



**UNIVERSIDAD MICHOACANA**

**SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS**

*Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez*

"PROBLEMAS GEOMÉTRICOS QUE INVOLUCRAN LA NOCIÓN  
DE VARIACIÓN Y LA INCORPORACIÓN DE SOFTWARE  
DINÁMICO COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE"

**T E S I S**

**PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRA EN CIENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**PRESENTA: LORENA GARCÍA GARCÍA**

**DIRECTOR: DR. ARMANDO SEPÚLVEDA LÓPEZ**

**MORELIA, MICHOACÁN.**

**MAYO 2009.**

# Agradecimientos

*A las personas que día a día están conmigo.*

*Al Dr. Armando Sepúlveda, por dirigir la tesis y por el gran apoyo otorgado.*

*A mis sinodales, por estar comprometidos con su profesión y hacer aportaciones para mejorar el presente trabajo: Dra. Lourdes Guerrero, M.C. Roberto García, Dr. Jorge Luis López y Dr. Gerardo Tinoco.*

*Institucionalmente brindaron su apoyo económico y de infraestructura para que este trabajo terminara:*

- *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.*
- *Área de Educación Matemática de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas “Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”; a Marcela Valdez, quien forma parte del personal de esta área, por su invaluable apoyo constante.*

*A todos los que leyendo estas líneas se saben partícipes de esta construcción:*

*¡¡ Muchísimas gracias !!*

# Índice general

<b>1. Problema de investigación</b>	<b>4</b>
1.1. Introducción . . . . .	4
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	7
1.3. Objetivos y metas de la investigación . . . . .	8
1.4. Preguntas de investigación . . . . .	10
<b>2. Revisión de literatura</b>	<b>11</b>
2.1. Resolución de problemas . . . . .	12
2.2. Los Principios y Estándares para las matemáticas escolares . . . . .	17
2.3. Niveles de razonamiento geométrico . . . . .	21
2.4. El constructivismo . . . . .	23
2.5. Uso de la tecnología . . . . .	26
2.6. Visualización en matemáticas . . . . .	28
<b>3. Presentación y análisis de los problemas</b>	<b>31</b>
Carácter de la investigación . . . . .	31
3.1. Problema del bombero . . . . .	32
3.1.1. Acercamiento con el método de prueba y error. . . . .	33
3.1.2. Desarrollando la visualización con Cabri Gèomètre. . . . .	35
3.1.3. Solución usando herramientas de Cálculo diferencial. . . . .	36
3.1.4. Solución geométrica. . . . .	41
3.2. Problema del rectángulo . . . . .	44
3.2.1. Dando valores particulares. . . . .	44
3.2.2. Visualización con software dinámico. . . . .	45
3.2.3. Demostración geométrica. . . . .	47
3.2.4. Otra forma geométrica de resolver el problema. . . . .	47
3.3. Problema de Fagnano . . . . .	49
3.3.1. Acercamiento por ensayo y error. . . . .	50
3.3.2. Solución geométrica. . . . .	51
3.3.3. Visualizando con el software dinámico. . . . .	54
3.4. Problema del Punto de Fermat . . . . .	55

3.4.1.	Acercamiento por ensayo y error. . . . .	55
3.4.2.	Solución geométrica. . . . .	59
3.4.3.	Visualización con Cabri. . . . .	60
3.4.4.	Otra forma geométrica de obtener $P$ . . . . .	61
3.5.	Problema de construcción . . . . .	68
3.5.1.	Solución con la media proporcional. . . . .	70
3.5.2.	Otra forma de trazar la circunferencia buscada. . . . .	74
3.6.	Problema de lugar geométrico . . . . .	76
3.6.1.	Tomando casos particulares. . . . .	82
3.6.2.	Solución geométrica. . . . .	83
<b>4.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>87</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>
<b>A.</b>	<b>Resultados utilizados en este trabajo</b>	<b>95</b>

# Capítulo 1

## Problema de investigación

### 1.1. Introducción

Los resultados en el aprendizaje de las matemáticas escolares dependen de una serie de factores que intervienen en el sistema educativo como: (1) el currículum, (2) la organización escolar, (3) el tipo de enseñanza, entre otros. El currículum incluye la estructuración de las asignaturas, los programas de estudio y sus objetivos; la organización escolar tiene que ver con la disposición de las instituciones por atender problemas educativos; aquí también se incluyen cuestiones políticas como el carácter de las decisiones que se toman en los niveles copulares. La organización escolar también contempla el tipo de enseñanza que el profesor desarrolla en el salón de clases, considera las actividades y problemas que se estudian, la forma de impartir la clase, el papel que juegan tanto el profesor como los estudiantes durante las sesiones de clase. Algunos de estos factores están estrechamente interrelacionados.

El tercero merece especial atención; es sobre el que tenemos la posibilidad de incidir los investigadores y profesores de matemáticas. La educación en general y la educación matemática en particular tienen como propósito principal de formar ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos; que su conocimiento les permita resolver los problemas que se les presentan en la vida diaria. En este sentido, surgen las preguntas: ¿los problemas que se abordan en el salón, poseen características de alentar la participación de los estudiantes?, ¿poseen contenidos fundamentales del currículum?, ¿se promueven procesos de resolución de problemas en clase?, ¿se promueve el uso de la tecnología en la resolución de los problemas?, ¿se promueven en el aula formas de trabajo distintas a la tradicional? Estas preguntas son importantes porque dependiendo de su respuesta, se tiene la orientación para poder mejorar algún tipo de aprendizaje en los estudiantes.

Una de las propuestas curriculares que influye en la educación matemática es la planteada por el NCTM (2000) en los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares.

Ahí se sugiere organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas alrededor de la resolución de problemas, donde resulte relevante que los estudiantes desarrollen distintos recursos y estrategias para plantear y resolver diferentes tipos de problemas. Además, también destaca la trascendencia de que los estudiantes utilicen diversas herramientas computacionales en el estudio de las matemáticas y aborden problemas que implican contenidos fundamentales e importantes del currículum. Uno de estos contenidos corresponde a la Geometría; primera rama de las matemáticas en ser organizada y sistematizada con base en el método axiomático deductivo, con el que Euclides creó un modelo para la organización del discurso matemático y el conocimiento científico en general.

En la geometría escolar, tenemos la oportunidad de involucrar a los estudiantes en la resolución de problemas referentes a esta materia y planteados en diferentes contextos. La interacción de los estudiantes con estos problemas, ya sea mediante lápiz y papel o con el uso de la tecnología (computadora con software dinámico) puede contribuir a la evolución de los ciclos de entendimiento de las nociones y conceptos involucrados (Lesh, *et al.* 2000); es decir, las representaciones externas que manifiesta un sujeto dependen de la existencia de representaciones internas en él que, a su vez, se van modificando por el uso de las externas, originando ciclos que van evolucionando hacia la conformación de nuevas estructuras de conocimiento. De esta manera, existe el reconocimiento de que así se origina un aprendizaje que va más allá de conocimientos adquiridos memorísticamente.

Este trabajo tiene que ver con la resolución de problemas y con las maneras en que el uso de software dinámico puede contribuir al entendimiento y solución de problemas geométricos que involucran la noción de variación. Está organizado de la siguiente manera: en este Capítulo 1 resaltamos la importancia de nuestro problema de investigación, los objetivos y metas. En el Capítulo 2 presentamos parte de la literatura revisada para justificar y respaldar el desarrollo del estudio realizado. El Capítulo 3 es la parte central del mismo, en él abordamos los problemas geométricos que hemos seleccionado con la intención de cubrir el espectro de contenidos correspondientes a los niveles escolares del bachillerato al superior; algunos de ellos son de contexto escolar y otros de carácter histórico. La combinación del uso de estrategias heurísticas y recursos matemáticos resulta importante para su solución. Finalmente, en el Capítulo 4 presentamos las conclusiones del trabajo.

En los problemas del Capítulo 3, la noción de variación se utiliza en los siguientes sentidos: a) Cuando cambia la posición de algunos puntos cambia, por ejemplo, la distancia entre ellos; nuestro interés corresponde a la relación típica de dependencia entre dos variables. b) Cuando cambia la posición de algún(os) punto(s), cambia la configuración de una construcción previamente realizada; aquí, además del procedimiento de construcción, nuestro interés es mostrar el dinamismo que proporciona el software. c) Cuando

cambia la posición de algún(os) punto(s), un punto de referencia determina un lugar geométrico; nos interesa mostrar la potencia de la relación de homotecia para la determinación de un lugar geométrico.

El problema 3.1 corresponde a un problema escolar de optimización y es común encontrarlo en diferentes contextos; involucra nociones fundamentales del currículum que hacen conveniente su estudio en el nivel medio superior. En él se pide ir de un punto a otro, los cuales están del mismo lado de una recta, pasando por un tercer punto que está sobre la recta tal que se recorra una distancia mínima; acepta varias formas de solución, aquí exponemos algunas. El problema 3.2 también corresponde al contexto escolar del bachillerato, pero aquí la variable sobre la que se pregunta no depende del lugar del punto que podemos variar de posición, originando una función constante; permite el estudio y reforzamiento de los contenidos relacionados con el tema de semejanza de triángulos. Los dos problemas que siguen corresponden a problemas de importancia histórica, que fueron planteados por distinguidos matemáticos como ejemplos de problemas de optimización; para la solución geométrica necesitamos de la aplicación de dos conocidas estrategias heurísticas (la simetría y la rotación).

El problema 3.3 fue planteado por Fagnano (1715-1797) y consiste en inscribir un triángulo en un triángulo acutángulo dado, de modo que el triángulo inscrito tenga el menor perímetro posible. El problema abordado en 3.4 corresponde a un antiguo problema planteado por el matemático Pierre de Fermat (1601-1665) y consiste en obtener el punto interior de un triángulo que minimiza la suma de distancias a los vértices del mismo. En la sección 3.5 presentamos un problema de construcción con regla y compás, en el que se muestra el apoyo que la visualización proporciona y el dinamismo que se tiene con el uso del software al variar la configuración de la construcción. Por último, en 3.6 exhibimos un problema correspondiente a la geometría moderna, en el que se debe encontrar el lugar geométrico de un conjunto de puntos que satisfacen cierta condición; su solución depende de la aplicación del recurso de la homotecia. Nos interesa mostrar que estos problemas implican el uso de conceptos matemáticos fundamentales y hacemos una revisión de su solución (algunos con diferentes acercamientos), donde se aprecia la potencia que tiene el uso del software para que, quien lo necesite, acceda al problema.

La geometría está inmersa en el mundo físico. El NCTM (1989, p. 48) establece “Para comprender el espacio es necesario interpretar, entender y apreciar nuestro mundo inherentemente geométrico”. Además, Freudenthal (1989) argumenta:

La Geometría abarca el espacio... el espacio en el cual el niño vive, respira y se mueve. El espacio que el niño debe aprender a conocer, explorar, conquistar, para vivir, respirar y moverse mejor en él. (p. 48)

Por eso seleccionamos problemas de geometría y de variación, porque este tema es fun-

damental en el estudio de las matemáticas y forma parte de lo que se ha dado en llamar las matemáticas del cambio, regularmente asociadas al estudio del Cálculo. Además, el uso de la tecnología es uno de los seis principios contemplados en la propuesta curricular de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000, p. 43), en el que se establece que la tecnología puede facilitar el acceso a problemas que contienen matemáticas importantes; o bien, que permite a los estudiantes dar un salto en el estudio de matemáticas que vaya más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y procedimientos.

## 1.2. Planteamiento del problema

La formulación y resolución de problemas matemáticos es una actividad que ha caracterizado al hombre desde la antigüedad; en este sentido, Polya (1945) establece que la resolución de problemas es una actividad inherentemente humana que ha contribuido al desarrollo del conocimiento matemático. En diferentes épocas el hombre se ha planteado problemas matemáticos en diversas áreas y de distintos grados de dificultad; en algunos de los cuales los matemáticos tardaron siglos en resolverlos o en justificar por qué no se pueden resolver.

En este trabajo abordamos seis problemas que pueden contribuir al desarrollo de ideas matemáticas importantes: dos de ellos corresponden al tipo de problemas que usualmente aparecen en segundo año del bachillerato (3.1 y 3.2), los cuales se diferencian por el tipo de relación entre las variables pero la base de su solución depende de la misma estrategia heurística. Los otros cuatro problemas comúnmente son tratados en una Licenciatura en Matemáticas; el 3.3 y 3.4 son problemas antiguos clásicos de variación que tienen nombre propio, el Problema de Fagnano y el Problema del punto de Fermat, respectivamente; los dos últimos corresponden a un problema de construcción con regla y compás (3.5) y a un problema de homotecia (3.6), tema representativo de la geometría moderna. Nos interesa analizar estos problemas y resolver algunos de ellos con diferentes acercamientos: tomando casos particulares; haciendo trazos que correspondan a estrategias heurísticas que permiten avanzar en la solución y dar una argumentación geométrica; o bien, usar recursos tecnológicos y combinar con los acercamientos anteriores.

Una preocupación que estuvo latente durante el desarrollo de este trabajo, por las características del mismo, fue intentar ubicarlo y escribirlo en el justo equilibrio entre las siguientes tendencias que, con frecuencia, están presentes en la educación matemática: i) el tratamiento simplista de los contenidos matemáticos donde se privilegian argumentos teóricos que terminan por exaltar comportamientos o resultados secundarios como verdaderos productos de investigación; ii) enamorarse del uso de los medios tecnológicos

y atribuirles virtudes para sustituir y dar explicaciones sobre el papel del profesor en el proceso de enseñanza y aprendizaje; y iii) atribuir demasiada importancia al tratamiento formal y riguroso de los contenidos matemáticos donde se termina por menospreciar las posibilidades de aprendizaje de la mayoría de los estudiantes. Es decir, en este trabajo pretendemos tratar con seriedad los contenidos matemáticos y ubicar al uso de la tecnología como un recurso que puede facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero que no sustituye los procesos cognitivos que, forzosamente, deben realizar los alumnos; además, mantenemos una visión optimista sobre las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes. De esta manera, el siguiente es nuestro

Problema de investigación:

¿Qué aspectos del quehacer matemático intervienen en la resolución de problemas geométricos de variación y cómo contribuye el uso del software dinámico en la comprensión de los mismos?

### 1.3. Objetivos y metas de la investigación

El rigor y la precisión son tan esenciales para las matemáticas como la experimentación lo es para el resto de las ciencias; en gran medida, éstas son las razones que justifican y dan credibilidad a los métodos y resultados derivados de los procedimientos utilizados en matemáticas. Debemos tomar en cuenta que para estudiar los fenómenos de variación, ha sido importante que el científico combine, en una sola visión integrada del mundo, aspectos formales e intuitivos de las matemáticas, de la experimentación y de la incorporación de los medios tecnológicos que ofrecen posibilidades de exploración difícilmente realizables con lápiz y papel. Así, en este trabajo hemos seleccionado seis problemas geométricos con los siguientes

Objetivos:

1. Analizar los conceptos de Geometría involucrados y la manera en que está relacionada la noción de variación en las variables involucradas.
2. Identificar y desarrollar formas distintas de solución de algunos de los problemas seleccionados, utilizando diferentes acercamientos.
3. Hacer énfasis en las estrategias heurísticas claves que permitieron la solución.

4. Mostrar el potencial del uso de la tecnología para explorar, desarrollar ideas y resolver problemas geométricos.

Conviene recordar que entre los problemas geométricos de variación, y en general en los fenómenos de cambio, existen diferentes tipos de relación entre las variables. Así tenemos, por ejemplo, problemas en los que se pide localizar un punto sobre una recta que minimice la suma de distancias desde dos puntos que se encuentren del mismo lado de ella; o determinar el triángulo de menor perímetro inscrito en un triángulo acutángulo dado. Casos menos usuales se dan cuando la relación lineal corresponde a una función constante, como cuando un punto se mueve en un lado de un rectángulo y se pide determinar la suma de las distancias a las diagonales del mismo.

El estudio de los problemas de variación nos prepara para entender e interpretar lo que ocurre en la naturaleza y en la vida cotidiana, no solamente en el ámbito de las matemáticas; los administradores, políticos, líderes empresariales y cualquier otra persona que necesite tomar decisiones requiere de la interpretación mediante un modelo para una mejor toma de decisiones. Todos ellos deben enfrentar un mundo cambiante.

El presente trabajo gira alrededor de problemas geométricos donde trabajamos con el concepto de variación, el cual es importante en el currículum escolar de los diferentes niveles educativos. Así, en este trabajo de tesis nos planteamos la siguiente

Meta:

Obtener conclusiones a partir del análisis de seis problemas geométricos. Esto con la finalidad didáctica de destacar algunos pasos típicos asociados al proceso de resolución de problemas. Estos seis problemas son:

1. Problema del bombero.
2. Problema de la suma de distancias de un punto en un lado de un rectángulo a sus diagonales.
3. Problema de Fagnano.
4. Problema del punto de Fermat.
5. Problema de la construcción de una circunferencia por dos puntos y tangente a una recta.
6. Problema de lugar geométrico determinado por la bisectriz de un ángulo y el lado opuesto en un triángulo.

## 1.4. Preguntas de investigación

Las preguntas principales que guían el desarrollo de nuestra investigación son las siguientes:

- I. ¿Cuáles son las actividades consistentes con el quehacer matemático, para abordar y resolver los problemas geométricos de variación seleccionados?
- II. ¿Cómo se relacionan las estrategias heurísticas con el uso de recursos matemáticos en la resolución de estos problemas?
- III. ¿En qué formas contribuye el uso del software dinámico de geometría en las etapas de solución de un problema?

# Capítulo 2

## Revisión de literatura

### Introducción

El hombre empieza a aprender geometría, incluso, antes de la educación escolar, ya que desarrolla nociones relacionadas con los objetos y figuras geométricas a través de los sentidos (inicialmente la vista, el tacto) que le permiten distinguir formas, hacer clasificaciones, aspectos que forman parte de los elementos básicos del razonamiento geométrico. Posteriormente, con la aparición del lenguaje y la exploración de las figuras geométricas, el sujeto comienza a determinar propiedades y a ampliar su vocabulario matemático (congruencia, paralelo, perpendicular, etc.) para tener formas más precisas de reconocerlas y clasificarlas; a su vez, comunica sus razonamientos con mayor claridad y robustece sus formas de elaborar y entender demostraciones más formales. Así, se tienen los elementos suficientes para entender proposiciones geométricas, hacer deducciones, demostraciones y resolver problemas de diferente grado de dificultad.

En este apartado hacemos una revisión de literatura relacionada con la resolución de problemas, línea de desarrollo que ha dado un gran impulso a la educación matemática; enseguida, se aborda la línea de contenido geométrico de la propuesta curricular del NCTM (2000), así como investigaciones y trabajos teóricos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Posteriormente, se revisan documentos que tienen que ver con la incorporación de la tecnología, mediante el uso de software dinámico en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, se abordan documentos que tratan sobre aspectos relacionados con la visualización y sobre las maneras en que los medios tecnológicos, a través del software dinámico, contribuyen al desarrollo de la visualización.

## 2.1. Resolución de problemas

Diferentes propuestas curriculares y de investigación identifican a la resolución de problemas como una actividad importante para el aprendizaje de las matemáticas (Schoenfeld, 1992; Alarcón, 1994; Santos, 1997; NCTM, 2000). Estas propuestas señalan que aprender matemáticas va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver problemas rutinarios. Resolver un problema permite formular constantemente preguntas, utilizar distintas representaciones, buscar relaciones y formas de sustentarlas, así como la necesidad de comunicar resultados y la reconstrucción individual del problema. Actualmente existe el reconocimiento de que la resolución de problemas plantea demasiadas exigencias para el estudiante, que trata de aprender a resolverlos, y para el profesor que intenta enseñar el proceso de resolución; quizás esta sea una de las razones por las que el aprendizaje de las matemáticas, de ciertos niveles o áreas, representa dificultades insuperables para la mayoría de las personas.

Preocupado por el acostumbrado fracaso de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, Polya (1945) se propuso diseñar un método que pudiera ayudarles a resolver problemas de matemáticas y así superar esas dificultades de aprendizaje; es decir, la intención inicial de Polya era establecer una estrategia de aprendizaje que, más tarde, se convirtió también en una manera de llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas. El famoso método de Polya consiste de cuatro fases:

- I. Entender el problema. Sugiere que el interesado en resolver un problema de matemáticas, primero debe pasar por un proceso de entendimiento del enunciado y plantea una serie de preguntas encaminadas a ese fin.
- II. Diseñar un plan de solución. Aquí sugiere, a través de preguntas, la realización de acciones encaminadas a obtener pistas que conduzcan a la solución; acciones que Polya identificó como estrategias heurísticas.
- III. Llevar a cabo el plan de solución. En la ejecución del plan interviene, necesariamente, la experiencia del sujeto que, a su vez, promueve el desarrollo de la capacidad de monitorearse a sí mismo y controlar sus acciones futuras para resolver problemas.
- IV. Hacer una revisión del trabajo realizado. Se trata de verificar y comprobar el resultado para detectar inconsistencias y compatibilidad de la solución.

Distingue dos tipos de problemas; los rutinarios y los no rutinarios. Los problemas rutinarios son aquellos en los que el enunciado desencadena una acción mental de búsqueda y el resolutor encuentra rápidamente el procedimiento, recurso o pistas que ayudan a resolver el problema; en cambio, los problemas no rutinarios son aquellos en los que la solución no es inmediata; requieren de meditación, reflexión y aplicación de estrategias

heurísticas, antes de tener claridad sobre cómo se resuelve. Desde luego, esta clasificación es relativa, un problema que demanda un gran esfuerzo de un estudiante, puede representar un acto de simple recordatorio para otro estudiante o para un matemático experimentado.

La heurística es una parte del conocimiento que antiguamente estaba más ligada con la lógica, la filosofía y la psicología. Su objetivo era establecer las reglas y procedimientos del descubrimiento y la invención. Actualmente, la heurística se dedica a estudiar cuáles son las acciones particularmente útiles para resolver problemas. La utilización de las estrategias heurísticas se desarrolla en el sujeto en la medida que adquiere mayor experiencia en la resolución de problemas. Por eso, la lista de preguntas planteada por Polya pretende motivar la realización de acciones que conlleven a la utilización de las estrategias heurísticas.

Esta utilización de estrategias para la resolución de problemas no se realiza como un fin en sí mismo, sino como un medio que propicia el desarrollo del pensamiento. Polya supo destacar la importancia de la resolución de problemas para el desarrollo de habilidades que son típicas en el quehacer matemático, posteriormente, fue ampliamente fundamentado por Schoenfeld (1980, 1994).

**Lo particular y lo general en la resolución de problemas.** Entender y explicar cómo es que se desarrollan las habilidades del pensamiento matemático, quizás resulte demasiado ambicioso, pero tener en mente la clasificación de los procesos generales y particulares de la matemática como disciplina, puede contribuir a la claridad de quien resuelve problemas respecto a las habilidades que se promueven.

Al respecto, Santos (2007, pp. 28, 29) hace las siguientes consideraciones: i) Estudiar matemáticas implica asimilar conceptos, métodos y principios específicos de este dominio de conocimientos y a veces distintos de los que se estudian en otros. ii) La propuesta de que la resolución de problemas es una actividad esencial que está relacionada con el desarrollo de un pensamiento crítico. iii) Permite la transferencia, que es catalogada como un componente importante en el aprendizaje de las estrategias para resolver problemas matemáticos.

Entender cómo un individuo resuelve problemas de matemáticas desempeña un papel fundamental en el aprendizaje e influye, definitivamente, en el tipo de actividades que deben realizar los estudiantes. Polya (1945) propone el uso y aplicación de métodos heurísticos para la resolución de problemas, los cuales son útiles para avanzar en la solución de los problemas, no exclusivamente de matemáticas, sino incluso de otras áreas del conocimiento.

El método de Polya contiene una lista de preguntas, sugerencias y recomendaciones “típicas” como las que debería seguir una persona que es buena para resolver problemas. En uno de los capítulos, Polya hace un “Breve diccionario de heurística” (1945, 1980); y sugiere al estudiante que se plantee preguntas como: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿conoces algún problema parecido?, ¿has visto esto antes?, ¿qué teorema o propiedades se conocen relacionadas con el problema?... , entre otras. Todas ellas son invitaciones para que el estudiante conciba un plan de solución y utilice procedimientos heurísticos como: trazar una figura, tomar casos particulares, elaborar una tabla, y muchos otros cuya finalidad es llevar a cabo el plan concebido.

En realidad, lo que está intentando hacer Polya es externar su experiencia como matemático en el desarrollo de procesos del pensamiento cuando se encuentra inmerso en la resolución de un problema; esto para ayudar al estudiante a encontrar “un camino” que le permita resolver el problema, con la esperanza de que después, el estudiante, por sí sólo, podrá repetir esta experiencia en otros problemas.

Polya habla de los siguientes aspectos como habilidades potenciales de quien aprende resolviendo problemas:

- Afición a resolver problemas. Quien logra interesarse en resolver problemas al grado de verse involucrado en este quehacer, no tendrá nada que lo detenga para seguir aprendiendo.
- Reformular problemas. Ver el problema desde otro punto de vista, cambiar el enunciado, dividir el problema en sub-problemas, etc., son estrategias útiles para reformular un problema y atacarlo más fácilmente.

Indudablemente la resolución de problemas implica un proceso de reflexión, análisis, síntesis y toma de decisiones que, con una enseñanza tradicional y rutinaria resulta difícil. Un aspecto que hay que tomar en cuenta al momento de enfrentarse a un problema es el control, el cual se refiere al desarrollo de esa “intuición” que nos dice cuándo estamos tomando argumentos incorrectos o hay que cambiar de estrategia; es un monitoreo para que esa idea reveladora llegue, más que de manera milagrosa, como resultado de una serie de razonamientos bien entendidos, producto de la experiencia. Con este método se trata de romper con la tradición en la que al principio, cuando intentan resolver un problema, los estudiantes suelen comenzar haciendo operaciones, plantean y resuelven ecuaciones, sin haber siquiera entendido el significado que éstas puedan tener; para ellos lo importante es llegar a tener una respuesta (tal vez sin sentido).

A continuación se presentan los métodos heurísticos (o estrategias heurísticas) más usuales, de acuerdo a los casos contemplados por Polya (1945). Con la aclaración de que la lista puede no incluir algún método particular que en determinada situación le

funcionó a alguien para resolver un problema.

**Tomar casos particulares.** Frecuentemente, para entender un problema, uno considera varios casos particulares, lo cual puede sugerir la dirección que se debe seguir y quizás, dar la plausibilidad de la solución; corresponde a la típica pregunta ¿qué pasa si ...? Un procedimiento general que podemos incluir en esta estrategia es el llamado *principio extremo*: funciona cuando consideramos los casos extremos, como tomar el punto más cercano o más alejado; o considerar valores máximos o mínimos de alguna variable, etc.

**Usar analogías.** Es una de las estrategias más utilizadas para resolver problemas, no nada más en matemáticas sino en otras ciencias o en problemas en general; por ejemplo, cuando tenemos dos sistemas  $S$  y  $S'$  cuyos elementos pueden corresponder a una figura, una ecuación o alguna otra situación, a partir de la preservación de las relaciones básicas en el sistema, podemos establecer una analogía y hacer inferencia sobre la analogía para llegar a una conclusión. Las relaciones de congruencia y homotecia de figuras geométricas, son ejemplos de analogías que se pueden establecer entre dos o más figuras.

**Establecer submetas.** Como su nombre lo dice, esta estrategia consiste en considerar submetas al abordar un problema general, las cuales incluyen condiciones parciales y al resolverlas puede servir de base para construir la solución requerida. Algunos suelen considerar como otra estrategia el dividir el problema en subproblemas, pero para otros ambas son equivalentes. Algunos problemas de diferente grado de dificultad suelen plantearse como compuestos, con varias metas que nos permitan evaluar varias habilidades en su proceso de resolución.

**Simplificar un problema.** En ocasiones *traducir* de un lenguaje a otro nos facilita la solución, por ejemplo traducir del lenguaje común al algebraico; o enunciar el problema con otras palabras que contengan menos conceptos técnicos y, quizás, esto permita visualizar un camino solución. Por ejemplo, un problema geométrico puedo trabajarlo algebraicamente o viceversa. También podemos *reducirlo*, es decir, si en un problema se observa que hay un comportamiento cíclico de las variables, entonces se trata el caso a partir de que inicia un nuevo ciclo.

