Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH

Construcción de Yoneda-Dress de funtores de representaciones lineales

T E S I S

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Benjamín Aziel García Hernández

Asesor:
Doctor en Matemáticas Alberto Gerardo Raggi Cárdenas
Universidad Nacional Autónoma de México

Coasesora:
Doctora en Matemáticas Nadia Romero Romero
Universidad de Guanajuato

Morelia, Michoacán - noviembre de 2018.

Índice general

Agradecimientos

A la UNAM y a la UMSNH, por la formación académica de alto nivel que me han brindado como estudiante del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas, así como por los recursos económicos que he recibido de ambas instituciones.

Al CONACyT, por la beca de doctorado No. 332040 y por el programa de Becas Mixtas de los que fui beneficiario.

A mi familia, en especial a mis padres Guadalupe y José, y a mis hermanas Fran, Lupita y Laura, por su amor sin condiciones y todas esas fuerza que me han dado.

A mis amigos tan queridos, especialmente a Grace, Elsa, Ana María, Vero, Miguel N., Andrés, Haidé, Editha, Max, Eliana y Giosuè, por su cercanía en estos últimos años.

A los miembros de mi comité tutor y de la mesa de jurado, por el tiempo invertido en la revisión de este trabajo, por permitirme hablarles de nuestros avances y dificultades, y por sus importantes observaciones.

Al profesor Serge Bouc, por haberme recibido en el LAMFA de la UPJV durante el otoño de 2017 y por sus invaluables observaciones, ideas y preguntas que marcaron nuevos caminos a seguir.

Al profesor Gerardo Raggi, por toda esa maravillosa álgebra que ha compartido conmigo durante casi 7 años y por las numerosas oportunidades de corregir y crecer. A la profesora Nadia Romero, por su minuciosidad en este proyecto y por recordarme constantemente la importancia de dar el valor justo a los resultados que con esfuerzo hemos conseguido. A ambos, por haberme dirigido con gran generosidad, paciencia y compromiso.

A todos, muchas gracias.

Resumen

Se presenta aquí un estudio profundo de la construcción de Yoneda-Dress del funtor de representaciones lineales sobre un campo de característica cero, sus álgebras esenciales y sus categorías de módulos, como un intento de generalizar y unificar los resultados de Barker sobre funtores de biconjuntos retóricos en característica cero y los de Romero sobre el funtor de funciones de clase con valores complejos. La motivación principal de este trabajo radica en que dado un funtor de Green en biconjuntos, sus funtores trasladados son funtores de Green en biconjuntos y forman una familia de generadores proyectivos de su categoría de módulos. Entre los resultados principales, determinamos el soporte esencial del funtor de representaciones racionales trasladado y encontramos una parametrización para una extensa familia de módulos simples, caracterizamos la retícula de ideales del funtor de representaciones trasladados y demostramos que la categoría de módulos sobre el funtor de funciones de clase trasladado es equivalente a la categoría de módulos sobre un álgebra semisimple.

Palabras clave: representación lineal, funtor lineal, funtor de biconjuntos, construcción de Yoneda-Dress, funtor de Green en biconjuntos, álgebra esencial.

Abstract

Here we present a deep study on the Yoneda-Dress construction of the functor of linear representations over a field of characteristic zero, its essential algebras and its category of modules, like an attempt of generilize and unify the results of Barker on rhetorical biset functors in characteristic zero and those of Romero on modules over the functor of class functions over the complex numbers. The main motivation to this work lies in the fact that given a Green biset functor, its shifted functors are both Green biset functors and a family of projective generators in its category of modules. Among our main results, we determined the essential support of the shifted functor of rational representations and found a parametrization for a large family of modules, we gave a characterization of the lattice of ideals of the shifted functor of linear representations and we proved that the category of modules over the functor of complex class functions is equivalent to a category of modules over a semisimple algebra.

Keywords: Linear representation, linear functor, biset functor, Yoneda-Dress construction, Green biset functor, essential algebra.

Introducción

Un método recurrente en teoría de representaciones consiste en asignar a cada grupo finito un grupo abeliano, un anillo o un módulo generado por clases de representaciones de algún tipo. Según sea el caso, considerar inclusiones, proyecciones a cocientes o isomorfismos de grupos conduce a relaciones de inducción, restricción, deflación, inflación o isomorfismos entre los grupos asociados. Estos síntomas omnipresentes en las distintas ramas de la teoría de representaciones de grupos finitos dan pistas de una funtorialidad común en todas ellas, lo que nos lleva a la noción de *funtor de biconjuntos*, acuñada por Serge Bouc en su artículo *Foncteurs d'ensembles munis d'une double action* [4] de 1996.

Los funtores de biconjuntos son funtores k-lineales de $k\mathcal{D}$ en $k - Mod$, donde $\mathcal{D}$ es una subcategoría preaditiva de la categoría de biconjuntos y k es un anillo conmutativo unitario, que han sido ampliamente estudiados con distintos enfoques. Por un lado, la categoría de funtores de biconjuntos $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$ es abeliana y k-lineal, y se cuenta con herramientas provenientes de la teoría de representaciones para su estudio. Por otro lado, el estudio de la estructura de algunos funtores ha conducido a generalizaciones de teoremas de inducción o a formas más compactas de algunos resultados clásicos, dando así un lenguaje moderno y práctico para la teoría de representaciones. Además, los funtores de biconjuntos han probado ser útiles en la solución de problemas que habían estado abiertos por algún tiempo, como es el caso de la clasificación de los módulos de endo-permutación o la caracterización del grupo de unidades del anillo de Burnside de un p-grupo.

Cuando $\mathcal{D}$ es una subcategoría repleta y cerrada bajo productos, es posible definir la construcción de Yoneda-Dress o el trasladado F_G de un funtor de biconjuntos F en un objeto G de $\mathcal{D}$, y en consecuencia, bifuntores hom interno y producto tensorial interno en $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$. El producto tensorial interno da a $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$ una estructura de categoría monoidal simétrica, y un *funtor de Green en biconjuntos* A es entonces un objeto monoide en $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$. Tal como los anillos asociativos con uno son los objetos monoides en $\mathcal{A}b$ respecto al producto tensorial, el funtor A posee una estructura multiplicativa asociativa y un elemento identidad, y además, hay una manera natural de definir sus módulos e ideales. Nadia Romero da en la Proposición 4.2 de su artículo *Simple modules over Green biset functors* [14] una parametrización de los A-módulos simples por clases de isomorfismo de *semillas* (H, V), donde H es un objeto en $\mathcal{D}$ tal que el *álgebra esencial* $\widehat{A}(H)$ es distinta de cero y V es un $\widehat{A}(H)$-módulo simple, bajo la condición de que los grupos minimales de los A-módulos simples sean únicos hasta isomorfismo de grupos, generalizando parcialmente la parametrización de los funtores de biconjuntos simples dada por Bouc en [4]. Así mismo, Romero señala en el Ejemplo 12 de *On fibred biset functors with fibres of order prime and four* [13] que la condición de unicidad de minimales de simples no siempre se satisface, pero aún varios de los funtores más estudiados satisfacen dicha condición, como es el caso del funtor de funciones de clase $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$, el funtor de representaciones racionales $kR_{\mathbb{Q}}$ cuando k es un campo de característica cero o $\mathcal{D} = \mathcal{C}_p$ para un primo p, y los funtores de Burnside trasladado kB_C y de Burnside monomial kB_C^1 cuando C es un grupo de orden primo.

Una vez que sabemos que un funtor de Green en biconjuntos A admite una parametrización de sus módulos simples por medio de clases de semillas, el siguiente paso natural es determinar tales semillas. Esto conlleva los siguientes problemas: el primero es determinar el *soporte esencial* $\widehat{\mathcal{S}}upp(A)$ de A, dado por los H en $\mathcal{D}$ para los que el álgebra esencial $\widehat{A}(H)$ es distinta de cero; el segundo es determinar los $\widehat{A}(H)$-módulos simples cuando $\widehat{A}(H) \neq 0$. Ambos problemas son en general difíciles y no existe un método único para abordarlos. Para los funtores $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ y $kR_{\mathbb{Q}}$ cuando k es un campo de característica cero, estos han sido resueltos completamente. Para el funtor $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ la situación es bastante simple: su soporte esencial consiste sólo del grupo trivial, y $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ es un funtor de Green en biconjuntos simple, como lo demuestra Romero en la Proposición 4.3 de [14]. Por otro lado, el caso de $kR_{\mathbb{Q}}$ es más complicado: Laurence Barker preseta un estudio de este funtor y sus módulos en *Rhetorical biset functors, rational p-biset functors and their semisimplicity in characteristic zero* [2] en un contexto más general, y demuestra que cuando k es un campo de característica cero, los $kR_{\mathbb{Q}}$-módulos, conocidos como *funtores de biconjuntos retóricos*, son precisamente aquellos funtores de biconjuntos anulados por el kernel de la linealización $\lambda : kB \longrightarrow kR_{\mathbb{Q}}$. Usando esto, deduce la unicidad de los grupos minimales de funtores de biconjuntos retóricos simples, y establece en el Teorema 1.5 de [2] que un par (H, V) es una semilla en $\mathcal{P}_{kR_{\mathbb{Q}}}$ si y sólo si H es cíclico y V es un $kOut(H)$-módulo primitivo.

El problema central de este trabajo de tesis ha sido estudiar los funtores trasladados $kR_{\mathbb{F},G}$ para campos k y $\mathbb{F}$ de característica cero y G en $\mathcal{D}$, en un intento de generalizar los resultados mencionados antes para los funtores $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ y $kR_{\mathbb{Q}}$. Los $kR_{\mathbb{F},G}$ son funtores de Green en biconjuntos y $kR_{\mathbb{F}}$-módulos proyectivos a la vez, conformando entonces una familia de generadores de proyectivos de la categoía de $kR_{\mathbb{F}}$-módulos. Nuestro trabajo sobre estos funtores se ha centrado en la búsqueda de criterios de nulidad para sus álgebras esenciales y en encontrar caracterizaciones de estas, con la intención de dar parametrizaciones de familias de $kR_{\mathbb{F},G}$-módulos simples y describir la estructura de algunos de ellos. Por sugerencia del profesor Bouc, incluimos también un estudio de los ideales de $kR_{\mathbb{F},G}$, similar a la caracterización de los subfuntores de kB como se expone en el Capítulo 5 de *Biset functors for finite groups* [5]. A continuación explicamos la estructura de esta tesis.

El Capítulo 1 se divide en tres secciones en las que damos los rudimentos necesarios de la teoría básica de los funtores de biconjuntos. En la Sección 1.1 se hacen convenciones sobre la notación que estaremos usando y se mencionan algunos resultados clásicos sobre G-conjuntos y grupos de Grothendieck, sin adentrarnos en detalles. La Sección 1.2 es devota a los funtores de biconjuntos, donde explicamos los ejemplos de importancia central para este trabajo y mencionamos también el teorema de parametrización de funtores de biconjuntos simples de Bouc, introduciendo para ello las nociones de subcategoría admisible, álgebra esencial y semillas. En la Sección 1.3 nos enfocamos en la construcción de Yoneda-Dress, que es uno de los ingredientes principales de nuestro proyecto, y comentamos brevemente algunas de sus propiedades funtoriales.

En el Capítulo 2 exponemos la teoría básica de los funtores de Green en biconjuntos a lo largo de tres secciones. En la Sección 2.1 damos dos definiciones equivalentes de funtor de Green en biconjuntos, y proporcionamos algunos ejemplos de tales funtores. La Sección 2.2 es dedicada a los módulos sobre un funtor de Green en biconjuntos A, donde nuevamente damos dos definiciones equivalentes de A-módulo, hablamos sobre la categoría $\mathcal{P}_A$, las álgebras esenciales de A y el problema de clasificación de los módulos simples, así como de una equivalencia entre la categoría de A-módulos y la categoría de funtores lineales de la categoría asociada $\mathcal{P}_A$ a en $k - Mod$. Introducimos en esta sección las nociones de soporte esencial $\widehat{\mathcal{S}upp}(A)$ y nulidad esencial $\widehat{\mathcal{Z}}(A)$, y presentamos uno de los primeros resultados obtenidos sobre estos conceptos: dado un morfismo de funtores de Green en biconjuntos $f : A \longrightarrow C$, este induce para cada H en $\mathcal{D}$ un homomorfismo de k-álgebras $\widehat{f}_H : \widehat{A}(H) \longrightarrow \widehat{C}(H)$, implicando así que la nulidad esencial de A está contenida en la de C. En la Sección 2.3 nos enfocamos en los trasladados de A, donde introducimos los morfismos inflación y restricción que tienen como consecuencia que el soporte esencial de A y el de cualquiera de sus trasladados coinciden.

En el Capítulo 3 nos enfocamos en el estudio del funtor $kR_{\mathbb{F}}$ y de sus trasladados. En la Sección 3.1 hablamos sobre funtores de biconjuntos retóricos e introducimos el morfismo extensión ${}^{\mathbb{E}}\epsilon : kR_{\mathbb{F}} \longrightarrow kR_{\mathbb{E}}$ dada una extensión de campos $\mathbb{E}/\mathbb{F}$. En la Sección 3.2 estudiamos el soporte esencial de $kR_{\mathbb{F},G}$ y deducimos usando el morfismo extensión que este consiste de grupos cíclicos cuyo orden no es congruente con 2 módulo 4; esto último implica la unicidad de los grupos minimales de $kR_{\mathbb{F},G}$-módulos simples. También caracterizamos las álgebras esenciales de $kR_{\mathbb{Q},G}$ en grupos de orden coprimo al orden de G, lo que como consecuencia nos da una parametrización de la familia de $kR_{\mathbb{Q},G}$-módulos simples cuyos grupos minimales son de orden coprimo al orden de G. En la Sección 3.3 presentamos una caracterización de la retícula de ideales del funtor $kR_{\mathbb{F},G}$. La semisimplicidad de las álgebras $kR_{\mathbb{F}}(H \times G)$ implica algunas simplificaciones, y estudiando el efecto de las operaciones de biconjuntos en sus idempotentes primitivos dedujimos que cada ideal I está unívocamente determinado por un conjunto $\mathcal{E}_I$ de clases de $k \cap \mathbb{F}$-conjugación de G, y cada conjunto $\mathcal{E}$ de clases de $k \cap \mathbb{F}$-conjugación de G determina un ideal $I_{\mathcal{E}}$, siendo esta correspondencia un isomorfismo de órdenes. La consecuencia más importante de este resultado es que los funtores $kR_{\mathbb{F},G}$ son $kR_{\mathbb{F},G}$-módulos semisimples, y sus factores simples son hasta isomorfismo todos los $kR_{\mathbb{F},G}$-módulos simples con grupo minimal trivial. Este trabajo concluye en la Sección 3.4 con un estudio del funtor $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}$ y su categoría de módulos, donde demostramos que en $\mathcal{P}_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}}$ los morfismos son generados por morfismos que se factorizan a través del grupo trivial y siendo este último el único posible minimal para todo módulo. Usando esto, concluimos demostrando que la evaluación en el grupo trivial es una equivalencia entre las categorías $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G} - \mathcal{M}od$ y $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G) - Mod$, lo que implica además que $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G} - \mathcal{M}od$ es una categoría semisimple.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo es un compilado de rudimentos de la teoría de funtores de biconjuntos, necesarios para el desarrollo de este trabajo de tesis.

1.1. G-conjuntos, biconjuntos y anillos de Burnside

Hacemos aquí un breve sumario de notaciones, definiciones y resultados sobre G-conjuntos, biconjuntos y anillos de Burnside. Para más detalles, véase el Capítulo 2 de *Biset functors for finite groups* de Serge Bouc [5].

Todas las nociones de teoría de categorías que se manejan corresponden con las del clásico *Categories for the working mathematician* de Saunders Mac Lane [11]. Dada una categoría $\mathcal{K}$, denotaremos su clase de objetos por $Ob(\mathcal{K})$, y dados objetos X y Y de $\mathcal{K}$, denotaremos por $\mathcal{K}(X,Y)$ al conjunto de morfismos de X en Y y por Id_X al morfismo identidad de X. Por funtor siempre nos referiremos a un funtor covariante.

Los anillos y álgebras que consideraremos serán siempre asociativos y unitarios, y los homomorfismos de anillos y álgebras enviarán el uno en el uno, propiedades que serán muy importantes a lo largo de este trabajo y en las que insistiremos ocasionalmente. Convenimos que el grupo 0 es un anillo o álgebra con la estructura trivial, según sea la situación. Esto es importante, ya que si $f : 0 \longrightarrow A$ es un morfismo de anillos o álgebras, entonces $1 = f(1) = f(0) = 0$ en A, implicando que $A = 0$. Usaremos la notación estandar de $A - Mod$ para la categoría de A-módulos y $A - mod$ para la subcategoría plena de A-módulos finitamente generados dado un anillo o álgebra A.

Si k es un campo, en ocasiones escribiremos *"E/k es una extensión"* para decir que E es un campo extendiendo a k. Si A es una k-álgebra, el producto tensorial $E \otimes_k A$ es naturalmente una E-álgebra que denotamos por ${}^{E}A$, y dado un A-módulo M, denotaremos por ${}^{E}M$ al ${}^{E}A$-módulo obtenido de M por extensión de escalares de k a E, notación que utilizaremos constantemente a lo largo de este trabajo.

Si G es un grupo y $g, h \in G$, escribiremos ${}^g h$ para ghg^{-1} y h^g para $g^{-1}hg$, y análogamente, si $H \leq G$, escribiremos ${}^g H$ para gHg^{-1} y H^g para $g^{-1}Hg$. El conjunto de clases laterales izquierdas de H en G será denotado G/H, mientras que $H\backslash G$ denotará al de clases laterales derechas, y si $K \leq G$ es otro subgrupo, $K\backslash G/H$ denotará al conjunto de clases laterales dobles KgH. A menudo escribiremos $[G/H]$, $[H\backslash G]$ y $[K\backslash G/H]$ para denotar a un conjunto de representantes de las clases laterales izquierdas, derechas o dobles respectivamente.

Diremos que G actúa por la izquierda (resp. derecha) en un conjunto X si existe un morfismo de grupos $G \longrightarrow S_X$ (resp. $G \longrightarrow S_X^{op}$), donde S_X es el grupo de biyecciones de X en X, o equivalentemente, si para cada $g \in G$ y $x \in X$, existe un elemento $g \cdot x \in X$ (resp. $x \cdot g \in X$) satisfaciendo $(hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x)$ para cualquier otro $h \in G$ y $1 \cdot x = x$ (resp. $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$ y $x \cdot 1 = x$). Si G actúa por la izquierda en X y $x \in X$, la *órbita de x* es el conjunto $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$, mientras que su estabilizador es el subgrupo $G_x \leq G$ de elementos $g \in G$ tales que $g \cdot x = x$. Denotaremos por $G\backslash X$ al conjunto de órbitas de X y por $[G\backslash X]$ a un conjunto de representantes de las órbitas. Como casos particulares, $[S(G)]$ (resp. $[CS(G)]$) denotará un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos (resp. subgrupos cíclicos) de G.

Dado un grupo finito G, un *G-conjunto izquierdo* es un conjunto con una acción izquierda de G, y de forma análoga se define un *G-conjunto derecho*. Un *morfismo de G-conjuntos izquierdos* es una función entre G-conjuntos que conmuta con la acción de G. Denotamos por $G - set$ a la categoría de G-conjuntos izquierdos finitos y morfismos de G-conjuntos. La categoría $G - set$ tiene una categoría monoidal simétrica respecto a la unión disjunta, con un producto de G-conjuntos dado por la acción diagonal de G en el producto cartesiano. En adelante por G-conjunto siempre nos referiremos a un G-conjunto izquierdo, a menos que se especifique otra cosa.

Si H es otro grupo finito, un *(H, G)-biconjunto* es un conjunto que es un H-conjunto izquierdo y un G-conjunto derecho a la vez, de tal manera que ambas acciones conmutan. Equivalentemente, un (H, G)-biconjunto es un $(H \times G^{op})$-conjunto. Un morfismo de (H, G)-biconjuntos es una función entre biconjuntos que conmuta con ambas acciones. A menudo escribiremos *"${}_H X_G$ es un biconjunto"* para indicar que X es un (H, G)-biconjunto. Si X es un (H, G)-biconjunto, se define su *opuesto* como el (G, H)-biconjunto X^{op}, que como conjunto es X con acciones definidas por $g \cdot x \cdot h := h^{-1}xg^{-1}$ para $x \in X^{op}$, $g \in G$ y $h \in H$. De forma análoga a los G-conjuntos, se definen la unión disjunta y el producto de biconjuntos.

