{2} a_8 \frac{x-3y}{y-x} \right\} \theta(y-x) \right] \\
&= 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \int_x^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \frac{F(y)}{F(x)} \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \frac{1}{F(x)} \left[\frac{F(y)-F(x)}{y-x} \right] \\
&\times \left[\frac{y^2}{x^2} \left\{ \frac{3}{4} (y+x) - \frac{1}{4} a_2 (y-3x) - \frac{1}{2} a_3 (y-3x) \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{3}{2} a_6 (y+x) - \frac{1}{2} a_8 (y-3x) \right\} \theta(x-y) \right. \\
&+ \left. \left\{ \frac{3}{4} (y+x) - \frac{1}{4} a_2 (x-3y) - \frac{1}{2} a_3 (x-3y) \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{3}{2} a_6 (y+x) - \frac{1}{2} a_8 (x-3y) \right\} \theta(y-x) \right]
\end{aligned}$$

Reacomodando, obtenemos la ecuación para $F(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F(x)} &= 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \int_x^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \frac{F(y)}{F(x)} \\
&+ \frac{3\alpha}{16\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \frac{1}{F(x)} \left[\frac{F(y)-F(x)}{y-x} \right] \\
&\times \left[\frac{y^2}{x^2} \left\{ (1-2a_6)(y+x) - \frac{1}{3} (a_2+2a_3+2a_8)(y-3x) \right\} \theta(x-y) \right. \\
&+ \left. \left\{ (1-2a_6)(y+x) - \frac{1}{3} (a_2+2a_3+2a_8)(x-3y) \right\} \theta(y-x) \right]
\end{aligned}$$

(3.13)

3.4.2 Ecuación para $M(x)$

De forma análoga, realizamos todos los pasos de la sección 1.4.4 para obtener la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{M(x)}{F(x)} = & m - \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{F(y)}{y + M^2(y)} \left[\frac{y}{x} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} [3xM(y)] \right. \right. \\
& + \left. \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \left[\frac{3}{2}y \right] + M(y) \left[-\frac{3}{F(y)} - \frac{\xi}{F(x)} \right] \right. \\
& + a_1 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{4}y(y-3x) \right] \\
& + M(y)a_2 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}y(y-3x) \right] \\
& - M(y)a_3 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] [3x] \\
& - a_4 \frac{1}{yx(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{8}y^2(4x-y) \right] \\
& - a_5 \frac{1}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2}y \right] \\
& - M(y)a_6 \frac{y+x}{(y-x)^2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] [3(y-x)] \\
& + a_7 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}y(3x-4y) \right] \\
& - M(y)a_8 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] [0] \left. \right\} \theta(x-y) \\
& + \left\{ \frac{M(y)}{F(x)} \left[-3 - \xi \frac{M(x)}{M(y)} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} [3yM(y)] \right. \\
& + \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \left[\frac{3}{2}x \right] \\
& + a_1 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{4}x(x-3y) \right] \\
& + M(y)a_2 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}x(x-3y) \right] \\
& - M(y)a_3 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] [3y] \\
& - a_4 \frac{1}{yx(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{8}x(6y^2 - 4xy + x^2) \right] \\
& - a_5 \frac{1}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2}(2y-x) \right] \\
& - M(y)a_6 \frac{y+x}{(y-x)^2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] [3(y-x)] \\
& + a_7 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(-3y^2 + 2x^2) \right] \\
& - M(y)a_8 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] [0] \left. \right\} \theta(y-x)
\end{aligned}$$

(3.14)

Considerando nuevamente que $M^2 \rightarrow 0$, nos queda que

$$\begin{aligned}
\frac{M(x)}{F(x)} = & m - \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} F(y) \left[\frac{y}{x} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} [3xM(y)] \right. \right. \\
& + \left. \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \left[\frac{3}{2}y \right] + M(y) \left[-\frac{3}{F(y)} - \frac{\xi}{F(x)} \right] \right. \\
& + a_1 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{4}y(y-3x) \right] \\
& + M(y)a_2 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}y(y-3x) \right] \\
& - M(y)a_3 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] [3x] \\
& - a_4 \frac{1}{yx(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{8}y^2(4x-y) \right] \\
& - a_5 \frac{1}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2}y \right] \\
& - M(y)a_6 \frac{y+x}{(y-x)^2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] [3(y-x)] \\
& + a_7 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}y(3x-4y) \right] \left. \right\} \theta(x-y) \\
& + \left\{ \frac{M(y)}{F(x)} \left[-3 - \xi \frac{M(x)}{M(y)} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} [3yM(y)] \right. \\
& + \left. \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \left[\frac{3}{2}x \right] \right. \\
& + a_1 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{4}x(x-3y) \right] \\
& + M(y)a_2 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}x(x-3y) \right] \\
& - M(y)a_3 \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] [3y] \\
& - a_4 \frac{1}{yx(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{8}x(6y^2 - 4xy + x^2) \right] \\
& - a_5 \frac{1}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2}(2y-x) \right] \\
& - M(y)a_6 \frac{y+x}{(y-x)^2} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] [3(y-x)] \\
& + a_7 \frac{1}{(y+x)(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{1}{2}(-3y^2 + 2x^2) \right] \left. \right\} \theta(y-x)
\end{aligned}$$

Así, simplificando y tomando $m = 0$, la ecuación para $M(x)$ es

$$\begin{aligned}
\frac{M(x)}{F(x)} = & \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} F(y) \\
& \times \left[\frac{y}{x} \left\{ \frac{M(y)}{F(y)} + \frac{\xi}{3} \frac{M(y)}{F(x)} - \frac{1}{2} \frac{y}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \right\} \theta(x-y) \right. \\
& + \left. \left\{ \frac{M(y)}{F(x)} + \frac{\xi}{3} \frac{M(x)}{F(x)} - \frac{1}{2} \frac{x}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \right\} \theta(y-x) \right] \\
& - \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} F(y) M(y) \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \\
& \times \left[\frac{y}{x} \left\{ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}a_2 \frac{y(y-3x)}{y+x} - a_3x - a_6(y+x) \right\} \theta(x-y) \right. \\
& + \left. \left\{ -\frac{1}{2}y + \frac{1}{6}a_2 \frac{x(x-3y)}{y+x} - a_3y - a_6(y+x) \right\} \theta(y-x) \right] \\
& - \frac{\alpha}{8\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \frac{F(y)}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{y}{x} \left\{ \frac{1}{2}a_1 \frac{y(y-3x)}{y+x} \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{1}{4}a_4 \frac{y}{x}(4x-y) - 3a_5 y + a_7 \frac{y(3x-4y)}{y+x} \right\} \theta(x-y) \right. \\
& + \left. \left\{ \frac{1}{2}a_1 \frac{x(x-3y)}{y+x} - \frac{1}{4}a_4 \frac{1}{y}(6y^2 - 4xy + x^2) - 3a_5(2y-x) \right. \right. \\
& + \left. \left. a_7 \frac{2x^2 - 3y^2}{y+x} \right\} \theta(y-x) \right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Podemos ver que la ecuación anterior es más complicada que la correspondiente para $F(x)$, ecuación (3.13). En la siguiente sección resolveremos estas ecuaciones para soluciones multiplicativamente renormalizables.

3.5 Solución multiplicativamente renormalizable

Queremos que tanto $F(p^2)$ como $M(p^2)$ sean multiplicativamente renormalizables. Entonces hacemos la siguiente propuesta

$$F(p^2) = A(p^2)^\nu \quad y \quad M(p^2) = B(p^2)^{-s} \tag{3.16}$$

con A y B constantes.

3.5.1 Solución para $F(x)$

Sustituyendo la forma de $F(x)$ de (3.16) en (3.13) de la sección anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ax^\nu} &= 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \int_x^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \frac{A(y)^\nu}{A(x)^\nu} \\ &+ \frac{3\alpha}{16\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \frac{1}{Ax^\nu} \frac{Ay^\nu - Ax^\nu}{y-x} \\ &\times \left[\frac{y^2}{x^2} \left\{ (1-2a_6)(y+x) - \frac{1}{3}(a_2+2a_3+2a_8)(y-3x) \right\} \theta(x-y) \right. \\ &\left. + \left\{ (1-2a_6)(y+x) - \frac{1}{3}(a_2+2a_3+2a_8)(x-3y) \right\} \theta(y-x) \right] \end{aligned}$$

Multiplicando por Ax^ν y reacomodando, obtenemos

$$\begin{aligned} Ax^\nu &= 1 - \frac{\alpha\xi}{4\pi\nu} A(\Lambda^{2\nu} - x^{2\nu}) \\ &- \frac{3\alpha}{16\pi} A \left\{ \int_0^x dy \frac{y^2}{x^2} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} \left[1 - 2a_6 - \frac{1}{3}(a_2+2a_3+2a_8) \right] \right. \\ &+ \int_0^x dy \frac{y}{x} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} [1 - 2a_6 + (a_2+2a_3+2a_8)] \\ &+ \int_x^{\Lambda^2} dy \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} [1 - 2a_6 + (a_2+2a_3+2a_8)] \\ &\left. + \int_x^{\Lambda^2} dy \frac{x}{y} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} \left[1 - 2a_6 - \frac{1}{3}(a_2+2a_3+2a_8) \right] \right\} \end{aligned}$$

Usando las integrales del apéndice B, tenemos que

$$\begin{aligned}
Ax^\nu &= 1 - \frac{\alpha\xi}{4\pi\nu}A(\Lambda^{2\nu} - x^{2\nu}) \\
&\quad - \frac{3\alpha}{16\pi}Ax^\nu \left\{ [\psi(\nu+3) - \psi(3)] \left[1 - 2a_6 - \frac{1}{3}(a_2 + 2a_3 + 2a_8) \right] \right. \\
&\quad + [\psi(\nu+2) - \psi(2)] [1 - 2a_6 + (a_2 + 2a_3 + 2a_8)] \\
&\quad + \left[\psi(1) - \psi(1-\nu) - \log \frac{\Lambda^2}{x} - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \right] \\
&\quad \times [1 - 2a_6 + (a_2 + 2a_3 + 2a_8)] \\
&\quad \left. + [\psi(1) - \psi(1-\nu)] \left[1 - 2a_6 - \frac{1}{3}(a_2 + 2a_3 + 2a_8) \right] \right\} \\
&= 1 - \frac{\alpha\xi}{4\pi\nu}A(\Lambda^{2\nu} - x^{2\nu}) \\
&\quad - \frac{3\alpha}{16\pi}Ax^\nu \left\{ \left[1 - 2a_6 - \frac{1}{3}(a_2 + 2a_3 + 2a_8) \right] \right. \\
&\quad \times [\psi(\nu+3) - \psi(3) + \psi(1) - \psi(1-\nu)] \\
&\quad + [1 - 2a_6 + (a_2 + 2a_3 + 2a_8)] \left[-\log \frac{\Lambda^2}{x} - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \right] \\
&\quad \left. + \psi(\nu+2) - \psi(2)\psi(1) - \psi(1-\nu) \right\}
\end{aligned}$$

con $-2 < \nu < 1$.

