UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

ESPACIOS DE VALDIVIA

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Lic. CENOBIO YESCAS APARICIO

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. SALVADOR GARCÍA FERREIRA

MORELIA MICHOACÁN, AGOSTO 2016.

Índice general

Resumen

Resumen

Dado un espacio compacto K, decimos que K es un espacio de Valdivia si existen un subconjunto denso A de K, un número cardinal α y un encaje $h : K \to \mathbb{R}^\alpha$ tales que $A = h^{-1}(h(K) \cap \Sigma_\alpha)$, donde Σ_α es el Σ-producto de $\mathbb{R}^\alpha$. Los espacios compactos en Σ-productos han sido muy estudiados en Topología General y Análisis Funcional Abstracto. La amplia clase de los espacios compactos de Valdivia resulta de mucho interés porque su estudio aporta información importante de otros espacios conocidos (ejemplo de ello son los espacios de Eberlein y los espacios de Corson). En este trabajo se realiza un estudio sobre importantes propiedades de los espacios de Valdivia. Se exponen una caracterización de estos espacios con el concepto de r-esqueleto y algunos resultados de dualidad de la propiedad de Valdivia con el espacio de funciones continuas.

Abstract

Given a compact space K, we say that K is a Valdivia space if there are a dense subset A of K, a cardinal number α and an embedding $h : K \to \mathbb{R}^\alpha$ sucht that $A = h^{-1}(h(K) \cap \Sigma_\alpha)$, where Σ_α is the Σ-product of $\mathbb{R}^\alpha$. The compact spaces of Σ-products have been studied in General Topology and Abstract Functional Analisis. The extense class of Valdivia spaces is interesting because give an several information about other knowed spaces (for example the Eberlein spaces and Corson spaces). In this work main propierties of Valdivia spaces are studied. One characterization of this spaces with r-skeleton and some duality results of Valdivia propiertie with continuous function space are exposed.

Palabras clave: Espacio de Valdivia, espacio de Corson, Σ-producto, r-esqueleto, espacio de funciones.

Introducción

Los espacios de Corson y de Valdivia fueron apareciendo con el estudio de los espacios compactos de un espacio de Banach con la topología débil. Por otra parte, en 1959, H. H. Corson introdujo los Σ-productos en su notable artículo [7]. Años mas tarde, Corson y Lindenstrauss conjeturan (en su trabajo [8]):

Todo conjunto débil compacto de un espacio de Banach es homeomorfo a un subespacio de $c_0(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^\alpha : \textit{Para toda } \epsilon > 0, |\{\theta < \alpha : |x_\theta| > \epsilon\}| < \omega\}$.

Amir y Lindenstrauss en su estudio de Σ-productos ([2]) prueban la conjetura y nombran a esta clase de espacios compactos como espacios de Eberlein. Poco después, Y. Benyamini, M. E. Rudin y M. Wage en su trabajo [26] muestran la existencia de un compacto en un Σ-producto que no es de Eberlein. Con esto se ilustra que la clase de los subespacios compactos de un Σ-producto contiene propiamente a las clase de los espacios compactos de Eberlein. Fueron E. Michael y M. E. Rudin ([5]) quienes nombraron a esta clase de espacios compactos como espacios de Corson. Desde entonces se han estudiado ampliamente los espacios de Corson dentro de las áreas de Topología y Análisis Funcional. Cuando S. Argyros, S. Mercourakis y S. Negrepontis estudiaban propiedades de los espacios Corson ([20]), se dieron cuenta de la existencia de una resolución retraccional (i. e., una familia de retractos con ciertas propiedades) de la identidad sobre un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^\gamma$ que intersecta densamente al Σ-producto de $\mathbb{R}^\gamma$. Esto motivó a que el destacado matemático M. Valdivia estudiara esta clase de espacios. Posteriormente, R. Deville y G. Godefroy ([18]) les asignan el nombre de espacios compactos de Valdivia. A finales de los 90's, es O. Kalenda quien empieza a obtener muchos resultados de estructura de los espacios de Valdivia. También, desde inicios de este milenio, Kubiś y otros autores han hecho contribuciones al estudio de los espacios de Valdivia, principalmente obteniendo resultados de no estabilidad y ligándolos con familias de retracciones. En estos estudios, uno de los métodos que se aplicaron fueron el uso de los modelos elementales.

Los espacios de Valdivia son espacios compactos que contienen un subconjunto denso que se encaja topológicamente dentro de un Σ-producto. Los espacios de Corson son un caso particular de los espacios de Valdivia, estos son espacios compactos en un Σ-producto. El propósito de esta tesina es hablar sobre la estructura de los espacios de Valdivia. Nos enfocamos a presentar una nueva demostración de una caracterización conocida de los espacios compactos de Valdivia que originalmente usó modelos elementales en la justificación de sus afirmaciones. Basándonos en esto damos un nuevo enfoque topológico sin el uso de modelos elementales al estudio de dichos espacios.

La tesina se estructura en un capítulo introductorio y tres capítulos que contienen los resultados principales del enfoque de este trabajo. En el segundo capítulo exponemos las nociones de Σ-producto y de espacio Lindelöff primario. Se mencionan los conceptos que aunque parezcan elementales tienen una importante aplicación en el estudio de estos espacios. Para el caso de los Σ-productos exponemos una serie de resultados que motivan directamente las propiedades que poseen los espacios de Valdivia y de Corson. El concepto de espacio Lindelöff primario nos ayudará a estudiar y caracterizar los espacios de funciones de los espacios de Valdivia. En el tercer capítulo, se dan las propiedades básicas de los espacios de Valdivia y los ejemplos más comunes. Después, se dan algunos resultados de estabilidad que permiten la obtención de más espacios de Valdivia. Por último, se exponen dos clases de espacios y su relación con las propiedades de Valdivia y de Corson. En el cuarto y último capítulo, presentamos algunas caracterizaciones de los espacios de Valdivia y de Corson. La primer caracterización de estos espacios pertenece a Kubiś *et. al.* ([25]), que ocupa la noción de r-esqueleto la cual consiste en una familia de retracciones con propiedades especiales. Para su demostración es aquí donde Kubiś *et. al.* utilizan las propiedades de reflexión que nos proporcionan los modelos elementales, los autores de [6] idearon técnicas diferentes para llegar a una demostración que no ocupa los modelos elementales. Con esto no se pretende decir que una demostración es mejor que la otra, se presenta tal demostración a razón de estudiar las técnicas topológicas ahí involucradas y para que el lector no conocedor de las herramientas de submodelos elementales le sea accesible. Uno de los propósitos principales de esta tesina es presentar dicha demostración manera detallada, para que un lector no experto en el área asimile la idea. Las otras caracterizaciones, son propiedades que se llevan al espacios de funciones, una de ellas es para un espacio de Corson que fue dada por R. Pol en [19], en esta tesina exponemos de manera amplia la demostración que aparece en el libro [1]. Otra de las caracterizaciones referidas es sobre los espacios de Valdivia dada por O. Kalenda en [12], cuya idea primordial es generalizar la caracterización de R. Pol.

Capítulo 1

Notación.

A lo largo de esta tesina cuando se escriba “espacio”, se entederá que se esta hablando de un espacio topológico. Todos los espacios a considerar serán al menos Tychonoff (Hausdorff y completamente regulares). La siguiente nomenclatura se usará a lo largo del trabajo:

- Para X un conjunto y κ un cardinal, $[X]^{\kappa}$, $[X]^{<\kappa}$ y $[X]^{\leq\kappa}$ son las familias que tienen por elementos a los subconjuntos de X con cardinalidad κ, menor que κ y menor o igual a κ, respectivamente.
- Para X un espacio y $A \subseteq X$, $cl_X(A)$ denota la cerradura de A en X. Cuando no exista confución simplemente escribiremos $\overline{A}$.
- Cuando se hable de una sucesión o red, la notación utilizada sera la usual $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.
- Los elementos de un producto $\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$ serán denotados por $(x_\lambda)_{\lambda<\alpha}$, donde entenderemos que $x_\lambda \in X_\lambda$. Para $\lambda < \alpha$, la λ-ésima proyección será denotada por π_λ. Un subbásico de la topológia del producto sera indicado por $[\lambda, U]$, donde $U \subseteq X_\lambda$ es un abierto y $[\lambda, U] = \pi_\lambda^{-1}(U)$.
- Dado un espacio topológico X, su densidad será denotada por $d(X)$ y su peso por $w(X)$.
- En esta tesina, cuando sea conveniente ω denotará al conjunto de números naturales o a la cardinalidad del conjunto de números naturales. Por $\mathbb{R}$ indicaremos al conjunto de números reales y por I al intervalo $[0, 1]$.

- Sean X y Y espacios y $A \subseteq X$. Entonces $\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ es continua }\}$. El símbolo τ_A denota la topología más débil sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ tal que la proyección $f \mapsto f(a)$ es continua para toda $a \in A$. Escribimos $\mathcal{C}_A(X, Y)$ para denotar al espacio $(\mathcal{C}(X, Y), \tau_A)$. Cuando $A = X$, τ_X coincide con la topología de la convergencia puntual τ_p y en este caso se usará la notación $\mathcal{C}_p(X, Y)$. La notación $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}_A(X, \mathbb{R})$ y $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R})$ será reemplazada por $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}_A(X)$ y $\mathcal{C}_p(X)$, respectivamente. Para $a_1, ..., a_n \in A$ y $U_1, ..., U_n$ abiertos en $\mathbb{R}$, definimos

  $$[a_1, ..., a_n; U_1, ..., U_n] := \{f \in \mathcal{C}_A(X) : f(a_i) \in U_i, i \leq n\},$$

  el cual es un abierto básico del espacio $\mathcal{C}_A(X)$.

- Para $B \subseteq Y$ y $\varphi : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, definimos la función $\varphi^* : \mathcal{C}_B(Y) \to \mathcal{C}_A(X)$ como la función dada por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, para cada $f \in \mathcal{C}_B(Y)$.
- Para espacios X y Y y una familia de funciones $\{f_\alpha \in \mathcal{C}(X,Y) : \alpha \in \mathcal{A}\}$, la función evaluación(diagonal) sobre dicha familia será denotada por $e_{\{f_\alpha \in \mathcal{C}(X,Y):\alpha\in\mathcal{A}\}}$[1].

Los conceptos de topología no mencionados en este apartado y que puedan aparecer a lo largo de la tesina serán entendidos como en [17].

[1]En la literatura, a e también se le denota por $\triangle$.

Capítulo 2

Σ-productos y espacios Lindelöff primarios.

La finalidad de esta sección es presentar las nociones de Σ-producto y espacio Lindelöff primario. Para los Σ-productos presentamos una serie de resultados básicos que son la herramienta principal para abordar el estudio de los espacios de Corson y Valdivia. Los espacios Lindelöff primarios serán importantes en el Capitulo 4, en donde se caracterizaran los espacios Valdivia y Corson usando estos espacios. Empecemos dando la definición de Σ-producto.

2.0.1 Definición. Sean α un número cardinal, $\{X_\theta : \theta < \alpha\}$ una familia de espacios y $z \in \prod_{\theta<\alpha} X_\theta$, el *Σ-producto con punto base en z* es el subespacio

$$\Sigma_\alpha(z) = \big\{x \in \prod_{\theta<\alpha} X_\theta : \{\theta \in \alpha : x_\theta \neq z_\theta\} \text{ es numerable } \big\}$$

del producto $\prod_{\theta<\alpha} X_\theta$.

De aquí en adelante, los cardinales involucrados en las definiciones de Σ-productos serán infinitos, esto para evitar repetitivas especificaciones y trivialidades en nuestros enunciados. En particular, en esta tesina, nuestros Σ-productos se tomaran en productos infinitos de $\mathbb{R}$, I o el espacio discreto 2 y en estos casos con punto base el punto 0 del espacio respectivo. Cuando el punto base sea 0, el Σ-producto de $\mathbb{R}^\alpha$ lo denotaremos por Σ_α y usaremos $supp(x)$ para indicar al conjunto $\{\theta \in \alpha : x_\theta \neq 0\}$.

Teniendo ya la definición de Σ-producto podemos definir los Σ-conjuntos.

2.0.2 Definición. Sean X un espacio y $A \subseteq X$. Decimos que A es un Σ-conjunto de X si existe un número cardinal α y un encaje $h : X \to \mathbb{R}^\alpha$ tal que $A = h^{-1}(h(X) \cap \Sigma_\alpha)$.

Con las siguientes definiciones estableceremos propiedades importantes de los Σ-productos.

2.0.3 Definición. Sea X un espacio, X es un espacio Fréchet-Urysohn (que de forma abreviada se escribirá como FU) si para $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.

Los ejemplos clásicos de espacios Fréchet-Urysohn son los espacios metrizables. El abanico numerable es un ejemplo de un espacio FU que no es primero numerable.

2.0.4 Definición. Sea X un espacio, $A \subseteq X$ es un conjunto numerablemente cerrado en X si para todo $B \subseteq A$ numerable, $\overline{B} \subseteq A$.

2.0.5 Proposición. *Σ_α es un espacio FU y numerablemente cerrado en $\mathbb{R}^\alpha$. En particular, todo Σ-conjunto de un espacio X es FU y numerablemente cerrado en X.*

Demostración: Sea $A \subseteq \Sigma_\alpha$ y $x \in cl_{\Sigma_\alpha}(A)$. Enumeramos los elementos de $supp(x)$ como $\{\theta_i\}_{i<\omega}$. Para cada $i, k < \omega$, definamos $U_k^i = (x_{\theta_i} - \frac{1}{k}, x_{\theta_i} + \frac{1}{k})$. Para cada $i < \omega$, la familia $\{U_k^i : k < \omega\}$ es una base numerable de vecindades de x_{θ_i} y además $U_{k_1}^i \subseteq U_{k_2}^i$ si $k_1 > k_2$. Ahora, como $[\theta_1, U_1^1] \cap \Sigma_\alpha$ es una vecindad básica de x y $x \in cl_{\Sigma_\alpha}(A)$, existe $y_1 \in A$ tal que $y_1 \in [\theta_1, U_1^1]$. Para $n < \omega$, elijamos $y_n \in A$ tal que $y_n \in \bigcap_{i\leq n}[\theta_i, U_n^i]$. Notar que $\bigcap_{i\leq n}[\theta_i, U_n^i] \subseteq \bigcap_{i\leq m}[\theta_i, U_m^i]$ si $m < n$. Verifiquemos que la sucesión $\{y_n\}_{n<\omega}$ converge a x. Sea $\bigcap_{j\leq k}[\theta_{i_j}, V_j]$ una vecindad básica de x, donde $k < \omega$. Para cada $j \leq k$, existe n_j tal que $U_{n_j}^{i_j} \subseteq V_{i_j}$. Sea $n_0 = max\{n_j : j \leq k\}$, entonces $U_{n0}^{i_j} \subseteq U_{n_j}^{i_j}$, para cada $j \leq k$. Así, $\bigcap_{j\leq k}[\theta_{i_j}, U_{n0}^{i_j}] \subseteq \bigcap_{j\leq k}[\theta_{i_j}, V_j]$. Entonces $y_n \in \bigcap_{j\leq k}[\theta_{i_j}, V_j]$, para cada $n \geq n_0$. Por lo tanto, $y_n \to x$. Veamos que Σ_α es numerablemente cerrado en $\mathbb{R}^\alpha$.
Sean $A \subseteq \Sigma_\alpha$ numerable y $x \in cl_X(A)$. Como Σ_α es un espacio FU, existe una sucesión $\{y_n\}_{n<\omega}$ de elementos de A tal que $y_n \to x$. Supongamos que $\theta \in supp(x)$ con $\theta \notin \bigcup_{n<\omega} supp(y_n)$. Como $\theta \in supp(x)$, $x_\theta \neq 0$. Tomemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_\theta \in U$ y $0 \notin U$. Como $x \in [\theta, U]$, existe $m < \omega$ tal que para todo $n \geq m$, $y_n \in [\theta, U]$. Al ser $\pi_\theta(y_m) \in U$ y $0 \notin U$, $\theta \in supp(y_m)$, esto útimo contradice la elección de θ. Esto prueba que $supp(x) \subseteq \bigcup_{n<\omega} supp(y_n)$. Dado que $\bigcup_{n<\omega} supp(y_n)$ es numerable, $supp(x)$ es numerable. Se sigue de manera inmediata que los Σ-conjuntos de un espacio X son FU y numerablemente cerrados en X. $\square$

Una consecuencia de tipo compacidad sobre los Σ-conjuntos que nos proporciona la Proposición 2.0.5 es el siguiente resultado (la prueba no es difícil de obtener).

2.0.6 Corolario. *Sean K un espacio compacto y $A \subseteq K$ un Σ-conjunto de K. Entonces A es numerablemente compacto.*

Los siguientes resultados nos proporcionan importantes propiedades de los Σ-conjuntos..

