



# DETECCIÓN, AISLAMIENTO Y ESTIMACIÓN DE FALLAS APLICADO A VEHÍCULOS AÉREOS NO TRIPULADOS DEL TIPO QUADROTOR

**TESIS**

Que para obtener el grado de  
**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

presenta

**Juan José Avilés Espinoza**

**Dr. Juan Anzures Marín**

Director de Tesis

**Dr. Francisco Ronay López Estrada**

Co-Director de Tesis

División de Estudios de Posgrado. Facultad de Ingeniería Eléctrica  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Morelia, Michoacán. Septiembre 2021



*“El hombre aceptó su tiempo bajo el sol. Tuvo el sueño de comprender hasta un solo grano de arena. Dio a luz a la poesía, pero un día dejará de existir.*

*Saluda a la última luz de la biblioteca.*

*Nosotros estuvimos aquí”*

*Tuomas Holopainen.*

*A todos ustedes... gracias totales*



# Resumen

El diagnóstico de fallas para sistemas dinámicos representa un problema de interés en la comunidad científica, primeramente por cuestiones de seguridad, derivando en posibles sistemas de control que sean tolerantes a fallas, y en un segundo plano para la mejora en sus diseños buscando la prevención de éstas. Es de suma importancia contar con estrategias que permitan detectar, aislar y estimar fallas ya sea en sensores, actuadores o la planta misma. De manera particular, en la sociedad contemporánea, los vehículos aéreos no tripulados tipo quadrotor han tenido un auge y por esta razón representan una revolución tecnológica gracias a su versatilidad y múltiples aplicaciones en grandes ramas civiles y militares.

En el presente trabajo se aborda el problema de detección, aislamiento y estimación de fallas para vehículos aéreos no tripulados tipo quadrotor, enfocado a fallas en sensores de posición angular, para el cual se presentan dos esquemas de diagnóstico de fallas diseñados mediante la aplicación de técnicas de modelado convexo Takagi-Sugeno y el uso de observadores de estado. Este proceso conlleva la representación de la dinámica rotacional del vehículo como un modelo convexo, conformado por un número adecuado de submodelos, y el posterior diseño de los esquemas de diagnóstico con base en éste.

El primer esquema considera un diseño de banco de observadores híbrido mediante una combinación de una parte generalizada y una dedicada, los cuales permiten la detección y aislamiento de fallas. De manera conjunta, buscando lograr la estimación de fallas para dichos sensores, se diseñó un observador convexo de entradas desconocidas mediante la representación descriptora del modelo convexo de la dinámica rotacional del quadrotor, el cual permite el desacoplo de fallas aditivas independientemente de su comportamiento dinámico. El diseño de los observadores fue realizado mediante la formulación LMI. Finalmente, para la validación de los esquemas de detección y aislamiento y el esquema de estimación propuestos, se realizó una simulación bajo distintas condiciones de falla, considerando la dinámica no lineal del vehículo, obteniéndose resultados favorables.

**Palabras Clave:** Modelado convexo, observador descriptor, Takagi-Sugeno, DAE, Diagnóstico.



# Abstract

Fault diagnosis for dynamic systems presents an interesting problem for the scientific community, mainly for security reasons, which lead into possible fault tolerant control systems that are capable of enduring them. It is of utmost importance to have strategies and schemes for fault detection, isolation and estimation, whether for sensors, actuators, or even the system itself. Particularly, in modern society, Unmanned Aerial Vehicles, specially quadrotors have experienced an unmatched growth, and thus represent a new technological revolution for it, due to their versatility and multiple applications both in civil and military branches. For the reasons aforementioned, in this work the problem of fault detection, isolation, and estimation for a quadrotor UAV focused on gyroscopic sensor faults is tackled. For this, two schemes are designed using both the Takagi-Sugeno convex modeling and convex state observers. The process then is divided into two phases, the first one considers the representation of the rotational dynamics of the system as a convex model, consisting of an adequate number of submodels. Phase two carries with the design of the model based diagnosis schemes.

The first scheme considers a hybrid observer set, combining both a generalized observer scheme, and a dedicated observer scheme. This combination allows for fault detection and isolation. Parallel to this scheme, and looking to achieve for fault estimation, a convex unknown input observer was designed, considering a descriptor representation for the already obtained convex model for the quadrotor's rotational dynamics. Both observer schemes were designed using a LMI formulation.

Finally for the schemes' validation, a simulation was made under different faulty conditions, considering the quadrotor's full nonlinear dynamics.



# Contenido

Dedicatoria . . . . .	III
Resumen . . . . .	V
Abstract . . . . .	VII
Contenido . . . . .	IX
Lista de Figuras . . . . .	XI
Lista de Tablas . . . . .	XIII
Lista de Símbolos . . . . .	XV
1. Introducción . . . . .	1
1.1. Planteamiento del Problema . . . . .	1
1.2. Estado del Arte . . . . .	3
1.2.1. Modelado y Control . . . . .	3
1.2.2. Diagnóstico de Fallas y Control Tolerante . . . . .	6
1.2.3. Justificación del tema . . . . .	8
1.2.4. Hipótesis . . . . .	9
1.2.5. Metodología de Investigación . . . . .	9
1.2.6. Variables de estudio . . . . .	9
1.3. Objetivos de la Tesis . . . . .	10
1.3.1. Objetivo general . . . . .	10
1.3.2. Objetivos particulares . . . . .	10
1.4. Contribuciones . . . . .	10
1.5. Descripción de Capítulos . . . . .	11
2. Marco Teórico . . . . .	13
2.1. Vehículos Aéreos no Tripulados . . . . .	13
2.2. Diagnóstico de fallas . . . . .	15
2.2.1. Etapas del diagnóstico de fallas . . . . .	16
2.2.2. Caracterización de Fallas . . . . .	16
2.2.3. Diagnóstico de Fallas Basado en el Modelo . . . . .	17
2.2.4. Diagnóstico de fallas basado en observadores de estado . . . . .	19
2.2.5. Observador Luenberger . . . . .	22
2.2.6. Esquemas GOS y DOS . . . . .	23
2.2.7. Enfoque descriptor para el diagnóstico de fallas . . . . .	27
2.3. Modelo Convexo Takagi-Sugeno . . . . .	29

---

2.4. Conclusiones . . . . .	34
3. Modelado del Quadrotor . . . . .	37
3.1. Principio de Funcionamiento . . . . .	37
3.2. Modelo matemático . . . . .	38
3.2.1. Modelo Newton-Euler . . . . .	39
3.2.2. Modelado en Espacio de Estados . . . . .	42
3.3. Modelo Convexo Takagi-Sugeno . . . . .	44
3.4. Conclusiones . . . . .	49
4. Diseño del esquema de diagnóstico de fallas . . . . .	51
4.1. Regulación del quadrotor. . . . .	52
4.2. Diagnóstico y aislamiento de fallas en sensores . . . . .	58
4.2.1. Esquema de observadores generalizados-dedicados GOS-DOS . . . . .	58
4.2.2. Estimación de fallas en sensores . . . . .	76
4.3. Conclusiones . . . . .	83
5. Conclusiones . . . . .	85
5.1. Conclusiones Generales . . . . .	85
5.2. Trabajos Futuros . . . . .	86
A. Diseño de observadores mediante LMI . . . . .	87
A.1. Diseño de observador Luenberger. . . . .	87
A.2. Diseño de UIO para enfoque descriptor. . . . .	88
A.3. Retroalimentación de estados para regulación. . . . .	90
Referencias . . . . .	93
Siglas . . . . .	105

# Lista de Figuras

1.1. Ejemplo de un dron tipo quadrotor. Modelo DJI Tello. Recuperado de internet. . . . .	2
2.1. Diagrama de bloques de un observador Luenberger. . . . .	22
2.2. Diagrama de un esquema FDI basado en observador de estado. . . . .	24
2.3. Diagrama GOS . . . . .	25
2.4. Diagrama DOS . . . . .	26
3.1. Diagrama de cuerpo libre del quadrotor. . . . .	38
4.1. Quadrotor regulado . . . . .	54
4.2. Dinámica rotacional no lineal y representación exacta. . . . .	55
4.3. Error entre modelo no lineal y TS convexo exacto. . . . .	56
4.4. Dinámica rotacional no lineal y modelo TS aproximado. . . . .	56
4.5. Error de sistema TS con 4 submodelos. . . . .	57
4.6. Comportamiento de la dinámica rotacional del quadrotor. . . . .	57
4.7. Estados estimados por esquema GOS. Caso libre de falla . . . . .	62
4.8. Funciones de membresía. . . . .	63
4.9. Residuos esquema GOS. Caso libre de falla . . . . .	63
4.10. Residuos esquema GOS. Caso libre de falla en Simulink . . . . .	64
4.11. Estados estimados por esquema GOS. Caso con falla . . . . .	65
4.12. Residuos esquema GOS y señales de falla . . . . .	65
4.13. Funciones de membresía esquema GOS. Caso con falla . . . . .	66
4.14. Residuos esquema GOS. Falla mínima. . . . .	67
4.15. Estados estimados en esquema DOS. Caso libre falla . . . . .	71
4.16. Residuos en esquema DOS. Caso libre de falla . . . . .	72
4.17. Funciones de membresía esquema DOS. Caso libre falla . . . . .	72
4.18. Estados estimados por esquema DOS. Caso con múltiples fallas . . . . .	73
4.19. Residuos mediante esquema DOS. Caso con múltiples fallas . . . . .	73
4.20. Funciones de membresía esquema DOS. Caso con múltiples fallas . . . . .	74
4.21. Residuo observador DOS. Falla pequeña . . . . .	74
4.22. Diagrama del esquema híbrido de observadores. . . . .	75
4.23. Diagrama del esquema de estimación de fallas. . . . .	76
4.24. Funciones de membresía, UIO convexo . . . . .	81
4.25. Señales de falla y sus estimaciones. Caso libre de falla . . . . .	81

4.26. Error entre señales de falla y estimaciones. . . . .	82
4.27. Señales de falla y sus estimaciones. Caso con múltiples fallas. . . . .	82

# Lista de Tablas

2.1. Clasificación de VANT. . . . .	14
3.1. Parámetros del sistema . . . . .	43
4.1. Eigenvalores esquema GOS . . . . .	61
4.2. Eigenvalores esquema DOS . . . . .	70



# Lista de Símbolos

$x(t)$	Vector de estados del sistema
$y(t)$	Salida del sistema
$u(t)$	Entrada del sistema
$\dot{x}(t)$	Derivada del vector de estados
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial de dimensión $n$ .
$\mathbb{R}^q$	Espacio vectorial de dimensión $q$ .
$\mathbb{R}^m$	Espacio vectorial de dimensión $m$ .
$A$	Matriz de estado de un sistema LTI
$B$	Matriz de entradas de un sistema LTI
$C$	Matriz de salidas de un sistema LTI
$a$	Valor constante
$t_f$	Tiempo de falla
$b(t)$	Función lineal dependiente del tiempo
$h(t)$	Función dependiente del tiempo
$h_{min}$	Cota inferior de $h(t)$
$h_{max}$	Cota superior de $h(t)$
$u_{min}$	Cota inferior de $u(t)$
$u_{max}$	Cota superior de $u(t)$
$f(x(t), u(t))$	Función no lineal del estado y la entrada
$A_f$	Matriz de estado con falla
$B_f$	Matriz de entradas con falla
$C_f$	Matriz de salidas con falla
$\delta$	Vector de fallas multiplicativas
$u_f$	Entrada con fallas
$U$	Entrada total de control del sistema
$U_f$	Fallas aditivas a la entrada de control
$U_0$	Entrada de control nominal del sistema
$y_f$	Salida con falla del sistema
$f(t)$	Vector de fallas aditivas
$\hat{y}$	Salida estimada del sistema
$\hat{x}$	Vector de estados estimados del sistema
$r$	Señal residuo
$P$	Matriz definida positiva
$F$	Función matricial lineal

$k$	Índice
$N$	Número de condiciones LMI
$F_k$	Matriz conocida
$F_k^T$	Matriz transpuesta de $F_k$
$x^{lmi}$	Variable matricial
$x^{feas}$	Conjunto de matrices solución a un problema LMI
$\alpha$	Función escalar
$\lambda$	Eigenvalores de una matriz
$\Lambda$	Función matricial lineal
$O$	Función matricial lineal
$Q$	Matriz definida positiva
$W$	Variable matricial
$M$	Bloque de matrices
$M_{11}$	Elemento de un bloque matricial
$L$	Ganancia de observador Luenberger
$e(t)$	Error de estimación.
$C_1$	Elemento de un bloque matricial
$C_{O1}$	Matriz de salidas para banco de observadores
$E$	Matriz singular del sistema
$\tilde{A}$	Matriz de estado reducido
$\tilde{B}$	Matriz de entradas reducida
$\tilde{C}$	Matriz de salidas reducida
$z$	Vector auxiliar de estados
$N$	Variable matricial
$G$	Variable matricial
$T_1$	Variable matricial
$T_2$	Variable matricial
$He(A)$	Hermitiano de una matriz A
$\beta$	Restricción a minimizar
$z_1$	Variable premisa de un modelo TS
$M_{ij}$	Conjunto difuso
$r$	Número de reglas o modelos difusos
$i, j$	Índices de modelos difusos
$h(z)$	Función de membresía
$w_i(z)$	Función de ponderación
$x_{min}$	Cota mínima del estado x
$x_{max}$	Cota máxima del estado x
$z_{min}$	Cota mínima de la variable premisa z
$z_{max}$	Cota máxima de la variable premisa z
$FP_z$	Función de ponderación de una variable z
$s$	Número de no linealidades del sistema
$F_i$	Fuerza ejercida por el motor del quadrotor
$k_F$	Ganancia que relaciona velocidad y fuerza en un motor
$\omega_i$	Velocidad rotacional producida por el motor
$M_i$	Momento angular producido por el motor

$k_M$	Constante de relación velocidad-momento
$m$	Masa del quadrotor
$g$	Constante de gravedad
$\vec{x}$	Vector de posición
$\vec{y}$	Vector de posición
$\vec{z}$	Vector de posición
$\theta$	Ángulo de roll
$\phi$	Ángulo de pitch
$\psi$	Ángulo de yaw
$E_B$	Marco de referencia asociado al espacio
$v_x$	Velocidad lineal respecto al eje $x$
$v_y$	Velocidad lineal respecto al eje $y$
$v_z$	Velocidad lineal respecto al eje $z$
$V_0$	Vector de velocidades lineales en el marco del espacio
$R$	Matriz de rotación
$V$	Vector de velocidades en el marco del vehículo
$v_{xv}$	Velocidad lineal respecto al eje $x$ en el marco del vehículo
$v_{yv}$	Velocidad lineal respecto al eje $y$ en el marco del vehículo
$v_{zv}$	Velocidad lineal respecto al eje $z$ en el marco del vehículo
$\omega$	Vector de velocidades angulares en el marco del vehículo
$\rho$	Velocidad angular roll
$q$	Velocidad angular pitch
$r_z$	Velocidad angular yaw
$J$	Matriz de inercias
$J_x$	Inercia asociada al eje $x$
$l$	Distancia entre el eje del rotor y el centro de gravedad del quadrotor
$K_m$	Ganancia del motor
$K_\psi$	Relación momento empuje del motor
$u_p$	Entrada PWM del motor
$K$	Ganancia de retroalimentación
$X$	Matriz definida positiva
$\gamma$	Tasa de convergencia del observador
$A^\dagger$	Pseudoinversa de una matriz



# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se realiza el planteamiento del problema abordado en el presente trabajo de tesis, así como la hipótesis considerada, objetivos propuestos y descripción general del resto de capítulos que componen el documento.

### 1.1. Planteamiento del Problema

Actualmente, la necesidad de contar con vehículos no tripulados, y específicamente vehículos aéreos no tripulados (VANT), ha causado un auge en el desarrollo tecnológico de estos [Sadeghzadeh and Zhang, 2011]. Desde su aparición en los años 90's sus aplicaciones en la rama civil se han incrementado notablemente, ejemplos de ello pueden ser la exploración geológica, monitoreo de incendios, misiones de rescate, escaneo y monitoreo de torres de transmisión de energía, videograbación y en los últimos años se ha buscado usar como servicio de paquetería. Las aplicaciones militares han sido muy importantes, considerando sistemas de reconocimiento, seguimiento e inteligencia militar como ejemplo. Uno de los VANT más utilizados es el *quadrotor* o *cuadricóptero*, siendo un helicóptero conformado por cuatro motores, en la Figura 1.1 se presenta un dron helicoptero quadrotor (Modelo DJI Tello) de fácil acceso económico y gran versatilidad.

Previo a la llegada de los VANT, la prioridad principal en materia de seguridad aérea consistía en salvaguardar la vida del piloto, y pasajeros; al incrementar el uso y aplicación de los VANT, comenzó a tomar relevancia el poder ahora salvar la integridad del vehículo



Figura 1.1: Ejemplo de un dron tipo quadrotor. Modelo DJI Tello. Recuperado de internet.

y buscar la prevención de accidentes, estos últimos pudiendo causar efectos en cadena que trasciendan la simple pérdida del vehículo, lo cual requeriría que los sistemas de control automático fueran más sofisticados.

De acuerdo con [Blanke et al., 2000], al avanzar la teoría de control automático, la necesidad de asegurar la tolerancia a fallas de los sistemas ha crecido exponencialmente, dando lugar a lo que se conoce como control tolerante a fallas. En esta área una falla puede verse como cualquier desviación del sistema o sus parámetros tal que no se puedan satisfacer las necesidades para las cuales fueron diseñados, y de no ser tratadas debidamente pueden causar una avería la cual representa un daño al sistema, que en algunos casos puede ser irreversible.

Para un quadrotor, las fallas y averías pueden darse no sólo en actuadores (motores) y sensores (giroscópios, acelerómetros, GPS), sino también en el proceso de comunicación con el operador de este, en caso de que exista. En la literatura consultada, se ha buscado asegurar la tolerancia a fallas en actuadores, mediante diversas técnicas de control, por ejemplo [Nguyen and Hong, 2018] proponen un control óptimo, robusto y adaptivo, caracterizado por una red neuronal, donde se pierde la efectividad del control hasta el 55 %, obteniendo resultados positivos, comparándolo con un control similar propuesto por [Sudhir and Swarup, 2017]. Recientemente [López-Estrada et al., 2020] proponen una conversión del sistema quadrotor a birotor para alcanzar un aterrizaje de emergencia en caso de una falla total en alguno de los actuadores, esto mediante la aplicación de un control LQR al sistema quadrotor y al birotor, donde además aseguran la tolerancia a fallas parciales del 20 %. Se han realizado trabajos de control de quadrotor usando modelos Takagi-Sugeno TS

---

combinándolo con control óptimo LQR propuestos por [Pokorný et al., 2020], mientras que [Fouad et al., 2012] proponen combinarlo con retroalimentación de estado no lineal, ambos utilizando un enfoque LMI, donde aseguran la estabilidad asintótica del modelo, sin embargo no consideran fallas.

Por esta razón es importante asegurar la estabilidad, controlabilidad y observabilidad de un VANT ante una falla crítica, donde se pierde el control del actuador arriba del 60 % e incluso la pérdida de controlabilidad lo cual representa un problema de interés en la comunidad científica dedicada a esta área. Hasta ahora, en las fuentes consultadas, no se ha presentado un enfoque de diagnóstico y estimación de fallas mediante el uso de modelos Takagi-Sugeno, y las fallas presentadas sólo consideran pérdida de control en el actuador. Así, el problema a resolver en el presente trabajo de investigación consiste en obtener el modelo Takagi-Sugeno [Takagi and Sugeno, 1985] del Sistema (VANT) y diseñar un esquema de diagnóstico y estimación de fallas en sensores, particularmente sensores de posición angular (giroscopios).

## 1.2. Estado del Arte

Existe una basta literatura relativa al área de quadrotores, en el presente se categorizan los trabajos relativos a éstos considerados más relevantes en dos áreas principales, primero aquellos relacionados exclusivamente al modelado y control, y posteriormente aquellos orientados al área de diagnóstico de fallas y control tolerante.

### 1.2.1. Modelado y Control

El modelado de este tipo de vehículos comprende un rango de trabajos bastante amplios siendo, al conocimiento del autor, los trabajos presentados por [Mistler et al., 2001], [Hamel et al., 2002] y [Altug et al., 2002] los primeros en proponer un modelo para un vehículo tipo quadrotor, los tres mediante la utilización del formalismo Newton-Euler, diferenciando en el control aplicado; en el primero se aplica una ley de control por linealización exacta y retroalimentación dinámica, mientras que en el segundo se propone usar un control por backstepping, el tercero usa una combinación entre linealización y backstepping. En

[Pounds et al., 2002] se realiza el diseño físico del quadrotor y se implementa un control mediante compensación en adelante. Posterior a estos trabajos, en [Cas, 2005] se presenta un modelado Euler-Lagrange para el quadrotor, y una estrategia de control no lineal validada mediante la teoría de Lyapunov. En el trabajo de [Abdelazim and Malik, 2005] se realiza el modelado difuso TS mediante técnicas de modelado “caja gris”. En [Bouabdallah, 2007] se presenta el modelado del quadrotor mediante el formalismo Euler-Lagrange y Newton-Euler, y un enfoque comprensivo al diseño de éstos y añadiendo el uso de motores de CD sin escobillas, además de realizar una comparativa entre técnicas de control, logrando proponer una combinación propia. Estos resultados se extienden en [Bouabdallah and Siegwart, 2007]. Posterior a éstos, en el trabajo de [Gremillion and Humbert, 2010] se realizó la obtención de un modelo lineal a partir de algoritmos de identificación de sistemas mediante datos de entrada y salida. El trabajo de [Mahony et al., 2012] presenta un enfoque introductorio para VANT tipo quadrotor partiendo del modelado Newton-Euler y la consideración de parámetros de diseño y efectos aerodinámicos que los afectan, además de su control y estimación. En [Chovancová et al., 2014] se presenta un resumen acerca de los modelados Newton-Euler, Euler-Lagrange y por cuaterniones, además de presentar una identificación de parámetros. En [Tahir et al., 2016] se presenta un modelo en espacio de estados linealizado para el quadrotor, y en [Singh et al., 2020] se presenta un análisis estructural de la plataforma que conforma el marco del quadrotor. En [Al-Mahturi et al., 2019] se propone el modelado difuso TS en línea de un quadrotor a partir de datos de entrada y salida aplicando un algoritmo de propagación hacia atrás.

El interés de la comunidad científica en este tipo de vehículos creció notablemente, buscando obtener diversas técnicas para su control aprovechando los avances realizados en el modelado de éstos. En [Tayebi and McGilvray, 2006] se propone una técnica de control mediante el uso de una retroalimentación basada en cuaterniones. Posteriormente en [Jurado et al., 2008] se implementó un modelo TS del quadrotor considerando tres submodelos y un controlador difuso PDC logrando estabilizarlo. El trabajo de [Raffo et al., 2010] presenta un control combinando un esquema predictivo para la dinámica traslacional, y un control no lineal  $\mathcal{H}_\infty$  para la estabilización de la dinámica rotacional. En [Mellinger and Kumar, 2011] se presenta un algoritmo para generación de trayectorias tridimensionales, mediante la minimización del

*snap* (cuarta derivada de la posición respecto al tiempo) y la implementación de un control no lineal que permite el seguimiento de éstas. El trabajo de [Rabhi et al., 2011] presenta un control robusto mediante un enfoque PDC basado en un modelo TS de ocho submodelos, y un observador con modos deslizantes para la estimación de las variables de membresía. En [Li and Li, 2011] se realiza un análisis del modelo dinámico Newton-Euler además de proponer un controlador de tipo PID para su regulación, validándolo con resultados experimentales. En [Lendek et al., 2011a] se propone el diseño de un observador TS para la dinámica rotacional del vehículo mediante la consideración de ocho submodelos, el cual es validado experimentalmente mediante una plataforma de pruebas. En [Fouad et al., 2012] se propone el desarrollo de un modelo TS a partir de un enfoque de linealización por series de Taylor y retroalimentación no lineal de estados. El trabajo de [Seri-rojanakul and Wongsaisuwana, 2012] presenta un modelado LPV del quadrotor, además de una retroalimentación de estados óptima para dicho modelo. En [Jurado et al., 2012] se implementa un filtro de Kalman extendido para realizar una retroalimentación de estados y regular un quadrotor en simulación. El trabajo de [Fresk and Nikolakopoulos, 2013] presenta el modelado y control de un quadrotor con un enfoque exclusivo en cuaterniones, mediante una retroalimentación de estados. Paralelamente [Reyes-Valeria et al., 2013] presenta un modelado y control mediante cuaterniones con una técnica LQR. En [Abdolhosseini et al., 2013] se utiliza un control predictivo basado en el modelo (MPC por sus siglas en inglés) para poder realizar seguimiento de trayectoria en un quadrotor. En [Lee and Kim, 2014] se implementa un modelo TS de 16 submodelos para un quadrotor, al cual se le aplica una ley de control PDC con un desempeño robusto, asegurándolo mediante el uso de LMI. En [Sadr et al., 2014] se implementa un controlador no lineal para un quadrotor con una carga suspendida. En [Thu and Gavrilov, 2017] se propone el uso de un control adaptivo L1 para un quadrotor. [Sudhir and Swarup, 2017] proponen un controlador con modos deslizantes adaptivos para seguimiento de trayectoria en estos vehículos. En [Siti et al., 2019] se realiza una comparativa entre controladores PD y PID sintonizados mediante el uso de modelos de referencia y algoritmos genéticos para un quadrotor, obteniendo mejores resultados con el enfoque PD. En [Pokorný et al., 2020] se propone un modelo difuso TS de 10 submodelos, al cual se aplica una compensación distribuida en paralelo PDC, optimizada con LQR.

### 1.2.2. Diagnóstico de Fallas y Control Tolerante

Complementario al desarrollo de diversas técnicas de control, el interés por el diagnóstico y la tolerancia a fallas no se quedó atrás, existiendo resultados cuasi paralelos a los propuestos anteriormente. El trabajo propuesto en [Sadeghzadeh and Zhang, 2011] entrega un resumen del control tolerante a fallas aplicado a vehículos eléctricos hasta el año 2010. En [Berbra et al., 2008] se propone una estrategia de diagnóstico, aislamiento y estimación de fallas para sensores IMU de un quadrotor mediante la implementación de un banco de observadores no lineales, y una estrategia de control tolerante mediante la conmutación entre información del sensor fallido con la estimación de la respectiva señal del observador sano. En [Izadi et al., 2011] se implementa un control tolerante activo mediante la implementación de un filtro de Kalman “Unscented”, un estimador de horizonte móvil MHE y un MPC, aplicado a fallas en actuadores para un quadrotor. El trabajo de [Li et al., 2013] propone dos esquemas de control tolerante de forma pasiva y activa mediante el uso de leyes de control basadas en modos deslizantes. El trabajo de [Zhaohui and Noura, 2013] permite la estimación de fallas en actuadores para un quadrotor mediante el uso de un observador Thau adaptivo, y con ello realizar una reconfiguración del control en función de la magnitud y naturaleza de la falla. Posteriormente en [Al Younes et al., 2013] se logra la detección y aislamiento de fallas en quadrotores mediante el uso de observadores de estado no lineales. En [Aguilar-Sierra et al., 2014] se alcanza la estimación de fallas en actuadores mediante el uso de observadores polinomiales. El trabajo de [Lu et al., 2014] presenta un filtro de Kalman extendido que permite la estimación de fallas en actuadores mediante un estado aumentado. En [Merheb et al., 2014] se presenta un esquema de control tolerante a fallas en actuadores, para un quadrotor, mediante el uso de controladores y observadores con modos deslizantes, el cual alcanza un seguimiento de trayectoria aún en presencia de fallas. En [Mueller and D’Andrea, 2014] se estudian los estados de equilibrio y controlabilidad de un quadrotor al tener fallas totales en hasta tres de sus motores, implementando controladores LQR dedicados para cada uno de los casos, y validando con resultados experimentales. En [Rotondo et al., 2015] se presenta un esquema de control tolerante a fallas híbrido, para un

vehículo quadrotor modelado como qLPV.

Posterior a estos trabajos, en [Avram et al., 2015] se realiza el diagnóstico de fallas en sensores IMU (Unidad de Medición Inercial) mediante observadores con modos deslizantes. El trabajo de [Drak et al., 2015] presenta un esquema de diagnóstico de fallas para sensores usando redundancia física del sistema, buscando conmutar el sensor fallido por uno sano, de modo que no se afecte el objetivo de control. En [Younes et al., 2016] se presenta un enfoque de estimación de fallas en sensores y control tolerante mediante el uso de observadores de estado para compensación de éstas. El trabajo de [Qin et al., 2016] y posterior en [Qin et al., 2017] presenta un control tolerante a fallas activo mediante la implementación de un control anidado PD y PID, el bloque de diagnóstico de fallas se implementa mediante el uso de observadores Luenberger aumentados.

En [López-Estrada et al., 2016] realizan diagnóstico de fallas robusto en sensores mediante la aplicación de técnicas LPV para el modelado del quadrotor y el diseño de observadores de entradas desconocidas, pudiendo asegurar aislamiento de fallas en condiciones de *tracking*. El trabajo de [Avram et al., 2017a] comprende el diagnóstico, aislamiento y estimación de fallas en actuadores para un quadrotor mediante la implementación de observadores adaptivos no lineales, mientras que en [Avram et al., 2017b] se logra el diagnóstico, aislamiento y estimación de fallas en acelerómetros y giroscopios mediante observadores con modos deslizantes y estimadores lineales, corroborándolo con pruebas experimentales.

En los trabajos de [Mallavalli and Fekih, 2017] se propone un enfoque de control tolerante a fallas mediante el uso de observadores difusos con modos deslizantes de alto orden y un algoritmo de control de *super twisting* reduciendo el efecto “*chattering*”; se propone en [Guo et al., 2018] utilizar una estrategia de control activo de rechazo a perturbaciones ADRC para obtener tolerancia a fallas en actuadores de un quadrotor; en el trabajo de [Nguyen and Hong, 2018] se presenta un enfoque de control robusto adaptivo con modos deslizantes, caracterizado por una red neuronal de funciones de base radial (RBFNN por sus siglas en inglés), para un sistema con fallas en actuadores; en el trabajo de [Zhong et al., 2018] se propone el diseño de un filtro de Kalman adaptativo de múltiples etapas, para realizar estimación de fallas en actuadores, sujetos a perturbaciones. El trabajo de [Mazeh et al., 2018] presenta una estrategia de control tolerante para un vehícu-

lo hexarotor mediante un análisis de controlabilidad considerando fallas totales y usando recolocación de control. En [Song et al., 2019] se propone un esquema de control tolerante mediante el uso de redes neuronales adaptivas. En [Zhong et al., 2019] se propone el diagnóstico de fallas en sensores para una unidad de medición inercial, mediante la aplicación de filtros de Kalman multietapa aplicados a la dinámica rotacional del vehículo; en [Rotondo et al., 2019] se propone el uso de observadores de entradas desconocidas UIO LPV intervalares para el diagnóstico de fallas en actuadores de UAV bajo condiciones de formación de hielo en éstos; en [Guzmán-Rabasa et al., 2019] se realiza diagnóstico e aislamiento de fallas en quadrotores, modelándolo como sistema qLPV y utilizando observadores de estado LPV. Paralelamente se incluye también el trabajo de [Nguyen and Hong, 2019] en donde proponen un esquema de diagnóstico de fallas robusto basado en  $H_\infty$  y un control con modos deslizantes tipo backstepping, en donde se demuestra efectividad contra fallas variantes en el tiempo. En [Mallavalli and Fekih, 2020], se implementa un control tolerante a fallas basado en observador difuso y modos deslizantes para un sistema tipo quadrotor sujeto a fallas simultáneas en actuadores y entradas exógenas. En [López-Estrada et al., 2020] se diseña un sistema de aterrizaje de emergencia para un quadrotor ante fallas en helices o rotores, mediante la implementación de un LQR, realizando una reconfiguración del sistema de cuatro a dos rotores.