Si $D \leq H \times G$, el conjunto de clases laterales $(H \times G)/D$ es un (H, G)-biconjunto transitivo, con acciones definidas por $h_0 \cdot (h, g)D \cdot g_0 := (h_0 h, g_0^{-1} g)D$ para $(h, g)D \in (H \times G)/D$, $h_0 \in H$ y $g_0 \in G$, y cada biconjunto transitivo viene dado de esta forma. Si $\psi : H \longrightarrow G$ es un morfismo de grupos, G puede ser provisto con una estructura de (H, G)-biconjunto, que denotamos por ${}_{H^\psi} G_G$, con acciones dadas por $h \cdot g \cdot g_0 = \psi(h) g g_0$ para $g \in_{H^\psi} G_G$, $h \in H$ y $g_0 \in G$. Su opuesto es el (G, H)-biconjunto ${}_G G_{\psi H}$ con $g_0 \cdot g \cdot h = g_0 g \psi(h)$ para $g \in_G G_{\psi H}$, $g_0 \in G$ y $h \in H$. Estos biconjuntos son transitivos, y se tiene que ${}_{H^\psi} G_G \cong (H \times G)/\Delta^\psi(H)$ y ${}_G G_{\psi H} \cong (G \times H)/\Delta_\psi(H)$, donde $\Delta^\psi(H) = \{(h, \psi(h)) | h \in H\}$ y $\Delta_\psi(H) = \{(\psi(h), h) | h \in H\}$.

Casos de particular importancia de los biconjuntos definidos en el párrafo anterior se tienen cuando ψ es una inclusión, la proyección a un cociente o un isomorfismo. Si $H \leq G$, escribiremos Res_H^G para ${}_HG_G$ e Ind_H^G para ${}_GG_H$, conocidos como la *restricción de G a H* y la *inducción de H a G* respectivamente. Si $N \trianglelefteq G$ y π es la proyección de G a G/N, escribiremos $Inf_{G/N}^G$ para ${}_{G^\pi}G/N_{G/N}$ y $Def_{G/N}^G$ para ${}_{G/N}G/N_{^\pi G}$, conocidos como la *inflación de G/N a G* y la *deflación de G a G/N* respectivamente. Finalmente, si $\psi : H \longrightarrow G$ es un isomorfismo, denotaremos por $Iso(\psi)$ al biconjunto ${}_GG_{\psi H}$. Estos biconjuntos son conocidos como *biconjuntos básicos*.

Definición 1.1.1. Si ${}_KY_H$ y ${}_HX_G$ son biconjuntos, su producto cartesiano $Y \times X$ es un H-conjunto con acción dada por $h \cdot (y, x) = (yh^{-1}, hx)$ para $(y, x) \in Y \times X$ y $h \in H$. Entonces se define la *composición de Y con X* como el conjunto de órbitas de la H-acción definida, denotado por $Y \times_H X$ o $Y \circ X$, con una estructura de (K, G)-biconjunto definida por $k \cdot [y, x] \cdot g = [ky, xg]$ para $k \in K$ y $g \in G$ y donde $[y, x]$ denota la H-órbita de (y, x).

De la Proposición 2.3.14 de [5], la composición de biconjuntos es, hasta isomorfismo, asociativa y distributiva respecto a la unión disjunta. Además, para cada biconjunto ${}_HX_G$ se tiene $H \circ X \cong X \cong X \circ G$. Si ahora X es G-conjunto y ${}_HY_G$ un biconjunto, el H-conjunto $Y \times_G X$ se define de forma análoga a la composición de biconjuntos al considerar X como un $(G, 1)$-biconjunto, y propiedades análogas a la composición se satisfacen para esta operación.

Dado $D \leq H \times G$, se definen

$$p_1(D) = \{h \in H | \exists g \in G \ t.q. \ (h, g) \in D\},$$

$$k_1(D) = \{h \in H | (h, 1) \in D\},$$

$$p_2(D) = \{g \in G | \exists h \in H \ t.q. \ (h, g) \in D\},$$

$$k_2(D) = \{g \in G | (1, g) \in D\},$$

y es sencillo ver que $k_1(D) \trianglelefteq p_1(D) \leq H$, que $k_2(D) \trianglelefteq p_2(D) \leq G$, y que $k_1(D) \times k_2(D) \trianglelefteq D$. Si definimos

$$q(D) = D/(k_1(D) \times k_2(D)),$$

tenemos el conocido *Lema de Goursat*.

Lema 1.1.2 (Goursat). *Si $D \leq H \times G$, se tienen isomorfismos de grupos*

$$p_1(D)/k_1(D) \cong q(D) \cong p_2(D)/k_2(D).$$

El siguiente resultado, conocido como *descomposición en forma normal*, nos dice que todo biconjunto transitivo puede escribirse como composición de biconjuntos básicos.

Lema 1.1.3 (Bouc [5, Lema 2.3.26]). *Si $D \leq H \times G$, entonces*

$$(H \times G)/D \cong Ind_{p_1(D)}^H \circ Inf_{p_1(D)/k_1(D)}^{p_1(D)} \circ Iso(\psi) \circ Def_{p_2(D)/k_2(D)}^{p_2(D)} \circ Res_{p_2(D)}^G,$$

donde $\psi : p_2(D)/k_2(D) \longrightarrow p_1(D)/k_1(D)$ es el isomorfismo dado por el Lema de Goursat.

Si $E \leq K \times H$ y $D \leq H \times K$, se define

$$E * D = \{(k, g) \in K \times G | \exists h \in H \ t.q. \ (k, h) \in E \ \& \ (h, g) \in D\},$$

que es un subgrupo de $K \times G$. Tenemos entonces la *fórmula de Mackey para biconjuntos.*

Lema 1.1.4 (Bouc [5, Lema 2.3.24])**.** *Si $E \leq K \times H$ y $D \leq H \times G$, se tiene*

$$(K \times H)/E \circ (H \times G)/D \cong \bigsqcup_{h \in [q_2(E) \backslash H / q_1(D)]} (K \times G)/(E * {}^{(h,1)}D)$$

como (K, G)-biconjuntos.

Para una categoría esqueléticamente pequeña $\mathcal{K}$, denotaremos por $[\mathcal{K}]$ al conjunto de clases de isomorfismo de sus objetos.

Definición 1.1.5. Sea $\mathcal{K}$ una categoría esqueléticamente pequeña y sea $\mathcal{R}$ una clase de ternas de objetos de $\mathcal{K}$, estable bajo isomorfismo. El *grupo de Grothendieck* $K_0(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ se define como el cociente de $\mathbb{Z}^{[\mathcal{K}]}$ por el subgrupo generado por los elementos de la forma $[A] - [B] - [C]$ con $(A, B, C) \in \mathcal{R}$.

Un caso de particular importancia es el siguiente.

Definición 1.1.6. Si G es un grupo finito, se define su *anillo de Burnside* $B(G)$ como el grupo de Grothendieck $K_0(G - set, \mathcal{R})$, donde $\mathcal{R}$ es la clase de ternas (X, Y, Z) tales que $X \cong Y \sqcup Z$, y que en efecto es un anillo conmutativo unitario con producto inducido por el producto de G-conjuntos y unidad dada por la clase de G/G.

Un conocido teorema de Burnside implica que $B(G)$ es un grupo abeliano libre con base en las clases de isomorfismo de G-conjuntos transitivos, y por lo tanto tiene rango igual al número de clases de conjugación de subgrupos de G. De forma análoga, se define el *anillo de Burnside de biconjuntos* $B(H, G)$ como el grupo de Grothendieck de la categoría de (H, G)-biconjuntos.

1.2. Funtores de biconjuntos

La composición de biconjuntos se extiende por linealidad a una *composición* biaditiva

$$B(K, H) \times B(H, G) \xrightarrow{\circ} B(K, G)$$

para cualesquiera grupos finitos K, H y G, que denotamos por $(\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ \alpha$. Esta composición es asociativa por la asociatividad de la composición de biconjuntos, es decir, $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para todos $\gamma \in B(L, K)$, $\beta \in B(K, H)$ y $\alpha \in B(H, G)$, si L es otro grupo finito, y además, $[H] \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ [G]$.

Definición 1.2.1. La *categoría de biconjuntos* $\mathcal{C}$ consiste de lo siguiente:

- $Ob(\mathcal{C})$ es la clase de todos los grupos finitos.
- Para cada par de objetos H y G de $\mathcal{C}$, el conjunto de morfismos $\mathcal{C}(G,H)$ de G a H es el anillo de Burnside de biconjuntos $B(H,G)$.
- La composición en $\mathcal{C}$ es la composición inducida por la composición de biconjuntos.
- Para cada G en $Ob(\mathcal{C})$, la identidad es la clase de isomorfismo del (G,G)-biconjunto G.

Es fácil ver que la categoría $\mathcal{C}$ es preaditiva. Ahora, dados una categoría preaditiva $\mathcal{M}$ y un anillo conmutativo unitario k, se define la *k-linealización* $k\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ como la categoría k-lineal que tiene por objetos los mismos que $\mathcal{M}$ y con conjuntos de morfismos dados por $k\mathcal{M}(x,y) = k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}(x,y)$ para cada par de objetos x y y de $k\mathcal{M}$, con composición inducida de la de $\mathcal{M}$ por extensión k-lineal.

Definición 1.2.2 (Bouc [5, Definición 3.2.2])**.** Sean k un anillo conmutativo con unidad y $\mathcal{D}$ una subcategoría preaditiva de $\mathcal{C}$. Un *funtor de biconjuntos para $\mathcal{D}$ sobre k* es un funtor k-lineal de $k\mathcal{D}$ en $k-Mod$. Se denota por $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$ a la categoría de funtores de biconjuntos para $\mathcal{D}$ sobre k con morfismos dados por transformaciones naturales.

En adelante, k será siempre un anillo conmutativo unitario y $\mathcal{D}$ será una subcategoría preaditiva de la categoría de biconjuntos, y por funtor de biconjuntos nos referiremos a un funtor de biconjuntos para $\mathcal{D}$ sobre k. Mencionamos ahora algunos ejemplos importantes.

Ejemplo 1.2.3. Sean G y H grupos finitos. Cada biconjunto finito ${}_HY_G$ induce un morfismo de grupos abelianos $B(Y) : B(G) \longrightarrow B(H)$ que envía la clase de isomorfismo del G-conjunto X a la clase de $Y \circ X$. Entonces cada $\alpha \in B(H,G)$ define un morfismo de grupos abelianos $B(\alpha) : B(G) \longrightarrow B(H)$, y las asignaciones $G \mapsto B(G)$ y $\alpha \mapsto B(\alpha)$ definen un funtor aditivo $B : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}b$, que se extiende a un funtor k-lineal $kB : k\mathcal{D} \longrightarrow k - Mod$ al definir $kB(G) = k \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ para cada G en $k\mathcal{D}$. Este es conocido como el *funtor de Burnside*.

Ejemplo 1.2.4. Si $\mathbb{F}$ es un campo y G es un grupo finito, se define el *anillo de $\mathbb{F}$-representaciones lineales* $R_{\mathbb{F}}(G)$ como el grupo de Grothendieck $K_0(\mathbb{F}G - mod, \mathcal{R})$, donde $\mathcal{R}$ es la clase de ternas de módulos (M,K,Q) para los que existe una sucesión exacta $0 \to K \to M \to Q \to 0$; este es un anillo conmutativo con producto inducido por el producto tensorial sobre $\mathbb{F}$ y unidad dada por la clase del módulo trivial. Cuando $\mathbb{F}$ es de característica cero, cada biconjunto finito ${}_HY_G$ define un morfismo de grupos abelianos $R_{\mathbb{F}}(Y) : R_{\mathbb{F}}(G) \longrightarrow R_{\mathbb{F}}(H)$ que envía la clase del $\mathbb{F}G$-módulo M a la clase de $\mathbb{F}Y \otimes_{\mathbb{F}G} M$, donde $\mathbb{F}Y$ es el $(\mathbb{F}H, \mathbb{F}G)$-bimódulo de permutaciones generado por Y. Esto define un funtor aditivo $R_{\mathbb{F}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}b$, que se extiende a un funtor k-lineal $kR_{\mathbb{F}} : k\mathcal{D} \longrightarrow k - Mod$ al definir $kR_{\mathbb{F}}(G) = k \otimes_{\mathbb{Z}} R_{\mathbb{F}}(G)$, y este es el *funtor de $\mathbb{F}$-representaciones lineales*. Dado que en característica 0 cada $\mathbb{F}G$-módulo finitamente generado M está determinado hasta isomorfismo por su carácter χ_M, la asignación $[M] \mapsto \chi_M$ induce un isomorfismo de anillos de $R_{\mathbb{F}}(G)$ al *anillo de $\mathbb{F}$-caracteres virtuales* $ch(\mathbb{F}G)$. A menudo identificaremos ambos anillos, y pensaremos en $kR_{\mathbb{F}}$ como el funtor que a cada G en $\mathcal{D}$ le asocia el álgebra $kch(\mathbb{F}G)$.

Ejemplo 1.2.5. Si G y C son grupos finitos con C abeliano, un *G-conjunto C-fibrado* es un $G\times C$-conjunto en el que C actúa libremente. El *anillo de Burnside monomial de G con coeficientes en C* es el subgrupo $B^1_C(G)$ de $B(G\times C)$ generado por las clases de isomorfismo de G-conjuntos C-fibrados. Si ${}_HY_G$ es un biconjunto finito y X es un G-conjunto C-fibrado, denotamos por $((Y\times C)\times_{G\times C}X)_{C-f}$ al subconjunto de $(Y\times C)\times_{G\times C}X$ de los elementos en que C actúa libremente, y la asignación $X\mapsto((Y\times C)\times_{G\times C}X)_{C-f}$ induce un homomorfismo de grupos $B^1_C(Y): B^1_C(G)\longrightarrow B^1_C(H)$. Entonces las asignaciones $G\mapsto B^1_C(G)$ y $\alpha\mapsto B^1_C(\alpha)$ para $\alpha: G\to H$ en $\mathcal{D}$ definen un funtor aditivo B^1_C, que como en los ejemplos anteriores se extiende a un funtor k-lineal $kB^1_C: k\mathcal{D}\longrightarrow k-Mod$, conocido como el *funtor de Burnside monomial con coeficientes en C*.

Hay muchos ejemplos más que pudiéramos mencionar, como el funtor de grupos de $\mathbb{F}G$-módulos proyectivos sobre un campo arbitrario $\mathbb{F}$, la cohomología de grupos, la K-teoría algebraica y los funtores de Mackey globales, definidos sobre subcategorías con ciertas restricciones. De especial importancia es el *funtor de unidades del anillo de Burnside* $B^\times$ para $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{Z}$, que a cada G le asigna el grupo $B(G)^\times$ de unidades de $B(G)$. Un resultado de tom Dieck establece que el Teorema de Feit-Thompson es equivalente a demostrar que $B(G)^\times=\{1,-1\}$ para cada G de orden impar, lo que pone en evidencia la dificultad para determinar el grupo $B(G)^\times$ para G arbitrario. En cualquier caso, las propiedades funtoriales de $B^\times$ conducen a una descripción de $B(P)^\times$ cuando P es un p-grupo. Para más detalles, véase Bouc [5, Sección 11.3].

Ejemplo 1.2.6. Dados un grupo finito G y un campo $\mathbb{F}$ de característica cero, la formación de $\mathbb{F}G$-módulos de permutaciones sobre G-conjuntos induce un morfismo de grupos abelianos $\lambda_G: B(G)\longrightarrow R_{\mathbb{F}}(G)$ que envía la clase de isomorfismo de un G-conjunto X a la clase de $\mathbb{F}X$. Si ${}_HY_G$ es un biconjunto, la asignación $[y,x]\mapsto y\otimes x$ define un isomorfimo de $\mathbb{F}H$-módulos de $\mathbb{F}(Y\circ X)$ a $\mathbb{F}Y\otimes_{\mathbb{F}G}\mathbb{F}X$, de donde se sigue que los morfismos λ_G definen un morfismo de funtores de biconjuntos $\lambda: kB\longrightarrow kR_{\mathbb{F}}$, conocido como *morfismo linealización*. Cuando P es un p-grupo para un primo p, el Teorema de Ritter-Segal [3] implica que λ_P es sobreyectiva, y si k es un campo de característica de cero, el Teorema de Inducción de Artin implica que λ_G es sobreyectiva para todo G.

Un problema natural que surge al estudiar la categoría $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$ consiste en encontrar una parametrización de las clases de isomorfismo de sus objetos simples. Esto es en general un problema difícil, pero es posible resolverlo elegantemente al imponer ciertas restricciones sobre $\mathcal{D}$.

Definición 1.2.7. Una subcategoría $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ *contiene isomorfismos de grupos* si para cada isomorfismo de grupos $\gamma: G\longrightarrow H$ con G y H objetos de $\mathcal{D}$, la clase del biconjunto básico $Iso(\gamma)$ es un morfismo en $\mathcal{D}$.

Definición 1.2.8. Una subcategoría $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ se dice *admisible* si contiene isomorfismos de grupos y para cada par de objetos H y G de $\mathcal{D}$ se satisface lo siguiente:

1. Hay un subconjunto $S(H,G)$ del conjunto de subgrupos de $H \times G$, invariante bajo $(H \times G)$-conjugación, tal que $\mathcal{D}(H,G)$ es el subgrupo de $B(H,G)$ generado por los elementos $[(H \times G)/L]$ para $L \in S(H,G)$.

2. Si $L \in S(H,G)$, entonces $q(L)$ es un objeto de $\mathcal{D}$, y además

$$Ind^{H}_{p_1(L)} \circ Inf^{p_1(L)}_{p_1(L)/k_1(L)} \text{ y } Def^{p_2(L)}_{p_2(L)/k_2(L)} \circ Res^{G}_{p_2(L)}$$

son morfismos en $\mathcal{D}$.

De la definición tenemos que si G y H son objetos de $\mathcal{D}$ y $L \in S(G,H)$, entonces

$$[(H \times G)/L] = (Ind^{H}_{p_1(L)} \circ Inf^{p_1(L)}_{p_1(L)/k_1(L)}) \circ Iso(\psi) \circ (Def^{p_2(L)}_{p_2(L)/k_2(L)} \circ Res^{G}_{p_2(L)})$$

en $\mathcal{D}$, donde $\psi : p_2(L)/k_2(K) \longrightarrow p_1(L)/k_1(L)$ es el isomorfismo del Lema de Goursat. Esto puede interpretarse como que en $\mathcal{D}$ se satisface una forma débil de la descomposición en forma normal para los morfismos dados por biconjuntos transitivos.

En el caso de una subcategoría admisible $\mathcal{D}$, el problema de parametrización de los funtores de biconjuntos simples fue resuelto Serge Bouc en [4]. Para tal parametrización es necesario introducir las nociones de grupo minimal, álgebra esencial y semillas en $k\mathcal{D}$.

Definición 1.2.9. Sea F un funtor de biconjuntos para $\mathcal{D}$ sobre k. Un objeto G de $k\mathcal{D}$ es un *grupo minimal* para F si $0 \neq F(G)$ y $F(H) = 0$ para todo $|H| < |G|$.

Los grupos minimales existen para todo funtor de biconjuntos diferente de cero, como una consecuencia inmediata del Principio del buen orden, pero en general no tenemos que dos grupos minimales de un funtor dado sean isomorfos

Definición 1.2.10. Si G es un objeto de $k\mathcal{D}$, se define el *álgebra esencial* en G como el cociente

$$\widehat{k\mathcal{D}}(G) = \frac{End_{k\mathcal{D}}(G)}{I(G)},$$

donde $I(G)$ es el submódulo de $End_{k\mathcal{D}}(G)$ generado por los endomorfismos que se factorizan a través de grupos de orden menor que $|G|$, o explícitamente,

$$I(G) = \sum_{|H|<|G|} \langle k\mathcal{D}(H,G) \circ k\mathcal{D}(G,H) \rangle \,,$$

que es un ideal bilateral de $End_{k\mathcal{D}}(G)$. Si a es un elemento de $End_{k\mathcal{D}}(G)$, denotaremos por $\widehat{a}$ su clase en $\widehat{k\mathcal{D}}(G)$.

Si S es un funtor de biconjuntos simple y G es un grupo minimal para este, entonces $S(G)$ es naturalmente un $End_{k\mathcal{D}}(G)$-módulo al definir $\alpha \cdot s = S(\alpha)(s)$ para $s \in S(G)$ y $\alpha \in End_{k\mathcal{D}}(G)$, y con tal estructura es simple y anulado por $I(G)$, siendo entonces un

$\widehat{k\mathcal{D}}(G)$-módulo simple. Cuando $\mathcal{D}$ es una subcategoría admisible, los grupos minimales de funtores simples son únicos hasta isomorfismo grupos. Además, en este caso el álgebra $\widehat{k\mathcal{D}}(G)$ es isomorfa a $kOut(G)$ y por lo tanto es siempre distinta de cero.