2.0.7 Lema. *Sean K un espacio compacto, A y B Σ-conjuntos de K y $M \subseteq K$. Si $A \cap B \cap M$ es denso en M entonces $A \cap M = B \cap M$.*

Demostración: Veamos que $A \cap M \subseteq B \cap M$. Sea $x \in A \cap M$. Tenemos que $x \in \overline{A \cap B \cap M}$. Por Proposición 2.0.5, A es FU, por ello podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega} \subseteq A \cap B \cap M$ tal que $x_n \to x$. Por Proposición 2.0.5, B es numerablemente cerrado, entonces $x \in B$. Por lo tanto, $A \cap M \subseteq B \cap M$. La otra contención se obtiene de manera análoga. $\square$

La demostración de siguien Lema se puede consultar en [13].

2.0.8 Lema. *Sea K un espacio compacto y $A \subseteq K$ denso, entonces A es un Σ-conjunto de K si y solo si existe un cardinal α tal que A es homeomorfo a un subconjunto cerrado y acotado en cada coordenada de Σ_α y $K = \beta A$*

El Lema 2.0.8 nos da una herramienta topológica muy importante para los Σ-conjuntos, que usaremos mas adelante. Así, según convenga la situación trabajaremos sobre el Σ-producto de I^α en lugar se trabajar sobre el Σ-producto de $\mathbb{R}^\alpha$.

La siguiente proposición es una ligera generalización del Lema 1.11 de [16], donde se pide numerable compacidad en vez de pseudocompacidad.

2.0.9 Proposición. *Sean K un espacio compacto y $G \subseteq K$ un conjunto G_δ. Si $A \subseteq K$ es denso y pseudocompacto*[1] *entonces $G \cap A$ es denso en G.*

Demostración: Del artículo [3] se sabe que A es pseudocompacto si y solo si A es G_δ-denso en cualquiera de sus compactaciones (una prueba de este hecho se puede ver en [17]). En particular, A es G_δ-denso en K. De aquí, $U \cap G \cap A \neq \emptyset$ para todo G conjunto G_δ en K y U abierto. Por lo tanto, $A \cap G$ denso en G. $\square$

Una característica importante sobre los Σ-conjuntos que se obtiene de la Proposición 2.0.9 es el siguiente.

2.0.10 Corolario. *Sean K un espacio compacto y $A \subseteq K$ un Σ-conjunto denso de K. Entonces A contiene a todos los puntos G_δ de K.*

Una manera para construir Σ-conjuntos en productos lo encontramos en la siguiente proposición.

2.0.11 Proposición. *Sean $\alpha \geq \omega$ y $\{K_\beta : \beta < \alpha\}$ una familia de espacios compactos tal que para $\beta < \alpha$ existe un Σ-conjunto denso A_β de K_β. Sea $x_\beta \in A_\beta$, para cada $\beta < \alpha$. Entonces $A = \{(y_\beta)_{\beta<\alpha} \in \prod_{\beta<\alpha} A_\beta : \{\beta < \alpha | y_\beta \neq x_\beta\}$ es numerable $\}$ es un Σ-conjunto denso en $\prod_{\beta<\alpha} K_\beta$.*

Demostración: Veamos primero que A es denso en $\prod_{\beta<\alpha} K_\beta$. Sea $\bigcap_{i\leq n}[\theta_i, U_{\theta_i}]$ un abierto básico en $\prod_{\beta<\alpha} K_\beta$. Para cada $i \leq n$, al ser A_{θ_i} denso en K_{θ_i}, escogemos $a_{\theta_i} \in A_{\theta_i} \cap U_{\theta_i}$. Eligiendo $b = (b_\beta)_{\beta<\alpha}$ con $b_{\theta_i} = a_{\theta_i}$ para cada $i \leq n$ y $b_\beta = x_\beta$ para $\beta \neq \theta_i$, tenemos que $b \in A \cap \bigcap_{i\leq n}[\theta_i, U_{\theta_i}]$. Ahora, veamos que A es un Σ-conjunto. Para cada $\beta < \alpha$, A_β es Σ-conjunto. Así, existen α_β y $f_\beta : K_\beta \to \mathbb{R}^{\alpha_\beta}$ tal que f_β es un encaje y $A_\beta = f_\beta^{-1}(f_\beta(K_\beta) \cap \Sigma_{\alpha_\beta})$. Sin perder generalidad, se puede suponer que $f_\beta(x_\beta) = 0$. Tomamos $f : \prod_{\beta<\alpha} K_{\alpha_\beta} \to \prod_{\beta<\alpha} \mathbb{R}^{\alpha_\beta}$, como $f((y_{\alpha_\beta})_{\beta<\alpha}) = (f_{\alpha_\beta}(y_{\alpha_\beta}))_{\beta<\alpha}$. Como cada coordenada de f es encaje, se sigue que f es continua, mas aún, f es un encaje. Dado que $\prod_{\beta<\alpha} \mathbb{R}^{\alpha_\beta}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^\Gamma$ con $\Gamma = \{(\theta, \beta) : \theta < \alpha_\beta, \beta < \alpha\}$, se concluye que $\prod_{\beta<\alpha} K_{\alpha_\beta}$ se encaja en $\mathbb{R}^\Gamma$. Por construcción de f, es claro que A es un Σ-conjunto. $\square$

Si elegimos α finito en la Proposición 2.0.11, tenemos que $\prod_{i=1}^n A_i$ es un Σ-conjunto de $\prod_{i=1}^n K_i$.

Ahora, enunciamos la noción de espacio Lindelöff primario.

2.0.12 Definición.

1. Sea α un cardinal infinito. Denotamos por D_α al espacio discreto de cardinalidad α y por L_α la Lindelöfficación por un punto de D_α. Es decir, $L_\alpha = D_\alpha \cup \{\xi\}$ tal que cada punto de D_α es aislado y las vecindades de ξ son complementos de conjuntos numerables de D_α.

[1] Decimos que un espacio X es pseudocompacto si cada función continua de X en $\mathbb{R}$ es acotada

2. Un espacio X es llamado *Lindelöff primario* si X es la imagen continua de un subespacio cerrado de $(L_\alpha)^\omega$ para algún número cardinal infinito α.

El siguiente enunciado exhibe la estabilidad de los espacios Lindelöff primarios con varias operaciones topológicas.

2.0.13 Lema.

1. *La clase de los espacios Lindelöff primarios es cerrada con respecto a subespacios cerrados, imágenes continuas, productos numerables y uniones numerables.*

2. *Todo espacio Lindelöff primario es Lindelöff.*

Demostración: El inciso 2 es trivial y para el inciso 1, se siguen de forma inmediata que subespacios cerrados de un espacio Lindelöff primario e imágenes continuas de espacios Lindelöff primarios resulten en un espacio Lindelöff primario. Sea $\{K_n : n < \omega\}$ una familia de espacios Lindelöff primarios. Para $n < \omega$, existen α_n cardinal infinito, F_n conjunto cerrado en $(L_{\alpha_n})^\omega$ y $f_n : F_n \to K_n$ continua tal que $f_n(F_n) = K_n$. Veamos que el producto numerable de espacios Lindelöff primarios sigue siendo un espacio Lindelöff primario. Considerando $\alpha = \sum_{n<\omega} \alpha_n$, se tiene que $\prod_{n<\omega} F_n$ es un cerrado en $(L_\alpha)^\omega$ y la función $f : \prod_{n<\omega} F_n \to \prod_{n<\omega} K_n$ dada por $f((z_n)_{n<\omega}) = (f_n(z_n))_{n<\omega}$, es continua y sobreyectiva, lo cual prueba lo deseado. Ahora, observemos que $\bigcup_{n<\omega} F_n \times \{n\}$ es un conjunto cerrado en $(L_\alpha)^\omega \times \omega$. Por otro lado, $(L_\alpha)^\omega \times \omega$ se encaja en $(L_\alpha)^\omega \times (L_\omega)^\omega$. Si $\tau = \alpha + \omega$, entonces $(L_\alpha)^\omega \times (L_\omega)^\omega$ se encaja en $(L_\tau)^\omega \times (L_\tau)^\omega = (L_\tau)^\omega$. Así, $\bigcup_{n<\omega} F_n \times \{n\}$ es homeomorfo a un cerrado en $(L_\tau)^\omega$. Definiendo $f : \bigcup_{n<\omega} F_n \times \{n\} \to \bigcup_{n<\omega} K_n$ por $f((a, n)) = f_n(a)$. Se tiene que f es continua y sobreyectiva, lo cual implica que $\bigcup_{n<\omega} K_n$ es Lindelöff primario. $\square$

Capítulo 3

Espacios de Valdivia.

En esta sección daremos a conocer los conceptos de espacio de Corson y los espacios de Valdivia. Después, se enunciarán típicos ejemplos de estas nociones. También, estableceremos propiedades básicas de estos espacios. Y por último, expondremos la relación de estos conceptos con los grupos topológicos y los espacios linealmente ordenados.

Para iniciar damos la definición de espacio de Corson.

3.0.1 Definición. Sea K un espacio compacto, decimos que K es un espacio de *Corson* si K es subespacio de un Σ-producto. Es decir, K es un Σ-conjunto de sí mismo.

Ejemplos inmediatos de la Definición 3.0.1, son los siguientes.

3.0.2 Ejemplo. Tenemos que I^ω es un espacio de Corson ya que está contenido en $\Sigma_\omega = \mathbb{R}^\omega$. Más general, los espacios compactos metrizables son espacios de Corson pués se pueden encajar en $\mathbb{R}^\omega$.

Continuamos enunciando el concepto de espacio de Valdivia.

3.0.3 Definición. Sea K un espacio compacto, K es un espacio de *Valdivia*[1] si contiene un Σ-conjunto denso.

En este momento, nos podemos preguntar sobre los ejemplos de espacios de Valdivia. Inmediatamente, de la Definición 3.0.3, podemos ver que todo espacio de Corson es un espacio de Valdivia. Por ello, todos los ejemplos dados en 3.0.2 son espacios de Valdivia. Sin embargo, existen ejemplos de espacios de Valdivia que no son espacios de Corson y uno de ellos es el siguiente.

3.0.4 Ejemplo. La compactación por un punto de cualquier espacio discreto no numerable es un espacio de Valdivia. En efecto, sea τ un número cardinal no numerable y $\tau^* = \tau \cup \{*\}$ su compactación por un punto. Definiendo $\varphi : \tau^* \to \mathbb{R}^\tau$ tal que para $\alpha < \tau$, $\varphi(\alpha)_\theta = 0$ si $\theta \neq \alpha$ y $\varphi(\alpha)_\alpha = 1$, y $\varphi(*)_\alpha = 1$ para toda $\alpha < \tau$. Tenemos que φ encaja τ^* en $\mathbb{R}^\tau$ y τ es un Σ-conjunto denso de τ^*.

[1] Usualmente en la literatura, a los espacios de Valdivia se les enuncia como espacios compactos de Valdivia, en esta tesina se omite la palabra compacto por comodidad.

Una pregunta natural que surge es si ¿ser un espacio de Valdivia es invariante bajo operaciones topológicas? Respecto a los productos, la respuesta es positiva.

3.0.5 Teorema. *Sea $\{K_\theta : \theta < \alpha\}$ una familia de espacios de Valdivia. Entonces $\prod_{\theta<\alpha} K_\theta$ es un espacio de Valdivia.*

Demostración: El teorema se sigue de la Proposición 2.0.11. □

De este modo, teniendo en cuenta el Teorema 3.0.5, uno puede preguntarse sobre su recíproco. Es decir, si un producto de espacios compactos es de Valdivia, ¿los factores del producto son Valdivia? Esta pregunta aún sigue abierta. O. Kalenda la responde parcialmente en [12] con el siguiente lema[2].

3.0.6 Lema. *Sean K_1 y K_2 espacios compactos tales que $K_1 \times K_2$ es Valdivia. Si K_1 tiene un subconjunto denso de puntos G_δ, entonces K_1 y K_2 son espacios de Valdivia.*

Es importante mencionar que la estabilidad del producto dictada por el Teorema 3.0.5 para los espacios de Valdivia no tiene versión para los espacios de Corson. Es decir, que el producto de espacios de Corson no necesariamente es Corson. Aunque hay situaciones especiales en donde sí podemos garantizar esta propiedad. En el siguiente teorema, hablamos de un tipo especial de espacios de Corson. Dicho teorema nos dice cuando su producto es un espacio de Corson. Además, cuándo no lo es; el enunciado nos afirma que es a lo más Valdivia.

3.0.7 Teorema. *Sea $\{K_\theta : \theta < \alpha\}$ una familia de espacios metrizables compactos, tales que cada uno de ellos tiene al menos dos puntos. Entonces $K = \prod_{\theta<\alpha} K_\theta$ es un espacio de Valdivia. En particular, K es Corson si y solo si $\alpha \leq \omega$.*

Demostración: Del Ejemplo 3.0.2, sabemos que K_θ es Valdivia, para cada $\theta < \alpha$. Por el Teorema 3.0.5, K es Valdivia. Ahora, si $\alpha \leq \omega$, entonces K es un compacto metrizable. De aquí, K es un espacio de Corson. Recíprocamente, supongamos que K es un espacio de Corson y $\alpha > \omega$. Por la Proposición 2.0.11, existe un Σ-conjunto propio A denso en K. Del Lema 2.0.7, $A = K$, lo cual contradice que A sea un subconjunto propio de K. Por lo tanto, $\alpha \leq \omega$. □

El Teorema 3.0.7 nos permite construir una gran cantidad de espacios de Valdivia que no sean de Corson. Algunos de ellos son:

3.0.8 Ejemplo. Para $\alpha > \omega$, los espacios I^α y 2^α son espacios de Valdivia no Corson. Si $\alpha \leq \omega$, entonces estos espacios son también espacios de Corson.

El caso del comportamiento bajo imágenes continuas no lo tratamos en esta tesina, pues no entró dentro de los propósitos de la misma. El lector interesado en este tipo de resultados puede consultar los artículos [15].

---

[2]Como nota curiosa, O. Kalenda ofrece un premio de tres cervezas para quien resuelva esta pregunta.

En lo que sigue de este capítulo trataremos dos clases de espacios y sus relaciones con la propiedad de ser Valdivia. Primeramente estudiaremos la clase de los grupos topólogicos. Las caracterizaciones de grupos topológicos de Valdivia y de Corson expuestas aquí fueron tomadas del artículo [14]. Se dan por hecho algunas propiedades conocidas de los grupos topológicos. En adelante, cuando refiramos a "grupo" entenderemos que estamos hablando de un grupo topológico.

Antes de comenzar con los grupos, el siguiente lema resulta importante para su caracterización.

3.0.9 Lema. *Todo espacio de Corson tiene al menos un punto G_δ.*

Demostración: Para probar el lema, basta mostrar que todo compacto de un Σ-producto tiene la propiedad. Sea α un número cardinal y $K \subseteq \Sigma_\alpha$ compacto. La relación sobre K dada por $x \leq y$ si y solo si para todo $\theta \in supp(x)$ se cumple que $x_\theta = y_\theta$, para $x, y \in K$, es un orden parcial sobre K. Sea $C = \{x_\beta : \beta < \kappa\}$ una cadena en K. Para $\theta < \alpha$, si $\theta \notin \bigcup_{\beta<\kappa} supp(x_\beta)$ entonces ponemos $y_\theta = 0$, y si $\theta \in \bigcup_{\beta<\kappa} supp(x_\beta)$, elijamos $\alpha < \kappa$ tal que $\theta \in supp(x_\alpha)$ y definimos $y_\theta = \pi_\theta(x_\alpha)$. Al ser C una cadena, podemos definir $y = (y_\theta)_{\theta<\alpha}$. Veamos que y es punto de acumulación de K. Sea $\bigcap_{i<n} \pi_{\theta_i}^{-1}(V_i)$ un abierto básico que contiene a y. Si $i < n$ y $\theta_i \notin \bigcup_{\beta<\kappa} supp(x_\beta)$, entonces $y_{\theta_i} = 0$ y $\pi_{\theta_i}(x_\beta) \in V_i$, para toda $\beta < \kappa$. Sea $J = \{i < n : \theta_i \in \bigcup_{\beta<\kappa} supp(x_\beta)\}$. Si $J \neq \emptyset$, para cada $i \in J$ escogemos α_i con $\pi_{\theta_i}(x_{\alpha_i}) = y_{\theta_i}$. Tomando z como el máximo del conjunto $\{x_{\alpha_j} : j \in J\}$, obtenemos que $z \in \bigcap_{i<n} \pi_{\theta_i}^{-1}(V_i) \cap K$. Esto prueba que y es punto de acumulación de K y por ser K compacto, tenemos que $y \in K$. Por construcción, y es una cota superior de C. Se sigue que toda cadena en K tiene una cota superior. Por Lema de Zorn, K tiene elemento máximal x'. Como $supp(x') = \{\theta_n : n < \omega\}$, la maximalidad de x' garantiza que $\{x'\} = \bigcap_{n<\omega}\{x \in K : x_{\theta_i} = x'_{\theta_i}, i \leq n\}$. Por lo tanto, x' es un punto G_δ. $\square$

Con lo anterior podemos establecer el siguiente teorema.