Usando el apéndice C para las funciones digamma podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
Ax^\nu &= 1 - \frac{\alpha\xi}{4\pi\nu}A(\Lambda^{2\nu} - x^{2\nu}) \\
&\quad + \frac{3\alpha}{16\pi}Ax^\nu \left\{ \left[1 - 2a_6 - \frac{1}{3}(a_2 + 2a_3 + 2a_8) \right] \right. \\
&\quad \times \left[\frac{3}{2} + \pi \cot \pi\nu - \frac{1}{\nu+2} - \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu} \right] \\
&\quad + [1 - 2a_6 + (a_2 + 2a_3 + 2a_8)] \\
&\quad \left. \times \left[1 + \pi \cot \pi\nu - \frac{1}{\nu+1} + \log \frac{\Lambda^2}{x} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Comparando los coeficientes de x^0 obtenemos

$$0 = 1 - \frac{\alpha\xi}{4\pi\nu}A\Lambda^{2\nu} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4\pi\nu}{\alpha\xi}\Lambda^{-2\nu} \tag{3.18}$$

Por lo que

$$F(p^2) = \frac{4\pi\nu}{\alpha\xi} \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^\nu \quad (3.19)$$

Por otro lado, la renormalización multiplicativa del propagador del fermión impone la siguiente condición

$$1 - 2a_6 + (a_2 + 2a_3 + 2a_8) = 0 \quad (3.20)$$

de tal forma que evitamos divergencias del término logarítmico.

Por último, comparando los coeficientes de x^ν en (3.17) obtenemos,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha\xi}{4\pi\nu} A \\ &+ \frac{3\alpha}{16\pi} A \left[1 - 2a_6 - \frac{1}{3}(a_2 + 2a_3 + 2a_8) \right] \\ &\times \left[\frac{3}{2} + \pi \cot \pi\nu - \frac{1}{\nu+2} - \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu} \right] \end{aligned}$$

Usando la condición (3.20), podemos reescribir lo anterior como

$$1 = \frac{\alpha\xi}{4\pi\nu} + \frac{\alpha}{4\pi}(1 - 2a_6) \left[\frac{3}{2} + \pi \cot \pi\nu - \frac{1}{\nu+2} - \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu} \right] \quad (3.21)$$

con $-2 < \nu < 1$.

Cabe señalar que esta ecuación solo depende del término para a_6 , es decir, sin importar la elección de otros τ_i , obtendremos la misma expresión siempre que involucremos a τ_6 , en la aproximación de $M^2 \rightarrow 0$.

3.5.2 Solución para $M(x)$

Como mencionábamos antes, la ecuación para $M(x)$ es un tanto más complicada que la respectiva para $F(x)$. En principio tenemos 8 parámetros libres correspondientes a las a_i aunque, hasta este momento, son 7 debido a la restricción (3.20). Además de que las integrales involucradas requieren de mucho trabajo.

Por estas razones, existen distintas propuestas para la parte transversa del vértice cuya diferencia se hace notar en la ecuación para $M(x)$. A continuación resolveremos esta ecuación para dos vértices de la literatura: el de Curtis-Pennington y el de Bashir-Pennington.

3.6 Ejemplos de *ansatz*

3.6.1 Vértice de Curtis-Pennington

Este vértice corresponde a la propuesta de Duncan Curtis y Michael Pennington [5], en 1990, cuya estructura es

$$\Gamma_{CP}^{\mu}(k, p) = \Gamma_{BC}^{\mu}(k, p) + \Gamma_{CP}^{\mu T}(k, p)$$

donde la elección de la parte transversa es

$$\Gamma_{CP}^{\mu T}(k, p) = \tau_6(k^2, p^2) T_6^{\mu}(k, p)$$

mientras que τ_6 es

$$\tau_6(k^2, p^2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \frac{k^2 + p^2}{(k^2 - p^2)^2 + [M^2(k^2) + M^2(p^2)]^2}$$

En el límite de masas pequeñas, se tiene que

$$\tau_6(k^2, p^2) = \frac{1}{2} \frac{k^2 + p^2}{(k^2 - p^2)^2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \quad (3.22)$$

es decir, el vértice de Curtis-Pennington corresponde a nuestro τ_6 , para $a_6 = \frac{1}{2}$.

De esta forma, la ecuación (3.15) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{M(x)}{F(x)} = & \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} F(y) \\ & \times \left[\frac{y}{x} \left\{ \frac{M(y)}{F(y)} + \frac{\xi}{3} \frac{M(y)}{F(x)} - \frac{1}{2} \frac{y}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \right\} \theta(x-y) \right. \\ & + \left. \left\{ \frac{M(y)}{F(x)} + \frac{\xi}{3} \frac{M(x)}{F(x)} - \frac{1}{2} \frac{x}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \right\} \theta(y-x) \right] \\ & - \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} F(y) M(y) \frac{1}{y-x} \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] \\ & \times \left[\frac{y}{x} \left\{ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(y+x) \right\} \theta(x-y) + \left\{ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y+x) \right\} \theta(y-x) \right] \end{aligned}$$

Ahora usamos las propuestas de solución (3.16) y las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
i) \quad & F(y) \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] = B(y^{-s} - x^{-s}) - Bx^{-s-\nu}(y^\nu - x^\nu) \\
ii) \quad & F(y)M(y) \left[\frac{1}{F(y)} - \frac{1}{F(x)} \right] = B(y^{-s} - x^{-s}) - Bx^{-\nu}(y^{\nu-s} - x^{\nu-s}) \\
iii) \quad & \frac{M(y)}{F(x)}(F(y) - F(x)) = Bx^{-\nu}(y^{\nu-s} - x^{\nu-s}) - B(y^{-s} - x^{-s})
\end{aligned} \tag{3.23}$$

de tal manera que obtenemos lo que sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{Bx^{-s}}{Ax^\nu} = & \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} Ay^\nu \left[\frac{y}{x} \left\{ \frac{By^{-s}}{Ay^\nu} + \frac{\xi By^{-s}}{3 Ax^\nu} \right\} \theta(x-y) \right. \\
& + \left. \left\{ \frac{By^{-s}}{Ax^\nu} + \frac{\xi Bx^{-s}}{3 Ax^\nu} \right\} \theta(y-x) \right] \\
& - \frac{3\alpha}{8\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \left[\frac{y}{x} \left\{ y \left(\frac{By^{-s} - x^{-s}}{y-x} - Bx^{-\nu-s} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} \right) \right\} \theta(x-y) \right. \\
& + \left. \left\{ x \left(\frac{By^{-s} - x^{-s}}{y-x} - Bx^{-\nu-s} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} \right) \right\} \theta(y-x) \right] \\
& + \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \frac{Bx^{-\nu}(y^{\nu-s} - x^{\nu-s}) - B(y^{-s} - x^{-s})}{y-x} \\
& \times \left[\frac{y}{x} \left\{ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(y+x) \right\} \theta(x-y) + \left\{ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y+x) \right\} \theta(y-x) \right]
\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}
\frac{Bx^{-s}}{Ax^\nu} = & \frac{3\alpha}{4\pi} B \int_0^x dy \left[\frac{y^{-s}}{x} + \frac{\xi y^{\nu-s}}{3 x^{\nu+1}} \right] + \frac{3\alpha}{4\pi} B \int_x^{\Lambda^2} dy \left[\frac{y^{\nu-s-1}}{x^\nu} + \frac{\xi y^{\nu-1}}{3 x^{\nu+s}} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{8\pi} B \int_0^x dy \left[\frac{y y^{-s} - x^{-s}}{x y - x} - \frac{1}{x^{\nu+s}} \frac{y y^\nu - x^\nu}{y - x} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{8\pi} B \int_x^{\Lambda^2} dy \left[\frac{x y^{-s} - x^{-s}}{y y - x} - \frac{1}{x^{\nu+s}} \frac{x y^\nu - x^\nu}{y y - x} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{4\pi} B \int_0^x dy \left[x^{-\nu} \frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y - x} - \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y - x} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{8\pi} B \int_0^x dy \left[x^{-\nu} \frac{y y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{x y - x} - \frac{y y^{-s} - x^{-s}}{x y - x} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{4\pi} B \int_x^{\Lambda^2} dy \left[x^{-\nu} \frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y - x} - \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y - x} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{8\pi} B \int_x^{\Lambda^2} dy \left[x^{-\nu} \frac{x y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y y - x} - \frac{x y^{-s} - x^{-s}}{y y - x} \right]
\end{aligned}$$

Utilizando las soluciones a las integrales del apéndice B y las formas del apéndice C, podemos simplificar la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Ax^\nu} &= \frac{3\alpha}{8\pi} \left\{ -\frac{2}{3}\xi \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu + \frac{1}{s-\nu-1} \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{2}{\nu-s} + \frac{2}{\nu-s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{\nu-s} \\
&\quad - \pi \cot \pi\nu - \pi \cot \pi s \\
&\quad + 2 \left[\pi \cot \pi(\nu-s) + \pi \cot \pi s \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\nu-s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{\nu-s} - \frac{1}{s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{-s} \right] \\
&\quad - \left[\frac{1}{\nu-s} + \frac{1}{\nu-s+1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right. \\
&\quad \left. - \pi \cot \pi(\nu-s) - \pi \cot \pi s \right]
\end{aligned}$$

para $-1 < (\nu-s) < 1$, $-1 < -s < 1$ y $-2 < \nu < 1$.