Si $\psi : G \longrightarrow H$ es un isomorfismo de grupos con G y H objetos de $k\mathcal{D}$ y tal que $Iso(\psi)$ e $Iso(\psi^{-1})$ son morfismos en $k\mathcal{D}$, se tiene entonces un isomorfismo de k-álgebras

$$\widehat{\psi} : \widehat{k\mathcal{D}}(G) \longrightarrow \widehat{k\mathcal{D}}(H)$$

dado por la regla $\widehat{a} \mapsto \widehat{b \circ a \circ b'}$ para $a \in End_{k\mathcal{D}}(G)$, donde $b = Iso(\psi)$ y $b' = Iso(\psi^{-1})$. Si W es un $\widehat{k\mathcal{D}}(H)$-módulo, denotaremos por ${}^{\psi}W$ su restricción de escalares vía $\widehat{\psi}$.

Definición 1.2.11. Una *semilla* en $k\mathcal{D}$ es un par (G, V) que consiste de un objeto G de $k\mathcal{D}$ y un $\widehat{k\mathcal{D}}(G)$-módulo simple V. Si (H, W) es otra semilla, se dirá que (G, V) y (H, W) son *isomorfas* si existe un isomorfismo de grupos $\psi : G \longrightarrow H$ tal que $Iso(\psi)$ e $Iso(\psi^{-1})$ son morfismos en $k\mathcal{D}$ y ${}^{\psi}W \cong V$ como $\widehat{k\mathcal{D}}(G)$-módulos.

La importancia de las semillas radica en que a partir de estas podemos generar funtores de biconjuntos simples: dada (G, V), se construye un funtor simple $S_{G,V}$ con G como grupo minimal y $S(G) \cong V$ como $\widehat{k\mathcal{D}}(G)$-módulos; además, si (H, W) es una semilla isomorfa a (G, V), tenemos que $S_{H,W}$ es isomorfo a $S_{G,V}$.

Teorema 1.2.12 (Bouc [5, Teorema 4.3.10])**.** *Sean k un anillo conmutativo con unidad y $\mathcal{D}$ una subcategoría admisible de la categoría de biconjuntos. Hay una biyección entre el conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples de $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$ y el conjunto de clases de isomorfismo de semillas de $k\mathcal{D}$.*

La demostración del teorema utiliza fuertemente que los grupos minimales de funtores simples son únicos hasta isomorfismo de grupo cuando $\mathcal{D}$ es una subcategoría admisible. Omitimos detalles pues en el siguiente capítulo daremos una generalización de este resultado.

1.3. La construcción de Yoneda-Dress

La construcción de Yoneda-Dress es uno de los ingredientes principales de este trabajo; esta tiene sentido sólo para funtores sobre subcategorías con ciertas propiedades que a continuación definimos. Para más detalles sobre esta construcción véase Bouc [5, Capítulo 8].

Definición 1.3.1. Una subcategoría $\mathcal{D}$ de la categoría de biconjuntos se dice *cerrada bajo subcocientes* si cada grupo isomorfo a un subcociente de un objeto de $\mathcal{D}$ es también un objeto de $\mathcal{D}$. Si además $\mathcal{D}$ es plena, entonces se dice que es una subcategoría *repleta*.

Definición 1.3.2. Una subcategoría $\mathcal{D}$ de la categoría de biconjuntos se dice *cerrada bajo productos* si todo grupo isomorfo al producto de un par de objetos de $\mathcal{D}$ es también un objeto de $\mathcal{D}$.

En adelante asumiremos que $\mathcal{D}$ es una categoría repleta y cerrada bajo productos. La categoría $\mathcal{C}$ es trivialmente repleta y cerrada bajo productos. Otro ejemplo es la subcategoría plena $\mathcal{C}_p$ que tiene por objetos todos los p-grupos para un primo p dado. En general, si π es un conjunto de números primos, la subcategoría plena $\mathcal{C}_\pi$ que tiene por objetos a los π-grupos es también repleta y cerrada bajo productos.

Si L, K, H y G son objetos de $\mathcal{D}$ y ${}_LY_K$ y ${}_HX_G$ son biconjuntos, el producto cartesiano $Y \times X$ es naturalmente un $(L \times H, K \times G)$-biconjunto al definir $(l,h)(y,x)(k,g) = (lyh, hxg)$ para $(y,x) \in Y \times X$, $(l,h) \in L \times H$ y $(k,g) \in K \times G$. Esta construcción se extiende a una aplicación bilineal

$$kB(L,K) \times kB(H,G) \longrightarrow kB(L \times H, K \times G)$$

que denotamos por $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \times \beta$.

Definición 1.3.3. Si G es un objeto de $k\mathcal{D}$ y F es un objeto de $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$, *la construcción de Yoneda-Dress de F en G*, o simplemente el *trasladado de F por G*, es el funtor de biconjuntos F_G definido por $F_G(H) = F(H \times G)$ para cada objeto H de $k\mathcal{D}$ y

$$F_G(\alpha) = F(\alpha \times G) : F_G(H) \longrightarrow F_G(K)$$

para cada morfismo $\alpha : H \longrightarrow K$ en $k\mathcal{D}$.

La construcción de Yoneda-Dress en G define así un endofuntor P_G de $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$ al definir $P_G(F) = F_G$ para cada funtor de biconjuntos F, y $P_G(f) : F_G \longrightarrow F'_G$ dado en la componente H-ésima por $P_G(f)_H = f_{H \times G}$ para cada H en $\mathcal{D}$, para cada morfismo de funtores de biconjuntos $f : F \longrightarrow F'$. El siguiente lema resume algunas de las propiedades de esta construcción.

Lema 1.3.4. *Sean H y G objetos de $k\mathcal{D}$. Se satisface lo siguiente:*

1. *Los funtores $Id_{\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}}$ y P_1 son isomorfos.*

2. *Los funtores $P_H \circ P_G$ y $P_{H \times G}$ son isomorfos.*

3. *Todo $\alpha \in kB(H,G)$ induce una transformación natural $P_\alpha : P_G \longrightarrow P_H$ definida por $P_{\alpha,F,K} = F(K \times \alpha) : F_G(K) \longrightarrow F_H(K)$ para cada F en $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$ y cada objeto K de $k\mathcal{D}$.*

4. *Si $\beta \in kB(K,H)$ y $\alpha \in kB(H,G)$, entonces $P_\beta \circ P_\alpha = P_{\beta \circ \alpha}$.*

5. *Las correpondencias $G \mapsto P_G$ para cada G en $\mathcal{D}$ y $\alpha \mapsto P_\alpha$ para cada $\alpha \in kB(H,G)$ definen un funtor k-lineal $P : k\mathcal{D} \longrightarrow End_k(\mathcal{F}_{\mathcal{D},k})$, donde $End_k(\mathcal{F}_{\mathcal{D},k})$ denota la categoría de endofuntores k-lineales de $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$.*

6. *El funtor P_G es autoadjunto, y por lo tanto, exacto.*

Todos las aserciones del lema son ejercicios técnicos sencillos, a excepción del inciso 6. Para una demostración de este último, véase Bouc [5, Proposición 8.2.7]. Terminamos este capítulo comentando que la construcción de Yoneda-Dress se usa para la construcción del bifuntor *hom interno* $\mathcal{H} : \mathcal{F}_{\mathcal{D},k}^{op} \times \mathcal{F}_{\mathcal{D},k} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$ dado por

$$\mathcal{H}(F, F') = \mathcal{F}_{\mathcal{D},k}(F, P_{\_}(F'))$$

para cada par de funtores de biconjuntos F y F'. Posteriormente, se define un bifuntor *producto tensorial interno* $\otimes : \mathcal{F}_{\mathcal{D},k} \times \mathcal{F}_{\mathcal{D},k} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$, dado por el co-fin

$$F \otimes F' = \int^{H,K} F(H) \otimes_k F'(K) \otimes_k k\mathcal{D}(H \times K, \_)$$

sobre $k\mathcal{D} \times k\mathcal{D}$, para cada par de funtores de biconjuntos F y F'. Estos bifuntores satisfacen que $F \otimes \_$ es adjunto izquierdo a $\mathcal{H}(F, \_)$ para cada F en $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$, tal como $M \otimes_k \_$ y $Hom_k(M, \_)$ son adjuntos para cada k-módulo M. El producto tensorial interno dota a $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$ de una estructura de categoría monoidal simétrica. Para más detalles sobre el hom interno y el producto tensorial interno, véanse las Secciones 8.3 y 8.4 de [5].

Capítulo 2

Funtores de Green en biconjuntos

En este capítulo, $\mathcal{D}$ es siempre una subcategoría repleta y cerrada bajo productos, y por funtor de biconjuntos nos referiremos siempre a un objeto de $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$. Se presenta aquí un estudio general de los funtores de Green en biconjuntos, sus módulos y algunas construcciones importantes.

2.1. Definición y ejemplos

Para cualesquiera grupos finitos L, K y H, denotaremos por

$$\alpha_{L,K,H} : L \times (K \times H) \longrightarrow (L \times K) \times H,$$

$$\lambda_H : 1 \times H \longrightarrow H, \ \rho_H : H \times 1 \longrightarrow H$$

a los isomorfismos canónicos. Llegamos a la definición de funtor de Green en biconjuntos.

Definición 2.1.1. Un *funtor de Green en biconjuntos* es un funtor de biconjuntos A, junto con *productos bilineales* $A(K) \times A(H) \xrightarrow{\times} A(K \times H)$, denotados por $(a, b) \mapsto a \times b$, para cada par de objetos K y H de $k\mathcal{D}$, y un elemento $\epsilon_A \in A(1)$, que satisfacen las siguientes condiciones:

1. (Asociatividad) Sean L, K y H objetos de $k\mathcal{D}$. Entonces

$$(a \times b) \times c = A(Iso(\alpha_{L,K,H}))(a \times (b \times c))$$

para todo $a \in A(L)$, $b \in A(K)$ y $c \in A(H)$.

2. (Elemento identidad) Sea H un objeto de $k\mathcal{D}$. Entonces

$$A(Iso(\lambda_H))(\epsilon_A \times a) = a = A(Iso(\rho_H))(a \times \epsilon_A)$$

para todo $a \in A(H)$.

3. (Funtorialidad) Si $\alpha : K \to T$ y $\beta : H \to L$ son morfismos en $k\mathcal{D}$, entonces

$$A(\alpha \times \beta)(a \times b) = A(\alpha)(a) \times A(\beta)(b)$$

para cualesquiera $a \in A(K)$ y $b \in A(H)$.

Si C es otro funtor de Green en biconjuntos, un *morfismo de funtores de Green en biconjuntos* es un morfismo de funtores de biconjuntos $f : A \to C$ que satisface lo siguiente:

1. $f_{K\times H}(a \times b) = f_K(a) \times f_H(b)$ para cada par de objetos K y H en $k\mathcal{D}$, y todo $a \in A(K)$ y $b \in A(H)$,

2. $f_1(\epsilon_A) = \epsilon_C$.

Según la Definición 8.5.1 de [5], un funtor de Green en biconjuntos es un objeto monoide de $\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$ respecto a la estructura monoidal dada por el producto tensorial interno, y por la Observación 8.4.3 y la Proposición 5.1.2, eso es equivalente a la definición que aquí damos. A continuación mencionamos algunos ejemplos importantes.

Ejemplo 2.1.2. Si K y H son grupos finitos, Y es un K-conjunto y X es un H-conjunto, el producto cartesiano $Y \times X$ es naturalmente un $K \times H$-conjunto, al definir $(k, h)(y, x) = (ky, hx)$ para $(y, x) \in Y \times X$ y $(k, h) \in K \times H$, y esto induce una aplicación bilineal

$$kB(K) \times kB(H) \longrightarrow kB(K \times H)$$

tal que $([Y], [X]) \mapsto [Y \times X]$. Con estas aplicaciones para K y H en $k\mathcal{D}$, el funtor de Burnside kB es un funtor de Green en biconjuntos, con elemento identidad dado por la clase del 1-conjunto 1 en $kB(1)$. Este funtor es un objeto inicial en la categoría de funtores de Green biconjuntos: si A es un funtor de Green en biconjuntos, la regla $\lambda_H(X) = A({}_HX_1)(\epsilon)$ para cada H-conjunto X induce un morfismo de funtores de Green en biconjuntos $\lambda : kB \longrightarrow A$, y se verifica que cualquier otro morfismo satisface dicha regla.

Ejemplo 2.1.3. Si $\mathbb{F}$ es un campo, K y H son grupos finitos, M es un $\mathbb{F}K$-módulo y N es un $\mathbb{F}H$-módulo, su *producto externo* es el $\mathbb{F}(K\times H)$-módulo $M \otimes_{\mathbb{F}} N$, donde $(k, h)\cdot(m\otimes n) = km \otimes hn$ para cada $m \in M$, $n \in N$ y $(k, h) \in K \times H$, y esto induce una aplicación bilineal

$$kR_{\mathbb{F}}(K) \times kR_{\mathbb{F}}(H) \longrightarrow kR_{\mathbb{F}}(K \times H)$$

que envía $([M], [N)]$ en $[M \otimes_{\mathbb{F}} N]$. Entonces el funtor $kR_{\mathbb{F}}$ para $\mathbb{F}$ un campo de característica cero es un funtor de Green en biconjuntos con productos inducidos por el producto externo e identidad dada por la clase del módulo trivial en $kR_{\mathbb{F}}(1)$. Además, se verifica que el morfismo linealización $\lambda : kB \longrightarrow kR_{\mathbb{F}}$ definido en el Ejemplo 1.2.6 es un morfismo de funtores de Green en biconjuntos.

Ejemplo 2.1.4. En general, si A es un funtor de Green en biconjuntos y G es un objeto en $k\mathcal{D}$, el funtor A_G es también un funtor de Green en biconjuntos con productos

$$\times^d : A_G(K) \times A_G(H) \longrightarrow A_G(K \times H)$$

definidos por

$$a \times^d b = A({}_{K\times H\times G^{\Delta}}K \times G \times H \times G_{K\times G\times H\times G})(a \times b)$$

para $a \in A(K \times G)$ y $b \in A(H \times G)$ y K y H en $k\mathcal{D}$, y con elemento identidad $A(Inf_1^{1\times G})(\epsilon)$. Los funtores A_G son los *trasladados de* A, que estudiaremos más a fondo en la Sección 2.2.

Ejemplo 2.1.5. Si C es un grupo finito abeliano, el funtor de Burnside monomial kB_C^1 es un funtor de Green en biconjuntos con la estructura que se describe a continuación. Si Y es un K-conjunto C-fibrado y X es un H-conjunto C-fibrado, C actúa en $Y \times X$ por $c \cdot (y, x) = ((1, c)y, (1, c^{-1})x)$ para $c \in C$ y $(y, x) \in Y \times X$; el conjunto de orbitas de esta acción se denota por $Y \otimes X$ y es un $K \times H$-conjunto C-fibrado con acción dada por $(k, h, c) \cdot y \otimes x = (k, 1)y \otimes (h, c)x$, donde $y \otimes x$ denota la clase de (y, z) en $Y \otimes X$. Esta construcción induce aplicaciones bilineales

$$\otimes : kB_C^1(K) \times kB_C^1(H) \longrightarrow kB_C^1(K \times H)$$

dadas por $([Y], [X]) \mapsto [Y \otimes X])$ para K y H en $k\mathcal{D}$, que satisfacen los axiomas de asociatividad y funtorialidad, con elemento identidad dado por la clase de C en $B_C^1(1)$. Para más detalles, véase [13].

Para la mayoría de nuestros propósitos en esta tesis, la Definición 2.1.1 es más fácil de manejar. Sin embargo, la siguiente proposición nos da otra definición equivalente que será muy útil al estudiar cierta clase de subfuntores de un funtor de Green en biconjuntos que definiremos en la siguiente sección.

Proposición 2.1.6 (Romero [12, Lema 4.2.3])**.** *Sea A un funtor de biconjuntos. Son equivalentes:*

1. *A es un funtor de Green en biconjuntos.*
2. *Para cada objeto H de $k\mathcal{D}$, $A(H)$ es una k-álgebra asociativa con unidad, y si K es otro objeto de $\mathcal{D}$ y $\psi : H \longrightarrow K$ es un morfismo de grupos, se tiene que:*
   a) *$A({}_{H^{\psi}}K_K) : A(K) \longrightarrow A(H)$ es un homorfismo de k-álgebras unitarias.*
   b) *(Identidades de Frobenius) Si $a \in A(H)$ y $b \in A(K)$, entonces*

$$A({}_KK_{\psi H})(a)b = A({}_KK_{\psi H})(aA({}_{H^{\psi}}K_K)(b)),$$

$$bA({}_KK_{\psi H})(a) = A({}_KK_{\psi H})(A({}_{H^{\psi}}K_K)(b)a).$$

Nótese que esta segunda definición no requiere que $\mathcal{D}$ sea cerrada bajo productos, y por lo tanto permite definir a los funtores de Green en biconjuntos en un sentido más amplio, pero no discutiremos esto en esta tesis.

2.2. Módulos e ideales

Los funtores de Green en biconjuntos son análogos a los anillos asociativos unitarios en la categoría de grupos abelianos, y es natural entonces considerar sus módulos.

Definición 2.2.1. Sea A un funtor de Green en biconjuntos. Un *A-módulo izquierdo* es un funtor de biconjuntos M junto con aplicaciones bilineales $A(K) \times M(H) \xrightarrow{\times} M(K \times H)$, denotadas por $(a, m) \mapsto a \times m$, para cada par de objetos K y H de $k\mathcal{D}$, que satisfacen lo siguiente:

1. (Asociatividad) Sean L, K y H objetos de $k\mathcal{D}$. Entonces
$$(a \times b) \times m = M(Iso(\alpha_{L,K,H}))(a \times (b \times m))$$
para todo $a \in A(L)$, $b \in A(K)$ y $m \in M(H)$.
2. (Elemento identidad) Si H es un objeto de $k\mathcal{D}$, entonces $M(Iso(\lambda_H))(\epsilon_A \times m) = m$ para todo $m \in M(H)$.
3. (Funtorialidad) Si $\alpha : K \to T$ y $\beta : H \to L$ son morfismos en $k\mathcal{D}$, entonces
$$M(\alpha \times \beta)(a \times m) = A(\alpha)(a) \times M(\beta)(m)$$
para todo $a \in A(K)$ y $m \in M(H)$.

Si N es otro A-módulo izquierdo, un *morfismo de A-módulos izquierdos* es un morfismo de funtores de biconjuntos $f : M \longrightarrow N$ tal que $f_{K\times H}(a \times m) = a \times f_H(m)$ para cualesquiera K y H objetos de $k\mathcal{D}$, $a \in A(K)$ y $m \in M(H)$.

La noción de A-módulo derecho se puede definir de forma análoga a la de A-módulo izquierdo. Los funtores A y A_G son naturalmente A-módulos izquierdos con el producto bilineal de A. La siguiente proposición es un análogo para módulos de la Proposición 2.1.6.

Proposición 2.2.2 (G. [10, Proposición 1.6])**.** *Sea A un funtor de Green en biconjuntos y M un funtor de biconjuntos. Son equivalentes:*

1. *M es un A-módulo izquierdo.*
2. *Para todo objeto H de $k\mathcal{D}$, $M(H)$ es un $A(H)$-módulo izquierdo, y si K es otro objeto de $k\mathcal{D}$ y $\psi : H \longrightarrow K$ es un morfismo de grupos, se satisface:*
   a) *$M({}_{H^\psi}K_K)(am) = A({}_{H^\psi}K_K)(a)M({}_{H^\psi}K_K)(m)$ para todo $a \in A(K)$ y $m \in M(K)$.*
   b) *(Identidades de Frobenius) Si $a \in A(H)$ y $m \in M(K)$, entonces*
   $$A({}_KK_{\psi H})(a)m = M({}_KK_{\psi H})(aM({}_{H^\psi}K_K)(m)),$$
   y si $b \in A(K)$ y $t \in M(H)$, entonces
   $$bM({}_KK_{\psi H})(t) = M({}_KK_{\psi H})(A({}_{H^\psi}K_K)(b)t).$$

Para todo funtor de Green en biconjuntos A, denotamos por $A - \mathcal{M}od$ a la categoría de todos sus A-módulos izquierdos con los morfismos de A-módulos izquierdos. Un A-*submódulo* de un A-módulo izquierdo M es un subfuntor de biconjuntos de M que es A-módulo izquierdo con la restricción del producto de M. Un A-módulo izquierdo se dice *simple* si no tiene más submódulos izquierdos que el cero y él mismo. Núcleos, imágenes, conúcleos y biproductos pueden definirse puntualmente en $A - \mathcal{M}od$, siendo entonces una categoría abeliana.