De la consulta de trabajos en el periodo 2005-2020 se pueden apreciar una gran diversidad de técnicas de control, y diagnóstico de fallas, siendo algunos de los más relacionados con la presente investigación aquellos con el modelado TS, LPVS y el uso de observadores convexos; sin embargo, la propuesta que se presenta en la investigación no ha sido reportada.

### 1.2.3. Justificación del tema

Con la gran dependencia que existe hacia los procesos automatizados, y considerando el hecho de que existe la posibilidad de fallas en éstos, se hace imperativo el poder tener sistemas que sean capaces de detectar, aislar, cuantificar, y de ser posible seguir en funcionamiento a pesar de experimentar alguna falla o avería en éstos, buscando tener como prioridad su seguridad y de su entorno. Entra en escena el diagnóstico de fallas FDI, el cual, mediante el uso de herramientas de la teoría de control permite lo anterior, y sin

restar importancia es el paso previo para la corrección y/o la tolerancia a la falla. Además el aumento en el uso de VANT en las ramas civil y militar necesariamente conlleva un alto costo en garantizar la seguridad de estos, buscando evitar accidentes que puedan llegar a causar daños irreparables. En el resumen de [Williams, 2004], se llegó a la conclusión que era igual o más importante el correcto diseño del VANT, que el factor humano a la hora de tener un accidente. Fundamentados en lo anterior, el diagnóstico, aislamiento y estimación de fallas en VANT tipo quadrotor, no sólo es un tema de gran importancia socioeconómica, sino también de gran interés dentro de la comunidad científica dedicada al área de control, ya que la naturaleza del sistema mismo representa un reto que puede enfrentarse mediante diversos enfoques, muchos de ellos reportados en la literatura con resultados positivos.

#### **1.2.4. Hipótesis**

Es posible implementar técnicas de diagnóstico de fallas FDI para un VANT tipo quadrotor mediante la obtención de su modelo difuso TS en condiciones de operación hover, despegue y aterrizaje verticales y además es posible el desarrollo de esquemas de detección, aislamiento y estimación de fallas mediante el uso de observadores convexos.

#### **1.2.5. Metodología de Investigación**

Partiendo de una recopilación de fuentes de información, se obtendrá matemáticamente el modelo TS del sistema, considerando un esquema de operación despegue, vuelo, estado estacionario “hover”, y aterrizaje, determinando el número necesario de reglas difusas para una aproximación aceptable. Con base en lo anterior se realizará un esquema de detección, aislamiento y estimación para fallas diversas.

#### **1.2.6. Variables de estudio**

Se propone realizar en simulación el estudio del quadrotor, donde se analizarán de manera controlada variables de posición en un marco traslacional y rotacional, además de las variables de entrada y salida del sistema. Se propondrán diversos escenarios de fallas, parciales y totales.

## 1.3. Objetivos de la Tesis

### 1.3.1. Objetivo general

Diseñar un esquema de diagnóstico de fallas en sensores, usando modelos convexos Takagi-Sugeno para Vehículos Aéreos No Tripulados (VANT), aplicando la teoría de Lyapunov para analizar la estabilidad de los esquemas implementados, y buscar su correcto funcionamiento ante fallas de distinta naturaleza

### 1.3.2. Objetivos particulares

- Analizar los esquemas de Diagnóstico de Fallas en VANT.
- Analizar el modelo de VANT tipo quadrotor.
- Diseñar el Modelo Difuso Takagi-Sugeno de un VANT tipo quadrotor para su dinámica rotacional.
- Diseñar el esquema de diagnóstico de fallas.
- Comprobar el correcto funcionamiento del esquema en simulación.

## 1.4. Contribuciones

- Obtención de un modelo TS que es una representación exacta del modelo no lineal del subsistema rotacional de un VANT quadrotor y comparación con un modelo TS reducido.
- Implementación de un esquema de diagnóstico y estimación de fallas para sensores de posición angular.

## 1.5. Descripción de Capítulos

En el Capítulo Dos se presenta el marco teórico que engloba el presente trabajo. En el Capítulo Tres se analiza el modelo dinámico del quadrotor, además de su correspondiente representación TS; en el Capítulo Cuatro se analiza y propone el diseño del esquema de diagnóstico de fallas y se presentan los resultados obtenidos. Finalmente se presentan las conclusiones y posibles trabajos futuros en el Capítulo Cinco.



## Capítulo 2

# Marco Teórico

Dentro de las áreas a mencionar en el presente capítulo, se incluye una sección de Vehículos Aéreos no Tripulados, Diagnóstico de Fallas, y el modelado difuso Takagi-Sugeno

### 2.1. Vehículos Aéreos no Tripulados

Un vehículo aéreo no tripulado (VANT), también conocido como UAV (del inglés *Unmanned Aerial Vehicle*), y de manera popular conocido como *dron*, es una aeronave no tripulada, la cual conforma un sistema aeronáutico no tripulado (UAS por sus siglas en inglés). Existe cierta discrepancia acerca de cuál término usar para referirse a estos vehículos, sin embargo se reconoce que pueden ser intercambiables, salvo en ciertos contextos legales [Vachtsevanos and Valavanis, 2015]. Su vuelo puede ser *remoto*, con un piloto en tierra, *autónomo*, mediante vuelos preprogramados, o una combinación de ambas [ICAO, 2011]. Originalmente los VANT surgieron con el propósito de ser empleados en aplicaciones militares, sin embargo se les encontró un uso en la rama civil y con el paso del tiempo éstas superaron a las militares.

Existen diversas clasificaciones para los VANT, tanto por su funcionalidad, rango de altitud, velocidad, tamaño etc. En la Tabla 2.1 se presenta una clasificación de VANT en función a su diseño. En el presente trabajo se enfocará la atención en los vehículos multirrotor tipo quadrotor.

Tabla 2.1: Clasificación de VANT.

Tipo	Descripción	Ventaja	Desventaja
Multirroto	Cuentan con varios rotores que empujan el aire y permiten el movimiento del vehículo	Alta maniobrabilidad, despegue y aterrizaje vertical (VTOL), vuelo en modo "hover"	Alto consumo de energía. Escaso tiempo de uso.
Ala fija	Similitud con aviones de dos alas.	Menor consumo de energía. Mayores velocidades y tiempos de vuelo.	Requieren amplios espacios de vuelo.
Ala móvil	Inspirados en aves o insectos. Configuración híbrida	Pueden combinar esquemas de vuelo.	Mayor complejidad en el sistema
Tipo Globo	Semejantes a un dirigible.	Mejor eficiencia energética. Su tiempo de vuelo puede ser de días.	Mala maniobrabilidad. Altamente afectados por el aire.

## VANT- Quadrotor

Dentro de los VANT se encuentran los quadrotores, los cuales son helicópteros conformados por cuatro rotores, con dos pares de hélices de inclinación fija localizadas en los cuatro extremos de la aeronave, como se muestra en la Figura 1.1. Se trata de un vehículo de capacidades específicas con una gran cantidad de aplicaciones, tanto de manera individual como en grupo. La comunidad científica tiene un interés particular en este tipo de vehículos por la ventaja que provee el despegue y aterrizaje vertical (VTOL por sus siglas en inglés), en la relativa simplicidad del manejo de los actuadores, ya que al depender de hélices fijas, el control posicional se realiza a través de controlar la velocidad individual de cada rotor, y en el hecho de que su diseño permite simplificar algunos problemas que presentaría un helicóptero tradicional [Homann et al., 2007].

Este tipo de vehículos han alcanzado un auge en la sociedad debido a su versatilidad e inmensas aplicaciones, aumentando sus ventas y distribución exponencialmente. De acuerdo con una estimación en 2015 realizada por Juniper Research, en ese año se comercializaron cuatro millones de drones y se estimó un incremento a 16 millones para 2020 [Research, 2015].

## 2.2. Diagnóstico de fallas

Con el avance de la civilización, la dependencia hacia procesos automatizados, ha causado una evolución en los sistemas de control, pasando de ser simples retroalimentaciones por estructuras mecánicas, a sistemas electrónicos sofisticados que controlan incluso sistemas inestables con un desempeño bastante alto. No obstante, la automatización de procesos conlleva una posibilidad de falla en éstos [Noura et al., 2009]. Defectos en sensores, actuadores o en el proceso mismo pueden ser amplificadas por los sistemas de control en lazo cerrado, derivando en posibles fallas (que pueden verse como una desviación del objetivo de control deseado), o averías (daños en algún componente, producto de una falla) en el sistema, y estos escenarios no son considerados generalmente en el diseño de controladores [Blanke et al., 2000].

### 2.2.1. Etapas del diagnóstico de fallas

Como se mencionó anteriormente, una falla provoca que el objetivo de control deseado no pueda alcanzarse, y compromete tanto el desempeño como seguridad del sistema donde se presenta, por lo cual diagnosticar fallas tempranamente es fundamental [Chen and Patton, 2012]. El proceso de diagnóstico de fallas generalmente se ha dividido en tres etapas:

- **Detección de Falla:** Se toma una decisión sobre la existencia de la falla.
- **Aislamiento de Falla:** Se determina la ubicación de la falla.
- **Estimación de Falla:** Se determina la señal de falla misma, con características de magnitud, forma de onda y comportamiento en el tiempo.

La relevancia de estas etapas depende del objetivo de control, siendo las primeras dos fundamentales en prácticamente cualquier esquema, mientras que la estimación de falla se vuelve fundamental si se requiere una reconfiguración en la estrategia de control.

### 2.2.2. Caracterización de Fallas

Las fallas pueden suceder en actuadores, sensores e incluso en la misma planta. Dichas fallas pueden ser de tipo aditivo o de tipo multiplicativo, producto de un funcionamiento adecuado, o por el envejecimiento de los equipos [Noura et al., 2009]. Para propósitos de diagnóstico y aislamiento es importante distinguir entre estos dos tipos, no obstante para propósitos de control tolerante, el objetivo radica en compensar el efecto de la falla más no en distinguir su cualidad.

También pueden caracterizarse en función de su comportamiento dinámico. Para sensores se pueden tener fallas de tipo *bías*, *drift*, *pérdida de precisión*, *congelamiento del sensor*, y *error de calibración* [Bošković and Mehra, 2003]. Sin pérdida de generalidad, considerando a  $y(t)$  como la salida de algún sensor y a  $Cx(t)$  como una combinación lineal del vector de estados del sistema, las correspondientes fallas en sensores pueden verse matemáticamente

como:

$$y(t) = \begin{cases} Cx(t) & \forall t \geq 0 \text{ Sin falla} \\ Cx(t) + a & \forall t \geq t_f \text{ Falla de tipo bias} \\ Cx(t) + b(t) & b(t) = at \quad \forall t \geq t_f \text{ Falla de tipo drift} \\ Cx(t) + h(t) & h_{min} \leq h(t) \leq h_{max} \quad \forall t \geq t_f \text{ Pérdida de precisión} \\ Cx(t_f) & \forall t \geq t_f \text{ Congelamiento del sensor} \\ cCx(t) & \forall t \geq t_f \text{ Error de calibración del sensor} \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde  $t_f$  se define como el tiempo en el que incide la falla,  $a \neq 0$  y  $c$  son valores constantes. Mientras que para actuadores, considerando a  $u(t)$  como la entrada de control, las fallas pueden ser de tipo *atenuación*, *actuador bloqueado*, *saturación*, *punto muerto* y matemáticamente expresarse como:

$$u(t) = \begin{cases} u(t) & \forall t \text{ Caso sin falla} \\ b(t)u(t) & u_{emin} < b(t) < 1 \quad \forall t \geq t_f \text{ Atenuación} \\ u(t_f) & \forall t \geq t_f \text{ Actuador bloqueado} \\ u_{min}|u_{max} & \forall t \geq t_f \text{ Saturación} \\ 0 & \forall t \text{ Punto muerto} \end{cases} \quad (2.2)$$

Donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas,  $t_f$  es el tiempo en el que ocurre la falla,  $a, c, h_{min}, h_{max}$  son constantes conocidas y  $u_{min}, u_{max}$  son los valores mínimo y máximo que puede alcanzar la entrada.

### 2.2.3. Diagnóstico de Fallas Basado en el Modelo

Esta metodología se basa en el uso de un modelo matemático del sistema físico a monitorear, generando redundancia analítica en sus componentes, lo cual facilita la obtención y comparación de señales residuo, a través de las variables de ambos sistemas. Si bien los modelos matemáticos de los sistemas no son perfectos o completos, existen técnicas que permiten dotar de cierta robustez a este enfoque [Chen and Patton, 2012]. Una de las

principales técnicas para el diagnóstico de fallas basado en el modelo, es el uso de observadores, por ejemplo de tipo Luenberger, para posteriormente generar un bloque de decisión basado en señal residuo. Debe mencionarse que ésta, y muchas otras técnicas de diagnóstico de fallas están diseñadas para trabajarse en modelos de sistemas lineales. Para un sistema no lineal en tiempo continuo, dado por las ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.3)$$

Donde  $f$  representa una función no lineal entre el estado y la entrada. Se puede definir una salida para el sistema como una función no lineal de la misma naturaleza  $y(t) = h(x(t), u(t))$ . Se puede representar mediante una linealización en un punto de operación como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Donde  $y \in \mathbb{R}^p$  representa el vector de salidas y los términos  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  son denominadas matrices de estado, entrada, salida y trayecto directo, respectivamente. Por simplicidad se considera el caso en el cual la matriz de trayecto directo es de ceros. Para el sistema (2.4), se dice que está en condición nominal, o libre de fallas; al existir una falla en algún componente, el modelo del sistema con fallas puede verse de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_f x(t) + B_f u(t) \\ y_f &= C_f x(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donde las matrices con falla representan a las matrices originales más un término adicional producto de la falla  $A_f = A + \delta A$ ,  $B_f = B + \delta B$ ,  $C_f = C + \delta C$ . A estas fallas se les denomina de tipo paramétrico. Para el caso de fallas en actuadores, la entrada del sistema con falla, ahora puede representarse como:

$$u_f = \delta U + U_f + U_0 \quad (2.6)$$

Donde  $U$  es la entrada total de control,  $\delta$  es un vector que representa las fallas multiplicativas,  $U_f$  representa todas las fallas aditivas, y  $U_0$  la entrada de control nominal, para llevar al sistema al punto de operación deseado para linealizarlo. Para el caso de sensores,

las salidas con falla pueden representarse como:

$$y_f = C_f x(t) + f(t) \quad (2.7)$$

Donde

$$C_f = C + \delta C$$

Se mantiene la misma definición de fallas aditivas y multiplicativas [Noura et al., 2009].

#### 2.2.4. Diagnóstico de fallas basado en observadores de estado

La generación de residuos mediante observadores de estado es una de las múltiples técnicas existentes para el diagnóstico de fallas. La idea general de este enfoque consiste en obtener una señal residuo mediante la comparación de señales correspondientes a las salidas de un sistema con las respectivas señales estimadas a partir de un observador. Para un sistema lineal con salidas  $y = Cx$ , y las respectivas salidas estimadas mediante el observador  $\hat{y} = C\hat{x}$ , se define una señal residuo como:

$$r = y - \hat{y} = C(x - \hat{x}) \quad (2.8)$$

La gran ventaja del enfoque basado en observadores radica en que existe una multiplicidad de técnicas para el diseño de distintos tipos de observadores (e.g. observador Luenberger), que son diseñados a partir de un modelo lineal para ser aplicables al modelo no lineal.

#### Desigualdades matriciales lineales LMI

El diseño de controladores y observadores debe satisfacer un conjunto de restricciones o requerimientos de tal manera que sea efectivo. De manera general, se desea que éstos tengan los siguientes requerimientos [Herrmann et al., 2007]:

- Estabilidad en lazo cerrado
- Robustez
- Desempeño
- Desempeño robusto

Una manera de agrupar estos requerimientos se da mediante problemas de optimización con criterios sujetos a restricciones determinadas; una gran mayoría de los problemas de control pueden expresarse en términos de desigualdades matriciales lineales o LMI por sus siglas en inglés, siendo uno de los ejemplos más demostrativos la desigualdad de Lyapunov. Para precisar considerando un sistema lineal de la forma:

$$\dot{x} = Ax \quad (2.9)$$

Se dice que el sistema es asintóticamente estable, si y sólo si existe una matriz definida positiva  $P$ , tal que:

$$A^T P + PA < 0 \quad (2.10)$$

Con este resultado se generó el interés en este tipo de técnicas para la resolución de problemas de control. Con el avance en los resultados obtenidos se clasificó a la problemática de LMI dentro de la optimización convexa.

Una LMI está definida de manera general como:

$$F(x^{lmi}) = F_0 + \sum_{k=1}^N x_k^{lmi} F_k > 0 \quad (2.11)$$

Donde  $x^{lmi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una variable matricial y  $F_k = F_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $k = 0, \dots, N$  son matrices simétricas conocidas. El símbolo  $>$  implica la definición positiva de  $F(x^{lmi})$ ; consecuentemente sus valores propios son mayores a cero. Dada la naturaleza de la problemática de la optimización convexa, no existe una solución analítica, sino numérica para este tipo de problemas, en la cual existen métodos para su resolución, e.g. el método de punto interior [Boyd et al., 1994]. Computacionalmente es posible resolver este tipo de problemáticas mediante el uso de software como MATLAB®LMI toolbox, YALMIP, CVX, entre otros, lo que ha permitido facilitar su uso y extensión [Duan and Yu, 2013]. Debe mencionarse que estos softwares, permiten resolver solamente problemáticas LMI no estrictas, es decir funciones LMI de la forma:

$$F(x^{lmi}) \geq 0 \quad (2.12)$$

Existen tres problemas principales al momento de abordar la resolución de una LMI:

1. Problema de factibilidad. Dado un problema LMI  $F(x^{lmi})$ , el objetivo es encontrar el conjunto de  $x^{feas} \in x^{lmi}$ , tal que  $F(x^{feas}) > 0$ . Es decir  $x^{feas}$  es el conjunto de elementos matriciales conocidos que cumplan esa condición.
2. Problema de minimización de objetivos lineales. Involucra la minimización de alguna función escalar  $\alpha$ , la cual representa una restricción de la LMI;  $\min \alpha(x^{lmi}) | F(x^{lmi}) > 0$  es una representación general de este problema.
3. Problema de valores propios generalizados. El problema de valores propios generalizados (GEVP por sus siglas en inglés) consiste en minimizar el máximo eigenvalor generalizado de un par de matrices que dependen de manera lineal a una variable, sujeta a una restricción, la cual se convierte en una LMI. De manera general puede representarse como:

$$\min \lambda | \lambda \Lambda(x^{lmi}) - O(x^{lmi}) > 0, \Lambda(x^{lmi}) > 0 \quad (2.13)$$

### Propiedades de LMIs

Existen múltiples casos donde la problemática a resolver no es propiamente una LMI, para lo cual existen propiedades y técnicas que permiten modificarla en una. Algunas de ellas son:

**Transformación de Congruencia.** Al tener una problemática donde la desigualdad matricial es no lineal, mediante un cambio de variable adecuado es posible representarla como una desigualdad lineal. Considerando una matriz definida positiva  $Q$ , su definición no cambiará al ser premultiplicada por otra matriz  $W$  de dimensión adecuada y rango pleno, y postmultiplicada por su transpuesta, tal que:

$$\begin{aligned} Q &> 0 \\ WQW^T &> 0 \end{aligned}$$

Esta propiedad es útil al encontrar desigualdades matriciales no lineales, ya que al hacer una premultiplicación y postmultiplicación adecuados se puede transformar en una desigualdad lineal.

**Complemento Schur.** Representa una de las herramientas más útiles para la transformación de desigualdades matriciales cuadráticas en lineales. La fórmula de Schur establece la equivalencia entre las expresiones:

1.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.14)$$

2.

$$\begin{aligned} M_{22} &< 0 \\ M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21} &< 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

3.

$$\begin{aligned} M_{11} &< 0 \\ M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} &< 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde  $M$  es una matriz bloque conformado por las submatrices  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$ ,  $M_{22}$  las cuales son de dimensiones apropiadas.

### 2.2.5. Observador Luenberger

Para un sistema lineal invariante en el tiempo dado por (2.4), el cual cumple con la condición de observabilidad, se puede diseñar un observador de estados, como se observa en el esquema de la Figura 2.1 el cual permite, a partir de mediciones de entrada y salida, estimar el estado completo de un sistema [Luenberger, 1964].

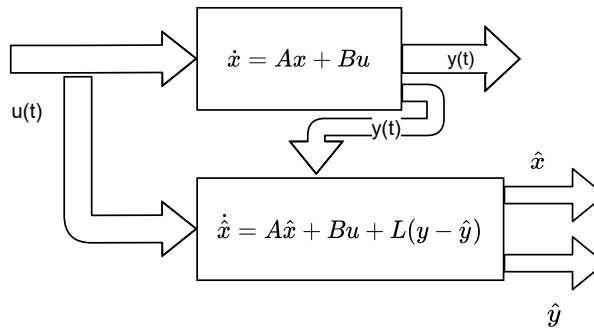


Figura 2.1: Diagrama de bloques de un observador Luenberger.

El observador está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{2.17}$$

Para asegurar la correcta estimación de estados, debe cumplirse que el error de estimación tienda a cero, esto es  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \approx 0$ ; para asegurar esto, su dinámica deberá ser asintóticamente estable. La dinámica del error está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= (A - LC)e(t)\end{aligned}\tag{2.18}$$

La estabilidad asintótica se alcanzará al calcular una ganancia  $L$ , tal que la matriz  $A - LC$  cumpla con el criterio de estabilidad de Lyapunov o el criterio de estabilidad Hurwitz. El diseño de este observador, permite generar una señal residuo, la cual es sensible a la falla, y permite su detección. Mediante resolución de LMI, la ganancia  $L$  se calcula resolviendo la problemática:

$$\begin{aligned}PA - MC + A^T P - C^T M^T &\leq 0 \\ L &= P^{-1}M\end{aligned}\tag{2.19}$$

La obtención de la LMI se puede consultar en el Apéndice A.

### 2.2.6. Esquemas GOS y DOS

El uso de un observador de estados diseñado a partir de la consideración de todas las entradas o salidas, permite la detección de fallas en actuadores o sensores, respectivamente, no obstante este observador está limitado a la detección. El aislamiento de fallas se realizará entonces utilizando un enfoque basado en bancos de observadores, Figura 2.2 los cuales se diseñan para detectar una falla asociada a un sensor o actuador en específico, ignorando las demás, existiendo dos esquemas que lo permiten [Chen and Patton, 2012].

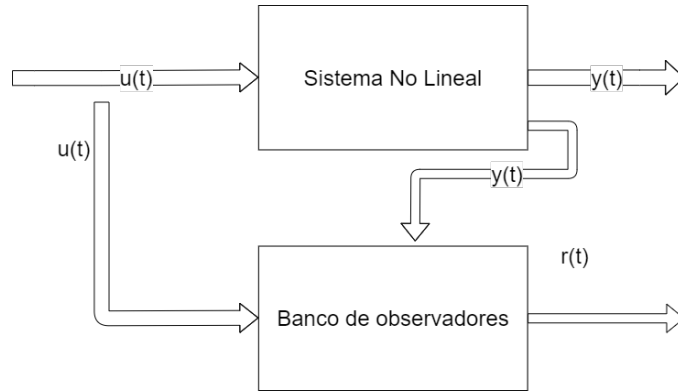


Figura 2.2: Diagrama de un esquema FDI basado en observador de estado.

El primero, denominado “Esquema de Observadores Generalizados” o GOS por sus siglas en inglés, considera un conjunto de observadores, diseñados considerando todas las entradas o salidas salvo una como se observa en la Figura 2.3, donde cada observador es sensible a todas las fallas menos una. La principal desventaja del esquema GOS es que no permite detección de fallas múltiples. Sin pérdida de generalidad, se puede diseñar un banco de observadores generalizados Luenberger (2.17) para un sistema lineal (2.4); suponiendo que la matriz de salida del sistema es:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

donde  $C_1, C_2, C_3$  son vectores fila linealmente independientes. Se tendrá un observador por cada salida, no estando la salida de interés en éste, de modo que mediante (2.19), se diseñarán los observadores con las matrices de salidas:

$$C_{O1} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad C_{O2} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad C_{O3} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

De igual manera al tener  $p$  salidas se diseñarán  $p$  observadores. Esquemáticamente el enfoque GOS se observa en la Figura 2.3, donde se aprecia que a cada observador le corresponden todas las salidas, exceptuando la correspondiente que busca aislar. La señal residuo obtenida directamente corresponde a la comparativa entre la salida real, con falla, y la salida estimada

“libre de falla”, obteniendo un residuo utilizable. Estableciendo un umbral adecuado es posible entonces aislar fallas individuales.

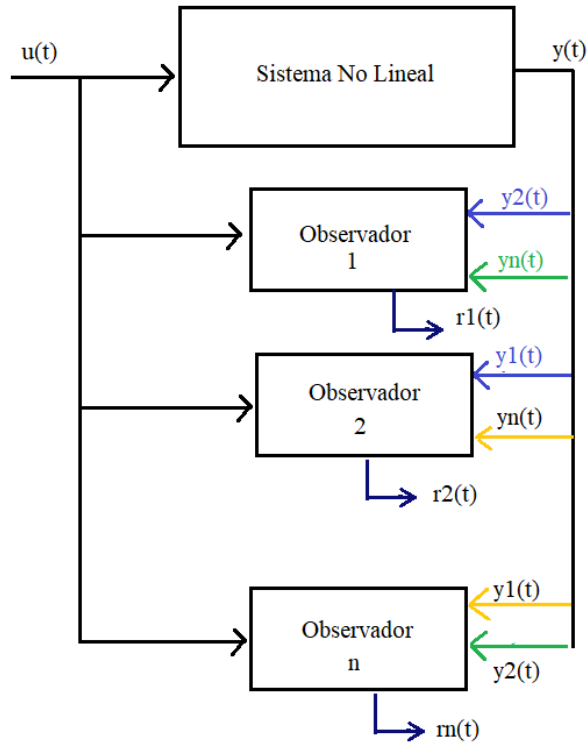


Figura 2.3: Diagrama GOS

El esquema DOS o “Esquema de Observadores Dedicados”, es complementario al anterior, esquemáticamente se observa en la Figura 2.4, donde se considera una sola entrada o salida y los consecuentes observadores son sensibles sólo a una falla, esto implica que el esquema permite la detección de múltiples fallas. La desventaja del esquema DOS radica en la observabilidad del sistema, al depender de sólo una salida, no siempre se puede asegurar la condición de observabilidad. Considerando la matriz de salidas (2.20), en este esquema existirá un observador por salida, el banco diseñado considera las matrices de salida:

$$C_{O1} = C_1 \quad C_{O2} = C_2 \quad C_{O3} = C_3$$

Finalmente debe mencionarse que ambos esquemas funcionan mejor para aisla-

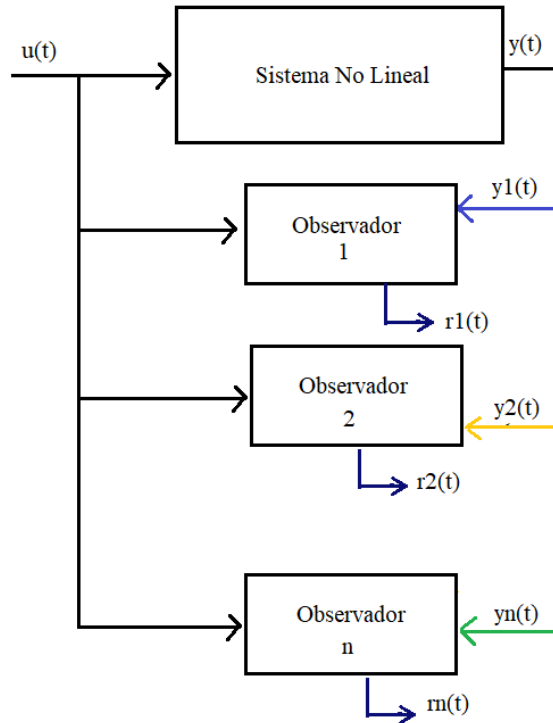


Figura 2.4: Diagrama DOS

miento de fallas en sensores, ya que el aislamiento de fallas en sensores siempre es posible, más no en actuadores [Chen and Patton, 2012]. Para la detección de fallas, se define en [Chen and Patton, 2012] la condición de detectabilidad fuerte como una que debe cumplir el observador, pero en [Nyberg, 2002] se extiende a una propiedad del sistema, donde éste debe ser detectable (por ejemplo mediante la matriz de Hautus). Para aislamiento de fallas en sensores es intuitivo elegir a la matriz de fallas diagonal, ya que la afectación es directamente sobre las salidas  $y$ . En el caso de actuadores, al afectar a las entradas  $u$ , la matriz de fallas  $Bf$  se iguala a la matriz de entradas  $B$ , y no se puede asegurar que  $Bf$  sea diagonal.

### 2.2.7. Enfoque descriptor para el diagnóstico de fallas

Los esquemas anteriores permiten detectar y aislar fallas existentes, ya sea en sensores o actuadores, más no permiten su estimación, lo cual es fundamental para poder implementar un esquema de control tolerante activo. Una de las estrategias para la estimación de fallas aplica el concepto de los sistemas descriptores [Luenberger, 1977], [Duan, 2010]. Un sistema descriptor lineal invariante en el tiempo está dado por:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Donde la matriz  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz de coeficientes constantes y puede ser de rango pleno, o singular. Si esta matriz es de rango pleno, el sistema se denomina normal, o regular, y puede representarse como (2.4) siendo un sistema de ecuaciones diferenciales, caso contrario, la matriz  $E$  no es de rango pleno, el sistema se denomina singular, y representa un sistema de ecuaciones diferencio-algebraicas (DAE).

El enfoque descriptor permite reescribir a un sistema lineal regular sujeto a fallas como un equivalente descriptor. En función del interés para estimación de la falla (sensor o actuador) se realizará esta reescritura.

#### Enfoque descriptor para diagnóstico de fallas en sensores

Considere el sistema LTI sujeto a fallas en sensores dado por (2.22):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} + f \end{aligned} \quad (2.22)$$

Este sistema puede ser reescrito con una transformación descriptora, tal que pueda representarse por (2.23):

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu + B_f f \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.23)$$

Con las matrices:

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \tilde{C} & I_p \end{bmatrix} \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Esta reescritura genera el estado extendido  $x = [\tilde{x} \ f]^T$ , donde además la falla se vuelve tanto un estado algebraico del sistema, como una entrada desconocida. Para el sistema dado por (2.23) se propone un observador de entradas desconocidas UIO, el cual será robusto ante la existencia de la falla. [Darouach et al., 1994]:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Nz + Gu + Ly \\ \hat{x} &= z + T_2y\end{aligned}\tag{2.25}$$

Donde el error de estimación está dado por  $e = x - \hat{x} = (I - T_2C)x - z$  [López-Estrada, 2014]. Para asegurar la convergencia del observador, se desea que su dinámica sea asintóticamente estable. Esta dinámica está dada por:

$$\dot{e} = Ne + T_1B_f f\tag{2.26}$$

Para poder asegurar la convergencia y la correcta estimación de fallas, el diseño de este observador se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Cálculo de  $T_1$  &  $T_2$  con  $[T_1 \ T_2] = ([E \ C]^T)^\dagger$ , y con  $[E \ C]^T$  de rango pleno.
2.  $T_1B = G$ ,  $Q = PK$
3. Resolución de LMI
4. Cálculo de  $K = P^{-1}Q$  y  $N = T_1A - KC$
5. Cálculo de  $L = K + NT_2$

Donde la LMI está dada por:

$$\begin{bmatrix} He(PT_1A - QC) & PT_1B_f & C^T \\ [PT_1B_f]^T & -\beta^2 I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0\tag{2.27}$$

Donde  $He(A) = A + A^T$  representa al hermitiano de la matriz. La obtención de la LMI anterior, así como el desarrollo de los pasos de diseño se presentan en el Apéndice A.