Reacomodando,

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi}{3\alpha Ax^\nu} &= -\frac{2}{3}\xi \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu + \frac{1}{s-\nu-1} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{2}{1-s} + \frac{3}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} - \frac{2}{s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{-s} \\
&\quad + 3\pi \cot \pi(\nu-s) + 2\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi\nu
\end{aligned}$$

Para evitar divergencias del término $\frac{\Lambda^2}{x}$, imponemos la siguiente cota

$$-1 < -s < 0 \Rightarrow s > 0 \tag{3.24}$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi}{3\alpha Ax^\nu} &= -\frac{2}{3}\xi \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu + \frac{1}{s-\nu-1} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{2}{1-s} + \frac{3}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} \\
&\quad + 3\pi \cot \pi(\nu-s) + 2\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi\nu
\end{aligned}$$

$$(3.25)$$

Al comparar los coeficientes de x^0 , tenemos que

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{2}{3}\xi \left[\frac{1}{\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} \right] \\
& + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{2}{1-s} + \frac{3}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} \\
& + 3\pi \cot \pi(\nu-s) + 2\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi \nu
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Y, finalmente,

$$\begin{aligned}
\xi = & \frac{3\nu(\nu-s+1)}{2(1-s)} \left\{ 3\pi \cot \pi(\nu-s) + 2\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi \nu \right. \\
& \left. + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{2}{1-s} + \frac{3}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} \right\}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Además necesitamos que $\frac{\partial \xi}{\partial s} = 0$, así que obtenemos

$$\begin{aligned}
\xi = & -\frac{3}{2}(\nu-s+1)^2 \left\{ 3\pi^2 \csc^2 \pi(\nu-s) - 2\pi^2 \csc^2 \pi s \right. \\
& \left. + \frac{2}{(1-s)^2} - \frac{3}{(s-\nu)^2} - \frac{1}{(s-\nu-1)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Así que debemos resolver simultáneamente las ecuaciones (3.27) y (3.28), además de

$$\nu = \frac{\alpha \xi}{4\pi}$$

que corresponde a la ecuación (3.21) para $a_6 = \frac{1}{2}$. Las variables son α , ν y s , para un valor fijo de la norma ξ . Los resultados están en la figura (3.2).

Podemos ver que la dependencia de norma ξ sobre el acoplamiento crítico α_c es menos severa con el vértice CP que con el desnudo. Además, este vértice nos asegura que el propagador del electrón es multiplicativamente renormalizable y obtenemos la siguiente forma para $F(x)$:

$$F(x) = \left(\frac{x}{\Lambda^2} \right)^{\frac{\alpha \xi}{4\pi}}$$

Sin embargo, todas las observables deben ser estrictamente independientes de la norma. Entonces debemos probar con otros *ansatz* que mejoren este resultado.

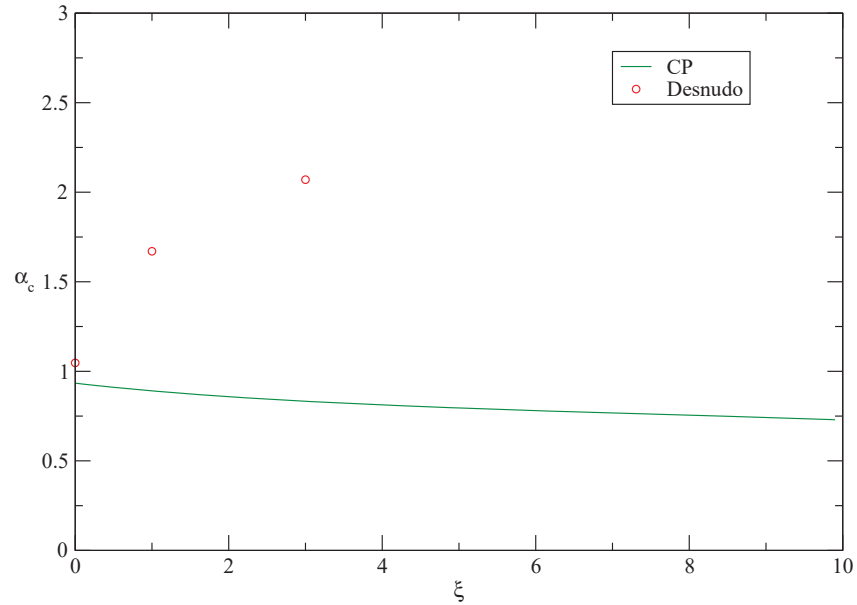


Fig. 3.2: Gráfica de α_c vs. ξ , para el vértice de Curtis-Pennington y para el vértice desnudo.

3.6.2 Vértice de Bashir-Pennington

Este vértice corresponde a la propuesta de Adnan Bashir y Michael Pennington [6], en 1994, cuya forma es la siguiente:

$$\Gamma_{BP}^{\mu}(k, p) = \Gamma_{BC}^{\mu}(k, p) + \Gamma_{BP}^{\mu T}(k, p)$$

donde la elección de la parte transversa es

$$\Gamma_{BP}^{\mu T}(k, p) = \sum_{i=2,3,6,8} \tau_i(k^2, p^2) T_i^{\mu}(k, p)$$

para las formas (3.10) sobre la estructura de los τ_i .

Sustituimos las expresiones para $F(x)$ y $M(x)$ de (3.16) en la ecuación (3.15) y usamos las relaciones (3.23) junto con la expresión

$$\frac{1}{(y-x)(y+x)} = \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y+x} \right]$$

De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{Bx^{-s}}{Ax^\nu} &= \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} Ay^\nu \left[\frac{y}{x} \left\{ \frac{By^{-s}}{Ay^\nu} + \frac{\xi By^{-s}}{3 Ax^\nu} \right\} \theta(x-y) \right. \\
&+ \left. \left\{ \frac{By^{-s}}{Ax^\nu} + \frac{\xi Bx^{-s}}{3 Ax^\nu} \right\} \theta(y-x) \right] \\
&- \frac{3\alpha}{8\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \left[\frac{y}{x} \left\{ y \left(B \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} - Bx^{-\nu-s} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} \right) \right\} \theta(x-y) \right. \\
&+ \left. \left\{ x \left(B \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} - Bx^{-\nu-s} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} \right) \right\} \theta(y-x) \right] \\
&+ \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y} \frac{Bx^{-\nu}(y^{\nu-s} - x^{\nu-s}) - B(y^{-s} - x^{-s})}{y-x} \\
&\times \left[\frac{y}{x} \left\{ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}a_2 \frac{y(y-3x)}{y+x} - a_3x - a_6(y+x) \right\} \theta(x-y) \right. \\
&+ \left. \left\{ -\frac{1}{2}y + \frac{1}{6}a_2 \frac{x(x-3y)}{y+x} - a_3y - a_6(y+x) \right\} \theta(y-x) \right]
\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}
\frac{Bx^{-s}}{Ax^\nu} = & \frac{3\alpha}{4\pi}B \int_0^x dy \left[\frac{y^{-s}}{x} + \frac{\xi}{3} \frac{y^{\nu-s}}{x^{\nu+1}} \right] + \frac{3\alpha}{4\pi}B \int_x^{\Lambda^2} dy \left[\frac{y^{\nu-s-1}}{x^\nu} + \frac{\xi}{3} \frac{y^{\nu-1}}{x^{\nu+s}} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{8\pi}B \int_0^x dy \left[\frac{y}{x} \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} - \frac{1}{x^{\nu+s}} \frac{y}{x} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{8\pi}B \int_0^{\Lambda^2} dy \left[\frac{x}{y} \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} - \frac{1}{x^{\nu+s}} \frac{x}{y} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{4\pi}B \left(\frac{1}{2} + a_3 + a_6 \right) \int_0^x dy \left[x^{-\nu} \frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y-x} - \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{4\pi}Ba_6 \int_0^x dy \left[x^{-\nu} \frac{y}{x} \frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y-x} - \frac{y}{x} \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} \right] \\
& + \frac{\alpha}{16\pi}Ba_2 \int_0^x dy \left[x^{-\nu} \frac{y^2}{x^2} \left(\frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y-x} - \frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y+x} \right) \right. \\
& \left. - \frac{y^2}{x^2} \left(\frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} - \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y+x} \right) \right. \\
& \left. - 3x^{-\nu} \frac{y}{x} \left(\frac{y^{\nu-} - x^{\nu-s}}{y-x} - \frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y+x} \right) \right. \\
& \left. + 3 \frac{y}{x} \left(\frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} - \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y+x} \right) \right] \\
& - \frac{3\alpha}{4\pi}B \left(\frac{1}{2} + a_3 + a_6 \right) \int_x^{\Lambda^2} dy \left[x^{-\nu} \frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y-x} - \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} \right] \\
& - \frac{3\alpha}{4\pi}Ba_6 \int_x^{\Lambda^2} dy \left[x^{-\nu} \frac{x}{y} \frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y-x} - \frac{x}{y} \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} \right] \\
& + \frac{\alpha}{16\pi}Ba_2 \int_x^{\Lambda^2} dy \left[x^{-\nu} \frac{x}{y} \left(\frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y-x} - \frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y+x} \right) \right. \\
& \left. - \frac{x}{y} \left(\frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} - \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y+x} \right) \right. \\
& \left. - 3x^{-\nu} \left(\frac{y^{\nu-} - x^{\nu-s}}{y-x} - \frac{y^{\nu-s} - x^{\nu-s}}{y+x} \right) \right. \\
& \left. + 3 \left(\frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} - \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y+x} \right) \right]
\end{aligned}$$

Utilizando las soluciones a las integrales del apéndice B y las formas del apéndice C, podemos simplificar la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Ax^\nu} = & \frac{3\alpha}{8\pi} \left\{ -\frac{2}{3}\xi \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu + \frac{1}{s-\nu-1} \right] \right. \\
& + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{2}{\nu-s} + \frac{2}{\nu-s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{\nu-s} \\
& - \pi \cot \pi\nu - \pi \cot \pi s \\
& + 2 \left(\frac{1}{2} + a_3 + a_6 \right) \left[\pi \cot \pi(\nu-s) + \pi \cot \pi s \right. \\
& \left. - \frac{1}{\nu-s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{\nu-s} - \frac{1}{s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{-s} \right] \\
& - 2a_6 \left[\frac{1}{\nu-s} + \frac{1}{\nu-s+1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right. \\
& \left. - \pi \cot \pi(\nu-s) - \pi \cot \pi s \right] \\
& + \frac{1}{6}a_2 \left[-\frac{2}{\nu-s} + \frac{2}{\nu-s+1} - \frac{2}{s} - \frac{2}{1-s} \right. \\
& + 2\pi \cot \pi(\nu-s) + 2\pi \cot \pi s \\
& \left. + 4 \left(\bar{\psi} \left(\frac{s}{2} \right) - \bar{\psi}(s) - \bar{\psi} \left(\frac{\nu-s}{2} \right) + \bar{\psi}(\nu-s) \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

para $-1 < (\nu-s) < 1$, $-1 < -s < 1$ y $-2 < \nu < 1$.