Definición 2.2.3. Sea A un funtor de Green en biconjuntos. Un *ideal izquierdo* de A es un A-submódulo del A-módulo izquierdo A. De forma análoga, se definen *ideal derecho* e *ideal bilateral* de A. El funtor de Green en biconjuntos A se dice *simple* si sus únicos ideales bilaterales son el cero y A.

Lema 2.2.4. *Sea A un funtor de Green en biconjuntos y sea I un subfuntor de biconjuntos de A. Entonces I es un ideal izquierdo (resp. derecho, bilateral) de A si y sólo si $I(H)$ es un ideal izquierdo (resp. derecho, bilateral) de $A(H)$ para cada objeto H de $\mathcal{D}$.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata de Proposición 2.2.2, ya que las identidades a) y b) se satisfacen para I por ser subfuntor de A. $\square$

2.2.1. Categoría asociada, álgebras esenciales y semillas

En adelante, por A-*módulo* nos referiremos siempre a un A-módulo izquierdo. La clasificación de los A-módulos simples es en general un problema bastante complicado; en el caso de los funtores de biconjuntos simples, el problema se resuelve al considerar clases de isomorfismo de semillas, como se muestra en el Teorema 1.2.12. En el caso de A arbitrario, una solución similar requiere la introducción de la categoría asociada a A, análoga a la categoría de biconjuntos para el funtor de Burnside.

Si H es un grupo finito, denotamos por $\overrightarrow{H}$ al $(H \times H, 1)$-conjunto H con acciones dadas por $(h_1, h_2) \cdot h \cdot 1 = h_1 h h_2^{-1}$ para $(h_1, h_2) \in H \times H$, mientras que $\overleftarrow{H}$ denota su biconjunto opuesto.

Definición 2.2.5. Sea A un funtor de Green en biconjuntos. La *categoría asociada a A*, que denotamos por $\mathcal{P}_A$, consiste de lo siguiente:

- Los objetos de $\mathcal{P}_A$ son los objetos de $\mathcal{D}$.
- Si K y H son objetos de $\mathcal{D}$, entonces $\mathcal{P}_A(H, K) = A(K \times H)$.
- Si L, K y H son objetos de $\mathcal{D}$, entonces la composición de $\alpha \in A(K \times H)$ y $\beta \in A(L \times K)$ se define por $\beta \circ \alpha = A(L \times \overleftarrow{K} \times H)(\beta \times \alpha)$.
- Si H es un objeto de $\mathcal{D}$, entonces el morfismo identidad de H en $\mathcal{P}_A$ es igual a $A(\overrightarrow{H})(\epsilon_A) \in A(H \times H)$.

Es un ejercicio técnico que la composición definida es bilineal y que $\mathcal{P}_A$ es una categoría k-lineal. Denotamos por $Fun_k(\mathcal{P}_A, k-Mod)$ la categoría de todos los funtores k-lineales de $\mathcal{P}_A$ a $k-Mod$ con morfismos dados por transformaciones naturales.

Proposición 2.2.6 (Bouc [5, Proposición 8.6.1, parte 5])**.** *Las categorías $Fun_k(\mathcal{P}_A, k-Mod)$ y $A-\mathcal{M}od$ son k-linealmente equivalentes.*

En el enunciado de la proposición proporcionamos la referencia original del resultado, donde aparece sin demostración; para una prueba, véase la Proposición 2.11 de [14], o bien el Teorema 1.7 de [10]. Vía la Proposición 2.2.2, podemos redefinir los A-módulos como funtores k-lineales, y entonces la noción de submódulo corresponde a la de subfuntor.

Definición 2.2.7. Sean M un A-módulo, Γ un conjunto de objetos de $\mathcal{P}_A$ y $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos $s(H) \subset M(H)$ para $H \in \Gamma$. Se define el *submódulo generado por* $(\Gamma, \mathcal{S})$, denotado por $\langle \Gamma, \mathcal{S} \rangle_A$, como el subfuntor de M definido por

$$\langle \Gamma, \mathcal{S} \rangle_A(K) = \sum_{\substack{H \in \Gamma \\ m \in s(H)}} M(A(K \times H))(m),$$

para cada objeto K de $\mathcal{P}_A$, donde

$$M(A(K \times H))(m) = \{M(\alpha)(m) | \alpha \in A(K \times H)\} \leq M(K),$$

y con $\langle \Gamma, \mathcal{S} \rangle_A(\beta)$ definido por restricción de $M(\beta)$ para cada morfismo $K \xrightarrow{\beta} L$ en $\mathcal{P}_A$. Si Γ consiste de un solo grupo H y $s(H) = \{m\}$, escribiremos $\langle H, m \rangle_A$ en lugar de $\langle \Gamma, \mathcal{S} \rangle_A$. Observamos que $\langle H, m \rangle_A(H)$ es el $A(H \times H)$-submódulo de $M(H)$ generado por m.

A continuación introducimos las álgebras esenciales de A, análogas a las álgebras esenciales de la Definición 1.2.10.

Definición 2.2.8. Sea A un funtor de Green en biconjuntos y H un objeto de $\mathcal{P}_A$. Se define el *álgebra esencial de A en H* como el cociente

$$\widehat{A}(H) = \frac{End_{\mathcal{P}_A}(H)}{I_A(H)}$$

donde $I_A(H)$ es el submódulo de $A(H \times H)$ generado por los endomorfismos de H que se factorizan a través de grupos de orden menor que $|H|$, o explícitamente,

$$I_A(H) = \sum_{|K|<|H|} \langle A(H \times K) \circ A(K \times H) \rangle,$$

que es un ideal bilateral de $End_{\mathcal{P}_A}(H)$. Escribiremos $\widehat{a}$ para la clase en $\widehat{A}(H)$ de un elemento a de $A(H \times H)$.

Las álgebras esenciales son k-álgebras asociativas con uno, pero no existe un método general para saber cuando estas álgebras se anulan o no para un objeto arbitrario de $\mathcal{P}_A$. Para el caso del funtor de Burnside, estas álgebras nunca son cero; de hecho, $\widehat{kB}(H) \cong kOut(H)$ para cada objeto H de $\mathcal{P}_{kB}$. Se tiene el siguiente resultado para el grupo trivial.

Lema 2.2.9. *Sea A un funtor de Green en biconjuntos. Entonces se tienen isomorfismos de k-álgebras*

$$\widehat{A}(1) \cong End_{\mathcal{P}_A}(1) \cong A(1).$$

En particular, si $0 \neq A$, entonces $0 \neq \widehat{A}(1)$.

Demostración. Se tiene $1 \times \overleftarrow{1} \times 1 \cong (1 \times 1) \times (1 \times 1)$ como $(1 \times 1, 1 \times 1 \times 1 \times 1)$-biconjuntos, y por lo tanto

$$\alpha \circ \beta = A(1 \times \overleftarrow{1} \times 1)(\alpha \times \beta) = A((1 \times 1) \times (1 \times 1))(\alpha \times \beta) = \alpha\beta$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in A(1 \times 1)$. Entonces las k-álgebras $End_{\mathcal{P}_A}(1)$ y $A(1)$ son isomorfas. Dado que $I_A(1) = 0$, se sigue $\widehat{A}(1) \cong A(1)$ como k-álgebras. Ahora, si $0 \neq A$, existe un objeto H de $\mathcal{P}_A$ tal que $0 \neq A(H)$, y dado que $A(Inf_1^H) : A(1) \longrightarrow A(H)$ es un homomorfismo de k-álgebras, se sigue que $0 \neq A(1) \cong \widehat{A}(1)$. $\square$

La existencia de morfismos de funtores de Green en biconjuntos puede dar información sobre las álgebras esenciales. Sea $f : A \longrightarrow C$ un morfismo de funtores de Green en biconjuntos. Para cualesquiera $K \xrightarrow{\alpha} L$ y $H \xrightarrow{\beta} K$ morfismos en $\mathcal{P}_A$, notamos que

$$\begin{aligned}
f_{L\times H}(\alpha \circ \beta) &= f_{L\times H}(A(L \times \overleftarrow{K} \times H)(\alpha \times \beta)) \\
&= C(L \times \overleftarrow{K} \times H)(f_{L\times K\times K\times H}(\alpha \times \beta)) \\
&= C(L \times \overleftarrow{K} \times H)(f_{L\times K}(\alpha) \times f_{K\times H}(\beta)) \\
&= f_{L\times K}(\alpha) \circ f_{K\times H}(\beta)
\end{aligned}$$

y

$$f_{H\times H}(A(\overrightarrow{H})(\epsilon_A)) = C(\overrightarrow{H})(f_1(\epsilon_A)) = C(\overrightarrow{H})(\epsilon_C)$$

en $\mathcal{P}_C$. Por lo tanto, f induce un funtor k-lineal

$$\mathcal{P}_f : \mathcal{P}_A \longrightarrow \mathcal{P}_C$$

al definir $\mathcal{P}_f(H) = H$ para cada objeto H de $\mathcal{P}_A$ y $\mathcal{P}_f(\alpha) = f_{K\times H}(\alpha)$ para cada morfismo $H \xrightarrow{\alpha} K$ en $\mathcal{P}_A$. Este funtor induce entonces un homomorfismo de k-álgebras

$$End_{\mathcal{P}_A}(H) \longrightarrow End_{\mathcal{P}_C}(H)$$

$$\alpha \mapsto \mathcal{P}_f(\alpha)$$

que a su vez induce un homomorfismo de k-álgebras entre las álgebras esenciales

$$\widehat{f}_H : \widehat{A}(H) \longrightarrow \widehat{C}(H)$$

para cada objeto H en $\mathcal{D}$. Esto implica que si $\widehat{A}(H)$ es el álgebra cero, también lo es $\widehat{C}(H)$, o lo que es equivalente, que si $\widehat{C}(H) \neq 0$, entonces $\widehat{A}(H) \neq 0$.

Definición 2.2.10. Para un funtor de Green en biconjuntos A, definimos su *nulidad esencial* como la clase $\widehat{\mathcal{Z}}(A)$ de todos los objetos H de $\mathcal{D}$ tales que $\widehat{A}(H)$ es cero, y su *soporte esencial* como la clase $\widehat{\mathcal{S}}upp(A)$ de los H tales que $\widehat{A}(H)$ no es cero.

Con esta definición, podemos enunciar los resultados de la discusión previa de la siguiente manera.

Lema 2.2.11. *Si $f : A \longrightarrow C$ es un morfismo de funtores de Green en biconjuntos, entonces $\widehat{\mathcal{Z}}(A) \subset \widehat{\mathcal{Z}}(C)$ y $\widehat{\mathcal{S}}upp(C) \subset \widehat{\mathcal{S}}upp(A)$.*

El único morfismo de funtores de Green en biconjuntos $\lambda : kB \longrightarrow A$ no da información alguna sobre la nulidad esencial de A dado que la nulidad esencial de kB es la clase vacía. Sin embargo, más adelante veremos como este lema sirve para determinar completamente los soportes esenciales de una familia de funtores.

Si H y K son objetos de $\mathcal{P}_A$ y $\psi : H \longrightarrow K$ es un isomorfismo de grupos, este induce un isomorfismo de k-álgebras $\widehat{\psi} : \widehat{A}(H) \longrightarrow \widehat{A}(K)$ por la regla $\widehat{a} \mapsto \widehat{b \circ a \circ b'}$ para $a \in A(H \times H)$, donde $b = \lambda_{K\times H}(Iso(\psi))$ y $b' = \lambda_{H\times K}(Iso(\psi^{-1}))$; denotaremos por ${}^{\psi}M$ a la restricción de escalares del $\widehat{A}(K)$-módulo M via $\widehat{\psi}$.

Definición 2.2.12. Una *semilla en $\mathcal{P}_A$* es un par (H, V) consistiendo de un objeto H de $\mathcal{P}_A$ tal que $\widehat{A}(H)$ no es cero y un $\widehat{A}(H)$-módulo simple V. Una semilla (H, V) se dice *isomorfa* a otra semilla (K, W) si existe un isomorfismo de grupos $\psi : H \longrightarrow K$ tal que ${}^{\psi}W$ y V son isomorfos como $\widehat{A}(H)$-módulos.

Más adelante veremos como generar módulos simples a partir de semillas. Terminamos esta sección con el siguiente resultado sobre composición en $\mathcal{P}_A$.

Lema 2.2.13. *Sea A un funtor de Green en biconjuntos. Entonces para cualesquiera H y K objetos de $\mathcal{P}_A$, se tiene que*

$$A(Inf_H^{H\times 1})(a) \circ A(Inf_K^{1\times K})(b) = a \times b$$

para todo $a \in A(H)$ y $b \in A(K)$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} A(Inf_H^{H\times 1})(a) \circ A(Inf_K^{1\times K})(b) &= A(H \times \overleftarrow{1} \times K)(A(Inf_H^{H\times 1})(a) \times A(Inf_K^{1\times K})(b)) \\ &= A(H \times \overleftarrow{1} \times K \circ Inf_{H\times K}^{H\times 1\times 1\times K})(a \times b) \\ &= a \times b \end{aligned}$$

dado que

$$H \times \overleftarrow{1} \times K \circ Inf_{H\times K}^{H\times 1\times 1\times K} \longrightarrow H \times K$$
$$[(h_1, 1, k_1), (h_2, k_2)] \mapsto (h_1h_2, k_1k_2)$$

es un isomorfismo de $(H \times K, H \times K)$-biconjuntos. □

2.2.2. El problema de clasificación de los módulos simples

En esta subsección trabajamos con módulos en el sentido de la Proposición 2.2.6.

Definición 2.2.14. Un objeto H de $\mathcal{D}$ es *minimal* para un A-módulo M si es minimal para M como funtor de biconjuntos.

Si M es un A-módulo y H un objeto de $\mathcal{P}_A$, entonces $M(H)$ es un $End_{\mathcal{P}_A}(H)$-módulo al definir $\alpha \cdot m = M(\alpha)(m)$ para $\alpha \in A(H \times H)$ y $m \in M(H)$, y si H es minimal para M, entonces $M(H)$ es anulado por $I_A(H)$, siendo naturalmente un $\widehat{A}(H)$-módulo. Si S es un A-módulo simple y H es un grupo minimal para S, por definición $0 \neq S(H)$, y dado $0 \neq s \in S(H)$, el subfuntor $\langle H, s\rangle_A$ es distinto cero pues $s \in \langle H, s\rangle_A(H)$; dado que S es simple, se tiene entonces que $\langle H, s\rangle_A = S$ y en consecuencia $\langle s\rangle = \langle H, s\rangle_A(H) = S(H)$, lo que demuestra que $S(H)$ es un $\widehat{A}(H)$-módulo simple.

Si H es un objeto de $\mathcal{P}_A$, la evaluación en H define un funtor exacto

$$ev_H : A - \mathcal{M}od \longrightarrow End_{\mathcal{P}_A}(H) - Mod,$$

que como se expone en la Sección 2 de [4], tiene adjuntos izquierdo y derecho, denotados L_H y R_H respectivamente. El funtor $L_H : End_{\mathcal{P}_A}(H) - Mod \longrightarrow A - \mathcal{M}od$ puede construirse como sigue: dado un $End_{\mathcal{P}_A}(H)$-módulo V, el A-módulo $L_{H,V}$ está definido en un objeto K de $\mathcal{P}_A$ como el k-módulo

$$L_{H,V}(K) = A(K \times H) \otimes_{End_{\mathcal{P}_A}(H)} V$$

y

$$L_{H,V}(\alpha) : L_{H,V}(K) \longrightarrow L_{H,V}(L)$$
$$\beta \otimes v \mapsto (\alpha \circ \beta) \otimes v$$

para cada flecha $K \xrightarrow{\alpha} L$ en $\mathcal{P}_A$. Mientras que cada homomorfismo de $End_{\mathcal{P}_A}(H)$-módulos $\psi : V \longrightarrow W$ define una transformación natural $L_{H,\psi} : L_{H,V} \longrightarrow L_{H,W}$ dada en la componente K-ésima por

$$(L_{H,\psi})_K : L_{H,V}(K) \longrightarrow L_{H,W}(K)$$
$$\beta \otimes v \mapsto \beta \otimes \psi(v).$$

Cuando (H, V) es una semilla en $\mathcal{P}_A$, el Lema 1 de [4] implica que el A-módulo $L_{H,V}$ tiene un único submódulo maximal $J_{H,V}$, y en consecuencia, el cociente

$$S_{H,V} = L_{H,V}/J_{H,V}$$

es un módulo simple, con H como grupo minimal y $S_{H,V}(H) \cong V$ como $\widehat{A}(H)$-módulos. No es difícil ver que si (K, W) es una semilla isomorfa a (H, V), entonces $S_{K,W} \cong S_{H,V}$.

Proposición 2.2.15 (Romero [14, Proposición 4.2])**.** *Sea A un funtor de Green en biconjuntos tal que todo A-módulo simple tiene un único grupo minimal hasta isomorfismo de grupos. Entonces existe una biyección entre el conjunto de clases de isomorfismo de A-módulos simples y el conjunto de clases de isomorfismo de semillas en $\mathcal{P}_A$, que a la clase del A-módulo simple S le asigna la clase de $(H, S(H))$ para un grupo minimal H de S, y cuya inversa envía la clase de la semilla (H, V) a la clase de $S_{H,V}$.*

El siguiente resultado aparece en [14] como un comentario previo a la Proposición 4.8 y resulta útil en algunos casos para saber si un funtor satisface las condiciones de la Proposición 2.2.15. Si A es un funtor de Green en biconjuntos y H y K son grupos del mismo orden en $\mathcal{P}_A$, denotaremos por $I_n(H, K)$ al submódulo de $A(K \times H)$ generado por los elementos que se factorizan a través de grupos de orden menor que $|H|$, es decir,

$$I_n(H, K) = \sum_{|T|<|H|} \langle A(K \times T) \circ A(T \times H) \rangle.$$

Si M es un A-módulo y H es un grupo minimal para M, es fácil ver que $M(\alpha)(m) = 0$ para todo $m \in M(H)$ y todo $\alpha \in I_n(H, K)$.

Proposición 2.2.16. *Sea A un funtor de Green en biconjuntos. Si para cada par de objetos H y K del mismo orden en $\mathcal{P}_A$ que no son isomorfos como grupos se tiene que $I_n(H, K) = A(K \times H)$, entonces los grupos minimales de A-módulos simples son únicos hasta isomorfismo de grupos.*

Demostración. Si S es un A-módulo simple y H es minimal para S, entonces $0 \neq S(H)$. Tomando $0 \neq s \in S(H)$, tenemos que $\langle H, s \rangle_A = S$, y entonces $S(K) = S(A(K \times H))(s)$ para todo objeto K de $\mathcal{P}_A$. Si K tiene el mismo orden que H pero no es isomorfo a H, se tiene que $I_n(H, K) = A(K \times H)$. Entonces

$$S(K) = S(A(K \times H))(s) = S(I_n(H, K))(s) = 0$$

y por lo tanto K no es minimal para S. □

En el caso del funtor de Burnside, los grupos minimales de funtores de biconjuntos simples son únicos hasta isomorfismo de grupos, y en este sentido, la Proposición 2.2.15 generaliza la parametrización del Teorema 1.2.12. A continuación mencionamos otros ejemplos a la proposición.

Ejemplo 2.2.17. El morfismo linealización $\lambda : kB \longrightarrow kR_{\mathbb{Q}}$ es sobreyectivo en cada componente si $\mathcal{D} = \mathcal{C}_p$ para un primo p o si k es un campo de característica cero. En ambos casos lo $kR_{\mathbb{Q}}$-módulos simples son los funtores de biconjuntos simples anulados por el kernel de λ, y como tales, sus minimales son únicos hasta isomorfismo de grupos. En el segundo caso, los $kR_{\mathbb{Q}}$-módulos son conocidos como *funtores de biconjuntos retóricos*, y Barker prueba en [2] que (H, V) es una semilla en $\mathcal{P}_{kR_{\mathbb{Q}}}$ si y sólo si H es cíclico y V es un $kOut(H)$-módulo primitivo. Veremos más detalles de esto en la Sección 3.1.

Ejemplo 2.2.18. Romero prueba en la Proposición 4.3 de [14] que en $\mathcal{P}_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}}$ todos los morfismos se factorizan a través del grupo trivial, y en consecuencia, que el álgebra esencial $\widehat{\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}}(H) \neq 0$ si y sólo H es el grupo trivial. El funtor $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ es entonces el único $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$-módulo simple hasta isomorfismo. En el siguiente capítulo veremos generalizaciones de estos resultados para los trasladados de $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$.