### 2.3. Modelo Convexo Takagi-Sugeno

Originalmente mediante la aplicación de conjuntos difusos [Zadeh, 1965], Takagi y Sugeno propusieron un modelo que permite la representación de un sistema no lineal a través de un conjunto de subsistemas lineales [Takagi and Sugeno, 1985]. Dicha representación está dada por una implicación difusa de tipo IF-THEN, la cual representa localmente, una relación entrada-salida de un sistema no lineal. Al obtener una cantidad  $r$  de implicaciones o reglas difusas, mediante una suma ponderada se obtiene una aproximación al modelo general del sistema. Esta aproximación es posible debido a que físicamente los sistemas están acotados, es decir el conjunto de valores que pueden tomar las variables del sistema están limitados. El modelo Takagi-Sugeno (TS) de (2.3) está dado por:

$$\begin{aligned} &\text{IF } z_1(t) \text{ is } M_{ij} \text{ and... and } z_s(t) \text{ is } M_{is}, \\ &\text{THEN } \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) &= C_i x(t) \end{cases} \\ &i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \tag{2.28}$$

Donde  $M_{ij}$  representa el conjunto difuso,  $r$  el número de reglas difusas,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  es el vector de salida. Las matrices del sistema lineal son conocidas  $A_i, B_i, C_i$ , y las variables premisa  $z(t) = [z_1(t), \dots, z_s(t)]$  pueden ser funciones de las variables de estado [Tanaka and Wang, 2002]. Debido a la naturaleza complementaria de las funciones de membresía, dependientes de las variables premisa es posible representar entonces el sistema (2.28) de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Donde

$$\begin{aligned} h_i(z(t)) &= \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ w_i(z(t)) &= \prod_{j=1}^p M_{ij}(z(t)) \end{aligned}$$

Puede entenderse el modelo TS como una suma de modelos lineales que operarán bajo ciertas condiciones dependientes de las funciones de membresía  $h_i(z)$ . Una gran ventaja de los modelos TS, es que se consideran aproximadores universales, no obstante su inconveniente recae en la dependencia de tener múltiples reglas difusas, para que la aproximación lineal sea más precisa.

### Enfoque del sector no lineal

Con el desarrollo de las técnicas de modelado TS, se obtuvo un enfoque que permite obtener una representación exacta del sistema no lineal, a partir del correspondiente modelo TS, ya sea de manera global o local, eliminando el factor de aproximación, pero fijando el número de modelos a utilizar, lo cual representa una ventaja y una desventaja a la vez. Este enfoque a su vez elimina el factor difuso de las funciones de membresía y las vuelve completamente deterministas [Ohtake et al., 2001]. Debido a la manera de obtenerse, los modelos TS obtenidos mediante este enfoque han sido catalogados dentro del conjunto de MODELOS CONVEXOS, junto a modelos LPV y qLPV [López-Estrada et al., 2019]. Para desarrollar un modelo TS mediante el enfoque de sector no lineal, de manera local, se explica en [Lendek et al., 2011b] hacer una factorización del sistema (2.3) en una forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B(x)u \\ y &= C(x)x \end{aligned} \tag{2.30}$$

Donde las matrices de estado, entrada y salida pueden volverse dependientes del estado (SDCF por sus siglas en inglés), y cada término no constante dentro de ellas representa una no linealidad del sistema, las cuales son seleccionadas como variables premisa para el modelo. Debido a que la región de trabajo es local, es necesario acotar dichas variables premisa, para lo cual se acotan los estados del sistema que intervienen en ellas, a un rango de valores  $x_i \in [x_{i_{min}}, x_{i_{max}}]$ . Consecuentemente las variables premisa estarán acotadas en  $z_i \in [z_{i_{min}}, z_{i_{max}}]$ . Al tener  $s$  no linealidades, y consecuentemente  $z_s$  variables premisa, el modelo TS constará de  $r = 2^s$  modelos; cada una de las submatrices  $A_i, B_i, C_i$  se generará en función de la factorización (2.30) y en cómo se elijan y acoten sus variables. Dada la naturaleza de los sistemas físicos, los submodelos de una representación TS (2.29) no siempre

tendrán múltiples matrices de estado, entrada o salida, sino también matrices comunes a todos los submodelos, esto permite que el modelo TS sea menos complejo.

Las funciones de ponderación estarán dadas por:

$$FP_{z_{i_{min}}} = \frac{z_{i_{max}} - z_i}{z_{i_{max}} - z_{i_{min}}} \quad FP_{z_{i_{max}}} = 1 - FP_{z_{i_{min}}} \quad (2.31)$$

$$i = 1 \dots s$$

Las funciones de membresía  $h_i(z(t))$  corresponderán al producto de las funciones de ponderación  $FP_{z_i}$  para cada variable visto como una combinatoria, resultando en  $r = 2^p$  funciones de membresía. De una manera análoga, se puede comprender este producto, como una tabla de verdad binaria. Matemáticamente se expresa por (2.32).

$$h_i(z(t)) = \prod_{j=1}^r FP_{z_{ij}}(z) \quad (2.32)$$

$$j = \min, \max$$

Dichas funciones de membresía deben cumplir las propiedades de una suma convexa, las cuales son:

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \quad (2.33)$$

$$h_i(z(t)) \geq 0 \quad i = 1 \dots r$$

Cumpliendo estas condiciones el modelo convexo dado en (2.29) es una representación exacta del modelo (2.3). Finalmente, en función de la forma en que se elijan las variables premisa, y como sean acotadas, es posible generar varios modelos TS a partir de un mismo modelo no lineal.

### Ejemplo numérico.

Considerar un sistema no lineal dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 + x_2 + x_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1 x_2 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Este sistema se puede expresar matricialmente como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 & 1 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (2.35)$$

Donde  $x = [x_1 \ x_2]^T$ ,  $y = [y_1 \ y_2]^T$ . Esta factorización es de la forma (2.30), y se observa que existen 3 elementos no constantes en las matrices de estado y entrada, no obstante solamente son dos términos diferentes, de modo que eligiendo  $z_1 = x_1$ ,  $z_2 = x_2$  se tendrán  $r = 4$  modelos. Es necesario acotar las variables premisa a un intervalo definido, esto se logra acotando los estados a un rango deseado o permisible, para finalidades didácticas se acotarán en el intervalo  $z_1 = x_1 \in [5, 10]$ ,  $z_2 = x_2 \in [4, 8]$ . Estas cotas generan las funciones de ponderación:

$$\begin{aligned} FP_{z_1_{min}} &= \frac{10 - z_1}{10 - 5} = 2 - \frac{z_1}{5} \\ FP_{z_1_{max}} &= 1 - FP_{z_1_{min}} = \frac{z_1}{5} - 1 \\ FP_{z_2_{min}} &= \frac{8 - z_2}{8 - 4} = 2 - \frac{z_2}{4} \\ FP_{z_2_{max}} &= 1 - FP_{z_2_{min}} = \frac{z_2}{4} - 1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Las funciones de membresía, producto de las combinaciones de éstas serán:

$$\begin{aligned} h_1 &= FP_{z_1_{min}} * FP_{z_2_{min}} \\ h_2 &= FP_{z_1_{min}} * FP_{z_2_{max}} \\ h_3 &= FP_{z_1_{max}} * FP_{z_2_{min}} \\ h_4 &= FP_{z_1_{max}} * FP_{z_2_{max}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Las matrices de estado  $A_i$  y entrada  $B_i$  se modificarán con los valores mínimo y máximo de las cotas para cada variable premisa, y mantendrán la relación combinatoria de las funciones

de membresía:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Aquí, la matriz  $B_1$  corresponderá a las matrices  $A_1, A_2$  y la matriz  $B_2$  a las matrices  $A_3, A_4$ , generando 4 modelos en total. Este conjunto de matrices permiten generar el sistema:

$$\dot{x} = h_1(A_1x + B_1u) + h_2(A_2x + B_1u) + h_3(A_3x + B_2u) + h_4(A_4x + B_2u) \tag{2.39}$$

El cual será una representación exacta de (2.34) en el intervalo propuesto. Debe mencionarse que la representación no es única, ya que es posible factorizar a (2.34) como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 + x_1 \\ 1 + x_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{2.40}$$

La elección entre una factorización u otra, así como la región de modelado, es decir las cotas usadas en las funciones de ponderación, es mayoritariamente arbitraria. En función del objetivo de control o diagnóstico del sistema, puede elegirse una factorización y región de modelado en donde cada submodelo cumpla con las propiedades de observabilidad, controlabilidad o que en general el número de submodelos sea adecuado.

### Diagnóstico de fallas en modelos convexos Takagi-Sugeno

La principal ventaja del modelado TS, se da en que las técnicas aplicables a modelos lineales, son extensibles a este tipo de modelos, de modo que los enfoques antes mencionados son aplicables a un modelo convexo siempre y cuando cumplan (2.33). Debe mencionarse que el diseño de un controlador u observador convexo está ligado a que todos los submodelos lineales que lo componen deberán cumplir la condición de controlabilidad y observabilidad, o al menos sean alcanzables y detectables.

Para el caso del observador Luenberger convexo, éste se representa como:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t)\end{aligned}\tag{2.41}$$

Por facilidad, se asume que las funciones de membresía no dependen de variables de estado no medibles, es decir dependen únicamente de las salidas del sistema. Con esta consideración, el observador convexo podrá diseñarse modificando la ecuación(2.19) en:

$$\begin{aligned}PA_i - M_i C_j + A_i^T P - C_j^T M_i^T &\leq 0 \\ L_i &= P^{-1} M_i\end{aligned}\tag{2.42}$$

Mientras que para el enfoque descriptor de manera convexa el UIO se representa por:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(N_i z + G_i u + L_i y) \\ \hat{x} &= z + T_2 y\end{aligned}\tag{2.43}$$

Bajo las mismas condiciones el observador puede calcularse modificando la LMI (2.27) por:

$$\begin{bmatrix} He(PT_1 A_i - Q_i C) & PT_1 B_f & C^T \\ [PT_1 B_f]^T & -\beta^2 I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0\tag{2.44}$$

El procedimiento para obtener estas ecuaciones se expresa en el Apéndice A.

## 2.4. Conclusiones

En el presente capítulo se presentaron los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo de este trabajo, describiendo una de las técnicas más utilizadas para el diagnóstico de fallas en sistemas físicos, como lo es el uso de observadores, conjuntándola con una de las técnicas de modelado de sistemas de amplio interés como lo son los modelos convexos. Se presentó un ejemplo numérico para facilitar la comprensión del método, además de observar que la representación convexa no es única, permitiendo una libertad de diseño para éstos, lo cual causa que las propiedades de controlabilidad y observabilidad existan

o no en diversas representaciones de un mismo sistema. Así también se presentaron las herramientas matemáticas para el desarrollo de los esquemas de diagnóstico propuestos.



## Capítulo 3

# Modelado del Quadrotor

### 3.1. Principio de Funcionamiento

Un quadrotor es un vehículo aéreo de tipo helicóptero, conformado por cuatro motores, montados de manera equidistante a su centro de gravedad, sobre dos ejes perpendiculares. Presentan ventajas respecto a otro tipo de helicópteros de despeje y aterrizaje vertical, como lo es su simplicidad en el diseño, y en el hecho de que su control posicional depende de variar la velocidad de los motores, entre otros. Al poderse desplazar de manera aérea cuenta con seis grados de libertad, tres de forma traslacional y tres de tipo rotacional, pero al contar con sólo cuatro rotores, se considera un sistema subactuado. El vehículo PVTOL, puede verse como un subcaso del quadrotor, ya que sólo cuenta con dos rotores y tres grados de libertad, dos traslacionales y uno rotacional [Garcia et al., 2006]. Cada uno de los motores produce una fuerza de empuje y un momento de arrastre al interactuar con el aire, los cuales son proporcionales a su velocidad, de modo que al superar a la fuerza gravitacional ejercida sobre el vehículo, éste puede elevarse. A su vez, cada rotor produce un momento en la dirección contraria a su sentido de giro, lo cual causa una rotación respecto al eje vertical del quadrotor, y para contrarrestarla se requiere que las velocidades estén balanceadas y las direcciones de giro de cada par diagonal de rotores sea contraria a la del par opuesto. Debido al eje fijo de los rotores, la suma de las fuerzas ejercidas por estos apunta en una dirección, provocando que el único movimiento que se pueda realizar sea

en un eje, de tal manera que para alcanzar un movimiento traslacional en todo el espacio tridimensional, primeramente se debe rotar el vehículo, provocando que el empuje ejercido se encuentre en los tres ejes del plano; mientras que, para generar esta rotación debe existir una diferencia de velocidades en los rotores, es decir mediante un movimiento rotacional se controla el movimiento traslacional del vehículo. En la Figura 3.1 se observa un esquema del

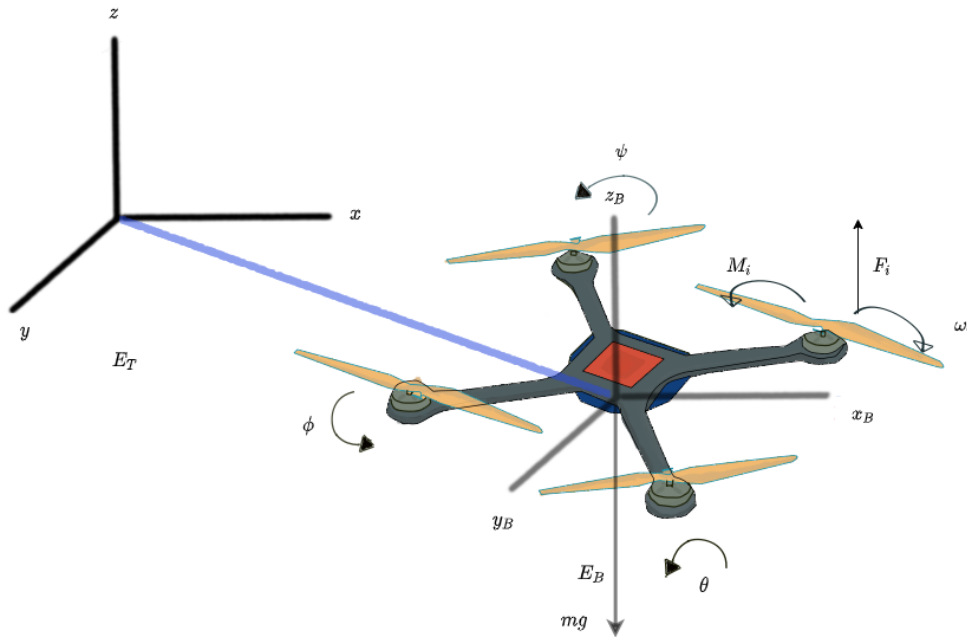


Figura 3.1: Diagrama de cuerpo libre del quadrotor.

vehículo quadrotor, representando un movimiento traslacional y los posibles movimientos rotacionales.

### 3.2. Modelo matemático

Existe una amplia literatura respecto al modelado matemático de este tipo de vehículos, siendo algunos de los primeros trabajos publicados los de [Mistler et al., 2001] y [Hamel et al., 2002], en ellos se presenta un modelo del quadrotor mediante la aplicación de leyes y principios físicos mediante la formulación Newton-Euler. En las formulaciones presentadas se omite la dependencia del tiempo de las ecuaciones diferenciales para simplificar

su notación.

### 3.2.1. Modelo Newton-Euler

Esta formulación permite representar ecuaciones dinámicas de un sistema mediante la combinación de las leyes homónimas que lo rigen. Como se menciona, cada motor genera una fuerza  $F_i$  y par  $M_i$  proporcionales a sus velocidades  $\omega_i$  dados por:

$$\begin{aligned} F_i &= k_F \omega_i^2 \\ M_i &= k_M \omega_i^2 \\ i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Donde  $k_F$  y  $k_M$  son parámetros que relacionan a las fuerzas y velocidades, y el índice  $i$  representa al motor específico. Se busca que la suma de estas fuerzas sea equivalente a la fuerza de gravedad ejercida sobre el vehículo, esto es  $\sum_{i=1}^4 F_i = mg$ , esto con la finalidad de poder mantenerlo en equilibrio sobre el aire. Para establecer su comportamiento cinemático y dinámico, es necesario conocer su posición en el espacio, dado por coordenadas  $x, y, z$  referenciadas del centro de masa del vehículo, a un marco de referencia inercial fijo al espacio  $E_T$ , representado por los vectores  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  y su orientación, dada por los ángulos  $\theta, \phi, \psi$ , los cuales refieren un marco fijo en el vehículo  $E_B$  respecto al marco fijo en el espacio, conocidos como ángulos de Euler como se observa en la Figura 3.1. Al establecer estos marcos de referencia, el movimiento traslacional representa un cambio de coordenadas del sistema, visto como un vector, mientras que el movimiento rotacional induce una transformación de cuerpo rígido, la cual se puede expresar mediante una matriz de rotación.

El comportamiento cinemático estará definido por sus velocidades traslacionales y rotacionales, dados por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{z} &= v_z \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde el vector  $V_0 = (v_x, v_y, v_z)$  representa la velocidad del VANT referenciada al marco del espacio, para referenciarla respecto al marco del vehículo se tiene la relación:

$$V_0 = RV \quad (3.3)$$

Donde  $V = (v_{xv}, v_{yv}, v_{zv})$  es la velocidad respecto al marco del vehículo. La matriz de rotación está dada por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \sin \phi - \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \cos \phi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \sin \phi + \cos \phi \cos \psi & \sin \theta \cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

De manera equivalente la velocidad rotacional puede establecerse con la relación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \end{bmatrix} \omega \quad (3.5)$$

Donde  $\omega = [\rho \ q \ r_z]'$  representa la velocidad angular referida al marco del vehículo.

Las ecuaciones dinámicas, obtenidas a partir de la aplicación de las leyes de Newton, permiten establecer la relación entre las fuerzas aplicadas y los cambios en las velocidades anteriores. Partiendo del uso de la segunda ley de Newton, para movimiento traslacional y rotacional se obtiene (3.6):

$$\begin{aligned} m\dot{V}_0 &= \sum F \\ J\dot{\omega} &= -\omega \times J\omega + \sum M \end{aligned} \quad (3.6)$$

La suma de fuerzas corresponde a los empujes producidos por los rotores, y la fuerza de gravedad ejercida sobre el vehículo; las primeras se encuentran referidas en el marco del vehículo, por lo cual es necesario transformarlas al marco del espacio, mediante el uso de la matriz de rotación  $R$ , mientras que la suma de pares corresponde a los pares producidos por los mismos rotores. La matriz  $J$  representa la inercia del vehículo y está dada por:

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}$$

### Matriz de colocación del control

Las entradas  $u_i, i = 1, \dots, 4$  del sistema, corresponden a la suma de fuerzas ( $u_1$ ), y momentos ( $u_2, u_3, u_4$ ) que producen los motores, los cuales son directamente proporcionales

a sus velocidades:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & -l \\ K_\psi & K_\psi & -K_\psi & -K_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_F \omega_1^2 \\ k_F \omega_2^2 \\ k_F \omega_3^2 \\ k_F \omega_4^2 \end{bmatrix}$$

Donde  $l$  es la distancia del eje del rotor al centro de gravedad del quadrotor, y  $K_\psi$  representa la relación de conversión de momento a arrastre. Las velocidades de los rotores son controladas mediante una entrada PWM  $u_{pi}$ , como se presenta en [Zhong et al., 2018], modificando la fuerza ejercida por ellos como  $F_i = K_m u_{pi}$ , donde  $K_m$  representa la ganancia del motor, simplificando así la relación entre empujes y velocidades. Sustituyendo la relación se tiene:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & -l \\ K_\psi & K_\psi & -K_\psi & -K_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_m u_{p1} \\ K_m u_{p2} \\ K_m u_{p3} \\ K_m u_{p4} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Dado que los rotores son controlados en función de su velocidad, es posible usar las entradas  $u_i$  directamente como entradas de control. La matriz que relaciona a las entradas se le conoce como “Matriz de colocación de control” o CAM por sus siglas en inglés.

Bajo estas consideraciones, las ecuaciones (3.6) se expresan como:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) \frac{u_1}{m} \\ \dot{v}_y &= -(\sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi) \frac{u_1}{m} \\ \dot{v}_z &= g - (\cos \theta \cos \phi) \frac{u_1}{m} \\ \dot{\rho} &= \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) q r_z + \frac{u_2}{J_x} \\ \dot{q} &= \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) \rho r_z + \frac{u_3}{J_y} \\ \dot{r}_z &= \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) \rho q + \frac{u_4}{J_z} \end{aligned}$$

### 3.2.2. Modelado en Espacio de Estados

Mediante la combinación de las ecuaciones (3.2), (3.5) y (3.6) se obtiene una representación en espacio de estados con el vector de estados  $x = [x, y, z, v_x, v_y, v_z, \phi, \theta, \psi, \rho, q, r_z]$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{z} &= v_z \\
 \dot{v}_x &= -(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) \frac{u_1}{m} \\
 \dot{v}_y &= -(\sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi) \frac{u_1}{m} \\
 \dot{v}_z &= g - (\cos \theta \cos \phi) \frac{u_1}{m} \\
 \dot{\phi} &= \rho + r_z(\tan \theta \cos \phi) + q(\tan \theta \sin \phi) \\
 \dot{\theta} &= q \cos \phi - r_z \sin \phi \\
 \dot{\psi} &= r_z(\sec \theta \cos \phi) + q(\sec \theta \sin \phi) \\
 \dot{\rho} &= \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) q r_z + \frac{u_2}{J_x} \\
 \dot{q} &= \left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) \rho r_z + \frac{u_3}{J_y} \\
 \dot{r}_z &= \left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) \rho q + \frac{u_4}{J_z}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

El modelo anterior es ampliamente utilizado en la literatura, no obstante en lazo abierto es inestable, por lo cual requiere una ley de control para alcanzar su regulación. Para ello se propone linealizarlo en el origen y proponer una retroalimentación de estados con el fin de regularlo. Se consideran los parámetros del quadrotor presentados en [Zhong et al., 2018] presentados en la Tabla 3.1.



Matriz de entradas

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -120 & -120 & -120 & -120 \\ 800 & -800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 800 & -800 \\ 12000 & 12000 & -12000 & -12000 \end{bmatrix}$$

Para propósitos de regulación, se considera que todos los estados están disponibles para su medición.

### 3.3. Modelo Convexo Takagi-Sugeno

Para el propósito de diagnóstico de fallas en sensores de posición angular, con base en [Guzmán-Rabasa et al., 2019], es posible separar las dinámicas rotacional y traslacional del vehículo, restando las siguientes ecuaciones de la dinámica rotacional:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \rho + r_z(\tan \theta \cos \phi) + q(\tan \theta \sin \phi) \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r_z \sin \phi \\ \dot{\psi} &= r_z(\sec \theta \cos \phi) + q(\sec \theta \sin \phi) \\ \dot{\rho} &= \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)qr_z + \frac{u_2}{J_x} \\ \dot{q} &= \left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right)\rho r_z + \frac{u_3}{J_y} \\ \dot{r}_z &= \left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)\rho q + \frac{u_4}{J_z} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Se observa que el sistema (3.8) cuenta con términos no lineales, y en específico para el subsistema rotacional (3.9), existen múltiples elementos no lineales, de tipo trigonométrico,

en sus ecuaciones. Para obtener un modelo TS que sea una representación exacta del sistema, se considera una factorización de la forma(2.30), reescribiendo (3.9) como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \tan \theta \sen \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sen \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sec \theta \cos \phi & \sec \theta \sen \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{J_y - J_z}{J_x})r_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{J_z - J_x}{J_y})\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{J_x - J_y}{J_z})\rho & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} u(t) \quad (3.10)$$

Considerando el vector de estados como  $x_{ts} = [\phi, \theta, \psi, \rho, q, r_z]^T$ . Con la factorización (3.10) se observa que existen ocho términos no constantes en la matriz de estado  $A(x)$ , los cuales generan  $2^8 = 256$  submodelos para una representación exacta por medio del enfoque del sector no lineal. Bajo esta premisa, diseñar un esquema TS que incluya los 256 modelos no solo resulta en un problema complicado, sino en uno que pudiera ser infactible a resolver al hablar de observadores. Para finalidades de comparación, se obtuvo el modelo TS que representa exactamente al modelo no lineal del sistema. Las variables premisa se eligen tomando los términos no lineales que aparecen directamente sobre la matriz  $A(x)$ , y para definir la región de modelado se toma un intervalo donde las expresiones no lineales de la dinámica rotacional estén definidas (particularmente las funciones trigonométricas); bajo esta premisa se acotan los ángulos en un rango de  $\theta, \phi \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$  rad y las velocidades angulares  $\rho, r_z \in [-22, 22]$ rad/s, rangos en los cuales se puede tener una libertad para que el modelo TS sea válido, y en consecuencia se definen las variables premisa en los siguientes rangos:

$$\begin{aligned} z_1 &= \tan \theta \cos \phi \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}] & z_5 &= \sec \theta \cos \phi \in [\frac{1}{2}, 2] \\ z_2 &= \tan \theta \sen \phi \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] & z_6 &= \sec \theta \sen \phi \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \\ z_3 &= \cos \theta \in [\frac{1}{2}, 1] & z_7 &= q \in [-22, 22] \\ z_4 &= -\sen \theta \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}] & z_8 &= r_z \in [-22, 22] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Con la factorización (3.10) y las cotas (3.11) se generó un modelo TS de 256 submodelos. Las funciones de membresía y ponderación se obtienen mediante el cálculo de las combinaciones existentes. Las matrices numéricas se omiten.

Debido a la naturaleza de los vuelos de VANT comerciales, es posible considerar los ángulos

cercanos a cero, como lo proponen en [Sabatino, 2015]. Esto permite reducir la dinámica rotacional (3.9) a:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \rho \\
\dot{\theta} &= q \\
\dot{\psi} &= r_z \\
\dot{\rho} &= \left(\frac{J_y - J_z}{J_x}\right)qr_z + \frac{u_2}{J_x} \\
\dot{q} &= \left(\frac{J_z - J_x}{J_y}\right)\rho r_z + \frac{u_3}{J_y} \\
\dot{r}_z &= \left(\frac{J_x - J_y}{J_z}\right)\rho q + \frac{u_4}{J_z}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Expresándola en términos del estado  $x$  se tendrá la siguiente representación:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_4 \\
\dot{x}_2 &= x_5 \\
\dot{x}_3 &= x_6 \\
\dot{x}_4 &= a_1 x_5 x_6 + \frac{u_2}{J_x} \\
\dot{x}_5 &= a_2 x_4 x_6 + \frac{u_3}{J_y} \\
\dot{x}_6 &= a_3 x_4 x_5 + \frac{u_4}{J_z}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Para proponer el diseño del esquema TS, se propone la siguiente representación SDCF, considerando como variables de ponderación a  $z_1 = x_5, z_2 = x_4$ :

$$\dot{x}_{ts}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 z_2 & 0 \end{bmatrix} x_{ts}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} u(t) \tag{3.14}$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \frac{J_y - J_z}{J_x} \right) \\ a_2 &= \left( \frac{J_z - J_x}{J_y} \right) \\ a_3 &= \left( \frac{J_x - J_y}{J_z} \right) \end{aligned}$$

Se propone que las salidas estén dadas por:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.15)$$

Como se observa en (3.14) y en (3.15) solamente la matriz  $A(x)$  tiene términos dependientes del estado, en las últimas 3 filas, siendo dos de ellos comunes. Esto permite que el número de modelos TS sea  $m = 2^p = 4$ ,  $p = 2$ . Se acotan las variables de ponderación como  $z_1, z_2 \in [-22 \ 22] \frac{rad}{s}$ . Con esta consideración las funciones de ponderación son:

$$\begin{aligned} FP_{z1_{min}} &= \frac{22 - z_1}{22 - 0} = \frac{1}{2} - \frac{z_1}{44} \\ FP_{z1_{max}} &= 1 - FP_{z1_{min}} = \frac{1}{2} + \frac{z_1}{44} \\ FP_{z2_{min}} &= \frac{22 - z_2}{22 - 0} = \frac{1}{2} - \frac{z_2}{44} \\ FP_{z2_{max}} &= 1 - FP_{z2_{min}} = \frac{1}{2} + \frac{z_2}{44} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Consecuentemente las cuatro funciones de membresía están dadas por:

$$\begin{aligned} h_1 &= FP_{z1_{min}} * FP_{z2_{min}} \\ h_2 &= FP_{z1_{min}} * FP_{z2_{max}} \\ h_3 &= FP_{z1_{max}} * FP_{z2_{min}} \\ h_4 &= FP_{z1_{max}} * FP_{z2_{max}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Y finalmente las cuatro matrices vértices del sistema TS serán:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Se considera que las entradas del sistema son las señales PWM establecidas en (3.7), lo cual solamente representa un mapeo lineal de las entradas  $u_i$  a las entradas  $u_{pi}$ , resultando en la matriz de entrada como:

$$B_{ts} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 800 & -800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 800 & -800 \\ 12000 & 12000 & -12000 & -12000 \end{bmatrix}$$

La matriz de salida se define como:

$$C_{ts} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De modo que el modelo TS de la dinámica rotacional (3.12) y que es una representación

exacta en el intervalo, está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=1}^4 (h_i A_i x_{ts}) + B_{ts} u_p \\ y &= C_{ts} x_{ts}\end{aligned}\tag{3.18}$$

### 3.4. Conclusiones

En el presente capítulo se abordó el modelado convexo TS del VANT quadrotor, para su dinámica rotacional, tomando como base el modelo en espacio de estados a partir de la formulación Newton-Euler, y la dinámica de los actuadores, bajo dos condiciones, la primera que es una representación exacta del sistema no lineal y una representación la cual tiene un número adecuado de submodelos y además tiene la ventaja de ser lineal respecto a la entrada, reduciendo su complejidad. En el siguiente capítulo se presentarán los resultados de simulación de los esquemas de diagnóstico de fallas implementados.



## Capítulo 4

# Diseño del esquema de diagnóstico de fallas

En este capítulo se presentan tanto la simulación de ambos modelos TS obtenidos, así como las estrategias de diagnóstico de fallas, tanto para detección, aislamiento y estimación. Los esquemas implementados se enfocaron en fallas aditivas en sensores. Para resolver las LMIs propuestas en los capítulos anteriores se utilizó el software YALMIP [Lofberg, 2004] en MATLAB<sup>®</sup>, mediante uso de solucionadores SEDUMI [Sturm, 1999], [Peaucelle et al., 2003] y MOSEK [Andersen and Andersen, 2000]. YALMIP (del obsoleto Yet Another LMI Parser) es un programa que permite modelar diversos problemas de optimización, como programación semidefinida, desigualdades matriciales lineales, programación lineal, programación cuadrática, entre otros, simplificando su codificación, y resolviendolos mediante el interface con distintos solucionadores. Particularmente en este trabajo se usaron los solucionadores SEDUMI, que usa un método de optimización sobre conos homogéneos, y MOSEK que usa el método primal-dual.