Reacomodando,

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi}{3\alpha Ax^\nu} = & -\frac{2}{3}\xi \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu + \frac{1}{s-\nu-1} \right] \\
& + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{2}{s-\nu} - \pi \cot \pi\nu - \pi \cot \pi(s-\nu) \\
& - \frac{1}{3}a_2 \left[-\frac{1}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \pi \cot \pi(s-\nu) - \pi \cot \pi s \right. \\
& \left. - 2 \left(\bar{\psi} \left(\frac{s}{2} \right) - \bar{\psi}(s) - \bar{\psi} \left(\frac{\nu-s}{2} \right) + \bar{\psi}(\nu-s) \right) \right] \\
& + 2a_3 [\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi(s-\nu)] \\
& - 2a_6 \left[-\frac{1}{s-\nu} - \frac{1}{s-\nu-1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \pi \cot \pi(s-\nu) - \pi \cot \pi s \right] \\
& - 2 \left[\frac{1}{2} + a_3 + a_6 \right] \left[\frac{1}{\nu-s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{\nu-s} - \frac{1}{s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{-s} \right] + \frac{2}{\nu-s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{\nu-s}
\end{aligned}$$

De manera similar que para el vértice CP, imponemos las siguientes cotas para librarnos de las divergencias:

$$-1 < (\nu - s) < 0 \text{ y } -1 < -s < 0, \text{ con } -2 < \nu < 1 \Rightarrow s > \nu \text{ y } s > 0$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{8\pi}{3\alpha Ax^\nu} = & -\frac{2}{3}\xi \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu + \frac{1}{s-\nu-1} \right] \\ & + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{2}{s-\nu} \\ & - \pi \cot \pi\nu - \pi \cot \pi(s-\nu) \\ & - \frac{1}{3}a_2 \left[-\frac{1}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \right] \\ & + \pi \cot \pi(s-\nu) - \pi \cot \pi s \\ & - 2 \left(\bar{\psi} \left(\frac{s}{2} \right) - \bar{\psi}(s) - \bar{\psi} \left(\frac{\nu-s}{2} \right) + \bar{\psi}(\nu-s) \right) \\ & + 2a_3 [\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi(s-\nu)] \\ & - 2a_6 \left[-\frac{1}{s-\nu} - \frac{1}{s-\nu-1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right] \\ & + 2\pi \cot \pi(s-\nu) - 2\pi \cot \pi s \end{aligned} \tag{3.29}$$

Nuevamente obtendremos la ecuación (3.18) si comparamos los coeficientes de x^ν . No obstante, obtenemos una nueva ecuación al comparar los coeficientes de x^0 , de esta forma

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{2}{3}\xi \left[\frac{1}{\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} \right] \\ & + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{2}{s-\nu} - \pi \cot \pi\nu - \pi \cot \pi(s-\nu) \\ & - \frac{1}{3}a_2 \left[-\frac{1}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \pi \cot \pi(s-\nu) - \pi \cot \pi s \right] \\ & - 2 \left(\bar{\psi} \left(\frac{s}{2} \right) - \bar{\psi}(s) - \bar{\psi} \left(\frac{\nu-s}{2} \right) + \bar{\psi}(\nu-s) \right) \\ & + 2a_3 [\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi(s-\nu)] \\ & - 2a_6 \left[-\frac{1}{s-\nu} - \frac{1}{s-\nu-1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + 2\pi \cot \pi(s-\nu) - 2\pi \cot \pi s \right] \end{aligned} \tag{3.30}$$

Simplificando, tenemos

$$\begin{aligned}
\xi = & \frac{3\nu(\nu-s+1)}{2(1-s)} \left\{ -\pi \cot \pi\nu - \pi \cot \pi(s-\nu) \right. \\
& + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{2}{s-\nu} \\
& + \left(2a_3 + \frac{a_2}{3} + 4a_6 \right) [\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi(s-\nu)] \\
& - \left(\frac{a_2}{3} - 2a_6 \right) \left[\frac{1}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \right] \\
& \left. - \frac{2}{3}a_2 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-\nu} - \bar{\psi}\left(\frac{s}{2}\right) + \bar{\psi}(s) + \bar{\psi}\left(\frac{\nu-s}{2}\right) - \bar{\psi}(\nu-s) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Además necesitamos que $\frac{\partial \xi}{\partial s} = 0$. De (3.30) tenemos que

$$\begin{aligned}
\xi = & -\frac{3}{2}(\nu-s+1)^2 \left\{ \pi^2 \csc^2 \pi(s-\nu) - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{2}{(s-\nu)^2} \right. \\
& - \left(2a_3 + \frac{a_2}{3} + 4a_6 \right) [\pi^2 \csc^2 \pi s - \pi^2 \csc^2 \pi(s-\nu)] \\
& + \left(\frac{a_2}{3} - 2a_6 \right) \left[\frac{1}{(s-\nu)^2} + \frac{1}{(s-\nu-1)^2} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(1-s)^2} \right] \\
& \left. - \frac{2}{3}a_2 \left[-\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s-\nu)^2} - \bar{\psi}'\left(\frac{s}{2}\right) + \bar{\psi}'(s) + \bar{\psi}'\left(\frac{\nu-s}{2}\right) - \bar{\psi}'(\nu-s) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde $\bar{\psi}'(x) = \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x}$.

Así, nuestras ecuaciones a resolver simultáneamente son (3.21), (3.31) y (3.32), ya que la que derivamos para $F(x)$ sigue siendo la misma, para las variables α , ν y s , con un valor fijo de la norma ξ . Por otro lado, tenemos 3 parámetros libres, a_2 , a_3 y a_6 , así que debemos encontrar la mejor combinación de estos de tal forma que se reduzca la dependencia de norma.

Además sabemos de la teoría de perturbaciones que, para momento grande, el comportamiento del vértice nos impone la siguiente restricción:

$$a_3 + a_6 = \frac{1}{2} \tag{3.33}$$

Por lo que nuestro sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\alpha\xi}{4\pi\nu} + \frac{\alpha}{4\pi}(1 - 2a_6) \left[\frac{3}{2} + \pi \cot \pi\nu - \frac{1}{\nu+2} - \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu} \right] \\
\xi &= \frac{3\nu(\nu-s+1)}{2(1-s)} \left\{ -\pi \cot \pi\nu - \pi \cot \pi(s-\nu) \right. \\
&\quad + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{2}{s-\nu} \\
&\quad + \left(1 + \frac{a_2}{3} + a_6\right) [\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi(s-\nu)] \\
&\quad - \left(\frac{a_2}{3} - 2a_6\right) \left[\frac{1}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \right] \\
&\quad \left. - \frac{2}{3}a_2 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-\nu} - \bar{\psi}\left(\frac{s}{2}\right) + \bar{\psi}(s) + \bar{\psi}\left(\frac{\nu-s}{2}\right) - \bar{\psi}(\nu-s) \right] \right\} \\
\xi &= -\frac{3}{2}(\nu-s+1)^2 \left\{ \pi^2 \csc^2 \pi(s-\nu) - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{2}{(s-\nu)^2} \right. \\
&\quad - \left(1 + \frac{a_2}{3} + 2a_6\right) [\pi^2 \csc^2 \pi s - \pi^2 \csc^2 \pi(s-\nu)] \\
&\quad + \left(\frac{a_2}{3} - 2a_6\right) \left[\frac{1}{(s-\nu)^2} + \frac{1}{(s-\nu-1)^2} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(1-s)^2} \right] \\
&\quad \left. - \frac{2}{3}a_2 \left[-\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s-\nu)^2} - \bar{\psi}'\left(\frac{s}{2}\right) + \bar{\psi}'(s) + \bar{\psi}'\left(\frac{\nu-s}{2}\right) - \bar{\psi}'(\nu-s) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Al resolver esto obtenemos el resultado que se presenta en la figura (3.3), donde se ha elegido $a_2 = 2.75$ y $a_6 = -0.5$. Podemos ver que se reduce la dependencia de norma en un 15% con respecto al vértice CP. Por otro lado, la elección de estos coeficientes no es única y, a falta de un método o una constricción extra, solo podemos suponer que debe existir otra pareja de números que mejore este resultado.

En el siguiente capítulo daremos una propuesta que exhibe una variación mucho más pequeña que las mostradas hasta ahorita, basada en la fenomenología de los resultados experimentales.

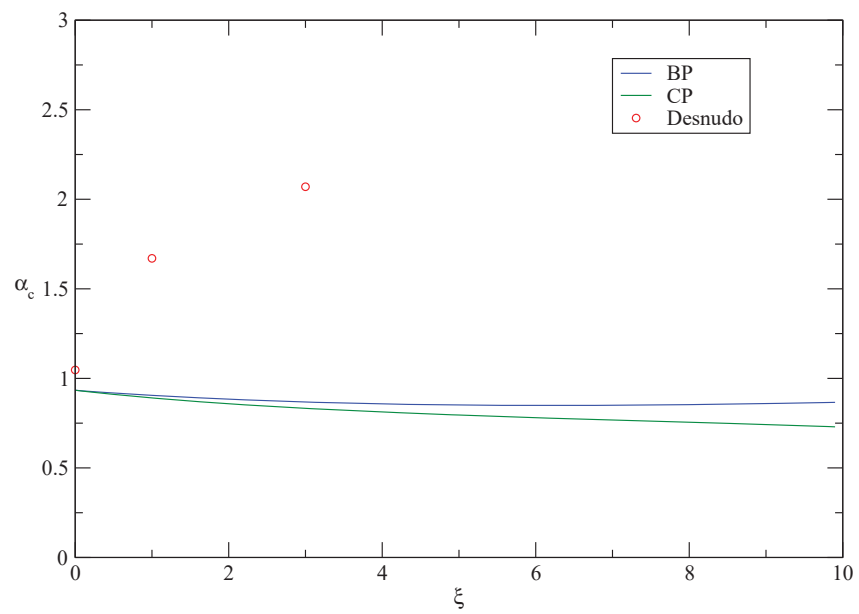


Fig. 3.3: Gráfica de α_c vs. ξ , para el vértice de Bashir-Pennington, comparando con los vértices CP y desnudo.