3.0.10 Teorema. *Para todo grupo topológico compacto G se cumple lo siguiente.*

1. *G es imagen continua y abierta de un espacio de Valdivia.*
2. *G es espacio de Corson si y solo si G es metrizable.*

Demostración: Para la parte 1, Ivanovskii ([11]) y Kuźmine ([22]) prueban que existen un número cardinal τ y un homomorfismo continuo y sobreyectivo $f : 2^\tau \to G$. Al ser 2^τ y G espacios compactos, tenemos que f es un homomorfismo cerrado. Por ello, f es un homomorfismo cociente. Ahora, veamos que f es un homomorfismo abierto. Sea U un subconjunto abierto de 2^τ. Tenemos que $f^{-1}(f(U)) = Ker(f) + U$ es un conjunto abierto, donde $Ker(f)$ denota el kernel de f. Por ser f homomorfismo cociente, se sigue que $f(U)$ es un conjunto abierto. Por lo tanto, f es un homomorfismo abierto. Como 2^τ es un espacio de Valdivia (ver Ejemplo 3.0.8), tenemos lo deseado. Para la parte 2, Si G es metrizable, del Ejemplo 3.0.2 se obtiene que G es un espacio de Corson. Recíprocamente, si G es un espacio de Corson, por el Lema 3.0.9, G tiene al menos un punto G_δ. Como G es homogéneo, cada punto de G es G_δ. Dado que G es compacto, se obtiene que G es primero numerable. Como todo grupo topológico primero numerable es metrizable (ver [4]), concluimos que G es metrizable. $\square$

Agregando la propiedad de ser totalmente disconexo a los grupos topológicos compactos, obtenemos lo siguiente.

3.0.11 Teorema. *Sea K un grupo compacto. Si K es totalmente disconexo entonces K es Valdivia.*

Demostración: De la teoría de grupos topológicos se sabe que si K es totalmente disconexo entonces K es el producto de grupos finitos(el lector puede encontrar la demostración de este resultado en [4]). Al ser todo grupo finito metrizable, por Teorema 3.0.7, K es Valdivia. □

Para el caso de grupos conexos, Kubiś y Uspenskii en [24] dan un ejemplo de un grupo abeliano conexo y compacto de peso $\aleph_1$ que no es Valdivia.

El siguiente resultado lo obtiene Kubiś en [23].

3.0.12 Teorema. *Sea K un grupo abeliano compacto. Entonces K es Valdivia si y solo si su componente conexa de la identidad es isomorfa a un producto de grupos compactos metrizables.*

El Teorema 3.0.12 se obtiene como consecuencia del siguiente teorema, el cual es un resultado más general obtenido por Kubiś y Michalewski en [25].

3.0.13 Teorema. *Sea K un grupo compacto.*

1. *Si la componente conexa de la identidad de K es Valdivia, entonces K también lo es.*
2. *Si el peso de la componente conexa de la identidad de K es a lo más $\aleph_1$, entonces K es Valdivia si y solo si su componente conexa de la identidad lo es.*

Demostración: Hofman y Morris prueban en [10], que existe una familia de grupos finitos $\{F_\theta : \theta < \alpha\}$ tal que K es homemorfo a $G_0 \times \prod_{\theta<\alpha} F_\theta$, donde G_0 es la componente conexa de la identidad de K. Para el inciso 1, al ser todo grupo finito espacio de Valdivia, si G_0 es Valdivia, entonces K es Valdivia. Respecto al punto 2, la parte de la suficiencia es el inciso 1 del teorema, la parte de la necesidad no la exponemos y se puede consultar en [25]. □

Se sabe de manera general que la propiedad de ser Valdivia no es invariante bajo subconjuntos cerrados. Por ejemplo, 2^{ω_1} es un espacio de Valdivia que contiene un subconjunto cerrado que no es Valdivia (se pueden ver los detalles en la Proposición 3.3 de [15]). Sin embargo, enunciaremos más adelante que en los espacios linealmente ordenados ser Valdivia se hereda a conjuntos cerrados.

La última clase de espacios en la que estudiaremos la propiedad de Valdivia son los espacios linealmente ordenados. Esta parte de la tesina se basa en los resultados obtenidos en [14]. Para un espacio linealmente ordenado K, denotaremos por $S(K)$ al conjunto que contiene a los puntos aislados de K y a los puntos que son el límite de sucesiones no triviales en K.

3.0.14 Lema. *Sea K un espacio linealmente ordenado compacto. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) El conjunto $S(K)$ es denso en K.

(2) Si A es un Σ-conjunto denso en K, entonces $S(K) \subseteq A$.

(3) Si K es Valdivia, entonces $S(K)$ son todos los puntos G_δ de K y $S(K)$ es el único Σ-conjunto denso de K.

Demostración:

(1). Sea $I = [x, y]$ un intervalo cerrado en K sin puntos aislados, en donde $x, y \in I$ y $x < y$. Por la compacidad de K, podemos construir una sucesión $\{y_n : n < \omega\}$ en $[x, y]$ creciente y convergente a y. Luego, $y \in S(K)$.

(2). Sea A un Σ-conjunto denso de K. Necesariamente, todos los puntos aislados de K están en A. Resta ver que si x es un punto límite de una sucesión no trivial $\{y_n\}_{n<\omega}$ entonces $x \in A$. Sin perder generalidad, podemos suponer $\{y_n\}_{n<\omega}$ creciente. Para cada $n < \omega$, por la densidad de A existe $x_n \in A$ tal que $x_n \in (y_n, x)$. Tenemos que $\{x_n : n < \omega\} \subseteq A$ y $x_n \to x$. Por ser A numerablemente cerrado, $x \in A$.

(3). Del Lema 2.0.7, $S(K)$ es el único Σ-conjunto de K. Ahora, por el Corolario 2.0.10, todos los puntos G_δ de K pertenecen a $S(K)$. Sea $x \in S(K)$. Si x es un punto aislado, claramente x es un punto G_δ. Supongamos que x es punto límite de alguna sucesión no trivial. Si $(\leftarrow, x]$ o $[x, \rightarrow)$ son abiertos, se sigue que x es un punto G_δ. Ahora, si $(\leftarrow, x]$ y $[x, \rightarrow)$ no son abiertos, por ser $S(K)$ un espacio FU , existen sucesiones $\{x_n\}_{n<\omega}$ y $\{y_n\}_{n<\omega}$, respectivamente creciente y decreciente, convergentes a x. Con esto obtenemos que $x = \bigcap_{n<\omega}[x_n, y_n]$. Por lo tanto, x es un punto G_δ. $\square$

Para finalizar esta sección presentamos algunos resultados concernientes a los espacios linealmente ordenados y su relación con las propiedades de Valdivia y de Corson. Debido al propósito de nuestro trabajo, no damos las demostraciones de dichos enunciados y si el lector desea conocerlas puede consultar en el trabajo [14], en dicho artículo se hace un análisis mas profundo de estos espacios.

El siguiente resultado ilustra que la propiedad de ser Valdivia se hereda bajo subconjuntos cerrados en la clase de los espacios linealmente ordenados.

3.0.15 Proposición. *Sea K un espacio linealmente ordenado y compacto. Si K es Valdivia (o la imagen continua de un Valdivia), entonces cada subconjunto cerrado de K es Valdivia.*

Otras propiedades interesantes que tienen los espacios linealmente ordenados son que los espacios de Corson en esta clase se caracterizan mediante los espacios metrizables.

3.0.16 Proposición. *Sea K un espacio compacto linealmente ordenado.*

1. *K es Corson si y solo si K es metrizable.*
2. *Si K es un espacio de Valdivia, entonces $w(K) \leq \aleph_1$*

Capítulo 4

Algunas caracterizaciones de los espacios de Valdivia.

En este cápitulo principal de la tesina se expondrán dos caracterizaciones de los espacios de Valdivia y una caracterización de los espacios de Corson. La primera caracterización de los espacios de Valdivia se obtiene de la estructura interna del espacio mismo y es determinada por la noción de r-esqueletos. La segunda caracterización a exponer sera una interpretación externa del espacio via su espacio de funciones continuas con valores reales. La carcaterización de los espacios de Corson se determina con esta mismas ideas.

4.1. Espacios de Valdivia y r-esqueletos.

Esta primera parte del capítulo consiste en dar la caracterización de los espacios de Valdivia utilizando la noción de r-esqueletos. Después de obtener la caracterización, presentaremos una aplicación de dicho resultado para deducir cuando los hiperespacios son espacios de Valdivia. Es importante recalcar, que las demostraciones que daremos en esta sección involucran nuevas técnicas topológicas que utilizan funciones monótonas e iteraciones.

La definición de r-esqueleto que se expone a continuación tiene una ligera modificación a lo que Kubiś y Michalewski definen.

4.1.1 Definición. Sean X un espacio y Γ un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y σ-completo. Una familia de retracciones continuas $\{r_s : s \in \Gamma\}$ de X es un *r-esqueleto* si satisface:

(i) Para cada $s \in \Gamma$, $r_s(X)$ es cósmico[1].

(ii) Si $s \leq t$, entonces $r_s = r_s \circ r_t = r_t \circ r_s$.

(iii) Si $\{s_n : n < \omega\} \subset \Gamma$ es tal que $s_n \leq s_{n+1}$ para cada $n < \omega$ y $t = sup\{s_n : n < \omega\}$, entonces $r_t(x) = \lim_{n\to\infty} r_{s_n}(x)$ para cada $x \in X$.

[1] X es un espacio cósmico si tiene una base de red numerable.

(iv) Para todo $x \in X$, $x = \text{lím}_{s\in\Gamma} r_s(x)$.

Al subespacio $\bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)$ de X, se indicará con el nombre de *espacio inducido por* $\{r_s : s \in \Gamma\}$. Además, $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un *r-esqueleto completo* si es un r-esqueleto y:

(v) $X = \bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)$.

Y diremos que $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es un *r-esqueleto conmutativo* si es un r-esqueleto y:

(vi) $r_s \circ r_t = r_t \circ r_s$, para cualesquiera $r, s \in \Gamma$.

En [25], los autores piden que la condición en el inciso (i) de la Definición 4.1.1 sea la propiedad de ser segundo numerable en lugar de cósmico. En adelante, Γ representará un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y σ-completo, al menos que se especifique lo contrario.

Es fácil ver que la propiedad (v) implica la propiedad (iv). Por ello, si una familia de retracciones cumple con las condiciones (i), (ii), (iii) y (v) de la Definición 4.1.1, entonces es un r-esqueleto completo. Además, notemos que si $\{r_s : s \in \Gamma\}$ es r-esqueleto completo, entonces $\{r_s : s \in \Gamma\}$ fija puntos de X, es decir, para cada $x \in X$ existe $s \in \Gamma$ tal que $r_s(x) = x$.

Un ejemplo de un espacio con un r-esqueleto completo es el siguiente.

4.1.2 Proposición. *El espacio Σ_α tiene un r-esqueleto conmutativo completo.*

Demostración: Considere $\Gamma = [\alpha]^{\leq\omega}$ con el orden de la contención. Γ claramente es un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y σ-completo. Para $A \in \Gamma$, definamos $P_A : \mathbb{R}^\alpha \to \mathbb{R}^\alpha$ por $P_A(x)_\theta = 0$ si $\theta \notin A$ y $P_A(x)_\theta = x_\theta$ si $\theta \in A$. Es fácil ver que, $\{P_A \restriction_{\Sigma_\alpha} : A \in \Gamma\}$ es una familia de retracciones en Σ_α que es conmutativa y que cumple las condiciones (i)-(iii) de la Definición 4.1.1. Para tener la condición (v), basta ver que $x \in \Sigma_\alpha$ implica $P_{supp(x)}(x) = x$. Por lo tanto, $\{P_A \restriction_{\Sigma_\alpha} : A \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto conmutativo completo. $\square$

El siguiente lema es un resultado técnico y nos permitirá heredar familias de retracciones a subespacios cerrados.

4.1.3 Lema. *Sean X un espacio numerablemente compacto y $\{r_s : s \in \Gamma\}$ una familia de retracciones en X que satisface (i)-(iii) de la Definición 4.1.1. Si $Y = \bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)$, entonces para $\mathcal{A} \in [\mathcal{P}(Y)]^{\leq\omega}$ y $s_0 \in \Gamma$, existen $s \in \Gamma$ y $D \subseteq [\bigcup \mathcal{A}]^{\leq\omega}$ tales que $s_0 \leq s$ y $r_s(\overline{A}) = \overline{D \cap A}$, para toda $A \in \mathcal{A}$.*

Demostración: Tenemos que para cada $s' \in \Gamma$ existe $D_{s'} \in [\bigcup \mathcal{A}]^{\leq\omega}$ tal que $r_{s'}(D_{s'} \cap A)$ es denso en $r_{s'}(\overline{A})$, para cada $A \in \mathcal{A}$. En efecto, sea $A \in \mathcal{A}$. Por ser $r_{s'}(A)$ cósmico, $r_{s'}(A)$ es separable. Por ello podemos elegir $D_A \in [A]^{\leq\omega}$ tal que $r_{s'}(D_A)$ es denso y numerable en $r_{s'}(A)$. Por la continuidad de $r_{s'}$, $r_{s'}(D_A)$ es denso en $r_{s'}(\overline{A})$. Tomando $D_{s'} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} D_A$ obtenemos lo deseado. Con lo anterior, construyamos s_n y D_n de manera recursiva, para cada $n < \omega$. Notemos que s_0 ya esta dado. Supongamos que s_n ha sido construido. Podemos escoger $D_n \in [\bigcup \mathcal{A}]^{\leq\omega}$ tal que $r_{s_n}(D_n \cap A)$ denso en $r_{s_n}(\overline{A})$, para cada $A \in \mathcal{A}$. Como $D_n \subseteq Y$, para cada $d \in D_n$ existe $s_d \in \Gamma$ tal que $r_{s_d}(d) = d$. Por ser Γ un conjunto dirigido y σ-completo, podemos elegir una cota superior s_{n+1} de $\{s_d : d \in D_n\}$ en Γ tal que

$s_{n+1} \geq s_n$. Así, $D_n = r_{s_{n+1}}(D_n) \subseteq r_{s_{n+1}}(X)$. Tomemos $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ y $s = \sup\{s_n : n < \omega\}$. Veamos que s y D cumplen con lo deseado para el lema. Por construcción, es claro que $D = r_s(D) \subseteq r_s(X)$, $D \subseteq [\bigcup \mathcal{A}]^{\leq\omega}$ y $s_0 \leq s$. Con ello $D \cap A \subseteq r_s(\overline{A})$, para cada $A \in \mathcal{A}$. De aquí se deduce que $\overline{D \cap A} \subseteq r_s(\overline{A})$, para cada $A \in \mathcal{A}$. Falta ver que para cada $A \in \mathcal{A}$, $r_s(\overline{A}) \subseteq \overline{D \cap A}$. Sea $A \in \mathcal{A}$. Veamos que $r_s(x)$ es punto de acumulación de $D \cap A$, para cada $x \in \overline{A}$. Supongamos que no es cierto, sea $x \in \overline{A}$ tal que $r_s(x) \in U = X \setminus \overline{D}$. Como U es un conjunto abierto en X, sea V un conjunto abierto en X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Al ser $\lim_{n\to\infty} r_{s_n}(x) = r_s(x)$, existe $N < \omega$ tal que $r_{s_n}(x) \in V \cap r_{s_n}(\overline{A})$, para todo $n \geq N$.

Afirmación: Si $n \geq N$, entonces existe $y_n \in D_n$ tal que $r_{s_m}(y_n) \in V$ para toda $N \leq m \leq n$.

Prueba de la afirmación: Sean $n > N$ y $m \leq n$ con $N \leq m$. Por ser $s_m \leq s_n$, del inciso (ii) de la Definición 4.1.1, tenemos que $r_{s_m}(r_{s_n}(x)) = r_{s_m}(x) \in V$. Por lo cual se sigue que $r_{s_n}(x) \in \bigcap_{m=N}^{n} r_{s_m}^{-1}(V)$. De aquí, $r_{s_n}(x) \in \bigcap_{m=N}^{n} r_{s_m}^{-1}(V) \cap r_{s_n}(\overline{A})$. Por la densidad de $r_{s_n}(D_n \cap A)$ en $r_{s_n}(\overline{A})$, existe $y_n \in D_n$ tal que $r_{s_n}(y_n) \in \bigcap_{m=N}^{n} r_{s_m}^{-1}(V)$. Por lo tanto, $r_{s_m}(y_n) = r_{s_m}(r_{s_n}(y_n)) \in V$, para todo m con $N \leq m \leq n$.