## 4.1. Regulación del quadrotor.

Para regular el sistema (3.8), se realiza un control por retroalimentación de estados, de la forma (4.1):

$$u = -Kx \quad (4.1)$$

Bajo la consideración que para finalidades de regulación todos los estados están disponibles para su medición, utilizando el modelo lineal obtenido, el cálculo de la ganancia  $K$  se realiza obteniendo una solución para la LMI (4.2):

$$\begin{aligned} XA' + AX - BW - W'B' &< 0 \\ X &> 0 \\ K &= WX^{-1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para la obtención de (4.2) consultar el Apéndice A. La ganancia  $K$  y la matriz  $X$  definida positiva calculadas mediante YALMIP son:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Donde los bloques  $K_1, K_2, K_3$  están dados por:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -0.0005759 & -0.001705 & -0.004417 & 0.018333 \\ 3.5956 * 10^{-8} & 0.0022836 & -0.0041305 & -0.022122 \\ -0.0022823 & 0.00057598 & -0.0041312 & -0.0037716 \\ 0.0017064 & 5.416 * 10^{-8} & -0.004417 & -4.237 * 10^{-7} \end{bmatrix} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 0.0037707 & 0.00009038 & -0.0012953 & -0.0023451 \\ -8.3619 * 10^{-8} & 0.000026847 & 5.9376 * 10^{-8} & 0.0036463 \\ 0.022113 & -0.000026863 & -0.0036433 & 0.0012955 \\ -0.018343 & -0.000026866 & 0.0023481 & 3.9353 * 10^{-8} \end{bmatrix} \\ K_3 &= \begin{bmatrix} -0.0049273 & 0.0023148 & 0.0014211 & 0.00014682 \\ -0.0043224 & -0.0037424 & -1.4442 * 10^{-8} & 0.000012708 \\ -0.0043237 & -0.0014212 & 0.0037391 & -0.000012735 \\ -0.0049273 & -1.0563 * 10^{-8} & -0.002318 & -0.000012745 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mientras que la matrix  $X$  es:

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Con los bloques dados por:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.093793 & -1.57 * 10^{-7} & 2.1676 * 10^{-7} & 4.1697 * 10^{-8} \\ -1.57 * 10^{-7} & 0.093793 & 2.3533 * 10^{-7} & 0.0083394 \\ 2.1676 * 10^{-7} & 2.3533 * 10^{-7} & 0.068898 & 7.0344 * 10^{-8} \\ 4.1697 * 10^{-8} & 0.0083394 & 7.0344 * 10^{-8} & 0.0089474 \\ 0.0083393 & 3.513 * 10^{-8} & 4.6913 * 10^{-8} & 4.8233 * 10^{-8} \\ 4.9431 * 10^{-8} & 3.6982 * 10^{-8} & 7.7749 * 10^{-8} & -1.5531 * 10^{-8} \\ -0.02928 & 1.7231 * 10^{-7} & -2.3654 * 10^{-8} & 8.8149 * 10^{-8} \\ -1.6669 * 10^{-7} & -0.029279 & -2.1353 * 10^{-8} & 0.0070522 \\ -1.2822 * 10^{-7} & -4.9526 * 10^{-8} & -0.032632 & -1.3255 * 10^{-7} \\ -5.1323 * 10^{-8} & -0.010807 & -9.2403 * 10^{-8} & -0.013934 \\ -0.010807 & 1.662 * 10^{-7} & -6.1445 * 10^{-8} & 3.4726 * 10^{-8} \\ -4.6124 * 10^{-8} & -1.0683 * 10^{-8} & -1.2376 * 10^{-7} & 5.4007 * 10^{-8} \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.0083393 & 4.9431 * 10^{-8} & -0.02928 & -1.6669 * 10^{-7} \\ 3.513 * 10^{-8} & 3.6982 * 10^{-8} & 1.7231 * 10^{-7} & -0.029279 \\ 4.6913 * 10^{-8} & 7.7749 * 10^{-8} & -2.3654 * 10^{-8} & -2.1353 * 10^{-8} \\ 4.8233 * 10^{-8} & -1.5531 * 10^{-8} & 8.8149 * 10^{-8} & 0.0070522 \\ 0.0089474 & -2.963 * 10^{-8} & 0.0070523 & 1.3002 * 10^{-8} \\ -2.963 * 10^{-8} & 0.068898 & -1.4999 * 10^{-8} & -3.5245 * 10^{-8} \\ 0.0070523 & -1.4999 * 10^{-8} & 0.097818 & 6.9934 * 10^{-7} \\ 1.3002 * 10^{-8} & -3.5245 * 10^{-8} & 6.9934 * 10^{-7} & 0.097818 \\ -1.6136 * 10^{-8} & 5.6257 * 10^{-8} & 4.6184 * 10^{-7} & 5.3727 * 10^{-7} \\ -1.159 * 10^{-8} & -1.1356 * 10^{-8} & 4.7485 * 10^{-7} & 0.058583 \\ -0.013934 & 5.7216 * 10^{-8} & 0.058582 & 3.7288 * 10^{-7} \\ -7.2149 * 10^{-8} & -0.032632 & -3.1156 * 10^{-7} & -3.3067 * 10^{-8} \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -1.2822 * 10^{-7} & -5.1323 * 10^{-8} & -0.010807 & -4.6124 * 10^{-8} \\ -4.9526 * 10^{-8} & -0.010807 & 1.662 * 10^{-7} & -1.0683 * 10^{-8} \\ -0.032632 & -9.2403 * 10^{-8} & -6.1445 * 10^{-8} & -1.2376 * 10^{-7} \\ -1.3255 * 10^{-7} & -0.013934 & 3.4726 * 10^{-8} & 5.4007 * 10^{-8} \\ -1.6136 * 10^{-8} & -1.159 * 10^{-8} & -0.013934 & -7.2149 * 10^{-8} \\ 5.6257 * 10^{-8} & -1.1356 * 10^{-8} & 5.7216 * 10^{-8} & -0.032632 \\ 4.6184 * 10^{-7} & 4.7485 * 10^{-7} & 0.058582 & -3.1156 * 10^{-7} \\ 5.3727 * 10^{-7} & 0.058583 & 3.7288 * 10^{-7} & -3.3067 * 10^{-8} \\ 0.068898 & 1.474 * 10^{-6} & 6.137 * 10^{-7} & -9.635 * 10^{-8} \\ 1.474 * 10^{-6} & 0.16165 & 1.3221 * 10^{-7} & -2.3759 * 10^{-7} \\ 6.137 * 10^{-7} & 1.3221 * 10^{-7} & 0.16165 & 5.2126 * 10^{-8} \\ -9.635 * 10^{-8} & -2.3759 * 10^{-7} & 5.2126 * 10^{-8} & 0.068898 \end{bmatrix}$$

Se considera además que el sistema busca regular su posición a una altura de 2 metros y mantenerse en esa posición. Para corroborar el correcto funcionamiento del esquema de regulación se realizó la simulación con condiciones iniciales  $x = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ . Como se observa en la Figura 4.1 el sistema alcanza el punto de regulación deseado.

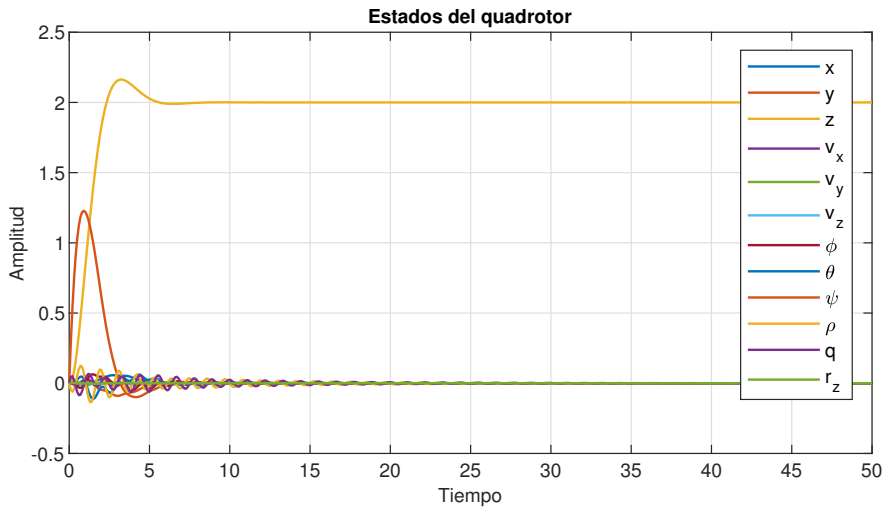


Figura 4.1: Quadrotor regulado

Para finalidades de comparación, se consideró el modelo TS de 256 submodelos, que es una representación exacta de la dinámica rotacional no lineal, y el modelo TS de 4 submodelos. Para el caso de la representación exacta de 256 submodelos, se simuló por 100 segundos usando el método de Euler con condiciones iniciales de cero, como se observa en la Figura 4.2, esto debido a que el error entre el modelo lineal y la representación exacta pareciera ser creciente como se observa en la Figura 4.3, no obstante dada su magnitud, se determina que el error existente es causado por fallas de integración numérica en el método utilizado. Para el caso del modelo simplificado de 4 submodelos, se realizó la simulación por 50 segundos, con el mismo método; su respuesta es similar al modelo no lineal y se observa en la Figura 4.4. El error producido por esta simplificación a cuatro submodelos se observa en la Figura 4.5, y es mucho mayor que el error producido en la representación exacta, pese al efecto de integración numérica, no obstante, está en un rango aceptable dada la reducción de submodelos considerada, uno tiene 64 veces más submodelos que el otro y un error significativamente más pequeño, no obstante es mucho más sencillo trabajar con el esquema de cuatro submodelos, que con el esquema de 256.

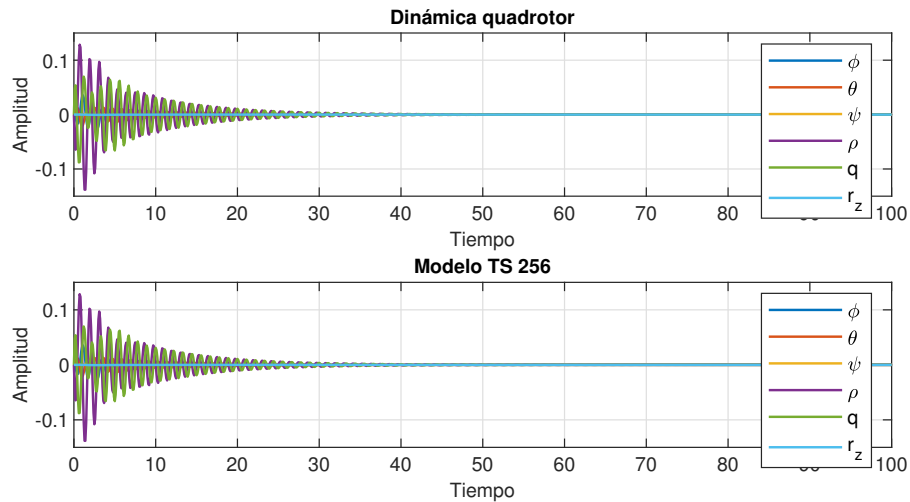


Figura 4.2: Dinámica rotacional no lineal y representación exacta.

Finalmente, en la Figura 4.6 se presenta el comportamiento de la dinámica rotacional, separando el movimiento angular y sus correspondientes velocidades angulares. Se observa que el ángulo de guiñada  $\psi$  se mantiene en cero, es decir el quadrotor no gira sobre

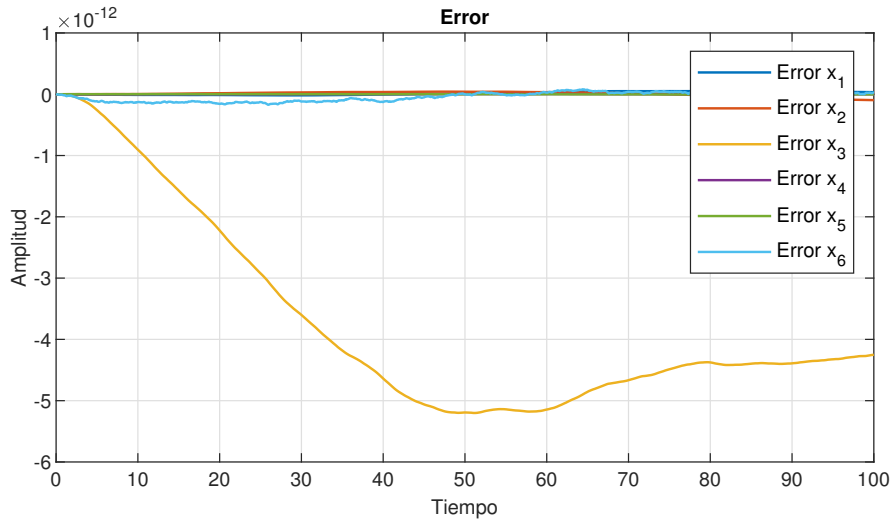


Figura 4.3: Error entre modelo no lineal y TS convexo exacto.

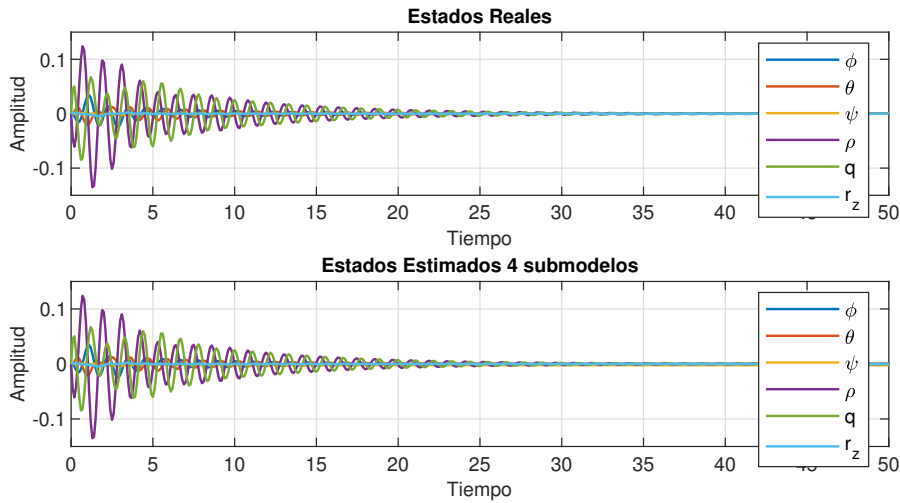


Figura 4.4: Dinámica rotacional no lineal y modelo TS aproximado.

su propio eje, y los ángulos  $\phi, \theta$  convergen asintóticamente a cero, con un máximo en 0.03 rad, lo cual es aproximado a  $1.8^\circ$ , denotando que el movimiento rotacional es casi nulo. Las velocidades angulares se encuentran acotadas a un valor máximo de  $0.12 \frac{rad}{s}$  y de igual manera convergen asintóticamente a cero. El movimiento del vehículo en estos rangos no causa una desviación en la ubicación del quadrotor.

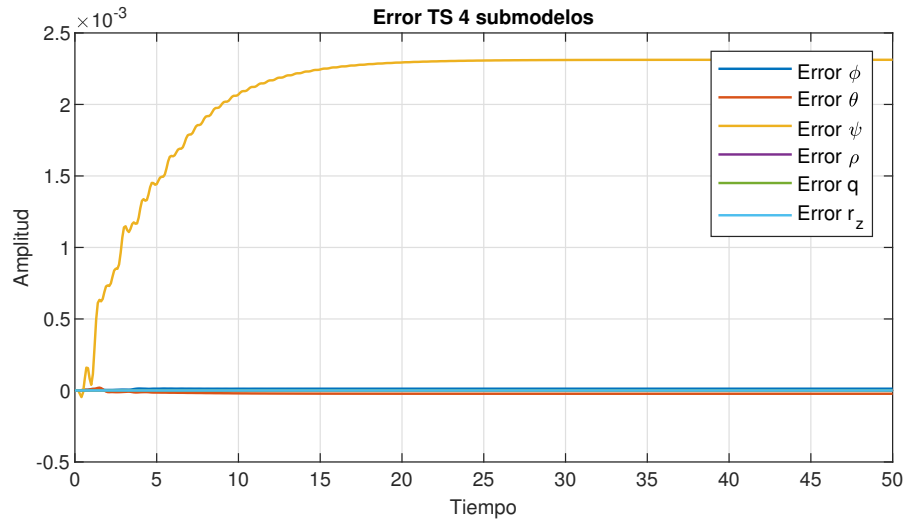


Figura 4.5: Error de sistema TS con 4 submodelos.

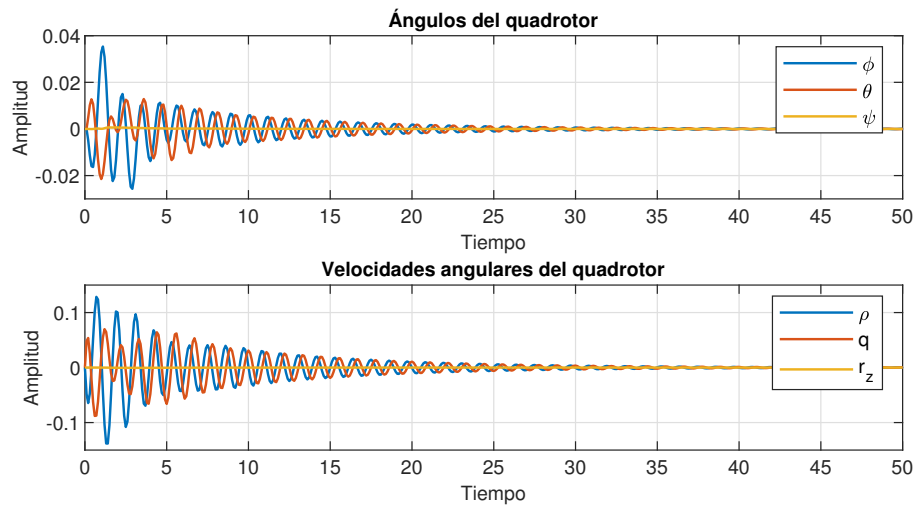


Figura 4.6: Comportamiento de la dinámica rotacional del quadrotor.

**Nota:** Dado el objetivo de aislamiento y estimación de fallas, se considera que el control no es afectado por éstas.

## 4.2. Diagnóstico y aislamiento de fallas en sensores

Se consideró el modelo TS propuesto en (3.14), (3.15) para el cual se diseñaron dos esquemas de diagnóstico de fallas. Se considera el diagnóstico de fallas en sensores tipo giroscopio los cuales entregan información que permite calcular la orientación (posición angular) del vehículo. Para ambos esquemas, se toma el modelo completo del quadrotor dado por (3.8), utilizando las entradas y salidas respectivas.

### 4.2.1. Esquema de observadores generalizados-dedicados GOS-DOS

Los cuatro submodelos cumplen la condición de observabilidad por lo cual es posible diseñar un observador, no obstante, para diseñar un banco de observadores en cualquiera de ambos esquemas, el sistema no cumple esta condición. La ventaja del uso de técnicas LMI radica en que no siempre es necesario realizar pruebas de detectabilidad o alcanzabilidad, sino al obtener un resultado factible, es posible asumir estas condiciones. Dado lo anterior, el primer esquema diseñado fue un híbrido GOS-DOS convexo considerando las salidas en (3.15).

### Esquema de observadores generalizados GOS

Para el esquema GOS se consideraron las submatrices de salida:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Se diseñó un banco de observadores Luenberger convexo basandose en (2.42), considerando una tasa de convergencia  $\gamma = 1$  con la finalidad de mejorar la convergencia del observador. Las ganancias calculadas para cada escenario se presentan a continuación:

**Observador GOS, matriz  $C_1$** 

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.049158 & 0.094432 \\ 19.216 & 4.5898 * 10^{-7} \\ 4.4706 & 5.9835 \\ -0.85602 & -0.21099 \\ 142.63 & 9.0984 * 10^{-6} \\ 11.327 & 12.213 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} -0.11624 & 0.082558 \\ 19.216 & 6.8264 * 10^{-7} \\ -4.4706 & 5.9835 \\ -0.27663 & -0.3119 \\ 142.63 & 0.000010867 \\ -11.327 & 12.213 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0.034017 & 0.085532 \\ 19.216 & 5.5821 * 10^{-7} \\ 4.4706 & 5.9835 \\ -0.98371 & -0.28662 \\ 142.63 & 9.8833 * 10^{-6} \\ 11.327 & 12.213 \end{bmatrix} \quad L_4 = \begin{bmatrix} -0.10206 & 0.0913 \\ 19.216 & 8.0833 * 10^{-7} \\ -4.4706 & 5.9835 \\ -0.15606 & -0.23594 \\ 142.63 & 0.000011862 \\ -11.327 & 12.213 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

**Observador GOS, matriz  $C_2$** 

$$L_{12} = \begin{bmatrix} 19.215 & 1.0289 * 10^{-7} \\ -1.0732 & 0.028679 \\ -4.4706 & 5.9837 \\ 142.63 & 2.0682 * 10^{-6} \\ -5.2114 & 0.25825 \\ -11.327 & 12.214 \end{bmatrix} \quad L_{22} = \begin{bmatrix} 19.215 & 5.9334 * 10^{-8} \\ -1.0777 & 0.017643 \\ -4.4706 & 5.9837 \\ 142.63 & 1.7237 * 10^{-6} \\ -5.2492 & 0.1644 \\ -11.327 & 12.214 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$L_{32} = \begin{bmatrix} 19.215 & 9.5184 * 10^{-8} \\ -1.029 & 0.012722 \\ 4.4706 & 5.9837 \\ 142.63 & 2.0072 * 10^{-6} \\ -4.8658 & 0.12322 \\ 11.327 & 12.214 \end{bmatrix} \quad L_{42} = \begin{bmatrix} 19.215 & 6.3662 * 10^{-8} \\ -1.0173 & 0.030052 \\ 4.4706 & 5.9837 \\ 142.63 & 1.7579 * 10^{-6} \\ -4.768 & 0.26955 \\ 11.327 & 12.214 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

**Observador GOS, matriz  $C_3$**

$$L_{13} = \begin{bmatrix} 214800.0 & 2.2362 \\ 2.2362 & 214800.0 \\ -8.169 * 10^6 & 8.168 * 10^6 \\ 3.5476 * 10^9 & 41790.0 \\ 41789.0 & 3.5476 * 10^9 \\ 7.644 * 10^7 & -7.6438 * 10^7 \end{bmatrix} \quad L_{23} = \begin{bmatrix} 214800.0 & 2.236 \\ 2.2362 & 214800.0 \\ -8.169 * 10^6 & -8.162 * 10^6 \\ 3.5476 * 10^9 & 41787.0 \\ 41789.0 & 3.5476 * 10^9 \\ 7.644 * 10^7 & 7.6434 * 10^7 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$L_{33} = \begin{bmatrix} 214800.0 & 2.2362 \\ 2.2362 & 214800.0 \\ 8.1608 * 10^6 & 8.168 * 10^6 \\ 3.5476 * 10^9 & 41789.0 \\ 41788.0 & 3.5476 * 10^9 \\ -7.6431 * 10^7 & -7.6438 * 10^7 \end{bmatrix} \quad L_{43} = \begin{bmatrix} 214800.0 & 2.236 \\ 2.2362 & 214800.0 \\ 8.1608 * 10^6 & -8.162 * 10^6 \\ 3.5476 * 10^9 & 41787.0 \\ 41788.0 & 3.5476 * 10^9 \\ -7.6431 * 10^7 & 7.6434 * 10^7 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Dado que el sistema no es completamente observable, se obtuvo el valor de los eigenvalores de las matrices  $A_i - L_i C$  para corroborar su estabilidad. Como se observa en la Tabla 4.1 los eigenvalores de los observadores diseñados con las matrices de salida  $C_1$  &  $C_2$  son idénticos y estables, caso contrario los eigenvalores del observador diseñado para la matriz de salida  $C_3$  son significativamente más grandes a los de las otras salidas, lo cual conlleva una inestabilidad en éste, dada su magnitud.

Tabla 4.1: Eigenvalores esquema GOS

Eigenvalores de los bancos de observadores			
Subsistema	Salida 1	Salida 2	Salida 3
Modelo 1	0	0	0
	0	0	-196788.0
	$-2.6252 + 1.9827j$	$-2.6252 + 1.9827j$	-196777.0
	$-2.6252 - 1.9827j$	$-2.6252 - 1.9827j$	-18029.0
	$-9.9743 + 7.4009j$	$-9.9741 + 7.4009j$	-18029.0
	$-9.9743 - 7.4009j$	$-9.9741 - 7.4009j$	-0.23702
Modelo 2	0	0	0
	0	0	-196788.0
	$-2.6252 + 1.9827j$	$-2.6252 + 1.9827j$	-196777.0
	$-2.6252 - 1.9827j$	$-2.6252 - 1.9827j$	-18029.0
	$-9.9743 + 7.4009j$	$-9.9741 + 7.4009j$	-18029.0
	$-9.9743 - 7.4009j$	$-9.9741 - 7.4009j$	-0.23701
Modelo 3	0	0	0
	0	0	-196788.0
	$-2.6252 + 1.9827j$	$-2.6252 + 1.9827j$	-196777.0
	$-2.6252 - 1.9827j$	$-2.6252 - 1.9827j$	-18029.0
	$-9.9743 + 7.4009j$	$-9.9741 + 7.4009j$	-18029.0
	$-9.9743 - 7.4009j$	$-9.9741 - 7.4009j$	-0.237
Modelo 4	0	0	0
	0	0	-196788.0
	$-2.6252 + 1.9827j$	$-2.6252 + 1.9827j$	-196777.0
	$-2.6252 - 1.9827j$	$-2.6252 - 1.9827j$	-18029.0
	$-9.9743 + 7.4009j$	$-9.9741 + 7.4009j$	-18029.0
	$-9.9743 - 7.4009j$	$-9.9741 - 7.4009j$	-0.237

## Resultados de simulación

Al implementar en simulación el esquema GOS, se consideraron dos escenarios. El primero permite la simulación del sistema del quadrotor (3.8) junto con el observador convexo (2.41) en una situación libre de fallas, mientras que el segundo considera la existencia de fallas de distinta naturaleza en los tres sensores.

**Caso libre de falla** En el caso libre de falla se simuló el sistema y banco de observadores durante 90 segundos. Las condiciones iniciales consideradas para el quadrotor son  $x = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ , mientras que para los observadores se consideraron las condiciones  $x_e = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ . Se corrobora la convergencia de los observadores para las matrices de salidas  $C_1$  &  $C_2$  como se observa en la Figura 4.7; debido a que el observador para la matriz de salidas  $C_3$  es inestable, no se presenta en ésta. En la Figura 4.8 se corrobora además la magnitud de las funciones de membresía durante todo el tiempo de simulación, manteniéndose válido el modelo convexo en la región para la cual fue diseñado. Las señales residuo mostradas en la Figura 4.9 se calcularon considerando la salida con falla respectiva al observador y el estado estimado correspondiente a ésta, la cuál es  $r_1 = \|y_1 - \hat{x}(1)\|$  y así sucesivamente; ya que el observador no es sensible a la falla que no se considera en su diseño, la señal residuo generada reflejará de manera adecuada el efecto de la falla.

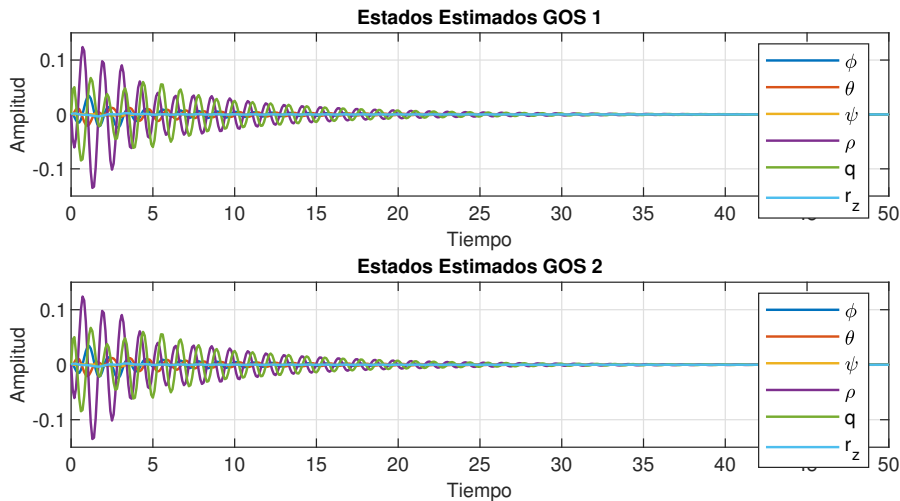


Figura 4.7: Estados estimados por esquema GOS. Caso libre de falla

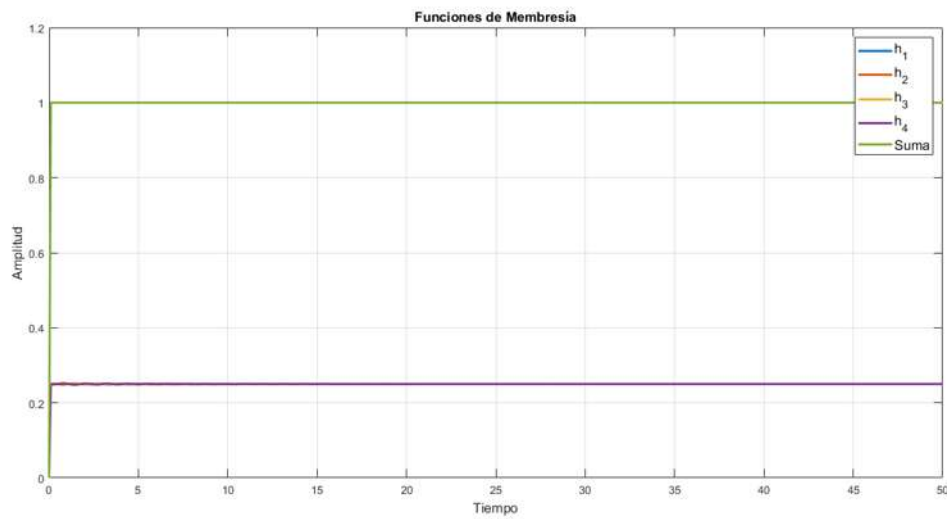


Figura 4.8: Funções de membresia.

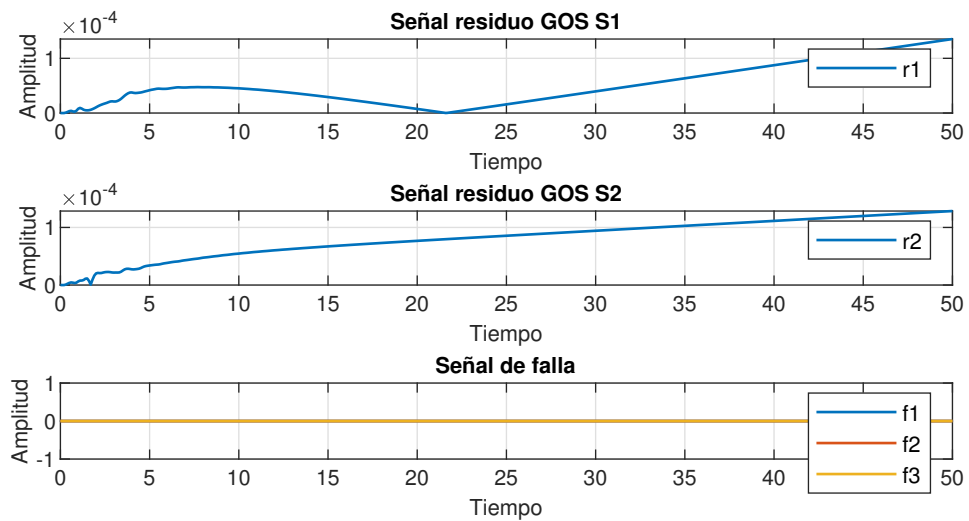


Figura 4.9: Resíduos esquema GOS. Caso libre de falla

Como se aprecia en la Figura 4.9 pareciera que los residuos están creciendo y pudieran aumentar su magnitud a un nivel significativo, sin embargo esto se debe a un error de integración por el método utilizado. Se realizó la simulación del mismo esquema en condiciones libres de falla mediante el método ODE45 en Simulink para corroborar su

funcionalidad. Los resultados se presentan en la Figura 4.10 dando residuos nulos.