Capítulo 4

Propuesta para el vértice

La idea de este trabajo es presentar un *ansatz* para el vértice que asegure la invariancia de L norma. Nuestra propuesta consiste en lo siguiente:

$$\Gamma^\mu(k, p) = \Gamma_{BC}^\mu(k, p) + \Gamma_T^\mu(k, p) \quad (4.1)$$

donde elegimos

$$\Gamma_T^\mu(k, p) = \sum_{i=2,3,6,8} \tau_i(k^2, p^2) T_i^\mu(k, p) + \Gamma_{MMA}^\mu(k, p) \quad (4.2)$$

Este nuevo *ansatz*, se sustenta en las mismas motivaciones del capítulo anterior para el vértice Bashir-Pennington y en los resultados fenomenológicos del artículo [7] de Chang, Liu y Roberts sobre la inclusión de los factores de forma que estén relacionados con el *momento magnético anómalo*.

4.1 Momento magnético anómalo para *quarks*

Es sabido que en la mecánica cuántica relativista, un fermión que interacciona con un campo electromagnético adquiere un momento magnético igual a $\frac{q}{2m}$. Históricamente se encontraba cierta discrepancia entre el resultado predicho teóricamente y el experimental que esta teoría no podía explicar. Usando QED, podemos corregir esto, definiendo un momento magnético anómalo para el electrón. De tal forma que

$$\frac{q}{2m} \rightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \frac{q}{2m}$$

Lo anterior no es posible si tenemos una teoría como QED para fermiones sin masa. Aquí la transformación quiral global es una simetría de esta interacción. Si recordamos que en QED no tenemos generación dinámica de masas, debido a la falta de autointeracciones de los bosones de norma, es natural relacionar el rompimiento dinámico de la simetría con el momento magnético anómalo. Esto se sustenta en que, para QCD con fermiones sin masa, tenemos tanto masa generada dinámicamente como una contribución a este momento magnético.

Para ser más exactos, los fermiones sin masa no poseen momento magnético anómalo en una teoría de norma. Sin embargo, si la simetría quiral es rota fuerte y dinámicamente entonces los fermiones deberían tener momento magnético anómalo.

Chang, Liu y Roberts estudian la relación de incluir los términos con τ_4 y τ_5 en la función del vértice con el momento magnético anómalo. Encuentran que el momento cromomagnético es sumamente dependiente del factor de forma τ_5 y este tiene un impacto grande en las propiedades de algunos sistemas de *quarks* ligeros. A su vez, este momento cromomagnético genera un momento electromagnético anómalo sobre los *quarks*, así como divergencias en Λ^2 . Para contrarrestar esto, es conveniente agregar el factor de forma τ_4 .

Así, concluyen que tanto τ_4 como τ_5 son importantes en la descripción de hadrones. Además, utilizan esto para explicar la diferencia de masas entre las parejas de paridad; en este caso, los mesones ρ y a_1 . En la tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos, en *MeV*. Aquí, el vértice completo se refiere a un *ansatz* con los factores de forma τ_4 y τ_5 .

	Experimento	Vértice desnudo	Corrección a un lazo	Ball y Chiu	Vértice completo
a_1	1230	759	885	1066	1230
ρ	770	644	764	924	745
Diferencia de masas	455	115	121	142	485

Tabla 4.1: Resultados generados con distintos tipos de vértice y comparados con el experimento.

Considerando lo anterior, haremos una propuesta acorde a esta fenomenología para nuestro *ansatz*.

4.1.1 Sobre la base de Chang, Liu y Roberts

Cabe mencionar que la base usada en este artículo difiere con la de Ball y Chiu, que es la que nosotros usamos. La elección de ellos es la siguiente:

$$\begin{aligned} T_4^\mu &= \left[l^\mu - q^\mu \frac{q \cdot l}{q^2} \right] \not{q} + i \left[\gamma^\mu - q^\mu \frac{\not{q}}{q^2} \right] \sigma^{\nu\rho} l_\nu q_\rho \\ T_5^\mu &= \sigma^{\mu\nu} q_\nu \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $2l = k + p$ y $q = k - p$, con $\sigma'_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

Recordemos que en la base que usamos tenemos

$$\begin{aligned} T_4^\mu(k, p) &= [p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q)] p^\nu k^\rho \sigma_{\nu\rho} \\ T_5^\mu(k, p) &= \sigma^{\mu\nu} q_\nu \end{aligned}$$

Al comparar podemos ver que T_5 es la misma para ambas bases, mientras que los T_4 son muy distintos entre sí. Asimismo, T_4 de CLR no se parece a ningún vector de la base de Ball y Chiu.

Entonces, lo único que tenemos claro es que τ_5 debe tener contribución al momento magnético anómalo. Esto lo podemos ver más claro en la expresión, en QED, de la corriente electromagnética generada por la interacción,

$$ie\bar{u}(k) \left[\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{1}{2m} \sigma_{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2) \right] u(p)$$

donde $F_2(q^2)$ es el factor de forma relacionado con el momento magnético anómalo.

De esta forma, consideraremos que los τ_i que puedan contrarrestar las divergencias que cause la inclusión de τ_5 también tienen contribución al momento magnético anómalo.

4.2 Forma matemática

Ahora vamos a considerar algunos términos que no tomamos en cuenta en la sección 3.5. En particular, vamos a agregar los términos de τ_4 , τ_5 y τ_7 , escritos como en las ecuaciones (3.12) y (3.14).

4.2.1 Ecuación para $F(x)$

Como mencionamos en la sección 3.5.1, bajo la aproximación de $M^2 \rightarrow 0$, el único parámetro que importa es a_6 sin importar cuantos términos de τ_i agreguemos. Esto nos lleva nuevamente a obtener

$$F(p^2) = \frac{4\pi\nu}{\alpha\xi} \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^\nu$$

así como la ecuación (3.21)

$$1 = \frac{\alpha\xi}{4\pi\nu} + \frac{\alpha}{4\pi}(1 - 2a_6) \left[\frac{3}{2} + \pi \cot \pi\nu - \frac{1}{\nu+2} - \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu} \right]$$

con $-2 < \nu < 1$.

Además, seguimos teniendo la constricción (3.20)

$$1 + (a_2 + 2a_3 + 2a_8) - 2a_6 = 0$$

Entonces, podemos concluir que, bajo esta aproximación, solo pesan los términos de τ_i para $i = 2, 3, 6$ y 8 para esta ecuación pero solo toma importancia el término de τ_6 .

Por otro lado, la ecuación para $M(x)$ no es tan simple. Por ello vamos a agregar los términos integrales correspondientes a los τ_i extras de la ecuación (3.14) y seguiremos el procedimiento antes realizado, tomando las mismas consideraciones que hicimos para pasar de (3.15) a (3.29). Recordemos que los términos aún no agregados son τ_1 , τ_4 , τ_5 y τ_7 . Siguiendo con la propuesta de CLR, empezaremos agregando τ_4 y τ_5 .

4.2.2 Agregando τ_5

La integral a agregar a (3.15) es la siguiente:

$$\begin{aligned} I_5 &= -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{F(y)}{y} \left[\frac{y}{x} \left\{ -a_5 \frac{1}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2}y \right] \right\} \theta(x-y) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -a_5 \frac{1}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{3}{2}(2y-x) \right] \right\} \theta(y-x) \right] \\ &= \frac{3\alpha}{8\pi} a_5 \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{F(y)}{y-x} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{y}{x} \theta(x-y) + \left\{ 2 - \frac{x}{y} \right\} \theta(y-x) \right] \end{aligned}$$

Tomando las formas para $M(x)$ y $F(x)$ propuestas en (3.16), además de las ecuaciones (3.23), podemos reescribir

$$I_5 = \frac{3\alpha}{8\pi} a_5 B \int_0^{\Lambda^2} dy \left[\frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} - x^{-s-\nu} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} \right] \left[\frac{y}{x} \theta(x-y) + \left\{ 2 - \frac{x}{y} \right\} \theta(y-x) \right]$$

o bien,

$$I_5 = \frac{3\alpha}{8\pi} a_5 B \left[\int_0^x dy \left\{ \frac{y y^{-s} - x^{-s}}{x y - x} - x^{-s-\nu} \frac{y y^\nu - x^\nu}{x y - x} \right\} \right. \\ \left. + 2 \int_x^{\Lambda^2} dy \left\{ \frac{y^{-s} - x^{-s}}{y - x} - x^{-s-\nu} \frac{y^\nu - x^\nu}{y - x} \right\} \right. \\ \left. - \int_x^{\Lambda^2} dy \left\{ \frac{x y^{-s} - x^{-s}}{y y - x} - x^{-s-\nu} \frac{x y^\nu - x^\nu}{y y - x} \right\} \right]$$

Usando el apéndice B para las integrales radiales, tenemos

$$I_5 = \frac{3\alpha}{8\pi} a_5 B x^{-s} \left\{ \psi(2-s) - \psi(2+\nu) - \psi(1+s) + \psi(1-\nu) \right. \\ \left. + 2 \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{-s} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \right] \right\}$$

con $-2 < \nu < 1$ y $-2 < -s < 1$.

Pero $-1 < -s < 0$ es una de las condiciones impuestas en el capítulo anterior. Entonces

$$I_5 = \frac{3\alpha}{8\pi} a_5 B x^{-s} \left\{ \psi(2-s) - \psi(2+\nu) - \psi(1+s) + \psi(1-\nu) + \frac{2}{s} + \frac{2}{\nu} - \frac{2}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \right\}$$

Multiplicando por $\frac{8\pi x^s}{3\alpha B}$ y usando el apéndice C , tenemos

$$\frac{8\pi}{3\alpha} B x^s I_5 = a_5 \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{1+\nu} - \frac{2}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu + \pi \cot \pi s + \pi \cot \pi \nu \right\}$$

(4.4)

4.2.3 Agregando τ_4

En este caso, la integral a agregar es

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{F(y)}{y} \\
&\quad \times \left[\frac{y}{x} \left\{ -a_4 \frac{1}{yx(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{y^2}{8}(4x-y) \right] \right\} \theta(x-y) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ -a_4 \frac{1}{yx(y-x)} \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \left[\frac{x}{8}(6y^2 - 4xy + x^2) \right] \right\} \theta(y-x) \right] \\
&= \frac{\alpha}{32\pi} a_4 \int_0^{\Lambda^2} dy F(y) \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \frac{1}{yx(y-x)} \\
&\quad \times \left[\left\{ 4y^2 - \frac{y^3}{x} \right\} \theta(x-y) + \left\{ 6xy - 4x^2 + \frac{x^3}{y} \right\} \theta(y-x) \right] \\
&= \frac{\alpha}{32\pi} a_4 \int_0^{\Lambda^2} dy F(y) \left[\frac{M(y)}{F(y)} - \frac{M(x)}{F(x)} \right] \frac{1}{y-x} \\
&\quad \times \left[\left\{ 4\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \right\} \theta(x-y) + \left\{ 6 - 4\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} \right\} \theta(y-x) \right]
\end{aligned}$$

Usando nuevamente las formas (3.16) y los resultados del apéndice B, podemos reescribir lo anterior como

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{\alpha}{32\pi} a_4 B \int_0^{\Lambda^2} dy \left[\frac{y^{-s} - x^{-s}}{y-x} - x^{-s-\nu} \frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} \right] \\
&\quad \times \left[\left\{ 4\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \right\} \theta(x-y) + \left\{ 6 - 4\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} \right\} \theta(y-x) \right] \\
&= \frac{\alpha}{32\pi} a_4 B x^{-s} \left\{ \psi(\nu+3) - 4\psi(\nu+2) + 3\psi(1-\nu) \right. \\
&\quad \left. - \psi(3-s) + 4\psi(2-s) - 3\psi(1+s) \right. \\
&\quad \left. + \frac{6}{\nu} - \frac{1}{\nu-1} + \frac{6}{s} - \frac{1}{1+s} - \frac{6}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu - \frac{6}{s} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^{-s} \right\}
\end{aligned}$$

con $-2 < \nu < 1$ y $-2 < -s < 1$.