Ejemplo 2.2.19. Como hemos visto en el Ejemplo 2.1.4, dado G en $\mathcal{D}$, el funtor de Burnside trasladado kB_G es un funtor de Green en biconjuntos. En el Corolario 4.9 de [14], Romero demuestra que cuando G es un grupo de orden primo, kB_G satisface las condiciones de la Proposición 2.2.16, y por lo tanto, sus módulos simples están parametrizados por clases de isomorfismo de semillas. En el Lema 4.10 del mismo artículo, demostró que para cualquier G, el soporte esencial de kB_G consiste de toda la clase $Ob(\mathcal{D})$. En la siguiente subsección daremos una prueba diferente de este resultado usando morfismos de funtores de Green.

Ejemplo 2.2.20. Si C es un grupo abeliano, los módulos sobre el funtor kB^1_C son conocidos como *funtores de biconjuntos C-fibrados*. Cuando C es un grupo de orden primo p, el funtor kB^1_C satisface las condiciones de la Proposición 2.2.16 como consecuencia del Lema 9 en [13], y entonces sus módulos simples están parametrizados por clases de isomorfismo de semillas. Romero da una caracterización de las álgebras esenciales de kB^1_C en el Lema 15 de [13], y en particular demuestra que su soporte esencial es todo $Ob(\mathcal{D})$.

Los funtores de los ejemplos anteriores satisfacen la condición de unicidad de grupos minimales de módulos simples, pero esto no así para todo funtor de Green en biconjuntos, como se expone en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.21. Si k es un campo y C_4 es el grupo cíclico de orden 4, entonces el funtor $kB^1_{C_4}$ para $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ sobre k tiene un módulo simple con dos grupos minimales no isomorfos. Si Q es el grupo de cuaternios y D_4 es el grupo dihédrico de orden 8, es sabido que $D_4 \ncong Q$. Romero construye en el Ejemplo 12 de [13] un endomorfismo idempotente α de Q en $\mathcal{P}_{kB^1_{C_4}}$ que se factoriza a través de D_4 y cuya clase en $\widehat{kB^1_{C_4}}(Q)$ es distinta de cero. Entonces existe un $\widehat{kB^1_{C_4}}(Q)$-módulo simple V que no es anulado por α, y por lo tanto D_4 es otro grupo minimal para el $kB^1_{C_4}$-módulo $S_{Q,V}$.

2.3. Trasladados de funtores de Green en biconjuntos

En esta sección A es un funtor de Green en biconjuntos y G es un objeto fijo de $\mathcal{D}$. El funtor trasladado A_G es un funtor de Green en biconjuntos con el producto definido en el Ejemplo 2.1.4, y es sencillo ver, usando la Proposición 2.1.6, que el trasladado de un morfismo de funtores de Green en biconjuntos es también un morfismo de funtores de Green en biconjuntos. Con el producto de A_G se tiene que la composición en $\mathcal{P}_{A_G}$ está dada por la regla

$$\beta \circ \alpha = A({}_{L\times H\times G}\Delta L \times \overleftarrow{K} \times H \times G \times G_{L\times K\times G\times K\times H\times G})(\beta \times \alpha)$$

para $\beta \in A_G(L \times K)$ y $\alpha \in A_G(K \times H)$.

Si M es un A-módulo, entonces M_G es un A-módulo y un A_G-módulo al mismo tiempo. En particular, A_G es un A-módulo, que por el Lema de Yoneda es un objeto proyectivo en $A - \mathcal{M}od$.

Lema 2.3.1. *Si A es un funtor de Green en biconjuntos y G es un objeto de $\mathcal{D}$, entonces A_G es un A-módulo proyectivo.*

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $A - \mathcal{M}od$. Entonces hay un diagrama conmutativo de k-módulos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A - \mathcal{M}od(A_G, N) \arrow[r] \arrow[d] & A - \mathcal{M}od(A_G, M) \arrow[r] \arrow[d] & A - \mathcal{M}od(A_G, T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N(G) \arrow[r] & M(G) \arrow[r] & T(G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son los isomorfismos naturales dados por el Lema de Yoneda, y el renglón inferior es exacto dado que la evaluación en G es exacta. Entonces el renglón superior es exacto, y por lo tanto el funtor $A - \mathcal{M}od(A_G, \_)$ es exacto, lo que es equivalente a que A_G es un objeto proyectivo en $A - \mathcal{M}od$. $\square$

Dado que $\mathcal{D}$ es esqueléticamente pequeña, si $[\mathcal{D}]$ es un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de grupos, los funtores A_G con $G \in [\mathcal{D}]$ forman un conjunto de generadores proyectivos de $A - \mathcal{M}od$. El siguiente resultado aparece como Parte 2 de la Proposición 8.6.1 en [5] sin demostración, y por lo tanto lo probamos aquí.

Proposición 2.3.2. *$A - \mathcal{M}od$ tiene suficientes proyectivos.*

Demostración. Sea M un A-módulo. Entonces hay un morfismo de A-módulos

$$\psi : \bigoplus_{G\in[\mathcal{D}]} \bigoplus_{s\in M(G)} A_G \longrightarrow M$$

dado por

$$\psi_H : \bigoplus_{G\in[\mathcal{D}]} \bigoplus_{s\in M(G)} A(H \times G) \longrightarrow M(H)$$

$$(a_{G,s}) \mapsto \sum_{(G,s)} M(a_{G,s})(s)$$

para cada H en $\mathcal{D}$. Dado que para cada H hay un G en $[\mathcal{D}]$ tal que $H \cong G$, se sigue que ψ_H es un epimorfismo, y por lo tanto ψ es un epimorfismo. $\square$

2.3.1. Los morfismos Inf y Res

A continuación introducimos dos morfismos de funtores de Green en biconjuntos entre A y A_G, que usaremos para determinar el soporte esencial de A_G. Por simplicidad, escribiremos $Res_H^{H\times G}$ en vez $Iso(\rho_H) \circ Res_{H\times 1}^{H\times G}$ para $H \in Ob(\mathcal{D})$.

Proposición 2.3.3. *Sean A un funtor de Green en biconjuntos y G un objeto de $\mathcal{D}$. Entonces los homomorfismos de k-álgebras*

$$Inf_H = A(Inf_H^{H\times G}) : A(H) \longrightarrow A(H \times G)$$

para H en $\mathcal{D}$ definen un morfismo de funtores de Green $Inf : A \longrightarrow A_G$.

Demostración. Por la Parte 3 del Lema 1.3.4,

$$Id_{\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}} \cong P_1 \xrightarrow{P_{Inf_1^G}} P_G : \mathcal{F}_{\mathcal{D},k} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$$

es una transformación natural, cuya componente A-ésima es el morfismo de funtores de biconjuntos

$$A \xrightarrow{A((\_\times Inf_1^G)\circ Iso(\rho_{\_}^{-1}))} A_G,$$

que tiene componente H-ésima $A((H \times Inf_1^G) \circ Iso(\rho_H^{-1})) = A(Inf_H^{H\times G}) = Inf_H$, y en efecto $Inf = A((\_ \times Inf_1^G) \circ Iso(\rho_{\_}^{-1}))$ es un morfismo de funtores de biconjuntos.

Ahora verificamos que Inf es de hecho un morfismo de funtores de Green en biconjuntos. Si $a \in A(K)$ y $b \in A(H)$, entonces

$$Inf_{K\times H}(a \times b) = A(Inf_{K\times H}^{K\times H\times G})(a \times b)$$

y

$$Inf_K(a) \times^d Inf_H(b) = A({}_{K\times H\times G^{\Delta}}K \times G \times H \times G_{K\times G\times H\times G} \circ Inf_{K\times H}^{K\times G\times H\times G})(a \times b)$$

y es sencillo verificar que la aplicación

$${}_{K\times H\times G^{\Delta}}K \times G \times H \times G_{K\times G\times H\times G} \circ Inf_{K\times H}^{K\times G\times H\times G} \longrightarrow Inf_{K\times H}^{K\times H\times G}$$

$$[(k_1, g_1, h_1, g_2), (k_2, h_2)] \mapsto (k_1k_2, h_1h_2)$$

es un isomorfismo de $(K \times H \times G, K \times H)$-biconjuntos, de donde se sigue que

$$Inf_{K\times H}(a \times b) = Inf_K(a) \times^d Inf_H(b).$$

Dado que ϵ_A es precisamente el uno de $A(1)$, mientras que ϵ_{A_G} es el uno de $A(1\times G)$, se sigue que $Inf_1(\epsilon_A) = \epsilon_{A_G}$ pues $A(Inf_1^{1\times G})$ es un homomorfismo de k-álgebras. $\square$

Llamaremos a Inf el *morfismo inflación de A a A_G*. Ahora daremos un morfismo en la dirección opuesta.

Proposición 2.3.4. *Sean A un funtor de Green en biconjuntos y G un objeto de $\mathcal{D}$. Entonces los homomorfismos de k-álgebras unitarias*

$$Res_H = A(Res_H^{H\times G}) : A(H\times G) \longrightarrow A(H)$$

para H en $\mathcal{D}$ definen un morfismo de funtores de Green en biconjuntos $Res : A_G \longrightarrow A$.

Demostración. Como en la proposición anterior, por la Parte 3 del Lema 1.3.4,

$$P_G \xrightarrow{P_{Res_1^G}} P_1 \cong Id_{\mathcal{F}_{\mathcal{D},k}} : \mathcal{F}_{\mathcal{D},k} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{D},k}$$

es una transformación natural, con componente A-ésima dada por el morfismo de funtores de biconjuntos

$$A_G \xrightarrow{A(Iso(\rho\_)\circ(\_\times Res_1^G))} A,$$

con componente H-ésima $A(Iso(\rho_H)\circ(H\times Res_1^G)) = A(Res_H^{H\times G}) = Res_H$, y por lo tanto $Res = A(Iso(\rho\_)\circ(\_\times Res_1^G))$ es un morfismo de funtores de biconjuntos.

Demostramos ahora que Res es un morfismo de funtores de Green en biconjuntos. Si $a\in A(K\times G)$ y $b\in A(H\times G)$, entonces

$$Res_{K\times H}(a\times^d b) = A(Res_{K\times H}^{K\times H\times G}\circ_{K\times H\times G^{\Delta}} K\times G\times H\times G_{K\times G\times H\times G})(a\times b),$$

$$Res_K(a)\times Res_H(b) = A(Res_K^{K\times G}\times Res_H^{H\times G})(a\times b) = A(Res_{K\times H}^{K\times G\times H\times G})(a\times b)$$

y no es difícil ver que

$$Res_{K\times H}^{K\times H\times G}\circ_{K\times H\times G^{\Delta}} K\times G\times H\times G_{K\times G\times H\times G} \longrightarrow Res_{K\times H}^{K\times G\times H\times G}$$

$$[(h_1,k_1,g_1),(h_2,g_2,k_2,g_3)] \mapsto (h_1h_2, g_1g_2, k_1k_2, g_1g_3)$$

es un isomorfismo de $(K\times H, K\times G\times H\times G)$-biconjuntos, y por lo tanto

$$Res_{K\times H}(a\times^d b) = Res_K(a)\times Res_H(b).$$

Finalmente, vemos que $Res_1(\epsilon_{A_G}) = \epsilon_A$ dado que $A(Res_1^{1\times G})$ es un homomorfismo de k-álgebras. □

Llamaremos a Res el *morfismo restricción de A_G a A*. La existencia de los morfismos Inf y Res tiene una consecuencia inmediata.

Corolario 2.3.5. *Sea A un funtor de Green en biconjuntos. Entonces $\widehat{\mathcal{S}}upp(A_G) = \widehat{\mathcal{S}}upp(A)$ para todo G en $\mathcal{D}$.*

Demostración. Por el morfismo inflación, $\widehat{\mathcal{S}}upp(A_G)\subset\widehat{\mathcal{S}}upp(A)$. Por el morfismo restricción, $\widehat{\mathcal{S}}upp(A)\subset\widehat{\mathcal{S}}upp(A_G)$. □

Este corolario nos da una prueba diferente del Lema 4.10 de [14], que dice que el soporte esencial de kB_G es todo $Ob(\mathcal{D})$ para todo G en $\mathcal{D}$. Veremos más implicaciones importantes de este resultado en el siguiente capítulo al estudiar el funtor $kR_{\mathbb{F}}$ y sus trasladados.

Capítulo 3

El funtor $kR_{\mathbb{F},G}$

A lo largo de este capítulo, k y $\mathbb{F}$ son campos de característica cero, $\mathbb{L}$ es un campo algebraicamente cerrado extendiendo a k y a $\mathbb{F}$, y $\mathcal{D}$ es una subcategoría repleta y cerrada bajo productos. El objetivo principal de este proyecto de tesis ha sido estudiar el soporte esencial y las álgebras esenciales del funtor de representaciones lineales trasladado $kR_{\mathbb{F},G}$, con la intención de caracterizar algunas de dichas álgebras y describir así algunos $kR_{\mathbb{F},G}$-módulos simples. Por sugerencia del profesor Serge Bouc, hemos incluido también un estudio de la retícula de ideales de este funtor.

3.1. El funtor $kR_{\mathbb{F}}$

En esta sección presentamos un estudio de los módulos sobre el funtor $kR_{\mathbb{Q}}$, e introducimos un morfismo de funtores de Green en biconjuntos ${}^{\mathbb{E}}\eta : kR_{\mathbb{F}} \longrightarrow kR_{\mathbb{E}}$ dada una extensión de campos $\mathbb{E}/\mathbb{F}$, que usaremos en la Sección 3.2 para estudiar el soporte esencial de $kR_{\mathbb{F},G}$.

3.1.1. Funtores de biconjuntos retóricos

Los módulos sobre $kR_{\mathbb{Q}}$ son conocidos como *funtores de biconjuntos retóricos*. Estos han sido estudiados por Laurence Barker, quien clasificó los simples y demostró que la categoría de $kR_{\mathbb{Q}}$-módulos es semisimple en su artículo *Rhetorical biset functors, rational p-biset functors and their semisimplicity in characteristic zero* [2]. Como señalamos en el Ejemplo 2.2.17, los funtores de biconjuntos retóricos son precisamente los funtores de biconjuntos anulados por el kernel del morfismo linealización λ; esto implica la unicidad de los grupos minimales de funtores de biconjuntos retóricos simples, y por lo tanto que la parametrización de la Proposición 2.2.15 se tiene para $kR_{\mathbb{Q}}$.

Definición 3.1.1. Sea n un entero positivo. Un $k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$-módulo simple V se dice *primitivo* si cada vez que $d|n$ y $ker\ \pi_{n,d}$ actúa trivialmente en V, donde $\pi_{n,d} : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^{\times}$

es la proyección canónica, entonces $d = n$. Esto es equivalente a decir que si

$$\psi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \longrightarrow GL_k(V)$$

es la representación lineal de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sobre V, entonces $ker\ \pi_{n,d} \subset ker\ \psi$ implica $d = n$.

El Teorema 1.5 en [2] establece que un par (H, V) es una semilla en $\mathcal{P}_{kR_\mathbb{Q}}$ si y sólo si H es un grupo cíclico y V es un $kOut(H)$-módulo primitivo. Esto puede demostrarse en dos pasos, como se hace a [14].

Lema 3.1.2 (Romero [14, Lema 3.4]). *1. Sea H un objeto en $\mathcal{D}$. Entonces*

$$I_{kR_\mathbb{Q}}(H) = \sum_{\substack{K \text{ cíclico} \\ |K| \text{ divisor propio de } |H|}} \langle kR_\mathbb{Q}(H \times K) \circ kR_\mathbb{Q}(K \times H) \rangle .$$

2. Si H no es cíclico, entonces $\widehat{kR_\mathbb{Q}}(H) = 0$.

Proposición 3.1.3 (Romero [14, Corolario 3.7]). *Sean H un objeto de $\mathcal{D}$ tal que $\widehat{kR_\mathbb{Q}}(H) \neq 0$ y V un $kOut(H)$-módulo simple. Entonces V es un $\widehat{kR_\mathbb{Q}}(H)$-módulo si y sólo si H es cíclico y V es primitivo.*

Más adelante veremos generalizaciones de estos resultados. Por ahora nos enfocamos en determinar completamente los grupos cíclicos para los que el álgebra esencial de $kR_\mathbb{Q}$ es distinta de cero.

Sea n un entero positivo. Si d_0 y d_1 son divisores positivos de n, entonces

$$ker\ \pi_{n,d_0} \cdot ker\ \pi_{n,d_1} = ker\ \pi_{n,(d_0,d_1)},$$

como puede verse en la demostración del Lema 7.3.2 de [5]. Si $\theta : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ es un carácter tal que $ker\ \pi_{n,d_0}$ y $ker\ \pi_{n,d_1}$ están contenidos en $ker\ \theta$, también lo está $ker\ \pi_{n,(d_0,d_1)}$; en consecuencia, θ se puede factorizarse como $\theta = \theta' \circ \pi_{n,d}$ para un divisor único d de n y un único carácter primitivo $\theta' : (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, siendo d el máximo común divisor de todos los divisores d_0 de n tales que $ker\ \pi_{n,d_0} \subset ker\ \theta$.

Si $Prim(n)$ denota el número de caracteres primitivos de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, tenemos entonces que $\phi(n) = \sum_{d|n} Prim(d)$, donde ϕ es la función de Euler. Dado que ϕ es una función aritmética multiplicativa, también lo es $Prim$. Usando la inversión de Möbius, tenemos

$$Prim(p^a) = \sum_{i=1}^{a} \phi(p^i)\mu(p^{a-i}) = \phi(p^a) - \phi(p^{a-1})$$

para todo primo p y todo entero $a \geq 1$, donde μ es la función de Möbius. Además, $\phi(p^a) = (p-1)p^{a-1}$ si $a \geq 1$. Ahora se sigue fácilmente que $Prim(p^a) = 0$ si y sólo si $p = 2$ y $a = 1$. Usando ahora que $Prim$ es multiplicativa, se sigue que $Prim(n) \neq 0$ si y sólo si $n \not\equiv 2\ mod\ 4$.

Proposición 3.1.4. *Sea H un objeto de $\mathcal{D}$. Entonces $\widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(H) \neq 0$ si y sólo si H es cíclico y $|H| \not\equiv 2 \; mod \; 4$.*

Demostración. Por el Lema 3.1.2, $\widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(H) = 0$ si H no es cíclico, así que podemos asumir que $H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún entero positivo n e identificar $Out(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ con $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$. Si k es algebraicamente cerrado, entonces cada $k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$-módulo simple V tiene dimensión 1 y su carácter $\chi_V : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow k^{\times}$ puede ser realizado como un $\mathbb{C}$-carácter, por lo que el resultado se sigue de la discusión previa. Para k arbitrario, observamos que si E es una extensión de k y V es un $k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$-módulo simple, entonces ${}^{E}V \cong S_1 \oplus \cdots \oplus S_t$ para algunos $E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$-módulos simples S_i. Sean $\psi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow GL_k(V)$ y $\psi_i : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow GL_E(S_i)$ las representaciones lineales de $k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ sobre V y sobre S_i, respectivamente. Se tiene que $ker\ \psi = \cap_i ker\ \psi_i$, y si $d|n$, entonces $ker\ \pi_{n,d} \subset ker\ \psi$ si y sólo si $ker\ \pi_{n,d} \subset ker\ \psi_i$ para todo i. Por lo tanto, si algún S_i es primitivo, también lo es V. Tomando ahora $E = \overline{k}$, se sigue que $\widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \neq 0$ para todo $n \not\equiv 2 \; mod \; 4$, dado que todo $E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$-módulo simple aparece como sumando de la extensión a E de algún $k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$-módulo simple. Por otro lado, $\widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ siempre que $n \equiv 2 \; mod \; 4$ pues $\pi_{n,\frac{n}{2}}$ es un isomorfismo. □

3.1.2. El morfismo extensión

Si H es un grupo finito y V y W son $\mathbb{F}H$-módulos, se tienen los siguientes isomorfismos canónicos de $\mathbb{E}H$-módulos

- ${}^{\mathbb{E}}(V \oplus W) \cong {}^{\mathbb{E}}V \oplus {}^{\mathbb{E}}W$.
- ${}^{\mathbb{E}}(V \otimes_{\mathbb{F}} W) \cong {}^{\mathbb{E}}V \otimes_{\mathbb{E}} {}^{\mathbb{E}}W$.
- ${}^{\mathbb{E}}\mathbb{F} \cong \mathbb{E}$, considerando $\mathbb{F}$ y $\mathbb{E}$ como módulos triviales.