Para cada $n \geq N$, escogemos $y_n \in D_n$ como en la afirmación y veamos que $y_n = r_s(y_n)$. En efecto, por construcción, $D_n \subseteq r_{s_{n+1}}(X)$. Por ello, existe $z \in X$ tal que $y_n = r_{s_{n+1}}(z)$. Al ser $s_{n+1} \leq s$, tenemos que

$$\begin{aligned} r_s(y_n) &= r_s(r_{s_{n+1}}(z)) \\ &= r_{s_{n+1}}(r_s(z)) \\ &= r_{s_{n+1}}(z) \\ &= y_n. \end{aligned}$$

Así, para $n \geq N$ tenemos que

$$y_n = r_s(y_n), \tag{4.1}$$

Ahora, por ser X numerablemente compacto y $\{y_n : N \leq n\} \subseteq r_s(X)$, $\{y_n : N \leq n\}$ tiene un punto de acumulación $y \in r_s(X)$. Podemos asumir que $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Por la continuidad de las retracciones se cumple que

$$\begin{aligned} r_s(y) &= \lim_{m\to\infty} r_{s_m}(y) \\ &= \lim_{m\to\infty} r_{s_m}(\lim_{n\to\infty} y_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} r_{s_m}(y_n) \\ &= \lim_{m\geq N} \lim_{n\geq m} r_{s_m}(y_n) \end{aligned}$$

y por la afirmación, $r_{s_m}(y_n) \in V$ para cada $N \leq m \leq n$. Esto implica que $r_s(y) \in \overline{V} \subseteq U$. Por otro lado, usando la continuidad de r_s y la igualdad 4.1 tenemos

$$\begin{aligned} r_s(y) &= r_s(\lim_{n\to\infty} y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} r_s(y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n. \end{aligned}$$

Así, existe $N_0 < \omega$ tal que $y_n \in U \cap D$, para todo $n > N_0$, pero esto es una contradicción porque $U = X \setminus \overline{D}$. Por lo tanto, $r_s(x) \in \overline{D \cap A}$. □

Una consecuencia inmediata del Lema 4.1.3 es el siguiente resultado que establece importantes propiedades topológicas de los espacios inducidos por los r-esqueletos.

4.1.4 Corolario. *Sean X un espacio numerablemente compacto y $\{r_s : s \in \Gamma\}$ un familia de retracciones que satisfacen (i)-(iii) de la Definición 4.1.1. Si $Y = \bigcup_{s\in\Gamma} r_s(X)$, entonces*

1. *$t(Y) \leq \omega$, y*
2. *Para cada $x \in \overline{Y}$, $x = \lim_{s\in\Gamma} r_s(x)$.*

Demostración:
1. Sean $A \subseteq Y$, $x \in cl_Y(A)$ y $s_0 \in \Gamma$ tal que $x \in r_{s_0}(X)$. Por el Lema 4.1.3, existe $s \in \Gamma$ con $s_0 \leq s$ y $D \in [A]^{\leq\omega}$ tal que $r_s(cl_Y(A)) = \overline{D}$. Dado que $s \geq s_0$, tenemos que $r_s(x) = x$. De aquí, $x \in r_s(cl_Y(A)) = \overline{D}$.
2. Sean $x \in \overline{Y}$ y U un subconjunto abierto con $x \in U$. Escojamos un subconjunto abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Para $\mathcal{A} = \{V \cap Y, Y \cap (X \setminus U)\}$, por el Lema 4.1.3 existe $s \in \Gamma$ con $r_s(\overline{Y \cap V}) \subseteq \overline{Y \cap V}$ y $r_s(\overline{Y \cap (X \setminus U)}) \subseteq \overline{Y \cap (X \setminus U)}$. Al cumplirse que $x \in \overline{Y \cap V}$, obtenemos $r_s(x) \in \overline{Y \cap V}$. Sea $t \geq s$ y supongamos que $r_t(x) \notin U$. Entonces $r_t(x) \in Y \cap (X \setminus U)$ y $r_s(x) = r_s(r_t(x)) \in \overline{Y \cap (X \setminus U)}$, lo cual es una contradicción dado que $\overline{Y \cap (X \setminus U)}$ y $\overline{Y \cap V}$ son disjuntos. Por lo tanto, tenemos que $r_t(x) \in U$, para cada $t \geq s$. □

La propiedad de poseer r-esqueletos completos se hereda bajo conjuntos cerrados en espacios numerablemente compactos como será expuesto a continuación.

4.1.5 Teorema. *Sea X un espacio numerablemente compacto con un r-esqueleto completo. Si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces F tiene un r-esqueleto completo.*

Demostración: Sea $\{r_s : s \in \Gamma\}$ un r-esqueleto completo en X. Por el Lema 4.1.3,tenemos que $\Gamma' := \{s \in \Gamma : r_s(F) \subseteq F\} \neq \emptyset$. Que Γ' sea parcialmente ordenado, y dirigido se hereda de Γ. Y que sea σ-completo se obtiene de su definición . Resta ver que $\{r_s \restriction_F : s \in \Gamma'\}$ es un r-esqueleto completo en F. La familia $\{r_s \restriction_F : s \in \Gamma'\}$ cumple claramente las propiedades (i)-(iii) de la Definición 4.1.1. Veamos que $F = \bigcup_{s\in\Gamma'} r_s(F)$. Trivialmente se cumple que $\bigcup_{s\in\Gamma'} r_s(F) \subseteq F$. Para la otra contención, fijemos $x \in F$. Por ser $\{r_s : s \in \Gamma\}$ un r-esqueleto completo en X, existe $s \in \Gamma$ tal que $x = r_s(x)$. Del Lema 4.1.3, existe $s' \in \Gamma'$ tal que $s \leq s'$. Por ello obtenemos que $r_{s'}(x) = r_{s'}(r_s(x)) = r_s(x) = x$. De aquí, $\{r_s \restriction_F : s \in \Gamma'\}$ cumple con (v) de la Definición 4.1.1. Por lo tanto, $\{r_s \restriction_F : s \in \Gamma'\}$ es un r-esqueleto completo en F. □

El Teorema 4.1.5 nos proporciona el siguiente resultado importante de los Σ-conjuntos. Esté es esencial para la caracterización de los espacios de Valdivia con la noción de r-esqueleto.

4.1.6 Corolario. *Todo Σ-conjunto admite un r-esqueleto conmutativo completo. En particular, todo espacio de Corson admite un r-esqueleto conmutativo completo.*

Demostración: Sabemos que todo Σ-conjunto se encaja de manera cerrada en Σ_α, para algún cardinal α. De la Proposición 4.1.2 podemos observar que Σ_α tiene un r-esqueleto conmutativo completo. Como todo Σ-producto es numerablemente compacto, por el Teorema 4.1.5, todo Σ-conjunto admite un r-esqueleto completo. Lo conmutativo se hereda por la construcción de las retracciones definidas para Σ_α en la Proposición 4.1.2. $\square$

4.1.7 Observación. *Sean X un espacio y Y un Σ-conjunto denso de X. Sin perder generalidad, supongamos X como un subespacio de $\mathbb{R}^\alpha$, para algún α. Tenemos que $Y = X \cap \Sigma_\alpha$ y $cl_{\mathbb{R}^\alpha}(Y) = X$. Del Corolario 4.1.6, Y admite un r-esqueleto completo conmutativo. En este caso, $\{P_A \restriction_Y : A \in \Gamma'\}$ es tal r-esqueleto y $\Gamma' := \{A \in [\alpha]^{\leq\omega} : P_A(F) \subseteq F\}$. Notemos que para cada $A \in \Gamma'$, la retracción $P_A \restriction_X$ extiende a $P_A \restriction_Y$. Además, observemos que $P_A(X) = P_A(cl_{\mathbb{R}^\alpha}(Y) \subseteq cl_{\mathbb{R}^\alpha}(P_A(Y)) \subseteq cl_{\mathbb{R}^\alpha}(Y) = X$. Lo cual implica que $\{P_A \restriction_X : A \in \Gamma'\}$ es un r-esqueleto conmutativo en X.*

En lo que sigue enunciaremos un serie de resultados técnicos para obtener la caracterización de los espacios de Valdivia.

4.1.8 Lema. *Sean K un espacio compacto, $F \subseteq K$ un cerrado y $\{r_s : s \in \Gamma\}$ una familia de retracciones de K en F tal que $\{r_s \restriction_F : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto sobre F. Entonces la restricción de la evaluación $e_{\{r_s : s \in \Gamma\}} \restriction_F : F \to e_{\{r_s : s \in \Gamma\}}(K)$ es un homeomorfismo.*

Demostración: Para simplificar la notación, hacemos $h = e_{\{r_s : s \in \Gamma\}}$. Trivialmente, $h \restriction_F$ es continua. Que $h \restriction_F$ sea inyectiva es consecuencia de que la familia $\{r_s \restriction_F : s \in \Gamma\}$ satisface la condición (iv) de la Definición 4.1.1. Por la compacidad de F, para ver que $h \restriction_F$ es un homeomorfismo basta mostrar que es sobreyectiva. Para ello veamos primero que $h(\bigcup_{s\in\Gamma} r_s(K)) \subseteq F$ es denso en $h(K)$. Sean U un conjunto abierto en $h(K)$ y $x_0 \in K$ tal que $h(x_0) \in U$. Sin perder generalidad supongamos que existen $s_1, ..., s_n \in \Gamma$ y conjuntos abiertos $U_{s_i} \subseteq r_{s_i}(K)$, para cada $1 \leq i \leq n$, tales que $U = \{h(x) : x \in K, r_{s_i}(x) \in U_{s_i}$ y $1 \leq i \leq n\}$. Así, tomemos $s \in \Gamma$, una cota superior de $\{s_i : 1 \leq i \leq n\}$. Entonces $r_{s_i}(r_s(x_0)) = r_{s_i}(x_0) \in U_{s_i}$, para todo $1 \leq i \leq n$. Lo cual implica que $h(r_s(x_0)) \in U$. Como $h(\bigcup_{s\in\Gamma} r_s(K))$ es denso en $h(K)$ y F es compacto, concluimos que $h(F) = h(K)$. $\square$

El siguiente lema es bastante útil, pues gracías a él podemos dejar de trabajar sobre un conjunto de indices arbitrario, a solamente trabajar con conjuntos numerables del espacio respectivo.

4.1.9 Lema. *Sean X un espacio numerablemente compacto y Γ un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y σ-completo. Si para cada $x \in X$ se tiene un punto asignado $s_x \in \Gamma$, entonces existe una función monótona $\gamma : [X]^{\leq\omega} \to \Gamma$ que satisface las siguientes propiedades:*

(1) Para cada $x \in X$, $\gamma(\{x\}) \geq s_x$.

(2) Si $A \subseteq B \in [X]^{\leq\omega}$, entonces $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(3) Si $\{A_n : n < \omega\} \subseteq [X]^{\leq\omega}$ y $A_n \subseteq A_{n+1}$ para cada $n < \omega$, entonces $\gamma(\bigcup_{n<\omega} A_n) = \sup_{n<\omega} \gamma(A_n)$.

Demostración: Construyamos iteradamente la función $\gamma : [X]^{\leq\omega} \to \Gamma$ como sigue: Para $\emptyset \subseteq X$ elegimos un punto arbitrario $\gamma(\emptyset) \in \Gamma$. Supongamos que para $n \geq 1$, hemos definido $\gamma(F)$ para todo $F \in [X]^{\leq n}$. Para $A \in [X]^{n+1}$, determinamos $\gamma(A) = \sup\big(\{\gamma(F) : F \in [A]^{\leq n}\} \cup \{s_x : x \in A\}\big)$. Por último, si $A \in [X]^{\omega}$, entonces ponemos $\gamma(A) = \sup\{\gamma(F) : F \in [A]^{<\omega}\}$. La función γ así definida cumple trivialmente con el inciso (1) del lema. Para el inciso (2), sea $B \in [X]^{\leq\omega}$. Si B es finito, por la definición de γ, $\gamma(A) \leq \gamma(B)$, para toda $A \subseteq B$. Supongamos que $B \in [X]^{\omega}$ y sea $A \subseteq B$. Si A es finito, entonces $\gamma(A) \leq \sup\{\gamma(F) : F \in [B]^{<\omega}\} = \gamma(B)$. Ahora, si $A \in [B]^{\omega}$, tenemos que $\{\gamma(F) : F \in [A]^{<\omega}\} \subseteq \{\gamma(G) : G \in [B]^{<\omega}\}$. Así, $\gamma(A) = \sup\{\gamma(F) : F \in [A]^{<\omega}\} \leq \sup\{\gamma(G) : G \in [B]^{<\omega}\} = \gamma(B)$. Resta mostrar que se cumple la propiedad (3). Sea $\{A_n : n < \omega\} \subseteq [X]^{\leq\omega}$ tal que $A_n \subseteq A_{n+1}$, para cada $n < \omega$. Como $A_m \subseteq \bigcup_{n<\omega} A_n$, para toda $m < \omega$, entonces por la monotonía de la función γ tenemos que $\gamma(A_m) \leq \gamma(\bigcup_{n<\omega} A_n)$. Por lo cual se sigue que $\sup_{n<\omega} \gamma(A_n) \leq \gamma(\bigcup_{n<\omega} A_n)$. Por otro lado, para $F \in [\bigcup_{n<\omega} A_n]^{<\omega}$, existe $m < \omega$ tal que $F \subseteq A_m$. Entonces $\gamma(F) \leq \gamma(A_m) \leq \sup_{n<\omega} \gamma(A_n)$. Por lo tanto, $\gamma(\bigcup_{n<\omega} A_n) \leq \sup_{n<\omega} \gamma(A_n)$. □

El Lema 4.1.9 bastó para obtener la caracterización de los espacios de Corson con la noción de r-esqueletos, obtenida en [21]. Sin embargo, este lema no fue suficiente para demostrar la versión en la clase de los espacios de Valdivia. Por ello, con el siguiente lema construiremos una familia de retracciones indexada por elementos del conjunto potencia del espacio en cuestión, la cual sí permite obtener la caracterización para los espacios de Valdivia.

4.1.10 Lema. *Sean K un espacio compacto y Y el espacio inducido por un r-esqueleto conmutativo $\{r_s : s \in \Gamma\}$ en K. Entonces existe una familia de retracciones $\{r_A : A \in \mathcal{P}(Y)\}$ en K, tal que para cada $A \in \mathcal{P}(Y)$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $A \subseteq r_A(K)$ y $d(r_A(K)) \leq |A|$.

(2) La familia $\{r_B \restriction_{r_A(K)} : B \in [A]^{\leq\omega}\}$ es un r-esqueleto conmutativo en $r_A(K)$ e induce a $Y \cap r_A(K)$.

(3) Si $B \subseteq A$, entonces $r_B = r_B \circ r_A = r_A \circ r_B$.

(4) $r_A(Y) \subseteq Y$.

(5) Si $A \in [Y]^{\leq\omega}$, entonces $r_A(K)$ es cósmico.

Además, $Y = \bigcup_{A\in\mathcal{P}(Y)} r_A(Y)$.

Demostración: Primero construyamos las retracciones con índices en los conjuntos numerables de Y. Para cada $y \in Y$, fijemos $s_y \in \Gamma$ tal que $y = r_{s_y}(y)$. Aplicando el Lema 4.1.9, existe $\gamma : [Y]^{\leq\omega} \to \Gamma$ que cumple los incisos (1)-(3) del Lema 4.1.9. Con ello, para cada $A \in [Y]^{\leq\omega}$, definimos $r_A = r_{\gamma(A)}$. La familia $\{r_A : A \in [[Y]^{\leq\omega}\}$ satisface trivialmente los incisos (1)-(4). Queda por determinar, r_A para A no numerable. Para cada $F \in [Y]^{<\omega}$, escogemos $D_F \subseteq r_F(K)$ denso y numerable tal que $F \subseteq D_F$. Consideremos la función $\mathcal{D} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(Y)$ dada por $\mathcal{D}(A) = \bigcup\{D_F : F \in [A]^{<\omega}\}$, para cada $A \in \mathcal{P}(Y)$. Directamente de la definición de $\mathcal{D}$ podemos ver que

- $\mathcal{D}$ es una función monótona.
- Para cada $A \in \mathcal{P}(Y)$, tenemos que $A \subseteq \mathcal{D}(A)$ y $|\mathcal{D}(A)| \leq |A|$.
- Si $A \in [Y]^{\leq\omega}$, entonces $r_A(K) = \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Afirmación: Si $A \in \mathcal{P}(Y) \setminus [Y]^{\leq\omega}$, entonces $Y \cap \overline{\mathcal{D}(A)} = \bigcup\{r_B(K) : B \in [A]^{\leq\omega}\}$.