Pero la condición de $-1 < -s < 0$ nos lleva a

$$I_4 = \frac{\alpha}{32\pi} a_4 B x^{-s} \left\{ \psi(\nu + 3) - 4\psi(\nu + 2) + 3\psi(1 - \nu) \right. \\ \left. - \psi(3 - s) + 4\psi(2 - s) - 3\psi(1 + s) \right. \\ \left. + \frac{6}{\nu} - \frac{1}{\nu - 1} + \frac{6}{s} - \frac{1}{1 + s} - \frac{6}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \right\}$$

Multiplicando por $\frac{8\pi x^s}{3\alpha B}$ y usando las simplificaciones del apéndice C tenemos

$$\frac{8\pi x^s}{3\alpha B} I_4 = \frac{a_4}{12} \left\{ \frac{3}{\nu} - \frac{1}{\nu - 1} - \frac{1}{\nu + 1} + \frac{1}{\nu + 2} \right. \\ \left. + \frac{3}{s} - \frac{1}{1 + s} + \frac{3}{1 - s} - \frac{1}{2 - s} \right. \\ \left. + 3\pi \cot \pi s + 3\pi \cot \pi \nu - \frac{6}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \right\}$$

(4.5)

4.2.4 Ecuaciones finales

Ahora sumamos (4.4) y (4.5) a la ecuación (3.29), de esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi}{3\alpha Ax^\nu} = & -\frac{2}{3}\xi \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu + \frac{1}{s-\nu-1} \right] \\
& + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{2}{s-\nu} \\
& - \pi \cot \pi\nu - \pi \cot \pi(s-\nu) \\
& - \frac{1}{3}a_2 \left\{ -\frac{1}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \right. \\
& + \pi \cot \pi(s-\nu) - \pi \cot \pi s \\
& \left. - 2 \left[\bar{\psi} \left(\frac{s}{2} \right) - \bar{\psi}(s) - \bar{\psi} \left(\frac{\nu-s}{2} \right) + \bar{\psi}(\nu-s) \right] \right\} \\
& + 2a_3 \left\{ \pi \cot \pi s - \pi \cot \pi(s-\nu) \right\} \\
& - 2a_6 \left\{ -\frac{1}{s-\nu} - \frac{1}{s-\nu-1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right. \\
& \left. + 2\pi \cot \pi(s-\nu) - 2\pi \cot \pi s \right\} \\
& + a_5 \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{1+\nu} - \frac{2}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \right. \\
& \left. + \pi \cot \pi s + \pi \cot \pi\nu \right\} \\
& + \frac{a_4}{12} \left\{ \frac{3}{\nu} - \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} \right. \\
& + \frac{3}{s} - \frac{1}{1+s} + \frac{3}{1-s} - \frac{1}{2-s} \\
& \left. + 3\pi \cot \pi s + 3\pi \cot \pi\nu - \frac{6}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \right\}
\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi}{3\alpha Ax^\nu} = & -\frac{2}{3}\xi \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu + \frac{1}{s-\nu-1} \right] \\
& + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{2}{s-\nu} \\
& - \pi \cot \pi\nu - \pi \cot \pi(s-\nu) \\
& + \left(2a_3 + \frac{a_2}{3} + 4a_6 \right) [\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi(s-\nu)] \\
& - \left(\frac{a_2}{3} - 2a_6 \right) \left[\frac{1}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \right] \\
& - \frac{2}{3}a_2 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-\nu} - \bar{\psi} \left(\frac{s}{2} \right) + \bar{\psi}(s) + \bar{\psi} \left(\frac{\nu-s}{2} \right) - \bar{\psi}(\nu-s) \right] \\
& - \frac{a_4}{12} \left[\frac{1}{1+s} + \frac{1}{2-s} + \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu+2} \right] \\
& + \left(\frac{a_4}{4} + a_5 \right) \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{1+\nu} \right] \\
& + \pi \cot \pi s + \pi \cot \pi\nu - \frac{2}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \Big]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Al comparar los coeficientes de x^ν , tenemos que

$$\frac{8\pi}{3\alpha Ax^\nu} = \frac{2}{3}\xi \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu - \left(\frac{a_4}{2} + 2a_5 \right) \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu$$

Para mantener la forma de (3.19), es decir, para que $F(p^2)$ sea multiplicativamente renormalizable y con coeficiente dado por (3.18), debemos imponer la condición

$$\frac{a_4}{2} + 2a_5 = 0 \tag{4.7}$$

Aplicando esta constricción y la de (3.33), que relaciona a_3 con a_6 , podemos comparar los coeficientes de x^0 en (4.6), de esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}
\xi = & \frac{3}{2} \frac{\nu(\nu-s+1)}{1-s} \left\{ -\pi \cot \pi\nu - \pi \cot \pi(s-\nu) \right. \\
& + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{2}{s-\nu} \\
& + \left(1 + \frac{a_2}{3} + 2a_6\right) [\pi \cot \pi s - \pi \cot \pi(s-\nu)] \\
& - \left(\frac{a_2}{3} - 2a_6\right) \left[\frac{1}{s-\nu} + \frac{1}{s-\nu-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \right] \\
& - \frac{2}{3} a_2 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-\nu} - \bar{\psi}\left(\frac{s}{2}\right) + \bar{\psi}(s) + \bar{\psi}\left(\frac{\nu-s}{2}\right) - \bar{\psi}(\nu-s) \right] \\
& \left. - \frac{a_4}{12} \left[\frac{1}{1+s} + \frac{1}{2-s} + \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu+2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Mientras que de la condición $\frac{\partial \xi}{\partial s} = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\xi = & -\frac{3}{2}(\nu-s+1)^2 \left\{ \pi^2 \csc^2 \pi(s-\nu) - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{2}{(s-\nu)^2} \right. \\
& - \left(1 + \frac{a_2}{3} + 2a_6\right) [\pi^2 \csc^2 \pi s - \pi^2 \csc^2 \pi(s-\nu)] \\
& + \left(\frac{a_2}{3} - 2a_6\right) \left[\frac{1}{(s-\nu)^2} + \frac{1}{(s-\nu-1)^2} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(1-s)^2} \right] \\
& - \frac{2}{3} a_2 \left[-\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s-\nu)^2} - \bar{\psi}'\left(\frac{s}{2}\right) + \bar{\psi}'(s) + \bar{\psi}'\left(\frac{\nu-s}{2}\right) - \bar{\psi}'(\nu-s) \right] \\
& \left. + \frac{a_4}{12} \left[\frac{1}{(1+s)^2} - \frac{1}{(2-s)^2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Así que nuestras ecuaciones a resolver simultáneamente son (3.21), (4.8) y (4.9), para las variables α , ν y s , con un valor dado de la norma ξ , en el rango de $-2 < \nu < 1$ y $-1 < -s < 0$. Por otro lado, ahora contamos con 3 parámetros libres porque no hay restricciones para los coeficientes a_2 , a_4 y a_6 por lo que hacer la elección de una triada que asegure la independencia de norma se vuelve algo difícil.

En la figura 4.1 podemos ver el resultado de graficar α_c vs. ξ para $a_2 = 2.75$, $a_4 = -3$ y $a_6 = 0.5$. Evidentemente la independencia de norma es mucho más notoria que en los otros casos y mejora hasta en un 8% los resultados del vértice BP. Sin embargo, la pequeña variación de α_c

nos muestra que el nuevo vértice no es la solución exacta. En otras palabras, mejora mucho los resultados pero no los deja perfectos.

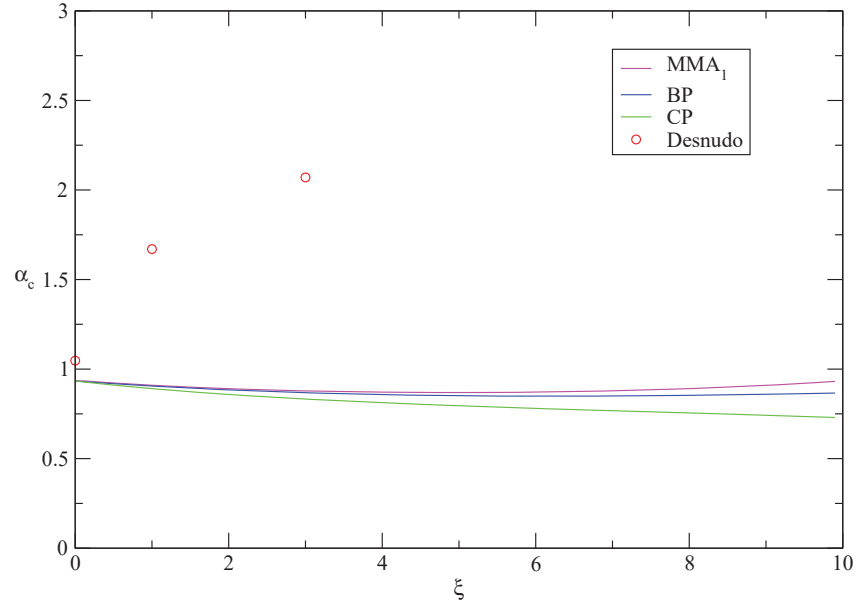


Fig. 4.1: Gráfica de α_c vs. ξ , para este vértice al que llamamos MMA_1 , en comparación con los vértices BP, CP y desnudo.