De lo anterior se sigue que la extensión induce un homomorfismo de anillos con uno

$${}^{\mathbb{E}}\eta_H : R_{\mathbb{F}}(H) \longrightarrow R_{\mathbb{E}}(H)$$

enviando el carácter del $\mathbb{F}H$-módulo finitamente generado V al carácter del $\mathbb{E}H$-módulo ${}^{\mathbb{E}}V$. Este homomorfismo de anillos puede ser extendido a homomorfismo de k-álgebras

$${}^{\mathbb{E}}\eta_H : kR_{\mathbb{F}}(H) \longrightarrow kR_{\mathbb{E}}(H)$$

que denotamos de la misma manera. Por el Teorema de Noether-Deuring [7, Teorema 29.7], ${}^{\mathbb{E}}\eta_H$ es un monomorfismo. Para demostrar que estos homomorfismos definen un morfismo de funtores de Green en biconjuntos, necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 3.1.5. *Sean $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ una extensión de campos y A y B $\mathbb{F}$-álgebras. Si V es un A-módulo y T es un (B, A)-bimódulo, entonces ${}^{\mathbb{E}}(T \otimes_A V) \cong {}^{\mathbb{E}}T \otimes_{{}^{\mathbb{E}}A} {}^{\mathbb{E}}V$ como ${}^{\mathbb{E}}B$-módulos.*

Demostración. Sean M un ${}^{\mathbb{E}}B$-módulo y $\theta : {}^{\mathbb{E}}T \times {}^{\mathbb{E}}V \longrightarrow M$ una aplicación ${}^{\mathbb{E}}A$-balanceada ${}^{\mathbb{E}}B$-lineal en la primera variable. Podemos poner θ en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \times V \arrow[r, hook] \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[rr, bend left, "\theta'"] & {}^{\mathbb{E}}T \times {}^{\mathbb{E}}V \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\gamma"'] & M \\
T \otimes_A V \arrow[r, hook] \arrow[rru, bend right, "\Theta'"'] & {}^{\mathbb{E}}(T \otimes_A V) \arrow[ru, "\Theta"'] &
\end{tikzcd}$$

donde:

- θ' es la composición de la inclusión natural $T \times V \hookrightarrow {}^{\mathbb{E}}T \times {}^{\mathbb{E}}V$ con θ, y por lo tanto θ' es una aplicación A-balanceada B-lineal en la primera variable.
- Θ' es el único homomorfismo de B-módulos tal que $\theta' = \Theta' \circ \otimes$.
- Θ es el único homomorfismo de ${}^{\mathbb{E}}B$-módulos extendiendo a Θ' a ${}^{\mathbb{E}}(T \otimes_A V)$.
- γ está definida por la regla $(e_1 \otimes t, e_2 \otimes v) \mapsto (e_1e_2) \otimes (t \otimes v)$ para $t \in T$, $v \in V$ y $e_1, e_2 \in \mathbb{E}$, y es fácil verificar que es una aplicación ${}^{\mathbb{E}}A$-balanceada ${}^{\mathbb{E}}B$-lineal en la primera variable.

Es fácil ver que todos los triángulos y el cuadrado en el diagrama conmutan, implicando la unicidad de Θ en el sentido de que $\theta = \Theta \circ \gamma$. Por lo tanto, ${}^{\mathbb{E}}(T \otimes_A V) \cong {}^{\mathbb{E}}T \otimes_{{}^{\mathbb{E}}A} {}^{\mathbb{E}}V$. $\square$

Proposición 3.1.6. *Los morfismos ${}^{\mathbb{E}}\eta_H : kR_{\mathbb{F}}(H) \longrightarrow kR_{\mathbb{E}}(H)$ para H en $\mathcal{D}$ definen un morfismo de funtores de Green en biconjuntos ${}^{\mathbb{E}}\eta : kR_{\mathbb{F}} \longrightarrow kR_{\mathbb{E}}$.*

Demostración. Por el Lema 3.1.5, dados H y K en $\mathcal{D}$, un biconjunto ${}_KX_H$ y un $\mathbb{F}H$-módulo finitamente generado V, tenemos que

$${}^{\mathbb{E}}(\mathbb{F}X \otimes_{\mathbb{F}H} V) \cong \mathbb{E}X \otimes_{\mathbb{E}H} {}^{\mathbb{E}}V$$

como $\mathbb{E}K$-módulos, de donde se sigue

$${}^{\mathbb{E}}\eta_K \circ kR_{\mathbb{F}}(X) = kR_{\mathbb{E}}(X) \circ {}^{\mathbb{E}}\eta_H$$

y en consecuencia los morfismos ${}^{\mathbb{E}}\epsilon_H$ definen un morfismo de funtores de biconjuntos. Ahora, si U es un $\mathbb{F}K$-módulo finitamente generado, se tiene que

$${}^{\mathbb{E}}(U \otimes_{\mathbb{F}} V) \cong {}^{\mathbb{E}}U \otimes_{\mathbb{E}} {}^{\mathbb{E}}V$$

como $\mathbb{E}(K \times H)$-módulos, lo que implica

$${}^{\mathbb{E}}\eta_{K\times H}(a \times b) ={}^{\mathbb{E}} \eta_K(a) \times {}^{\mathbb{E}}\eta_K(b)$$

para cualesquiera $a \in kR_{\mathbb{F}}(K)$ y $b \in kR_{\mathbb{F}}(H)$. Finalmente, observamos que ${}^{\mathbb{E}}\eta_1(\epsilon_{kR_{\mathbb{F}}}) = \epsilon_{kR_{\mathbb{E}}}$ por ser ${}^{\mathbb{E}}\eta_1$ un homomorfismo de k-álgebras, lo que demuestra que ${}^{\mathbb{E}}\eta$ es en efecto un morfismo de funtores de Green en biconjuntos. $\square$

Nos referiremos a ${}^{\mathbb{E}}\eta$ como *morfismo $\mathbb{E}$-extensión*, o simplemente *morfismo extensión* cuando no haya riesgo de confusión. Tenemos entonces el siguiente triángulo conmutativo de morfismos de funtores de Green en biconjuntos

$$\begin{tikzcd} kB \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & kR_{\mathbb{E}} \\ & kR_{\mathbb{F}} \arrow[ur, "{}^{\mathbb{E}}\eta"'] & \end{tikzcd} .$$

En particular, si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\lambda : kB \longrightarrow kR_{\mathbb{Q}}$ es un epimorfismo, y así la imagen de $\lambda : kB \longrightarrow kR_{\mathbb{E}}$ es isomorfa a $kR_{\mathbb{Q}}$.

3.2. Sobre las álgebras esenciales de $kR_{\mathbb{F},G}$

En esta sección probamos que el soporte esencial de $kR_{\mathbb{F},G}$ está contenido en el soporte esencial de $kR_{\mathbb{Q}}$ y damos una caracterización de las álgebras esenciales de $kR_{\mathbb{Q},G}$ en grupos de orden coprimo al orden de G. Esto último tiene como consecuencia una parametrización de la familia de $kR_{\mathbb{Q},G}$-módulos simples cuyos grupos minimales tienen orden coprimo al orden de G.

3.2.1. El soporte esencial de $kR_{\mathbb{F},G}$

Lema 3.2.1. *Si H es un objeto de $\mathcal{D}$, entonces $\widehat{kR_{\mathbb{Q},G}}(H) \neq 0$ si y sólo si H es cíclico tal que $|H| \not\equiv 2 \mod 4$.*

Demostración. Se sigue fácilmente del Corolario 2.3.5 y la Proposición 3.1.4. □

En el caso de $\mathbb{F}$ arbitrario, tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.2.2. *Si H en $\mathcal{D}$ es tal que $\widehat{kR_{\mathbb{F},G}}(H) \neq 0$, entonces H es cíclico tal que $|H| \not\equiv 2 \mod 4$.*

Demostración. Considérese la extensión trasladada ${}^{\mathbb{F}}\eta_G : kR_{\mathbb{Q},G} \longrightarrow kR_{\mathbb{F},G}$, de donde el resultado se sigue por el Lema 3.2.1. □

Corolario 3.2.3. *Los grupos minimales de $kR_{\mathbb{F},G}$-módulos simples son únicos hasta isomorfismo de grupos.*

Demostración. Si S es un $kR_{\mathbb{F},G}$-módulo simple y H es un grupo minimal para S, entonces $\widehat{kR_{\mathbb{F},G}}(H) \neq 0$, y por el Corolario 3.2.2, H es cíclico. Cualquier otro minimal para S es cíclico de orden $|H|$, y por lo tanto isomorfo a H. □

Una consecuencia inmediata del Corolario 3.2.3 es que la parametrización de la Proposición 2.2.15 se tiene para el funtor $kR_{\mathbb{F},G}$. También podemos decir un poco más sobre la nulidad esencial de $kR_{\mathbb{F}}$. Si H es un grupo cíclico no trivial tal que $\mathbb{F}$ contiene una raíz $|H|$-ésima primitiva de 1, entonces $\mathbb{F}$ es un campo de descomposición para H. El Teorema 10.33 de [6] nos dice que cada $\mathbb{F}(H \times H)$-módulo simple V es isomorfo a un producto externo $V_0 \otimes_{\mathbb{F}} V_1$ para $\mathbb{F}H$-módulos simples V_0 y V_1, y a su vez $V_0 \otimes_{\mathbb{F}} V_1 \cong Inf_H^{H\times 1} V_0 \circ Inf_H^{1\times H} V_1$. Dado que los simples generan a $kR_{\mathbb{F}}(H \times H)$, obtenemos en este caso que $\widehat{kR_{\mathbb{F}}}(H) = 0$ y en consecuencia que $\widehat{kR_{\mathbb{F},G}}(H) = 0$.

Dados grupos finitos H, K y $D \leq K \times H \times G$, se definen $p_i(D)$, $k_i(D)$, $p_{i,j}(D)$ y $k_{i,j}(D)$ para $i, j = 1, 2, 3$ y $i < j$ de forma análoga a los grupos definidos en la Sección 1.1 para el Lema 1.1.2. De manera similar, se tiene que $k_i(D) \trianglelefteq p_i(D)$ y $k_{i,j}(D) \trianglelefteq p_{i,j}(D)$.

Lema 3.2.4 (Romero [14, Lema 4.8])**.** *Sean K, H y G en $\mathcal{D}$, $D \leq K \times H \times G$, $L_1 = p_1(D)/k_1(D)$ y $L_2 = p_2(D)/k_2(D)$. Se tiene lo siguiente:*

1. *Existen $\alpha \in kB_G(K \times L_1)$ y $\beta \in kB_G(L_1 \times H)$ tales que $(K \times H \times G)/D = \alpha \circ \beta$ en $\mathcal{P}_{kB_G}$.*
2. *Existen $\gamma \in kB_G(K \times L_2)$ y $\lambda \in kB_G(L_2 \times H)$ tales que $(K \times H \times G)/D = \gamma \circ \lambda$ en $\mathcal{P}_{kB_G}$.*

El Lema 3.2.4 se introdujo para demostrar el Corolario 4.9 de [14], que implica que la Proposición 2.2.15 se cumple para el funtor kB_G cuando G es un grupo de orden primo, como habíamos mencionado ya en el Ejemplo 2.2.19. Lo usaremos ahora para demostrar el siguiente resultado, que es una generalización de la parte 1 del Lema 3.1.2.

Recordamos que si G es un grupo finito, su *exponente* es el mínimo entero positivo n tal que $g^n = 1$ para todo $g \in G$, el cual denotamos por $e(G)$.

Lema 3.2.5. *Si H en $\mathcal{D}$ es tal que $e(G)|e(H)$ o bien $(|H|, |G|) = 1$, entonces*

$$I_{kR_{\mathbb{Q},G}}(H) = \sum_{\substack{K \text{ cíclico} \\ |K| \text{ divisor propio de } |H|}} \langle kR_{\mathbb{Q},G}(H \times K) \circ kR_{\mathbb{Q},G}(K \times H) \rangle .$$

Demostración. Es suficiente demostrar que si $e(G)|e(H)$ o $(|H|, |G|) = 1$, todo $K \times H \times G$-conjunto transitivo $(K \times H \times G)/D$, con K de orden menor que $|H|$ y $D \leq K \times H \times G$ cíclico, se factoriza en $\mathcal{P}_{kB_G}$ a través de un grupo cíclico de orden un divisor propio de $|H|$, y el resultado se sigue entonces vía el morfismo linealización. Por el Lema 3.2.4, $(K \times H \times G)/D$ se factoriza a través de los grupos L_1 y L_2, que son cíclicos porque D lo es. El grupo L_1 es un subcociente de K y así $|L_1| < |H|$, y por el Lema de Goursat es un subcociente cíclico de $H \times G$, lo que implica que $|L_1|$ divide a $e(H \times G)$. De forma similar, L_2 es un subcociente de H, de donde se sigue que $|L_2|$ es un divisor de $|H|$, y por el Lema de Goursat es un subcociente de $K \times G$, lo que nos dice que $|L_2|$ es un divisor de $|K \times G| = |K||G|$. Si es el caso que $e(G)|e(H)$, entonces $e(H \times G) = e(H)$, y por lo tanto $|L_1|$ es un divisor propio de

$|H|$. Por otro lado, en caso de que $(|H|,|G|)=1$, entonces $|L_2|$ divide a $|K|$ y por lo tanto es un divisor propio de $|H|$. $\square$

3.2.2. Una familia de funtores de biconjuntos G-retóricos simples

Introducimos la siguiente definición como una generalización de la noción de funtor de biconjuntos retórico de Barker.

Definición 3.2.6. Un *funtor de biconjuntos G-retórico* es un módulo sobre $kR_{\mathbb{Q},G}$.

El objetivo de esta subsección es presentar una parametrización de la familia funtores de biconjuntos G-retóricos simples cuyos grupos minimales son de orden coprimo al orden de G. Para ello, daremos antes una caracterización de las álgebras esenciales sobre grupos de orden coprimo al orden de G.

Lema 3.2.7. *Sean L, H, K y G en $\mathcal{D}$. Dados $\alpha \in kB(L\times K)$, $\beta \in kB(K\times H)$ y $a,b\in kB(G)$, se tiene que*

$$(\alpha\times a)\circ(\beta\times b)=(\alpha\circ\beta)\times ab$$

en $\mathcal{P}_{kB_G}$, donde $\times$ es el producto de kB y la composición de la derecha es la de $\mathcal{P}_{kB}$.

Demostración. Dados un $L\times K$-conjunto X, un $K\times H$-conjunto Y y G-conjuntos Z y W, la aplicación

$$(X\times Z)\circ(Y\times W)\longrightarrow(X\circ Y)\times(Z\times W)$$
$$[(x,z),(y,w)]\mapsto([x,y],(z,w)),$$

donde G actúa en $Z\times W$ con la acción diagonal, es un isomorfismo de $L\times H\times G$-conjuntos. Entonces $[X\times Z]\circ[Y\times W]=[X\circ Y]\times[Z\times W]$ en $\mathcal{P}_{kB_G}$, de donde el resultado se sigue por linealidad. $\square$

Consideramos ahora la transformación k-lineal

$$End_{\mathcal{P}_{kB}}(H)\otimes_k kB(G)\xrightarrow{\mu'}End_{\mathcal{P}_{kB_G}}(H)$$

dada por $\alpha\otimes a\mapsto\alpha\times a$, que por el Lema 3.2.7 es un homomorfismo de k-álgebras. Además, si $\alpha\in kB(H\times K)$ y $\beta\in kB(K\times H)$ para K de orden menor que H, tenemos que $\mu'((\alpha\circ\beta)\otimes a)=(\alpha\times a)\circ(\beta\times 1)\in I_{kB_G}(H)$, y entonces podemos definir un homomorfismo de k-álgebras

$$\widehat{kB}(H)\otimes_k kB(G)\xrightarrow{\nu'}\widehat{kB_G}(H)$$

enviando $\widehat{\alpha}\otimes a$ a $\widehat{\alpha\times a}$. Podemos poner μ' y ν' en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} End_{\mathcal{P}_{kB}}(H)\otimes_k kB(G) \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\pi'\otimes Id_{kB(G)}"'] & End_{\mathcal{P}_{kB_G}}(H) \arrow[d, "\pi'"] \\ \widehat{kB}(H)\otimes_k kB(G) \arrow[r, "\nu'"'] & \widehat{kB_G}(H) \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

donde π' en la flecha vertical izquierda es la proyección natural de $End_{\mathcal{P}_{kB}}(H)$ en $\widehat{kB}(H)$, mientras que π' en la flecha vertical derecha es la proyección natural de $End_{\mathcal{P}_{kB_G}}(H)$ en $\widehat{kB_G}(H)$. Linealizando el Diagrama 3.1, y dado que la linealización es un morfismo de funtores de Green en biconjuntos, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} End_{\mathcal{P}_{kR_{\mathbb{Q}}}}(H) \otimes_k kR_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi\otimes Id_{kR_{\mathbb{Q}}(G)}"'] & End_{\mathcal{P}_{kR_{\mathbb{Q},G}}}(H) \arrow[d, "\pi"] \\ \widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(H) \otimes_k kR_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[r, "\nu"'] & \widehat{kR_{\mathbb{Q},G}}(H) \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

donde todas las flechas son homomorfismos de k-álgebras. Vamos a demostrar que en el caso $(|H|,|G|) = 1$, los morfismos μ y ν son isomorfismos.

Proposición 3.2.8. *Si H en $\mathcal{D}$ es tal que $(|H|,|G|) = 1$, entonces*

$$\widehat{kR_{\mathbb{Q},G}}(H) \cong \widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(H) \otimes_k kR_{\mathbb{Q}}(G) \cong \widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(H)^{|[CS(G)]|}$$

como k-álgebras.

Demostración. Observamos que todo $H \times H \times G$-conjunto transitivo $(H \times H \times G)/D$ con $D \leq H \times H \times G$ es isomorfo a un producto $(H \times H/D_1) \times (G/D_2)$ para algunos $D_1 \leq H \times H$ y $D_2 \leq G$ tales que $D = D_1 \times D_2$, lo que implica que μ' es sobreyectiva, y en consecuencia también lo es μ. Contando clases de conjugación de subgrupos cíclicos de $H\times H$, G y $H\times H\times G$ vemos que $kR_{\mathbb{Q}}(H \times H) \otimes_k kR_{\mathbb{Q}}(G)$ y $kR_{\mathbb{Q}}(H \times H \times G)$ tienen la misma dimensión, y por lo tanto μ es un isomorfismo. Ahora, dado que $\pi\mu = \nu(\pi \otimes Id_{kR_{\mathbb{Q}}(G)})$ es sobreyectiva, se tiene que ν es sobreyectiva. Si $z \in ker\ \nu$, existe $w \in kR_{\mathbb{Q}}(H \times H) \otimes_k kR_{\mathbb{Q}}(G)$ tal que $(\pi \otimes Id_{kR_{\mathbb{Q}}(G)})(w) = z$, y entonces $\mu(w) \in I_{kR_{\mathbb{Q},G}}(H)$. Por el Lema 3.2.5, tenemos que

$$\mu(w) = \sum_i \lambda_i \mathbb{Q}[(H \times K_i \times G)/D_i] \circ \mathbb{Q}[(K_i \times H \times G)/E_i]$$

para algunos grupos cíclicos K_i cuyos órdenes son divisores propios de $|H|$, $D_i \leq H \times K_i \times G$, $E_i \leq K_i \times H \times G$ y $\lambda_i \in k$. Como $(|K_i \times H|,|G|) = 1$, se tiene que $D_i = R_i \times S_i$ para algunos $R_i \leq H \times K_i$ y $S_i \leq G$, y $E_i = T_i \times U_i$ para algunos $T_i \leq K_i \times H$ y $U_i \leq G$. Por el Lema 3.2.7,

$$\begin{aligned} \mu(w) &= \sum_i \lambda_i \left(\mathbb{Q}[(H \times K_i)/R_i] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[G/S_i]\right) \circ \left(\mathbb{Q}[(K_i \times H)/T_i] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[G/U_i]\right) \\ &= \sum_i \lambda_i \left(\mathbb{Q}[(H \times K_i)/R_i] \circ \mathbb{Q}[(K_i \times H)/T_i]\right) \times \left(\mathbb{Q}[G/S_i] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[G/U_i]\right) \\ &= \mu(\sum_i \lambda_i \left(\mathbb{Q}[(H \times K_i)/R_i] \circ \mathbb{Q}[(K_i \times H)/T_i]\right) \otimes_{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{Q}[G/S_i] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[G/U_i]\right)) \end{aligned}$$

y entonces

$$w = \sum_i \lambda_i \left(\mathbb{Q}[(H \times K_i)/R_i] \circ \mathbb{Q}[(K_i \times H)/T_i]\right) \otimes_{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{Q}[G/S_i] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[G/U_i]\right),$$

de donde se sigue $z = 0$, y por lo tanto ν es un isomorfismo. El último isomorfismo se sigue de que $kR_{\mathbb{Q}}(G) \cong k^{|[CS(G)]|}$ como k-álgebras. $\square$