**Hacer un dibujo.** El trazo de una figura que ilustre el enunciado de un problema es útil no sólo en geometría, sino en otras ramas de las matemáticas o ciencias; se trata de una representación que, desde otro ángulo, permite visualizar y describir las condiciones del problema, lo cual puede contribuir en el entendimiento (inicial, en su caso) del problema. En cierto sentido, ésta es una forma de traducir el problema, lo cual da pie a la introducción de elementos auxiliares que puede ser algún trazo o, en otro caso, una variable muda, otra cantidad, etc. También puede ser que la figura nos permita visualizar la necesidad de incorporar alguna definición, teorema, restricción, etc.

**Regresar a las definiciones.** Esta sencilla estrategia es útil cuando uno se encuentra abrumado por el trabajo aritmético, algebraico o manipulativo en el proceso de resolución de un problema; o bien cuando se ha pensado en diferentes maneras de atacarlo. A veces, cuando se regresa a las definiciones, resulta que ahí estaba ya la solución pero nos era inadvertida.

Las siguientes dos estrategias son más propias de la Geometría y el uso de ellas fue el paso clave para la solución de algunos problemas abordados en este trabajo.

**Establecer una simetría.** En geometría resulta bastante útil el recurrir al simétrico de un punto o de una recta, figura, etc., respecto a otro punto o una recta para encontrar pistas sobre el comportamiento de una cantidad variable o constante. En Cálculo, es usual determinar valores de una función y al observar la simetría en los valores que se calculan, nos damos cuenta de algunos comportamientos particulares.

**Realizar una rotación.** En algunos problemas de geometría resulta conveniente la rotación de una figura un cierto ángulo; lo cual permite observar una congruencia o semejanza, o aplicar un teorema como el de la desigualdad del triángulo y, enseguida emerge la solución al problema.

Conviene destacar en este momento, que existe el reconocimiento de que las personas que son catalogadas como competentes en la resolución de problemas, se preocupan más por encontrar soluciones “elegantes, estructuradas o bonitas”, las cuales se caracterizan por estar basadas en una observación simple que la hace sencilla. A su vez, este tipo de soluciones parecen no tener alguna regla que las genere.

Schoenfeld *et al.* (1992), han puesto en claro que en el desarrollo del pensamiento matemático se recurre a considerar casos particulares, al descubrimiento de patrones y relaciones, al planteamiento de conjeturas, a realizar generalizaciones y a justificar resultados. Regularmente, estas estrategias aparecen acompañadas del uso de recursos matemáticos, o implícitamente forman parte de ese uso; de manera que en ese proceso se está en posibilidades de irse adentrando en la realización de prácticas consistentes con el quehacer matemático.

En este sentido, Lesh *et al.* (2000), plantean que el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes, se entiende como una evolución en sus ciclos de entendimiento que puede traducirse en un manejo más “robusto” y sofisticado de las estrategias y recursos para resolver problemas; lo que se logra cuando los estudiantes realizan prácticas que son consistentes con el quehacer de las matemáticas.

Además, cuando alguien intenta resolver un problema no rutinario y requiere de la meditación y reflexión, después de la primera fase de entendimiento del problema, suele aparecer una idea brillante (*insight*) que representa un acto de inspiración que resuelve el problema. Desde luego, su aparición no es obra de la casualidad, sino producto de la experiencia y de un cierto “tino” que se va fomentando, poco a poco, como resultado de examinar y reflexionar diversas situaciones problemáticas. Históricamente pueden encontrarse casos del surgimiento de una idea brillante.

Finalmente, comentamos que Postman y Weingartner (1969) destacan la importancia de que los estudiantes adquieran un comportamiento propio del método inquisitivo, donde los estudiantes aprendan y se acostumbren a plantearse preguntas:

El conocimiento se produce en respuesta a preguntas... Una vez que ha aprendido a cómo preguntar -preguntas relevantes, apropiadas y sustanciosas- el estudiante ha aprendido cómo aprender y ya nadie lo puede detener en el camino de seguir aprendiendo lo que necesite y quiera conocer. (p. 23)

## 2.2. Los Principios y Estándares para las matemáticas escolares

Desde los primeros documentos relacionados con el establecimiento de estándares para las matemáticas escolares, el NCTM (1990) ha mantenido un punto de vista dinámico que aspira a un ambiente de aprendizaje que tienda a:

- la aceptación del salón de clases como una comunidad matemática;
- el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a la visión del maestro como la única autoridad para dar las respuestas correctas;
- el desarrollo del razonamiento matemático; es decir, no ubicar a las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas por memorizar;
- involucrar a los estudiantes en procesos de resolución de problemas y no sólo promover su competencia para encontrar respuestas mecánicamente; y
- hacia la conexión y aplicación de las matemáticas; es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

La geometría es un área de conocimiento dinámica, ya que se puede desarrollar el razonamiento y las habilidades para la justificación. Las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otras áreas de las matemáticas y en situaciones del mundo real; por eso, la geometría debería integrarse, cuando sea posible, con otras áreas. La geometría es más que definiciones; es razonar y describir relaciones. La idea de construir el conocimiento geométrico a través de distintos niveles, desde el pensamiento informal hasta el formal, va de acuerdo con la opinión de varios teóricos e investigadores (por ejemplo Van Hiele, 1986).

Desde tiempos ancestrales la geometría es considerada como el lugar del currículo escolar donde los estudiantes aprenden a razonar y a ver la estructura axiomática de las matemáticas. Posteriormente, a partir de los setentas con el uso de la tecnología, se puede interactuar con la representación de los elementos geométricos, lo cual puede ayudar a explorar y establecer conjeturas; sin embargo, es importante señalar que la interacción y generación de muchos ejemplos de un determinado fenómeno, no constituye una demostración.

A continuación presentamos un breve resumen del estándar de geometría, desde kinder hasta el grado 12 (NCTM, 2000). Obsérvese cómo las altas expectativas en el aprendizaje de los estudiantes y en la enseñanza del profesor, están siempre presentes; constituyendo este hecho un rasgo distintivo de esta propuesta curricular.

En la etapa de kinder al nivel 2, los alumnos pueden aprender sobre las figuras geométricas utilizando objetos que pueden verse, sostenerse y manipularse. En niveles posteriores, el estudio puede centrarse en los componentes de las figuras, como lados y ángulos, y en las propiedades de las clases de figuras. En los niveles medios y en la escuela secundaria, cuando estudian temas como la semejanza y la congruencia, los alumnos pueden aprender a utilizar el razonamiento deductivo y técnicas de demostración más formales para resolver problemas y probar conjeturas. En todos los niveles, pueden aprender a dar explicaciones convincentes para sus conjeturas y soluciones, además de que una adecuada consideración de la simetría proporciona una mejor comprensión en el campo de las matemáticas, del arte y de la estética.

Estándares para la etapa K-2.

Cuando los alumnos llegan a familiarizarse con las figuras, las estructuras, la localización y las transformaciones, y cuando desarrollan el razonamiento espacial, disponen de un fundamento para comprender no sólo el mundo que los rodea, sino también otros temas de matemáticas.

Los niños comienzan usando su propio vocabulario para describir objetos y hablar sobre sus parecidos y diferencias. Los profesores tienen que ir ayudándoles gradualmente a incorporar la terminología convencional en sus descripciones de figuras bidimensionales y tridimensionales. Los niños pueden comparar y clasificar bloques cuando los colocan en estanterías, identificando sus semejanzas y diferencias. Pueden utilizar materiales asequibles para explorar atributos de figuras, o plegado de papel para investigar simetrías y congruencias.

Estándares para la etapa 3-5.

En esta etapa, el estudio de la geometría requiere “pensar y hacer”. Cuando los estudiantes clasifican, construyen, dibujan, modelizan, localizan y miden, se desarrolla su capacidad para visualizar relaciones geométricas. Al mismo tiempo, aprenden a razonar, a formular, comprobar y justificar conjeturas referentes a estas relaciones. Aquí pueden desarrollar formas más precisas de describir las figuras, centrándose en la identificación y descripción de las propiedades, iniciando el proceso de aprender el vocabulario, cada vez más especializado. A medida que evolucionan las ideas de los alumnos sobre las figuras, podrían formular conjeturas sobre propiedades y relaciones geométricas. Mediante dibujos, materiales concretos y programas informáticos de geometría para desarrollar y comprobar sus ideas, pueden articular razonamientos matemáticos claros para justificar las relaciones. Cuando los estudiantes discuten sobre figuras, podrían ampliar su vocabulario matemático. Así, al describirlas deberían oír, comprender y usar términos como *paralelo*, *perpendicular*; *cara*, *lado*, *vértice*, *ángulo*, *trapecio*, *prisma*, etc. para comunicar nociones geométricas con mayor precisión.

Mediante las coordenadas, pueden especificar caminos entre lugares y examinar la simetría, la congruencia y la semejanza de figuras dibujadas sobre las cuadrículas. Cuando las ideas sobre los números se amplían para incluir los números negativos, pueden trabajar en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. A estas edades, sería deseable que los estudiantes estén preparados para manipular figuras mentalmente, y pueden tener la oportunidad de aplicar ideas y relaciones geométricas a otras áreas de las matemáticas, a otras disciplinas; y a problemas sencillos que surjan de sus experiencias diarias.

Además de su utilidad para explorar y comprender otras áreas de las matemáticas, la geometría está íntimamente asociada con otras disciplinas, como el arte, las ciencias y los estudios sociales. El trabajo sobre la simetría puede estimular su creatividad y aprecio artísticos, y el trabajo con coordenadas se relaciona con los mapas que elaboran o utilizan en el estudio del mundo. Estudiar geometría promueve una comprensión más profunda de muchos aspectos de las matemáticas, mejora el razonamiento abstracto y realza las relaciones entre las matemáticas y otras ciencias.

Estándares para la etapa 6-8.

Los alumnos de los niveles medios pueden explorar diversas figuras geométricas y examinar sus características. Tendrían que examinar cuidadosamente las características de las figuras para poder definir y describir, con precisión, las figuras fundamentales, así como identificar las relaciones entre unas figuras y otras. También pueden ampliar su conocimiento de la semejanza, con la guía del profesor, y empezar a desarrollar una definición más formal de la semejanza en términos de relación entre lados y ángulos. Comunicar sus razonamientos con precisión y claridad los prepara para elaborar y entender demostraciones más formales en niveles posteriores.

Las representaciones geométricas y algebraicas de diversos problemas pueden conectarse mediante la geometría de coordenadas. En el nivel medio, deberían darse cuenta que la congruencia no depende de la posición ni de la orientación. Las destrezas en la visualización y en el razonamiento sobre relaciones espaciales son fundamentales en geometría. Los estudiantes también necesitan examinar, construir, componer y descomponer objetos complejos de dos y tres dimensiones.

El estudio de la geometría de los niveles medios, puede conectarse a diversas investigaciones y otras disciplinas escolares. La naturaleza, el arte y las ciencias proporcionan oportunidades para la observación y la exploración subsiguiente de conceptos y patrones geométricos; así mismo, para apreciar y comprender la belleza y utilidad de la geometría.

Estándares para la etapa 9-12.

Los alumnos pueden adquirir soltura en la representación de ideas geométricas -incluyendo coordenadas, redes, transformaciones, vectores y matrices-, que permitan múltiples enfoques de problemas geométricos, y que conecten sus interpretaciones en diversos contextos. Pueden reconocer las conexiones entre las distintas representaciones, lo cual facilita el uso flexible de éstas. El empleo de programas de geometría dinámica les permite examinar muchos casos y, por tanto, ampliar su habilidad para hacerlo. Sin embargo, enjuiciar, construir, justificar y comunicar argumentos matemáticamente apropiados, sigue siendo un aspecto central del estudio de la geometría.

El centro de atención podría ser la reproducción de argumentos lógicos y presentarlos con una cuidadosa explicación del razonamiento, más que en la forma de demostración utilizada. Los estudiantes pueden empezar a organizar más formalmente sus conocimientos sobre las clases de objetos.

Ser capaz de generar y explorar muchos ejemplos puede conducir a investigaciones más profundas y amplias que las que serían posibles de otro modo. Los problemas de apli-

cación pueden proporcionar contextos ricos tanto para usar ideas geométricas, como para practicar la modelización y la resolución de problemas, ya que este tipo de trabajo puede ayudar a los alumnos a desarrollar destrezas de visualización, y a ver que lo que han aprendido puede aplicarse a otros contextos útiles.

En esta etapa, los alumnos pueden también explorar problemas para los que es útil utilizar otros sistemas de coordenadas. También pueden aprender a representar transformaciones con matrices, explorando las propiedades de las transformaciones mediante papel cuadriculado y programas de geometría dinámica. La escuela debería proveer contextos matemáticamente ricos en los que puedan agudizar sus habilidades de visualización, ya que es una herramienta para resolver problemas. Los problemas que requieren determinar información adicional necesaria para atacarlos, constituyen un aspecto del trabajo con problemas en situaciones del mundo real.

### 2.3. Niveles de razonamiento geométrico

Desde la antigüedad, la función formativa de la geometría ha sido esencial en el desarrollo personal de profesionales de la educación matemática y en general, para toda persona educada, pues presenta valores insustituibles que Thom (1973) resume así:

1. La geometría proporciona uno o más puntos de vista en casi todas las áreas de las matemáticas.
2. Las interpretaciones geométricas continúan proporcionando visiones directoras del entendimiento intuitivo y avances en la mayoría de las áreas de las matemáticas.
3. Las técnicas geométricas proporcionan eficaces herramientas para resolver problemas en casi todas las áreas de las Matemáticas. (p. 5)

En este contexto, una aspiración central de todo sistema educativo es que los estudiantes desarrollen los distintos tipos de razonamiento matemático a lo largo del currículum escolar; en particular el razonamiento geométrico.

Al respecto, el modelo de razonamiento de Van Hiele (1986) indica que el razonamiento geométrico de los estudiantes puede evolucionar desde las nociones más intuitivas a otros niveles. Este modelo explica cómo evoluciona el razonamiento geométrico de los estudiantes. Dicha teoría consta de dos partes:

- I. **Niveles de razonamiento.** En el Nivel 1 el estudiante percibe los objetos como unidades, describe semejanzas y diferencias globales, pero no reconoce sus componentes y propiedades. En el Nivel 2 el estudiante percibe los objetos con sus partes

y propiedades aunque no identifica las relaciones entre ellas; describe los objetos de manera informal pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas; hace deducciones informales a partir de la experimentación. En el Nivel 3 el estudiante realiza clasificaciones lógicas de los objetos, describe las figuras de manera formal, comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico, pero no es capaz de formalizar estos pasos, no comprende la estructura axiomática de las matemáticas. En el Nivel 4 el estudiante es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, comprende la estructura axiomática de las matemáticas y acepta la posibilidad de llegar a un mismo resultado desde distintas premisas.

En la descripción del modelo se señala la existencia de un quinto nivel, cuya característica básica es la capacidad para manejar, analizar y comparar diferentes geometrías; sin embargo, se reconoce que este nivel sólo se encuentra al alcance de algunos matemáticos profesionales y de ciertos estudiantes muy adelantados de las facultades de matemáticas.

- II. **Fases de aprendizaje.** i) Indagación. Los estudiantes se nutren de ella; ii) Orientación dirigida. Los estudiantes exploran en el campo de investigación proporcionado por el profesor; iii) Explicitación. Ocurre cuando se establece diálogo entre estudiantes; iv) Integración. Los estudiantes, auxiliados por el profesor, integran los conocimientos que acaban de aprender.

De la descripción anterior, concluimos que la importancia práctica de este modelo de enseñanza, radica en que muestra las líneas básicas que debe seguir un profesor que desee fundamentar sus clases en el mismo, el cual contiene los distintos tipos de razonamiento geométrico que los estudiantes adquieren a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento visual de los niños de preescolar, hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las facultades de ciencias.

Además, cada vez resulta más relevante el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que la evolución de la sociedad es paralela al desarrollo de los medios tecnológicos, los cuales se vuelven imprescindibles para el estudio de algunas ciencias y algunas áreas de las matemáticas. Como herramienta, la tecnología permite que la atención del estudiante se centre en los procesos de razonamiento, de reflexión y de resolución de problemas; y puede mostrar ciertas formas de pensar que de otra manera sería difícil de observar (Santos, 2007).

## 2.4. El constructivismo

El constructivismo se deriva de una posición psicológica en la que nosotros como seres humanos no tenemos acceso a una realidad objetiva; esto es, una realidad independiente de nuestras vías de conocimiento. Más bien, nosotros construimos nuestro conocimiento del mundo desde nuestras percepciones y experiencias; las cuales, ellas mismas, son mediadas por nuestro conocimiento previo (Simon 1995). Aprendizaje es el proceso por el cual los seres humanos adaptan su mundo experiencial, es parte del supuesto de que la persona construye activamente su conocimiento a partir de la organización de su experiencia; por lo tanto, se rechaza la posibilidad de la existencia de una realidad única. Es decir, desde la perspectiva constructivista, nosotros no tenemos manera de saber si un concepto es igual a una realidad objetiva. Nuestro interés, en todo caso, es si lo trabajamos y lo usamos apropiadamente en nuestro mundo experiencial.

El conocimiento se concibe como un proceso adaptativo del sujeto que organiza su propia experiencia sobre el mundo; es decir, el conocer implica un proceso de construcción que realiza el sujeto cognoscente que interactúa con su entorno y, como resultado de esa interacción, el sujeto construye el objeto de conocimiento y, al mismo tiempo, él resulta transformado por esa acción; ya no es el mismo. Las distintas posturas que se han desarrollado bajo el constructivismo reconocen a Piaget, a Novak y a von Glasersfeld como sus precursores.

Según Piaget (1991), el desarrollo intelectual se genera por la necesidad del sujeto de adaptarse a los desequilibrios que encuentra en el medio ambiente. Desde que el sujeto nace, encuentra situaciones y problemas que desconoce o no domina, ante los cuales intenta adaptarse con dicho medio. Para explicar este proceso Piaget introduce la noción de esquema, como los elementos básicos de construcción del pensamiento y que, a vez, son las estructuras simples que en forma continua se combinan y coordinan para ser cada vez más complejas y efectivas. Conforme se desarrollan nuevos esquemas, los procesos de pensamiento de una persona son más organizados, su conducta es más avanzada y se adecúa más al entorno.

Los procesos mediante los cuales el ser humano evoluciona y adquiere su capacidad de adaptación con el medio ambiente, son los de *asimilación* y *acomodación* (Piaget, 1991). Ambas son capacidades innatas que, por factores genéticos, se van desplegando ante diversos estímulos en determinadas etapas o estadios del desarrollo y en ciertas edades sucesivas.

La asimilación consiste en utilizar los esquemas existentes para dar sentido a un objeto o un evento; implica tratar de comprender algo nuevo ajustándolo a lo que ya sabemos.

La acomodación consiste en la modificación de la estructura cognitiva para incorporar nuevos objetos y eventos que, hasta el momento, eran desconocidos. Ambos procesos (asimilación y acomodación) se alternan en la constante búsqueda de equilibrio para intentar el control del mundo externo. Cuando una nueva información no se puede interpretar inmediatamente, basándose en esquemas preexistentes, el sujeto entra en un momento de crisis y busca encontrar nuevamente el equilibrio, para esto se producen modificaciones en los esquemas cognitivos, incorporándose así las nuevas experiencias.

Según Piaget, desde los 12 años en adelante el cerebro humano está potencialmente capacitado para formular pensamientos abstractos; o pensamientos de tipo hipotético deductivo. Además, Piaget postula que la lógica es la base del pensamiento y que, en consecuencia, la inteligencia es un término genérico para designar al conjunto de operaciones lógicas para las que está capacitado el ser humano, pasando desde la percepción, las operaciones de clasificación, sustitución, abstracción, etc., hasta -por lo menos- el Cálculo proporcional. Posiblemente una de las contribuciones más valiosas del trabajo de Piaget tiene que ver con el carácter activo y constructivo que asignó al sujeto en desarrollo.

Vigotsky (1988), por su parte, incorpora la dimensión social al constructivismo. El desarrollo de los seres humanos únicamente puede ser explicado en términos de su interacción social. En sus estudios sobre la formación de conceptos, Vigotsky parte de la idea que ésta no puede reducirse a conexiones asociativas. Establece una pirámide en la cual jerarquiza diferentes formas de conocimiento: (1) Conceptos espontáneos; y (2) Conceptos científicos. Éstos se relacionan porque el desarrollo de los conceptos espontáneos va cada vez hacia un nivel más abstracto, y el desarrollo de los conceptos científicos va hacia un nivel más concreto y elemental. Vigotsky considera que a partir de la adolescencia, los sujetos ya son capaces de formar auténticos conceptos.

Así, existen diferentes corrientes dentro del constructivismo, que se diferencian por la importancia que asignan a las cuestiones sociales y culturales en el proceso de construcción del conocimiento; éstas son: el constructivismo radical, asigna a la cuestión individual el factor preponderante y está representado por von Glasersfeld; el socio-constructivismo, considera al aprendizaje como resultado de la interacción social y está representado por Vigotsky; el socio-culturismo, considera que el aprendizaje involucra la constitución interactiva de significados matemáticos en la cultura del aula, el proceso de negociación de significados media entre la cognición y la cultura, siendo Blausersfeld, Krummheuer y Voigt sus impulsores; y la perspectiva emergente, considera que el aprendizaje puede ser caracterizado tanto como proceso individual activo de construcción como un proceso de aculturación matemática.

Existe una relación reflexiva entre las actividades constructivas de los estudiantes y los

procesos sociales en el aula, Cobb es su principal promotor. Todas estas corrientes sustentan el aprendizaje en la interacción y experiencia con las nociones a aprender. Por tanto, si sólo podemos tener acceso a la realidad objetiva por medio de nuestras vías de conocimiento mediante la experiencia, existe el reconocimiento (Polya, 1945; Schoenfeld, 1992; Lesh 2000; Cobb, 2000) de que el acceso al conocimiento matemático lo podremos tener a través de la resolución de problemas.

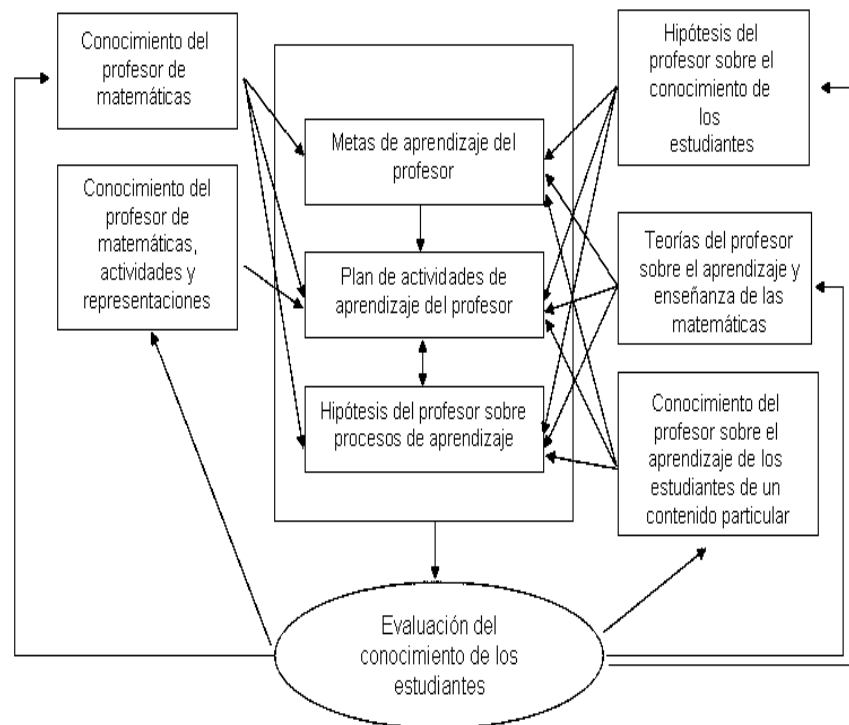


Figura 2.1: Trayectoria hipotética del aprendizaje.

Para tal efecto, Simon (1995) manifiesta la importancia de anticipar los posibles caminos que ha de tomar la trayectoria del aprendizaje de los estudiantes, tanto para planear el avance como para la toma de medidas instruccionales que amerite el caso. Simon habla de Trayectoria hipotética del aprendizaje cuando se refiere a los aspectos del pensamiento del profesor, agrupados en una perspectiva constructivista para esta anticipación, y es

parte clave de los ciclos de enseñanza de las matemáticas que están conformados por tres etapas:

1. consideración de metas de aprendizaje;
2. actividades de aprendizaje; y
3. proceso hipotético del aprendizaje de los estudiantes.

En la Figura 2.1 puede apreciarse el esquema que explica el desarrollo de los ciclos de enseñanza de las matemáticas; con base en este modelo desarrollaremos, en el Capítulo 3, los problemas geométricos que hemos seleccionado.

## 2.5. Uso de la tecnología

El mundo actual se caracteriza por la difusión e incorporación de los medios tecnológicos en todos los ámbitos de la vida, así como por la evolución de las prácticas laborales y ciudadanas que imponen un extraordinario dinamismo a la sociedad. Diferentes investigaciones (NCTM, 2000; Santos, 2007) destacan el uso de la tecnología, mediante el software dinámico, para la realización de exploraciones, la búsqueda o detección de patrones y la formulación de conjeturas, las cuales forman parte de las actividades que son propias del quehacer matemático. Además, también se reconoce la utilidad de incorporar la tecnología en procesos de resolución de problemas, lo cual contribuye en el aprendizaje de los estudiantes. Laborde y Laborde (1995) coinciden en señalar que el uso de herramientas de geometría dinámica pueden influir en el aprendizaje de las matemáticas; este ambiente fomenta nuevos acercamientos al entendimiento de los problemas.

Dreyfus (1994) afirma que la computadora puede ser un amplificador de las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes, convirtiéndose en una herramienta de aprendizaje, además facilita los aspectos de la enseñanza relacionados con cálculos repetitivos y la graficación de diferentes configuraciones que corresponden a conjuntos diversos de datos. Cuando el estudiante interactúa con este medio tecnológico y va enriqueciendo su experiencia a través de la experimentación, descubriendo patrones y relaciones, identificando parámetros, variables y cualidades de los elementos que intervienen, la computadora funciona como reorganizadora del conocimiento (Pea, 1985).

El amplio desarrollo de herramientas computacionales ha influido notablemente tanto en los métodos y caminos de producir conocimiento disciplinar, como en la forma en que los estudiantes pueden aprender o construir ese conocimiento. En este sentido, el Principio de la tecnología de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares, establece

que “la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Influye en las matemáticas que se enseñan en la escuela y aumenta las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes” (NCTM, 2000, p. 43). También se menciona, en los estándares correspondientes a los niveles 9-12, que en vez de dedicar tanto tiempo a los algoritmos debería invertirse más tiempo y esfuerzo a que los estudiantes adquieran estructuras conceptuales mediante exploraciones, basadas en experiencias numéricas y geométricas, aprovechando las posibilidades que proporciona el uso de la tecnología.

El software de geometría dinámica Cabri Géométrè puede clasificarse dentro del grupo de software abierto, en el sentido en que los estudiantes producen ideas, las expresan, desarrollan y editan. En este tipo de ambientes computacionales, el maestro y el alumno deciden qué hacer con la herramienta, en lugar de que el propio programa de cómputo guíe de manera directa el trabajo del usuario, como ocurre con los llamados tutoriales.

El trazo de objetos geométricos que se visualizan en pantalla, permite al usuario manipular y deformar figuras, corregirlas, obtener tablas, entre otras cosas; un seguimiento de los cambios que se producen en estas transformaciones puede conducir a conjeturar propiedades invariantes de figuras. Este tipo de software está generando interés y entusiasmo de tal manera que se está incorporando rápidamente en las escuelas; el software proporciona ciertos objetos primitivos (puntos, líneas, círculos), herramientas básicas (por ejemplo, perpendicular a una línea  $L$  a través del punto  $P$ ); agrupando todo esto en los objetos compuestos, y varias posibles transformaciones, incluyendo, por ejemplo, la reflexión a través de un punto o una línea. También le permite al usuario medir ciertas partes del dibujo, y examinar la traza que dejan los puntos, segmentos, o círculos cuando se aplica una transformación dinámica.