Prueba de la afirmación: Sea $y \in Y \cap \overline{\mathcal{D}(A)}$. Del inciso (1) del Corolario 4.1.4 sabemos que $t(Y) \leq \omega$. Por ello, existe $D \in [\mathcal{D}(A)]^{\leq\omega}$ tal que $y \in \overline{D}$. Tomando $B \in [A]^{\leq\omega}$ tal que $D \subseteq \mathcal{D}(B)$ obtenemos que $y \in \overline{D} \subseteq \overline{\mathcal{D}(B)} = r_B(K)$. Recíprocamente, si $x \in r_B(K)$, para algún $B \in [A]^{\leq\omega}$, entonces $x \in r_B(K) = \overline{\mathcal{D}(B)} \subseteq Y \cap \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Sea $A \in \mathcal{P}(Y) \setminus [Y]^{\leq\omega}$. La afirmación nos asegura que $\{r_B : B \in [A]^{\leq\omega}\}$ es una familia de retracciones del espacio K en $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Por (2) del Corolario 4.1.4 y las propiedades de γ, se sigue que $\{r_B \restriction_{\overline{\mathcal{D}(A)}} : B \in [A]^{\leq\omega}\}$ es un r-esqueleto conmutativo sobre $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Y el Lema 4.1.8 implica que $e_{\{r_B : B \in [A]^{\leq\omega}\}} \restriction_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$ es un homeomorfismo. Para simplificar la notación hacemos $h_A = e_{\{r_B : B \in [A]^{\leq\omega}\}}$. Con esto definimos la retracción para el conjunto A como $r_A = (h_A \restriction_{\overline{\mathcal{D}(A)}})^{-1} \circ h_A$. Veamos ahora que $\{r_A : A \in \mathcal{P}(Y) \setminus [Y]^{\leq\omega}\}$ satisface las propiedades (1)-(4) del lema. Los enunciados (1) y (2) son satisfechos por la construcción de las retracciones y la afirmación antes mostrada. Sea $A \in \mathcal{P}(Y) \setminus [Y]^{\leq\omega}$. Veamos que se cumple (3) del lema. Fijemos $B \subseteq A$. De la identidad $r_B(K) = \overline{\mathcal{D}(B)} \subseteq \overline{\mathcal{D}(A)} = r_A(K)$, obtenemos que $r_A \circ r_B = r_B$. Sigue ver que $r_B \circ r_A = r_B$. Sea $x \in K$. Es fácil observar que $h_A(x) = h_A((r_A(x))$. Con esto, para cada $D \in [A]^{\leq\omega}$, tenemos que $r_D(x) = r_D(r_A(x))$. Con ello, $r_D(x) = r_D(r_A(x))$, para cada $D \in [B]^{\leq\omega}$ y $h_B(x) = h_B(r_A(x))$. De aquí, se sigue que $r_B(x) = r_B(r_A(x))$. Para establecer el inciso (4) fijamos $y \in Y$ y ponemos $B = \{y\}$. Veamos que $r_B(r_A(y)) = r_A(r_B(y))$. Dado que $\{r_B \restriction_{r_A(K)} : B \in [A]^{\leq\omega}\}$ es un r-esqueleto conmutativo en $r_A(K)$, conseguimos que $r_A(y) = \lim_{D \in [A]^{\leq\omega}} r_D(r_A(y))$. Deducimos, del inciso (3) del lema, que $r_A(y) = \lim_{D \in [A]^{\leq\omega}} r_D(y)$. De este modo, tenemos que

$$r_B(r_A(y)) = \lim_{D \in [A]^{\leq\omega}} r_B(r_D(y)) = \lim_{D \in [A]^{\leq\omega}} r_D(r_B(y)) \in r_A(K).$$

Observe que si $D \in [A]^{\leq\omega}$, entonces por los incisos (2) y (3) del lema, $r_D(r_B(y)) = r_B(r_D(y)) = r_B(r_D(r_A(y))) = r_D(r_B(r_A(y)))$. Con lo cual, $h_A(r_B(y)) = h_A(r_B(r_A(y)))$. Al ser $r_B(r_A(y)) \in r_A(K)$, obtenemos que $r_A(r_B(y)) = r_A(r_B(y))$. Puesto que $r_B(y) = y$, se deduce que $r_A(y) = r_A(r_B(y)) = r_B(r_A(y))$. Como B es numerable, entonces $r_B(K) \subseteq Y$. Por lo tanto, $r_A(y) \in Y$. Por último, $Y = \bigcup_{A \in \mathcal{P}(Y)} r_A(Y)$ se cumple por la elección de los retractos en el caso numerable.

□

El siguiente lema es crucial en la obtención de la caracterización.

4.1.11 Lema. *Sean X un espacio y $Y \subseteq X$ denso con $t(Y) \leq \omega$. Si existe una familia de retracciones $\{r_A : A \in \mathcal{P}(Y)\}$ en X tal que para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$ se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *$A \subseteq r_A(X)$ y $d(r_A(X)) \leq |A|$.*

2. *Si* $A \in [Y]^{\leq\omega}$*, entonces* $r_A(X)$ *es metrizable.*

3. *La familia* $\{r_B \restriction_{r_A(X)} : B \in [A]^{\leq\omega}\}$ *es un r-esqueleto conmutativo en* $r_A(X)$ *e induce a* $Y \cap r_A(X)$*.*

4. *Si* $B \subseteq A$*,* $r_B \circ r_A = r_A \circ r_B = r_B$*.*

5. $r_A(Y) \subseteq Y = \bigcup_{A\in[Y]^{\leq\omega}} r_A(Y)$*.*

Entonces existe una condensación[2] $\phi : X \to \mathbb{R}^\alpha$ *tal que* $\phi(Y) \subseteq \Sigma_\alpha$ *y* $\phi(X \setminus Y) \cap \Sigma_\alpha = \emptyset$*.*

Demostración: Probaremos el lema por inducción sobre la densidad de Y. Si $d(Y) = \omega$, entonces por la condición (3) deducimos que $r_Y(y) = y$, para todo $y \in Y$. Como Y es denso en X, se sigue que $r_Y(x) = x$, para todo $x \in X$. Esto último prueba que $r_Y(X) = X$. De aquí y por las condición (1)-(2) tenemos que X es metrizable separable. Por ello X se condensa en $\mathbb{R}^\omega$. Supongamos que $\kappa = d(Y) > \omega$ y que el resultado se sigue para cardinales menores que κ. Escogemos $\{y_\beta : \beta < \kappa\}$ un subespacio denso de Y y para cada $\theta \leq \kappa$, hacemos $A_\theta = \{y_\beta : \beta < \theta\}$ y $r_\theta = r_{A_\theta}$. Dado $\theta < \kappa$, por las condiciones (1) y (3) y la hipótesis de inducción, existen un cardinal α_θ y una condensación $\phi_\theta : r_\theta(X) \to \mathbb{R}^{\alpha_\theta}$ tales que $Y \cap r_\theta(X) = \phi_\theta^{-1}(\Sigma_{\alpha_\theta})$. Sabemos que $\prod_{\theta<\kappa} \mathbb{R}^{\alpha_\theta}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^\alpha$, en donde $\alpha = \bigoplus_{\theta<\kappa} \alpha_\theta$. Entonces definimos $\phi : X \to \mathbb{R}^\alpha$ como sigue: Si $x \in X$ y $\theta < \kappa$,

$$\phi(x)(\theta) = \begin{cases} \phi_{\theta+1}(r_{\theta+1}(x)) - \phi_{\theta+1}(r_\theta(x)) & \text{si } \theta > 0; \\ \phi_0(r_0(x)) & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

Claramente, ϕ es continua. Para ver que es una condensación en un subespacio de $\mathbb{R}^\alpha$, únicamente queda ver la inyectividad. Sean $x, y \in X$ distintos. Por la propiedad (3), existe $F \in [Y]^{<\omega}$ tal que $r_F(x) \neq r_F(y)$. Con esto $\{\theta < \kappa : r_\theta(x) \neq r_\theta(y)\} \neq \emptyset$. Lo cual permite elegir $\beta = \min\{\theta < \kappa : r_\theta(x) \neq r_\theta(y)\}$. Si $\beta = 0$, se tiene trivialmente que $\phi(x) \neq \phi(y)$. Por otro lado, si $\beta \neq 0$, entonces de la propiedad (3) del Lema aplicada a A_β y de los incisos (iii) y (iv) de la Definición de 4.1.1, existe $\theta < \kappa$ tal que $\beta = \theta + 1$. Lo anterior implica que $\phi(x)(\theta) \neq \phi(y)(\theta)$ y $\phi(x) \neq \phi(y)$. Ahora, veamos que $\phi(Y) \subseteq \Sigma_\alpha$. Sea $x \in Y$. Primero notemos que si $\theta < \mu < \alpha$ y $r_\theta(x) = r_\mu(x)$, entonces $r_\delta(x) = r_\theta(x)$, para todo $\theta < \delta < \mu$. Por ello es suficiente mostrar que $\{r_\theta(x) : \theta < \kappa\}$ es numerable, lo cual será consecuencia de la siguiente afirmación.

Afirmación: Para cada función creciente $f : \omega_1 \to \kappa$, existen θ y β tales que $\theta < \beta < \omega_1$ y $r_{f(\theta)}(x) = r_{f(\beta)}(x)$.
Prueba de la afirmación: Para $\xi = \sup f(\omega_1)$ se cumple que $r_\xi(x) \in \overline{\{r_{f(\theta)}(x) : \theta < \omega_1\}}$. En efecto, sean U una vecindad de $r_\xi(x)$ y V un subconjunto abierto tal que $r_\xi(x) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. De $r_\xi(x) = \lim_{B\in[A_\xi]^{\leq\omega}} r_B(r_\xi(x)) = \lim_{B\in[A_\xi]^{\leq\omega}} r_B(x)$, tenemos que existe $D \in [A_\xi]^{\leq\omega}$ con $r_B(x) \in V$, para $B \in [A_\xi]^{\leq\omega}$ y $D \subseteq B$. Sea $\theta < \omega_1$ tal que $D \subseteq A_{f(\theta)}$. De

$$r_{f(\theta)}(x) = \lim_{B\in[A_{f(\theta)}]^{\leq\omega}} r_B(r_{f(\theta)}(x)) = \lim_{B\in[A_{f(\theta)}]^{\leq\omega}} r_B(x),$$

[2]Decimos que $f : X \to Y$ es una condensación si f es continua e inyectiva.

resulta que

$$r_{f(\theta)}(x) \in \overline{\{r_B(x) : B \in [A_{f(\theta)}]^{\leq\omega} \text{ y } D \subseteq B\}} \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Al ser $t(Y) \leq \omega$, existe $\zeta < \omega_1$ tal que $r_\xi(x) \in \overline{\{r_{f(\theta)}(x) : \theta < \zeta\}} \subseteq r_{f(\zeta)}(X)$. Así, para cada $\beta \geq \zeta$, tenemos que $r_\xi(x) = r_{f(\beta)}(r_\xi(x)) = r_{f(\beta)}(x)$.

Por lo tanto, $\{r_\theta(x) : \theta < \kappa\}$ es numerable. De manera fácil se sigue que $\phi(X \setminus Y) \cap \Sigma_\alpha = \emptyset$. Con todo, ϕ es una condensación. □

El siguiente resultado es el último ingrediente para tener nuestra caracterización.

4.1.12 Lema. *Sean K compacto y Y un subespacio denso de K. Si Y es inducido por un r-esqueleto conmutativo en K, entonces Y es un Σ-conjunto de K.*

Demostración: Al ser K compacto y Y inducido por un r-esqueleto, podemos escoger $\{r_A : A \in \mathcal{P}(Y)\}$ una familia de retracciones sobre K como en el Lema 4.1.10. Por el Lema 4.1.11, existe una condensación $\phi : K \to \mathbb{R}^\alpha$ tal que $\phi(Y) \subseteq \Sigma_\alpha$ y $\phi(K \setminus Y) \cap \Sigma_\alpha = \emptyset$. Dado que K es compacto, tenemos que ϕ es un encaje. □

Con todo lo anterior podemos concluir con la siguiente caracterización de los espacios de Valdivia.

4.1.13 Teorema. *Sea K un espacio compacto. K es un espacio de Valdivia si y solo si K admite un r-esqueleto conmutativo.*

Demostración: Si K es un espacio de Valdivia, de la Observación 4.1.7, tenemos que K admite un r-esqueleto conmutativo. Recíprocamente, si K admite un r-esqueleto conmutativo, entonces el Lema 4.1.12 implica que K es un espacio de Valdivia. □

El Teorema 4.1.13 permite obtener otros ejemplos de espacios de Valdivia. Uno de ellos son los hiperespacios. Los resultados que enunciamos concernientes a los hiperespacios están contenidos en [14]. Sea K un espacio compacto, denotemos por $exp(K)$ al espacio de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos del espacio K, con la topología de Vietoris (las propiedades de esta topología se pueden consultar en [17]).

Una consecuencia del Teorema 4.1.13 correspondiente a los hiperespacios es el siguiente enunciado.

4.1.14 Teorema. *Sean K un espacio de Valdivia, $A \subseteq K$ un Σ-conjunto denso de K y $S = \{F \in exp(K) : F \subseteq A$ y F metrizable $\}$. Entonces S es un Σ-conjunto denso de $exp(K)$.*

Demostración: Por el Teorema 4.1.13, A es inducido por un r-esqueleto conmutativo $\{r_s : s \in \Gamma\}$ en K. Que S sea denso en $exp(K)$ no es díficil de verificar. Con ello, solo queda mostrar que S es un Σ-conjunto. Para cada $s \in \Gamma$, sea $\widehat{r}_s : exp(K) \to exp(K)$ dada por $\widehat{r}_s(F) = r_s(F)$, para cada $F \in exp(K)$. Es fácil ver que la familia $\{\widehat{r}_s : s \in \Gamma\}$ es un r-esqueleto conmutativo en K. Falta ver que $S = \bigcup_{s\in\Gamma} \widehat{r}_s(exp(K))$. Sean $F \in exp(K)$ y $s \in \Gamma$. Como $\widehat{r}_s(F) = r_s(F) \subseteq r_s(K) \subseteq A$ y $r_s(K)$ es metrizable, tenemos que $\widehat{r}_s(F)$ es metrizable. Por ello, $\widehat{r}_s(F) \in S$. Recíprocamente, Si $F \in S$, entonces F es un compacto metrizable. Al ser F separable y $F \subseteq A$, existe $s \in S$ tal que $r_s(F) = F$. Lo cual implica que $F = r_s(F) = \widehat{r}_s(F) \in \widehat{r}_s(exp(K)$. Concluimos, por el Lema 4.1.12, que S es un Σ-conjunto. □

Del Teorema 4.1.14 resulta la siguiente caracterización para espacios de Corson. Además de otra herramienta para obtener espacios de Valdivia.

4.1.15 Corolario. *Sea K un espacio compacto. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

1. *Si K es un espacio de Valdivia, entonces $exp(K)$ es un espacio de Valdivia.*

2. *Si K tiene un conjunto denso de puntos G_δ, entonces K es un espacio de Valdivia si y solo si $exp(K)$ es un espacio de Valdivia.*

3. *$exp(K)$ es un espacio de Corson si y solo si K es metrizable.*

Demostración:
1. Es consecuencia del Teorema 4.1.14.
2. Queda ver que si $exp(K)$ es de Valdivia entonces K es de Valdivia, pues lo otra implicación es el inciso 1. Supongamos que $exp(K)$ es un espacio de Valdivia, $D \subseteq K$ un conjunto denso de puntos G_δ en K y $A \subseteq exp(K)$ es un Σ-conjunto denso en $exp(K)$. Identificando a K en $exp(K)$ como el conjunto $\{\{x\} : x \in K\}$, tenemos que todo punto de D es un punto G_δ en $exp(K)$. Por el Corolario 2.0.10, A contiene todos los puntos G_δ de $exp(K)$. En particular, $D \subseteq A$. Así, D genera un Σ-conjunto denso en K. Por lo tanto, K es Valdivia.
3. Si K es un espacio metrizable, entonces $exp(K)$ es un espacio metrizable con la métrcia de Hausdorff. Del Ejemplo 3.0.2, tenemos que $exp(K)$ es un espacio de Corson. Recíprocamente, si $exp(K)$ es un espacio de Corson, entonces $exp(K) = S$, donde S es como en el Teorema 4.1.14. Identificando a K con $\{\{x\} : x \in K\}$, tenemos que K es un espacio de Corson. Además, como $K \in exp(K)$ y $S = exp(K)$, tenemos que K es metrizable. □

Del Corolario 4.1.15, podemos obtener otro ejemplo de un espacio Valdiva que no es de Corson.

4.1.16 Ejemplo. Sea K la compactación por un punto de un espacio discreto no numerable. Por el Ejemplo 3.0.4, K es un espacio de Valdivia. Por el inciso 1 del Corolario 4.1.15, $exp(K)$ es Valdivia. Sin embargo, el inciso 3 del Corolario 4.1.15 implica que $exp(K)$ no es un espacio Corson.

Una pregunta sugerida por O. Kalenda en [14] es: Si K es compacto y $exp(K)$ es de Valdivia, ¿es K de Valdivia? Una respuesta parcial es el inciso 2 del Corolario 4.1.15. Ahora, si en lugar de tomar $exp(K)$ se toma el espacio de subconjuntos no vacíos y tamaño menor o igual a n, donde $n < \omega$, se obtienen resultados similares a los enunciados para $exp(K)$.

4.2. Espacios de Valdivia y sus espacios de funciones.

En esta apartado, iniciaremos exponiendo la caracterización de un espacio de Corson vía con su espacio de funciones. Después, se hará la generalización para la clase de espacios de Valdivia, esta generalización es la segunda caracterización de estos espacios abordada en este trabajo. Es importante mencionar que algunas propiedades básicas del espacio de funciones se darán por hechas, el lector puede consultar [1] en su caso. Todos los resultados presentados en esta sección son tomados de [12] y [1].