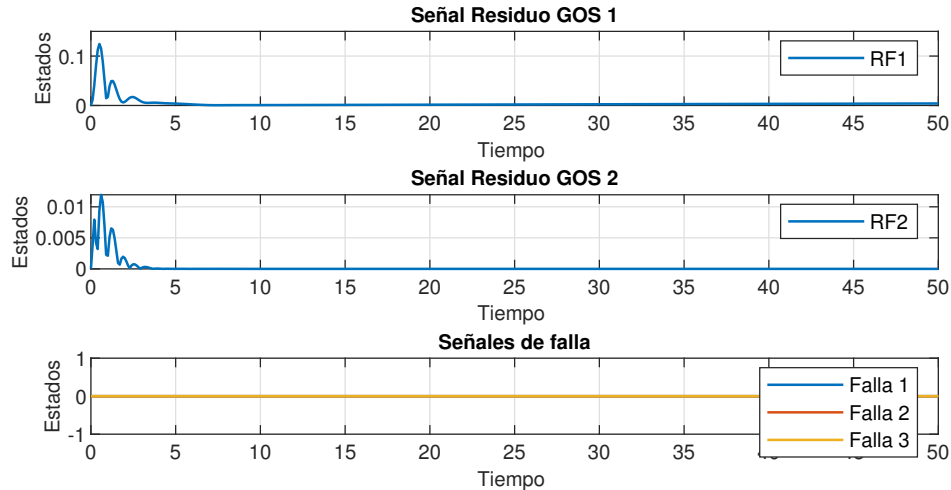


Figura 4.10: Residuos esquema GOS. Caso libre de falla en Simulink

**Caso con fallas múltiples** En este caso, se repitieron las condiciones iniciales de simulación, y se consideraron 3 tipos de falla, una falla abrupta, o de tipo *bias*, la cual puede interpretarse como una desconexión del sensor, aplicada del segundo 10 al segundo 20 de simulación de magnitud 0.5 rad, una falla variante en el tiempo de comportamiento sinusoidal, la cual denota una pérdida de precisión del sensor, y puede ser causada por una interferencia externa o un daño físico al transductor del sensor, aplicada del segundo 40 al segundo 50 de igual magnitud, y una falla incipiente del segundo 70 al segundo 80, con una amplitud de 3 a 4 radianes, representando una desviación del sensor, esta deriva puede interpretarse como un cambio en la ganancia interna del sensor o un daño al transductor; se aplicó una falla por sensor. Para el tipo de sensores considerados, tanto giroscopios, acelerómetros, y magnetómetros, estas fallas pueden afectarlos indistintamente. Particularizando un magnetómetro puede ser afectado por un campo magnético más fuerte que el de la Tierra, por ejemplo en la cercanía a una línea de transmisión, y tanto un giroscopio como acelerómetro capacitivo pueden tener un daño en los electrodos móviles.

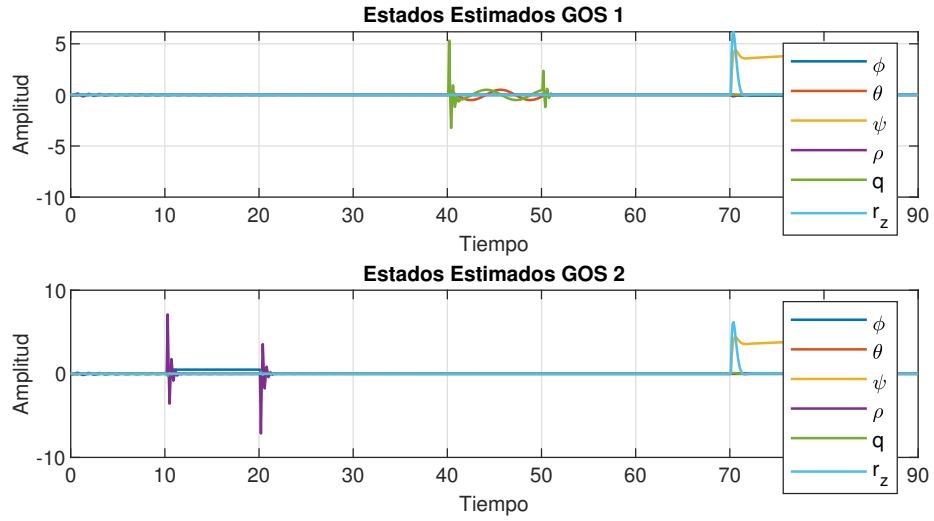


Figura 4.11: Estados estimados por esquema GOS. Caso con falla

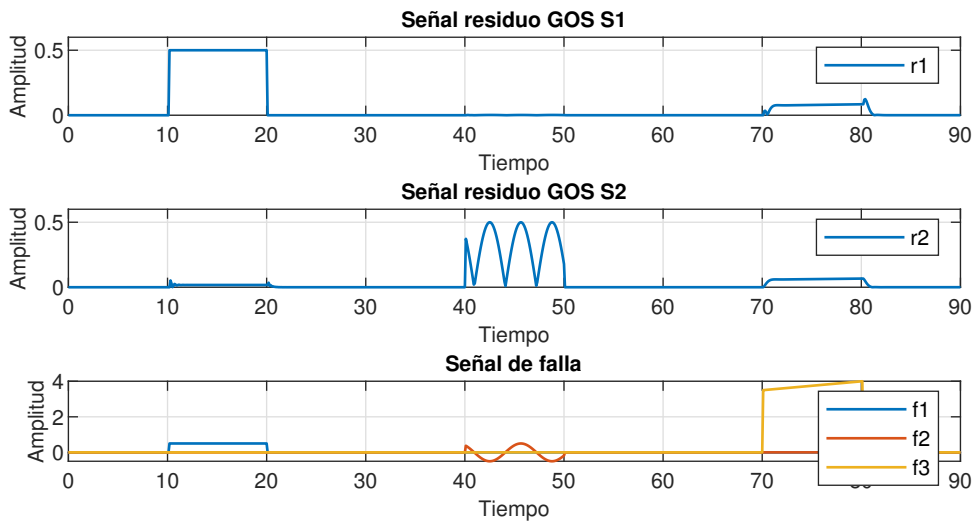


Figura 4.12: Residuos esquema GOS y señales de falla

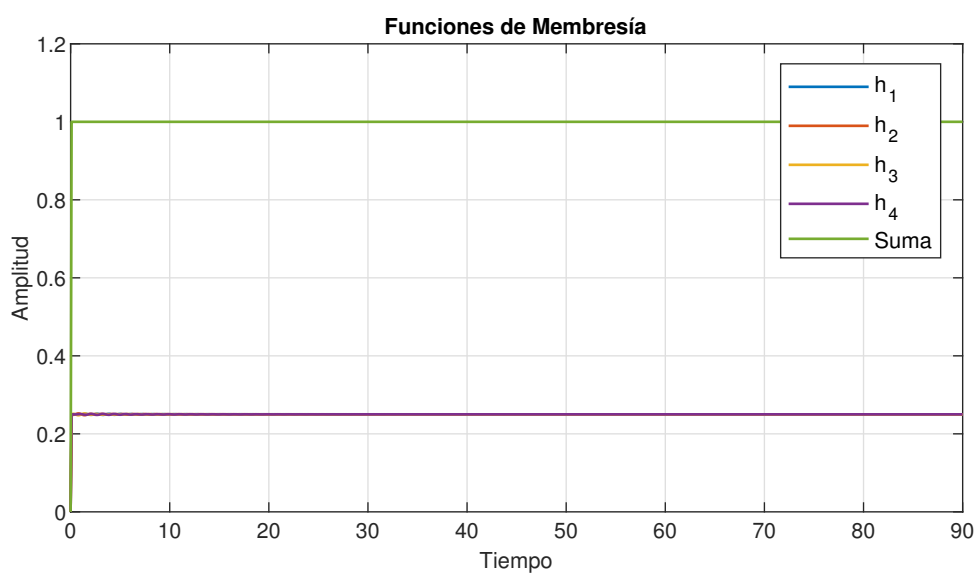


Figura 4.13: Funciones de membresía esquema GOS. Caso con falla

En la Figura 4.11 se observan los estados estimados por el banco de observadores, conservando la estabilidad del caso anterior y como éstos responden a las fallas. En la Figura 4.12 se observan los residuos generados por los observadores además de las fallas aplicadas. Las primeras dos fallas, consideran una magnitud significativa de  $|f_1| = 0.5 \text{ rad}$ , y generan una señal residuo de igual magnitud. Al trabajar con un umbral de detección fijo, es necesario establecer un nivel adecuado para poder realizar una correcta detección y aislamiento. Al modificar las señales de falla a una amplitud de  $0.1 \text{ rad}$ , se observa en la Figura 4.14 que los residuos igualan esa magnitud. Con una adecuada selección de un umbral es posible detectar e identificar el sensor con falla para las salidas  $y_1$  &  $y_2$ , considerando distinguir entre una perturbación y el efecto de algún posible ruido de medición. Para éste caso en particular, se establece un umbral fijo de magnitud  $th = 0.15 \text{ rad}$ .

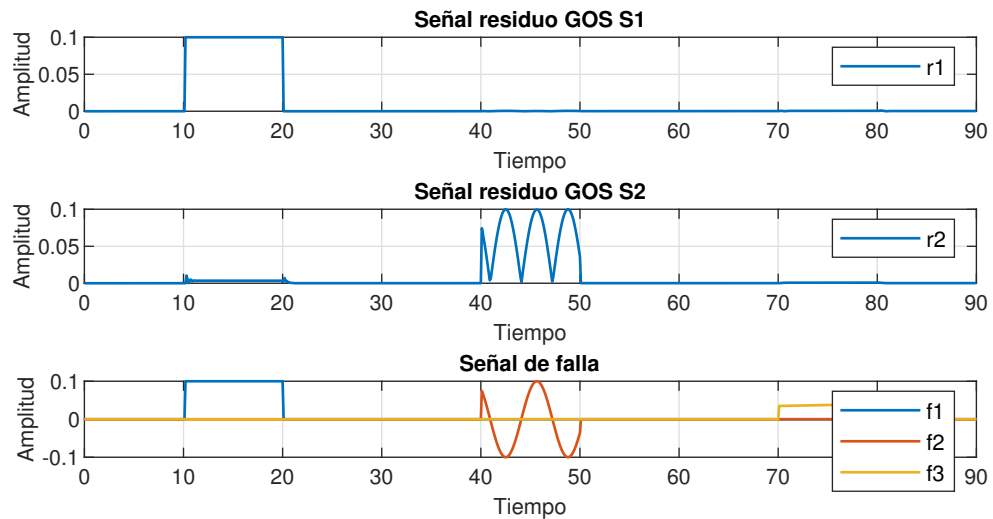


Figura 4.14: Residuos esquema GOS. Falla mínima.

### Esquema de observadores dedicados DOS

Para el esquema DOS se consideraron las submatrices de salida:

$$\begin{aligned}
 C_{D1} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\
 C_{D2} &= [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\
 C_{D3} &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

De igual manera que en el caso del esquema GOS, se calcularon las ganancias  $L_i$  y sus eigenvalores para corroborar su estabilidad. Las matrices obtenidas fueron:

#### Observador DOS, matriz $C_{D1}$

$$\begin{aligned}
 L_{D1} &= \begin{bmatrix} 192999.0 \\ 1086.3 \\ -6.1999 * 10^6 \\ 2.5988 * 10^9 \\ 6267.1 \\ 5.7175 * 10^7 \end{bmatrix} & L_{D2} &= \begin{bmatrix} 192999.0 \\ 1086.3 \\ -6.1999 * 10^6 \\ 2.5988 * 10^9 \\ 6267.1 \\ 5.7175 * 10^7 \end{bmatrix} \\
 L_{D3} &= \begin{bmatrix} 192999.0 \\ 1031.3 \\ 6.2015 * 10^6 \\ 2.5988 * 10^9 \\ 6583.5 \\ -5.7176 * 10^7 \end{bmatrix} & L_{D4} &= \begin{bmatrix} 192999.0 \\ 1031.3 \\ 6.2015 * 10^6 \\ 2.5988 * 10^9 \\ 6583.5 \\ -5.7176 * 10^7 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

**Observador DOS, matriz  $C_{D2}$** 

$$\begin{aligned}
 L_{D12} &= \begin{bmatrix} 1663.4 \\ 192999.0 \\ 6.2012 * 10^6 \\ -18753.0 \\ 2.5989 * 10^9 \\ -5.7175 * 10^7 \end{bmatrix} & L_{D22} &= \begin{bmatrix} 1788.9 \\ 192999.0 \\ -6.2 * 10^6 \\ -19375.0 \\ 2.5989 * 10^9 \\ 5.7175 * 10^7 \end{bmatrix} \\
 L_{D32} &= \begin{bmatrix} 1663.4 \\ 192999.0 \\ 6.2012 * 10^6 \\ -18753.0 \\ 2.5989 * 10^9 \\ -5.7175 * 10^7 \end{bmatrix} & L_{D42} &= \begin{bmatrix} 1788.9 \\ 192999.0 \\ -6.2 * 10^6 \\ -19375.0 \\ 2.5989 * 10^9 \\ 5.7175 * 10^7 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

**Observador DOS, matriz  $C_{D3}$** 

$$\begin{aligned}
 L_{D13} &= \begin{bmatrix} 0.094199 \\ -0.15633 \\ 5.7299 \\ -0.16359 \\ 0.57363 \\ 11.592 \end{bmatrix} & L_{D23} &= \begin{bmatrix} 0.096515 \\ -0.14463 \\ 5.7299 \\ -0.19361 \\ 0.42816 \\ 11.592 \end{bmatrix} \\
 L_{D33} &= \begin{bmatrix} 0.12157 \\ -0.1196 \\ 5.7299 \\ -0.50565 \\ 0.1161 \\ 11.592 \end{bmatrix} & L_{D43} &= \begin{bmatrix} 0.10376 \\ -0.16594 \\ 5.7299 \\ -0.28299 \\ 0.69308 \\ 11.592 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Los respectivos eigenvalores se presentan en la tabla 4.2. Como se observa en ésta, sucede el caso contrario al esquema GOS, siendo en este caso los eigenvalores para las matrices de salidas  $C_{D1}$  &  $C_{D2}$  mucho más grandes que los de la matriz de salidas  $C_{D3}$

Tabla 4.2: Eigenvalores esquema DOS

Eigenvalores de los bancos de observadores			
Subsistema	Salida 1	Salida 2	Salida 3
Modelo 1	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	-178411.0	-178411.0	0
	-14567.0	-14567.0	$-2.8649 + 1.8395j$
	-0.121	-0.121	$-2.8649 - 1.8395j$
Modelo 2	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	-178411.0	-178411.0	0
	-14567.0	-14567.0	$-2.8649 + 1.8395j$
	-0.121	-0.121	$-2.8649 - 1.8395j$
Modelo 3	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	-178411.0	-178411.0	0
	-14567.0	-14567.0	$-2.8649 + 1.8395j$
	-0.121	-0.121	$-2.8649 - 1.8395j$
Modelo 4	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	-178411.0	-178411.0	0
	-14567.0	-14567.0	$-2.8649 + 1.8395j$
	-0.121	-0.121	$-2.8649 - 1.8395j$

### Resultados de simulación.

Para el enfoque DOS se realizó la simulación del observador, bajo las mismas condiciones que el anterior, las señales de falla son idénticas. Se presentan los resultados obtenidos en el caso libre de falla y en el caso de multiples fallas.

**Caso libre de falla** En la Figura 4.15 se presentan los estados estimados por el banco de observadores. Dado que solamente el observador diseñado con la salida  $y_3$  es estable, se presentará el resultado de éste. En la Figura 4.16 se observa que la señal residuo correspondiente a dicho observador converge a cero. Se corroboran además las funciones de membresía del modelo TS en la Figura 4.17.

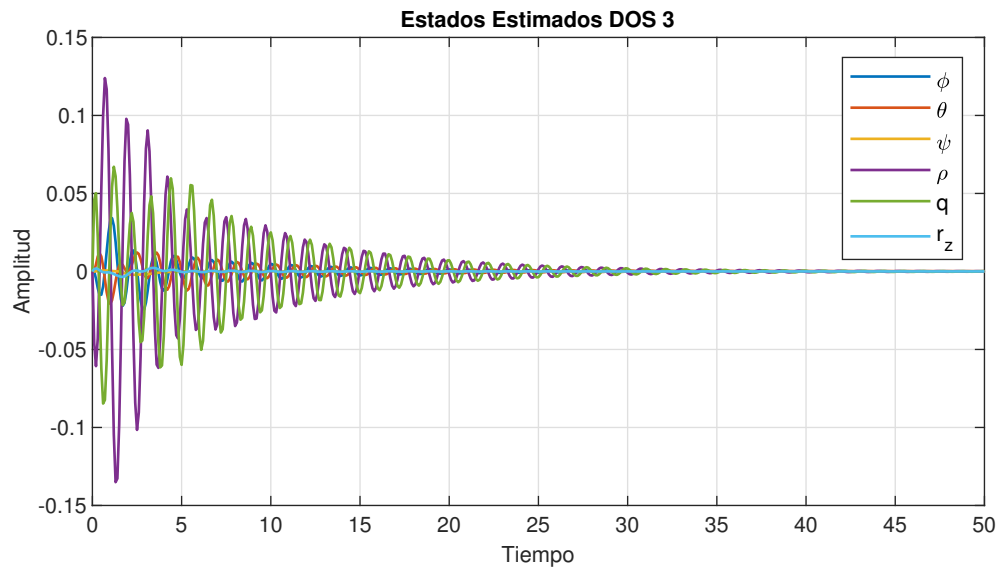


Figura 4.15: Estados estimados en esquema DOS. Caso libre falla

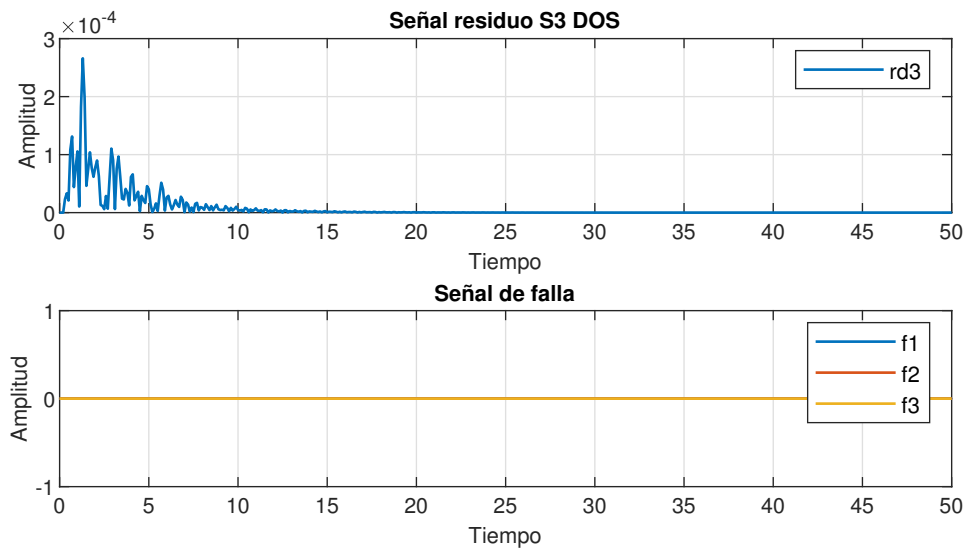


Figura 4.16: Residuos en esquema DOS. Caso libre de falla

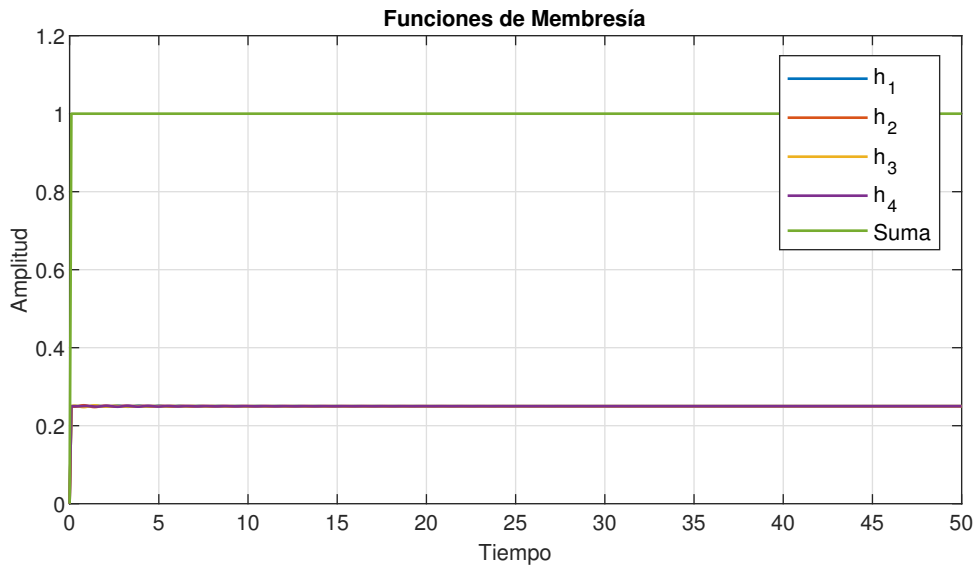


Figura 4.17: Funciones de membresía esquema DOS. Caso libre falla

**Caso con múltiples fallas** Se implementó la simulación bajo las mismas condiciones de falla mencionadas anteriormente. Puede observarse en la Figura 4.18 que el observador para  $y_3$  reacciona a la falla y genera una señal residuo en la Figura 4.19. De igual manera se corroboran las funciones de membresía en la Figura 4.20.

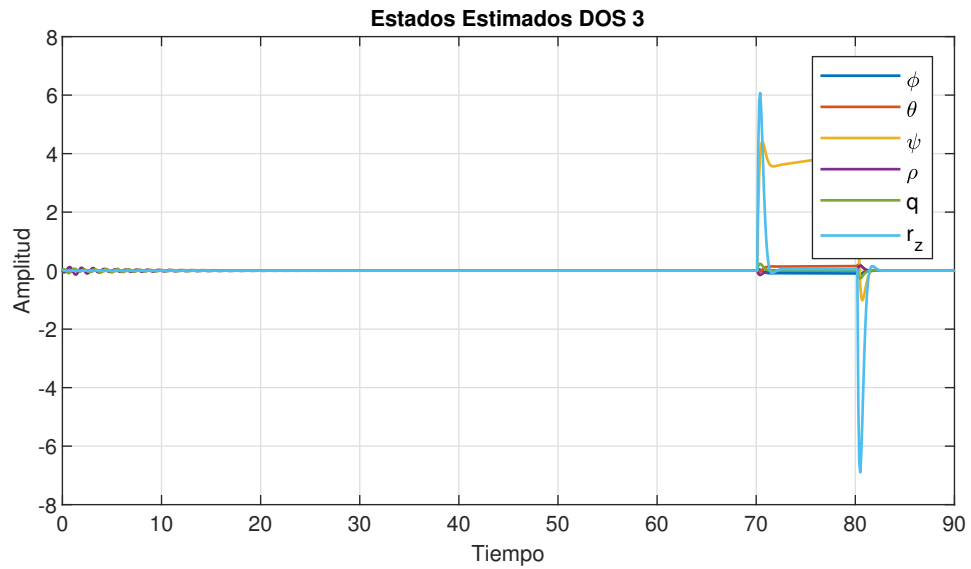


Figura 4.18: Estados estimados por esquema DOS. Caso con múltiples fallas

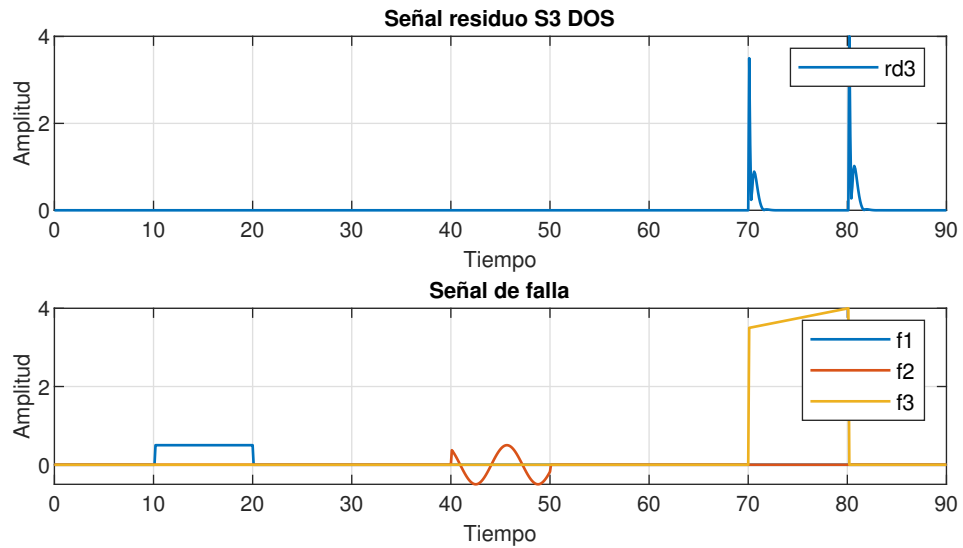


Figura 4.19: Residuos mediante esquema DOS. Caso con múltiples fallas

Como se observa en la Figura 4.19, el observador responde con dos impulsos en los flancos a una falla de magnitud considerable (3 rad). Al reducir la amplitud de esta falla la señal residuo reacciona mayoritariamente al flanco producido, como se ve en la Figura 4.21.

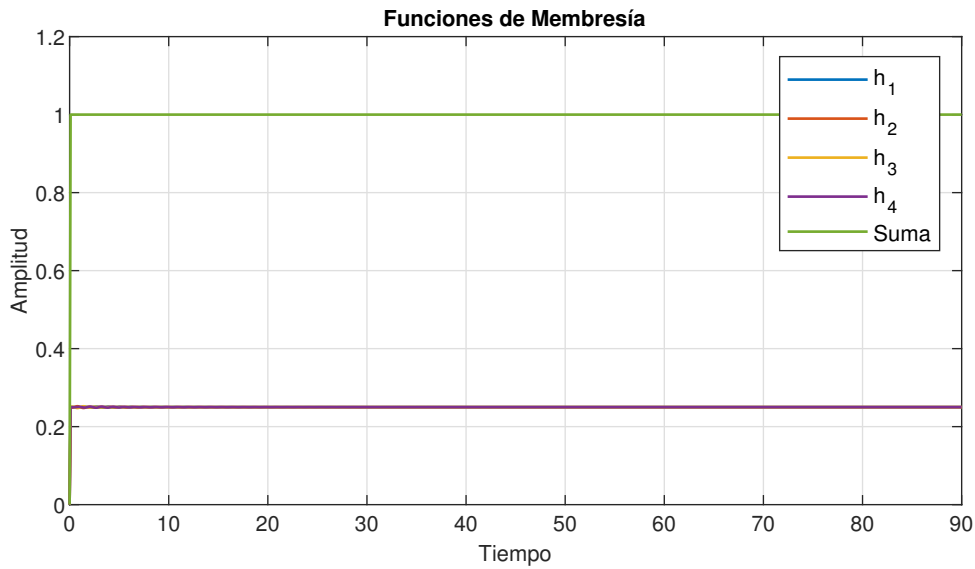


Figura 4.20: Funciones de membresía esquema DOS. Caso con múltiples fallas

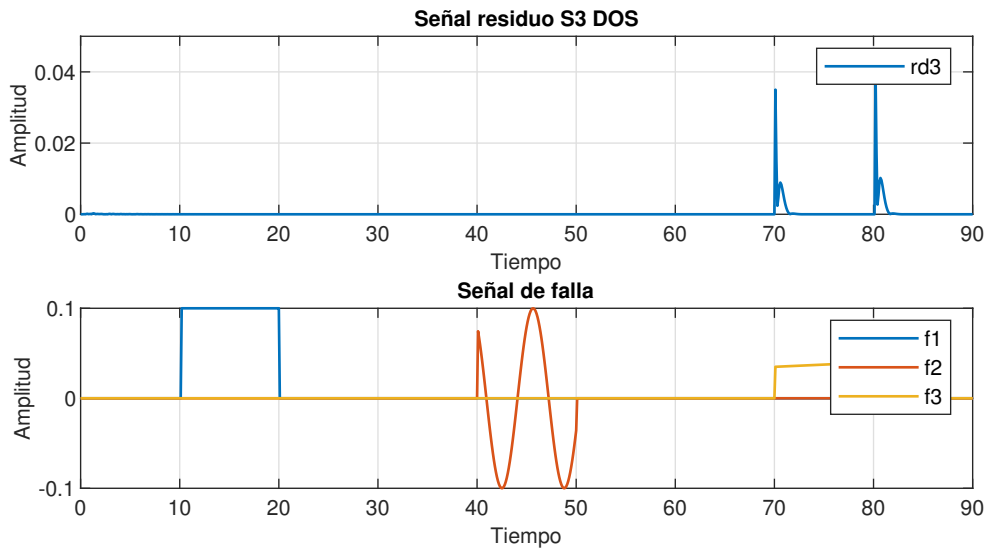


Figura 4.21: Residuo observador DOS. Falla pequeña

Mediante la combinación de los observadores presentados en ambos esquemas se obtiene un esquema híbrido para la detección y aislamiento de fallas en sensores, el cual cumple su funcionamiento para diversos tipos de falla y se resume en la Figura 4.22.

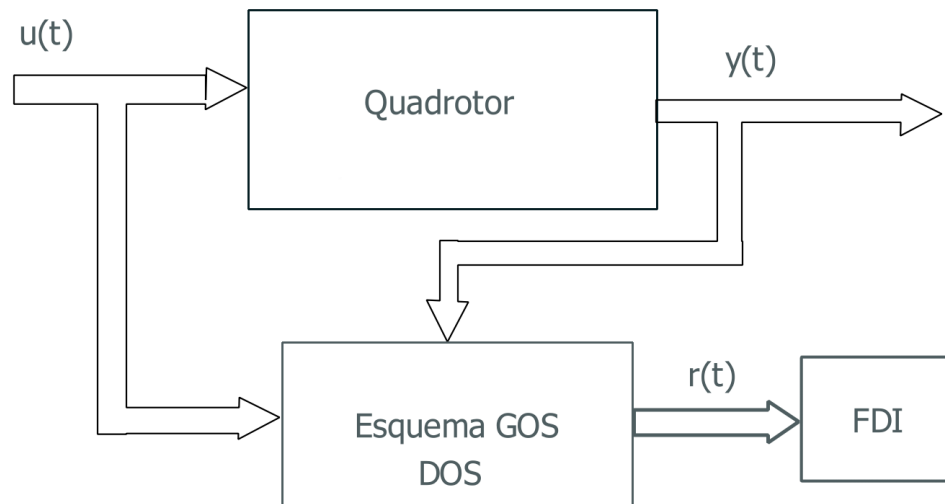


Figura 4.22: Diagrama del esquema híbrido de observadores.