Así, después de hacer una construcción, o tomar una figura hecha, se pueden mover libremente ciertos elementos de un dibujo y observar cómo se van transformando otros elementos. Mientras que los elementos libres se mueven en el dominio en el cual existen, el software mantiene todas las relaciones que fueron especificadas como atributos esenciales de la construcción original.

Algunas características que tiene el software dinámico:

- a. Puede ayudar a los estudiantes a explorar y construir conjeturas.
- b. Permite hacer simulaciones de los problemas matemáticos para ayudar a encontrar relaciones.
- c. Posibilita un acercamiento gráfico a la solución de problemas de variación.
- d. Permite el empleo de diferentes registros de representación (verbal, gráfico, tabular, geométrico).

Un asunto de fundamental importancia del uso de la tecnología en el estudio de las matemáticas, tiene que ver con el fomento de la externalización de las representaciones. Al respecto, Tall (1990) sugiere que su acercamiento cognitivo al cálculo alienta la externalización de conceptos y conflictos cognitivos.

En este contexto, Duval (1996) en su teoría sobre los registros semióticos de representación, asigna primordial importancia al uso de diferentes representaciones de los componentes de un problema, para aprender los conceptos involucrados. Estas representaciones pueden ser generadas por el aprendiz a través del lenguaje oral, escrito o los medios tecnológicos; o bien, una mezcla de ellos. Un sistema de registros semióticos de representación se conforma cuando es posible realizar tres actividades cognitivas ligadas con la semiósis (aprehensión o producción de una representación semiótica): identificación, tratamiento y conversión. Un sujeto ha aprendido un concepto en la medida en que realiza estas actividades y transita libremente de un registro de representación a otro.

## 2.6. Visualización en matemáticas

Desde principios del siglo pasado se ha considerado importante el desarrollo de la visualización para el aprendizaje de la geometría; en el prefacio del libro *Geometría e Imaginación*, Hilbert (1927) escribió:

Con ayuda de la imaginación visual [Anschauung] podemos iluminar la variedad de hechos y problemas de geometría y, además, es posible en muchos casos plasmar el contorno geométrico de los métodos de investigación y prueba. . . De esta manera, siendo la geometría tan multifacética como es y estando relacionada a las más diversas ramas de las matemáticas, podemos incluso obtener un panorama resumido de las matemáticas como un todo, y una idea válida de la variedad de sus problemas y la riqueza de las ideas que contiene.  
(p. 1)

Este trabajo se ubica en el contexto de esta recomendación, en el que además incorporamos el uso de un software dinámico que potencia las posibilidades de representación y visualización, lo cual hace que este medio se convierta en una herramienta de aprendizaje.

En este contexto, Santos (2004) ilustra el potencial del software dinámico en la construcción de configuraciones que permiten visualizar y establecer distintas conexiones entre diferentes conceptos. La visualización en matemáticas nos ayuda a comprender mejor los problemas geométricos y nos brinda la posibilidad de acceder a los conceptos

y principios matemáticos involucrados. Las representaciones hechas manualmente, con lápiz y papel, son estáticas para los aprendices y pueden impedir el entendimiento del problema; estas limitaciones tienden a desaparecer cuando los estudiantes aprenden a utilizar la computadora como un medio de visualización que puede hacer ver lo que era inadvertido, permitiendo identificar relaciones, regularidades y patrones.

Un aspecto central en el estudio y aprendizaje de las matemáticas es el desarrollo de la visualización, proceso asociado a la “formación” de imágenes y a su uso para el entendimiento y descubrimiento matemático (Zimmerman y Cunningham, 1995, p. 5). Esta formación de imágenes puede ser producida por un acto mental (imaginarla), o mediante uso de lápiz y papel o con tecnología.

Enseguida hacemos una revisión sobre el desarrollo de la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (PME Handbook, 2006).

En el siglo XIX las investigaciones en psicología sobre imágenes mentales y sus interconexiones eran frecuentes. Sin embargo, con el surgimiento del conductismo, en el siglo XX, tales investigaciones fueron prácticamente olvidadas por largo tiempo. Fue hasta 1973 cuando Bishop publica los primeros estudios importantes sobre visualización y habilidad espacial.

En la década de los ochenta crece el interés por el estudio y entendimiento del pensamiento visual. En 1985, Presmeg presenta una revisión histórica sobre el uso y evolución de la visualización, donde sugiere que el trabajo para la construcción de imágenes mentales en los estudiantes, puede tomar más tiempo que el requerido en los analíticos. De 1988 en adelante, se refleja el renovado interés sobre visualización en educación matemática. De esta manera, se iniciaron investigaciones sobre los procesos inaccesibles del pensamiento, asociados con el uso de imágenes mentales y otras formas asociadas de expresión. Cuando una persona crea arreglos espaciales, hay una imagen visual en la mente de la persona que guía esa creación. Por su parte, Presmeg (1997b) establece que la visualización incluye procesos de construcción y transformación de imágenes mentales al hacer matemáticas.

Surgen preguntas por parte de investigadores en educación matemática que guían el desarrollo de la visualización, por ejemplo, ¿de qué manera se puede animar a los estudiantes a usar visualización?, ¿qué aspectos podrían ayudarlos a superar dificultades para hacer uso óptimo del proceso visual? Se hicieron grupos de trabajo donde se estudia el papel de la visualización en las representaciones, en geometría, etc. y la influencia del uso de la tecnología computarizada se manifiesta como una tendencia importante para desarrollar la visualización. Por su parte Healy y Hoyles (1996), establecen que generalmente los estudiantes, a diferencia de los matemáticos, raramente explotan el po-

tencial de los enfoques visuales para darle significado al aprendizaje. En 1994, Eisenberg afirmó: “A una gran mayoría de estudiantes no les gusta pensar en términos de figuras” (p. 216); siendo que una representación visual da oportunidad a los estudiantes de ser más exitosos en resolver problemas.

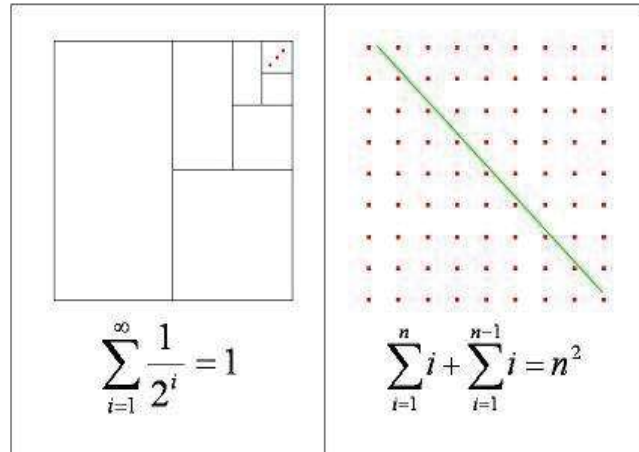


Figura 2.2: Ejemplos de pruebas basadas en la visualización.

En el año 2000, se destaca que la visualización puede contribuir al aprendizaje no sólo en Geometría y Trigonometría, sino también en Álgebra, y se consideran algunas ventajas del software que anima a la visualización dinámica. También se declara que la representación visual puede manifestar claramente la diferencia entre distintos tipos de problemas algebraicos; estos procesos son realizados por el uso del software dinámico. Además, se fomenta la producción de teoría y ligarla con la enseñanza. Duval mencionó las ventajas de tener flexibilidad entre múltiples registros de representación; Gray menciona que para el desarrollo de la visualización es esencial el pensamiento y el uso de las imágenes generadas por el pensamiento. En el año 2001, Duval propuso un marco teórico en el que las conexiones entre diferentes registros de representación son fundamentales para profundizar en el entendimiento de las matemáticas.

Finalmente, dentro de esta revisión, en el año 2005 se consolidó la tendencia del uso de las representaciones visuales. La Figura 2.2 muestra el poder de estas representaciones para abordar contenidos importantes de matemáticas, que vienen a funcionar como “pruebas sin palabras”.

# Capítulo 3

## Presentación y análisis de los problemas

### Introducción y carácter de la investigación

Sin duda, la geometría es una de las ramas de las matemáticas que más aportación curricular tiene en las matemáticas escolares, la cual ofrece un ambiente natural para que los estudiantes desarrollen habilidades de descripción dimensional, de imaginación espacial, de razonamiento y justificación de resultados (NCTM, 2000). Efectivamente, los contenidos geométricos se empiezan a estudiar desde la educación preescolar, en donde la intención es tener un acercamiento inicial intuitivo a los cuerpos y figuras geométricas. Posteriormente en la educación secundaria, se estudian las proposiciones euclidianas; el estudiante debe aprender los teoremas fundamentales que son más utilizados en su educación escolar, como el Teorema de Pitágoras y el Teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo. Así, dependiendo del nivel y orientación del programa escolar, se profundiza en las demostraciones.

Ahora bien, cada vez adquiere mayor relevancia el estudio de fenómenos y problemas que ocurren en el mundo cambiante en que vivimos. Hoy en día existen muy pocas ramas de las matemáticas que no guarden alguna relación con la variación y esto se debe, no sólo a que las matemáticas son una estructura altamente integrada e interconectada, sino al hecho de que el cambio es un fenómeno complejo y variado y para abordarlo requerimos de todas las ideas que podamos reunir. Las computadoras (en particular las gráficas de computadora) nos permiten ser testigos de la belleza y la complejidad de las matemáticas y poderlas aplicar en la práctica.

**Carácter de la investigación.** Esta investigación es de carácter documental y de desarrollo de soluciones de los problemas propuestos. Es documental porque reúne problemas que se encuentran en la literatura relacionada con dos ramas básicas de las matemáticas:

Geometría y Cálculo. Es de desarrollo porque en el proceso de solución, se detectan dificultades y se realizan acciones que contribuyen a la implementación de los procesos de resolución de problemas propuestos por Polya (1945), mediante el análisis de diferentes acercamientos ya sea con lápiz y papel o con el uso del software dinámico Cabri Géomètre. En el proceso de solución se destaca tanto el papel que juega el software para el entendimiento, como las acciones heurísticas clave que contribuyeron a la solución de los problemas.

### 3.1. Problema del bombero

**Introducción.** El contexto en que presentamos este problema da origen al nombre que hemos elegido para su denominación, pero puede ser presentado (y aparece en algunos textos de Cálculo de bachillerato y de nivel superior) en términos de dos postes sujetos por un alambre, o de un pozo petrolero y una plataforma en el litoral, entre otros. Es un problema de variación en el que hay una relación de dependencia entre las variables involucradas. El problema es abordado desde diferentes perspectivas, pero vemos que con el acercamiento geométrico, la heurística de la simetría permite resolverlo casi de manera inmediata y no se requiere de la asignación de medidas, ni de encontrar explícitamente las coordenadas del punto solución.

**Problema.** *En una cierta ciudad hay un río rectilíneo. De un lado del río se encuentra una estación de bomberos y del mismo lado del río hay una casa quemándose. Los bomberos primero tienen que pasar al río por agua y enseguida dirigirse a la casa para apagar el fuego. La distancia de la estación de bomberos al río es  $b$  y la distancia de la casa al río es  $c$  (Figura 3.1). ¿Cuál es el camino que deben seguir los bomberos para ir de la estación al río por agua y después a la casa en llamas, de tal manera que recorran la distancia mínima?*

Entendimiento del problema. Siendo el río una recta  $L$ , representemos la estación de bomberos y la casa por los puntos  $B$  y  $C$ , respectivamente. Hay que empezar de  $B$ , llegar a un punto de  $L$  y partir hacia  $C$  (posiblemente regresar por más agua), esto se puede hacer de muchas formas. Quien resuelve el problema puede formularse preguntas, ¿existe un recorrido mínimo?, si existe, ¿qué trazo puede ayudar a encontrarlo?, etc. Ahora, pasemos al diseño de un plan de solución, ejecución del plan y revisión de lo realizado.

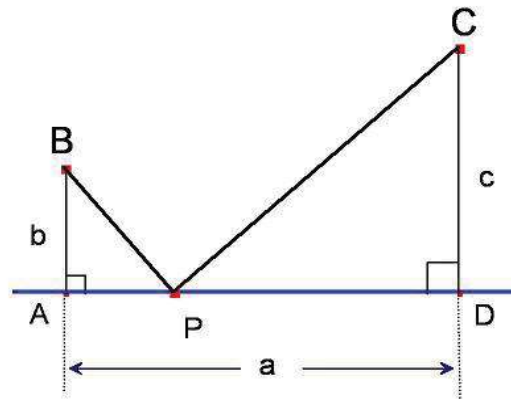


Figura 3.1: Ilustración del Problema del bombero.

### 3.1.1. Acercamiento con el método de prueba y error.

Sean  $A$  y  $D$  los pies de las perpendiculares por  $B$  y  $C$ , respectivamente (Figura 3.1). Dando valores particulares a  $a, b$  y  $c$ , por ejemplo:  $a = 3$ ,  $b = 2$  y  $c = 6$  (con la misma unidad de medida); con una regla graduada y considerando varias posiciones para el punto  $P$  al cual pueden ir los bomberos y registrando en una tabla los resultados de las mediciones (Figura 3.2).

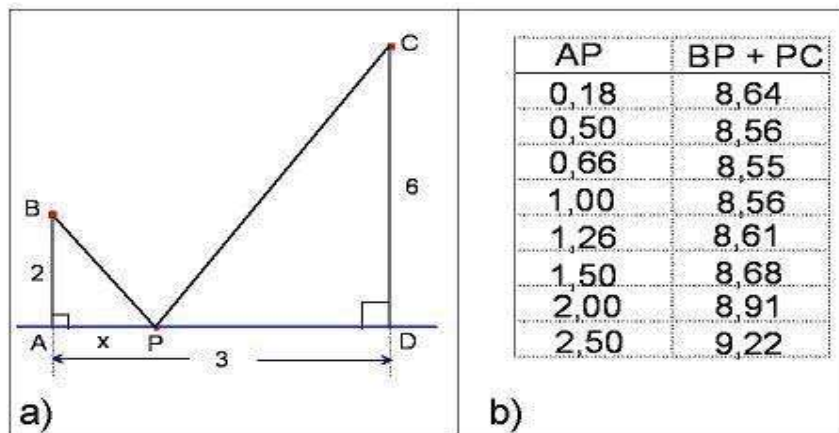


Figura 3.2: Representación gráfica y tabular del Problema del bombero.

Se puede advertir que el recorrido total depende del punto en el cual se llega al río; en

particular, evaluando el recorrido para los pies de las perpendiculares de  $B$  y  $C$  al río, obtenemos los valores posibles entre los que pudiera estar  $P$ . La Figura 3.3 muestra las distancias recorridas para estos puntos y un valor que se tiene cuando  $P$  no está entre  $A$  y  $D$ . Así, si existe algún punto  $P$  para el cual el recorrido es mínimo, éste debe estar entre  $A$  y  $D$ .

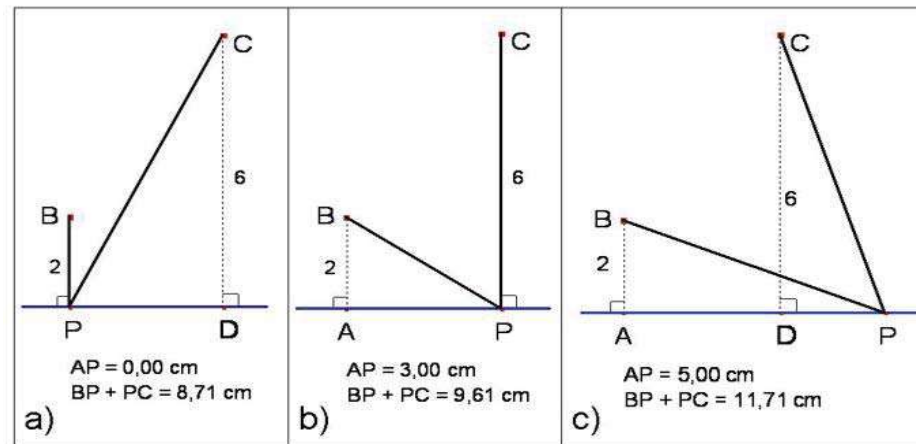


Figura 3.3: Distancia recorrida para posiciones distintas de  $P$ .

¿En qué punto  $P$  del río se debe ir por agua para que sea mínima esta suma de distancias? El uso de lápiz, papel y una regla nos permite probar para varios casos; este proceso puede ser largo y de las distancias obtenidas, no estar seguro que la más pequeña encontrada sea la mínima posible.

Estrategia heurística: toma de casos particulares.

Para tener éxito en la solución siguiendo este acercamiento, la perseverancia es indispensable; ya que se necesita calcular  $BP + PC$  para distintas posiciones de  $P$ , insistir con esta suma en el intervalo donde resulten los valores más pequeños para ella; además de dividir el segmento  $AD$  de una manera apropiada para tener la precisión deseada; estando convencidos que la solución se encuentra en este segmento.

### 3.1.2. Desarrollando la visualización con Cabri Gèomètre.

Con este software de geometría dinámica se puede representar la situación trazando una recta  $L$  (el río) y dos puntos  $B, C$  del mismo lado de la recta (la estación de bomberos y la casa, respectivamente). Sea un punto  $P$  sobre la recta, se trazan los segmentos  $BP$  y  $PC$  y se mide la longitud de estos segmentos. Con la calculadora se encuentra  $BP + PC$  ( $= d$ ). Para distintas posiciones de  $P$ , se observa que  $d$  también cambia (Figura 3.4).

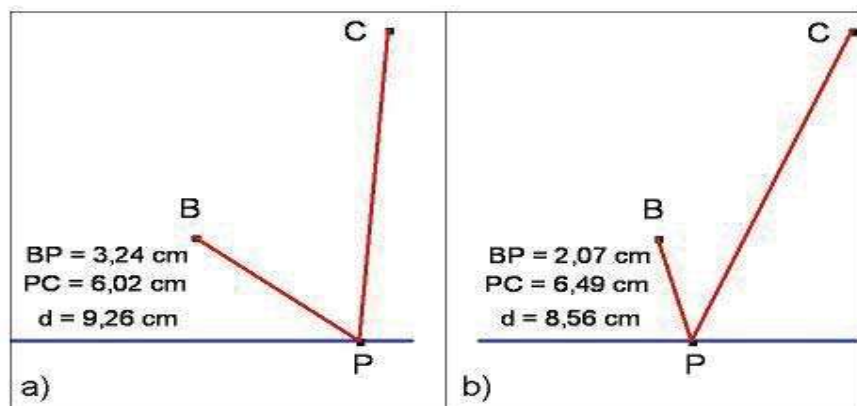


Figura 3.4: Valores de  $d$  obtenidos con el software.

Después de hacer variar  $P$  sobre  $L$  y observar que cambiaba  $d$ , los siguientes trazos ayudaron a plantear algunas preguntas. Sea  $A$  un punto de  $L$  tal que  $AB \perp L$ , arrastrando  $P$  muy a la derecha (y a la izquierda) de  $A$ , ¿cómo es  $d$ ? Sea  $D$  otro punto de  $L$  tal que  $CD \perp L$ , ¿cómo es  $d$  si  $P$  coincide con  $A$  ó  $D$ ? De los valores para  $d$  observados, ¿habrá un valor más pequeño para  $d$ ?, ¿se puede encontrar un valor mínimo para  $d$ ? Se puede confirmar que si  $P$  está a la izquierda de  $A$ , o a la derecha de  $D$ , la suma se hace muy grande; por lo que el mínimo (si es que existe) está entre  $A$  y  $D$ .

Con este software podemos trazar la gráfica  $AP$  como variable independiente ( $x$ ) y  $BP + PC$  como variable dependiente ( $y$ ), en la cual se observa que efectivamente  $BP + PC$  tiene un valor mínimo. En la Figura 3.5 se muestran las coordenadas del punto de  $L$  donde posiblemente se encuentra ese valor mínimo; vemos que para una distancia  $AP$  tenemos resultados diferentes de  $BP + PC$ : si  $P$  está a la izquierda o a la derecha de  $A$ . Con las herramientas de Cabri podemos obtener las coordenadas de un punto de la gráfica pero no saber cómo depende la distancia  $AP$  de  $BP$  y/o  $PC$ , por ejemplo.

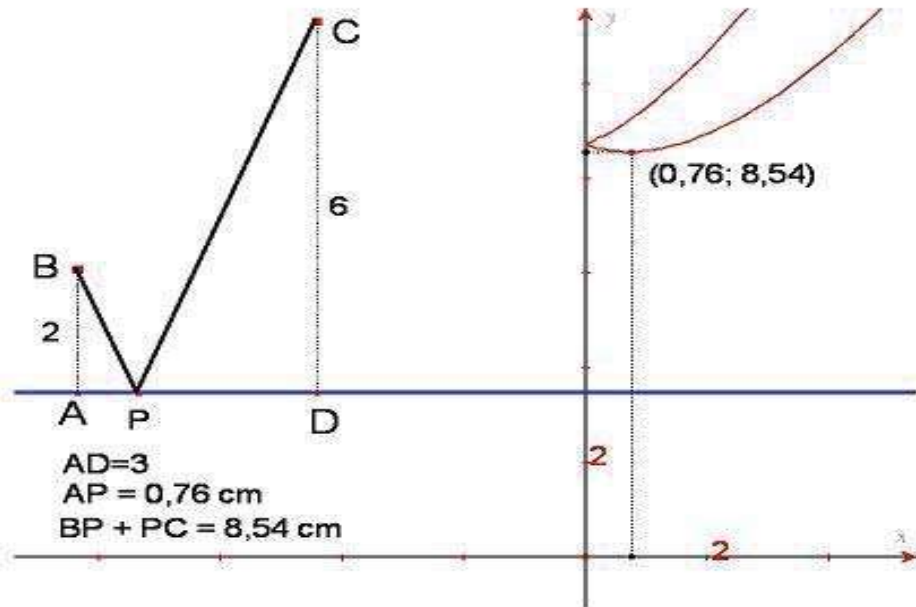


Figura 3.5: Ilustración del problema y lugar geométrico determinado por  $P$ .

Uso de recursos. Desde luego que el conocimiento y habilidad para trabajar con el software son aspectos esenciales para tener éxito con este acercamiento. Las cuestiones clave son: saber hacer los trazos necesarios y determinar cuáles son los objetos libres en el dibujo.

### 3.1.3. Solución usando herramientas de Cálculo diferencial.

Sea  $P$  en el intervalo  $(A, D)$  el punto donde el bombero irá por agua. De la figura 3.1, se tienen los triángulos rectángulos  $ABP$  y  $DCP$ , las hipotenusas de estos triángulos son los posibles recorridos que hará el bombero. Situemos el origen del sistema de ejes coordenados  $x - y$  en el punto  $A$  (Figura 3.6); la recta  $L$  es ahora el eje  $x$ .

Construimos una función que determine la distancia  $BP + PC$ :

$$\text{Sea } d = BP + PC, \quad d(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a - x)^2 + c^2} \quad (3.1)$$

Sacando primera derivada a  $d(x)$  e igualando a cero para encontrar los posibles puntos críticos de la función, tomando en cuenta que  $(a - x)^2 = (x - a)^2$ , tenemos:

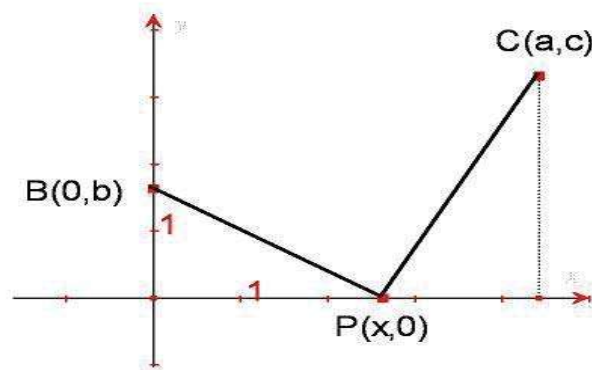


Figura 3.6: Obtención de la distancia  $BP + PC$  en función de  $x$ .

$$d'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \frac{x - a}{\sqrt{(x - a)^2 + c^2}} = 0, \quad (3.2)$$

de donde resulta: 
$$x\sqrt{(x - a)^2 + c^2} = -(x - a)\sqrt{x^2 + b^2}. \quad (3.3)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior:

$$x^2[(x - a)^2 + c^2] = (x - a)^2(x^2 + b^2).$$

De donde resulta la ecuación cuadrática:

$$x^2(b^2 - c^2) - 2ab^2x + a^2b^2 = 0. \quad (3.4)$$

Resolviendo para  $x$  la ecuación (3.4), las abscisas de los puntos críticos pueden ser:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{ab}{b-c} \\ x_2 = \frac{ab}{b+c} \end{cases}$$

Pero al sustituir estos valores en (3.2), vemos que  $x_1$  no es solución de esa ecuación pues no satisface la igualdad, por lo que en  $x_1$  no tenemos punto crítico;  $x_2$  es número crítico ya que es solución de (3.2).

Ahora aplicamos el criterio de la segunda derivada al valor  $x_2$  para saber si  $d(x)$  tiene mínimo o máximo en ese valor. Primero calculamos la segunda derivada y después evaluamos.

$$\text{Como la derivada de } d(x) \text{ es: } d'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \frac{x - a}{\sqrt{(x - a)^2 + c^2}} \quad (3.5)$$

$$\text{entonces la segunda derivada es: } d''(x) = \frac{b^2}{(x^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{c^2}{[(x - a)^2 + c^2]^{3/2}} \quad (3.6)$$

$$\text{Ahora evaluamos } d''(x) \text{ en } x_2 = \frac{ab}{b+c} : \quad d''\left(\frac{ab}{b+c}\right) = \frac{(b+c)^4}{bc[a^2 + (b+c)^2]^{3/2}} > 0.$$

La segunda derivada es positiva porque  $b$  y  $c$  son positivas (por ser distancias), por lo que  $d(x)$  tiene un mínimo en  $x = \frac{ab}{b+c}$ . Es decir,  $d$  va a ser mínima en el punto  $P$  que esté a una distancia  $\frac{ab}{b+c}$  de  $A$ . Si  $a = 3$ ,  $b = 2$  y  $c = 6$ , entonces  $x = \frac{(2)(3)}{2+6} = \frac{3}{4}$ .