Por otro lado, regresemos a la restricción (4.7),

$$\frac{a_4}{2} + 2a_5 = 0$$

Podemos notar de la ecuación anterior que si $a_5 = 0$ entonces, necesariamente, $a_4 = 0$. De igual forma, si $a_4 = 0$ entonces, necesariamente, $a_5 = 0$. Es decir, estos términos deben ir juntos en el vértice y ser distintos de cero a fin de tener una contribución no trivial. Así, necesitamos incluir τ_4 para contrarrestar las divergencias de τ_5 . Esto es congruente con los resultados del artículo de Chang, Liu y Roberts expuestos en la sección anterior.

4.3 Los términos con τ_1 y τ_7

Hasta este momento hemos utilizado 6 de los 8 posibles τ_i . Vimos que agregar τ_2 , τ_3 , τ_6 y τ_8 es conveniente porque esta elección aparece de forma natural en la ecuación para $F(x)$ en la

aproximación $M^2 \rightarrow 0$. Por otro lado, la fenomenología nos invita a probar τ_4 y τ_5 , pero aún podríamos tener otra contribución al momento magnético anómalo de los términos que faltan.

A continuación veremos a grandes rasgos la dependencia del acoplamiento crítico con la norma al agregar estos dos coeficientes.

4.3.1 El término de τ_1

Al agregar τ_1 nos lleva a la siguiente expresión que debemos sumar en la ecuación (4.8)

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3}a_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{s} + \frac{1}{1-s} + \frac{3}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} - \pi \cot \pi s - \pi \cot \pi \nu + \pi \cot \frac{\pi}{2}s + \pi \cot \frac{\pi}{2}\nu \right) \right. \\ & \left. - \psi \left(-\frac{s}{2} \right) + \bar{\psi}(s) - \frac{1}{2}\bar{\psi} \left(\frac{s}{2} \right) + \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - \bar{\psi}(\nu) + \frac{1}{2}\bar{\psi} \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

y su respectivo para la ecuación (4.9).

Hasta aquí tendremos un total de 4 parámetros libres correspondientes a los coeficientes a_1 , a_2 , a_4 y a_6 . Más aún, el agregar τ_1 complica la estructura del vértice ya que, por si sola, significa una expresión más complicada que el resto y una constante más a adivinar. Además, no tenemos contribución a las divergencias de τ_5 , por lo que este término no es conveniente para agregar.

4.3.2 El término de τ_7

Al hacer el respectivo desarrollo algebraico sobre el término de τ_7 obtenemos que se debe de agregar a la ecuación (4.8) lo siguiente

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{6}a_7 \left[\frac{9}{s} + \frac{5}{1-s} + \frac{9}{\nu} - \frac{5}{\nu+1} - \frac{6}{\nu} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\nu \right. \\ & - 2\pi \cot \pi s - 2\pi \cot \pi \nu + \frac{1}{2}\pi \cot \frac{\pi}{2}s + \frac{1}{2}\pi \cot \frac{\pi}{2}\nu \\ & + 6\psi(-s) - 7\psi \left(-\frac{s}{2} \right) + \bar{\psi}(s) - \frac{1}{2}\bar{\psi} \left(\frac{s}{2} \right) \\ & \left. - 6\psi(\nu) + 7\psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - \bar{\psi}(\nu) + \frac{1}{2}\bar{\psi} \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] \Big\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

y el correspondiente término derivado con respecto a s , a la ecuación (4.9).

Además, de la forma de la renormalización de la función de onda, obtenemos la siguiente restricción:

$$\frac{1}{2}a_4 + 2a_5 + a_7 = 0 \quad (4.12)$$

de donde podemos ver que τ_7 también tiene contribución al momento magnético anómalo.

4.3.3 Resultados para los términos con momento magnético anómalo

En vista de que no tenemos un método o más restricciones distintas para establecer los valores de las a_i , evidentemente se vuelve más complicado fijar los valores para estas. Sin embargo queda valorar la importancia que tienen estos términos sobre los resultados.

En la figura 4.2 graficamos el vértice BP como fue propuesto y agregamos las versiones que tienen contribución al momento magnético anómalo. El vértice MMA_1 es el mismo que en la sección anterior; mientras que el MMA_2 tiene las contribuciones solo de τ_5 y τ_7 , con $a_2 = 3$, $a_6 = -0.55$ y $a_7 = -0.15$; finalmente, el vértice llamado MMA_3 contiene las tres contribuciones, eligiendo $a_2 = 3$, $a_4 = -0.5$, $a_6 = -0.6$ y $a_7 = -0.15$. Podemos ver que los resultados se mejoran con la adición de τ_7 , para todos los casos.

Haciendo un acercamiento a estas curvas, tenemos lo mostrado en la figura 4.3. Aquí vemos que agregar τ_7 nos lleva a tener curvas similares. Además, pese a que τ_4 mejora los resultados de las secciones previas, no tiene mucha importancia con respecto a τ_7 .

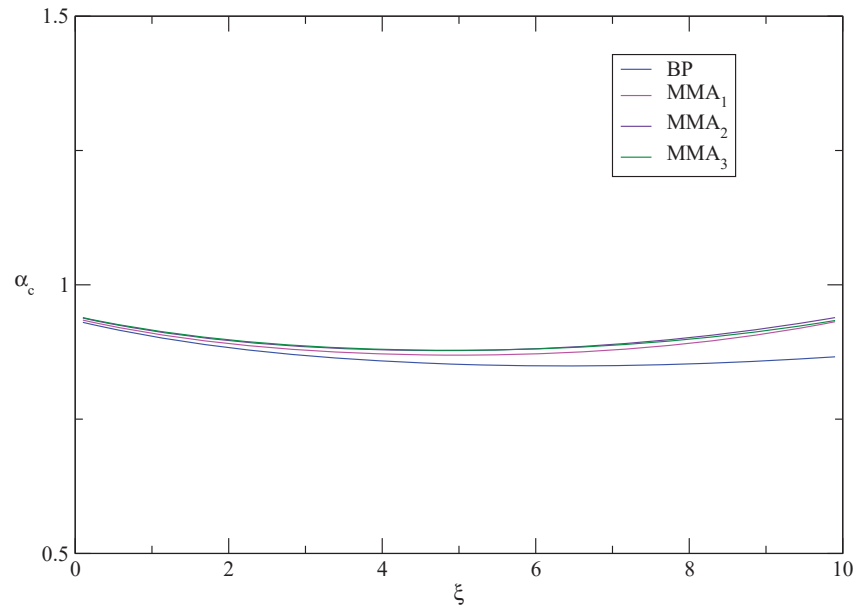


Fig. 4.2: Gráfica de α_c vs. ξ , para los vértices con contribuciones al momento magnético anómalo.

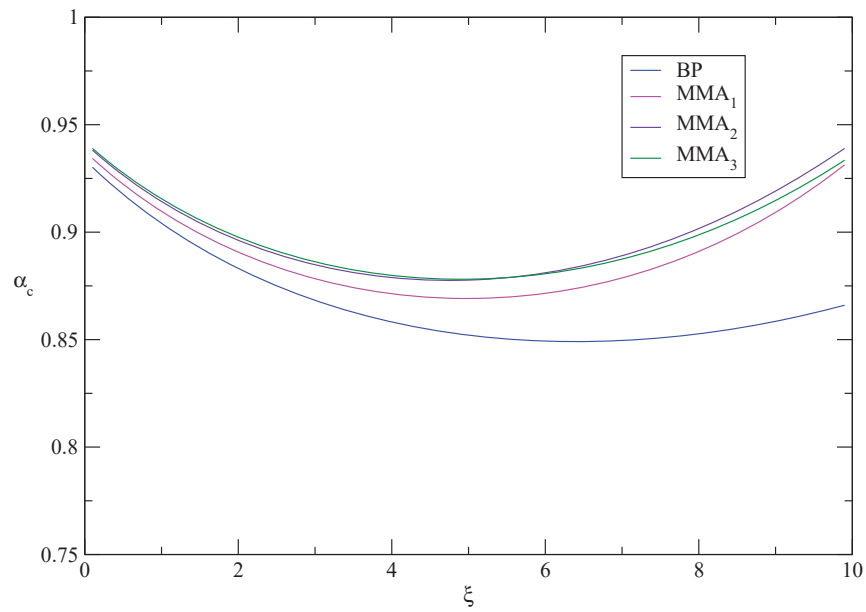


Fig. 4.3: Acercamiento de la figura 4.2.

Conclusiones

Podemos explicar la diferencia entre la masa desnuda de los *quarks* con respecto a la que tienen cuando forman un hadrón mediante el mecanismo de la generación dinámica de masas. Esta nos dice que las interacciones entre *quarks* y gluones, así como las autointeracciones de estos últimos, producen un rompimiento dinámico de la simetría quiral.

Durante el desarrollo de este trabajo introdujimos el formalismo de las ESD en QED, involucrando al propagador del fermión escrito en términos de la renormalización de la función de onda $F(p)$ y la función de masa $M(p)$; al propagador del fotón, llevado a la aproximación *quenched*; y al vértice de la interacción fermión-fotón, que es donde se lleva a cabo la dinámica. Asimismo, presentamos el desarrollo a seguir para obtener las dos ecuaciones acopladas e independientes del sistema, utilizando el ejemplo sencillo del vértice desnudo.

Una vez familiarizados con el lenguaje, hablamos de cómo se lleva a cabo la generación dinámica de masa. La idea es partir de ecuaciones donde la masa desnuda de la lagrangiana es igual a cero, es decir, de una teoría con fermiones sin masa, para después ver que la masa física que obtenemos es distinta de cero, para un régimen no perturbativo, esto es $\alpha \sim 1$. Sin embargo, haciendo un desarrollo perturbativo, encontramos que $M(p) = 0$ también es solución, por lo que tenemos una bifurcación en el comportamiento de $M(p)$ con respecto al acoplamiento. Al valor donde α se bifurca lo llamamos valor crítico α_c . En ese punto tenemos un cambio de fase y masa generada.