### 4.2.2. Estimación de fallas en sensores

La etapa de estimación de fallas consiste en hacer uso del observador de entradas desconocidas adaptado a un sistema convexo(2.43), diseñado mediante el cálculo de ganancias a partir de la LMI (2.44). Dicho observador será usado directamente con el modelo no lineal del sistema, el cual se observa en la Figura 4.22.

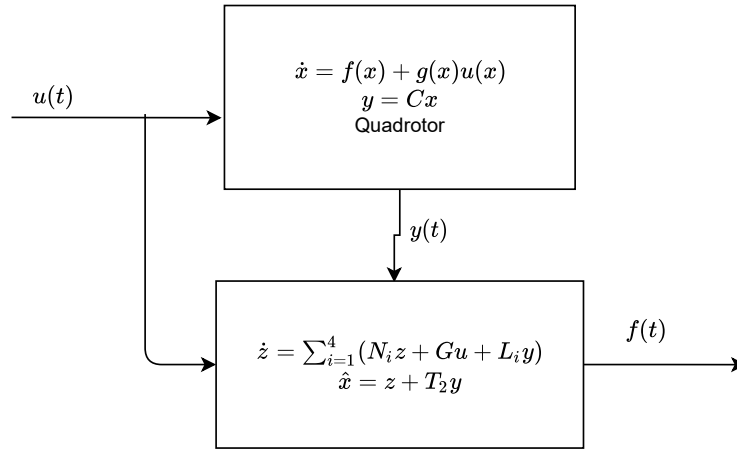


Figura 4.23: Diagrama del esquema de estimación de fallas.

Dada la transformación descriptora (2.23), la estimación de la falla se realiza mediante la extensión del estado del sistema, considerando ahora a las fallas como parte de éste. La ventaja que provee dicha transformación, o enfoque, radica en que la dinámica de las fallas no aparece explícitamente en el diseño del observador, sino se mantiene algebraica. Esto permite que las fallas puedan estimarse independientemente de su comportamiento dinámico.

Al resolver la LMI (2.44) para el sistema TS (3.18) se obtuvieron las siguientes matrices:

Conjunto de matrices  $N_i$ 

$$\begin{aligned}
N_1 &= \begin{bmatrix} -9.7803 & 0.016511 & 0.10274 & 1.0 & 0 & 0 & -9.7803 & 0.016511 & 0.10274 \\ -0.0098869 & -6.7925 & 0.056028 & 2.3874 * 10^{-17} & 1.0 & 0 & -0.0098869 & -6.7925 & 0.056028 \\ -0.098354 & -0.09334 & -7.9354 & 0 & 0 & 1.0 & -0.098354 & -0.09334 & -7.9354 \\ -0.088157 & 0.0003333 & 0.0012277 & 0 & 0 & 7.3333 & -0.088157 & 0.0003333 & 0.0012277 \\ 0.00090431 & 0.099308 & -0.00017032 & 0 & 0 & -7.3333 & 0.00090431 & 0.099308 & -0.00017032 \\ -8.9007 * 10^{-6} & -0.000022231 & 0.00025972 & 0 & 0 & 0 & -8.9007 * 10^{-6} & -0.000022231 & 0.00025972 \\ -7.0017 & 0.0070333 & 0.070319 & -1.0 & 0 & 0 & -7.0017 & 0.0070333 & 0.070319 \\ -0.014737 & -9.9794 & 0.063628 & -8.8011 * 10^{-19} & -1.0 & 0 & -0.014737 & -9.9794 & 0.063628 \\ -0.073032 & -0.029767 & -8.733 & 0 & 0 & -1.0 & -0.073032 & -0.029767 & -8.733 \end{bmatrix} \\
N_2 &= \begin{bmatrix} -9.7815 & 0.0058634 & -0.080113 & 1.0 & 0 & 0 & -9.7815 & 0.0058634 & -0.080113 \\ -0.0023119 & -6.7897 & 0.064927 & 2.3874 * 10^{-17} & 1.0 & 0 & -0.0023119 & -6.7897 & 0.064927 \\ 0.051607 & -0.10583 & -7.9394 & 0 & 0 & 1.0 & 0.051607 & -0.10583 & -7.9394 \\ -0.088184 & 0.00091269 & -0.00030198 & 0 & 0 & 7.3333 & -0.088184 & 0.00091269 & -0.00030198 \\ 0.00020056 & 0.099309 & -0.00022115 & 0 & 0 & 7.3333 & 0.00020056 & 0.099309 & -0.00022115 \\ -0.00013697 & -0.00021659 & 0.00025972 & 0 & 0 & 0 & -0.00013697 & -0.00021659 & 0.00025972 \\ -7.0039 & 0.0041013 & -0.06421 & -1.0 & 0 & 0 & -7.0039 & 0.0041013 & -0.06421 \\ -0.011052 & -9.9772 & 0.068524 & -8.8011 * 10^{-19} & -1.0 & 0 & -0.011052 & -9.9772 & 0.068524 \\ 0.091682 & -0.043966 & -8.737 & 0 & 0 & -1.0 & 0.091682 & -0.043966 & -8.737 \end{bmatrix} \\
N_3 &= \begin{bmatrix} -9.7836 & -0.012849 & 0.0057349 & 1.0 & 0 & 0 & -9.7836 & -0.012849 & 0.0057349 \\ 0.01024 & -6.7931 & 0.07757 & 2.3874 * 10^{-17} & 1.0 & 0 & 0.01024 & -6.7931 & 0.07757 \\ -0.011215 & -0.11115 & -7.9347 & 0 & 0 & 1.0 & -0.011215 & -0.11115 & -7.9347 \\ -0.088047 & 0.000019656 & 0.0012383 & 0 & 0 & -7.3333 & -0.088047 & 0.000019656 & 0.0012383 \\ -0.0001446 & 0.099469 & -0.00022188 & 0 & 0 & -7.3333 & -0.0001446 & 0.099469 & -0.00022188 \\ -0.000011527 & -0.000021689 & 0.00025962 & 0 & 0 & 0 & -0.000011527 & -0.000021689 & 0.00025962 \\ -7.0072 & -0.01175 & -0.021594 & -1.0 & 0 & 0 & -7.0072 & -0.01175 & -0.021594 \\ 0.012477 & -9.9833 & 0.086387 & -8.8011 * 10^{-19} & -1.0 & 0 & 0.012477 & -9.9833 & 0.086387 \\ 0.022217 & -0.049242 & -8.732 & 0 & 0 & -1.0 & 0.022217 & -0.049242 & -8.732 \end{bmatrix} \\
N_4 &= \begin{bmatrix} -9.7861 & -0.026729 & -0.0032978 & 1.0 & 0 & 0 & -9.7861 & -0.026729 & -0.0032978 \\ 0.020504 & -6.7932 & -0.0019529 & 2.3874 * 10^{-17} & 1.0 & 0 & 0.020504 & -6.7932 & -0.0019529 \\ -0.0039158 & -0.034677 & -7.9344 & 0 & 0 & 1.0 & -0.0039158 & -0.034677 & -7.9344 \\ -0.088203 & -0.00023575 & 0.00083378 & 0 & 0 & -7.3333 & -0.088203 & -0.00023575 & 0.00083378 \\ -0.00019809 & 0.099483 & 0.00090301 & 0 & 0 & 7.3333 & -0.00019809 & 0.099483 & 0.00090301 \\ -0.000011767 & -0.000024058 & 0.00025928 & 0 & 0 & 0 & -0.000011767 & -0.000024058 & 0.00025928 \\ -7.0062 & -0.019686 & -0.021531 & -1.0 & 0 & 0 & -7.0062 & -0.019686 & -0.021531 \\ 0.025195 & -9.9853 & -0.0033856 & -8.8011 * 10^{-19} & -1.0 & 0 & 0.025195 & -9.9853 & -0.0033856 \\ 0.030266 & 0.034534 & -8.7307 & 0 & 0 & -1.0 & 0.030266 & 0.034534 & -8.7307 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

Conjunto de matrices  $L_i$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.7764 * 10^{-15} & -3.4694 * 10^{-18} & -1.3878 * 10^{-17} \\ 5.0134 * 10^{-16} & 1.7764 * 10^{-15} & -6.9389 * 10^{-18} \\ 2.7756 * 10^{-17} & 2.7756 * 10^{-17} & 8.8818 * 10^{-16} \\ 1.3878 * 10^{-17} & -1.0842 * 10^{-19} & -2.1684 * 10^{-19} \\ -9.3919 * 10^{-18} & -2.7756 * 10^{-17} & 2.7105 * 10^{-20} \\ 3.3881 * 10^{-21} & 6.7763 * 10^{-21} & -5.421 * 10^{-20} \\ 8.8818 * 10^{-16} & -1.7347 * 10^{-18} & -1.3878 * 10^{-17} \\ 1.1727 * 10^{-15} & 1.7764 * 10^{-15} & -1.3878 * 10^{-17} \\ 1.3878 * 10^{-17} & 6.9389 * 10^{-18} & 1.7764 * 10^{-15} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1.7764 * 10^{-15} & -1.7347 * 10^{-18} & 1.3878 * 10^{-17} \\ 5.0003 * 10^{-16} & 1.7764 * 10^{-15} & -1.3878 * 10^{-17} \\ 0 & 2.7756 * 10^{-17} & 8.8818 * 10^{-16} \\ 1.3878 * 10^{-17} & -2.7105 * 10^{-20} & 5.421 * 10^{-20} \\ -9.4055 * 10^{-18} & -2.7756 * 10^{-17} & 3.3881 * 10^{-21} \\ 3.3881 * 10^{-21} & 6.7763 * 10^{-21} & -5.421 * 10^{-20} \\ 8.8818 * 10^{-16} & -8.6736 * 10^{-19} & 1.3878 * 10^{-17} \\ 1.1727 * 10^{-15} & 1.7764 * 10^{-15} & -1.3878 * 10^{-17} \\ -1.3878 * 10^{-17} & 1.3878 * 10^{-17} & 1.7764 * 10^{-15} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1.7764 * 10^{-15} & 3.4694 * 10^{-18} & -8.6736 * 10^{-19} \\ 4.9787 * 10^{-16} & 1.7764 * 10^{-15} & -1.3878 * 10^{-17} \\ 1.2143 * 10^{-17} & 2.7756 * 10^{-17} & 8.8818 * 10^{-16} \\ 1.3878 * 10^{-17} & -6.7763 * 10^{-21} & -2.1684 * 10^{-19} \\ -9.3783 * 10^{-18} & -2.7756 * 10^{-17} & 2.7105 * 10^{-20} \\ 3.3881 * 10^{-21} & 6.7763 * 10^{-21} & -5.421 * 10^{-20} \\ 8.8818 * 10^{-16} & 3.4694 * 10^{-18} & 3.4694 * 10^{-18} \\ 1.1709 * 10^{-15} & 1.7764 * 10^{-15} & -1.3878 * 10^{-17} \\ 0 & 1.3878 * 10^{-17} & 1.7764 * 10^{-15} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 1.7764 * 10^{-15} & 6.9389 * 10^{-18} & 4.3368 * 10^{-19} \\ 4.9613 * 10^{-16} & 1.7764 * 10^{-15} & 2.1684 * 10^{-19} \\ 4.3368 * 10^{-18} & 6.9389 * 10^{-18} & 8.8818 * 10^{-16} \\ 1.3878 * 10^{-17} & 5.421 * 10^{-20} & -1.0842 * 10^{-19} \\ -9.3783 * 10^{-18} & -2.7756 * 10^{-17} & -1.3553 * 10^{-20} \\ 3.3881 * 10^{-21} & 6.7763 * 10^{-21} & -5.421 * 10^{-20} \\ 8.8818 * 10^{-16} & 3.4694 * 10^{-18} & 3.4694 * 10^{-18} \\ 1.1692 * 10^{-15} & 1.7764 * 10^{-15} & 4.3368 * 10^{-19} \\ -6.9389 * 10^{-18} & -6.9389 * 10^{-18} & 1.7764 * 10^{-15} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Matrices  $T_1$  &  $T_2$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.3874 * 10^{-17} & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4166 * 10^{-16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8.8011 * 10^{-19} & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.2921 * 10^{-16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} -1.1839 * 10^{-16} & 0 & 0 \\ -5.8368 * 10^{-17} & 7.0495 * 10^{-17} & 0 \\ 0 & 0 & -1.1839 * 10^{-16} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ -3.6073 * 10^{-17} & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Matriz  $G$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 800.0 & -800.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 800.0 & -800.0 \\ 12000.0 & 12000.0 & -12000.0 & -12000.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

### Resultados de simulación

Para el enfoque descriptor, se realizó la simulación considerando las mismas condiciones que en el esquema anterior. En la Figura 4.24 se observa que las funciones de membresía cumplen el requerimiento del sistema convexo en todo el tiempo de simulación. Se presentan los resultados de las señales de falla estimadas en el caso libre de falla en la Figura 4.25, además de el error existente en la estimación en la Figura 4.26. Como se observa, el esquema de estimación detecta una falla de una magnitud del orden de  $10^{-3}$ , la cual coincide con el error del modelo TS considerado como se observa en la Figura 4.5; con esto se infiere que *el error de la estimación de la falla es el error del modelo TS considerado*, esto gracias a que la falla se considera como un elemento algebraico en el sistema. Al aplicar las mismas señales de falla que en los casos anteriores, se realiza una correcta estimación del comportamiento de éstas mediante el observador convexo, con el respectivo error ya mencionado. Las fallas y sus estimaciones se presentan en la Figura 4.27.

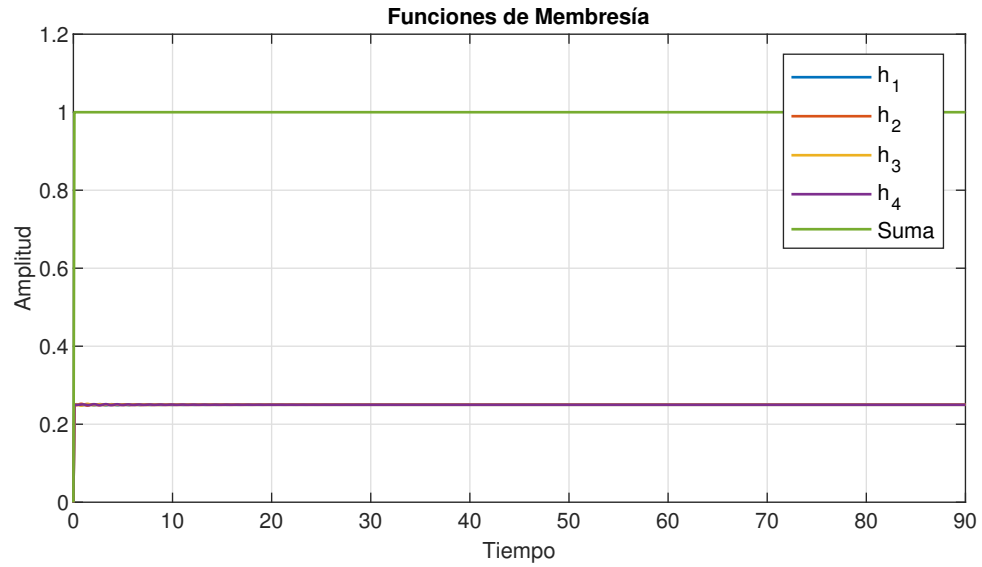


Figura 4.24: Funciones de membresía, UIO convexo

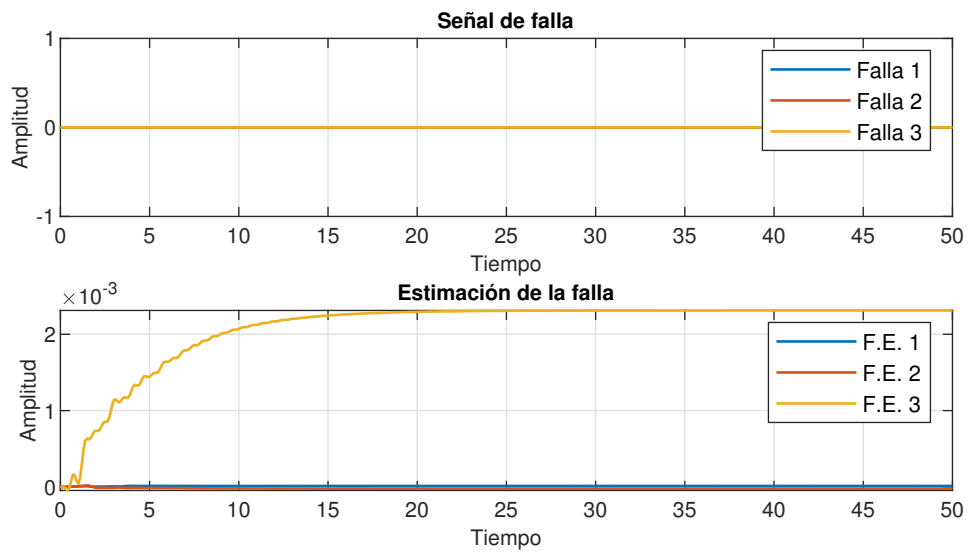


Figura 4.25: Señales de falla y sus estimaciones. Caso libre de falla

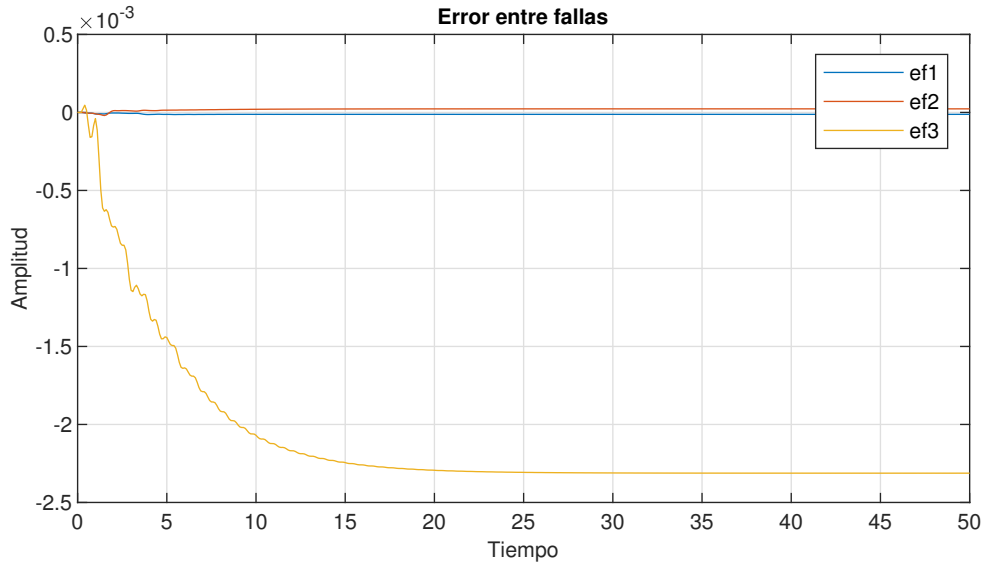


Figura 4.26: Error entre señales de falla y estimaciones.

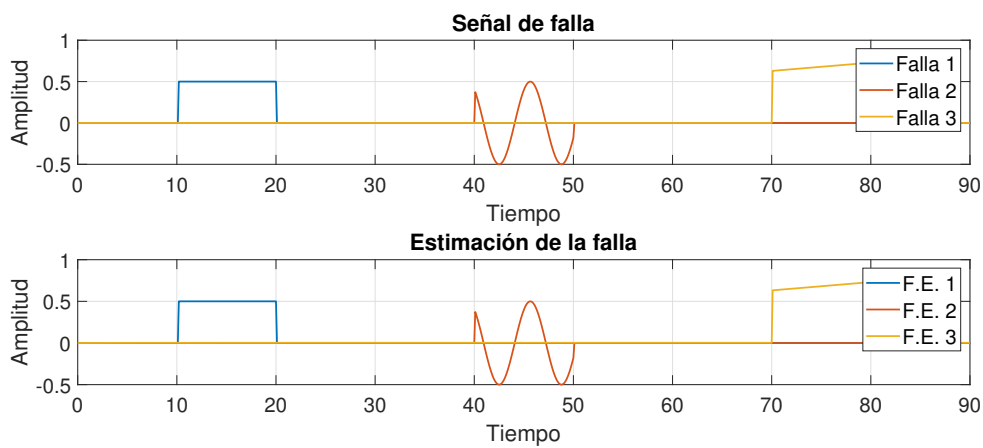


Figura 4.27: Señales de falla y sus estimaciones. Caso con múltiples fallas.

### 4.3. Conclusiones

En el presente capítulo se presentaron los resultados obtenidos para los esquemas de diagnóstico de fallas propuestos, donde se corroboró su funcionamiento para detección y aislamiento de fallas con el esquema híbrido GOS-DOS, y estimación para el UIO con enfoque descriptor, mediante la resolución de los problemas LMI descritos en capítulos anteriores. Comparando ambos esquemas, el enfoque descriptor presenta una alternativa más atractiva respecto al enfoque del banco de observadores híbrido, dado el hecho que permite la estimación de las señales de falla, y con esto la detección y aislamiento se encuentra implícitamente en éste. Otra ventaja importante radica en el número de observadores implementados, mientras el esquema híbrido requiere un observador por señal de falla. Finalmente, la principal ventaja del enfoque descriptor y en consecuencia el observador diseñado, radica en que la falla al ser considerada como una parte algebraica, y una entrada desconocida simultáneamente, permite una estimación exacta de la falla, donde el error de estimación coincide con el error del modelo TS, de tal forma que un modelo que tenga menor error, consecuentemente tendrá un menor error de estimación, recordando que el error absoluto fue del orden de  $10^{-3}$ , y en el caso exacto con 256 submodelos, el error de estimación es del orden de  $10^{-12}$ , y se atribuyó a problemas de integración numérica dado el método de Euler. El principal inconveniente del enfoque descriptor está en el aumento de las dimensiones del sistema, no obstante con la mejora de los softwares de simulación y sistemas embebidos, este aumento de dimensiones es permisible.



## Capítulo 5

# Conclusiones

### 5.1. Conclusiones Generales

En el presente trabajo de tesis se abordó la problemática del diagnóstico y estimación de fallas en sensores de posición angular para quadrotores, mediante el desarrollo de dos esquemas basados en observadores de estado y modelos convexos del sistema. Para este desarrollo se obtuvo un modelo convexo conformado por cuatro submodelos, el cual es mucho más compacto al esquema de 256 modelos que denota la representación exacta del sistema no lineal, sin embargo esta reducción de modelos mejora la factibilidad de los problemas LMI para el diseño de observadores, el cual es justificable respecto al esquema de vuelo propuesto, es decir las cotas que tomarían los ángulos en el modelo TS estarían dadas por ángulos pequeños, o no se cubriría todo el rango angular si éstas fuesen más grandes; para un esquema de vuelo donde se requiriese una maniobrabilidad mayor, generando ángulos mayores, el esquema de cuatro modelos propuesto pudiera no ser suficiente y se requerirían más condiciones en el modelado convexo.

Para el esquema híbrido propuesto, se logró la detección y aislamiento de fallas de manera efectiva, mediante la generación de señales residuo adecuadas, logrando su objetivo.

Respecto del esquema de estimación mediante el enfoque descriptor, se obtuvieron resultados satisfactorios que permiten la correcta estimación de fallas de distinta naturaleza, y con una exactitud bastante alta, ya que el error obtenido se mantiene constante en el caso

libre de falla y con falla, además cuenta con la ventaja de tener un solo observador. El único inconveniente de este enfoque radica en su dimensión, ya que se vuelve del orden del sistema más las fallas que se deseen estimar, pero a su vez, con una programación adecuada, se tornaría en un problema computacionalmente eficiente.

Finalmente se menciona que se cumplió el objetivo general y particulares de la tesis, al implementar satisfactoriamente este último esquema de diagnóstico y estimación, y se continúa mencionando los posibles trabajos futuros derivables de éste.

## **5.2. Trabajos Futuros**

1. Diseño de un esquema de estimación de fallas para sensores de medición inercial IMU.
2. Diseño de un esquema de estimación de fallas en sensores con robustez ante ruido y perturbaciones.
3. Diseño de un esquema de diagnóstico y estimación de fallas multiplicativas en sensores para VANT tipo quadrotor.
4. Diseño de un control tolerante a fallas activo, para fallas aditivas en sensores de posición angular.
5. Diseño de un esquema de estimación de fallas para actuadores en VANT tipo quadrotor mediante uso de observadores de estado.

## Apéndice A

# Diseño de observadores mediante LMI

### A.1. Diseño de observador Luenberger.

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{A.1}$$

Asumiendo que el sistema es observable, se puede diseñar un observador de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y} &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{A.2}$$

Donde para estimar los estados debe cumplirse que el error de estimación  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \approx 0$ . Para asegurar este requerimiento, su dinámica deberá ser asintóticamente estable, la dinámica del error es:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - (A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t))) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - (A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(Cx(t) - C\hat{x}(t))) \\ &= A(x(t) - \hat{x}(t)) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)e\end{aligned}\tag{A.3}$$

Para asegurar su estabilidad, mediante el uso de la teoría de Lyapunov se propone una función candidata de la forma:

$$V(e(t)) = e(t)^T P e(t) \quad (\text{A.4})$$

La cual es definida positiva. Calculando su derivada se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \dot{e}(t)^T P e(t) + e(t)^T P \dot{e}(t) \\ &= ((A - LC)e(t))^T P e(t) + e(t)^T P ((A - LC)e(t)) \\ &= e(t)^T (A^T - C^T L^T) P e + e^T P (A - LC) e(t) \\ &= e(t)^T (A^T P - C^T L^T P + PA - PLC) e(t) \end{aligned}$$

Para asegurar su definición negativa, se debe calcular una ganancia  $L$ , tal que:

$$A^T P - C^T L^T P + PA - PLC < 0 \quad (\text{A.5})$$

Para transformar (A.5) en una LMI, se propone el cambio de variable  $M = PL$ , volviendo a la expresión anterior en:

$$PA - MC + A^T P - C^T M^T < 0 \quad (\text{A.6})$$

Obteniendo la ganancia  $L = P^{-1}M$

## A.2. Diseño de UIO para enfoque descriptor.

Considere el sistema sujeto a fallas dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{A}x + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}x + f \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Sí se reescribe como:

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu + B_f f \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Con las matrices:

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \tilde{C} & I_p \end{bmatrix} \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Con el estado extendido  $x = [x \ f]^T$ , para el sistema dado por (A.8) se propone un observador de entradas desconocidas:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Nz + Gu + Ly \\ \hat{x} &= z + T_2y\end{aligned}\tag{A.10}$$

Donde el error de estimación está dado por  $e = x - \hat{x}$ , y sustituyendo:

$$e = x - \hat{x} = x - (z + T_2y) = x - (z + T_2Cx) = (I - T_2C)x - z\tag{A.11}$$

Para considerar la dinámica del error se propone hacer  $I - T_2C = T_1E$ , haciendo:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= T_1E\dot{x} - \dot{z} = T_1E\dot{x} - (Nz + Gu + Ly) \\ &= T_1(Ax + Bu + B_f f) - Nz - Gu - LCx \\ &= (T_1A - LC)x + (T_1B - G)u + T_1B_f f - N(\hat{x} - T_2Cx) \\ &= (T_1A - LC + NT_2C)x + (T_1B - G)u + T_1B_f f - N\hat{x}\end{aligned}$$

Considerando  $\hat{x} = x - e$ , y haciendo  $T_1B = G$  se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= (T_1A - LC + NT_2C)x + T_1B_f f - N(x - e) \\ &= (T_1A - LC - N[I - T_2C])x + T_1B_f f + Ne\end{aligned}$$

Haciendo  $L - NT_2 = K$ , y  $N = T_1A - KC$  se llega a:

$$\dot{e} = Ne + T_1B_f f\tag{A.12}$$

Para asegurar la convergencia del observador ( la dinámica del error es asintóticamente estable) se puede implementar un esquema H infinito.

$$\dot{V}(e) = e^T P \dot{e} + \dot{e}^T P e\tag{A.13}$$

Y sustituyendo

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= e^T P([T_1A - KC]e + T_1B_f f) + [(T_1A - KC)e + T_1B_f f]^T P e \\ &= e^T (P[T_1A - KC] + [T_1A - KC]^T P)e + e^T (PT_1B_f)f + f^T (T_1B_f)^T P e\end{aligned}\tag{A.14}$$

Considerando el funcional  $J = V(e) + r^T r \leq \beta^2 f^T f$ , y considerando  $r = Ce$  la minimización está dada por:

$$e^T (P[T_1A - KC] + [T_1A - KC]^T P)e + e^T (PT_1B_f)f + f^T (T_1B_f)^T P e + e^T C^T C e + f^T f\tag{A.15}$$

Reduciendo y definiendo  $Q = PK$

$$\begin{bmatrix} e^T \\ f^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} He(PT_1A - QC) + C^T C & PT_1B_f \\ [PT_1B_f]^T & -\beta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Al aplicar el complemento de Schur se llega a:

$$\begin{bmatrix} He(PT_1A - QC) & PT_1B_f & C^T \\ [PT_1B_f]^T & -\beta^2 I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.17})$$

Considerando los pasos:

1. Cálculo de  $T_1$  &  $T_2$  con  $[T_1 \ T_2] = ([E \ C]^T)^\dagger$  con  $[E \ C]$  de rango pleno.
2.  $T_1B = G$ ,  $Q = PK$
3. Resolución de LMI
4. Cálculo de  $K = P^{-1}Q$  y  $N = T_1A - KC$
5. Cálculo de  $L = K + NT_2$

Donde  $He(A) = A + A^T$

### A.3. Retroalimentación de estados para regulación.

Dado un sistema lineal invariante en el tiempo expresado como:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{A.18})$$

el cual que busca regularse. Para ello se propone una ley de control por retroalimentación de estados dada por

$$u = -Kx \quad (\text{A.19})$$

donde  $K$  es una ganancia que se modifica al sistema (A.18) representándolo como:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (\text{A.20})$$

de modo que ésta ganancia debe asegurar que el sistema (A.20) sea asintóticamente estable, equivalente a decir que la matriz  $A - BK$  sea Hurwitz. Mediante el uso de la teoría de Lyapunov, proponiendo una función candidata definida positiva como:

$$V(x) = x^T P x \quad (\text{A.21})$$

buscando que su derivada direccional sea definida negativa. Considerando al sistema (A.20), su derivada direccional estará dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x < 0 \\ &= x^T P(A - BK)x + x^T (A - BK)^T P x < 0 \\ &= x^T (PA - PBK + A^T P - K^T B^T P)x < 0 \\ &\rightarrow PA - PBK + A^T P - K^T B^T P < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

para resolver (A.22) en términos de LMIs, ésta se premultiplica y posmultiplica por  $X = P^{-1}$  resultando en:

$$AX - BKX + PA^T - XK^T B^T$$

finalmente definiendo  $W = KX$  se llega a la problemática (A.23).

$$\begin{aligned} XA' + AX - BW - W'B' &< 0 \\ X &> 0 \\ K &= WX^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Todos los resultados anteriores se pueden expresar en términos de un modelo convexo mediante la consideración de las matrices  $A_i$  de cada submodelo.