Comentarios:

- La solución exacta es para  $x = 0,75$ , y con Cabri encontramos que el mínimo se alcanza en  $x = 0,76$ ! Esto se debe a la manera en que está elaborado el software y su grado de precisión.
- Si graficamos  $d(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(3-x)^2 + 36}$ , utilizando los procedimientos ordinarios del Cálculo, obtenemos la Figura 3.7a), mientras que con Cabri obtenemos la Figura 3.7b), ¿por qué?  
Esto pasa porque en 3.7a) los valores de  $x$  son positivos y negativos; en cambio para 3.7b) tenemos distancias, por lo que  $x$  sólo toma valores positivos. Además, un valor de  $x$  lo tenemos de dos formas: estando  $P$  a la derecha y a la izquierda de  $A$  (Figura 3.8). Por lo tanto, para cada valor de  $x$  tenemos dos valores para  $y$ .
- Podemos asegurar que el mínimo de  $d$  no está en los extremos del intervalo  $[A,D]$ , puesto que se cumple lo siguiente:

$$d'(A) = \frac{0}{\sqrt{0^2 + b^2}} + \frac{0 - a}{\sqrt{(0 - a)^2 + c^2}} < 0, \quad (3.7)$$

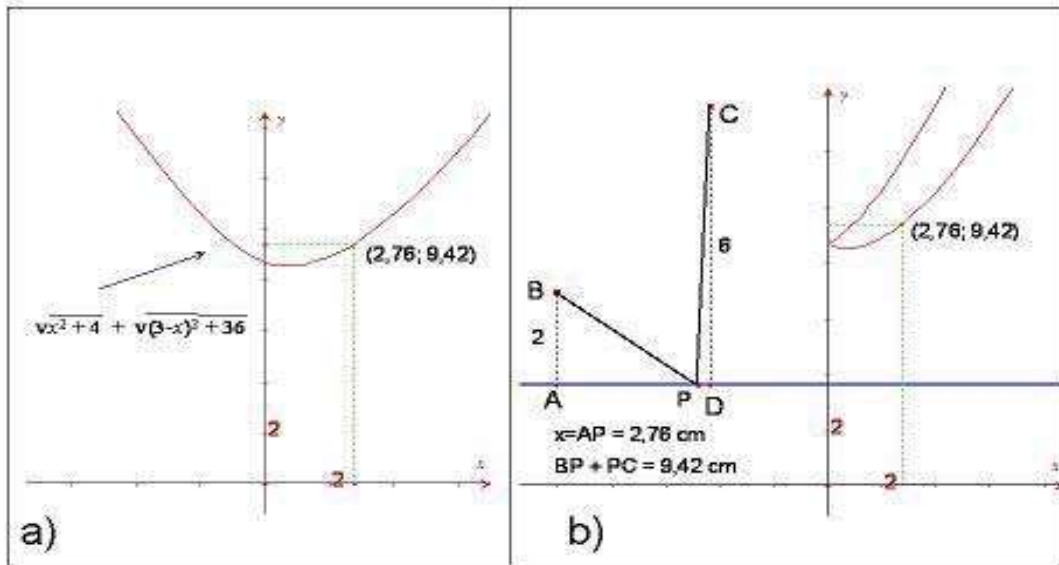


Figura 3.7: Gráficas de  $d(x)$ .

$$d'(D) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a - a}{\sqrt{(a - a)^2 + c^2}} > 0. \quad (3.8)$$

Confirmémoslo:

El mínimo no se alcanza en  $A$ ; pues si lo hiciese, como  $d(x)$  es derivable en  $[A, D]$ , entonces tendríamos que:

$$\forall h > 0, d(A + h) \geq d(A) \Rightarrow \frac{d(A + h) - d(A)}{h} \geq 0, \quad \therefore d'(A) \geq 0,$$

lo cual contradice (3.7).

De igual manera, si el mínimo estuviera en  $D$  se cumpliría que:

$$\forall h > 0, d(D - h) \geq d(D) \Rightarrow \frac{d(D - h) - d(D)}{-h} \leq 0,$$

$$\text{es decir, } \frac{d(D + k) - d(D)}{k} \leq 0, \quad \therefore d'(D) \leq 0, \quad \text{que contradice (3.8).}$$

Finalmente, como  $d(x)$  es continua en  $[A, D]$  entonces  $d(x)$  alcanza su mínimo en  $[A, D]$ . El mínimo no está en  $A$  y tampoco en  $D$ , entonces existe  $x \in (A, D)$  tal que  $d'(x) = 0$ .

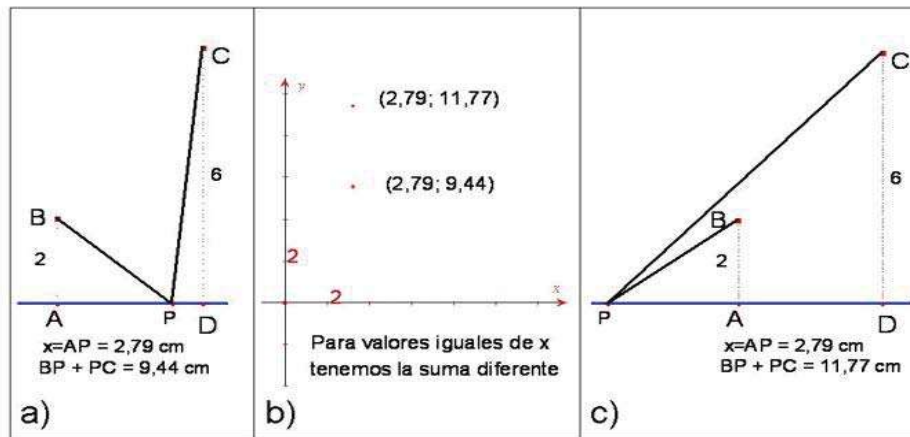


Figura 3.8:  $P$  a la misma distancia (a la izquierda y a la derecha) de  $A$ , el valor para  $x$  es el mismo y tenemos dos resultados diferentes para  $BP + PC$ .

---

Estrategia heurística: básicamente consiste en usar analogías con problemas habituales desarrollados en cursos y libros de Cálculo, donde se establece una función que modele la situación y optimizar.

---

La aplicación de los recursos necesarios en este acercamiento son: proponer una función que modele un fenómeno, calcular derivadas sucesivas de una función, racionalizar y resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, evaluar funciones; además, se debe conocer el criterio de la primera y segunda derivada para una función.

Ahora presentamos la solución geométrica; en ella se puede observar que podemos encontrar la solución sin encontrar explícitamente el valor de  $x$ .

### 3.1.4. Solución geométrica.

Siendo el río la recta  $L$ , los puntos  $B$  y  $C$  la estación de bomberos y la casa, respectivamente. Se localiza  $C'$ , el simétrico de  $C$  respecto a  $L$  y se traza  $PC'$  (Figura 3.9 a), se forman los triángulos congruentes  $CDP$  y  $C'DP$  (por LAL).

Entonces  $PC = PC'$ , luego:

$$BP + PC = BP + PC', \text{ el cual es una forma de ir de } B \text{ a } C'.$$

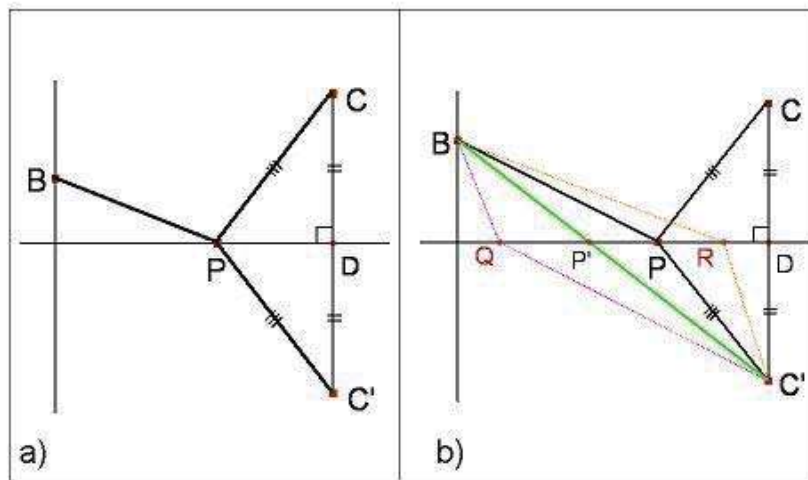


Figura 3.9: Ilustración de algunas alternativas de  $P$  para ir de  $B$  a  $C$ .

Sea  $P'$  la intersección de  $BC'$  con la recta  $L$ , por desigualdad en un triángulo,  $BC'$  es menor que cualquier otro camino de ir de  $B$  a  $C'$ . La Figura 3.9 b muestra otras formas de llegar de  $B$  a  $C'$ . Por ejemplo, en el  $\triangle BQC'$ ,  $BC' < BQ + QC'$ . Por lo que la distancia mínima recorrida de  $B$  a  $C$ , pasando por un punto de  $L$ , se da cuando  $P$  coincide con  $P'$ .

---

Estrategia: establecer la simetría de un punto respecto a una recta.

---

Uso de recursos: congruencia de triángulos, teorema de la desigualdad del triángulo.

Una vez obtenida la solución, encontremos la distancia  $AP$ . Trazando  $EC'$ , paralelo a  $AD$  (Figura 3.10 a), tenemos que los triángulos  $ABP$  y  $EBC'$  son semejantes (por teorema de semejanza AAA). Entonces se cumple que:

$$\frac{AP}{EC'} = \frac{AB}{EB} \Rightarrow AP = \frac{AB}{EB}(EC') = \frac{ab}{b+c},$$

lo cual coincide con la solución anterior.

Estrategia: trazar un segmento paralelo a otro.

Uso de recursos: básicamente la semejanza de triángulos fue la herramienta utilizada.

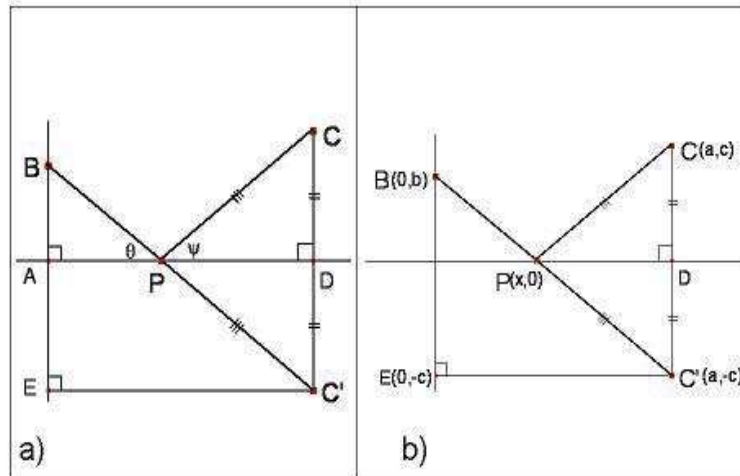


Figura 3.10: Esquema que da la solución.

Para encontrar la distancia  $x = AP$ , también podemos situar los ejes  $x - y$  con origen en  $A$  (Figura 3.10 b). Siendo  $d = BP + PC$  :

$$\begin{cases} d = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + c^2} \\ d = \sqrt{a^2 + (b+c)^2} \end{cases}$$

$$\text{entonces: } \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + (b+c)^2} \quad (3.9)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de (3.9), despejando y reduciendo queda:

$$\sqrt{(x^2 + b^2)[(a-x)^2 + c^2]} = bc + ax - x^2.$$

Elevando otra vez al cuadrado, despejando y reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$x^2(b+c)^2 - 2abx(b+c) + a^2b^2 = 0, \quad (3.10)$$

resolviendo la ecuación (3.10) tenemos que:  $x_1 = x_2 = \frac{ab}{b+c}$ .

---

Estrategia: igualar dos expresiones a un mismo segmento.

---

Herramientas utilizadas: distancia entre dos puntos, simplificar la expresión de una función, resolver ecuaciones cuadráticas.

En el punto solución, observemos que los ángulos  $\theta$  y  $\psi$  son iguales (Figura 3.10 a), pues  $\angle APB = \angle DPC'$  por ser opuestos por el vértice, y considerando que:

$$\triangle DPC' \cong \triangle DPC,$$

se tiene que  $\angle DPC' = \angle DPC$ , por transitividad:  $\angle APB = \angle DPC$ ; es decir,  $\theta = \psi$ .

Entonces el bombero tiene que ir por agua al río (Figura 3.10) recorriendo una distancia  $BP = \sqrt{x^2 + b^2} = \frac{b\sqrt{a^2 + (b+c)^2}}{b+c}$  ( $P$  entre  $A$  y  $D$ ), para los valores particulares que tenemos,  $a = 3$ ,  $b = 2$  y  $c = 6$ ,  $BP = \frac{\sqrt{73}}{4}$ ; y luego ir a  $C$  caminando en una dirección tal que forme ángulos iguales con el río (al llegar por el agua como al alejarse con el agua).

Finalmente, este problema permite ver un tipo de variación en la que si la posición del punto  $P$  cambia, la distancia  $BP + PC$  también cambia. Enseguida abordamos un problema donde la posición de un punto cambia y, sin embargo, la otra variable considerada permanece constante.

### 3.2. Problema de sumar distancias desde un punto de un lado de un rectángulo a sus diagonales

**Introducción.** Este problema también corresponde al contexto escolar del bachillerato y es propuesto por Verdugo *et al.* (2001) como un ejemplo de problema para fomentar el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de bachillerato, el cual forma parte de un estudio curricular realizado en el nivel medio superior mexicano.

**Problema.** Dado un rectángulo  $ABCD$  cuyos lados miden  $a$  y  $b$ , considerar un punto  $T$  de  $AD$ ; trazar perpendiculares  $TM$  y  $TN$  a las diagonales  $AC$  y  $BD$ , respectivamente. Calcular  $TM + TN$  para varias posiciones de  $T$ , ¿existe un valor mínimo o máximo para la suma? (Figura 3.11).

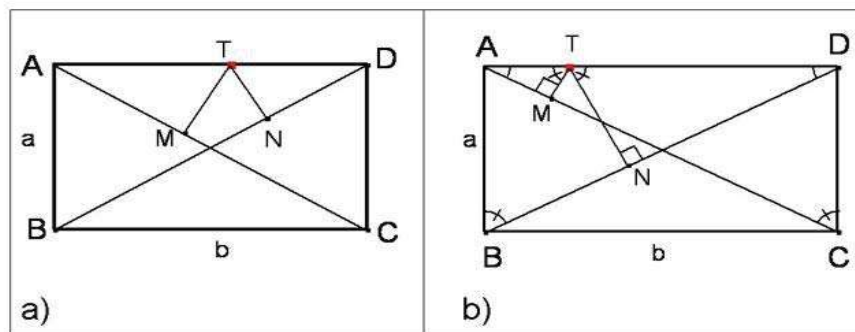


Figura 3.11: Ilustración que aparece con el problema.

#### 3.2.1. Dando valores particulares.

Asignando valores para  $a$  y  $b$ , por ejemplo,  $a = 3$  y  $b = 5$ ; para varias posiciones de  $T$  se trazan perpendiculares a  $AC$  y  $BD$  que pasen por  $T$ , se pueden medir  $TN$  y  $TM$  y registrar en una tabla (con lápiz y papel o con un software) la suma de estos segmentos. La Figura 3.12 (a y b) muestra dos posiciones de  $T$ , también se muestra (en c) una tabla con  $TM + TN$  para 5 posiciones diferentes de  $T$ .

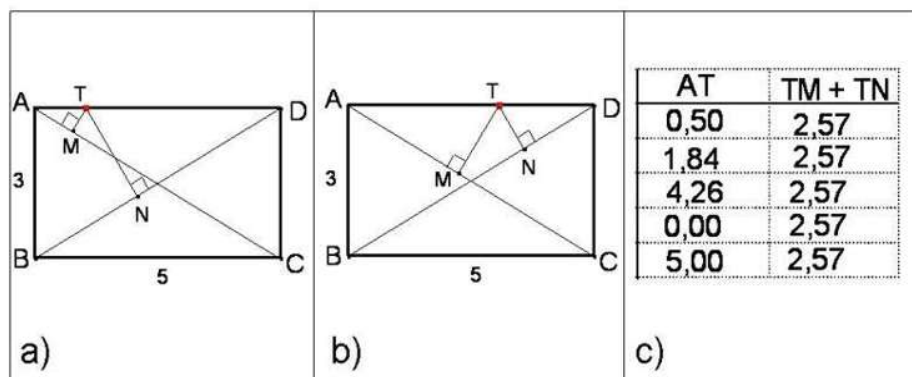


Figura 3.12: Información para posiciones distintas de  $T$ .

Observemos que si  $T$  coincide con  $A$ ,  $TM$  es cero y  $TN = 2,57$ . Algo similar ocurre si  $T$  coincide con  $D$ ,  $TM = 2,57$  y  $TN$  es cero. Se espera que quien está resolviendo el problema se haga preguntas como las siguientes: ¿Será que  $TM + TN$  es una constante?, ¿cómo puede ser eso?

**Conjetura:**  $TM + TN$  es una constante. Cabe mencionar que no cualquier interrogante constituye una conjetura, recordemos que su planteamiento depende de tener una sospecha razonable, algo fundada, producto de actos internos de pensamiento y meditación con la experiencia del sujeto.

---

Estrategia heurística: toma de casos particulares, principio del extremo.

---

El recurso principal: la perpendicular a un segmento que pasa por un punto dado.

### 3.2.2. Visualización con software dinámico.

Con Cabri Géomètre podemos visualizar la gráfica (Figura 3.13) correspondiente a la suma  $TM + TN$  en función de  $AT$ ; en la cual vemos que para todo valor de  $x$  ( $= AT$ ) en el intervalo  $AD$ , el valor para  $y$  ( $= TM + TN$ ) es constante.

Con sólo arrastrar el punto  $T$  sobre el segmento  $AD$ , también podemos analizar los puntos extremos, ¿qué pasa cuando  $T$  coincide con alguno de los vértices del rectángulo?,

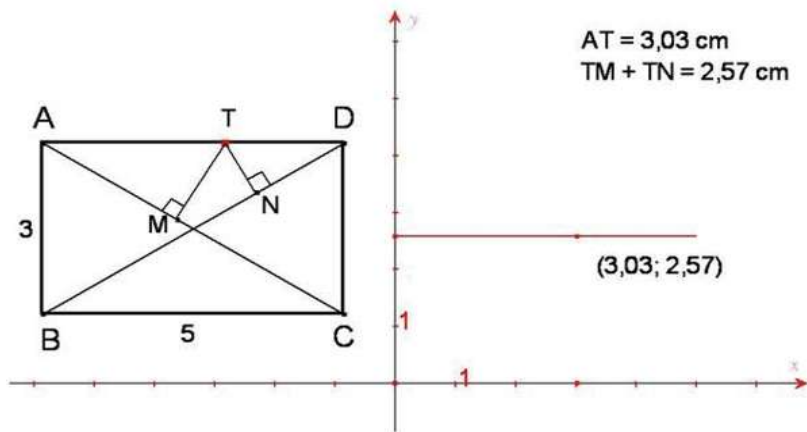


Figura 3.13: Lugar geométrico determinado por  $TM + TN$ .

por ejemplo, cuando  $T$  coincide con  $D$ , entonces  $TN = 0$ . Podemos ver (Figura 3.14), que  $\triangle CMD \sim \triangle CDA$  (por teorema de semejanza AAA), entonces:

$$\frac{DM}{AD} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow DM = \frac{AD}{AC} CD = \frac{(3)(5)}{\sqrt{34}} \approx 2,57.$$

Lo mismo pasa si  $T$  coincide con  $A$ ,  $TM + TN$  es constante.

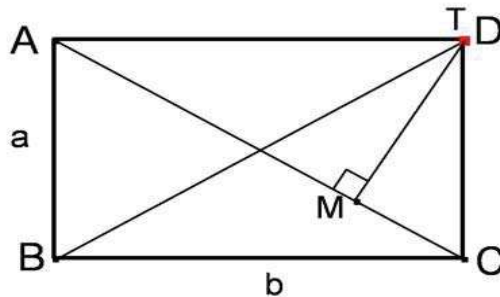


Figura 3.14: Posición extrema de  $T$ , cuando coincide con  $D$ .

Se procede entonces a diseñar un plan de solución. El propósito es demostrar la conjetura o encontrar un contraejemplo para desecharla; ya que si la suma es constante para muchos casos, eso no constituye una demostración de que siempre se cumple.

### 3.2.3. Demostración geométrica.

Sea el rectángulo  $ABCD$  (Figura 3.11 b). Tenemos que  $\triangle ATM \sim \triangle ACD$  (por teorema de semejanza AAA), entonces:

$$\frac{TM}{CD} = \frac{AT}{AC} \Rightarrow TM = \frac{CD}{AC}AT = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}AT \quad (3.11)$$

También  $\triangle DTN \sim \triangle DBA$  (por teorema de semejanza AAA), por lo que:

$$\frac{TN}{AB} = \frac{TD}{BD} \Rightarrow TN = \frac{AB}{BD}TD = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}TD \quad (3.12)$$

Sumando (3.11) y (3.12) resulta:

$$TM + TN = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}(AT + TD) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3.13)$$

En el problema  $a$  y  $b$  son constantes, por lo que  $TM + TN$  es una constante.

Si  $a = 3$  y  $b = 5$ , sustituyendo en (3.13), tenemos que:

$$TM + TN = \frac{(3)(5)}{\sqrt{34}} = \frac{15\sqrt{34}}{34} \approx 2,57$$

independientemente de la ubicación del punto  $T$ .

---

Estrategia heurística: usar analogías para establecer relación entre dos triángulos.

---

| Uso de recursos: semejanza de triángulos, operatividad algebraica. |

### 3.2.4. Otra forma geométrica de resolver el problema.

Si se localizan los simétricos de  $B$ ,  $C$  y  $N$ , respecto a  $AD$ :  $B'$ ,  $C'$  y  $N'$ , respectivamente (Figura 3.15); tenemos también el rectángulo  $AB'C'D$ ; tenemos que  $N'$  se encuentra en la diagonal  $B'D$ . Si ahora el origen de los ejes  $x - y$  se sitúa en  $A$ , tenemos que las ecuaciones de las diagonales son:

$$ax + by = 0, \text{ ecuación de la recta que pasa por } A \text{ y } C.$$

$ax + by - ab = 0$ , ecuación de la recta que pasa por  $B'$  y  $D$ .

Calculando la distancia  $d$  que hay entre estas diagonales:  $d = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

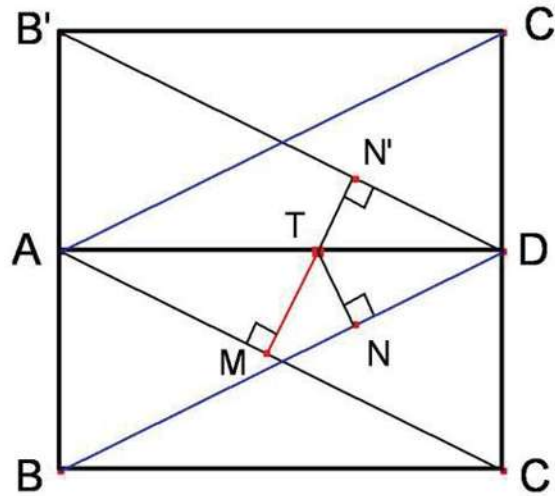


Figura 3.15: Ilustración que justifica por qué la suma es constante.

Es decir:

$$TM + TN = MT + TN' = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

es la distancia entre las diagonales paralelas de los rectángulos congruentes  $ABCD$  y  $AB'C'D'$ .

Como  $TM + TN$  es constante, el valor mínimo de la suma es igual al máximo.

---

Estrategia heurística: establecer simetría de un punto o figura respecto a una recta.

---

Recursos principales: pendiente de una recta que pasa por dos puntos, distancia de un punto a una recta, despeje de fórmulas.

Finalmente, comentamos que si en lugar de tomar un punto de  $AD$ , se hace el análisis con un punto de  $AB$ , el resultado es el mismo y el uso de estrategias y recursos es similar.

Enseguida tratamos un problema de la geometría euclidiana. Sabemos que el perímetro de un triángulo depende de la longitud de sus lados, ¿cuál es el triángulo de menor perímetro posible que podemos inscribir en un triángulo acutángulo? La solución geométrica fue presentada por el matemático italiano Toshi di Fagnano (1715-1797).

### 3.3. Problema de Fagnano

**Introducción.** El concepto de variación está presente en algunas ramas de las matemáticas y se presentan dificultades en comprender cómo es que cambian dos cantidades al mismo tiempo en un sistema. La variación es una noción básica en el estudio de funciones y las computadoras abren posibilidades para comprender este concepto; en el siguiente problema, el perímetro de un triángulo varía al mover sus vértices, con Cabri visualizamos la gráfica de ésta dependencia.

**Problema de Fagnano.** Dado un triángulo acutángulo  $ABC$ , inscribir un triángulo  $PQR$  cuyo perímetro sea el más pequeño posible.

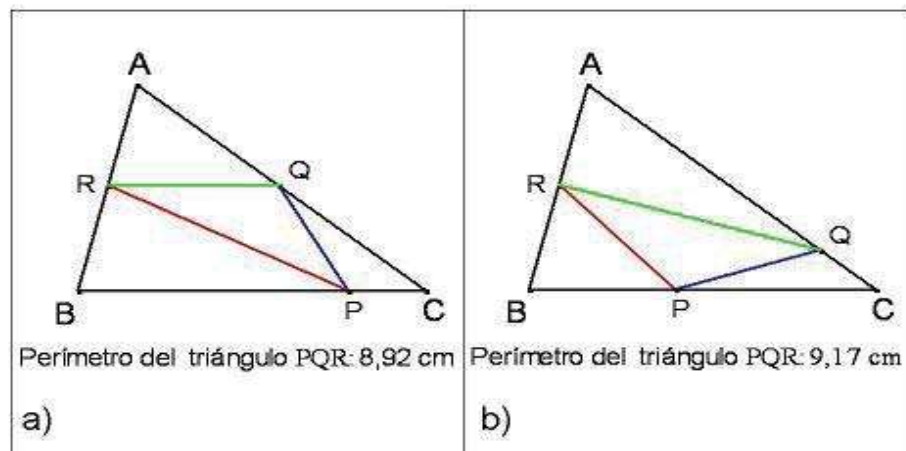


Figura 3.16: Perímetro del triángulo inscrito para casos particulares.

### 3.3.1. Acercamiento por ensayo y error.

Para medidas numéricas de un triángulo acutángulo  $ABC$ , por ejemplo  $AB = 3,67\text{cm}$ ;  $AC = 5,73\text{cm}$ ;  $BC = 5,42\text{cm}$ ;  $\angle A = 66,2^\circ$ ;  $\angle B = 75,5^\circ$  y  $\angle C = 38,3^\circ$ ; inscribamos un  $\triangle PQR$  en el  $\triangle ABC$ ; con ayuda de una regla graduada o algún software en que se pueda hacer, podemos medir el perímetro del  $\triangle PQR$ . La Figura 3.16 muestra dos valores del perímetro para dos triángulos particulares.

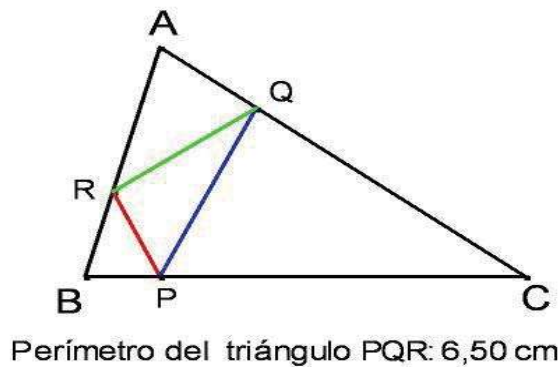


Figura 3.17: Triángulo de perímetro mínimo obtenido con Cabri.

Podemos ver (Figura 3.16) que para diferentes posiciones de  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , en la mayoría de los casos tendremos perímetros distintos. Sin embargo, este acercamiento puede resultar demasiado laborioso para llegar a la solución, pues tendríamos que completar un número (finito) de ciclos; cada ciclo consiste en: i) mantener fijos  $Q$  y  $R$  para localizar la posición de  $P$  donde haya un valor mínimo; ii) luego mantener fijos el  $P$  encontrado y  $Q$  para localizar  $R$  que dé el valor mínimo; y iii) mantener fijos los dos puntos encontrados  $P$  y  $R$  para localizar  $Q$  donde el valor sea mínimo.

Así, la exploración con lápiz y papel pronto nos parecerá cansada y tediosa; es entonces cuando el uso del software dinámico nos ayudará a visualizar un mayor número de casos y, entre ellos, encontrar (con paciencia) el triángulo de perímetro mínimo. La Figura 3.17 muestra el triángulo de menor perímetro posible, obtenido con ayuda de Cabri Géomètre.

---

Estrategia heurística: toma de casos particulares.

---

Recursos principales: medir distancia entre dos puntos, suma de distancias, registro de valores para poder comparar resultados.

### 3.3.2. Solución geométrica.

Veamos de manera general cómo encontrar el triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triángulo acutángulo dado.