Cabe mencionar que el proceso antes mencionado se da en QCD, donde el acoplamiento es grande para energías pequeñas, es decir, las energías que corresponden a la formación de los hadrones. Sin embargo el desarrollo del trabajo lo hacemos en QED para acoplamientos efectivos grandes. Además, en la aproximación abeliana, podemos relacionar estas teorías mediante las matrices de color de Gell-Mann como sigue:

$$\Gamma_{qg}^a \sim \frac{\lambda^a}{2} \Gamma_{f\gamma}$$

De esta forma, hacemos un *ansatz* para el vértice de QED basados en los requerimientos que se deben cumplir estructuralmente, presentados en el capítulo 3. Buscamos la invariancia de norma del acoplamiento y damos como ejemplos algunos vértices conocidos que no logran cumplir satisfactoriamente esta meta.

Finalmente proponemos una forma para el vértice, buscando que cumpla con las propiedades que mencionamos: que asegure la invariancia de norma, garantice la renormalización multiplicativa del propagador del fermión y que incorpore la información fenomenológica proporcionada por Chang, Liu y Roberts. La propuesta fue la siguiente:

$$\Gamma^\mu(k, p) = \Gamma_{BC}^\mu(k, p) + \Gamma_T^\mu(k, p)$$

donde

$$\Gamma_T^\mu(k, p) = \sum_{i=2,3,6,8} \tau_i(k^2, p^2) T_i^\mu(k, p) + \Gamma_{MMA}^\mu(k, p)$$

es decir, el vértice completo es la parte de Ball y Chiu más la parte transversa, incorporando los factores de forma τ_i , con $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8 .

Los resultados obtenidos indican lo siguiente

- Podemos ver una mejoría notable en la invariancia de norma del acoplamiento respecto a los vértices desnudo, CP y BP.
- Sin embargo, fallamos en lograr una independencia total entre ξ y α_c . Una razón por la cual llegamos a esto es porque tenemos un exceso de parámetros libres y no contamos con un método para determinar los valores de estos que nos ayuden a lograr la meta.
- Acorde a los resultados de Chang, Liu y Roberts, encontramos que se deben de incluir términos que contribuyan al momento magnético anómalo. En este caso, los factores de forma τ_4 , τ_5 y τ_7 .
- Además, si τ_5 se agrega, por lo menos debe de incorporarse uno de los dos restantes para garantizar la renormalización multiplicativa del propagador fermiónico.
- Comparando la relevancia entre los términos τ_4 y τ_7 , vemos que τ_7 da mejores resultados con respecto a τ_4 .

- La adición del término restante, τ_1 , nos lleva a la inclusión de otro parámetro libre más que no contribuye al momento magnético anómalo.

Por último, cabe señalar que este es el primer trabajo que incorpora y hace un análisis de todos términos del vértice transverso, en un lapso de alrededor de 30 años desde la primera publicación sobre estos temas.

Apéndice A | *Integrales angulares*

Sean I_{nm} integrales angulares con la siguiente forma

$$I_{nm} = \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \frac{(k \cdot p)^n}{(q^2)^m}$$

donde n y m son cero o enteros positivos, mientras que $k \cdot p = kp \cos \psi$ y $q = k - p$.

Algunas soluciones a estas integrales son las siguientes:

$$\begin{aligned} I_{00} &= \frac{\pi}{2} [\theta(p^2 - k^2) + \theta(k^2 - p^2)] \\ I_{01} &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{p^2} \theta(p^2 - k^2) + \frac{1}{k^2} \theta(k^2 - p^2) \right] \\ I_{02} &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - p^2} \left[-\frac{1}{p^2} \theta(p^2 - k^2) + \frac{1}{k^2} \theta(k^2 - p^2) \right] \\ I_{10} &= 0 \\ I_{11} &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{k^2}{p^2} \theta(p^2 - k^2) + \frac{p^2}{k^2} \theta(k^2 - p^2) \right] \\ I_{12} &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - p^2} \left[-\frac{k^2}{p^2} \theta(p^2 - k^2) + \frac{p^2}{k^2} \theta(k^2 - p^2) \right] \\ I_{21} &= \frac{\pi}{8} (k^2 + p^2) \left[\frac{k^2}{p^2} \theta(p^2 - k^2) + \frac{p^2}{k^2} \theta(k^2 - p^2) \right] \\ I_{02} &= \frac{\pi}{8} \frac{1}{k^2 - p^2} \left[-\frac{k^2}{p^2} (3k^2 + p^2) \theta(p^2 - k^2) + \frac{p^2}{k^2} (k^2 + 3p^2) \theta(k^2 - p^2) \right] \\ I_{02} &= \frac{\pi}{16} \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{k^4}{p^2} (2p^2 + k^2) \theta(p^2 - k^2) + \frac{p^4}{k^2} (2k^2 + p^2) \theta(k^2 - p^2) \right] \end{aligned}$$

donde la función $\theta(x - y)$ es la función escalón definida como sigue:

$$\theta(x - y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > y \\ 0, & \text{si } y > x \end{cases}$$

Apéndice B

Integrales radiales

Este apéndice contiene las integrales radiales que usamos para resolver las ecuaciones para $F(x)$ y $M(x)$. La convergencia de estas integrales depende del rango del parámetro λ que impone restricciones en los parámetros s y ν , usados en los capítulos 3 y 4. Además, es conveniente expresar las integrales radiales en términos de la función Digamma (ver apéndice C).

Para el rango de integración entre 0 y x tenemos

$$\int_0^x dy \frac{y^\lambda - x^\lambda}{y - x} = x^\lambda \left[\psi(\lambda) - \psi(1) + \frac{1}{\lambda} \right] \quad \lambda > -1$$

$$\int_0^x dy \frac{y y^\lambda - x^\lambda}{y - x} = x^\lambda \left[\psi(\lambda) - \psi(2) + \frac{1}{\lambda + 1} + \frac{1}{\lambda} \right] \quad \lambda > -2$$

$$\int_0^x dy \frac{y^2 y^\lambda - x^\lambda}{y - x} = x^\lambda \left[\psi(\lambda) - \psi(3) + \frac{1}{\lambda + 2} + \frac{1}{\lambda + 1} + \frac{1}{\lambda} \right] \quad \lambda > -3$$

$$\int_0^x dy \frac{y^\lambda - x^\lambda}{y + x} = x^\lambda \left[\psi\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \psi(\lambda) + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi(1) + \frac{1}{\lambda} + \log 2 - 1 \right] \quad \lambda > -2$$

$$\int_0^x dy \frac{y y^\lambda - x^\lambda}{y + x} = x^\lambda \left[-\psi\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \psi(\lambda) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi(1) + \frac{1}{\lambda + 1} - \frac{1}{\lambda} - \log 2 \right] \quad \lambda > -2$$

$$\int_0^x dy \frac{y^2 y^\lambda - x^\lambda}{y + x} = x^\lambda \left[\psi\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \psi(\lambda) + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi(2) + \frac{1}{\lambda + 2} - \frac{1}{\lambda + 1} + \frac{1}{\lambda} + \log 2 \right] \quad \lambda > -3$$

Para el rango de integración entre x y Λ^2 tenemos

$$\int_x^{\Lambda^2} dy \frac{y^\lambda - x^\lambda}{y - x} = x^\lambda \left[-\psi(\lambda) + \psi(1) - \pi \cot \lambda\pi - \log \frac{\Lambda^2}{x} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\lambda \right] \quad \lambda > 1$$

$$\int_x^{\Lambda^2} dy \frac{x y^\lambda - x^\lambda}{y - x} = x^\lambda [-\psi(\lambda) + \psi(1) - \pi \cot \lambda\pi] \quad \lambda > 1$$

$$\int_x^{\Lambda^2} dy \frac{x^2 y^\lambda - x^\lambda}{y^2 - x} = x^\lambda \left[-\psi(\lambda) + \psi(1) - \pi \cot \lambda\pi + \frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{x^2} \right] \quad \lambda > 1$$

$$\int_x^{\Lambda^2} dy \frac{y^\lambda - x^\lambda}{y + x} = x^\lambda \left[-\frac{1}{2} \overline{\psi} \left(\frac{\lambda}{2} \right) + \psi(-\lambda) - \frac{1}{2} \psi \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \psi(1) - \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi}{2} \lambda - \log \frac{\Lambda^2}{x} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\Lambda^2}{x} \right)^\lambda - \log 2 \right] \quad \lambda > 1$$

$$\int_x^{\Lambda^2} dy \frac{x y^\lambda - x^\lambda}{y + x} = x^\lambda \left[\frac{1}{2} \overline{\psi} \left(\frac{\lambda}{2} \right) - \psi(-\lambda) + \frac{1}{2} \psi \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \psi(1) + \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi}{2} \lambda + \log 2 \right] \quad \lambda > 1$$

$$\int_x^{\Lambda^2} dy \frac{x^2 y^\lambda - x^\lambda}{y^2 + x} = x^\lambda \left[-\frac{1}{2} \overline{\psi} \left(\frac{\lambda}{2} \right) + \psi(-\lambda) - \frac{1}{2} \psi \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \psi(1) - \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi}{2} \lambda - \frac{1}{\lambda - 1} - \log 2 - 1 \right] \quad \lambda > 1$$

Apéndice C

Propiedades de las funciones ψ

Sea la función Gamma definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

y tiene la propiedad de que cuando evaluamos un número entero positivo obtenemos el factorial del número. Por otro lado, no está definida para enteros negativos ni cero.

Entonces le llamamos función Digamma a la derivada del logaritmo de la función Gamma, llamada también derivada logarítmica, es decir

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x)$$

y está indefinida para toda $x \neq 0, -1, -2, \dots$, y tiene ceros en los extremos de la función Gamma.

Además, la función Digamma tiene las siguientes propiedades:

- i) $\psi(1-x) = \psi(x) + \pi \cot \pi x$
- ii) $\psi(1+x) = \psi(x) + \frac{1}{x}$
- iii) $\psi(1+x) - \psi(1-x) = \frac{1}{x} - \pi \cot \pi x$
- iv) $2\psi(\pm x) = \psi\left(\pm \frac{x}{2}\right) + \psi\left(\pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) + 2 \log 2$
- v) $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(-x) = \psi(x) + \psi(-x)$

Referencias

- [1] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).
- [2] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sc. **37**, 425, 455 (1951).
- [3] K. Nakamura et al (Particle Data Group), Journal of Physics G **37**, 075021 (2010).
- [4] J.S. Ball, T-W. Chiu, Phys. Rev. D **22**, 2542 (1980).
- [5] D.C. Curtis, M.R. Pennington, Phys. Rev. D **42**, 4165 (1990).
- [6] A. Bashir, M.R. Pennington, Phys. Rev. D **50**, 7679 (1994).
- [7] L. Chang, Y-X. Liu, C.D. Roberts, Phys. Rev. Lett. **106**, 072001 (2011).