# Referencias

- [Cas, 2005] (2005). *The Quad-rotor Rotorcraft*, pages 39–59. Springer London, London.
- [Abdelazim and Malik, 2005] Abdelazim, T. and Malik, O. (2005). Identification of nonlinear systems by takagi–sugeno fuzzy logic grey box modeling for real-time control. *Control Engineering Practice*, 13(12):1489 – 1498. Special Section on Power Plants and Power Systems Control.
- [Abdolhosseini et al., 2013] Abdolhosseini, M., Zhang, Y. M., and Rabbath, C. A. (2013). An efficient model predictive control scheme for an unmanned quadrotor helicopter. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 70(1):27–38.
- [Aguilar-Sierra et al., 2014] Aguilar-Sierra, H., Flores, G., Salazar, S., and Lozano, R. (2014). Fault estimation for a quad-rotor mav using a polynomial observer. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 73(1):455–468.
- [Al-Mahturi et al., 2019] Al-Mahturi, A., Santoso, F., Garratt, M. A., Anavatti, S. G., and Ferdous, M. M. (2019). Online takagi-sugeno fuzzy identification of a quadcopter using experimental input-output data. In *2019 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*, pages 527–533.
- [Al Younes et al., 2013] Al Younes, Y., Noura, H., Rabhi, A., El Hajjaji, A., and Al Hussien, N. (2013). Sensor fault detection and isolation in the quadrotor vehicle using nonlinear identity observer approach. In *2013 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, pages 486–491.
- [Altug et al., 2002] Altug, E., Ostrowski, J., and Mahony, R. (2002). Control of a quadrotor

- helicopter using visual feedback. In *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.02CH37292)*, volume 1, pages 72–77 vol.1.
- [Andersen and Andersen, 2000] Andersen, E. D. and Andersen, K. D. (2000). *The Mosek Interior Point Optimizer for Linear Programming: An Implementation of the Homogeneous Algorithm*, pages 197–232. Springer US, Boston, MA.
- [Avram et al., 2015] Avram, R. C., Zhang, X., Campbell, J., and Muse, J. (2015). Imu sensor fault diagnosis and estimation for quadrotor uavs. *IFAC-PapersOnLine*, 48(21):380–385. 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes SAFEPROCESS 2015.
- [Avram et al., 2017a] Avram, R. C., Zhang, X., and Muse, J. (2017a). Quadrotor actuator fault diagnosis and accommodation using nonlinear adaptive estimators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(6):2219–2226.
- [Avram et al., 2017b] Avram, R. C., Zhang, X., and Muse, J. (2017b). Quadrotor sensor fault diagnosis with experimental results. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 86(1):115–137.
- [Berbra et al., 2008] Berbra, C., Lesecq, S., and Martinez, J. (2008). A multi-observer switching strategy for fault-tolerant control of a quadrotor helicopter. In *2008 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1094–1099.
- [Blanke et al., 2000] Blanke, M., Frei, C., Kraus, F., Patton, R., and Staroswiecki, M. (2000). What is fault-tolerant control. *IFAC Proceedings Volumes*, 33.
- [Bošković and Mehra, 2003] Bošković, J. D. and Mehra, R. K. (2003). *Failure Detection, Identification and Reconfiguration in Flight Control*, pages 129–167. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Bouabdallah, 2007] Bouabdallah, S. (2007). Design and control of quadrotors with application to autonomous flying. Master’s thesis, Lausanne.

- [Bouabdallah and Siegwart, 2007] Bouabdallah, S. and Siegwart, R. (2007). Full control of a quadrotor. In *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 153–158.
- [Boyd et al., 1994] Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Chen and Patton, 2012] Chen, J. and Patton, R. (2012). *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. The International Series on Asian Studies in Computer and Information Science. Springer US.
- [Chovancová et al., 2014] Chovancová, A., Fico, T., Ľuboš Chovanec, and Hubinsk, P. (2014). Mathematical modelling and parameter identification of quadrotor (a survey). *Procedia Engineering*, 96:172–181. Modelling of Mechanical and Mechatronic Systems.
- [Darouach et al., 1994] Darouach, M., Zasadzinski, M., and Xu, S. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3):606–609.
- [Drak et al., 2015] Drak, A., Noura, H., Hejase, M., and AL Younes, Y. (2015). Sensor fault diagnostic and fault-tolerant control for the altitude control of a quadrotor uav. In *2015 IEEE 8th GCC Conference Exhibition*, pages 1–5.
- [Duan, 2010] Duan, G.-R. (2010). *Equivalence and Solutions of Descriptor Linear Systems*, pages 35–55. Springer New York, New York, NY.
- [Duan and Yu, 2013] Duan, G.-R. and Yu, H.-H. (2013). *LMIs in control systems: Analysis, design and applications*. CRC Press.
- [Fouad et al., 2012] Fouad, Y., Bouhali, O., Khebbache, H., and Boudjema, F. (2012). Takagi-sugeno model for quadrotor modelling and control using nonlinear state feedback controller. *International Journal of Control Theory and Computer Modelling (IJCTCM)*, 2:9–24.

- [Fresk and Nikolakopoulos, 2013] Fresk, E. and Nikolakopoulos, G. (2013). Full quaternion based attitude control for a quadrotor. In *2013 European Control Conference (ECC)*, pages 3864–3869.
- [Garcia et al., 2006] Garcia, P., Lozano, R., and Dzul, A. (2006). *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*. Advances in Industrial Control. Springer London.
- [Gremillion and Humbert, 2010] Gremillion, G. and Humbert, J. (2010). System identification of a quadrotor micro air vehicle.
- [Guo et al., 2018] Guo, Y., Jiang, B., and Zhang, Y. (2018). A novel robust attitude control for quadrotor aircraft subject to actuator faults and wind gusts. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 5(1):292–300.
- [Guzmán-Rabasa et al., 2019] Guzmán-Rabasa, J. A., López-Estrada, F. R., González-Contreras, B. M., Valencia-Palomo, G., Chadli, M., and Pérez-Patricio, M. (2019). Actuator fault detection and isolation on a quadrotor unmanned aerial vehicle modeled as a linear parameter-varying system. *Measurement and Control*, 52(9-10):1228–1239.
- [Hamel et al., 2002] Hamel, T., Mahony, R., Lozano, R., and Ostrowski, J. (2002). Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4-flyer. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):217–222. 15th IFAC World Congress.
- [Herrmann et al., 2007] Herrmann, G., Turner, M. C., and Postlethwaite, I. (2007). *Linear Matrix Inequalities in Control*, pages 123–142. Springer London, London.
- [Homann et al., 2007] Homann, G. M., Huang, H., Waslander, S. L., and Tomlin, C. J. (2007). Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment.
- [ICAO, 2011] ICAO (2011). *Unmanned aircraft systems: (UAS)*. International Civil Aviation Organization.
- [Izadi et al., 2011] Izadi, H. A., Zhang, Y., and Gordon, B. W. (2011). Fault tolerant model predictive control of quad-rotor helicopters with actuator fault estimation. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):6343–6348. 18th IFAC World Congress.

- [Jurado et al., 2008] Jurado, F., Castillo-Toledo, B., and Di Gennaro, S. (2008). Stabilization of a quadrotor via takagi-sugeno fuzzy control. In *Proceedings of The 12th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics : WMSCI 2008*. IIIS.
- [Jurado et al., 2012] Jurado, F., Herrera, L. E., and Castañeda, C. E. (2012). Stochastic control of a quadrotor. In *2012 IEEE Ninth Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*, pages 277–281.
- [Lee and Kim, 2014] Lee, H. and Kim, H. J. (2014). Robust control of a quadrotor using takagi-sugeno fuzzy model and an lmi approach. In *2014 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2014)*, pages 370–374.
- [Lendek et al., 2011a] Lendek, Z., Berna, A., Guzman, J., Sala, A., and García, P. (2011a). Application of takagi-sugeno observers for state estimation in a quadrotor. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 7530–7535.
- [Lendek et al., 2011b] Lendek, Z., Guerra, T.-M., Babuska, R., and De Schutter, B. (2011b). *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*, volume 262.
- [Li and Li, 2011] Li, J. and Li, Y. (2011). Dynamic analysis and pid control for a quadrotor. In *2011 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 573–578.
- [Li et al., 2013] Li, T., Zhang, Y., and Gordon, B. W. (2013). Passive and active nonlinear fault-tolerant control of a quadrotor unmanned aerial vehicle based on the sliding mode control technique. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 227(1):12–23.
- [Lofberg, 2004] Lofberg, J. (2004). Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. In *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*, pages 284–289.
- [López-Estrada et al., 2016] López-Estrada, F. R., Ponsart, J.-C., Theilliol, D., Zhang, Y., and Astorga-Zaragoza, C.-M. (2016). Lpv model-based tracking control and robust sensor

- fault diagnosis for a quadrotor uav. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 84(1):163–177.
- [López-Estrada et al., 2020] López-Estrada, F.-R., Valencia-Palomo, G., Hoyo, J., Santiago, G., Flores, G., and Zenteno, J. (2020). Sistema de aterrizaje de emergencia de un vehículo aéreo no tripulado mediante conversión de quadrirrotor a birrotor. *Dyna (Bilbao)*, 7:1–16.
- [López-Estrada, 2014] López-Estrada, F.-R. (2014). *Model-Based Fault Diagnosis Observer Design for Descriptor LPV System with Unmeasurable Gain Scheduling*. PhD thesis, Université de Lorraine, Nancy, Grand Est.
- [López-Estrada et al., 2019] López-Estrada, F.-R., Rotondo, D., and Valencia-Palomo, G. (2019). A review of convex approaches for control, observation and safety of linear parameter varying and takagi-sugeno systems. *Processes*, 7(11).
- [Lu et al., 2014] Lu, P., Van Kampen, E.-J., and Yu, B. (2014). Actuator fault detection and diagnosis for quadrotors. In *IMAV 2014: International Micro Air Vehicle Conference and Competition 2014, Delft, The Netherlands, August 12-15, 2014*. Citeseer.
- [Luenberger, 1977] Luenberger, D. (1977). Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(3):312–321.
- [Luenberger, 1964] Luenberger, D. G. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2):74–80.
- [Mahony et al., 2012] Mahony, R., Kumar, V., and Corke, P. (2012). Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 19(3):20–32.
- [Mallavalli and Fekih, 2017] Mallavalli, S. and Fekih, A. (2017). A fault tolerant control approach for a quadrotor uav subject to time varying disturbances and actuator faults. In *2017 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, pages 596–601.

- [Mallavalli and Fekih, 2020] Mallavalli, S. and Fekih, A. (2020). A fault tolerant tracking control for a quadrotor uav subject to simultaneous actuator faults and exogenous disturbances. *International Journal of Control*, 93(3):655–668.
- [Mazeh et al., 2018] Mazeh, H., Saied, M., Shraim, H., and Francis, C. (2018). Fault-tolerant control of an hexarotor unmanned aerial vehicle applying outdoor tests and experiments. *IFAC-PapersOnLine*, 51(22):312–317. 12th IFAC Symposium on Robot Control SYROCO 2018.
- [Mellinger and Kumar, 2011] Mellinger, D. and Kumar, V. (2011). Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors. In *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2520–2525.
- [Merheb et al., 2014] Merheb, A.-R., Noura, H., and Bateman, F. (2014). Active fault tolerant control of quadrotor uav using sliding mode control. In *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 156–166.
- [Mistler et al., 2001] Mistler, V., Benallegue, A., and M’Sirdi, N. (2001). Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback. In *Proceedings 10th IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication. ROMAN 2001 (Cat. No.01TH8591)*, pages 586–593.
- [Mueller and D’Andrea, 2014] Mueller, M. W. and D’Andrea, R. (2014). Stability and control of a quadcopter despite the complete loss of one, two, or three propellers. In *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 45–52.
- [Nguyen and Hong, 2018] Nguyen, N. and Hong, S. (2018). Fault-tolerant control of quadcopter uavs using robust adaptive sliding mode approach. *Energies*, 12:95.
- [Nguyen and Hong, 2019] Nguyen, N. P. and Hong, S. K. (2019). Active fault-tolerant control of a quadcopter against time-varying actuator faults and saturations using sliding mode backstepping approach. *Applied Sciences*, 9(19):4010.
- [Noura et al., 2009] Noura, H., Theilliol, D., Ponsart, J.-C., and Chamseddine, A. (2009). *Fault-Tolerant Control Systems: Design and Practical Applications*.

- [Nyberg, 2002] Nyberg, M. (2002). Criteria for detectability and strong detectability of faults in linear systems. *International Journal of Control*, 75(7):490–501.
- [Ohtake et al., 2001] Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H. (2001). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. In *Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference (Cat. No. 01TH8569)*, volume 1, pages 127–132.
- [Peaucelle et al., 2003] Peaucelle, D., Henrion, D., Labit, Y., and Taitz, K. (2003). User’s guide for sedumi interface 1.04.
- [Pokorný et al., 2020] Pokorný, M., Docekal, T., and Rosinová, D. (2020). Nonlinear modeling and optimal control via takagi-sugeno fuzzy techniques: A quadrotor stabilization. *Journal of Electrical Engineering*, 71:1–10.
- [Pounds et al., 2002] Pounds, P., Mahony, R., Hynes, P., and Roberts, J. (2002). Design of a four-rotor aerial robot. In *Proceedings 2002 Australasian Conference on Robotics and Automation*, pages 145–150.
- [Qin et al., 2017] Qin, L., He, X., Yan, R., and Zhou, D. (2017). Active fault-tolerant control for a quadrotor with sensor faults. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 88(2):449–467.
- [Qin et al., 2016] Qin, L., He, X., Zhou, Y., and Zhou, D. (2016). Fault-tolerant control for a quadrotor unmanned helicopter subject to sensor faults. In *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 1280–1286.
- [Rabhi et al., 2011] Rabhi, A., Chadli, M., and Pegard, C. (2011). Robust fuzzy control for stabilization of a quadrotor. In *2011 15th International Conference on Advanced Robotics (ICAR)*, pages 471–475.
- [Raffo et al., 2010] Raffo, G. V., Ortega, M. G., and Rubio, F. R. (2010). An integral predictive/nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica*, 46(1):29–39.
- [Research, 2015] Research, J. (2015). Consumer drone sales to reach almost 4m this year, rising to 16m annually by 2020.

- [Reyes-Valeria et al., 2013] Reyes-Valeria, E., Enriquez-Caldera, R., Camacho-Lara, S., and Guichard, J. (2013). Lqr control for a quadrotor using unit quaternions: Modeling and simulation. In *CONIELECOMP 2013, 23rd International Conference on Electronics, Communications and Computing*, pages 172–178.
- [Rotondo et al., 2019] Rotondo, D., Cristofaro, A., Johansen, T. A., Nejjari, F., and Puig, V. (2019). Robust fault and icing diagnosis in unmanned aerial vehicles using lpv interval observers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(16):5456–5480.
- [Rotondo et al., 2015] Rotondo, D., Nejjari, F., and Puig, V. (2015). Robust quasi-lpv model reference ftc of a quadrotor uav subject to actuator faults. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 25:2015.
- [Sabatino, 2015] Sabatino, F. (2015). Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation. Master’s thesis, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
- [Sadeghzadeh and Zhang, 2011] Sadeghzadeh, I. and Zhang, Y. (2011). A review on fault-tolerant control for unmanned aerial vehicles (uavs). In *Infotech@ Aerospace 2011*, page 12.
- [Sadr et al., 2014] Sadr, S., Moosavian, S. A. A., and Zarafshan, P. (2014). Dynamics modeling and control of a quadrotor with swing load. *Journal of Robotics*, 2014:265897.
- [Seri-rojanakul and Wongsaisuwan, 2012] Serirojanakul, A. and Wongsaisuwan, M. (2012). Optimal control of quad-rotor helicopter using state feedback lpv method. In *2012 9th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology*, pages 1–4.
- [Singh et al., 2020] Singh, R., Kumar, R., Mishra, A., and Agarwal, A. (2020). Structural analysis of quadcopter frame. *Materials Today: Proceedings*, 22:3320–3329. 2nd International Conference on Materials Manufacturing and Modelling, ICMMM – 2019, VIT University, Vellore, 29th - 31st March 2019.
- [Siti et al., 2019] Siti, I., Mjahed, M., Ayad, H., and El Kari, A. (2019). New trajectory

- tracking approach for a quadcopter using genetic algorithm and reference model methods. *Applied Sciences*, 9(9).
- [Song et al., 2019] Song, Y., He, L., Zhang, D., Qian, J., and Fu, J. (2019). Neuroadaptive fault-tolerant control of quadrotor uavs: A more affordable solution. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 30(7):1975–1983.
- [Sturm, 1999] Sturm, J. F. (1999). Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1-4):625–653.
- [Sudhir and Swarup, 2017] Sudhir, N. and Swarup, A. (2017). On adaptive sliding mode control for improved quadrotor tracking. *Journal of Vibration and Control*, 24.
- [Tahir et al., 2016] Tahir, Z., Jamil, M., Liaqat, S., Mubarak, L., Tahir, W., and Gilani, S. (2016). State space system modeling of a quad copter uav. *Indian Journal of Science and Technology*, 9.
- [Takagi and Sugeno, 1985] Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15(1):116–132.
- [Tanaka and Wang, 2002] Tanaka, K. and Wang, O. (2002). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*, pages 5 – 48.
- [Tayebi and McGilvray, 2006] Tayebi, A. and McGilvray, S. (2006). Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3):562–571.
- [Thu and Gavrilov, 2017] Thu, K. M. and Gavrilov, A. (2017). Designing and modeling of quadcopter control system using l1 adaptive control. *Procedia Computer Science*, 103:528–535. XII International Symposium Intelligent Systems 2016, INTELS 2016, 5-7 October 2016, Moscow, Russia.
- [Vachtsevanos and Valavanis, 2015] Vachtsevanos, G. and Valavanis, K. (2015). *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*, pages 93–103.

- 
- [Williams, 2004] Williams, K. (2004). A summary of unmanned aircraft accident/incident data: Human factors implications. page 17.
- [Younes et al., 2016] Younes, Y., Rabhi, A., Noura, H., and El hajjaji, A. (2016). Sensor fault diagnosis and fault tolerant control using intelligent-output-estimator applied on quadrotor uav. pages 1117–1123.
- [Zadeh, 1965] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353.
- [Zhaohui and Noura, 2013] Zhaohui, C. and Noura, H. (2013). A composite fault tolerant control based on fault estimation for quadrotor uavs. In *2013 IEEE 8th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*, pages 236–241.
- [Zhong et al., 2019] Zhong, Y., Zhang, W., Zhang, Y., Zuo, J., and Zhan, H. (2019). Sensor fault detection and diagnosis for an unmanned quadrotor helicopter. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 96(3):555–572.
- [Zhong et al., 2018] Zhong, Y., Zhang, Y., Zhang, W., Zuo, J., and Zhan, H. (2018). Robust actuator fault detection and diagnosis for a quadrotor uav with external disturbances. *IEEE Access*, 6:48169–48180.



# Siglas

**DAE** Differential-Algebraic Equations.

**FDI** Fault Detection and Isolation.

**GPS** Global Positioning System.

**IMU** Inertial Measurement Unit.

**LMI** Linear Matrix Inequality.

**LPV** Lineal de Parámetros Variantes.

**LQR** Linear Quadratic Regulator.

**MPC** Model Predictive Control.

**PD** Proporcional Diferencial.

**PDC** Parallel Distributed Compensation.

**PID** Proporcional Integral Diferencial.

**qLPV** quasi Lineal de Parámetros Variantes.

**RBFNN** Radial Base Function Neural Network.

**SDCF** State Dependant Coefficient Factorization.

**TS** Takagi-Sugeno.

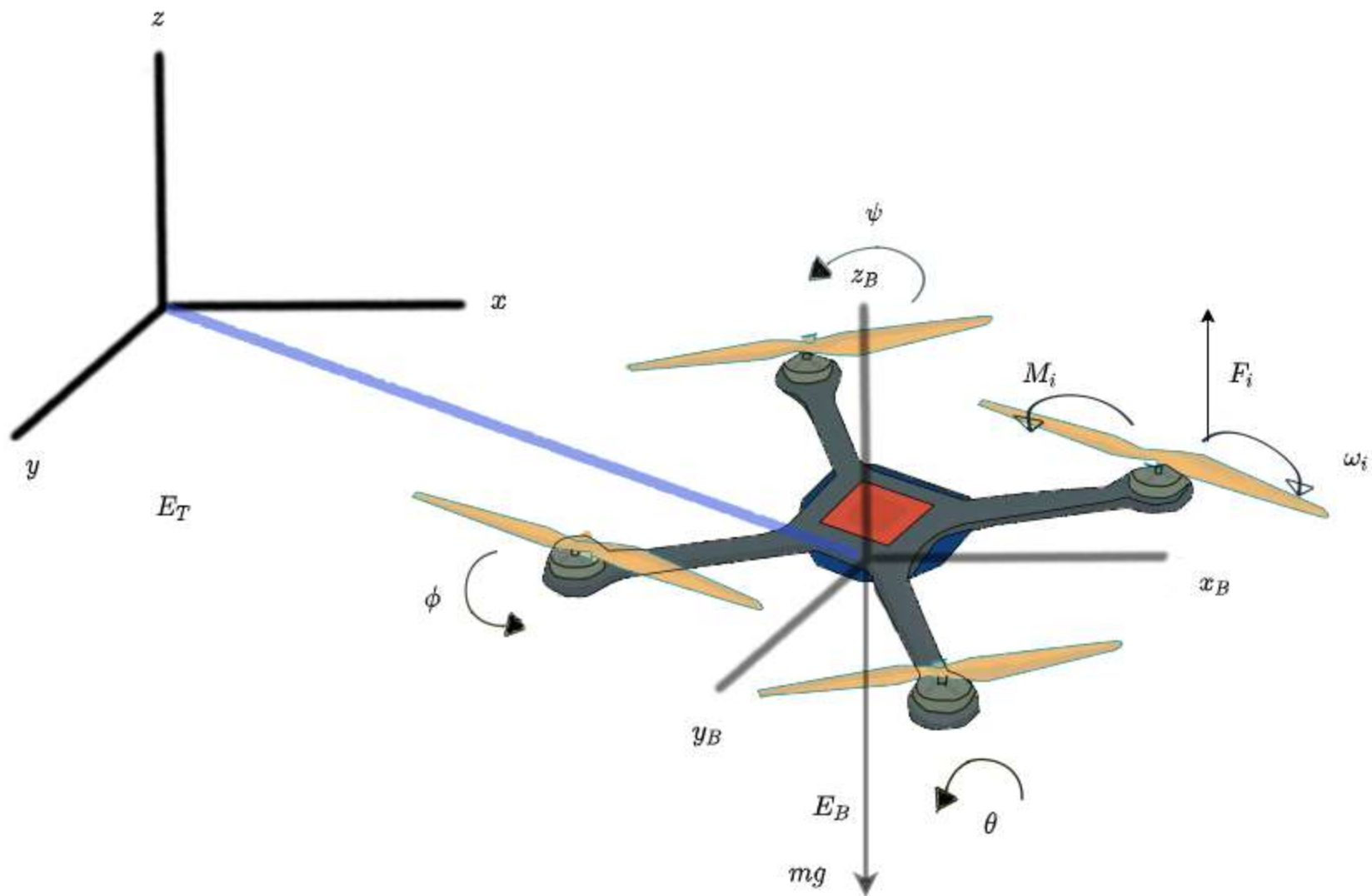
**UAS** Unmanned Aerial System.

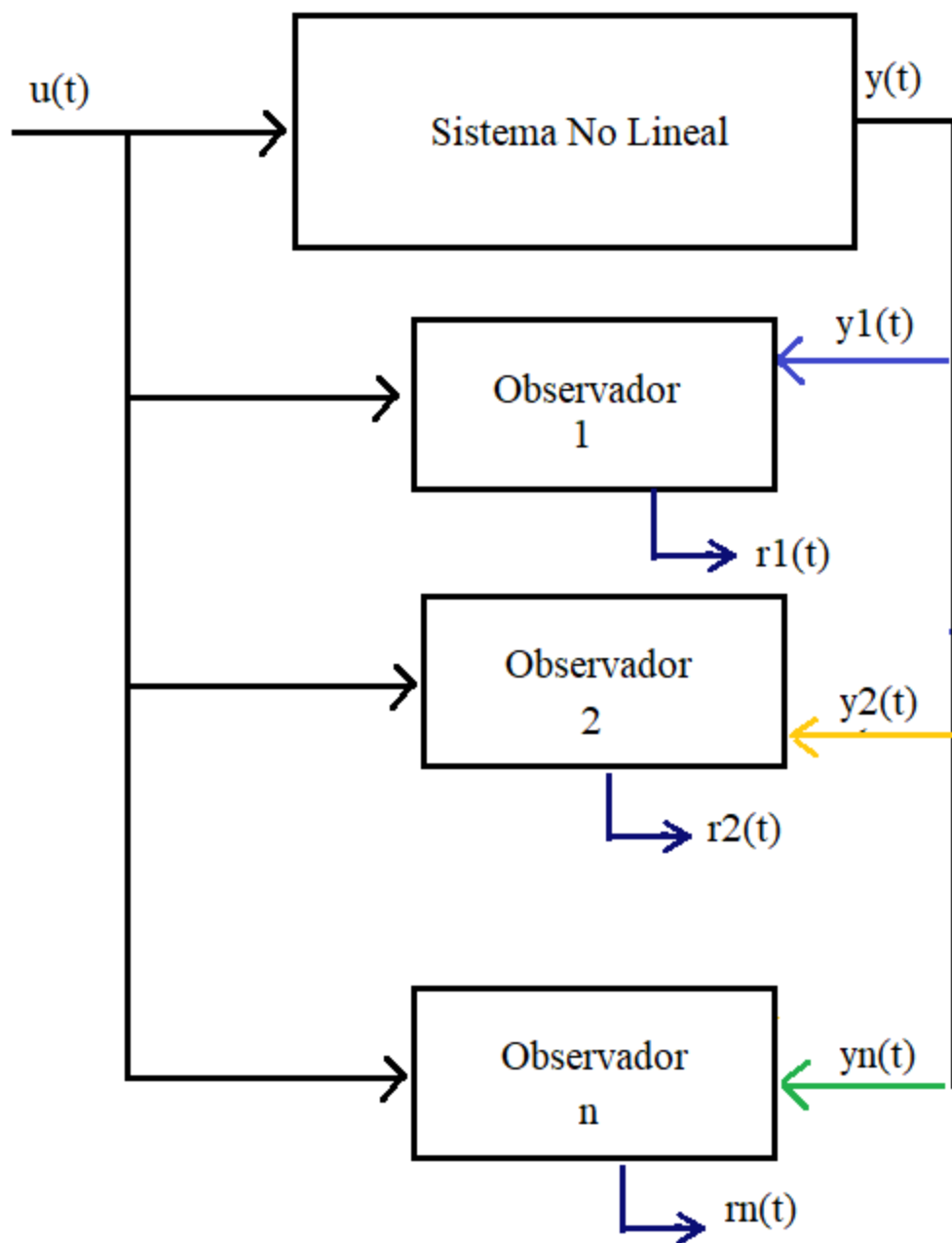
**UAV** Unmanned Aerial Vehicle.

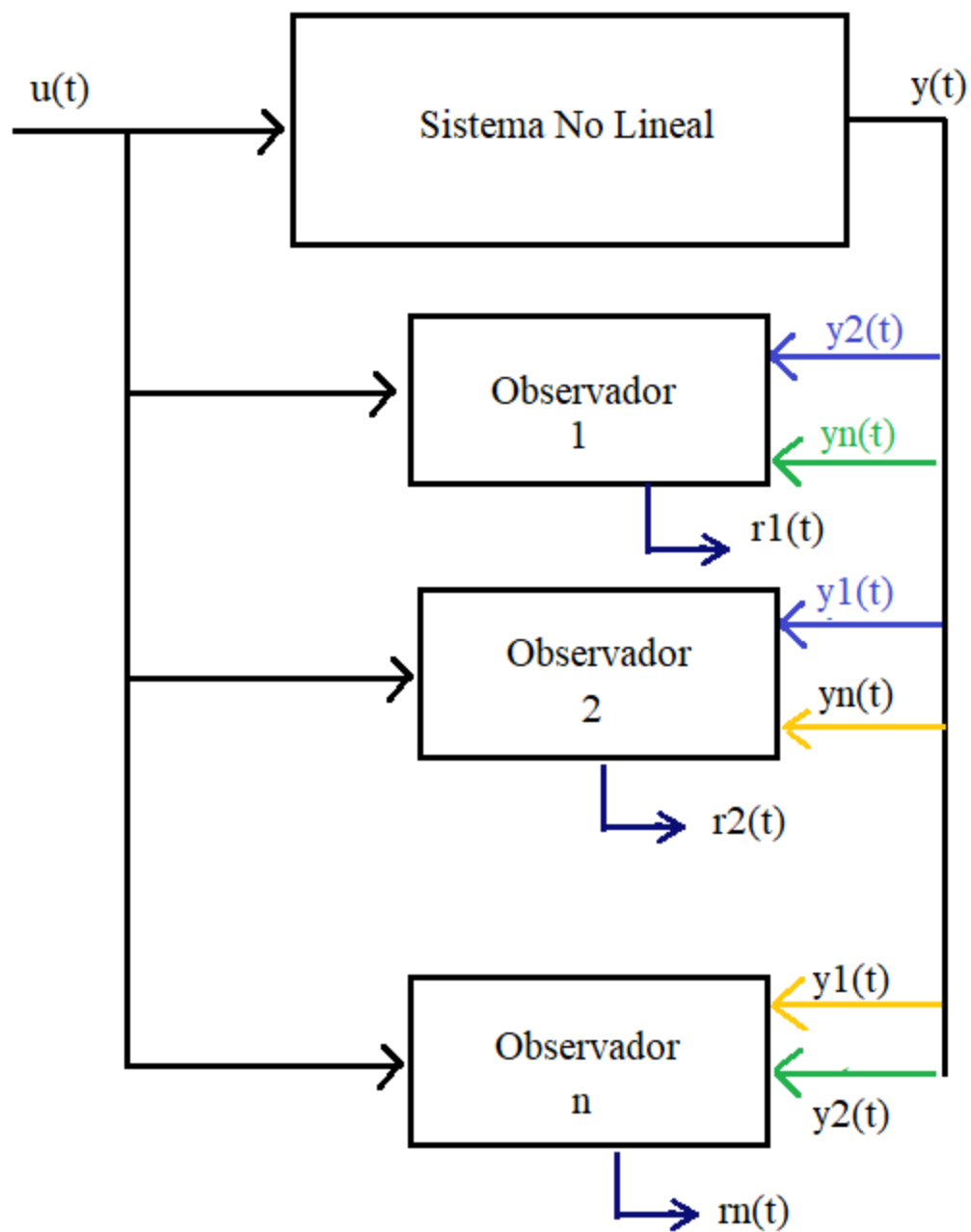
**UIO** Unknown Inputs Observer.