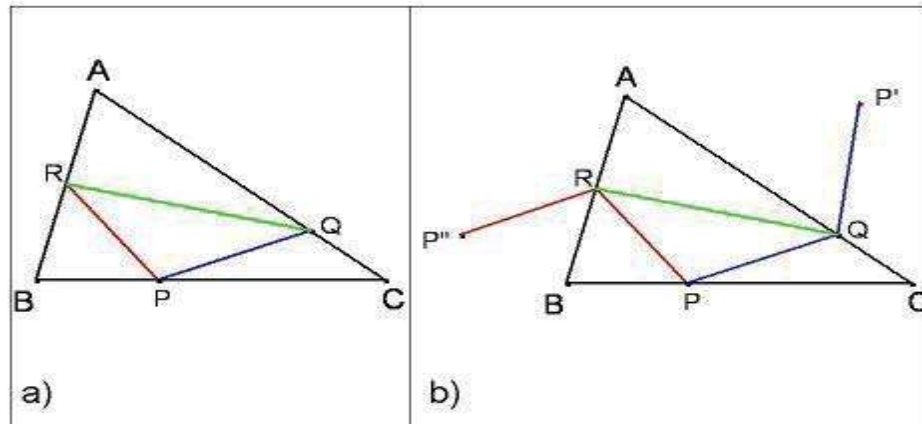


Figura 3.18: Para  $\triangle PQR$  localizamos  $P'$  y  $P''$ , simétricos respecto a  $AC$  y  $AB$ .

Sea el  $\triangle ABC$  el triángulo acutángulo dado, inscribamos cualquier  $\triangle PQR$  en el triángulo dado, Figura 3.18 a).

La simetría ha sido buena herramienta en los dos problemas anteriores, veamos aquí. Sean  $P'$  y  $P''$  los puntos simétricos de  $P$  respecto a  $AC$  y  $AB$ , respectivamente. Unimos  $P'$  con  $Q$  y  $P''$  con  $R$ , como en la Figura 3.18 b).

Por ser  $P$  y  $P'$  simétricos respecto a  $AC$ :

$$PQ = P'Q, \text{ y también } AP = AP',$$

Por ser  $P$  y  $P''$  simétricos respecto a  $AB$ :

$$RP = RP'', \text{ y también } AP = AP''.$$

Entonces:

$$PQ + QR + RP = P'Q + QR + RP'', \text{ también (Figura 3.19) } AP' = AP''.$$

Por lo que  $P'Q + QR + RP''$  es el perímetro del  $\triangle PQR$ ; tomando en cuenta que  $P'Q + QR + RP''$  es una forma de ir de  $P'$  a  $P''$ , entonces ésta longitud es mínima

cuando  $P'P''$  es un segmento (Figura 3.20). Por lo que, de todos los triángulos inscritos posibles, el triángulo de menor perímetro lo obtenemos cuando  $P''$ ,  $R$ ,  $Q$  y  $P'$  están alineados.

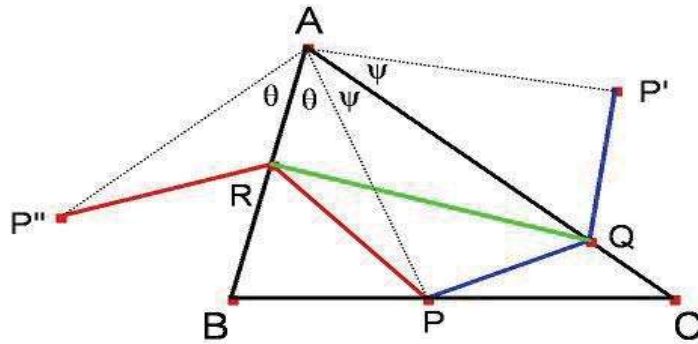


Figura 3.19: El perímetro del  $\triangle PQR$  es  $P''R + RQ + QP'$ .

Aún más, de la Figura 3.19 tenemos que  $\angle P''AP' = 2\angle BAC$ ; es decir,  $\angle P''AP'$  es constante. Entonces la base ( $P''P'$ ) del triángulo isósceles  $P''AP'$  es mínima cuando los lados  $P''A$  y  $AP'$  sean mínimos, esto pasa cuando  $AP$  tenga longitud mínima; y eso ocurre cuando  $AP$  es perpendicular a  $BC$ ; o sea, cuando  $AP$  es altura del  $\triangle ABC$ .

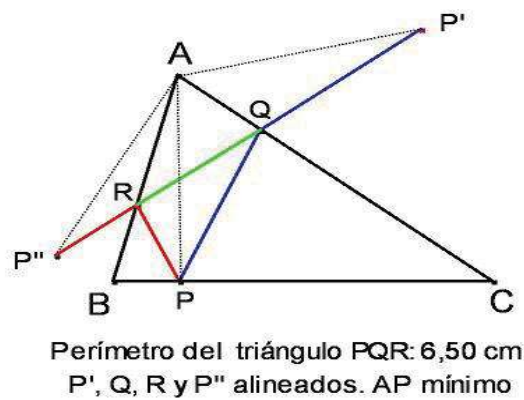


Figura 3.20: Posiciones de  $P$ ,  $Q$  y  $R$  para el perímetro mínimo.

Pero bien pudimos haber empezado con  $B$  ó  $C$  en vez de  $A$ ; en esos casos hubiésemos obtenido que  $BQ$  y  $CR$  son alturas del  $\triangle ABC$  desde  $B$  y  $C$ , respectivamente (Figura 3.21). A este triángulo inscrito que tiene por vértices los pies de las alturas se le llama Triángulo órtico o Triángulo pedal.

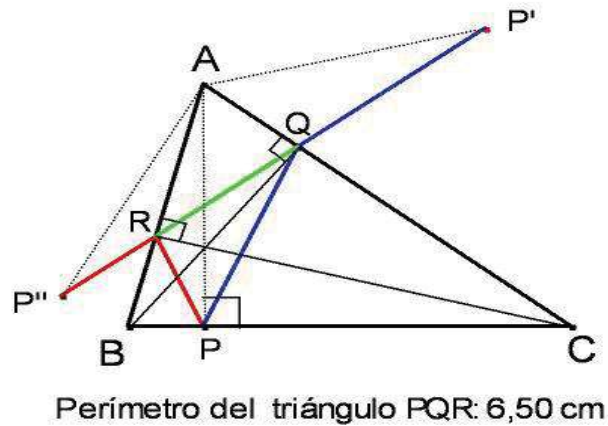


Figura 3.21: El triángulo de menor perímetro es el Triángulo pedal.

---

Estrategia heurística: establecer la simetría de un segmento respecto a una recta.

---

Uso de recursos: propiedad de puntos simétricos, teorema de la desigualdad del triángulo, trazo de alturas de un triángulo.

### 3.3.3. Visualizando con el software dinámico.

Con ayuda de Cabri se puede construir la gráfica del perímetro del  $\triangle PQR$  en función de la distancia  $BP$ , por ejemplo. La Figura 3.22 muestra la variación del perímetro del  $\triangle PQR$  al mover los vértices  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . El punto más bajo de la curva corresponde al valor mínimo posible para el perímetro del  $\triangle PQR$  inscrito en el triángulo acutángulo dado,  $\triangle ABC$ .

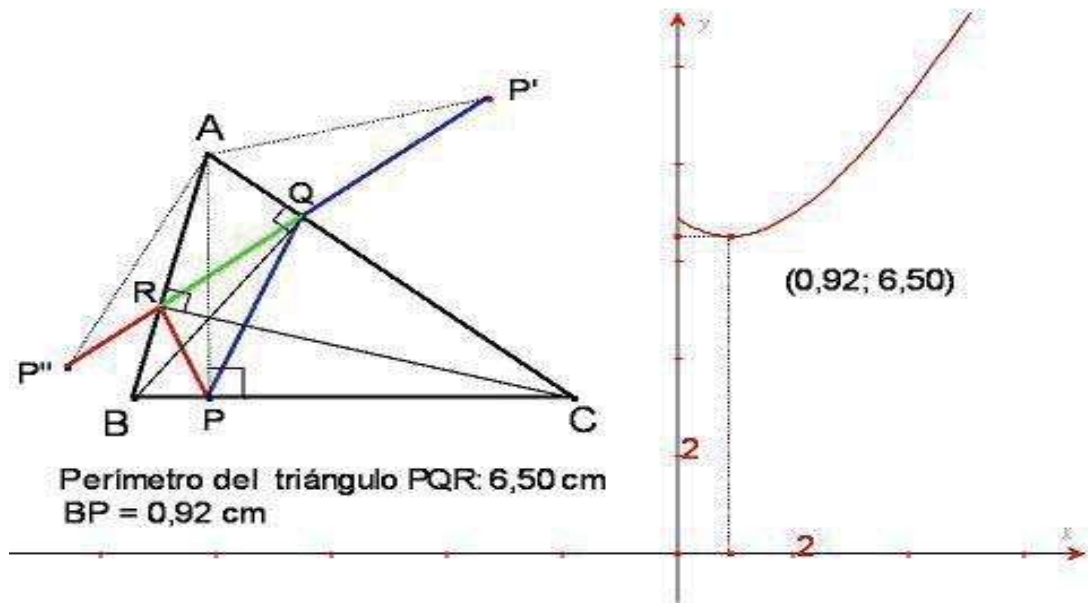


Figura 3.22: Gráfica del perímetro obtenida con Cabri Géomètre.

La gráfica está en el primer cuadrante porque en  $x$  estamos trabajando con distancias (positivas), y en  $y$  con suma de distancias (positivas también). Puede ser que para distintos valores de  $x$  se tenga la misma  $y$ , por ejemplo en  $x = 0$  y  $x = 1,95$ ; tenemos que  $y = 6,9$ ; como se muestra en la Figura 3.23.

Nuestro siguiente problema también es un importante problema de carácter histórico, planteado por el célebre matemático francés Pierre de Fermat.

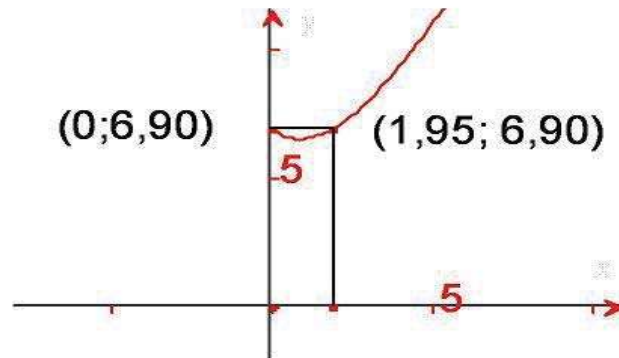


Figura 3.23: Existencia de dos valores de  $x$  que dan un valor de  $y$ .

### 3.4. Problema del Punto de Fermat

**Introducción.** En cierta ocasión Fermat (1601-1665), *Príncipe de los aficionados*, retó al matemático italiano Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileo, con el siguiente problema: Dadas tres ciudades representadas por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , unir las por una red de carreteras de forma que sea de longitud mínima. El punto  $P$  del cual se parte hacia las ciudades  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y se recorre una distancia mínima, es conocido como Punto de Fermat. El estudio y análisis de este problema incluye el desarrollo de importantes ideas matemáticas y temas avanzados de geometría.

Un acercamiento intuitivo a este problema con una regla graduada permite ver que si varía  $P$ , en general, la suma de distancias de  $P$  a  $A$ ,  $B$  y  $C$ , también varía; se puede complementar este acercamiento con el uso de Cabri y observar que dicha suma está acotada. Un acercamiento formal permite ubicar cotas para la suma, inferior y superior, y luego dar la demostración de la existencia del punto  $P$  que minimiza la suma.

**Problema del Punto de Fermat.** *Dado un triángulo acutángulo  $ABC$ , localizar el punto interior  $P$  cuya suma de distancias a los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  sea la más pequeña posible (Coxeter, 1969).*

#### 3.4.1. Acercamiento por ensayo y error.

Dado el triángulo acutángulo  $ABC$ , consideremos un punto interior arbitrario  $P$ ; trazamos los segmentos  $AP$ ,  $BP$  y  $CP$  (Figura 3.24). Mediante una exploración inicial podemos

darnos cuenta, incluso con lápiz y papel, que la suma de las distancias de los vértices a  $P$  varía, cuando  $P$  se mueve.

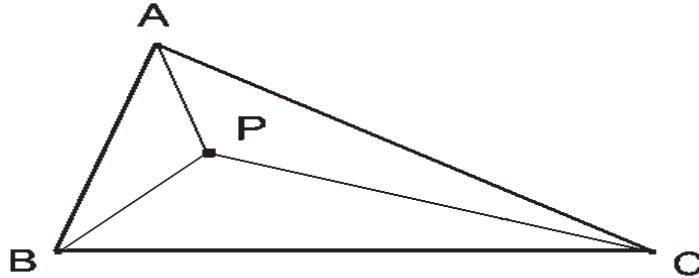


Figura 3.24: Ilustración asociada al problema.

Sea el  $\triangle ABC$  con  $AB = 3,36\text{cm}$ ;  $AC = 5,79\text{cm}$ ;  $BC = 6,32\text{cm}$ ;  $\angle BAC = 82,7^\circ$ ;  $\angle ABC = 65,4^\circ$  y  $\angle ACB = 31,8^\circ$ ; la Figura 3.25a) ilustra la forma en que se puede mantener fijo  $PB$  y hacer variar el ángulo  $BPC$ , para posiciones distintas de  $P$  (interior al  $\triangle ABC$ ), las tablas dadas en b) ( $BP = 1,67\text{cm}$ ;) y c) ( $BP = 2,35\text{cm}$ .) corresponden a  $d = AP + BP + CP$ , al variar el ángulo  $BPC$ .

De las tablas (Figura 3.25), se observa que siendo  $BP$  constante, al variar el ángulo  $BPC$  se tienen resultados diferentes para  $d$ . Podemos plantearnos preguntas como las siguientes: ¿realmente existe  $d$  mínima?, si existe, ¿cuál es el valor de  $BP$ ?, ¿cuánto vale el ángulo  $BPC$  en  $d$  mínima? Si los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados, partiendo del punto que se localice en medio de los otros dos y partiendo hacia ellos, se tiene el recorrido mínimo.

---

Estrategia heurística: toma de casos particulares.

---

Recursos matemáticos: medidas de ángulos y distancias de segmentos, uso de tablas numéricas.

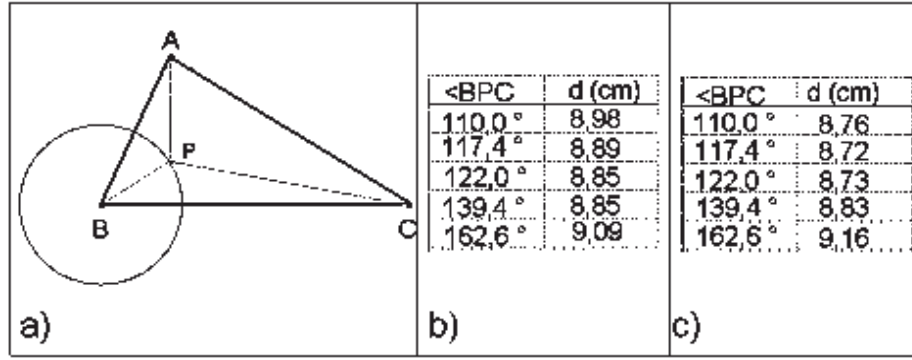


Figura 3.25: Para  $BP$  constante, se obtienen distintas  $d$  al variar el ángulo.

**Proposición.** Es posible acotar  $d$  y concluir que para cualquier punto  $P$ ,  $d$  está entre el semi perímetro y el perímetro del triángulo  $ABC$ ; es decir:

$$\frac{AB + BC + CA}{2} < AP + BP + CP < AB + BC + CA. \quad (3.14)$$

**Demostración.** La primera desigualdad de 3.14 es inmediata, se obtiene al aplicar el Teorema de la desigualdad del triángulo a:  $\triangle ABP$ ,  $\triangle BCP$  y  $\triangle CAP$ , (Figura 3.24), obteniéndose:

$$AB < AP + BP, \quad (3.15)$$

$$BC < BP + CP, \quad (3.16)$$

$$CA < CP + AP, \quad (3.17)$$

y sumando (3.15), (3.16) y (3.17):  $\frac{AB+BC+CA}{2} < AP + BP + CP.$  ◆

Para probar la segunda desigualdad, realizamos los siguientes trazos: prolonguemos  $AP$ ,  $BP$  y  $CP$  hasta cortar a los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  en los puntos  $L$ ,  $M$  y  $N$ , respectivamente (Figura 3.26).

En  $\triangle ABL$  y  $\triangle LCP$  tenemos:

$$AP + PL < AB + BL \text{ y } CP < PL + LC, \text{ respectivamente;}$$

sumando y simplificando tenemos:

$$AP + CP < AB + BC, \tag{3.18}$$

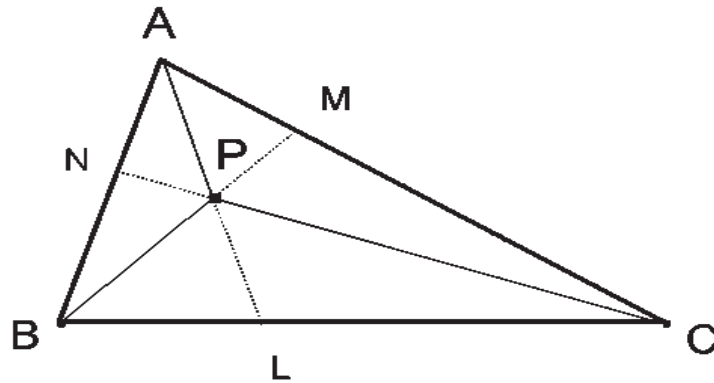


Figura 3.26: Trazos para el acotamiento superior.

En  $\triangle BCM$  y  $\triangle MAP$  tenemos:

$$BP + PM < BC + CM \text{ y } AP < PM + MA, \text{ respectivamente;}$$

sumando y simplificando tenemos:

$$BP + AP < BC + CA. \tag{3.19}$$

Considerando  $\triangle CAN$  y  $\triangle NBP$  tenemos:

$$CP + PN < CA + AN \text{ y } BP < PN + NB, \text{ respectivamente;}$$

que sumando y simplificando se tiene:

$$CP + BP < CA + AB. \tag{3.20}$$

De manera que al sumar (3.18), (3.19) y (3.20) se obtiene la desigualdad buscada:

$$AP + BP + CP < AB + BC + CA. \quad \blacklozenge$$

Veamos ahora cómo es que se obtiene el punto  $P$  que minimiza la suma  $AP + BP + CP$ .

### 3.4.2. Solución geométrica.

Considerando los triángulos  $APB$ ,  $BPC$  y  $APC$  (Figura 3.24), la rotación de uno de éstos triángulos constituye una estrategia heurística (poco usual) para resolver el problema. Rotamos el triángulo  $APB$  un ángulo de  $60^\circ$  alrededor de  $B$ , obteniendo así el triángulo  $C'P'B$  (Figura 3.27 a). Los triángulos  $\triangle ABC'$  y  $\triangle PBP'$  son equiláteros (Figura 3.27 b).

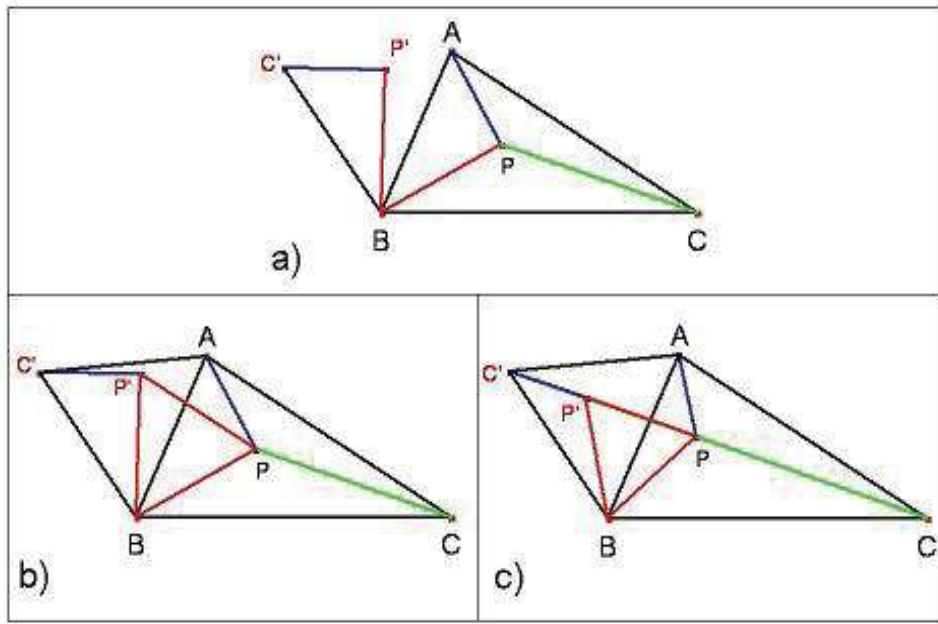


Figura 3.27: Heurística y trazos que resuelven el problema.

$$\text{Tenemos que: } AP + BP + CP = C'P' + P'P + PC \quad (3.21)$$

El segundo miembro de la igualdad 3.21 es una forma de ir de  $C'$  a  $C$ , la cual es mínima cuando  $C'$ ,  $P'$ ,  $P$  y  $C$  están alineados<sup>1</sup> (Figura 3.27 c); en cuyo caso:

---

<sup>1</sup> $C'$  y  $C$  están fijos

$$\begin{cases} \angle BPC = 180^\circ - \angle BPP' = 120^\circ, \\ \angle APB = \angle C'P'B = 180^\circ - \angle PP'B = 120^\circ, \end{cases}$$

por lo que:  $\angle APC = 120^\circ$ , (porque  $\angle APC = 360^\circ - 240^\circ$ ).

Así, el punto deseado  $P$ , para el cual  $AP + BP + CP$  es mínima, es el punto desde el cual cada uno de los lados  $AP$ ,  $BP$  y  $CP$  subtiende un ángulo de  $120^\circ$ . Este punto es la intersección de la línea  $CC'$  y el círculo que pasa por  $A$ ,  $B$  y  $C'$  (Figura 3.28). Esta solución es válida siempre y cuando el  $\triangle ABC$  no tenga un ángulo mayor a  $120^\circ$ .

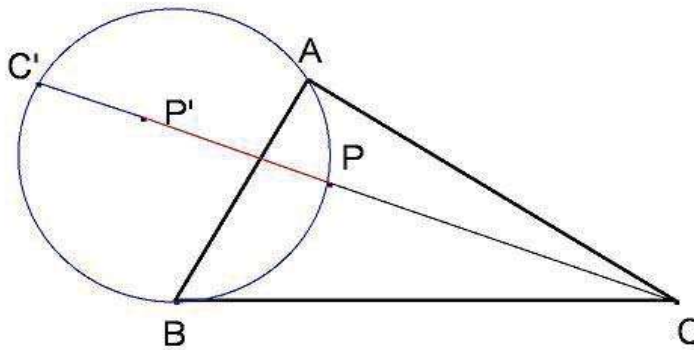


Figura 3.28: Obtención del punto  $P$  que minimiza la suma.

---

Estrategia heurística: rotación.

---

Uso de recursos: congruencia de triángulos, teorema de la desigualdad del triángulo, mediatriz de un segmento, trazado de una circunferencia.

### 3.4.3. Visualización con Cabri.

Con este software dinámico podemos obtener la gráfica del lugar geométrico correspondiente a la suma, en función, por ejemplo, de  $BP$ . La Figura 3.29 muestra la gráfica.

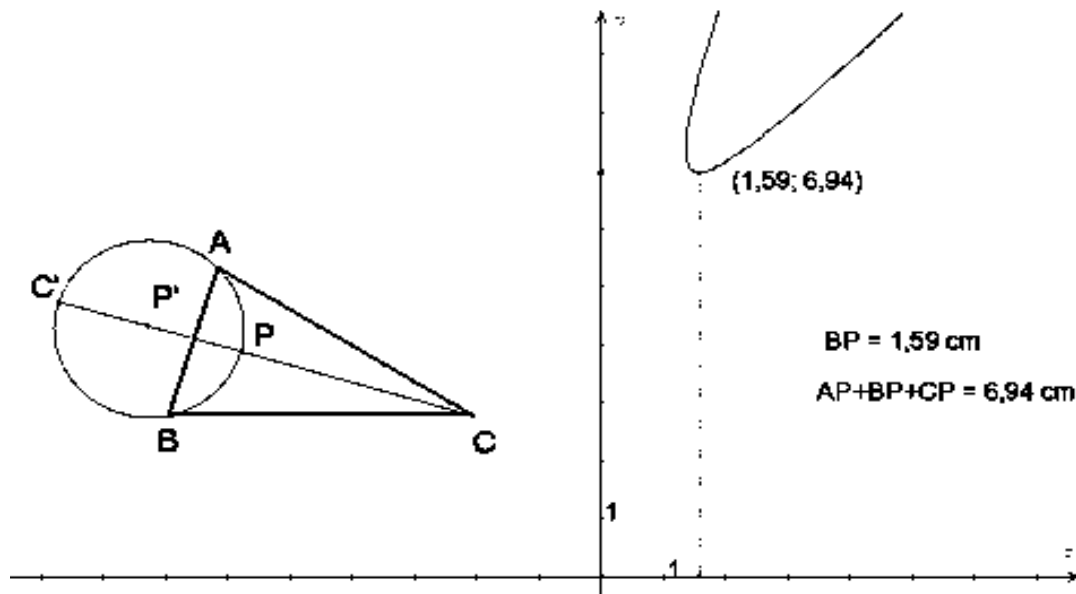


Figura 3.29: Lugar geométrico obtenido con Cabri Géomètre.

Podemos ver que para dos valores de  $BP$  diferentes, tenemos un sólo valor para  $AP + BP + CP$ ; si  $BP$  aumenta  $h$ ,  $AP + CP$  disminuye  $h$ . Pero existe un único valor para  $BP$  (además de que la posición de  $P$  es única en el interior del  $\triangle ABC$ ) que hace mínima la suma  $AP + BP + CP$ .

#### 3.4.4. Otra forma geométrica de obtener $P$ .

Además del triángulo equilátero  $ABC'$ , construido sobre  $AB$ , podemos trazar los triángulos equiláteros  $\triangle BCA'$  sobre  $BC$  y  $\triangle CAB'$  sobre  $CA$  (Figura 3.30) y luego dibujar los segmentos  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$ . Estos tres segmentos son iguales y concurren en  $P$ ; para demostrarlo, se usa congruencia de triángulos y la argumentación dada en la estrategia heurística de la rotación de  $60^\circ$ .

Así, los tres segmentos determinan el Punto de Fermat y cada uno de estos es igual a  $AP + BP + CP$ . Es decir, si trazamos triángulos equiláteros  $\triangle BCA'$ ,  $\triangle CAB'$  y  $\triangle ABC'$ , externos a los lados de cualquier triángulo  $ABC$ , los segmentos lineales  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  son iguales, concurrentes y además tienen un ángulo de  $60^\circ$  uno de otro; esto es, cada uno es bisectriz del ángulo formado por los otros dos en  $P$ .

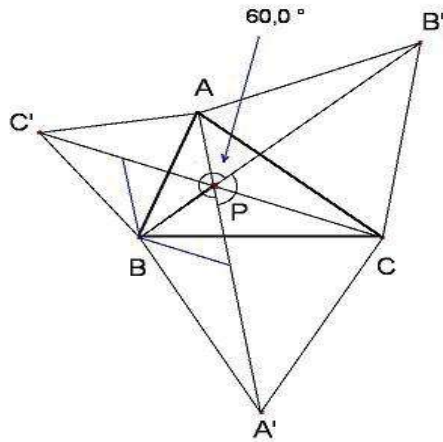


Figura 3.30: Forma alternativa de obtener  $P$ .

Este problema ya había sido abordado por otros matemáticos (Pedoe 1957, citado por Coxeter, 1969), encontrándose que el triángulo  $ABC$  puede no asumirse como acutángulo. La Figura 3.31 muestra la gráfica hecha con Cabri,  $BP$  con  $AP + BP + CP$ , cuando el ángulo en  $A$  es de  $120^\circ$ .

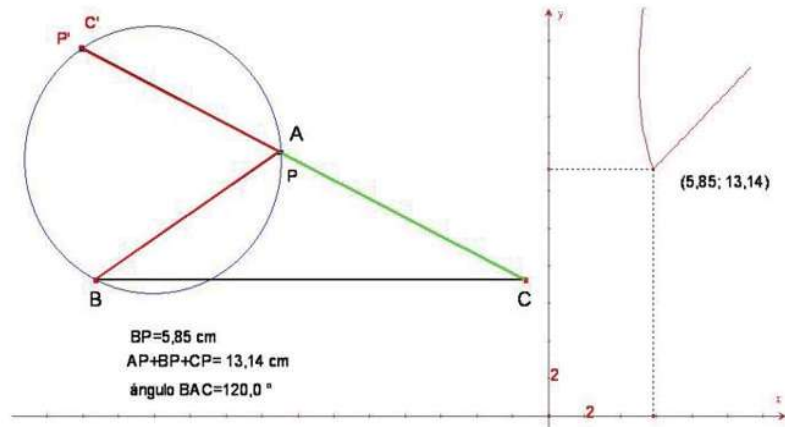


Figura 3.31: Lugar geométrico cuando el ángulo obtuso es de  $120^\circ$ .