Los siguientes lemas son propios de la teoría de los espacios de funciones. Se utilizarán en la obtención de las dos caracterizaciones antes mencionadas. El lema expuesto acontinuación es un teorema tipo Stone-Weierstrass.

4.2.1 Lema. *Sean K un espacio compacto y $M \subseteq \mathcal{C}(K,2)$, tales que M separa puntos de K y si $f,h \in M$, entonces $max\{f,g\} \in M$, $min\{f,g\} \in M$ y $f+1 \in M$ (donde $f+1(x) = 0$ si $f(x) = 1$; $f+1(x) = 1$ si $f(x) = 0$). Entonces $M = \mathcal{C}(K,2)$.*

Demostración: Primero notemos que hay una relación biunívoca entre los elementos de $\mathcal{C}(K,2)$ y los conjuntos clopen de K. Por un lado, para cada $f \in \mathcal{C}(K,2)$, $U_f = f^{-1}(\{1\})$ es un subconjunto clopen en K. Por otro lado, si U es un conjunto clopen en K, entonces χ_U[3] $\in \mathcal{C}(K,2)$. Sea $\mathcal{B}_M = \{U_f : f \in M\}$. Por las propiedades de M, no es difícil ver que la familia $\mathcal{B}_M$ es cerrada bajo complementos, intersecciones finitas y uniones finitas. Además, $\mathcal{B}_M$ separa puntos de K, es decir, para $x,y \in K$ distintos, existe $V \in \mathcal{B}_M$ tal que $x \in V$ y $y \notin V$. Por la relación biunívoca de $\mathcal{C}(K,2)$ con los conjuntos clopen de K, para probar que $M = \mathcal{C}(K,2)$, basta mostrar que cada subconjunto clopen de K es elemento de $\mathcal{B}_M$. Dicho esto, sea $F \subseteq K$ un subconjunto clopen de K y $x \in K \setminus F$. Para cada $y \in F$, existe $U_{(x,y)} \in \mathcal{B}_M$ tal que $y \in U_{(x,y)}$ y $x \in K \setminus U_{(x,y)} \in \mathcal{B}_M$. Como $F \subseteq \bigcup_{y \in F} U_{(x,y)}$ y F es compacto, existen $y_1, ..., y_n \in F$ tal que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{(x,y_i)}$. Dado que $\mathcal{B}_M$ cerrada bajo uniones finitas, $V_x = \bigcup_{i=1}^n U_{(x,y_i)} \in \mathcal{B}_M$ y $x \in K \setminus V_x \subseteq K \setminus F$. Por ello, tenemos que $K \setminus F = \bigcup_{x \in K \setminus F} K \setminus V_x$. Al ser $K \setminus F$ compacto, existen $x_1, ..., x_l \in K \setminus F$ tales que $K \setminus F = \bigcup_{i=1}^l K \setminus V_{x_i}$. Como cada $K \setminus V_{x_i} \in \mathcal{B}_M$ y $\mathcal{B}_M$ cerrada bajo uniones finitas, entonces $K \setminus F \in \mathcal{B}_M$. Por último, de que $\mathcal{B}_M$ cerrada bajo complementos, deducimos que $F \in \mathcal{B}_M$. Con todo, $M = \mathcal{C}(K,2)$. □

4.2.2 Lema. *Sean $\mathcal{P}$ una clase de espacios que es cerrada bajo imágenes continuas y productos finitos y K un espacio compacto. Si existe $Y \subseteq \mathcal{C}(K,I)$ elemento de $\mathcal{P}$ que separa puntos de K, entonces $\mathcal{C}(K,2)$ puede ser cubierta por una familia numerable de subconjuntos numerables de $\mathcal{P}$.*

Demostración: Construyamos la cubierta para $\mathcal{C}(K,2)$ como sigue: Sea $S_1 = \{Y\}$. Para $n \geq 1$,

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\psi_1(B \times C) : B, C \in S_n\} \cup \{\psi_2(B \times C) : B, C \in S_n\} \cup \{\phi(B) : B \in S_n\}$$

donde $\psi_1(B \times C) = \{max\{f,g\} : f \in B, g \in C\}$, $\psi_2(B \times C) = \{min\{f,g\} : f \in B, g \in C\}$ y $\phi(B) = \{f+1 : f \in B\}$. Por construcción, tenemos claramente que S_n es numerable y $S_n \subseteq \mathcal{P}$, para

[3] χ_U es la función característica de U

cada $n < \omega$. Ahora, considere $M = \bigcup_{n<\omega}\{f : f \in A \text{ y } A \in S_n\}$. Por construcción, M satisface las condiciones del Lema 4.2.1 y así $M = \mathcal{C}(K, 2)$. $\square$

Sigue enunciar otros resultados relacionados a espacios cero dimensionales y la propiedad de Lindelöff primario.

4.2.3 Lema. *Sean K un espacio compacto cero dimensional y $A \subseteq K$. Entonces $\mathcal{C}_A(K, I)$ es la imagen continua de $\mathcal{C}_A(K, 2^\omega)$.*

Demostración: Por el Lema IV $-$ 3,6 de [1] podemos enocontrar una función $\varphi : 2^\omega \to I$ tal que para toda $f \in \mathcal{C}(K, I)$ existe $g_f \in \mathcal{C}(K, 2^\omega)$ con $f = \varphi \circ g_f$. Definiendo $F : \mathcal{C}_A(K, 2^\omega) \to \mathcal{C}_A(I)$ por $F(g) = \varphi \circ g$, se obtiene que F es sobreyectiva y continua. $\square$

4.2.4 Proposición. *Sean $\alpha > \omega$, $K \subseteq 2^\alpha$ un espacio compacto tal que $A = K \cap \Sigma_\alpha$ es denso en K. Entonces $\mathcal{C}_A(K)$ es un espacio Lindelöff primario.*

Demostración: Sea $\psi : L_\alpha \to \mathcal{C}_A(K, 2)$ dada por

$$\psi(\theta) = \begin{cases} \pi_\theta \restriction_K & \theta < \alpha \\ 0 & \theta = \xi \end{cases}$$

Veamos que ψ es continua. Sea $[a; U]$ un conjunto subbásico de $\mathcal{C}_A(K, 2)$. Si $U = \{1\}$, entonces $\xi \notin \psi^{-1}([a; U])$ y $\psi^{-1}([a; U]) \subseteq D_\alpha$ es un subconjunto abierto (recordemos que D_α es el espacio discreto de cardinalidad α). Si $U = \{0\}$, es claro que $\psi^{-1}([a; U]) = supp(a) \cup \{\xi\}$. Como $supp(a)$ es numerable, tenemos que $\psi^{-1}([a; U])$ es una vecindad abierta de ξ. Por lo tanto, ψ es continua. Dado que L_α es Lindelöff primario y ψ continua, entonces $\psi(L_\alpha)$ es Lindelöff primario. Ahora, veamos que $\psi(L_\alpha)$ separa puntos de K. Sean $x, y \in K$ distintos y $\theta < \alpha$ tal que $x_\theta \neq y_\theta$. Entonces $\psi(\theta)$ separa a x y y, pues $\psi(\theta)(x) = x_\theta$ y $\psi(\theta)(y) = y_\theta$. Por ser $\psi(L_\alpha)$ es Lindelöff primario, por el Lema 4.2.2 y por (1) del Lema 2.0.13, tenemos que $\mathcal{C}_A(K, 2)$ es Lindelöff primario. Usando nuevamente el inciso (1) del Lema 2.0.13, tenemos que $\mathcal{C}_A(K, 2)^\omega$ es Lindelöff primario. De aquí se sigue que $\mathcal{C}_A(K, 2^\omega)$ es Lindelöff primario. Por el Lema 4.2.3, $\mathcal{C}_A(K, I)$ es imagen continua de $\mathcal{C}_A(K, 2^\omega)$. Con lo cual, $\mathcal{C}_A(K, I)$ resulta espacio Lindelöff primario. Esto último implica que $\mathcal{C}_A(K, [-n, n])$ es Lindelöff primario, para cada $n < \omega$. Como $\mathbb{R} = \bigcup_{n<\omega}[-n, n]$, entonces $\mathcal{C}_A(K) = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{C}_A(K, [-n, n])$. Dado que unión numerable de espacios Lindelöff primarios es Lindelöff primario, concluimos que $\mathcal{C}_A(K)$ es Lindelöff primario. $\square$

4.2.1. Caracterización de Espacios de Corson vía $\mathcal{C}_p$-teoría.

En este apartado se aborda específicamente la caracterización de los espacios de Corson. Los resultados que serán enunciados a continuación siguen únicamente tal propósito. Recordemos que esta caracterización es de R. Pol ([19]) y la demostración que seguimos es la expuesta en [1].

4.2.5 Proposición. *Sea K un espacio compacto en $\mathcal{C}_p(L_\tau, 2)$ para algún número cardinal τ, entonces $\mathcal{C}_p(K)$ es Lindelöff primario.*

Demostración: Considere la función evaluación $e_K : L_\tau \to \mathcal{C}_p(K,2)$. Al ser e_K continua, $e_K(L_\tau)$ es un espacio Lindelöff primario. Es claro que $e_K(L_\tau)$ separa puntos de K. Como $\mathcal{C}_p(L_\tau,2)$ es cero dimensional, K es cero dimensional. Por la Proposición 4.2.4, $\mathcal{C}_p(K)$ es Lindelöff primario. □

4.2.6 Proposición. *Sea K un espacio de Corson, con $w(K) \leq \tau$. Entonces existe un compacto $B \subseteq \mathcal{C}_p(L_\tau,2)$ tal que K es imagen continua de B.*

Demostración: Sea $\phi : 2^\omega \to I$ una función continua y sobreyectiva tal que $\phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Por el Lema 2.0.8, K lo podemos considerar en el Σ-producto de I^τ. Sean Z el Σ-producto de I^τ y Z_0 el Σ-producto de $(2^\omega)^\tau$. Definamos $\psi : (2^\omega)^\tau \to I^\tau$ por $\psi((x_\theta)_{\theta<\tau}) = (\phi(x_\theta))_{\theta<\tau}$. Claramente ϕ es sobre y continua. Como $\phi(0) = 0$, $\psi(Z_0) \subseteq Z$. También se tiene que $\psi^{-1}(Z) \subseteq Z_0$, en efecto, si $(x_\theta)_{\theta<\tau} \notin Z_0$, entonces $|\{\theta < \tau : x_\theta \neq 0\}|$ es no numerable. Por ser $\phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, tenemos que $|\{\theta < \tau : \phi(x_\theta) \neq 0\}|$ es no numerable. Así, $(x_\theta)_{\theta<\tau} \notin \psi^{-1}(Z)$. Dado que $\psi^{-1}(K)$ es un compacto en $(2^\omega)^\tau$ y $\psi^{-1}(K) \subseteq Z_0$, entonces $\psi^{-1}(K)$ es un compacto en Z_0. Al ser Z_0 homeomorfo a $\{f \in \mathcal{C}_p(L_\tau,2) : f(\xi) = 0\} \subseteq \mathcal{C}_p(L_\tau,2)$, se deduce que $\psi^{-1}(K)$ es homeomorfo a un compacto B en $\mathcal{C}_p(L_\tau,2)$. Se sigue que K es imagen continua de B. □

Antes de seguir enunciando mas lemas damos un poco de notación que necesitaremos. Sean τ un número cardinal y $A \subseteq L_\tau$, definimos $R_A : (L_\tau)^\omega \to (L_\tau)^\omega$ por $R_A((x_i)_{i<\omega}) = (y_i)_{i<\omega}$ donde $y_i = x_i$ si $x_i \in A$ y $y_i = \xi$ si $x_i \notin A$. El fácil ver que R_A es una retracción continua. Ahora, sean $n < \omega$ y V una vecindad de ξ en L_τ. Para $t = (z_1, z_2, ..., z_n) \in (L_\tau)^n$ e $i \leq n$, definimos V_i como sigue, $V_i = \{z_i\}$ si $z_i \neq \xi$ y $V_i = V$ si $z_i = \xi$. Denotamos por $[V,t]$ al abierto $V_1 \times V_2 \times ... \times V_n \times L_\tau \times ....$ Notemos que la familia $\{[V,t] : V$ es vecindad de ξ y $t \in (L_\tau)^n$ para algún $n < \omega\}$ es una base para la topología en $(L_\tau)^\omega$. Dado un cerrado $X \subseteq (L_\tau)^\omega$, si para $t \in (L_\tau)^n$ existe una vecindad V de ξ tal que $[V,t] \cap X = \emptyset$, entonces decimos que t es un *punto distinguido*, V se denota por $V(t)$. Si t es un punto distinguido denotamos por $C(t) := L_\tau \setminus V(t)$, donde V es una vecindad arbitraria que atestigua que t sea punto distinguido.

4.2.7 Lema. *Sea $X \subseteq (L_\tau)^\omega$ cerrado. Si $A \subseteq L_\tau$, entonces existe $M \subseteq L_\tau$ tal que $A \subseteq M$, $|M| = |A| \cdot \omega$ y $R_M(X) \subseteq X$.*

Demostración: Sea $A \subseteq L_\tau$. Construimos M de manera inductiva. Sea $M_1 = A \cup \{\xi\}$ y T_1 los puntos en L_τ que sean puntos distinguidos. Para $n < \omega$, supongamos que hemos construido los conjuntos M_n y $T_n := \{t \in (M_n)^k : k \leq n$ y t punto distinguido$\}$. Entonces ponemos $M_{n+1} := M_n \cup \bigcup_{t \in T_n} C(t)$. Así, definimos $M := \bigcup_{n<\omega} M_n$. Por construcción, es fácil ver que $A \subseteq M$ y $|M| = |A| \cdot \omega$. Solo resta ver que $R_M(X) \subseteq X$. Para ello, mostremos la siguiente afirmación.

Afirmación: Si $y \in (L_\tau)^\omega$ es tal que $z := (z_1, z_2, ...) = R_M(y) \notin X$, entonces existe $n < \omega$ tal que $t = (z_1, ..., z_n)$ es un punto distinguido.

Prueba de la afirmación: Como $z \notin X$ y X cerrado, existe U vecindad de z tal que $U \cap X = \emptyset$. Por ello, existe $n < \omega$ y V una vecindad de ξ tal que $[V,t] \subseteq U$, lo cual implica que $t = (z_1, ..., z_n)$ es punto distinguido.

Sea $y \in (L_\tau)^\omega$ tal que $z = (z_1, z_2, ...) = R_M(y) \notin X$. Tomemos n como en la afirmación y V una vecindad de ξ que atestigua que $t = (z_1, ..., z_n)$ es punto distinguido. La definición de R_M implica que $z_1, ..., z_n \in M$. Al ser $M = \bigcup_{k<\omega} M_k$, existe $m < \omega$ tal que $z_1, ..., z_n \in M_m$. Dado que t es punto distinguido, obtenemos que $t \in T_m$ y por la definición de M_{m+1}, $C(t) = L_\tau \setminus V \subseteq M$. Veamos que $y \in [V, t]$. Sea $i \leq n$. Si $z_i \neq \xi$, entonces $y_i = z_i \in U_i = V_i$. Por otro lado, si $z_i = \xi$, entonces $V_i = V$. Con lo cual se tiene que $y_i = \xi$ o $y_i \neq \xi$. En el primer caso se obtiene que $y_i \in V_i$. Para el segundo caso, tenemos que $y_i \notin M$. Por lo tanto, $y_i \notin C(t)$, es decir, $y_i \in L_\tau \setminus C(t) = V_i$. Con ello concluimos que $y \in [V, t]$. Al ser $[V, t] \cap X = \emptyset$, deducimos que $y \notin X$. Por ello, si $y \in (L_\tau)^\omega$ y $R_M(y) \notin X$, entonces $y \notin X$. Lo cual implica que $R_M(X) \subseteq X$. □

4.2.8 Lema. *Sean τ un número cardinal, $\lambda = cof(\tau)$ y $X \subseteq (L_\tau)^\omega$. Entonces existe una familia de subconjuntos $\{M_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de L_τ tal que:*

1. *$\xi \in M_0$ y para cada $\alpha < \lambda$, $M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$ y $M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha \neq \emptyset$.*
2. *$L_\tau = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$.*
3. *Si $\alpha < \lambda$ es limite, entonces $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$.*
4. *Para toda $\alpha < \lambda$, $R_{M_\alpha}(X) \subseteq X$.*

Demostración: Sea $\{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de subconjuntos de L_τ tales que $L_\tau = \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$, $\xi \in B_0$, $|B_\alpha| < \tau$ y $B_\alpha \subseteq B_{\alpha+1}$, para toda $\alpha < \lambda$. Para B_0, tomamos M_0 como en el Lema 4.2.7. Sea $\alpha < \lambda$. Si α es límite, pongamos $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\alpha$. Si tenemos M_α definido, de $M_\alpha \cup B_\alpha$ escogemos $M_{\alpha+1}$ como en el Lema 4.2.7 tal que $M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha \neq \emptyset$. Por construcción, la familia $\{M_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es la deseada. □