Sea H tal de orden coprimo a $|G|$ y tal que $\widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(H) \neq 0$. Dado que $\widehat{kR_{\mathbb{Q},G}}(H) \cong \widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(H)^{|[CS(G)]|}$, cada $\widehat{kR_{\mathbb{Q},G}}(H)$-módulo simple U es isomorfo a la restricción de escalares ${}^{\pi_C}V$ de un $\widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(H)$-módulo simple V vía la proyección C-ésima $\pi_C : \widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(H)^{|[CS(G)]|} \longrightarrow \widehat{kR_{\mathbb{Q}}}(H)$ para un único C en $[CS(G)]$. Entonces, dada una semilla (H, U) en $\mathcal{P}_{kR_{\mathbb{Q},G}}$, podemos formar una triada (H, V, C) tal que (H, V) es una semilla en $\mathcal{P}_{kR_{\mathbb{Q}}}$, $C \in c_{\mathbb{Q}}(G)$ y $U \cong {}^{\pi_C}V$. Ahora, dadas dos triadas (H, V, C) y (K, W, D) como antes, diremos que son *isomorfas* si (H, U) y (K, W) son semillas isomorfas en $\mathcal{P}_{kR_{\mathbb{Q}}}$ y $C = D$. Es fácil ver que si (H, U, C) y (K, W, D) son isomorfas, entonces $(H, {}^{\pi_C} U)$ y $(K, {}^{\pi_D} W)$ son semillas isomorfas en $\mathcal{P}_{kR_{\mathbb{Q},G}}$. De estas observaciones, junto con el Lema 3.2.1 y el Corolario 3.2.3, deducimos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.9. *Sean k un campo de característica 0 y G un objeto de $\mathcal{D}$. Existe una biyección entre el conjunto de clases de isomorfismo de funtores de biconjuntos G-retóricos simples cuyos grupos minimales tienen orden coprimo al orden de G y el conjunto de clases de isomorfismo de triadas (H, V, C) tales que (H, V) es una semilla en $\mathcal{P}_{kR_{\mathbb{Q}}}$ con $(|H|, |G|) = 1$ y $C \in [CS(G)]$, que envía la clase del funtor S a la clase de la triada (H, V, C) con H un grupo minimal para S y ${}^{\pi_C}V \cong S(H)$, y la aplicación inversa envía la clase de (H, V, C) a la clase de $S_{H,{}^{\pi_C}V}$.*

3.3. Los ideales de $kR_{\mathbb{F},G}$

En esta sección damos una caracterización de los ideales del funtor $kR_{\mathbb{F},G}$. Hacemos esto en dos partes: en la primera subsección demostramos que el álgebra $kR_{\mathbb{F},G}(H)$ es semisimple para cada H en $\mathcal{D}$ y determinamos sus idempotentes primitivos e ideales, y en la segunda subsección estudiamos el efecto de las operaciones de biconjuntos en estos idempotentes, encontrando así condiciones necesarias y suficientes para que una familia de ideales $I(H)$ de $kR_{\mathbb{F}}(H \times G)$ determine un ideal I de $kR_{\mathbb{F},G}$.

3.3.1. Idempotentes primitivos de $kR_{\mathbb{F}}(G)$

Si n es un entero positivo y ω es una raíz n-ésima primitiva de 1 en $\mathbb{L}$, entonces el grupo de Galois de la extensión $\mathbb{F}(\omega)/\mathbb{F}$ puede encajarse como un subgrupo F_n de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ dado que cada σ en $Gal(\mathbb{F}(\omega)/\mathbb{F})$ está completamente determinado por $\omega \mapsto \omega^r$ para un único $[r]$ en $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$, y es sencillo ver que la identificación $\sigma \mapsto [r]$ es un monomorfismo de grupos.

Definición 3.3.1. Sean G un grupo finito y $n = e(G)$. Dos elementos g y h de G se dicen $\mathbb{F}$-*conjugados*, y entonces escribimos $g \sim_{\mathbb{F}} h$, si existen $[i] \in F_n$ y $x \in G$ tales que ${}^{x}g = h^i$. Es sencillo ver que ser $\mathbb{F}$-conjugados define una relación de equivalencia en G, y una *clase* *de $\mathbb{F}$-conjugación* es una clase de equivalencia bajo esta relación; denotamos por $c_{\mathbb{F}}(G)$ al conjunto de estas clases. Una función $\xi : G \longrightarrow \mathbb{F}$ es una *función de $\mathbb{F}$-clase sobre G* si sus restricciones a clases de $\mathbb{F}$-conjugación son funciones constantes.

El espacio de funciones de $\mathbb{F}$-clase sobre G es una $\mathbb{F}$-álgebra de dimensión igual al número de clases de $\mathbb{F}$-conjugación sobre G. Por el Lema 42.4 de [7], si χ es un $\mathbb{F}$-carácter de G, entonces $\chi({}^x g) = \chi(g^i)$ para cualesquiera $g, x \in G$ e $[i] \in F_n$. Por la Proposición 9.20 en [6], los $\mathbb{F}$-caracteres irreducibles son linealmente independientes sobre $\mathbb{F}$, y por el Teorema 42.8 en [7], el número de $\mathbb{F}$-caracteres irreducibles es igual al número de clases de $\mathbb{F}$-conjugación, de donde se sigue que estos forman una base para el espacio de funciones de $\mathbb{F}$-clase, que identificamos entonces con el álgebra $\mathbb{F}R_{\mathbb{F}}(G)$.

Lema 3.3.2. *Sean $N \trianglelefteq G$ y $\pi : G \to G/N$ la proyección canónica. Si C es una clase de $\mathbb{F}$-conjugación de G, entonces $\pi(C)$ es una clase de $\mathbb{F}$-conjugación de G/N.*

Demostración. El exponente t de G/N es un divisor del exponente n de G, entonces si $[i] \in F_n$, se tiene que i es coprimo a t. Si ω es una raíz n-ésima primitiva de 1, entonces $\omega^{\frac{n}{t}}$ es una raíz t-ésima primitiva de 1 y $\omega^{\frac{n}{t}} \mapsto (\omega^{\frac{n}{t}})^i$ define un elemento de $Gal(\mathbb{F}(\omega^{\frac{n}{t}})/\mathbb{F})$, dado que es la restricción de $\omega \mapsto \omega^i$ a $\mathbb{F}(\omega^{\frac{n}{t}})$, y $\pi_{n,t}([i]) = [i] \in F_t$. Más aún, $\pi_{n,t}$ envía F_n sobre F_t. Si $g_0, g_1 \in C$, existen $x \in G$ e $[i] \in F_n$ tales que ${}^x g_0 = g_1^i$, y así ${}^{xN} g_0 N = (g_1 N)^i$, o equivalentemente $g_0 N \sim_{\mathbb{F}} g_1 N$. Si gN en G/N es $\mathbb{F}$-conjugado a $g_0 N$, entonces existen $xN \in G/N$ e $[i] \in F_t$ tales que $({}^x g_0)N = g^i N$, de donde $({}^x g_0)^j = gy$ para $[j] = [i_0]^{-1}$ en F_n y algún $y \in N$, donde $[i_0]$ es tal que $\pi_{n,t}([i_0]) = [i]$. Entonces $gy \in C$, y por lo tanto $gN = \pi(gy) \in \pi(C)$. □

Dado $C \in c_F(G)$, podemos definir una función de $\mathbb{F}$-clase e_C dada por

$$e_C(g) = \begin{cases} 1, & \text{si } g \in C \\ 0, & \text{si } g \notin C \end{cases}$$

para $g \in G$. Las funciones e_C para $C \in c_{\mathbb{F}}(G)$ forman un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos y una base de $\mathbb{F}R_{\mathbb{F}}(G)$.

Definición 3.3.3. Una k-álgebra de dimensión finita A se dice *semisimple escindida* si es semisimple y dada cualquier extensión E/k y cualquier A-módulo simple V, el ${}^E A$-módulo ${}^E V$ es simple.

Definición 3.3.4. Una k-álgebra de dimensión finita A se dice *separable* si ${}^E A$ es una E-álgebra semisimple para toda extensión E/k. En este caso, siempre existe una extensión E/k tal que ${}^E A$ es semisimple escindida, y entonces se dice que E es un *campo de escisión* de A.

Sean G un grupo finito, $n = e(G)$ y ω una raíz n-ésima primitiva de 1. Dado que la aplicación

$$Gal(\mathbb{F}[\omega]/\mathbb{F}) \longrightarrow Gal(\mathbb{Q}[\omega]/\mathbb{F} \cap \mathbb{Q}[\omega])$$

dada por restricción de automorfismos es un isomorfismo de grupos, ambos grupos de Galois son identificados con el mismo grupo F_n de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$, y por lo tanto las clases de $\mathbb{F}$-conjugación y las clases de $\mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega]$-conjugación de G coinciden. Entonces la aplicación extensión

$$^{\mathbb{F}}\eta_G : R_{\mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega]}(G) \longrightarrow R_{\mathbb{F}}(G)$$

es una inyección de grupos abelianos libres del mismo rango, y por lo tanto

$$^{\mathbb{F}}\eta_G : \mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega]R_{\mathbb{F}}(G) \longrightarrow \mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega]R_{\mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega]}(G)$$

es un isomorfismo de $\mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega]$-álgebras. Como $(\mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega])R_{\mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega]}(G)$ es semisimple escindida, isomorfa a $(\mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega])^{|c_{\mathbb{F}}(G)|}$, también lo es $(\mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega])R_{\mathbb{F}}(G)$. Del Teorema 29.21 en [7], toda extensión de $\mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega]$ es un campo de escisión para $(\mathbb{F}\cap\mathbb{Q}[\omega])R_{\mathbb{F}}(G)$, en particular $k[\omega]$ lo es. Entonces el álgebra $k[\omega]R_{\mathbb{F}}(G)$ es semisimple escindida, isomorfa a $k[\omega]^{|c_{\mathbb{F}}(G)|}$, y por el Lema 7.2 en [6], el álgebra $kR_{\mathbb{F}}(G)$ es separable y por lo tanto semisimple.

Sean E/k una extensión de Galois y A una k-álgebra de dimensión finita. Si $\sigma\in Gal(E/k)$, este induce un automorfismo de anillos

$$\sigma\otimes 1 : \ ^{E}A \longrightarrow \ ^{E}A$$

y así envía idempotentes en idempotentes. Si M es un ^{E}A-módulo, el ^{E}A-módulo $^{\sigma}M$ se define como la restricción de escalares de M vía $\sigma\otimes 1$, al que llamamos el *conjugado de M por σ*. La conjugación envía módulos simples en módulos simples y preserva clases de isomorfismo, y así $Gal(E/k)$ actúa en el conjunto $Irr(^{E}A)$ de clases de isomorfismo de ^{E}A-módulos simples.

Por el Lema 7.17 de [6], si ^{E}A es una E-álgebra semisimple, S es un ^{E}A-módulo simple y e_S es el idempotente central primitivo de ^{E}A que actúa en S como la identidad, entonces $(\sigma\otimes 1)(e_S)$ es el idempotente central primitivo que actúa en $^{\sigma}S$ como la identidad. Entonces $Gal(E/k)$ actúa en el conjunto de idempotentes centrales primitivos de ^{E}A, y escribimos $\sigma\cdot e$ en lugar de $(\sigma\otimes 1)(e)$ para $\sigma\in Gal(E/k)$ y e un idempotente central primitivo de ^{E}A. Por otro lado, por la Proposición 7.18 de [6], si V es un A-módulo simple, entonces ^{E}V es un ^{E}A-módulo semisimple que es la suma directa de los conjugados un ^{E}A-módulo simple S. Más aún, todos los conjugados de S aparecen en ^{E}V con la misma multiplicidad, y si $e_V\in A$ es el idempotente central primitivo actuando como la identidad en V, entonces

$$e_V = \sum_{S_i} e_{S_i}$$

donde S_i corre sobre el conjunto de conjugados de S y e_{S_i} es el idempotente central primitivo de ^{E}A que actúa como la identidad sobre S_i, que por las observaciones anteriores, sabemos que $e_{S_i} = \sigma\cdot e_S$ si $S_i = \ ^{\sigma}S$.

Como $k[\omega]/k$ es Galois, la discusión previa nos dice que todo idempotente primitivo de $kR_{\mathbb{F}}(G)$ puede ser escrito como la suma de la órbita de un idempotente primitivo de $k[\omega]R_{\mathbb{F}}(G)$ bajo la acción de $Gal(k[\omega]/k)$. Identificamos $Gal(k[\omega]/k)$ con un subgrupo K_n de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ tal como hicimos previamente para $Gal(\mathbb{F}[\omega]/\mathbb{F})$.

Recordamos que si $g \in G$, el idempotente e_g de $k[\omega]R_{\mathbb{F}[\omega]}(G)$ asociado a la clase de conjugación de g puede escribirse como

$$e_g = \frac{1}{|C_G(g)|} \sum_{\chi \in Irr_{\mathbb{F}[\omega]}(G)} \chi(g^{-1})\chi$$

en términos de la base $Irr_{\mathbb{F}[\omega]}(G)$ de $\mathbb{F}[\omega]$-caracteres irreducibles. Para cada $C \in c_{\mathbb{F}}(G)$, el idempotente e_C de $k[\omega]R_{\mathbb{F}}(G)$ es un idempotente en $k[\omega]R_{\mathbb{F}[\omega]}(G)$, y por lo tanto es la suma de algunos idempotentes e_g sin repeticiones. Dado que $e_C(g) \neq 0$ si y sólo si $g \in C$, entonces

$$e_C = \sum_{g \in [G \backslash C]} e_g$$

en $k[\omega]R_{\mathbb{F}[\omega]}(G)$, donde $[G\backslash C]$ es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de elementos de C.

Lema 3.3.5. *Sean G un grupo finito y n su exponente. Si C es una clase de $\mathbb{F}$-conjugación de G y j es un entero coprimo a n, entonces $C^j = \{x^j | x \in C\}$ es también una clase de $\mathbb{F}$-conjugación de G.*

Demostración. Es inmediato que C^j está contenida en una clase de $\mathbb{F}$-conjugación D de G. Por otro lado, si $z \in D$ y $x \in C$, existen $[i] \in F_n$ y $g \in G$ tales que ${}^g x^j = z^i$, de donde ${}^g x = (z^t)^i$ para $[t] = [j]^{-1} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, y por lo tanto $z^t \in C$ y $z \in C^j$. □

Este lema nos da una acción de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sobre $c_{\mathbb{F}}(G)$, y por restricción, una acción de K_n. Si $C \in c_{\mathbb{F}}(F)$, denotamos por $\mathcal{O}(C)$ a la órbita de C bajo la acción de K_n.

Lema 3.3.6. *Sean G un grupo finito y n su exponente. Si C es una clase de $\mathbb{F}$-conjugación de G y $[j] \in K_n$, entonces $[j] \cdot e_C = e_{C^j}$ en $k[\omega]R_{\mathbb{F}}(G)$.*

Demostración. Tenemos que $[j]$ induce automorfismos

$$[j] \otimes 1 : k[\omega]R_{\mathbb{F}}(G) \longrightarrow k[\omega]R_{\mathbb{F}}(G)$$

y

$$[j] \otimes 1 : k[\omega]R_{\mathbb{F}[\omega]}(G) \longrightarrow k[\omega]R_{\mathbb{F}[\omega]}(G),$$

donde el segundo extiende al primero naturalmente. Entonces

$$\begin{aligned} [j] \cdot e_C &= \sum_{g \in [G\backslash C]} [j] \cdot e_g = \sum_{g \in [G\backslash C]} \frac{1}{|C_G(g)|} \sum_{\chi \in Irr_{\mathbb{F}[\omega]}(G)} [j](\chi(g^{-1}))\chi \\ &= \sum_{g \in [G\backslash C]} \frac{1}{|C_G(g^j)|} \sum_{\chi \in Irr_{\mathbb{F}[\omega]}(G)} \chi((g^j)^{-1})\chi = \sum_{g \in [G\backslash C]} e_{g^j} = e_{C^j}, \end{aligned}$$

donde $C_G(g) = C_G(g^j)$ dado que j es una unidad módulo n. □

Corolario 3.3.7. *Si e es un idempotente primitivo de $kR_{\mathbb{F}}(G)$, entonces existe una clase de $\mathbb{F}$-conjugación C de G tal que*

$$e = \sum_{[i]\in[K_n/K_C]} e_{C^i},$$

donde K_C denota el estabilizador de C en K_n.

Demostración. Dado que $k[\omega]/k$ es Galois, entonces e puede escribirse como la suma de la órbita de un idempotente primitivo e_C de $k[\omega]R_{\mathbb{F}}(G)$ bajo la acción de K_n. Por el Lema 3.3.6, tal órbita es precisamente el conjunto de idempotentes e_{C^i} con $[i] \in K_n$. □

En adelante, escribiremos $e_{\mathcal{O}(C)}$ para el idempotente $\sum_{[i]\in[K_n/K_C]} e_{C^i}$ de $kR_{\mathbb{F}}(G)$. Iremos un poco más lejos en la caracterización de estos idempotentes. Si $\mathbb{E} = k \cap \mathbb{F}$, el grupo $Gal(\mathbb{E}[\omega]/\mathbb{E})$ es isomorfo a $Gal(\mathbb{Q}[\omega]/\mathbb{Q}[\omega] \cap \mathbb{E})$, y como hicimos anteriormente, podemos encajarlo como un subgrupo E_n de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$. Por otro lado, los grupos $Gal(\mathbb{Q}[\omega]/\mathbb{Q}[\omega] \cap k)$ y $Gal(\mathbb{Q}[\omega]/\mathbb{Q}[\omega] \cap \mathbb{F})$ se identifican con los subgrupos K_n y F_n respectivamente. Como $\mathbb{Q}[\omega] \cap \mathbb{E} = (\mathbb{Q}[\omega] \cap k) \cap (\mathbb{Q}[\omega] \cap \mathbb{F})$, la correspondencia de Galois implica que $E_n = K_n F_n$.

Lema 3.3.8. *Hay una biyección entre el conjunto de órbitas de la acción de K_n en $c_{\mathbb{F}}(G)$ y el conjunto de clases de $\mathbb{E}$-conjugación $c_{\mathbb{E}}(G)$, dada por*

$$\mathcal{O}(C) \mapsto \bigcup_{D\in\mathcal{O}(C)} D$$

para C en $c_{\mathbb{F}}(G)$.

Demostración. Si C es una clase de $\mathbb{F}$-conjugación, $x \in C$ y $y \in C^j$ para algún $[j] \in K_n$, existen $y_0 \in C$, $g \in G$ e $[i] \in F_n$ tales que $y = y_0^j$ y ${}^g x = y_0^i$. Tomando un entero t tal que $[t] = [j]^{-1}$ en K_n, entonces ${}^g x = y^{ti}$, y dado que $[ti] = [t][i] \in E_n$, se tiene que $x \sim_{\mathbb{E}} y$. Si ahora z es cualquier elemento $\mathbb{E}$-conjugado a x, entonces existen $g \in G$ y $[a] \in E_n$ tales que ${}^g x = z^a$. Pero $[a] = [i][j]$ para algunos $[i] \in F_n$ y $[j] \in K_n$, y por lo tanto $z^j \in C$ y $z \in C^t$ para algún entero t tal que $[t] = [j]^{-1}$ en K_n. Esto prueba que $\cup_{D\in\mathcal{O}(C)} D$ es una clase de $\mathbb{E}$-conjugación. La aplicación definida es sobreyectiva pues cada elemento de G pertenece a alguna clase de $\mathbb{F}$-conjugación, y es inyectiva pues si C y C_0 son clases de $\mathbb{F}$-conjugación tales que $\mathcal{O}(C)$ y $\mathcal{O}(C_0)$ dan a la misma clase $\mathbb{E}$-conjugación, entonces para cualesquiera $x \in C$ y $y \in C_0$ existen $g \in G$, $[i] \in F_n$ y $[j] \in K_n$ tales que ${}^g x = y^{ij} = (y^j)^i$, lo que implica que $C = C_0^j$ y en consecuencia que $\mathcal{O}(C) = \mathcal{O}(C_0)$. □

Dado que k es una extensión de $\mathbb{E} = k \cap \mathbb{F}$, el álgebra $kR_{\mathbb{E}}(G)$ es semisimple escindida, y por el lema anterior tiene tantos idempotentes primitivos como $kR_{\mathbb{F}}(G)$. Dado que el morfismo extensión ${}^{\mathbb{F}}\eta_G : kR_{\mathbb{E}}(G) \longrightarrow kR_{\mathbb{F}}(G)$ es inyectivo, los idempotentes primitivos de $kR_{\mathbb{E}}(G)$ no se escinden en $kR_{\mathbb{F}}(G)$, y por lo tanto $e_{\mathcal{O}(C)} = e_{\cup_{D\in\mathcal{O}(C)} D}$ para cada $C \in c_{\mathbb{F}}(G)$. Obtenemos entonces el siguiente corolario.