Si  $\triangle ABC$  posee un ángulo de medida mayor o igual a  $120^\circ$ , la solución es más elaborada, pero puede demostrarse que  $P$  coincide con el vértice del ángulo mayor; Cabri permite visualizar que, efectivamente, así es (Figura 3.31). Analicemos esta situación.

**Proposición.** Si se tiene un triángulo con un ángulo de medida mayor o igual que  $120^\circ$ , entonces el punto  $P$ , que hace mínima la suma de distancias de  $P$  a los vértices del triángulo, coincide con el vértice del ángulo mayor.

**Demostración.** Dado el  $\triangle ABC$  con  $\angle ABC = \gamma \geq 120^\circ$ , y un punto  $P$  en el plano, queremos probar que:  $AB + BC < AP + BP + CP$ .

Llamemos  $\alpha = \angle ABP$  y  $\beta = \angle CBP$ .

Tenemos tres casos:  $\left\{ \begin{array}{l} 1. P \text{ está en el interior del ángulo } ABC = \gamma, \\ 2. P \text{ está en el interior del ángulo adyacente a } \gamma, \\ 3. P \text{ está en el interior del ángulo opuesto a } \gamma. \end{array} \right.$

Caso 1.  $P$  está en el interior del  $\angle ABC = \gamma$  (Figura 3.32).

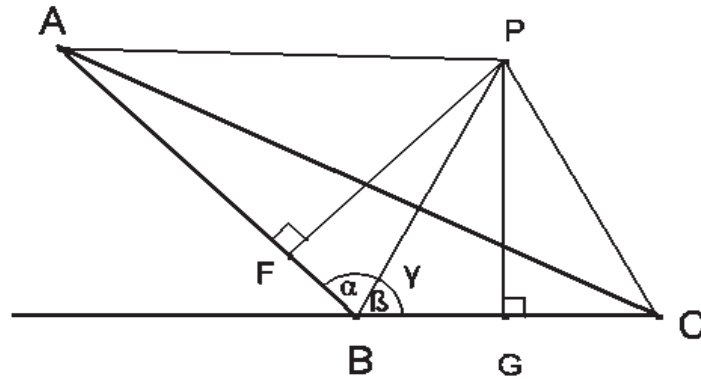


Figura 3.32:  $P$  está en el interior del ángulo  $ABC = \gamma$ .

Tenemos que  $\angle ABP + \angle CBP = \alpha + \beta = \gamma$ . Se Trazan perpendiculares desde  $P$  hasta  $AB$  y  $BC$ , siendo  $F$  y  $G$  sus intersecciones respectivas. Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} FB = x = BP \cos \alpha \\ BG = y = BP \cos \beta \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

Tenemos que:  $AB + BC = AF + GC + x + y$  (3.23)

porque  $AB = AF + x$  y  $BC = GC + y$ .

De (3.22) tenemos:

$$\begin{aligned} x + y &= BP \cos \alpha + BP \cos \beta = BP(\cos \alpha + \cos \beta) \\ &= 2BP \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &\leq 2BP \cos(60^\circ) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = BP \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \leq BP; \end{aligned}$$

esto, considerando que  $120^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$  y que  $\alpha + \beta = \gamma$ , entonces  $60^\circ \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \leq 90^\circ$ , por lo que  $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ . También considerando que  $-1 \leq \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \leq 1$ .

Sustituyendo en (3.23) que  $x + y \leq BP$ :

$$AB + BC = AF + GC + x + y \leq AF + GC + BP.$$

Finalmente, como  $\triangle AFP$  y  $\triangle CGP$  son triángulos rectángulos, los catetos  $AF$  y  $GC$  son menores que las hipotenusas  $AP$  y  $CP$ , respectivamente. De ahí se tiene que:

$$AB + BC < AP + BP + CP. \quad \blacklozenge$$

Caso 2.  $P$  está en el interior del ángulo adyacente a  $\gamma$  (Figura 3.33).

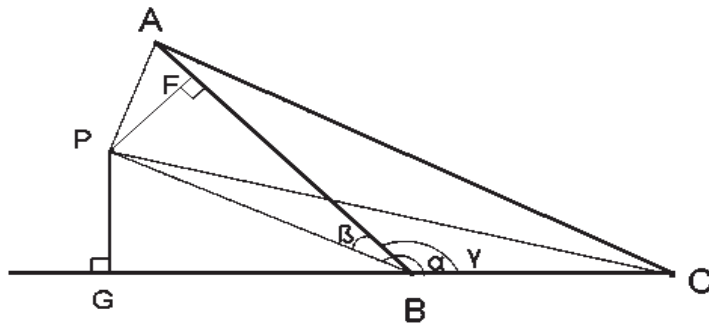


Figura 3.33:  $P$  está en el ángulo adyacente a  $\gamma$ .

Supongamos que  $\angle CBP - \angle ABP = \alpha - \beta = \gamma$ .

Trazamos perpendiculares desde  $P$  hasta  $AB$  y la prolongación de  $CB$ ; sean  $F$  y  $G$  sus intersecciones, respectivamente. Como  $\triangle BFP$  y  $\triangle BGP$  son triángulos rectángulos, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} FB = x &= BP \cos \beta \\ GB = y &= BP \cos(180 - \alpha) = -BP \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Como  $P$  está en el interior del ángulo adyacente a  $\gamma$  y  $120^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$ , entonces:  $0 \leq \beta \leq 60^\circ$  y  $\cos \beta > 0$ ; además como  $120^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \Rightarrow -\cos \alpha > 0$ .

Consideremos también que:

$$AB + BC = AF + GC + x - y \quad (3.25)$$

porque  $AB = AF + x$  y  $CB = CG - y$ .

De (3.24) tenemos que:

$$\begin{aligned} x - y &= BP \cos \beta - [-BP \cos \alpha] = BP(\cos \beta + \cos \alpha) \\ &= 2BP \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 2BP \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\gamma}{2} \right) \\ &\leq 2BP \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos(60^\circ) = BP \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \leq BP; \end{aligned}$$

porque  $60^\circ \leq \frac{\gamma}{2} \leq 90^\circ$ , y  $\cos \frac{\gamma}{2} \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

Sustituyendo en (3.25) que  $x - y \leq BP$ :

$$AB + BC = AF + GC + x - y \leq AF + GC + BP.$$

Y ahora considerando que en los triángulos rectángulos  $\triangle PFA$  y  $\triangle PGC$  se cumple que:

$$\begin{cases} AF < AP \\ GC < CP \end{cases}$$

por lo que tenemos la desigualdad buscada:  $AB + BC < AP + BP + CP$ .  $\blacklozenge$

Caso 3.  $P$  está en el interior del ángulo opuesto a  $\gamma$  (Figura 3.34).

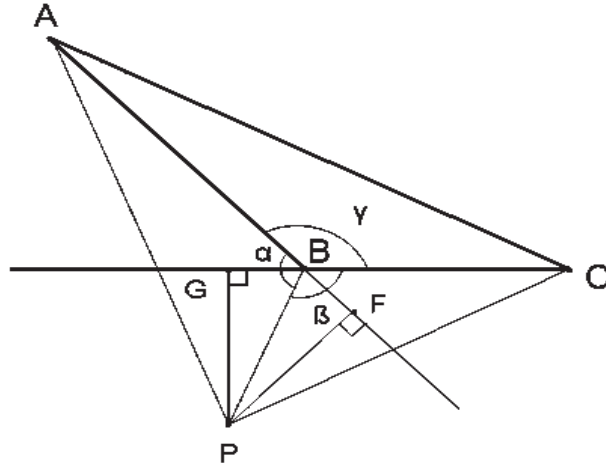


Figura 3.34:  $P$  está en el ángulo opuesto a  $\gamma$ .

Siendo  $\alpha = \angle ABP$  y  $\beta = \angle CBP$ , tenemos que  $\alpha + \beta = 360^\circ - \gamma$ .

Siendo  $F$  y  $G$  los puntos de los pies de las perpendiculares trazadas desde  $P$  a las prolongaciones de  $AB$  y  $CB$ , respectivamente; puede ocurrir que:

a)  $180^\circ < \gamma + \alpha \leq 270^\circ$ ; ó

b)  $270^\circ < \gamma + \alpha \leq 360^\circ - \beta$ .

Aquí, consideramos el sub caso a), ya que el otro es similar.

**Demostración.** a)  $180^\circ < \gamma + \alpha \leq 270^\circ$ .

Sean  $\psi = \angle GBP$  y  $\varphi = \angle PBF$ , entonces:

$$\psi = \gamma + \alpha - 180^\circ, \tag{3.26}$$

de (3.26) se tiene que  $\cos \psi = -\cos(\gamma + \alpha)$ ,

pero  $\alpha + \beta = 360^\circ - \gamma \Rightarrow \gamma + \alpha = 360^\circ - \beta \Rightarrow \cos(\gamma + \alpha) = \cos(360^\circ - \beta)$ ,

de ahí que  $\cos \psi = -\cos(\gamma + \alpha) = -\cos(360^\circ - \beta) = -\cos \beta$ . Así:

$$GB = y = -BP \cos \beta \quad (3.27)$$

Análogamente,  $\varphi = \beta - \angle CBF$ ; pero  $\angle CBF = \angle GBA$ , por ser opuestos por el vértice, y como  $\angle GBA = \alpha - \psi$ , entonces:

$$\varphi = \beta - (\alpha - \psi) = \beta - \alpha + \psi. \quad (3.28)$$

Sustituyendo (3.26) en (3.28), resulta:

$$\varphi = \beta - \alpha + \gamma + \alpha - 180^\circ = \beta + \gamma - 180^\circ,$$

por lo que:  $\cos \varphi = \cos(\beta + \gamma - 180^\circ) = -\cos(\beta + \gamma)$ ,

de  $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ , resulta:  $\beta + \gamma = 360^\circ - \alpha$

por lo que:  $\cos \varphi = -\cos(360^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .

Finalmente:

$$BF = x = -BP \cos \alpha. \quad (3.29)$$

También tenemos que:

$$AB + BC = AF + GC - (x + y) \quad (3.30)$$

porque  $AB = AF - x$  y  $CB = CG - y$ .

Ahora bien, de (3.27) y (3.29) tenemos que:

$$\begin{aligned} -(x + y) &= BP \cos \alpha + BP \cos \beta = BP(\cos \alpha + \cos \beta) \\ &= 2BP \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 2BP \cos \left( \frac{360^\circ - \gamma}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= 2BP \cos \left( 180^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = -2BP \cos \left( \frac{\gamma}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right). \end{aligned}$$

Pero  $120^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$ , entonces  $60^\circ \leq \frac{\gamma}{2} \leq 90^\circ$ , y  $\cos \frac{\gamma}{2} \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ . También tomando en cuenta que  $-1 \leq \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \leq 1$ , tenemos:

$$\begin{aligned} -(x + y) &= -2BP \cos \left( \frac{\gamma}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \leq -2BP \cos(60^\circ) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= -BP \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \leq BP, \end{aligned}$$

sustituyendo en (3.30) que  $-(x + y) \leq BP$ :

$$AB + BC = AF + GC - (x+y)y \leq AF + GC + BP,$$

y en los triángulos rectángulos  $\triangle PFA$  y  $\triangle PGC$  tenemos que:

$$\begin{cases} AF < AP \\ GC < CP \end{cases}$$

por lo que tenemos la desigualdad:  $AB + BC < AP + BP + CP$ ,

como queríamos demostrar. ◆

---

Estrategias heurísticas: hacer un dibujo, dividir el problema en sub problemas.

---

Uso de recursos: trazar perpendiculares a un segmento, funciones trigonométricas, triángulo rectángulo, identidades trigonométricas, sustituciones.

El siguiente problema corresponde al tipo de problemas clásicos de construcción con regla y compás, ideado por Euclides, en el que el respeto irrestricto en el uso de los instrumentos de trazo, la regla y el compás, es fundamental.

### 3.5. Problema de la construcción de una circunferencia por dos puntos y tangente a una recta

**Introducción.** La solución del problema y su argumentación puede hacerse, como se ha hecho durante siglos, con lápiz y papel; una construcción con Cabri nos permitirá hacer variaciones múltiples en la posición de los elementos del problema y visualizar dinámicamente la solución.

Señalemos primero cómo se usa la regla y el compás. La regla es el instrumento que permite trazar rectas y segmentos por uno o dos puntos dados, lo cual está justificado en el Primer y Segundo postulados de Euclides. El compás es el instrumento que ayuda a trazar circunferencias o arcos de circunferencia a partir de un punto y un radio dados, de acuerdo a lo establecido en el Tercer postulado. Los ángulos se van a comparar con el ángulo recto como una métrica establecida en el Cuarto postulado; y finalmente, el

Quinto postulado establece la posibilidad de trazar una única paralela a una recta dada por un punto fuera de ella. Éstas son las reglas de uso de los instrumentos euclidianos.

El problema del trazo de tangentes a distintas curvas ha llamado la atención de muchos matemáticos, por ejemplo a Arquímedes de Siracusa (siglo III a.C.), Pierre de Fermat (siglo XVII). Enseguida tratamos un problema relacionado con la tangente a una circunferencia.

**Problema.** *Dada una recta  $L$  y dos puntos  $A$  y  $B$  que no pertenecen a  $L$ , trazar una circunferencia que pasa por  $A$  y  $B$  tangente a  $L$  (Figura 3.35).*

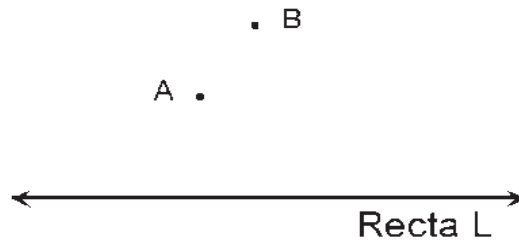


Figura 3.35: Ilustración gráfica del problema.

**Hacer un dibujo.** Supongamos que existe la circunferencia que pasa por  $A$  y  $B$  y es tangente a  $L$  en  $Q$  (Figura 3.36). El Teorema de la potencia de un punto establece que:

$$(PA)(PB) = (PQ)^2 \quad (3.31)$$

La ecuación (3.31) es equivalente a:

$$\frac{PA}{PQ} = \frac{PQ}{PB},$$

lo cual es la media proporcional de los segmentos  $PA$  y  $PB$ . Esto nos da idea de cómo encontrar la circunferencia que pasa por  $A$  y  $B$ , tangente a  $L$ .

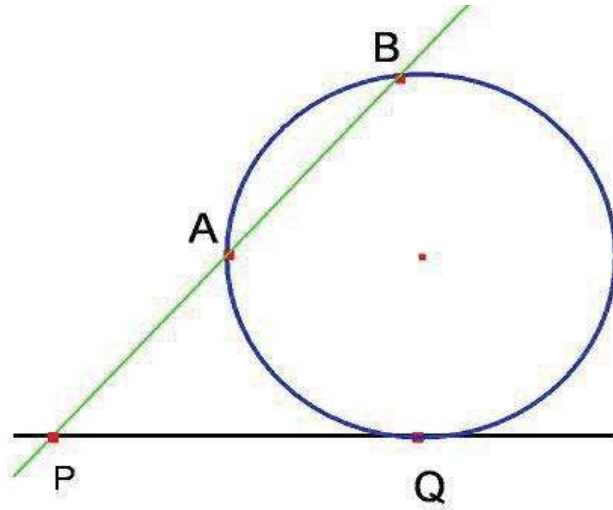


Figura 3.36: Trazos y aplicación del Teorema de la potencia de un punto.

### 3.5.1. Solución con la media proporcional.

Dada una recta  $L$  y dos puntos  $A, B$  que no pertenecen a  $L$ , tracemos la recta  $L_1$  que pasa por  $A$  y  $B$ . Sea  $P$  la intersección de  $L$  con  $L_1$  (Figura 3.36). Ahora tracemos la mediatriz de  $AB$ ; localicemos  $P'$ , el simétrico de  $P$  respecto a la mediatriz de  $AB$  y tracemos la semi circunferencia con diámetro  $PP'$  (Figura 3.37).

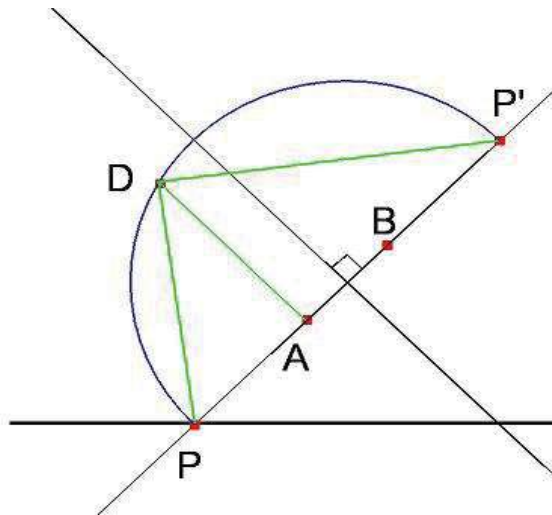


Figura 3.37: Determinación de la media proporcional.

Ahora trazamos una perpendicular a  $PP'$  por  $A$ , la cual corta en  $D$  a la semi circunferencia de diámetro  $PP'$ . Los triángulos rectángulos  $ADP$  y  $AP'D$  son semejantes (Figura 3.37), por lo que:

$$\frac{AP}{AD} = \frac{AD}{AP'} \quad \text{pero } AP' = PB, \quad \Rightarrow \quad \frac{AP}{AD} = \frac{AD}{PB}$$

$$\text{De donde} \quad (PA)(PB) = (AD)^2.$$

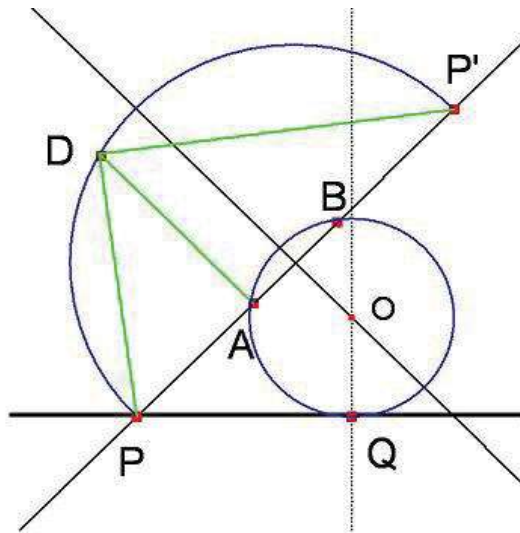


Figura 3.38: Solución al problema usando media proporcional.

Entonces podemos trasladar el segmento  $AD$  a la recta  $L$ . Si  $PQ$  es congruente con  $AD$  (Figura 3.38), se cumple que:

$$(PA)(PB) = (PQ)^2;$$

por lo que tenemos una circunferencia  $C_1$  que pasa por  $A$  y  $B$  y es tangente a  $L$  en  $Q$ .

El centro  $O$  de la circunferencia  $C_1$  es la intersección de la mediatriz de  $AB$  y la perpendicular a  $L$  por  $Q$ , debido a que  $AB$  es una cuerda <sup>2</sup> de  $C_1$  y considerando también que la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.

<sup>2</sup>la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia



En este caso tenemos que la mediatriz de  $AB$  es perpendicular a  $L$ , digamos en  $Q$ , si trazamos el segmento  $QA$ , su mediatriz pasa por el centro de  $C$ . Tenemos que la solución es única.

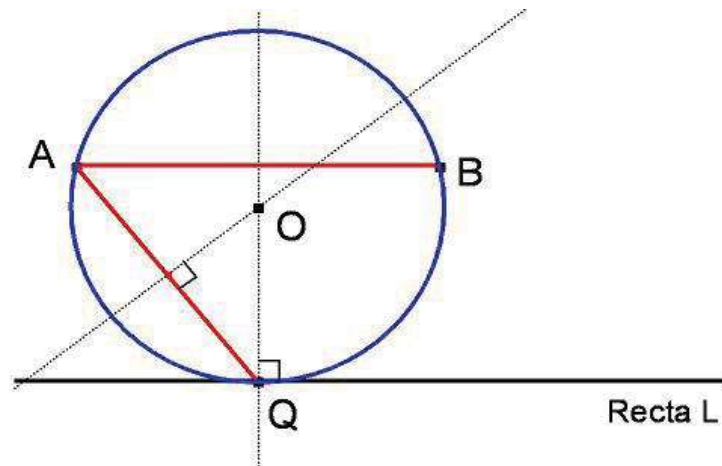


Figura 3.40: Solución única cuando  $A$  y  $B$  están a la misma distancia de  $L$ .

Caso b). Tenemos que la recta  $L_2$  que pasa por  $A$  y  $B$  es perpendicular a  $L$ ; sea  $P$  el punto de intersección de  $L_2$  y  $L$ . Procedamos a encontrar la media proporcional  $AD$  de  $AP$  y  $BP$ , como en la situación inicial, y traslademos  $AD$  a la derecha e izquierda de  $P$ , determinando los puntos  $Q$  y  $Q'$ , respectivamente, como se muestra en la Figura 3.41; en este caso también existen dos soluciones.

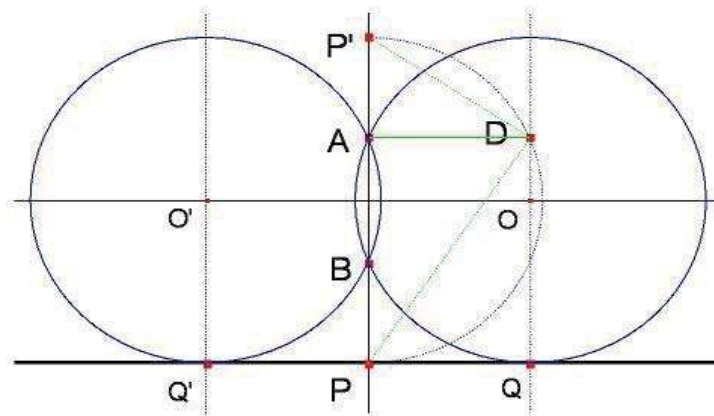


Figura 3.41: Soluciones cuando  $AB$  es perpendicular a  $L$ .

### 3.5.2. Otra forma de trazar la circunferencia buscada.

Tracemos la recta que pasa por  $A$  y  $B$ , la cual se interseca con  $L$  en  $P$  (Figura 3.42). Sea  $M$  el punto medio de  $AB$ ; tracemos dos circunferencias: una de diámetro  $PM$  y otra de diámetro  $AB$ ; éstas se cortan en  $T$  y  $U$  (Figura 3.42). Además, también trazamos la circunferencia con centro en  $P$  y radio  $PT$ , la cual se interseca con  $L$  en los puntos  $Q$  y  $R$ .

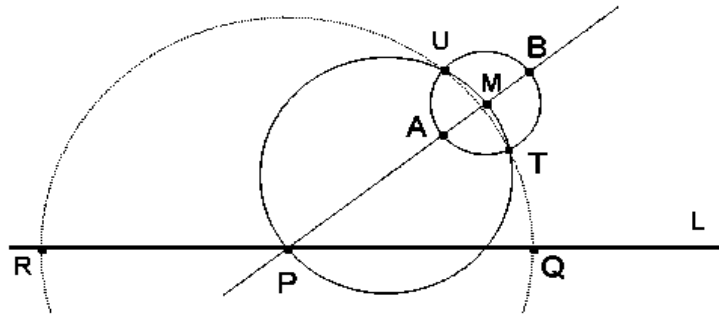


Figura 3.42: Trazos para encontrar la circunferencia pedida.

Como  $AB$  es una cuerda de la circunferencia que buscamos y la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia, tracemos la mediatriz de  $AB$ . Tomando en cuenta que la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto y como queremos que la circunferencia sea tangente a  $L$ , trazamos la perpendicular a  $L$  por  $Q$ . Estas rectas (la mediatriz y la perpendicular) se cortan en  $O$  como se muestra en la Figura 3.43; entonces  $O$  es el centro de la circunferencia buscada.

Demostremos que, efectivamente, esta circunferencia es la solución.

Para simplificar escritura, denotaremos por  $C(O, r)$  a la circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ . Sea  $N$  punto medio del segmento  $PM$ . Como  $PM$  es diámetro de  $C(N, NM)$  y  $T$  un punto de ella (Figura 3.42), entonces el  $\angle PTM$  es recto y  $PT$  es tangente a  $C(M, MT)$ . Por el Teorema de la potencia de un punto tenemos que:

$$PA \bullet PB = (PT)^2 = PA \bullet PB = (PQ)^2,$$

porque  $PT = PQ$ . Aplicando el recíproco del teorema de la potencia de un punto, tenemos que  $PQ$  es tangente a  $C(O, OQ)$  que pasa por  $A$  y  $B$ , entonces esta circunferencia cumple con lo pedido, como queríamos justificar.

---

Estrategia heurística: hacer un dibujo respetando las normas para el uso de la regla y el compás.

---

Recursos utilizados: punto medio, propiedades de la circunferencia: la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia, la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia; trazar una perpendicular a una recta, Teorema de la potencia de un punto.

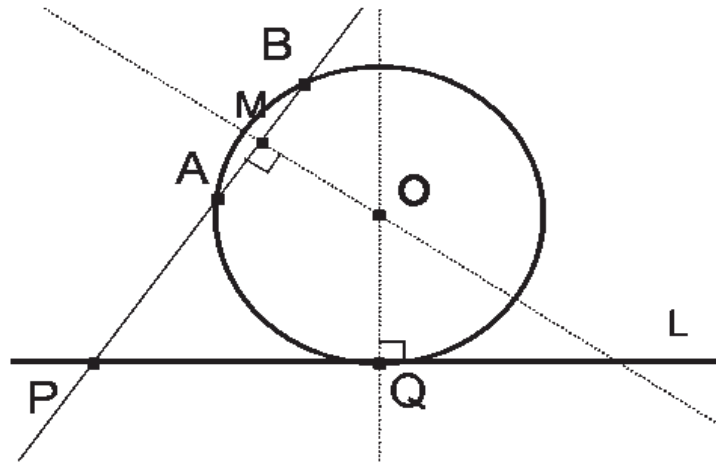


Figura 3.43: Circunferencia por  $A$  y  $B$  que es tangente a  $L$ .

Las Figuras 3.42 y 3.43 nos permiten concluir que cuando  $A$  y  $B$  no están a la misma distancia de  $L$ , existen dos posibles circunferencias: La de centro  $O$  con punto de tangencia en  $Q$ ; y la de centro en  $O'$  con punto de tangencia en  $R$ ,  $R$  es el simétrico de  $Q$  respecto a  $P$ , como se muestra en la Figura 3.44.

El último problema que abordaremos en este trabajo corresponde a la determinación del lugar geométrico de un punto que cumple ciertas condiciones; para resolverlo, requerimos de uno de los conceptos fundamentales de la Geometría moderna: la homotecia.

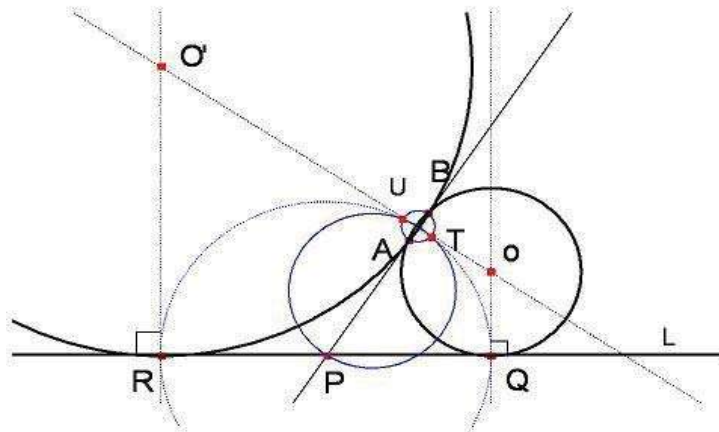


Figura 3.44: Hay dos soluciones cuando  $A$  y  $B$  no están a la misma distancia de  $L$ .