4.2.9 Proposición. *Sea X un espacio Lindelöff primario. Entonces existe un número cardinal γ y una condensación lineal $\phi : \mathcal{C}_p(X) \to \Sigma_\gamma$.*

Demostración: Note que si Y es imagen continua de X, entonces $\mathcal{C}_p(Y)$ es linealmente homeomorfo a un subespacio de $\mathcal{C}_p(X)$. Por ello, es suficiente mostrar la proposición para $X \subseteq (L_\tau)^\omega$ cerrado y $\tau \geq \omega$. Para esto, hagamos inducción sobre τ. Si $\tau = \omega$, el espacio $(L_\omega)^\omega = \omega^\omega$ se puede encajar en $\mathbb{R}^\omega$. Así, $(L_\omega)^\omega$ es separable. Sea $D_0 \subseteq (L_\omega)^\omega$ denso y numerable. La proyección $\Pi_{D_0} : \mathcal{C}_p((L_\omega)^\omega) \to \mathcal{C}_p(D_0)$ es una condensación lineal, donde $\Pi_{D_0}(f) = f \restriction_{D_0}$. Ahora, como D_0 numerable, trivialmente $\mathcal{C}_p(D_0)$ se condensa linealmente en Σ_ω. Tomando la composición adecuada tenemos que $\mathcal{C}_p((L_\omega)^\omega)$ se condensa linealmente en un Σ-producto. Ahora, supongamos $\tau > \omega$ y que la proposición es cierta para cardinales menores que τ. Tomamos $\lambda = cof(\tau)$ y $\{M_\alpha : \alpha < \lambda\}$ como en el Lema 4.2.8. Para simplificar la notación, para cada $\alpha < \lambda$, renombremos por R_α y X_α a R_{M_α} y $R_{M_\alpha}(X)$, respectivamente. Con ello, notemos que para cada $\alpha < \lambda$, la función $h_\alpha : \mathcal{C}_p(X_\alpha) \to T_\alpha$ dada por $h_\alpha(f) = f \circ (R_\alpha \restriction_X)$ para cada $f \in \mathcal{C}_p(X_\alpha)$, donde $T_\alpha = \{f \circ (R_\alpha \restriction_X) : f \in \mathcal{C}_p(X)\}$, es un homeomorfismo. Es claro que, $X_\alpha = X \cap (M_\alpha)^\omega$ y $|M_\alpha| < \tau$, una observación importante es que X_α es homeomorfo a $(L_{|M_\alpha|})^\omega$. Por hipótesis de inducción, para cada $\alpha < \lambda$, existe un número cardinal γ_α y una condensación lineal

$\phi_\alpha : T_\alpha \to \Sigma_{\gamma_\alpha}$. Recuerde que $\prod_{\alpha<\lambda} \mathbb{R}^{\gamma_\alpha}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^\gamma$, donde $\gamma = \bigoplus_{\alpha<\lambda} \gamma_\alpha$. Tomando Z como el Σ-producto de $\prod_{\alpha<\lambda} \mathbb{R}^{\gamma_\alpha}$, definamos $\phi : \mathcal{C}_p(X) \to Z$, como sigue:

$$\phi(f)(\alpha) = \begin{cases} \phi_{\alpha+1}\big(f \circ (R_{\alpha+1} \restriction_X) - f \circ (R_\alpha \restriction_X)\big) & \text{si } \alpha > 0, \\ \phi_0(f \circ (R_0 \restriction_X)) & \text{si } \alpha = 0, \end{cases}$$

para cada $f \in \mathcal{C}_p(X)$. Tenemos que ϕ es continua pues para cada $\alpha < \lambda$, $f \circ (R_{\alpha+1} \restriction_X) - f \circ (R_\alpha \restriction_X)$ es continua. Queda ver que ϕ es inyectiva.

Afirmación: Si $\beta < \lambda$ es límite, entonces $\bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha$ es denso en X_β.

Prueba de la afirmación: Sea $(x_i)_{i<\omega} \in X_\beta$. Como $X_\beta = R_{M_\beta}(X) \subseteq X$ y $M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$, para todo $n < \omega$ existe $\alpha_n < \beta$ tal que $x_1, ..., x_n \in M_{\alpha_n}$. Es claro que $(x_1, ..., x_n, \xi, ...) \in \bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha$ y que toda vecindad del punto $(x_i)_{i<\omega}$ contiene a $(x_1, ..., x_n, \xi, ...)$.

Sean $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$ distintos. Pongamos $\beta = \min\{\alpha < \lambda : f \restriction_{X_\alpha} \neq g \restriction_{X_\alpha}\}$. Si $\beta = 0$, por la definición de ϕ, $\phi(f) \neq \phi(g)$. Supongamos que $\beta > 0$. Veamos que β no es límite. Supongamos que β lo contrario. Por la afirmación, $\bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha$ es denso en X_β, lo cual implica que existe $\alpha' < \beta$ tal que $f \restriction_{X_{\alpha'}} \neq g \restriction_{X_{\alpha'}}$. La existencia α' contradice que β sea el mínimo. Por lo tanto, β no es límite. Sea $\alpha' < \lambda$ tal que $\beta = \alpha' + 1$. Por la elección de β, $f \circ (R_\beta \restriction_X) \neq g \circ (R_\beta \restriction_X)$ y $f \circ (R_{\alpha'} \restriction_X) = g \circ (R_{\alpha'} \restriction_X)$. Se sigue que $f \circ (R_\beta \restriction_X) - f \circ (R_{\alpha'} \restriction_X) \neq g \circ (R_\beta \restriction_X) - g \circ (R_{\alpha'} \restriction_X)$. Por la linealidad de ϕ_β tenemos que $\phi(f) \neq \phi(g)$. Solo queda ver que para $f \in \mathcal{C}_p(X)$, $supp(\phi(f))$ es numerable. Supongamos que $supp(\phi(f))$ es no numerable y notemos que $supp(\phi(f)) = \{\alpha < \lambda : f \circ (R_{\alpha+1} \restriction_X) \neq f \circ (R_\alpha \restriction_X)\}$. Para cada $\alpha \in supp(\phi(f))$, fijemos x^α tal que $f \circ (R_{\alpha+1} \restriction_X)(x^\alpha) \neq f \circ (R_\alpha \restriction_X)(x^\alpha)$. Sea $\epsilon > 0$ y $S \subseteq supp(\phi(f))$ no numerable tal que $|f \circ (R_{\alpha+1} \restriction_X)(x^\alpha) - f \circ (R_\alpha \restriction_X)(x^\alpha)| > \epsilon$, para cada $\alpha \in S$. Note que $\{R_\alpha(x^\alpha) : \alpha \in S\}$ es no numerable. Veamos que existe $z \in X$ tal que para toda vecindad W de z tenemos que $\{\alpha \in S : R_\alpha(x^\alpha) \in W\}$ es no numerable. En efecto, supongamos que para todo $w \in X$ existe una vecindad abierta de w, W_w tal que $\{\alpha \in S : R_\alpha(x^\alpha) \in W_w\}$ es numerable. Como X es Lindelöff y $X = \bigcup_{w\in X} W_w$, existe $B \in [X]^\omega$ tal que $X = \bigcup_{w\in B} W_w$. Dado que $\{R_\alpha(x^\alpha) : \alpha \in S\} = \bigcup_{w\in B}\{R_\alpha(x^\alpha) : R_\alpha(x^\alpha) \in W_w\}$, tenemos que $\{R_\alpha(x^\alpha) : \alpha \in S\}$ es numerable. Lo último es una contradicción porque $\{R_\alpha(x^\alpha) : \alpha \in S\}$ es no numerable. Así, escogemos $z \in X$ tal que para toda vecindad W de z tenemos que $\{\alpha \in S : R_\alpha(x^\alpha) \in W\}$ es no numerable. Por la continuidad de f, existe U vecindad de z tal que $f(U)$ queda contenida en una bola de radio $\frac{\epsilon}{2}$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $U = [V, t]$, donde $t = (z_1, ..., z_n)$ y V es una vecindad de ξ. Por ser $S' = \{\alpha \in S : R_\alpha(x^\alpha) \in U\}$ no numerable, la familia $\{M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha : \alpha \in S'\}$ es disjunta y no numerable. Al ser $L_\tau \setminus V$ numerable, existe $\beta \in S'$ tal que $M_{\beta+1} \setminus M_\beta \subseteq V$. Mas aún, como $\beta \in S'$, obtenemos que $R_\beta(x^\beta) \in U$. Ahora, veamos que $R_{\beta+1}(x^\beta) \in U$. Para ello notemos que:

♠ Si para $i < \omega$ tenemos que $\pi_i(R_{\beta+1}(x^\beta)) \in M_\beta$, entonces $\pi_i(R_{\beta+1}(x^\beta)) = \pi_i(R_\beta(x^\beta))$.

Para simplificar notación, sean $y^* = R_\beta(x^\beta)$ y $x^* = R_{\beta+1}(x^\beta)$. Sea $i \leq n$, probemos que $x_i^* \in V_i$. Si $z_i \neq \xi$, entonces $V_i = \{z_i\}$. Como $y^* \in U$, tenemos que $y_i^* = z_i \in M_\beta$. Por ser $M_\beta \subseteq M_{\beta+1}$, tenemos que $x_i^* = \pi_i(R_{\beta+1}(x^\beta)) = y_i^* = z_i$. Lo cual implica que $x_i^* \in V_i$. Si $z_i = \xi$, entonces $y_i^* \in V_i$.

Por la definición de $R_{\beta+1}$, $x_i^* \in M_{\beta+1}$. Si $x_i^* \in M_{\beta+1} \setminus M_\beta$, como $M_{\beta+1} \setminus M_\beta \subseteq V$ tenemos que $x_i^* \in V_i$. Por otro lado, si $x_i^* \in M_\beta$, por la condición ♠, $x_i^* = y_i^*$. De aquí, se sigue que $x_i^* \in V_i$. Por lo tanto, $x^* \in U$. Con ello, al ser $f(U)$ contenida en una bola de radio menor que $\frac{\epsilon}{2}$, tenemos que $|f \circ (R_{\beta+1} \restriction_X)(x^\beta) - f \circ (R_\beta \restriction_X)(x^\beta)| < \epsilon$. Esto último contradice que $\beta \in S'$. Así, $supp(\phi(f))$ es numerable. Con todo esto tenemos que ϕ es una condesación en Σ_γ, lo cual prueba la proposición. □

Podemos enunciar ahora el teorema de caracterización de espacios de Corson con las propiedades de $\mathcal{C}_p(K)$.

4.2.10 Teorema. *Sea K un espacio compacto, entonces K es un espacio de Corson si y solo si $\mathcal{C}_p(K)$ es Lindelöff primario.*

Demostración: Supongamos que K es Corson y $\tau = w(K)$. Por la Proposición 4.2.6, existe $X \subseteq \mathcal{C}_p(L_\tau, 2)$ compacto y $g : X \to K$ continua y sobre. Por ser X compacto, g es cerrada. Así, $\mathcal{C}_p(K)$ es homeomorfo a un cerrado de $\mathcal{C}_p(X)$. Por la Proposición 4.2.5, $\mathcal{C}_p(X)$ es Lindelöff primario. Como la propiedad de ser Lindelöff primario es cerrada bajo imagenes continua y subespacios cerrados (Lema 2.0.13), tenemos que $\mathcal{C}_p(K)$ es Lindelöff primario.
Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{C}_p(K)$ es Lindelöff primario. Por la Proposición 4.2.9, $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(K))$ es linealmente condensado sobre un subespacio de Σ_α, para algún número cardinal α. Note que la condesación con dominio compacto es un homeomorfismo. Como K es homeomorfo a un subespacio de $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(K))$, tenemos que K es homeomorfo a un subespacio de Σ_α; es decir, K es un espacio de Corson. □

Un último comentario acerca de esta caracterización, es mencionar que I. Bandlow en [9] prueba que si K es un espacio compacto y $\mathcal{C}_p(K)$ es imagen continua de un cerrado de $(L_\tau)^\omega \times Z$, donde Z es un espacio compacto, entonces K es un espacio de Corson. En ese trabajo de Bandlow es donde se usan por primera vez los modelos elementales para mostrar resultados sobre los espacios de Corson. De aquí Kubiś *et. al.* se les ocurrió usar modelos elementales en la caracterización dada en el Teorema 4.1.13. Es importante mencionar que R. Rojas-Hernández y S. García-Ferreira obtienen una demostración del resultado de I. Bandlow sin usar modelos elementales y con una noción llamada q-esqueletos.

4.2.2. Caracterización de Espacios de Valdivia vía $\mathcal{C}_A(K)$.

En esta última parte expondremos una caracterización de los espacios Valdivia con la propiedades del espacio de funciones $\mathcal{C}_A(K)$ dada por O. Kalenda en [12]. El resultado generaliza el Teorema 4.2.10. Para su demostración se darán una serie de resultados técnicos que ayudaran a demostrar el teorema.

4.2.11 Lema. *Sean K, L espacios compactos, $\varphi : K \to L$ continua y sobreyectiva y $f \in \mathcal{C}(K)$. Entonces $f \in \varphi^*(\mathcal{C}(L))$*[4] *si y solo si f es constante en $\varphi^{-1}(l)$ para todo $l \in L$.*

[4] Recordar que para $\varphi : K \to L$ continua y sobreyectiva, $\varphi^* : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)$ esta dada por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ para cada $f \in \mathcal{C}(L)$.

Demostración: Supongamos que $f \in \varphi^*(\mathcal{C}(L))$ y $f = \varphi^*(g) = g \circ \varphi$, para algúna $g \in \mathcal{C}(L)$. Si $l \in L$ y $x, y \in \varphi^{-1}(l)$, entonces $\varphi(x) = \varphi(y)$ y $f(x) = g(\varphi(x)) = g(\varphi(y)) = f(y)$. Así, f constante en $\varphi^{-1}(l)$. Recíprocamente, supongamos que f es constante en $\varphi^{-1}(l)$ para todo $l \in L$. Definimos $g : L \to \mathbb{R}$ por $g(l) = f(k)$ para algún $k \in \varphi^{-1}(l)$. Tenemos que g está bien definida, pues f es constante en cada fibra de φ. Al ser φ una función cociente y $f = g \circ \varphi$, por el teorema de transgreción concluimos que g es continua. $\square$

4.2.12 Lema. *Sean K, L espacios compactos, $\varphi : K \to L$ continua y sobreyectiva, $A \subseteq K$ y $B = \varphi(A)$, entonces son cumplen las siguiente propiedades:*

1. *$\varphi^* : \mathcal{C}_B(L) \to \mathcal{C}_A(K)$ es un encaje.*
2. *Sea $E = \{(x, y) \in K \times K : \varphi(x) = \varphi(y)\}$. Si $E \cap (A \times A)$ es denso en E, entonces $\varphi^*(\mathcal{C}(L))$ es cerrado en $\mathcal{C}_A(K)$.*

Demostración:
1. Es claro que φ^* es inyectiva. Para ver que es continua tomemos un subconjunto abierto básico $[a_1, ..., a_n; U_1, ..., U_n]$ en $\mathcal{C}_A(K)$. De aquí obtenemos que

$$(\varphi^*)^{-1}([a_1, ..., a_n; U_1, ..., U_n]) = [\varphi(a_1), ..., \varphi(a_n); U_1, ..., U_n]$$

es un subconjunto abierto básico en $\mathcal{C}_B(L)$. Para ver que es encaje, basta notar que

$$\varphi^*([\varphi(a_1), ..., \varphi(a_n); U_1, ..., U_n]) = [a_1, ..., a_n; U_1, ..., U_n] \cap \varphi^*(\mathcal{C}_B(L)).$$

2. Probemos que $\mathcal{C}_A(K) \setminus \varphi^*(\mathcal{C}_B(L))$ es un subconjunto abierto. Sea $f \in \mathcal{C}_A(K) \setminus \varphi^*(\mathcal{C}_B(L))$. Por el Lema 4.2.11, existe $l \in L$ tal que f no es constante en $\varphi^{-1}(l)$. Elegimos $x, y \in \varphi^{-1}(l)$ distintos. Como $f(x) \neq f(y)$, tenemos que existen $U, V \subseteq \mathbb{R}$ tales que $f(x) \in U$, $f(y) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Note que $(x, y) \in E$ y $f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)$ es una vecindad de (x, y). Al ser $E \cap (A \times A)$ denso en E, existe $(a, b) \in E \cap (A \times A)$ tal que $(a, b) \in f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)$. Lo cual implica que $f \in [a, b; U, V]$. Veamos ahora que $[a, b; U, V] \cap \varphi^*(\mathcal{C}_B(L)) = \emptyset$. Supongamos lo contrario y tomemos $g \in [a, b; U, V] \cap \varphi^*(\mathcal{C}_B(L))$. Por la definición de $[a, b; U, V]$, tenemos que $g(a) \in U$ y $g(b) \in V$. Por ser $g \in \varphi^*(\mathcal{C}_B(L))$, tenemos que existe $h \in \mathcal{C}(K)$ tal que $g = \varphi^*(h) = h \circ \varphi$. Como $\varphi(a) = \varphi(b)$, tenemos que $g(a) = h(\varphi(a)) = h(\varphi(b)) = g(b)$, lo cual es una contradicción dado que $g(a) \in U$ y $g(b) \in V$. Por lo tanto, $f \in [a, b; U, V] \subseteq \mathcal{C}_A(K) \setminus \varphi^*(\mathcal{C}_B(L))$ y $\mathcal{C}_A(K) \setminus \varphi^*(\mathcal{C}_B(L))$ es conjunto abierto en $\mathcal{C}_A(K)$. $\square$

4.2.13 Proposición. *Sean $\alpha \geq \omega$, $L \subseteq I^\alpha$ compacto y $B = L \cap \Sigma_\alpha$ denso en L. Entonces existe un compacto $K \subseteq 2^\gamma$ con $A = K \cap \Sigma_\gamma$ denso en K y $\varphi : K \to L$ continua y sobreyectiva tal que $\mathcal{C}_B(L)$ homeomorfo a $\varphi^*(\mathcal{C}_B(L))$ y $\varphi^*(\mathcal{C}_B(L))$ cerrado en $\mathcal{C}_A(K)$.*

Demostración: Sea $\phi : 2^\omega \to I$ una función continua y sobreyectiva tal que $\phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Definamos $\psi : (2^\omega)^\alpha \to I^\alpha$ como $\psi((x_\beta)_{\beta<\alpha}) = (\phi(x_\beta))_{\beta<\alpha}$. Claramente ψ es continua y sobreyectiva. Recordemos que en demostración de la Proposición 4.2.6 probamos que:

Afirmación: $x \in \Sigma_{\omega\times\alpha}$ si y solo si $\psi(x) \in \Sigma_\alpha$.