Corolario 3.3.9. *Si e es un idempotente primitivo de $kR_{\mathbb{F}}(G)$, existe una y sólo una clase de $\mathbb{E}$-conjugación D de G tal que $e = e_D$.*

3.3.2. La retícula de ideales

Como $kR_{\mathbb{F}}(G)$ es un álgebra conmutativa, sus factores de Wedderburn son extensiones finitas de k, y por lo tanto cada uno de sus ideales de está completamente determinado por un conjunto de idempotentes primitivos. Usaremos esto para caracterizar la retícula de ideales de $kR_{\mathbb{F},G}$, al estudiar el efecto de las operaciones de biconjuntos en los idempotentes primitivos de las evaluaciones de $kR_{\mathbb{F},G}$.

De la parte 2 del Lema 7.1.3 en [5], tenemos que para cualesquiera grupos finitos H y G, cualquier biconjunto finito ${}_HU_G$ y cualquier $\mathbb{F}$-carácter χ de G, se satisface la ecuación

$$R_{\mathbb{F}}(U)(\chi)(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{u\in U, g\in G \\ hu=ug}} \chi(g) \tag{3.3}$$

para todo $h \in H$. Observamos que la Ecuación 3.3 se satisface también para el funtor $kR_{\mathbb{F}}$ dado que $kR_{\mathbb{F}}(U) = Id_k \otimes R_{\mathbb{F}}(U)$.

Si H y G son grupos finitos, denotamos por $\pi_2 : H \times G \longrightarrow G$ a la proyección canónica. En el resto de este capítulo, G será un objeto fijo de $\mathcal{D}$, y $\mathbb{E} = k \cap \mathbb{F}$ como en la subsección anterior. Por el Corolario 3.3.9, sabemos que los idempotentes primitivos de $kR_{\mathbb{F}}(H \times G)$ son precisamente los idempotentes e_C con $C \in c_{\mathbb{E}}(H \times G)$.

Lema 3.3.10. *Sean K y H en $\mathcal{D}$, $C \in c_{\mathbb{E}}(H \times G)$ y $\alpha \in kB(K, H)$. Si $D \in c_{\mathbb{E}}(K \times G)$ es tal que $0 \neq e_D kR_{\mathbb{F},G}(\alpha)(e_C)$, entonces $\pi_2(D) = \pi_2(C)$.*

Demostración. Por el Lema 3.3.2, sabemos que $\pi_2(D)$ y $\pi_2(C)$ son clases de $\mathbb{E}$-conjugación de G. Sea ${}_KU_H$ un biconjunto. Para todo $(k, g) \in K \times G$, tenemos

$$kR_{\mathbb{F},G}(U)(e_C)(k,g) = kR_{\mathbb{F}}(U \times G)(e_C)(k,g) = \frac{1}{|H||G|} \sum_{\substack{(u,g_0)\in U\times G, (h,g_1)\in H\times G \\ (ku,gg_o)=(uh,g_0g_1)}} e_C(h, g_1)$$

por la Ecuación 3.3. Ahora, si $e_D kR_{\mathbb{F},G}(U)(e_C) \neq 0$, se sigue que $kR_{\mathbb{F},G}(U)(e_C)(k,g) \neq 0$ para algún $(k, g) \in D$, y por lo tanto existen $(h, g_1) \in C$ y $(u, g_0) \in U \times G$ tales que $(ku, gg_o) = (uh, g_0g_1)$. Entonces $g = {}^{g_0}g_1$, y por lo tanto $\pi_2(D) = \pi_2(C)$. □

Por el Lema 2.2.4, si I es un ideal de $kR_{\mathbb{F},G}$, cada $I(H)$ es un ideal de $kR_{\mathbb{F}}(H \times G)$, y por lo tanto está completamente determinado por un subconjunto $\mathcal{E}(H)$ de $c_{\mathbb{E}}(H \times G)$.

Lema 3.3.11. *Sea I un ideal de $kR_{\mathbb{F},G}$ y sea $\mathcal{E}_I = \{C \in c_{\mathbb{E}}(G) | e_{1\times C} \in I(1)\}$. Entonces*

$$\mathcal{E}(H) = \{D \in c_{\mathbb{E}}(H \times G) | \pi_2(D) \in \mathcal{E}_I\}$$

para todo H en $\mathcal{D}$.

Demostración. Si $C \in \mathcal{E}(H)$ es tal que $kR_{\mathbb{F},G}(Def_1^H)(e_C) = kR_{\mathbb{F}}(Def_{1\times G}^{H\times G})(e_C) \neq 0$, entonces $e_E kR_{\mathbb{F}}(Def_{1\times G}^{H\times G})(e_C) \neq 0$ para algún $E \in \mathcal{E}(1)$, y por el Lema 3.3.10 se tiene que $\pi_2(C) = \pi_2(E) \in \mathcal{E}_I$. Por otro lado, si $C \in c_{\mathbb{E}}(H \times G)$ es tal que $\pi_2(C) \in \mathcal{E}_I$, entonces

$$(e_C kR_{\mathbb{F}}(Inf_G^{H\times G})(e_{\pi_2(C)}))(h,g) = e_{\pi_2(C)}(g) \neq 0$$

para todo $(h,g) \in C$, y por lo tanto $e_C \in I(H)$ y $C \in \mathcal{E}(H)$. □

Sea ahora $\mathcal{E} \subset c_{\mathbb{E}}(G)$ y defínase

$$I_{\mathcal{E}}(H) = \sum_{\substack{D \in c_{\mathbb{E}}(H\times G)\\ \pi_2(D)\in\mathcal{E}}} kR_{\mathbb{F}}(H \times G)e_D$$

para cada H en $\mathcal{D}$. Entonces $I_{\mathcal{E}}(H)$ es un ideal de $kR_{\mathbb{F}}(H \times G)$. Luego, para cada $\alpha \in kB(K,H)$, $kR_{\mathbb{F},G}(\alpha)$ se restringe a una transformación lineal

$$I_{\mathcal{E}}(\alpha) : I_{\mathcal{E}}(H) \longrightarrow I_{\mathcal{E}}(K)$$

como consecuencia del Lema 3.3.10. Entonces tenemos lo siguiente.

Lema 3.3.12. *Sea $\mathcal{E} \subset c_{\mathbb{E}}(G)$. Entonces las asignaciones*

$$H \mapsto I_{\mathcal{E}}(H),$$

$$\alpha \mapsto I_{\mathcal{E}}(\alpha),$$

para objetos H y K de $\mathcal{D}$ y $\alpha \in kB(K,H)$, definen un ideal $I_{\mathcal{E}}$ de $kR_{\mathbb{F},G}$.

Demostración. Por el Lema 3.3.10, $I_{\mathcal{E}}$ es un subfuntor de biconjuntos de $kR_{\mathbb{F},G}$ tal que $I_{\mathcal{E}}(H)$ es un ideal de $kR_{\mathbb{F},G}(H)$ para cada H, y por el Lema 2.2.4, $I_{\mathcal{E}}$ es un ideal de $kR_{\mathbb{F},G}$. □

Denotamos por $\mathfrak{I}_{k,\mathbb{F},G}$ a la retícula de ideales de $kR_{\mathbb{F},G}$.

Teorema 3.3.13. *Sean k y $\mathbb{F}$ campos de característica 0, G un objeto de $\mathcal{D}$ y $\mathbb{E} = k \cap \mathbb{F}$. Entonces la asignación $2^{c_{\mathbb{E}}(G)} \longrightarrow \mathfrak{I}_{k,\mathbb{F},G}$ dada por $\mathcal{E} \mapsto I_{\mathcal{E}}$ es un isomorfismo de retículas, con inversa dada por $I \mapsto \mathcal{E}_I$.*

Demostración. Por el Lema 3.3.11 y el Lema 3.3.12, las funciones definidas son isomorfismos de órdenes mutuamente inversos. □

Si $\mathcal{E} = \{C\}$, escribiremos I_C en lugar de $I_{\mathcal{E}}$. El Teorema 3.3.13 implica que I_C es un $kR_{\mathbb{F},G}$-módulo simple. Más aún, dado que $I_C(1) = e_{1\times C}kR_{\mathbb{F}}(1 \times G) \cong e_C kR_{\mathbb{F}}(G)$, la Proposición 2.2.15 implica que $I_C \cong S_{1,e_C kR_{\mathbb{F}}(G)}$.

Corolario 3.3.14. *El funtor $kR_{\mathbb{F},G}$ es un objeto semisimle de $kR_{\mathbb{F},G} - \mathcal{M}od$. Más aún,*

$$kR_{\mathbb{F},G} \cong \bigoplus_{C \in c_{\mathbb{E}}(G)} I_C$$

como $kR_{\mathbb{F},G}$-módulos. En particular, $kR_{\mathbb{F}}$ es un funtor de Green en biconjuntos simple.

Demostración. Se tiene

$$kR_{\mathbb{F},G} = I_{c_{\mathbb{E}}(G)} = \sum_{C \in c_{\mathbb{E}}(G)} I_C \cong \bigoplus_{C \in c_{\mathbb{E}}(G)} I_C$$

dado que los I_C son simples no isomorfos. □

3.4. Semisimplicidad de $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G} - \mathcal{M}od$

Concluimos este capítulo con un estudio de los trasladados del funtor $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$. Como habíamos mencionado en el Ejemplo 2.2.18, el funtor $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ es un $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$-módulo simple.

Proposición 3.4.1 (Romero [14, Proposición 4.3])**.** *El funtor $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ es el único $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$-módulo simple. En particular, es un funtor de Green en biconjuntos simple.*

La prueba de este resultado consiste esencialmente en demostrar que en $\mathcal{P}_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}}$ todo morfismo es suma de morfismos que se factorizan a través del grupo trivial. Tenemos una generalización de esta proposición.

Proposición 3.4.2. *El funtor $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}$ es un $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}$-módulo semisimple, y sus sumandos simples son los únicos $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}$-módulos simples hasta isomorfismo.*

Demostración. Por el Corolario 3.3.14, sabemos que $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G} \cong \bigoplus_{C \in c_{\mathbb{C}}(G)} I_C$, y los ideales I_C son simples mutuamente no isomorfos. Por la Proposición 3.4.1 y el Corolario 2.3.5, $\widehat{\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}}(H) \neq 0$ si y sólo si $H \cong 1$. Por el Lema 2.2.9, $\widehat{\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}}(1) \cong \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)$, y así los ideales I_C forman un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}$-módulos simples. □

Ahora es natural pensar que todo $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}$-módulo esté completamente determinado por su evaluación en el grupo trivial. En efecto, esto es así, lo que demostraremos probando que la evaluación ev_1 es una equivalencia de categorías de $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G} - \mathcal{M}od$ a $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G) - Mod$. Más aún, esto implica que la categoría $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G} - \mathcal{M}od$ es semisimple.

Teorema 3.4.3. *Las categorías $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G} - \mathcal{M}od$ y $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G) - Mod$ son linealmente equivalentes.*

Demostración. Considérese el funtor $L_1 : \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G) - Mod \longrightarrow \mathbb{C}R_{\mathbb{C},G} - \mathcal{M}od$, adjunto izquierdo a la evaluación ev_1. Es fácil ver que $ev_1 \circ L_1$ es isomorfo al funtor identidad $Id_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)-Mod}$. De la Proposición 2.3.2, todo $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}$-módulo M puede ser cubierto por una suma de funtores representables, y entonces se tiene la siguiente sucesión exacta

$$\bigoplus_i \mathbb{C}R_{\mathbb{C},H_i \times G} \longrightarrow \bigoplus_j \mathbb{C}R_{\mathbb{C},H_j \times G} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}$-módulos, y esta da lugar a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_i \mathbb{C}R_{\mathbb{C},H_i \times G} \arrow[r] & \bigoplus_j \mathbb{C}R_{\mathbb{C},H_j \times G} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
\bigoplus_i L_{1,\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(1 \times H_i \times G)} \arrow[r] \arrow[u] & \bigoplus_j L_{1,\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(1 \times H_j \times G)} \arrow[r] \arrow[u] & L_{1,M(1)} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

donde las flechas verticales son las componentes de la counidad $L_1 \circ ev_1 \longrightarrow Id_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}-\mathcal{M}od}$. Dado que L_1 es exacto derecho, el renglón inferior del Diagrama 3.4 es exacto. Queremos demostrar que la flecha de $L_{1,M(1)}$ a M es un isomorfismo natural. Es suficiente probar entonces que las flechas verticales de la izquierda y del centro del diagrama son isomorfismos, porque esto implicaría que la flecha de $L_{1,M(1)}$ a M también lo es, y esto podemos reducirlo a probar que la componente en $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},H \times G}$ de la counidad es un isomorfismo para cada H en $\mathcal{D}$. La componente K-ésima de dicha transformación natural está dada por

$$\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K \times 1 \times G) \otimes_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(1 \times 1 \times G)} \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(1 \times H \times G) \xrightarrow{\ \circ\ } \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K \times H \times G)$$

$$a \otimes b \mapsto a \circ b$$

para cada K en $\mathcal{D}$. Por el Teorema 10.33 de [6], cada $\mathbb{C}(K \times H \times G)$-módulo simple V es isomorfo a $V_0 \otimes_{\mathbb{C}} V_1$ para un $\mathbb{C}K$-módulo simple V_0 y un $\mathbb{C}(H \times G)$-módulo simple V_1, y por el Lema 2.2.13,

$$[V] = [V_0] \times [V_1] = [Inf_K^{K \times G} V_0] \times^d [V_1] = [Inf_K^{K \times 1 \times G} V_0] \circ [Inf_{H \times G}^{1 \times H \times G}(V_1)]$$

en $\mathcal{P}_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}}$, lo que implica que la aplicación es sobreyectiva. Demostraremos que esta aplicación es de hecho un isomorfismo al probar que $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K \times 1 \times G) \otimes_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(1 \times 1 \times G)} \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(1 \times H \times G)$ y $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K \times H \times G)$ son espacios vectoriales isomorfos. Por el Lema 2.2.9, tenemos que

$$Inf_G^{1 \times 1 \times G} : \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow End_{\mathcal{P}_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}}}(1)$$

es un isomorfismo de álgebras, y $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K \times 1 \times G)$ es un $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)$-módulo derecho por restricción de escalares. Por otro lado,

$$1 \otimes Inf_G^{1 \times G} : \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K \times 1 \times G)$$

enviando $a \otimes b$ a $a \times (Inf_G^{1 \times G} b)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Este es un isomorfismo de $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)$-módulos derechos, dado que

$$\begin{aligned} a \times (Inf_G^{1 \times G}(bc)) &= (a \times (Inf_G^{1 \times G} b)) \times^d (Inf_G^{1 \times G} c) \\ &= (a \times (Inf_G^{1 \times G} b)) \circ (Inf_G^{1 \times 1 \times G} c) \end{aligned}$$

para cualesquiera $a \in \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K)$ y $b, c \in \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)$. Se demuestra de forma similar que los $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)$-módulos izquierdos $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(1 \times H \times G)$ y $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(H) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)$ son isomorfos. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K \times 1 \times G) \otimes_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(1 \times 1 \times G)} \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(1 \times H \times G) \\
&\cong (\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)) \otimes_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)} (\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(H) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)) \\
&\cong \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(H) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G) \\
&\cong \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K \times H \times G).
\end{aligned}$$

$\square$

Conclusiones

Como mencionamos en la introducción, el objetivo principal de este trabajo ha sido generalizar los resultados de Barker sobre funtores de biconjuntos retóricos simples y los de Romero sobre la categoría de $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$-módulos. El Lema 3.2.1 junto con el Corolario 3.2.3 nos dan una generalización del Teorema 1.5 de [2], al establecer que $\widehat{\mathcal{S}}upp(kR_{\mathbb{F},G}) \subset \widehat{\mathcal{S}}upp(kR_{\mathbb{Q},G}) = \widehat{\mathcal{S}}upp(kR_{\mathbb{Q}})$ para todo objeto G de $\mathcal{D}$ y que los minimales de $kR_{\mathbb{F},G}$-módulos simples son únicos hasta isomorfismo de grupos. En adición, hemos caracterizado las álgebras $\widehat{kR_{\mathbb{Q},G}}(H)$ en el caso en que H es de orden coprimo al orden de G, que como consecuencia nos ha dado una caracterización explícita de los módulos simples con minimal de orden coprimo a $|G|$. Sin embargo, los casos de H en $\widehat{\mathcal{S}}upp(kR_{\mathbb{Q},G})$ y $\mathbb{F}$ arbitrarios permanecen abiertos, y vemos en esto la posibilidad de dar continuidad a nuestro trabajo sobre las álgebras esenciales de $kR_{\mathbb{F},G}$ al buscar caracterizaciones de estas en términos de objetos más familiares.

La Proposición 3.4.2 es una generalización a la Proposición 4.3 de [14] al establecer que el soporte esencial de $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}$ consiste únicamente del grupo trivial. Además, el Teorema 3.4.3 nos dice que la categoría $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G} - \mathcal{M}od$ es semisimple por medio de la equivalencia con $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G) - Mod$ dada por la evaluación en el grupo trivial, y el Teorema 1.4 de Barker [2] nos dice que la categoría $kR_{\mathbb{Q}} - \mathcal{M}od$ es semisimple. Finalmente, mencionamos que los funtores $kR_{\mathbb{F},G}$ son $kR_{\mathbb{F},G}$-módulos semisimples como se establece en el Corolario 3.3.14. Con estas evidencias en mano, es natural preguntarse ahora si la categoría $kR_{\mathbb{F},G} - \mathcal{M}od$ es semisimple para G arbitrario. Así, nos atrevemos a hacer la siguiente conjetura:

Conjetura. *La categoría $kR_{\mathbb{F},G} - \mathcal{M}od$ es semisimple para cualesquiera campos k y $\mathbb{F}$ de característica cero y cualquier objeto G de $\mathcal{D}$.*

Esta conjetura deja abierta una línea para continuar en el estudio de las categorías de $kR_{\mathbb{F},G}$-módulos. Por supuesto, no podemos esperar que un método como el que empleamos en la prueba del Teorema 3.4.3 funcione, dado que esta usa fuertemente que el soporte esencial de $\mathbb{C}R_{\mathbb{C},G}$ es trivial, pero intentar adaptar los métodos empleados por Barker en [2] al caso trasladado pudiera ser una estrategia más viable para encontrar la solución.

Bibliografía

[1] J. L. Alperin y R. B. Bell. *Groups and representations*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Laurence Barker. *Rhetorical biset functors, rational p-biset functors and their semisimplicity in characteristic zero*. Journal of Algebra, 319:3810-3853, 2008.

[3] Serge Bouc. *A remark on a theorem of Ritter and Segal*. Journal of Group Theory, 4(1):11-18, 2001.

[4] Serge Bouc. *Foncteurs d'ensembles munis d'une double action.* Journal of Algebra, 183:664-736, 1996.

[5] Serge Bouc. *Biset functors for finite groups.* Springer, Berlin, 2010.

[6] C. W. Curtis e I. Reiner. *Methods of representation theory with applications to finite groups and orders, vol. 1.* Wiley Classics Library, 1990.

[7] C. W. Curtis e I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Wiley Classics Library, 1962.

[8] Andreas Dress. *The ring of monomial representations I. Structure theory*. Journal of Algebra, 18:137-157, 1971.

[9] Maxime Ducellier. *A study of a simple p-permutation functor.* Journal of Algebra, 447:367-382, 2015.

[10] Benjamín García. *Módulos simples sobre funtores de Green en biconjuntos*. Tesina de maestría, PCCM UNAM-UMSNH. México, 2014.

[11] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[12] Nadia Romero. *Funtores de Mackey*. Tesis doctoral, UNAM. México, 2011.

[13] Nadia Romero. *On fibred biset functors with fibres of order prime and four*. Journal of Algebra 387:185-194, 2013.

[14] Nadia Romero. *Simple modules over Green biset functors*. Journal of Algebra 367:203-221, 2012.

[15] Jean Pierre Serre. *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag, New York, 1977.

[16] Peter Webb. *Stratifications and Mackey functors II: Globally defined Mackey functors*. Journal of K-Theory, 6(1):99-170, 2010.

[17] Charles A. Weibel. *The K-book: an introduction to Algebraic K-Theory*. Graduate Studies in Mathematics vol. 145. AMS, 2013