### 3.6. Lugar geométrico determinado por la bisectriz del ángulo y el lado opuesto en un triángulo

**Introducción.** Un lugar geométrico es el conjunto de puntos que satisfacen una condición dada. Dos lugares geométricos fundamentales en la geometría son la recta y la circunferencia. Podemos decir que una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella; pero una definición precisa de recta, sólo es posible a partir de la descripción de las características de otros elementos similares. La circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ , se define como el lugar geométrico de los puntos  $P$  cuya distancia a  $O$  es igual a  $r$ .

El estudio de los lugares geométricos corresponde a un contenido matemático que recibe poca atención en la educación escolar debido, quizás, a dificultades derivadas de la interpretación y construcción.

Antes de plantear el problema, daremos una introducción al tema de la homotecia; para lo cual se requiere de una caracterización de la semejanza.

En general, dos polígonos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  y  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  son semejantes si se cumple que:

$$\angle A_1 = \angle B_1, \angle A_2 = \angle B_2, \dots, \angle A_n = \angle B_n; \text{ y}$$

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = k,$$

donde  $k$  es la razón de semejanza.

Se dice que los polígonos son directamente semejantes si los vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n$  y  $B_1, B_2, \dots, B_n$  están colocados en un mismo sentido; en el otro caso, son inversamente semejantes.

**Homotecia.** Si desde un punto arbitrario  $O$  se traza un haz cuyos rayos pasan por los vértices del polígono  $A_1, A_2, \dots, A_n$  y luego se localizan puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sobre  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ , respectivamente, tales que:

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_3}{OB_3} = \dots = \frac{OA_n}{OB_n} = k,$$

entonces los polígonos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  y  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  son homotéticos (o similares); el punto  $O$  es el centro de homotecia (o de similitud) y  $k$  es la razón de homotecia (o de similitud). Si  $k = 1$  los polígonos son congruentes, están del mismo lado de  $O$  y coinciden; si no coinciden, entonces  $O$  es el punto al infinito. Si  $k = -1$  los polígonos son simétricos respecto al centro de homotecia (simetría radial).

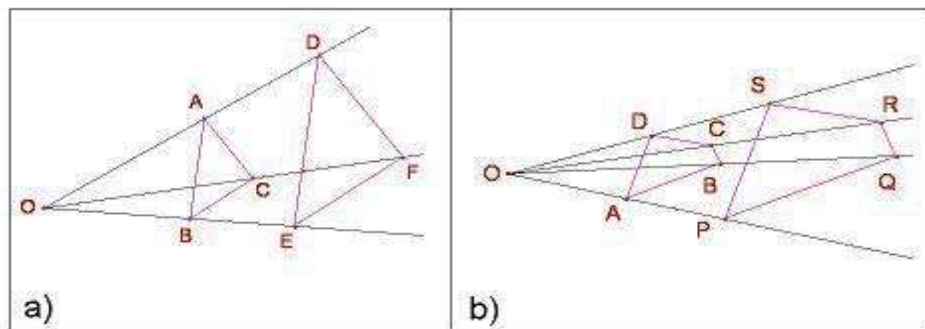


Figura 3.45: Ejemplos de polígonos homotéticos.

De esta definición se tiene que dos polígonos son homotéticos si: i) son semejantes; y ii) las rectas que unen vértices correspondientes son concurrentes. Además, puede demostrarse que la razón de homotecia es la razón de semejanza de los polígonos. La Figura

3.45 muestra polígonos homotéticos: el  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ ; y los cuadriláteros  $ABCD$  y  $PQRS$ .

Como consecuencia, tenemos que todos los polígonos homotéticos son semejantes, sus lados correspondientes son paralelos y la razón de semejanza es la razón de homotecia; sin embargo, no todos los polígonos semejantes son homotéticos, pues las rectas que unen vértices correspondientes pueden no ser concurrentes.

Si los vértices correspondientes de los polígonos están del mismo lado con respecto al centro de homotecia  $O$ , como en los ejemplos de la Figura 3.45, se dice que los polígonos homotéticos están semejantemente colocados; en cambio, si  $O$  estuviera entre los vértices correspondientes, tendríamos polígonos homotéticos inversamente semejantes. Esto se distingue por la anotación de un signo negativo al establecer la razón de homotecia.

La manera usual de construir polígonos homotéticos se deriva directamente de la definición, pero ¿esta manera de construir figuras homotéticas es exclusiva de los polígonos? La respuesta es negativa. Todos los objetos reproducidos a escala y colocados convenientemente, son ejemplos de la homotecia. También, las circunferencias (o esferas) son ejemplos de figuras que, en general, son homotéticas.

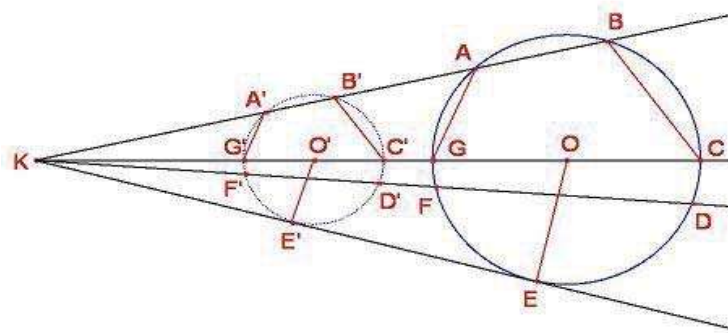


Figura 3.46: Las circunferencias son homotéticas.

Por su importancia y sencillez, analicemos el caso de las circunferencias. Desde un punto  $K$  tracemos varias secantes a una circunferencia dada, las cuales determinan las cuerdas  $AB$ ,  $GC$ ,  $FD$ , y el caso especial en que la recta toca a  $C(O, r)$  en el punto  $E$ ; sobre cada recta tomemos puntos tales que dividan a cada segmento secante en la misma razón, digamos  $\frac{1}{2}$ , como se muestra en la Figura 3.46. Entonces,  $A'$  es punto medio de  $KA$ ,

$B'$  es punto medio de  $KB$ ,  $O'$  es punto medio de  $KO$ , etc.; finalmente, tracemos los segmentos  $BC$ ,  $AG$ ,  $OE$  y los correspondientes  $B'C'$ ,  $A'G'$  y  $O'E'$ , respectivamente.

Los siguientes resultados son inmediatos:

- a) Por construcción, los segmentos  $A'B'$ ,  $G'C'$  y  $F'D'$  miden la mitad de las cuerdas  $AB$ ,  $GC$  y  $FD$ , respectivamente.
- b) Por el teorema de semejanza LAL,  $\triangle KBC \sim \triangle KB'C'$  con razón de semejanza 2, entonces  $BC = 2B'C'$  y  $BC \parallel B'C'$ ; también  $\triangle KAG \sim \triangle KA'G'$ , entonces  $AG = 2A'G'$  y  $AG \parallel A'G'$  y  $\triangle KOE \sim \triangle KO'E'$ , entonces  $OE = 2O'E'$  y  $OE \parallel O'E'$ .
- c) De la igualdad de los ángulos correspondientes en las relaciones de semejanza  $\triangle KBC \sim \triangle KB'C'$  y  $\triangle KAG \sim \triangle KA'G'$ , se tiene que los ángulos opuestos en el cuadrilátero  $A'B'C'G'$  son suplementarios, por lo que  $A'B'C'G'$  es un cuadrilátero cíclico (igual pudimos haber trabajado con las secantes  $KA$  y  $KD$ ).
- d) Así, el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos secantes trazados desde  $K$  a  $\mathbf{C}(O, r)$ , es una circunferencia de centro  $O'$  y radio  $r' = O'E'$  y se dice que son circunferencias homotéticas, con  $K$  su centro de homotecia. Esto se escribe así:

$$\frac{KA'}{KA} = \frac{KB'}{KB} = \frac{KC'}{KC} = \frac{KD'}{KD} = \frac{KE'}{KE} = \frac{KF'}{KF} = \frac{KG'}{KG} = \frac{r}{r'} = \frac{1}{2}, \quad (3.32)$$

Por definición, los homólogos de los puntos  $B$ ,  $C$ ,  $D$  son  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ , respectivamente. Mientras que los antihomólogos de los puntos  $F, G, A$  son  $D'$ ,  $C'$ ,  $B'$ , respectivamente.

Si ahora, en dos circunferencias de centros  $O$  y  $O'$  trazamos los diámetros paralelos  $AB$  y  $CD$ , las rectas  $AC$  y  $OO'$  se cortan en un centro de homotecia ( $K$ ); y las rectas  $BC$  y  $OO'$  se cortan en el otro centro de homotecia<sup>3</sup> ( $H$ ), como se muestra en la Figura 3.47. Demostremos que las circunferencias de centros  $O$  y  $O'$  son homotéticas desde  $H$  y  $K$ ; además de otras propiedades que enlistamos a continuación:

- a) Por el teorema de semejanza AAA, tenemos que  $\triangle HOB \sim \triangle HO'C$ , (inversamente semejantes), es decir:

$$\frac{HO}{HO'} = \frac{OB}{O'C} = \frac{BH}{CH} \quad (3.33)$$

---

<sup>3</sup>que está entre los centros  $O$  y  $O'$

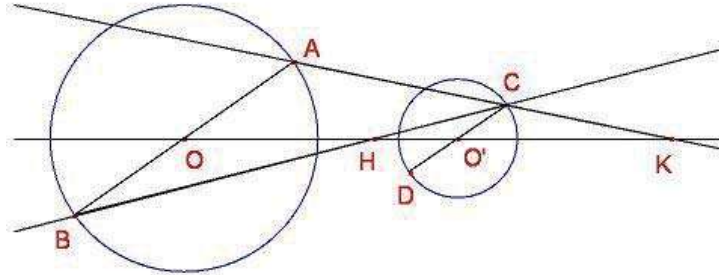


Figura 3.47: Las circunferencias homotéticas tienen dos centros de homotecia.

Pero esto es para cualquier par de diámetros paralelos, entonces  $H$  es centro de homotecia.

- b) Si relacionamos (3.32) y (3.33) (haciendo las adecuaciones en la nomenclatura), obtenemos:  $\frac{KO}{KO'} = -\frac{HO}{HO'}$ ; que puede ser expresada como:

$$\frac{OH}{HO'} = -\frac{OK}{KO'}.$$

Esto significa  $H$  y  $K$  dividen interna y externamente a  $OO'$  en la misma razón; por lo tanto, son centros de homotecia.

- c) La circunferencia de diámetro  $HK$  se llama *Circunferencia de similitud* de  $C(O, r)$  y  $C(O', r')$  y puede probarse, con el teorema de la bisectriz interna y externa de un ángulo en un triángulo cualquiera, que es el lugar geométrico de los puntos tales que: i) la razón de sus distancias a los centros  $O$  y  $O'$  es igual a la razón entre los radios; y ii) se subtienden ángulos iguales a  $C(O, r)$  y  $C(O', r')$ , como se muestra en la Figura 3.48.

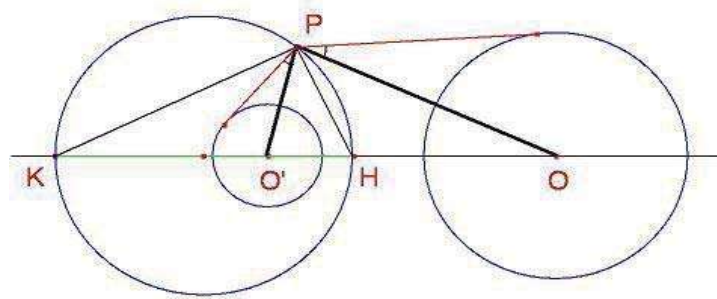


Figura 3.48: Propiedades de la Circunferencia de similitud.

Pasemos pues, al último problema que desarrollamos en este trabajo.

**Problema.** *Dado un triángulo  $ABC$ , mantenemos  $AB$  fijo y hacemos variar  $C$  sobre una circunferencia de radio  $AC$ . Para cada posición de  $C$ , trazamos la bisectriz de  $\angle BAC$  que interseca al segmento  $BC$  en  $L$ , ¿cuál es el lugar geométrico del conjunto de puntos  $L$ ?*

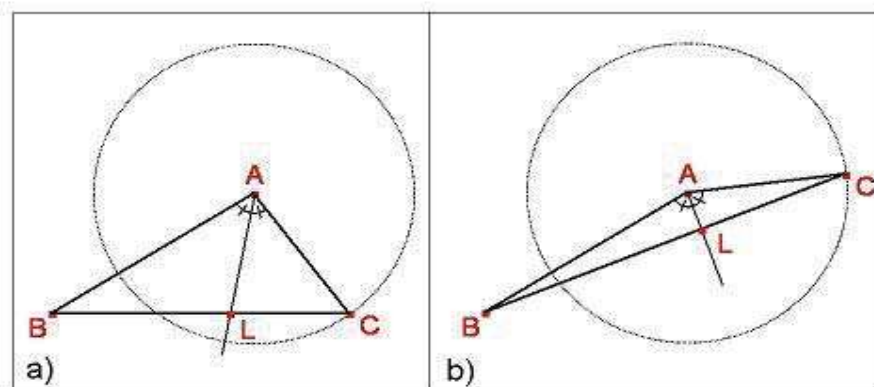


Figura 3.49: Posiciones diferentes de  $C$  en  $C(A, AC)$ .

### 3.6.1. Tomando casos particulares.

La consideración de algunas posiciones distintas de  $C$  en  $\mathbf{C}(A, AC)$  permitirá obtener algunas ideas iniciales sobre lo que se pide. Sea el  $\triangle ABC$  dado, trazamos  $\mathbf{C}(A, AC)$  sobre la cual vamos a hacer variar la posición de  $C$ . La Figura 3.49 muestra dos posiciones diferentes de  $C$  con la bisectriz del  $\angle BAC$  trazada. Aunque estos casos podemos realizarlos con lápiz y papel, cuando se incrementa el número, el auxilio del software será fundamental para visualizar la situación, como lo plantea Presmeg (2006).

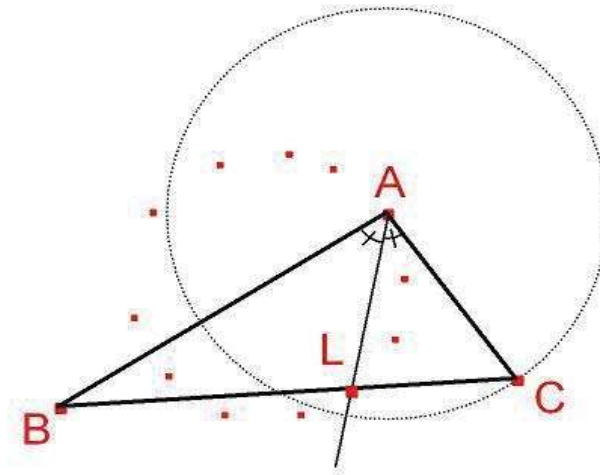


Figura 3.50: Posiciones de  $L$  para distintas posiciones de  $C$ .

Observemos que si la posición de  $C$  cambia en  $\mathbf{C}(A, AC)$ , la posición de  $L$  también cambia. La Figura 3.50 muestra algunas marcas de puntos  $L$  para diferentes posiciones de  $C$ . Observando el resultado de estos casos particulares, es plausible proponer como conjetura que el lugar geométrico que determina  $L$  es una circunferencia que pasa por  $A$ .

---

Estrategia heurística: toma de casos particulares.

---

| Uso de recursos: trazado de la bisectriz de un ángulo, intersección de rectas. |

**Análisis de casos extremos.** Cuando  $C$  esté entre  $A$  y  $B$ , el  $\angle BAC = 0^\circ$ , el punto  $L$  estará también entre  $A$  y  $B$ , mientras que si  $C$  es tal que  $A$  está entre  $B$  y  $C$ , dicho ángulo será de  $180^\circ$  y el punto  $L$  coincide con  $A$  (Figura 3.51). ¿Cómo interpretar en

estos casos la bisectriz y visualizar el punto de intersección  $L$ ? Nuevamente, el auxilio del software dinámico nos permitirá visualizar la solución y será justificada, plenamente, por el uso del recurso del tema de homotecia.

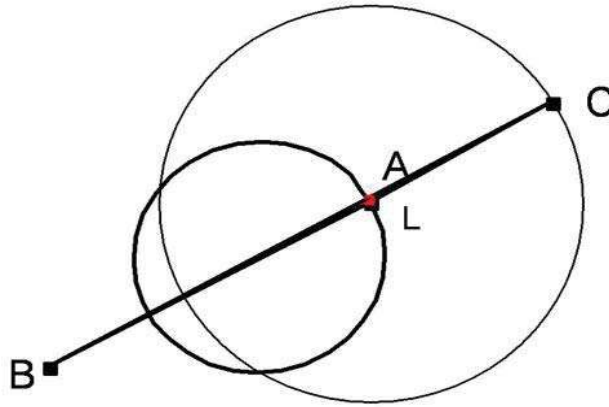


Figura 3.51: Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados.

### 3.6.2. Solución geométrica.

Para demostrar que el lugar geométrico que determina  $L$  es una circunferencia, es necesario demostrar dos cosas:

- a) Cualquier punto  $L$  que esté en la intersección de  $BC$  con la bisectriz de  $\angle BAC$ , está en una circunferencia,
- b) Cualquier punto  $L$  que esté en la circunferencia propuesta, satisface la condición:  $L$  está en la intersección de  $BC$  y la bisectriz de  $\angle BAC$ .

Para demostrar a), utilizaremos la relación que existe entre la bisectriz del ángulo de un triángulo y los segmentos en el lado opuesto de ese triángulo. Es decir, si tenemos el  $\triangle ABC$  y  $AL$  es la bisectriz del  $\angle BAC$  (Figura 3.52), entonces se cumple que:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}.$$

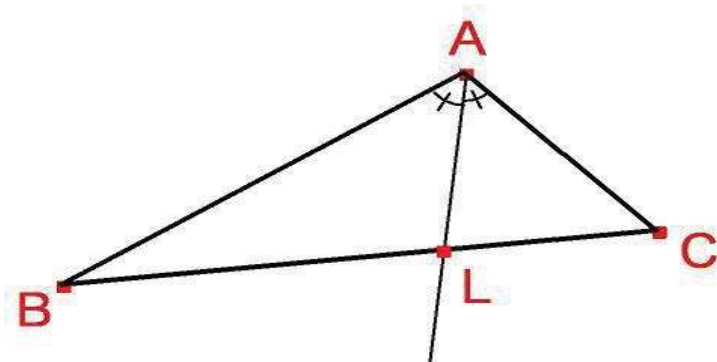


Figura 3.52: Ilustración asociada al teorema de la intersección de la bisectriz de un ángulo con el lado opuesto en un triángulo.

Si  $C_1$  es una posición particular de  $C$  en  $\mathbf{C}(A, AC)$ , tenemos el  $\triangle ABC_1$  y la bisectriz de  $\angle BAC_1$  determinará  $L_1$ ; de esta manera tendremos la situación que se muestra en la Figura 3.53 a):

$$\frac{BL_1}{L_1C_1} = \frac{AB}{AC_1} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{BL_2}{L_2C_2} = \frac{AB}{AC_2} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{BL_i}{L_iC_i} = \frac{AB}{AC_i} = \frac{AB}{AC}$$

porque  $C_n$  determinará  $L_n$ . De donde se observa que la razón:

$$\frac{BL_i}{L_iC_i} \text{ es constante.}$$

Ahora si, tenemos los elementos necesarios para hacer la

Demostración de a). Sea  $C_n$  un punto de  $\mathbf{C}(A, AC)$ , la bisectriz de  $\angle BAC_n$  determina  $L_n$ , entonces:

$$\frac{BL_n}{L_nC_n} = \frac{AB}{AC} \tag{3.34}$$

Como  $\frac{AB}{AC}$  es constante, la igualdad (3.34) significa que las figuras determinadas por los puntos  $C$  y  $L_n$  son homotéticas, con razón de homotecia:

$$\frac{AB}{AC};$$

y como  $C$  describe una circunferencia, entonces los puntos  $L_n$  también describen una circunferencia. El centro de homotecia es el vértice  $B$  del triángulo y el radio de dicha circunferencia se determina por la relación:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{r_C}{r_{L_i}}$$

La Figura 3.53 b) muestra el lugar geométrico de los puntos  $L_n$ .

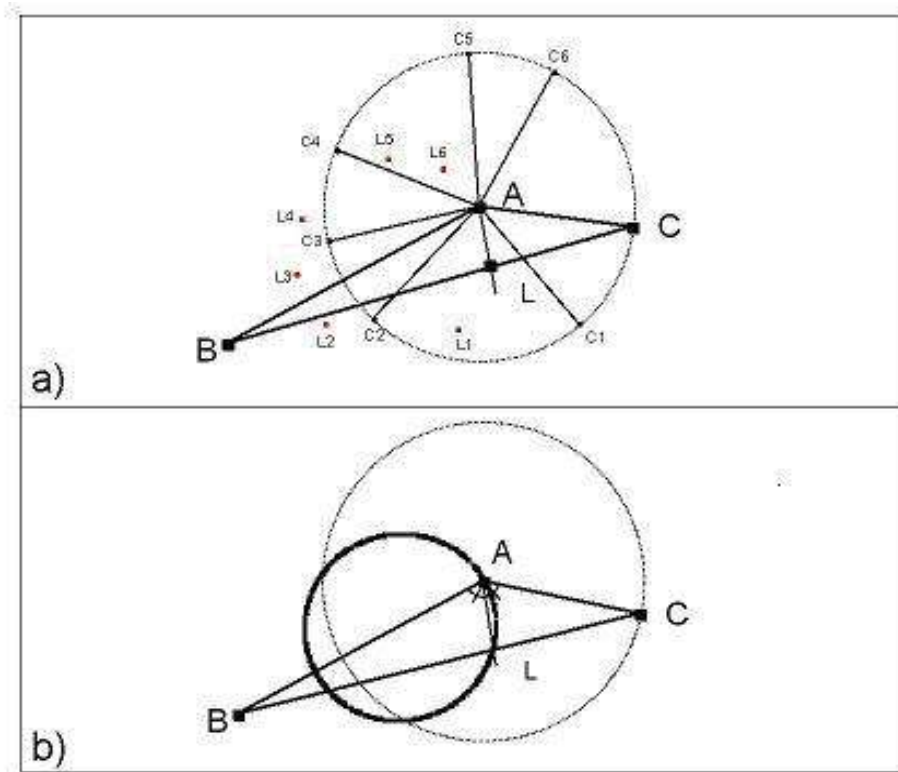


Figura 3.53: Lugar geométrico determinado por los puntos  $L_n$ .

Demostración de b). Mostremos ahora que cualquier punto  $L$  que esté en el lugar geométrico satisface la condición:  $L$  está en la intersección de  $BC$  y la bisectriz de  $\angle BAC$ .

Podemos localizar el centro  $O$  de la circunferencia que pasa por  $A$  y  $L$  : trazando las mediatrices  $l_1$  y  $l_2$  de dos cuerdas de esa circunferencia; consideremos  $AC$ , radio de  $C(A, AC)$ , y  $OL$  radio de  $C(O, OA)$  paralelo a  $AC$ . Sea  $B$  el punto de intersección de la recta por  $L$  y  $C$  con la recta de los centros (Figura 3.54). Como los triángulos  $BOL$  y  $BAC$  son semejantes, tenemos que:

$$\frac{BO}{OL} = \frac{BA}{AC} \quad \text{pero } OL = OA, \text{ entonces: } \frac{BO}{OA} = \frac{AB}{AC} \quad (3.35)$$

(ya que  $AC \parallel OL$ .) Por el teorema de Thales se cumple:

$$\frac{BO}{OA} = \frac{BL}{LC}. \quad (3.36)$$

De (3.35) y (3.36) resulta que:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC};$$

por lo que  $L$  está en la intersección de  $BC$  y la bisectriz de  $\angle BAC$ , que era lo que queríamos probar.

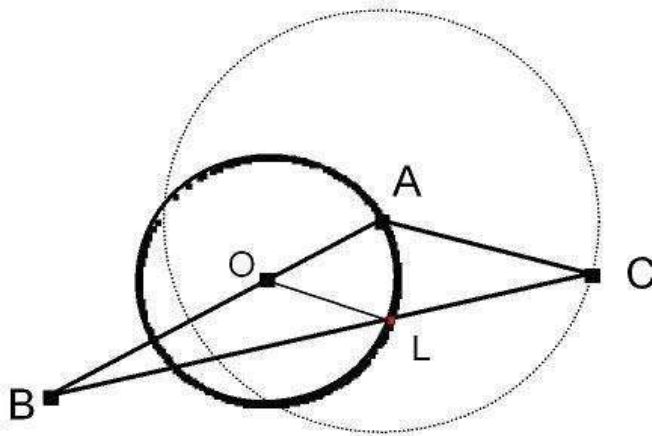


Figura 3.54: El punto  $L$  de la circunferencia de centro  $O$  cumple la condición pedida.

---

Estrategia heurística: hacer el dibujo correspondiente.

---

Uso de recursos: la relación que existe entre la bisectriz de un ángulo en un triángulo y los segmentos que determina con el lado opuesto al ángulo, definición de homotecia, teorema de Thales.

# Capítulo 4

## Conclusiones

El comportamiento de los individuos es resultado, en buena medida, del nivel de educación proporcionado por la escuela, institución creada por el hombre para transmitir el conocimiento y la cultura en una sociedad. En particular, la educación matemática tiene que ver con ese comportamiento y ésta, a su vez, es influenciada por los avances alcanzados por la ciencia y la tecnología; efectivamente, la forma de llevar a cabo la educación matemática ha ido cambiando a lo largo de la historia, desde el uso de tablas de multiplicar como las plasmadas en arcilla en la antigüedad, o las tablas de logaritmos en la época moderna, que todavía hace unos treinta años eran ampliamente usadas en la educación media superior y superior.

Posteriormente, la invención de los instrumentos de cálculo y las computadoras, así como el desarrollo de otros medios electrónicos, representaron un gran avance para la sociedad, de tal manera que hoy es común utilizar calculadoras, computadoras y el uso del Internet en la educación escolar. El problema actual es ¿cómo utilizar estos instrumentos de manera que se conviertan en herramientas de aprendizaje?, ¿cómo no generar dependencia del artefacto o del medio?

Podemos decir que analizando la Figura 3.7 b) (del problema 3.1), la computadora puede ser una herramienta de aprendizaje, ya que nos ayuda a entender el fenómeno: si me alejo una distancia “ $x$ ” (sobre el río) a partir de  $A$ , la distancia total recorrida “ $y$ ” ( $BP + PC$ ) es diferente dependiendo si me alejo a la izquierda o a la derecha de  $A$ , por lo que “ $y$ ” está en función de “ $x$ ”.

Como sólo tenemos valores positivos (o cero) para  $x$  ya que se trata de una distancia, vemos que  $x$  puede tomar valores del conjunto  $[0, \infty)$ ; podemos extender la observación y encontrar que los valores posibles para “ $y$ ” están en el conjunto  $[\frac{ab}{b+c}, \infty)$ , (donde  $\frac{ab}{b+c}$  es el valor mínimo que alcanza la función ).

Comprendiendo lo que pasa y sabiendo interpretar la gráfica, en otros problemas podemos no depender de una computadora para visualizar en la mente la situación y nos ayude a resolver el problema.

Así, la utilización de los medios tecnológicos con la incorporación del software dinámico, puede influir en la forma de estudiar las matemáticas en general y de la geometría en particular. Por ejemplo, en las actividades consistentes con el quehacer matemático: la búsqueda de patrones numéricos o geométricos, en el comportamiento de fenómenos de variación, en las posibilidades amplias de organizar información, representar ideas, etc., la computadora ha mostrado su enorme potencial. Además, en algunos casos resulta relativamente simple variar los valores de una expresión algebraica para estudiar con detalle lo que pasa geoméricamente.