Ahora, tomemos $K = \psi^{-1}(L)$, $A = K \cap \Sigma_{\omega\times\alpha}$ y $\varphi = \psi\restriction_K$. De la afirmación obtenemos que $\varphi(A) = B$. Por el inciso 1 del Lema 4.2.12, deducimos que $\mathcal{C}_B(L)$ es homeomorfo a $\varphi^*(\mathcal{C}_B(L)) \subseteq \mathcal{C}_A(K)$. Resta probar que A es denso en K y que $\varphi^*(\mathcal{C}_B(L))$ es cerrado en $\mathcal{C}_A(K)$. Para ello es suficiente mostrar que para $x, y \in K$ con $\varphi(x) = \varphi(y)$ existe una red $\{(x_\nu, y_\nu)\}_{\nu\in\Lambda} \subseteq A \times A$ tal que $\varphi(x_\nu) = \varphi(y_\nu)$, $x_\nu \to x$ y $y_\nu \to y$. Es suficiente porque la densidad de A la tendríamos cuando $x = y$ y que $\varphi^*(\mathcal{C}_B(L))$ sea cerrado resultaría del inciso 2 del Lema 4.2.12. Sean $x, y \in K$ con $c = \varphi(x) = \varphi(y)$ y Λ la familia de conjuntos G_δ que contienen a c. Claramente Λ es un conjunto dirigido con el orden de la contención inversa. Para cada $G \in \Lambda$, la Proposición 2.0.9 implica que $G \cap A$ es denso en G. Así, elijamos $c_G \in G \cap A$, para cada $G \in \Lambda$. Ahora, tenemos que se cumple:

- $\star$ Para cada $\beta < \alpha$ existe $G \in \Lambda$ tal que si $H \in \Lambda$ y $H \subseteq G$ entonces $\pi_\beta(c_H) = \pi_\beta(c)$.

El enunciado $\star$ es cierto, dado que para $\beta < \alpha$ basta tomar $G = \{z \in L : \pi_\beta(z) = \pi_\beta(c)\}$. De $\star$, se sigue inmediatamente que $c_G \to c$. Queda construir $\{(x_\nu, y_\nu)\}_{\nu\in\Lambda}$ que cumpla lo que queríamos. Sea $G \in \Lambda$. Si $\theta < \alpha$ es tal que $\pi_\theta(c_G) \neq \pi_\theta(c)$, entonces escogemos $w_\theta, v_\theta \in \phi^{-1}(\pi_\theta(c_G))$. Con ello, definimos (x_G, y_G) como sigue, para cada $\theta < \alpha$ definimos

$$(\pi_\theta(x_G), \pi_\theta(y_G)) = \begin{cases} (x_\theta, y_\theta) & \text{si } \pi_\theta(c_G) = \pi_\theta(c), \\ (w_\theta, v_\theta) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por construcción tenemos que para cada $G \in \Lambda$, $\varphi(x_G) = \varphi(y_G) = c_G$. De nuestra afirmación, deducimos que $x_G, y_G \in A$. Por último, $\star$ implica que $x_G \to x$ y $y_G \to y$. $\square$

4.2.14 Proposición. *Sea X numerablemente compacto y $f : X \to \Sigma_\alpha$ continua. Entonces $f(X)$ es cerrado en Σ_α. Además, si f es inyectiva entonces f es un encaje.*

Demostración: Como X es numerablemente compacto, tenemos que $f(X)$ es numerablemente compacto. Sea $x \in \overline{f(X)} \setminus f(X)$. Al ser Σ_α es FU, existe $\{x_n\}_{n<\omega} \subseteq f(X)$ tal que $x_n \to x$. Se sigue que $\{x_n\}_{n<\omega}$ es un conjunto numerable sin puntos de acumulación en $f(X)$, lo cual contradice que $f(X)$ sea numerablemente compacto. Así, $f(X)$ cerrado en Σ_α. Ahora, supongamos que f es también inyectiva. Sea $A \subseteq X$ cerrado. Dado que A es numerablemente compacto, obtenemos que A numerablemente cerrado. De aquí, se deduce que $f\restriction_A : A \to \Sigma_\alpha$ es continua. Por lo anterior, se sigue que $f\restriction_A(A)$ es cerrado en Σ_α; es decir, f es una función cerrada. Por ello f es un homeomorfismo. $\square$

4.2.15 Proposición. *Sean K compacto y $A \subseteq K$ numerablemente cerrado y denso en K. Si $\mathcal{C}_A(K)$ es Lindelöff, entonces $K = \beta A$.*

Demostración: Tomemos $\psi : \beta A \to K$ la extensión continua de la identidad en A. Para ver que $\beta A = K$, basta mostrar que ψ es inyectiva. Resta ver que ψ es inyectiva en $\beta A \setminus A$. Supongamos lo contrario y escojamos $x, y \in \beta A \setminus A$ distintos con $p = \psi(x) = \psi(y)$. Sea $\Lambda = \{G \subseteq K : G \text{ es un conjunto } G_\delta \text{ y } p \in G\}$, Λ es un conjunto dirigido con el orden de la contención inversa. Como

βA es compacto, escogemos $U, V \subseteq \beta A$ subconjuntos abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Para $G \in \Lambda$, $U \cap \psi^{-1}(G)$ es un conjunto G_δ en βA. Como A es denso, por la Proposición 2.0.9, $U \cap \psi^{-1}(G) \cap A$ es denso en $U \cap \psi^{-1}(G)$. Análogamente, $V \cap \psi^{-1}(G) \cap A$ es denso en $V \cap \psi^{-1}(G)$. Entonces, sean $x_G \in U \cap \psi^{-1}(G) \cap A$ y $y_G \in V \cap \psi^{-1}(G) \cap A$. Tenemos así las redes $(x_G)_{G\in\Lambda}$ y $(y_G)_{G\in\Lambda}$, tales que $x_G \to x$ y $y_G \to y$. Como ψ continua, $\psi(x_G) \to \psi(x)$ y $\psi(y_G) \to \psi(y)$. Así, para cada $G \in \Lambda$, sea $C_G = \{f \in \mathcal{C}(K) : |f(\psi(x_G)) - f(\psi(y_G))| < 1\}$. C_G es claramente un conjunto abierto en $\mathcal{C}_A(K)$, cada $G \in \Lambda$. Afirmamos que la familia $\{C_G : G \in \Lambda\}$ cubre a $\mathcal{C}_A(K)$. En efecto, sea $h \in \mathcal{C}(K)$. Como $\psi(x_G) \to p$ y $\psi(y_G) \to p$, tenemos que $h(\psi(x_G)) \to h(p)$ y $h(\psi(y_G)) \to h(p)$. Por ello, existe $G_0 \in \Lambda$, tal que para todo $G \geq G_0$, $|h(\psi(x_G)) - h(p)| < \frac{1}{2}$ y $|h(\psi(y_G)) - h(p)| < \frac{1}{2}$. Lo cual implica que $|h(\psi(x_G)) - h(\psi(y_G))| < 1$. Por lo tanto, $h \in C_G$, para toda $G \geq G_0$. Ahora, dado que $\mathcal{C}_A(K)$ es Lindelöff, existe una familia $\{G_n : n < \omega\} \subseteq \Lambda$ tal que $\mathcal{C}_A(K) = \bigcup_{n<\omega} C_{G_n}$. Pongamos $H = \{\psi(x_{G_n}) : n < \omega\}$ y $L = \{\psi(y_{G_n}) : n < \omega\}$. Por ser A numerablemente cerrado, obtenemos que $\overline{H}, \overline{L} \subseteq A$. Ya que $\psi^{-1}(H) \subseteq U$, $\psi^{-1}(L) \subseteq V$ y $\psi\mid_A$ es la identidad, deducimos que $\overline{H} \cap \overline{L} = \emptyset$. La compacidad de K implica que existe $f \in \mathcal{C}(K)$ tal que $f(\overline{H}) = \{0\}$ y $f(\overline{L}) = \{1\}$. Con esto $f \notin C_{G_n}$, para todo $n < \omega$, esto último contradice que $\{C_{G_n} : n < \omega\}$ sea cubierta de $\mathcal{C}_A(K)$. Se sigue que $\psi(x) \neq \psi(y)$. Por lo tanto, ψ inyectiva y con ello $\beta A = K$. □

4.2.16 Proposición. *Sean K un espacio completamente regular y $A \subseteq K$ tal que $\mathcal{C}_A(K)$ es Lindelöff primario. Entonces existe $\alpha \geq \omega$ y $f : A \to \Sigma_\alpha$ continua e inyectiva.*

Demostración: Como $\mathcal{C}_A(K)$ es Lindelöff primario, por la Proposición 4.2.9, existe una condensación lineal $\phi : \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_A(K)) \to \Sigma_\alpha$. Consideramos $h : A \to \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_A(K))$, dada por $h(a)(f) = f(a)$. Es claro que h es continua. Para ver la inyectividad de h, tomemos $a, b \in A$ distintos. Por ser K completamente regular, existe $f \in \mathcal{C}_A(K)$ con $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$. Así, $h(a)(f) \neq h(b)(f)$. Por ello, h es inyectiva. La composición $\phi \circ h$ es la deseada para la proposición. □

Ahora, sigue enunciar la caracterización de los espacios de Valdivia.

4.2.17 Teorema. *Sean K un espacio compacto y $A \subseteq K$ un conjunto denso en K. Entonces A es un Σ-conjunto de K si y solo si A es numerablemente compacto y $\mathcal{C}_A(K)$ es Lindelöff primario.*

Demostración: Supongamos que A es un Σ-conjunto de K y $K \subseteq I^\alpha$. Por la Proposición 2.0.5, A es numerablemente cerrado. Como K es compacto y Hausdorff, que A se numerablemente cerrado implica que A sea numerablemante compacto. Falta ver que $\mathcal{C}_A(K)$ es Lindelöff primario. Por la Proposición 4.2.13, existen γ y $K' \subseteq 2^\gamma$ con $B = K' \cap \Sigma_\gamma$ denso en K' y $\varphi : K' \to K$ continua y sobreyectiva tal que $\mathcal{C}_A(K)$ es homeomorfo al cerrado $\varphi^*(\mathcal{C}_A(K))$ en $\mathcal{C}_B(K')$. Por la Proposición 4.2.4, $\mathcal{C}_B(K')$ es Lindelöff primario. Como la imagen continua de un espacio Lindelöff primario es Lindelöff primario, tenemos que $\mathcal{C}_A(K)$ es Lindelöff primario.
Recíprocamente, supongamos que A es numerablemente compacto y $\mathcal{C}_A(K)$ es Lindelöff primario. Como K es completamente regular, por la Proposición 4.2.16, existen α y $f : A \to \Sigma_\alpha$ continua e inyectiva. Como A es numerablemente compacto, de la Proposición 4.2.14, se sigue que f es un homeomorfismo de A en $f(A)$ y $f(A)$ resulta cerrado en Σ_α. Por ser A numerablemente compacto, cada cordenada de $f(A)$ es acotada. Utilizando la Proposición 4.2.15, $K = \beta A$. Se sigue del Lema 2.0.8, que A es un Σ-conjunto de K. Por lo tanto, K es un espacio de Valdivia. □

Cuando no pedimos que el espacio de Valdivia sea compacto, hay ejemplos de espacios numerablemente compactos no compactos con un Σ-producto denso:

4.2.18 Ejemplo. Considere $\alpha \geq \omega$, x el elemento de I^α que en todas sus coordenadas es $1/2$. Si Z es el Σ-producto en I^α con punto base x, entonces el espacio $K = (\Sigma_\alpha \cap I^\alpha) \cup Z$ es numerablemente compacto, no es un espacio compacto y $\Sigma_\alpha \cap I^\alpha$ es un Σ-conjunto denso de K.

Bibliografía

[1] A. V. Arkhangel'skii. *Topological Function Spaces* Kluver Acad. Publ. Dordrech (1992).

[2] D. Amir, J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces.* Ann. Math. 88 (1968) 35-46.

[3] E. Hewitt, *rings of real-valued continuos functions, I*, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1948) 45-99.

[4] E. Hewitt, K. A. Ross *Abstract harmonic analysis. Vol. I. Structure of topological groups, integration theory, group representations.* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 115. Springer-Verlag, Berlin-New York (1979).

[5] E. Michael, M. E. Rudin, *A note on Eberlein compacts.* Pacific J. Math. 72 (1977) 487-495.

[6] F. Casarrubias-Segura, S. García-Ferreira, R. Rojas-Hernández, *A note on Corson and Valdivia Spaces.* En proceso.

[7] H. H. Corson, *Normality in subsets of product spaces.* Amer. J. Math. 81 (1959) 785-796.

[8] H. H. Corson , J. Lindenstrauss, *On weakly compact subsets of Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 17(1966) 407-412.

[9] I. Bandlow, *On function spaces of Corson-compact spaces.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 35 (2) (1994) 347-356.

[10] K. M. Hofmann, S. A. Morris, *A structure theorem on compact groups.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 130 (2001) 409-426.

[11] L. N. Ivanovskii, *On a conjeture of P. S: Alexandrov.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 123 (1958) 785-786.

[12] O. Kalenda, *A characterization of Valdivia compact spaces.* Collectanea Mathematica 51 (2000) 59-81.

[13] O. Kalenda. *Continuous images and other properties of Valdivia compacta.* Fundamenta Mathematicae 162 (1999).

[14] O. Kalenda, *Natural examples of Valdivia compact spaces.* J. Math. Anal. Appl. 350 (2009) 464-484.

[15] O. Kalenda, *On the class of continuous images of Valdivia compacta.* Extracta Mathematicae. Vol. 18 Num 1. (2003) 65-80.

[16] O. Kalenda, *Valdivia compact spaces in topology and Banach space theory.* Extracta Mathematicae 15 (2000) 1-85.

[17] R. Engelking, *General topology.* 2nd ed., Sigma Ser. Pure Math. 6, Hedermann, Berlin (1989).

[18] R. Deville, G. Godefroy, *Some aplications of the projective resolutions of the identity.* Porc. London. Math. Soc. 61 (1) (1993) 183-199.

[19] R. Pol, *On pointwise and weak topology on function spaces.* Preprint 4/84 Warzaw Univ., 1984.

[20] S. Argyros, S. Mercourakis, S. Negropontis, *Functional analytic properties of Corson compact spaces.* Studia Math. 89 (1988) 197-229.

[21] S. García-Ferreira, R. Rojas-Hernández, *Families of continuos retractions and function spaces.* J. Math. Anal. Appl. 441 (2016) 330-348.

[22] V. Kúzmine, *Alenxandrov's hyphotesis in theory of topological groups.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 125 (1959) 727-729.

[23] W. Kubiś, *Valdivia compact abelian groups.* Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fs. Nat. Ser. A Math. RACSAM 102 (2008), no. 2, 193-197.

[24] W. Kubiś, V. Uspenskij, *A compact group which is not Valdivia compact.* Proc. Amer. MAth. Soc. 133 (8)(2005) 2483-2487.

[25] W. Kubiś, H. Michaelewski, *Small Valdivia compact spaces.* Topology and its Applications 153 (2006) 2560-2573

[26] Y. Benjamini, M. E. Rudin, M. Wage, *Continuos images of weakly compact subsets of Banach spaces.* Pacific J. Math. 70 (1977) 309-324.