Para abordar y resolver los problemas geométricos analizados en este trabajo, primero es necesario entender el problema: si textualmente no se entiende, conviene seguir las recomendaciones de Polya (1945), hacer un dibujo, marcar lo que se conoce, tener claro qué es lo que se pide en el problema; ya que se entendió, tratar de relacionar los datos que nos dan con lo que piden para diseñar un plan de solución.

En algunos problemas se puede llegar a la solución desde diferentes caminos, conviene hacer un esfuerzo por distinguir qué es lo que nos sirve de lo que sabemos de matemáticas para abordar el problema. Esto no quiere decir que al primer intento nuestro esfuerzo produzca la solución del problema; en ocasiones lo que hacemos no nos sirve para llegar a la solución pero tal vez nos da ideas para encontrar otro camino correcto. Por ejemplo, debido a la dificultad de los problemas 3.3, 3.4 y 3.6, puede ser que varios de nuestros intentos iniciales no conduzcan a vislumbrar un acercamiento a la solución; por lo que se requerirá de un mayor esfuerzo y meditación antes de llegar a los resultados presentados en este trabajo.

Aunque no están de manera explícita los pasos propuestos por Polya al momento de resolver un problema, sí se aplicaron las cuatro fases de su método en cada uno de los problemas: se entendió el problema; se diseñó una manera de resolverlo; se llevó a cabo el plan de solución que tratamos de explicarlo lo mejor que pudimos; y se comprobó que el resultado encontrado cumplía con lo pedido.

En todo momento se destacó la utilización de las estrategias heurísticas y el uso de recursos matemáticos necesarios para arribar a la solución, y se mostró la conveniencia de su combinación en el proceso de solución. En los primeros cuatro problemas, quedó manifiesta la preponderancia de la aplicación de las estrategias heurísticas sugeridas, por la elegancia de las mismas y la sencillez a que conduce para resolverlos; en cambio, la solución de los dos últimos problemas dependen fuertemente de la aplicación correcta

de recursos matemáticos.

De esta manera, con las posibilidades de aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas, manifestada en este trabajo, se procura que la incorporación del software de geometría dinámica:

- a) propicie que el que resuelve problemas plantee conjeturas; aspecto primordial y clave para desencadenar procesos de resolución de problemas, las cuales surgen no por casualidad, sino por actos internos de reflexión y meditación que el sujeto realiza alrededor de un problema. Esto no significa que para plantear conjeturas se tenga que contar, necesariamente, con el uso del software, durante siglos éstas han sido planteadas sin siquiera existir computadoras; lo que aquí se plantea es utilizar el potencial de la tecnología para fomentar esta actividad en el estudio de las matemáticas;
- b) facilite la realización de exploraciones de varios casos particulares, entre ellos los valores extremos; que permita identificar elementos que antes, quizás, eran inadvertidos, contribuyendo al entendimiento del problema mismo;
- c) aliente a descubrir patrones y relaciones entre los elementos involucrados en un problema o en una proposición matemática;
- d) fomente el desarrollo de la visualización y la imaginación espacial, aspectos esenciales para el entendimiento matemático en una diversidad de situaciones.

Sin embargo, es importante señalar que no se está planteando el uso de la tecnología como un sustituto del maestro; si bien es cierto que es un recurso que puede contribuir a la evolución del entendimiento de una determinada situación, en problemas como los aquí planteados seguramente se requerirá de la orientación y ayuda, así como sistematizar y complementar las ideas relevantes que emergieron o que aparecen relacionadas durante la resolución del problema.

Conviene remarcar que el uso de algún recurso tecnológico no garantiza que se entiendan los principios matemáticos que surgen de determinada exploración, y se debe tener presente que, en ocasiones, la tecnología puede dar una representación gráfica incompleta o no proporcionar la información requerida. Por ejemplo en el problema 3.3, moviendo cada uno de los vértices del triángulo PQR (en un intervalo), el perímetro de dicho triángulo era invariante, por lo que no se sabe con precisión la posición de los vértices que hacen mínimo el perímetro (ni el valor exacto del perímetro); con Cabri obtenemos una aproximación.

Con base en los problemas que hemos analizado, el software dinámico ayuda a encontrarle sentido a algunos conceptos matemáticos; por ejemplo en el problema 3.4, **estando**

*P* interior al  $\triangle ABC$ , nos damos cuenta que  $AP + BP + CP$  no es mayor que el perímetro del  $\triangle ABC$  pero tampoco es menor que el semi perímetro de dicho triángulo, ¿siempre se cumplirá esto? Por muchos casos que hayamos visualizado en pantalla es seguro que no agotamos todas las posibilidades. Viendo la demostración formal de que siempre se cumple podemos darle importancia a justificar los resultados. De esta manera, se puede ver el uso del software dinámico como un medio con el que es posible desarrollar o descubrir nuevas ideas.

La intención es que se vea de manera natural la aplicación del método de Polya y fomentar una actitud inquisitiva mediante la formulación de preguntas al intentar resolver problemas o comprender ideas matemáticas.

# Bibliografía

- [1] Alarcón, B. J. (1994). *Libro para el Maestro*. Matemáticas. Secundaria. Secretaría de Educación Pública. México.
- [2] Benítez, M. D. (2006). *Planteamiento y resolución de problemas con apoyo de software dinámico*. En Memorias XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas. Área de Matemática Educativa, UMSNH, México.
- [3] Clements, D.H., Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Douglas A. Grouws (Ed.). New York: Mac Millan Library referente. USA.
- [4] Cobb, P., Jaworski, B., Presmeg, N. (1996). *Emergent and sociocultural views of mathematical activity*. En L. Steffe (Ed.) *Theories of mathematical learning*. Dordrecht: Kluwer. USA.
- [5] Cobb, P. (2000). *From Representations to Symbolizing: Introductory Comments on Semiotic and Mathematical Learning*. En P. Cobb, E. Yackel, K. McClain (Eds.) *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. pp. 17-36. Mahwa, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, USA.
- [6] Coxeter, H. S. M. (1969). *Triangles*. En *Introduction to Geometry*. Toronto: John Wiley & Sons, Inc. Second edition. Canada.
- [7] Dreyfus, T. (1994). *The role of cognitive tools in mathematics education*. En R. Boehler, W. Schilz, R. Straber, B. Winkelmann Eds.). *Didactic of mathematics as a scientific discipline* (pp. 201-211). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher. The Netherlands.
- [8] Duval, R. (1996). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Traducción de uso interno realizada por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN, México. Título original *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65, IREM de Stramburgo, 1993.

- [9] Gutiérrez, A., Jaime, A. (1991). *El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros*. En Educación Matemática (2), Vol. 3, México: Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- [10] Hiele-Geldof, D. (1984). *The didactics of geometry in the lower class of secondary school* (de didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.) en Fuys; Geddes, Tischler. Selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele, Brooklyn College, C.U.N.Y., Nueva York.
- [11] Hoyles, C., Noss, R. (1992). *A Pedagogy for Mathematical Microworlds*. En Educational Studies in Mathematics 23.
- [12] Laborde, C., Laborde, J. M. (1995). *What About a Learning Environment where Euclidean Concepts Are Manipulated with a Mouse?* En Computers and Exploratory Learning. A.A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss (Eds.). Berlin: Springer.
- [13] Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, T. (2000). *Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers*. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (pp. 591-645). Mahwa, NJ: Laurence Erlbaum Associates, Inc. Publishers.
- [14] Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1987). *Thinking Mathematically*. New York: Addison Wesley. USA.
- [15] National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- [16] National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- [17] National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. USA.
- [18] Noss, R. (1988). *The Computer as a Cultural Influence on Mathematical Learning*. En Educational Studies in Mathematics 19.
- [19] Pea, R. (1985). *Beyond amplification: Using the computer to organize mental functioning*. Educational Psychologist 20. (pp. 167-182).
- [20] Piaget, J. (1991). *El pensamiento matemático*. Introducción a la epistemología genética. México: Editorial Paidós Mexicana S. A., México.
- [21] Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press. USA.

- [22] Polya, G. (1980). *On solving mathematical problems in high school*. En S. Krullik and R. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics*, 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, (pp. 1-2 y reverso de la portada). Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics. USA.
- [23] Postman, N. & Weingartner (1969). *Teaching as a subversive activity*. New York: A Delta Book.
- [24] Presmeg, N. (2006). *Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics*. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. (pp. 205-235 ). ISBN 90-77874-19-4
- [25] Santos, M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- [26] Santos, M (2004). *Exploring the triangle inequality and conic sections using interactive software for geometry*. En *Mathematics Teacher*, Vol. 97 No. 1, (pp. 68-72). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. USA.
- [27] Santos, M. (2007). *La resolución de Problemas Matemáticos. Fundamentos Cognitivos*, México: Biblioteca de la ANPM, Trillas, México.
- [28] Schoenfeld, A. (1980). *Heuristics in the classroom*. En S. Krullik and R. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics*, 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, (pp. 9-22). Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics. USA.
- [29] Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense making in mathematics*. En D. A. Grouwns (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co. USA.
- [30] Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, USA.
- [31] Spivak, M. (1992). *Significado de la derivada*. Cálculo infinitesimal. Barcelona: Editorial Reverté, S. A., España.
- [32] Tall, D. (1990). *Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis*. En *Focus on Learning Problems in Mathematics* 12, nos. 3 and 4.
- [33] Thom, R. (1973). *Matemáticas de hoy y matemáticas de siempre*. En J. Hernández (Ed.) *La enseñanza de la matemática moderna*. Madrid: Alianza Editorial. España.

- [34] Verdugo, Santos, Rivera, Palmas, Briceño, Barrera. (2001). *El curriculum de matemáticas en el nivel medio superior en México*. Un Estudio sobre los Propósitos y Contenidos de los Cursos de Matemáticas del nivel Medio Superior. Proyecto de la Sociedad Matemática Mexicana, financiado por CONACYT. México.
- [35] Vygotski, L. S. (1988). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. México: Editorial Grijalbo, México.
- [36] Zimmerman, W., Cunningham, S. (1995). *Visualización Matemática*. En Memorias del CIEAEM 01.95; Disco flexible, 10/02/95.

Página de Internet. El Problema de Fermat para Torricelli, en:  
<http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/Torricelli/node1.html>

# Apéndice A

## Resultados utilizados en este trabajo

**Teorema de la desigualdad del triángulo.** Si  $ABC$  es un triángulo arbitrario entonces la suma de las longitudes de cualesquiera dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado.

Es un teorema de extrema importancia en la geometría; establece la posibilidad de construir la figura plana convexa con el menor número de lados. Prácticamente el desarrollo de toda la geometría depende, en mayor o menor parte, de él. Juega un papel fundamental en diferentes ramas de las matemáticas como Variable compleja, Análisis matemático, Álgebra superior, Cálculo, entre otras.

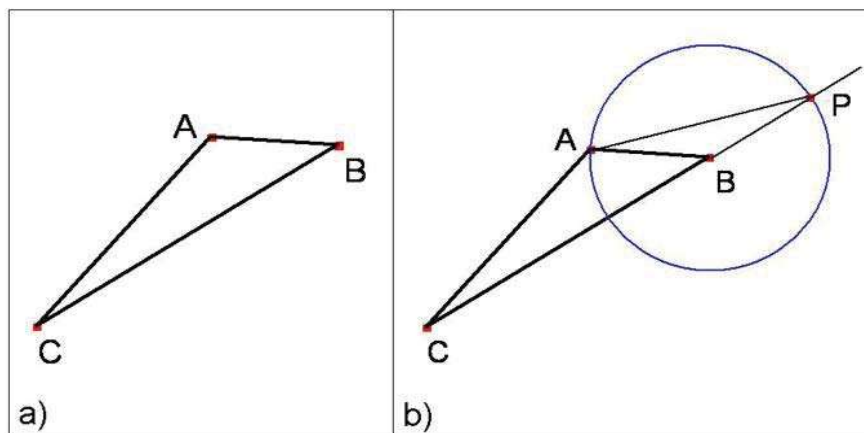


Figura A.1: Desigualdad en un triángulo.

**Demostración.** Sea  $\triangle ABC$  el triángulo dado (Figura A.1 a), debemos probar que:

$$AB + BC > AC,$$

$$AC + BC > AB \quad \text{y}$$

$$AB + AC > BC.$$

Probemos la primera desigualdad. Requerimos de un trazo auxiliar (permisible con regla y compás) y de la utilización de los lemas: i) “En todo triángulo, a ángulo mayor se opone lado mayor”, cuya prueba depende, básicamente, de la aplicación del teorema del ángulo externo; y ii) teorema del triángulo isósceles, que afirma que si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos en la base son iguales.

Trazo: Con centro en  $B$  dibujemos la circunferencia de radio  $AB$  que interseca a la prolongación de  $CB$  en  $P$  y trazamos  $PA$ , formando el  $\triangle APB$  (Figura A.1 b).

Como el  $\triangle BPA$  es isósceles con  $BP = PA$ , entonces  $\angle APB = \angle BAP$  por el teorema del triángulo isósceles.

Pero el  $\angle BAP$  es una parte del  $\angle CAP$ , entonces  $\angle CAP > \angle BAP$ ; de ahí que  $\angle CAP > \angle APB = \angle APC$  (aquí de está utilizando el axioma: “el todo es mayor que la parte”); y como a ángulo mayor se opone lado mayor, tenemos que en el  $\triangle APC$  se cumple:

$$PC > CA. \text{ Pero, } PC = PB + BC = AB + BC \quad \Rightarrow \quad AB + BC > AC,$$

lo que queríamos probar. Las otras dos desigualdades se prueban de manera similar.  $\blacklozenge$

**Teorema dela mediatriz.** El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento, es la mediatriz del segmento.

Este es un típico teorema de lugar geométrico en el que se deben probar dos cosas:

- i) si  $P$  está en la mediatriz, entonces equidista de los extremos del segmento;
- ii) si  $P$  equidista de los extremos del segmento, entonces está en la mediatriz.

**Demostración de i).** Si  $M$  es el punto medio de  $AB$  y  $P$  está en su mediatriz, trazamos los segmentos  $PA$  y  $PB$  formándose los triángulos  $PMA$  y  $PMB$  (Figura A.2 a), por el criterio de congruencia LAL:

$$\triangle PMA \cong \triangle PMB \quad \Rightarrow \quad PA = PB,$$

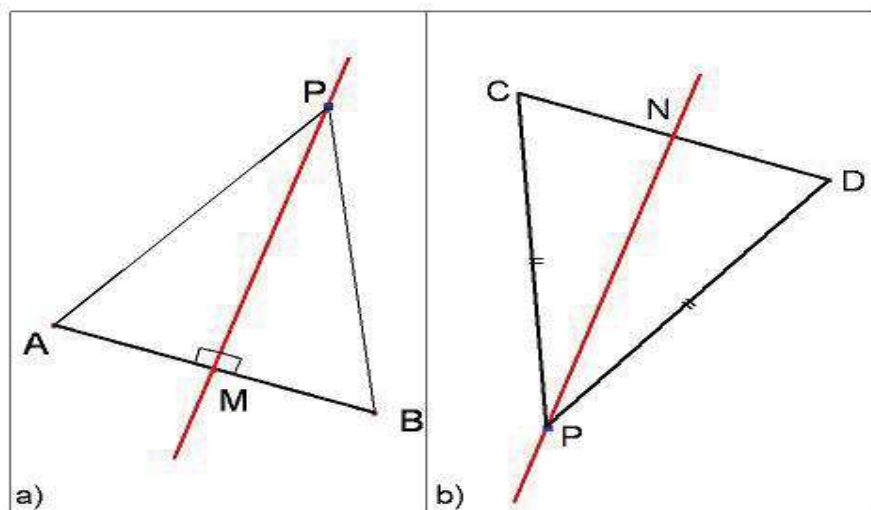


Figura A.2: Casos que deben considerarse en el teorema de la mediatriz.

lo cual significa que  $P$  equidista de  $A$  y de  $B$ . ♦

**Demostración de ii).** Ahora, supongamos que  $P$  equidista de los extremos del segmento  $CD$  (Figura A.2 b); es decir:

$$PC = PD.$$

Con regla y compás localizamos  $N$  el punto medio de  $CD$  y trazamos  $PN$ ,  $PC$  y  $PD$ ; por el criterio de congruencia LLL:

$$\triangle PNC \cong \triangle PND \quad \Rightarrow \quad PN \perp CD,$$

porque los ángulos  $\angle PNC$  y  $\angle PND$  son congruentes y forman un par lineal. Entonces  $P$  está en la mediatriz, que era lo que queríamos demostrar. ♦

**Teorema de la bisectriz.** El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo, es la bisectriz del segmento.

Este es otro teorema de lugar geométrico, debemos probar dos cosas:

- i) si  $P$  está en la bisectriz, entonces equidista de los lados del ángulo;
- ii) si  $P$  equidista de los lados del ángulos, entonces está en la bisectriz.

Para su demostración ocuparemos la definición de la distancia de un punto a una recta, la cual se deriva del teorema de “a ángulo mayor se opone lado mayor”, además de los teoremas de congruencia LAA, e “hipotenusa cateto”.

**Demostración de i).** Sea  $P$  un punto que pertenece a la bisectriz del  $\angle ABC$  y sean  $D$  y  $E$  los pies de las perpendiculares a los lados del ángulo, como se muestra en la Figura A.3 a. Por el teorema de congruencia LAA:

$$\triangle PBD \cong \triangle PBE \quad \Rightarrow \quad PD = PE,$$

por ser lados correspondientes en triángulos congruentes; lo cual significa que  $P$  equidista de los lados del ángulo.  $\blacklozenge$

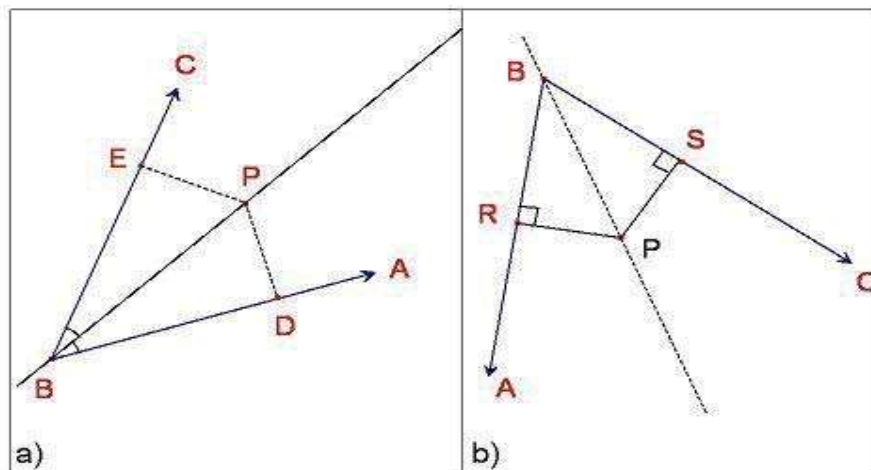


Figura A.3: Casos a considerar en el Teorema de la bisectriz.

**Demostración de ii).** Si ahora,  $P$  equidista de los lados del  $\angle ABC$ , entonces  $PR = PS$ , siendo  $R$  y  $S$  los pies de las perpendiculares de  $P$  a los lados del ángulo (Figura A.3 b). Tracemos la recta  $PB$ , por el Teorema de congruencia hipotenusa cateto:

$$\triangle PBR \cong \triangle PBS \quad \Rightarrow \quad \angle PBR = \angle PBS,$$

lo cual significa que  $P$  está en la mediatriz del  $\angle ABC$ .  $\blacklozenge$

**Teorema de la potencia de un punto.** Dado un punto  $P$  en el exterior de una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ ; si dos secantes que pasan por  $P$  intersecan a la circunferencia en los puntos  $R, S$  y  $T, U$ , respectivamente, entonces:

$$PR \bullet PS = PT \bullet PU.$$

Este teorema afirma que si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan secantes que intersecan a la circunferencia, el producto de los segmentos trazados desde ese punto a los puntos de intersección, es una constante.

**Demostración.** Si trazamos los segmentos  $RU$  y  $TS$ , (Figura A.4) observamos que:

$$\triangle PRU \sim \triangle PTS,$$

por teorema de semejanza AAA, pues los triángulos comparten el ángulo  $P$  y  $\angle TSP \cong \angle PUR$  por subtender el mismo arco, y en consecuencia  $\angle URP \cong \angle PTS$ . Entonces:

$$\frac{PR}{PT} = \frac{PU}{PS} \quad \Rightarrow \quad PR \bullet PS = PT \bullet PU.$$

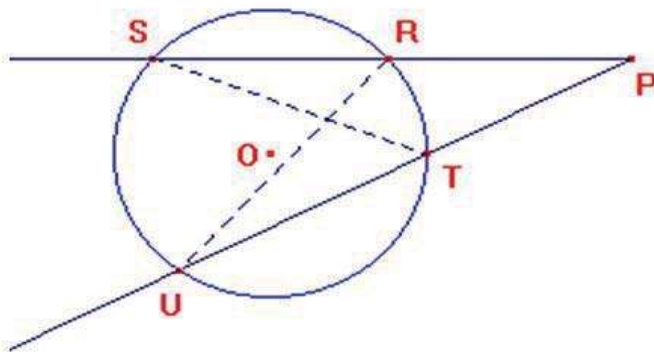


Figura A.4: Trazos para probar el teorema de la potencia de un punto.

Observemos que si una de las dos secantes se mantiene fija y la otra gira hasta convertirse en tangente, podemos obtener cuánto vale la constante que es igual a la potencia del punto  $P$  respecto a la circunferencia. Para ver esto, basta trazar los segmentos punteados de la Figura A.5. Analizando los triángulos  $PRT$  y  $PTS$ , observamos que el ángulo en  $P$  es común y que  $\angle TSP = \angle PTR$ , por el corolario se semejanza AA:

$$\triangle PRT \sim \triangle PTS \quad \Rightarrow \quad \frac{PR}{PT} = \frac{PT}{PS},$$

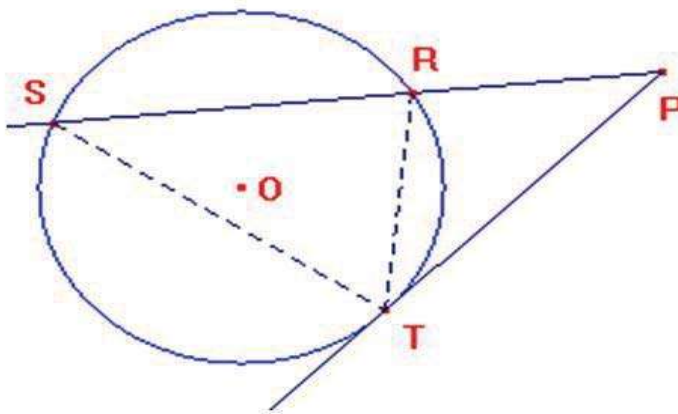


Figura A.5: Cálculo de la potencia de un punto.

es decir:  $PR \bullet PS = (PT)^2$ .

El valor de la potencia de  $P$  respecto a la circunferencia de centro  $O$ , también puede obtenerse trazando las dos secantes, pero que una de ellas pase por  $O$ , como se muestra en la Figura A.6. Sea  $r$  el radio de la circunferencia y tracemos  $OT$ .

Entonces tenemos:  $PR \bullet PS = PA \bullet PB$ ,

pero  $PA = PO - r$  y  $PB = PO + r$ , por lo tanto:

$$PR \bullet PS = PA \bullet PB = (PO - r)(PO + r) = (PO)^2 - r^2.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al  $\triangle POT$ :

$$PR \bullet PS = (PO)^2 - r^2 = (PT)^2.$$

Finalmente, comentamos que si  $P$  es un punto interior de la circunferencia, puede demostrarse que el producto de los segmentos en que divide  $P$  a dos cuerdas cualesquiera, también es una constante. En este caso, la interpretación de la potencia del punto  $P$  corresponde a la Geometría moderna y se reconoce porque la constante es negativa.

Así, dada una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ , y si  $P$  es un punto cualquiera de su plano, la potencia del punto  $P$  es:

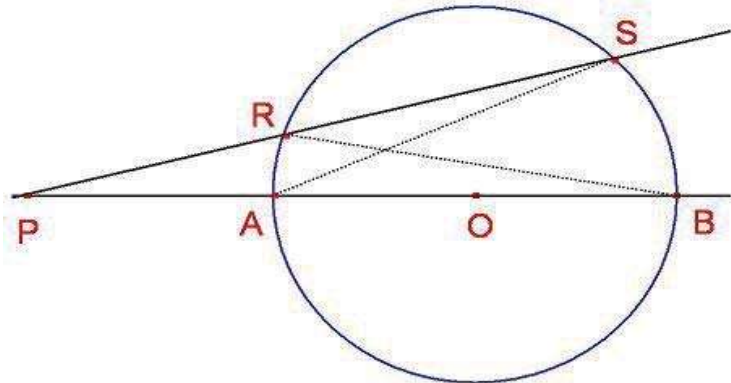


Figura A.6: Manera alternativa de calcular la potencia de un punto.

$$\left\{ \begin{array}{l} > 0, \text{ si } P \text{ está fuera de la circunferencia;} \\ = 0, \text{ si } P \text{ está en la circunferencia;} \\ < 0, \text{ si } P \text{ está dentro de la circunferencia.} \end{array} \right.$$

**Teorema de la bisectriz de un ángulo en un triángulo.** Si en un triángulo se traza la bisectriz de uno de sus ángulos, entonces los segmentos que determina la bisectriz en el lado opuesto son proporcionales a los lados del ángulo.

**Demostración.** Sea  $\triangle ABC$  el triángulo dado y sea  $AL$  la bisectriz del  $\angle BAC$  (Figura A.7). Queremos probar que:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}.$$

Prolonguemos  $AB$  por  $A$  y tracemos una paralela a  $AL$  por  $C$  que corte a la prolongación de  $AB$  en el punto  $D$ . Al ser  $AL$  bisectriz:

$$\angle BAL = \angle LAC.$$

Y como  $AL$  es paralela a  $DC$ , entonces:

$$\angle BAL = \angle ADC \text{ y } \angle LAC = \angle DCA,$$

por ser ángulos correspondientes y alternos internos, respectivamente.

Eso implica que  $\triangle ADC$  es isósceles, entonces  $AD = AC$ .

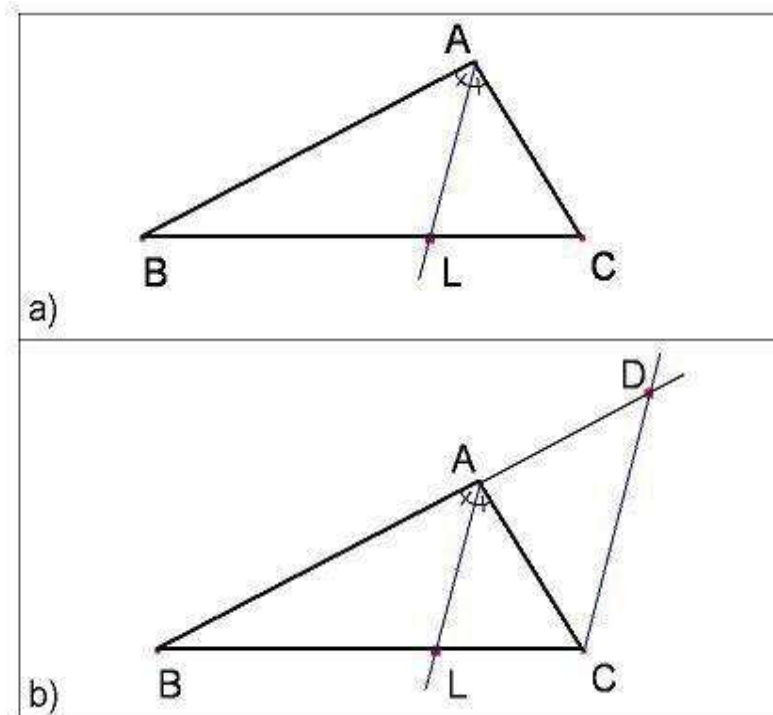


Figura A.7: Ilustración del teorema y trazo necesario.

Del Teorema fundamental de proporcionalidad, tenemos que:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$$

que es lo que queríamos demostrar. ◆