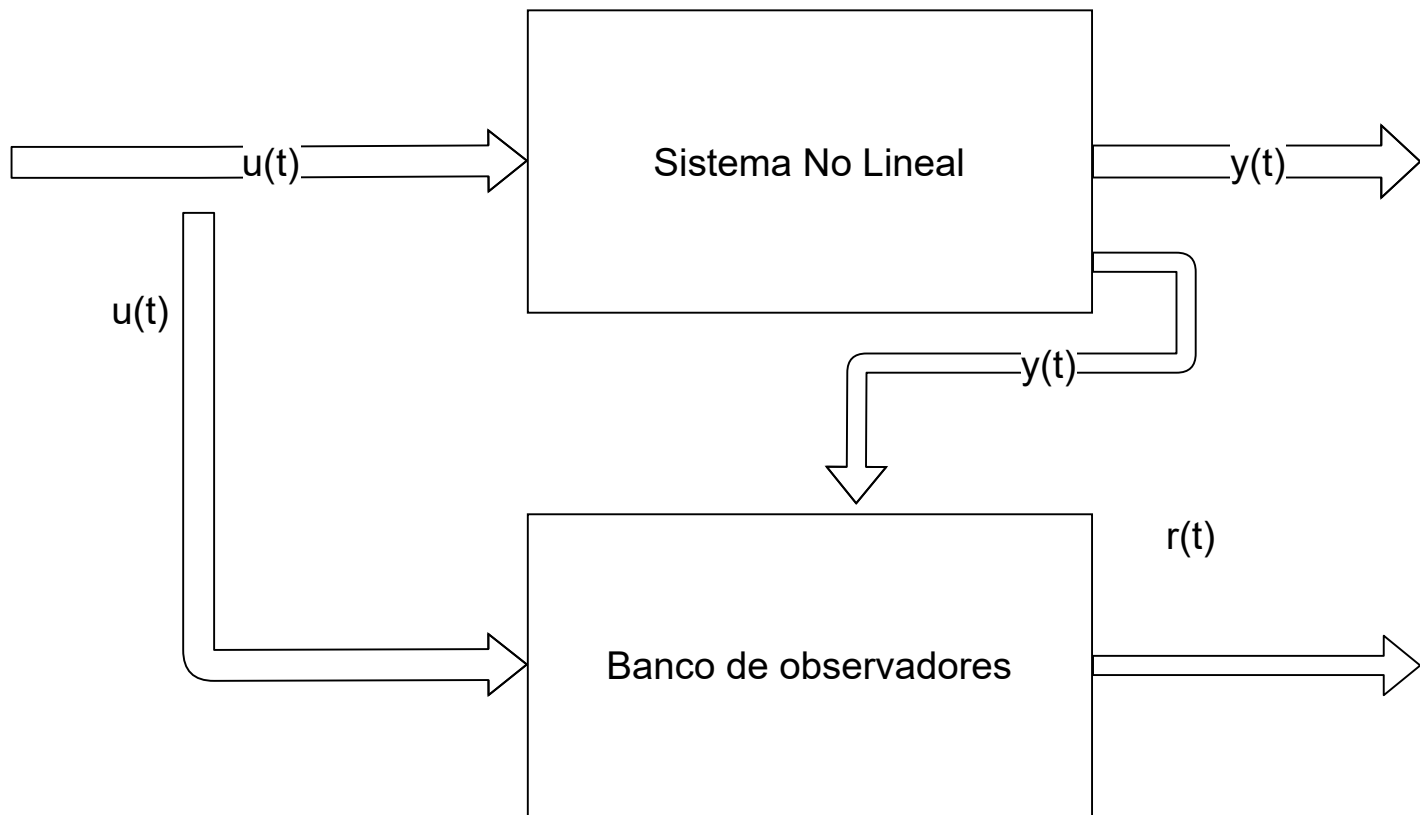
**VANT** Vehículo Aéreo No Tripulado.

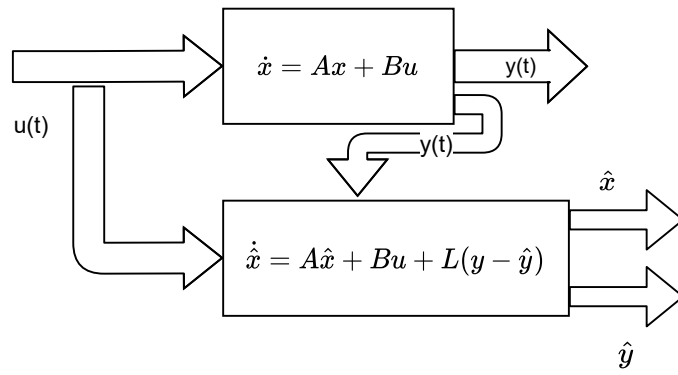
**VTOL** Vertical Take-Off and Landing.

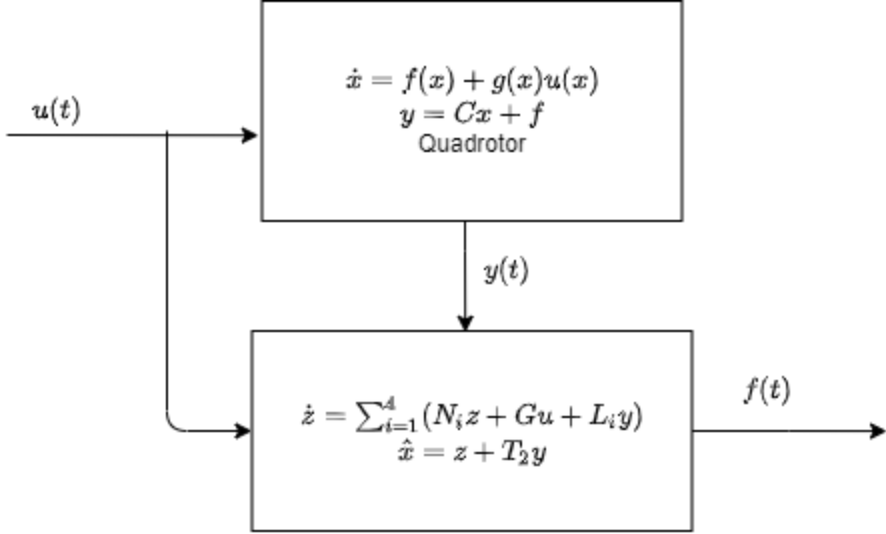




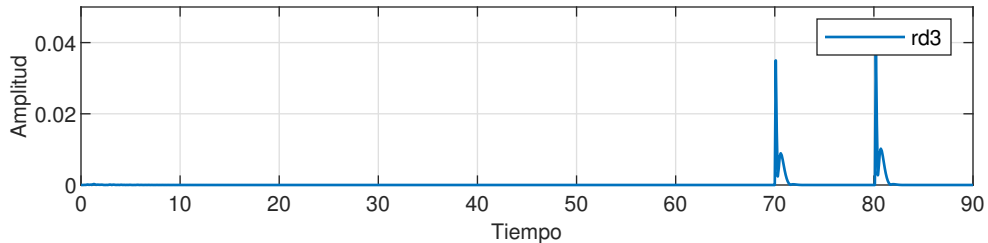




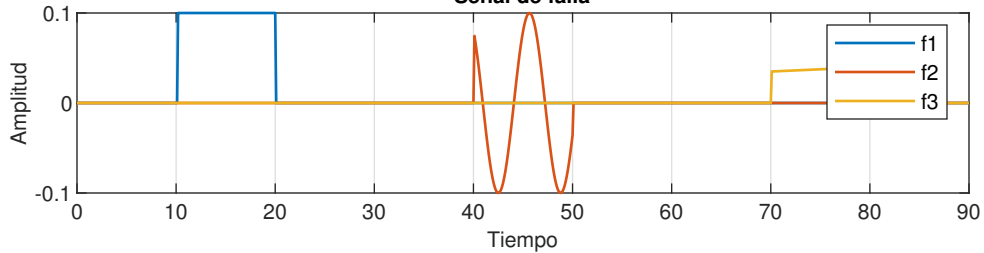




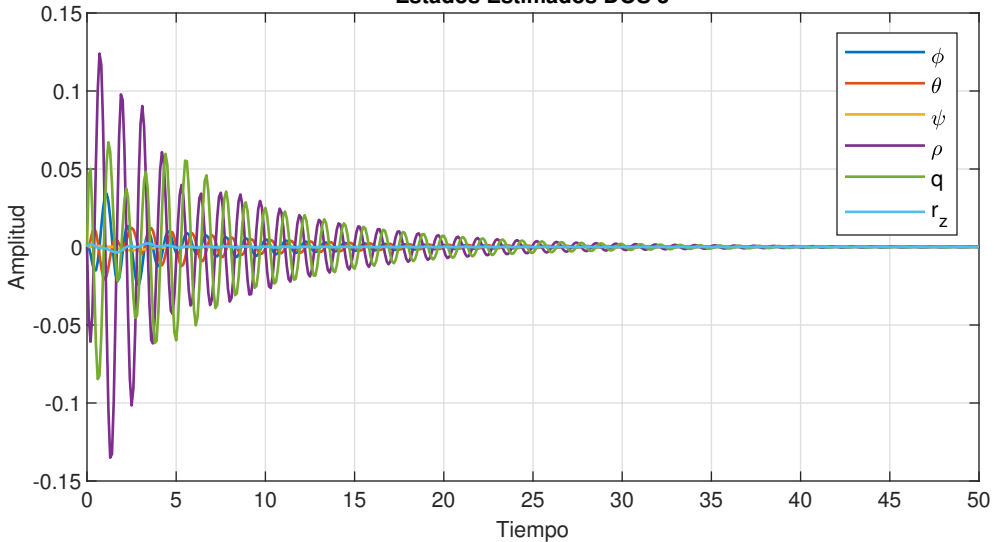
### Señal residuo S3 DOS



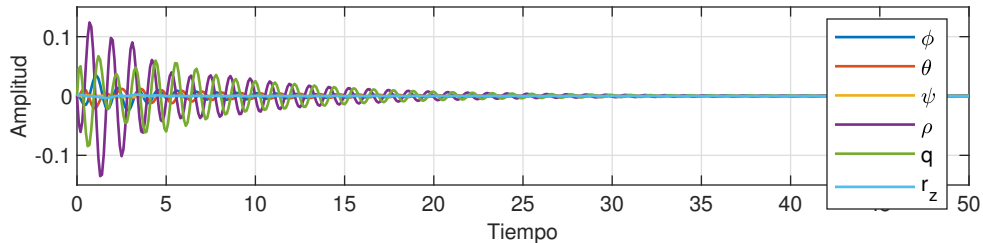
### Señal de falla



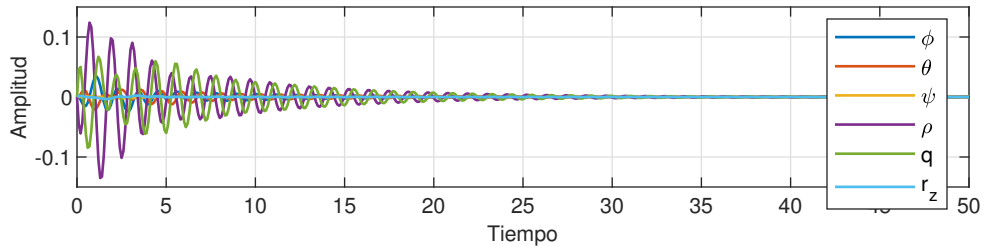
### Estados Estimados DOS 3



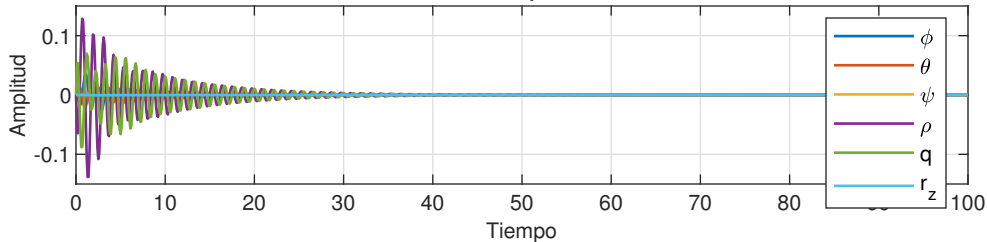
### Estados Estimados GOS 1



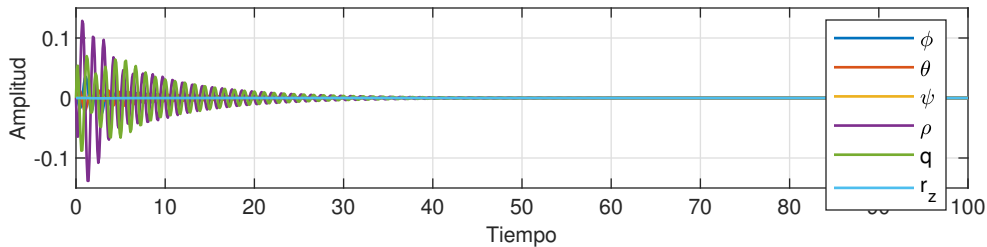
### Estados Estimados GOS 2



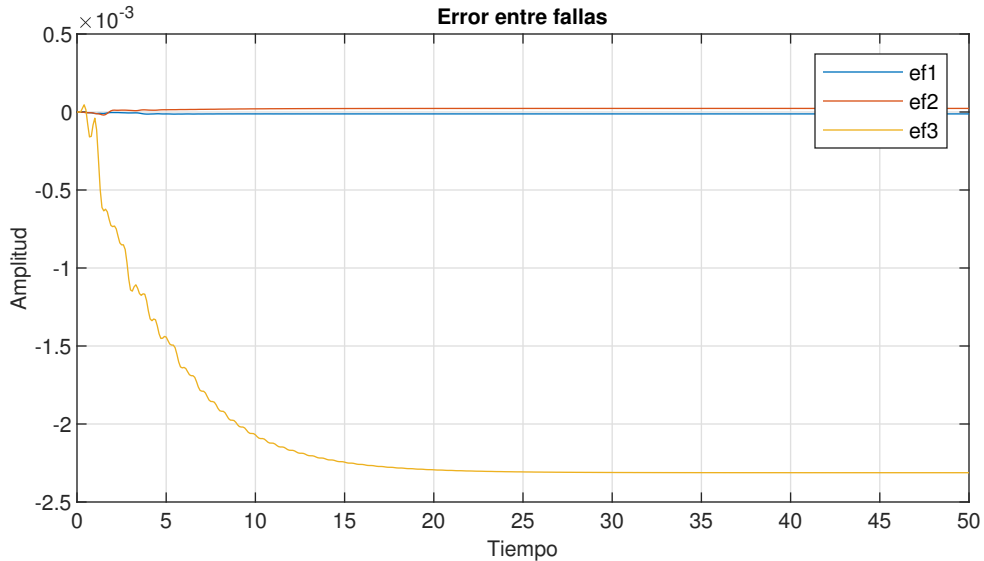
### Dinámica quadrotor



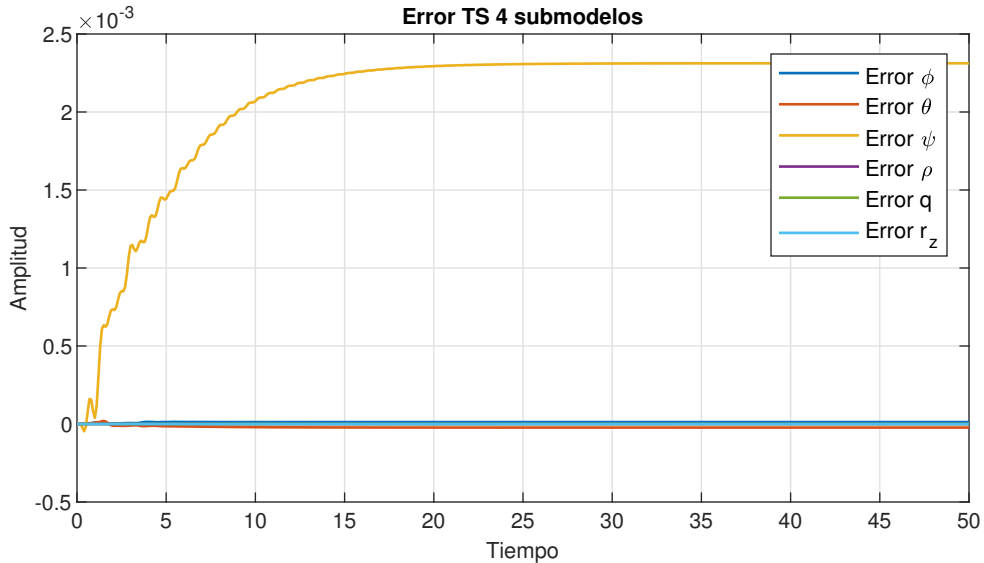
### Modelo TS 256

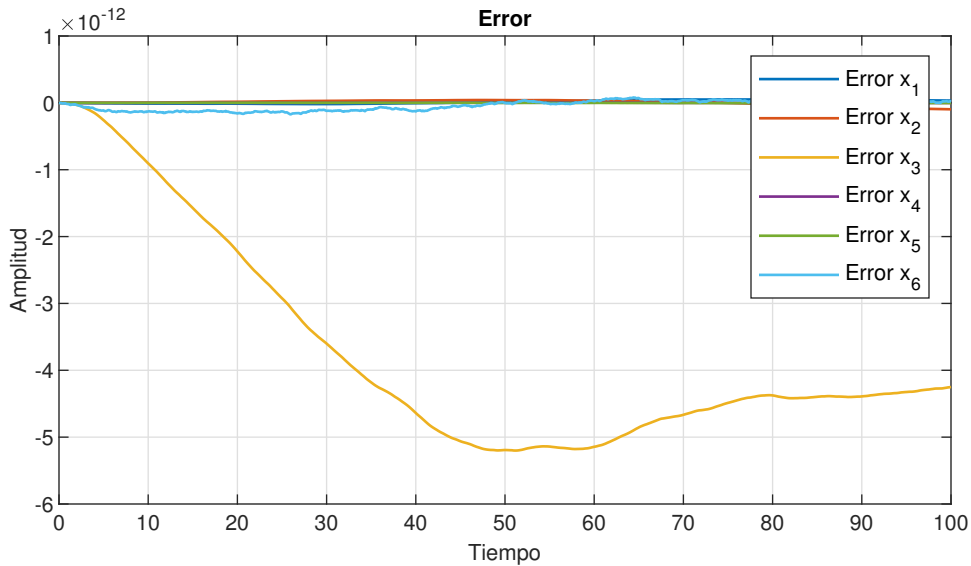


Error entre fallas

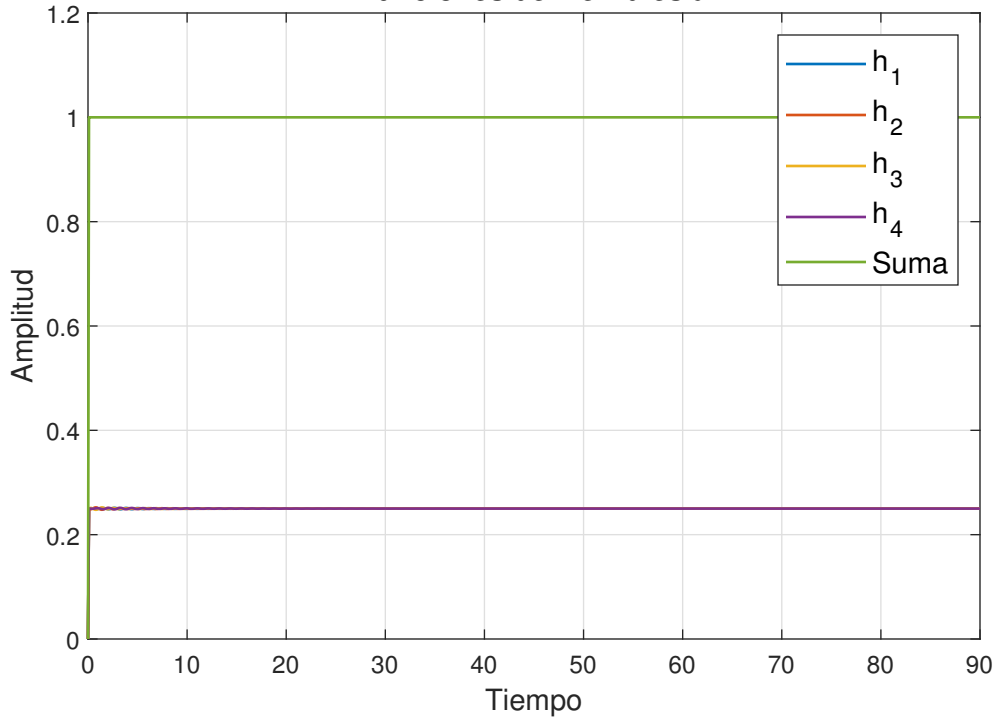


Error TS 4 submodelos

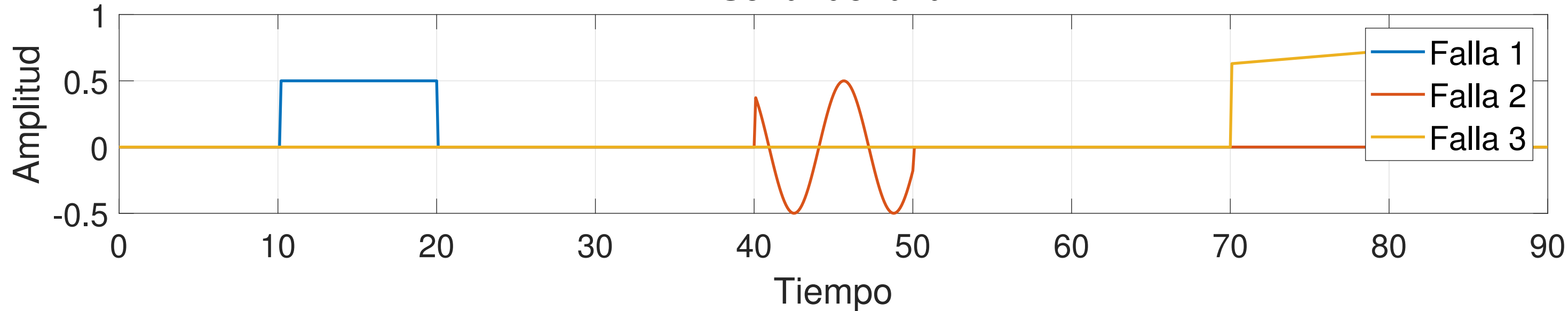




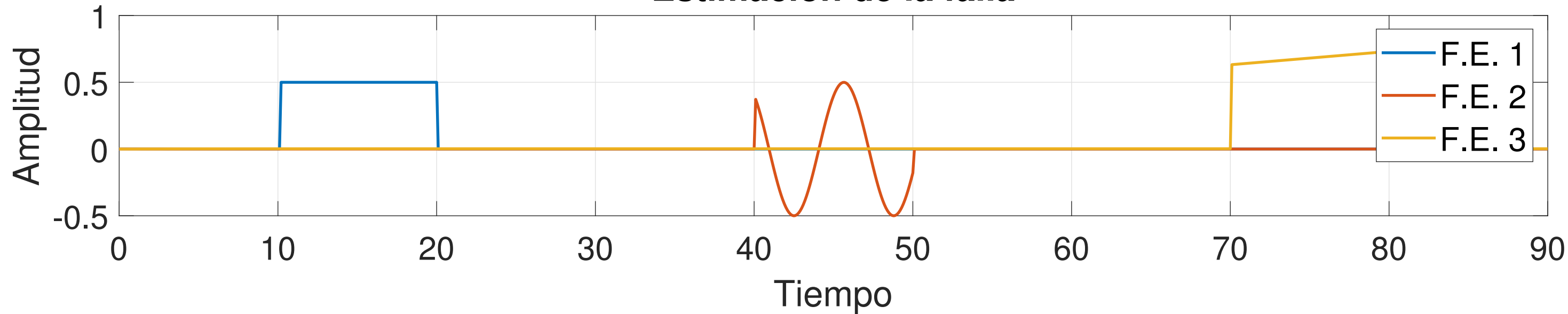
# Funciones de Membresía



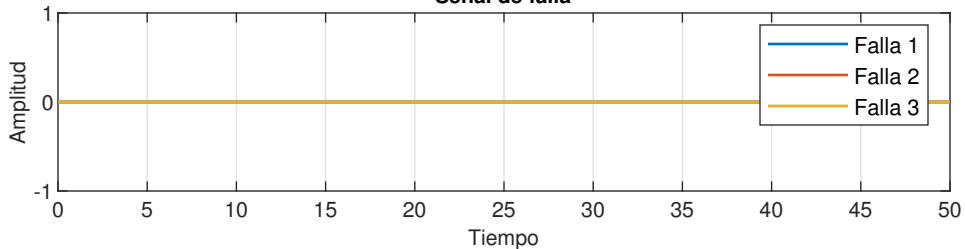
## Señal de falla



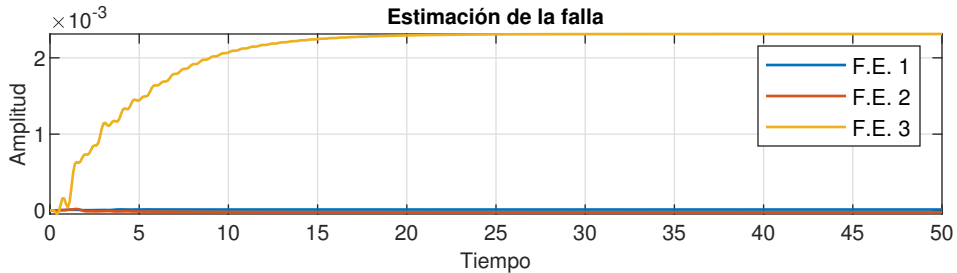
## Estimación de la falla



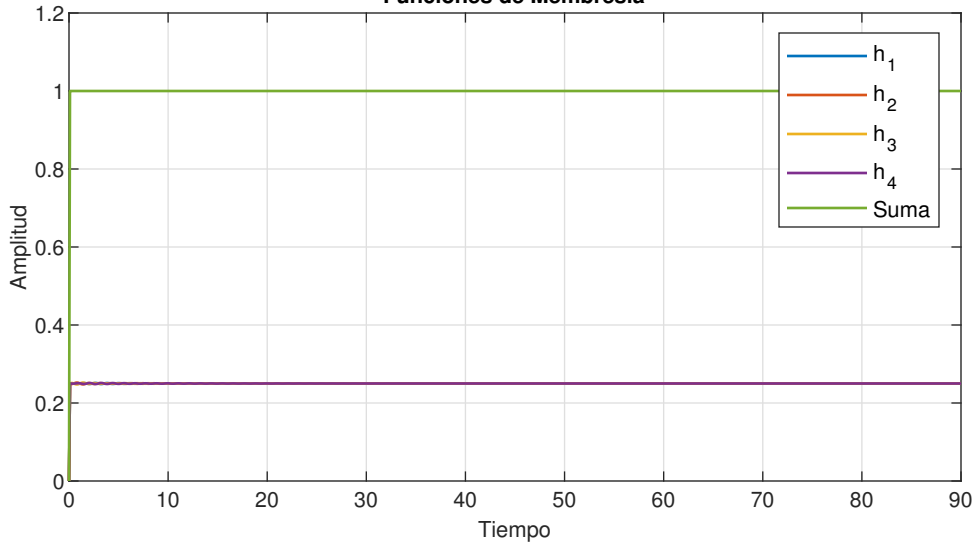
### Señal de falla



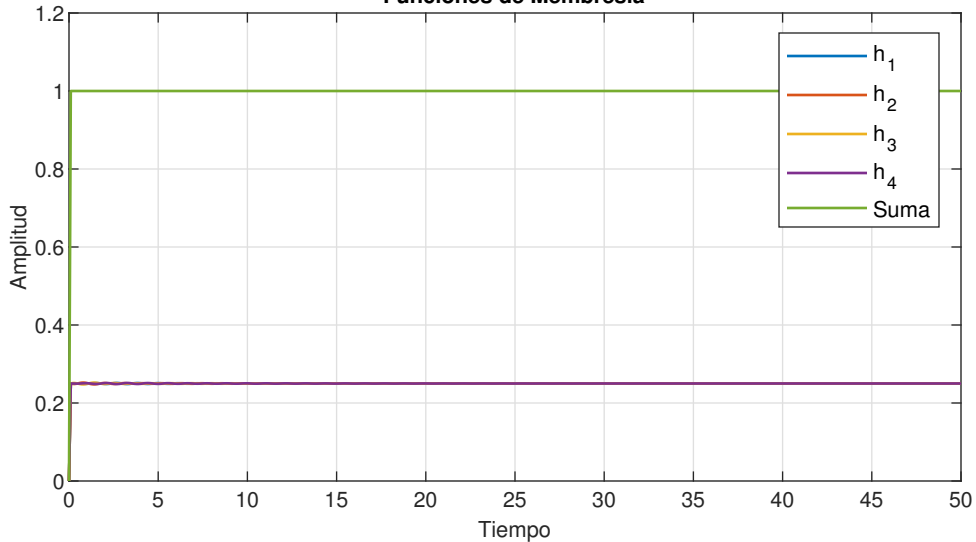
### Estimación de la falla



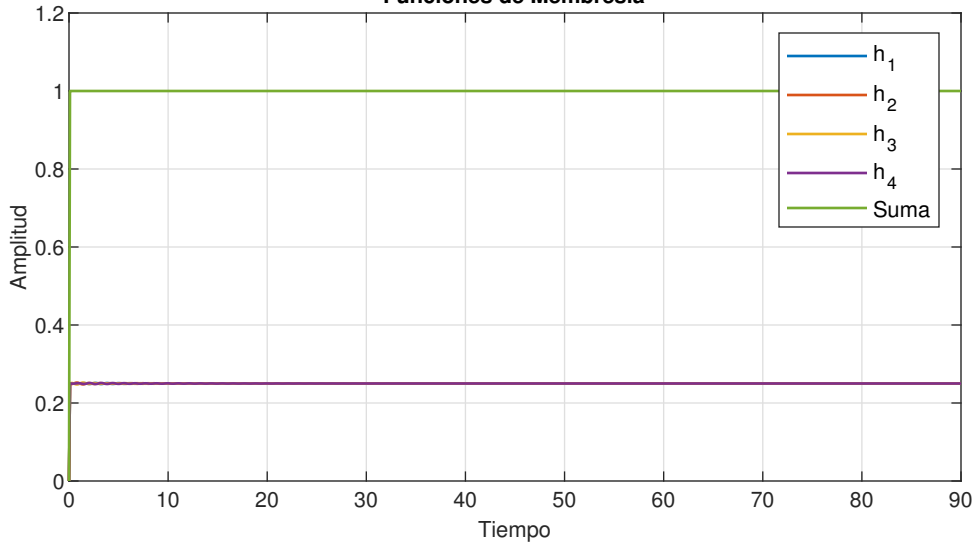
# Funciones de Membresía

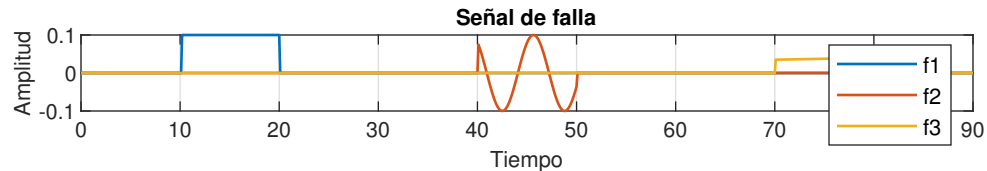
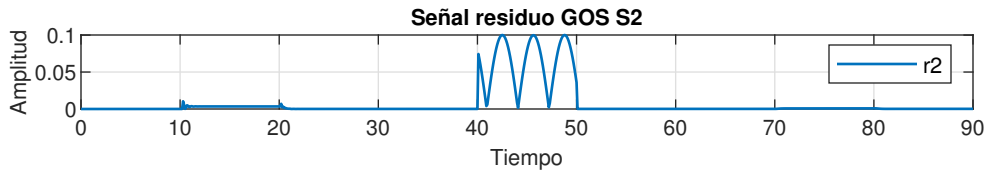
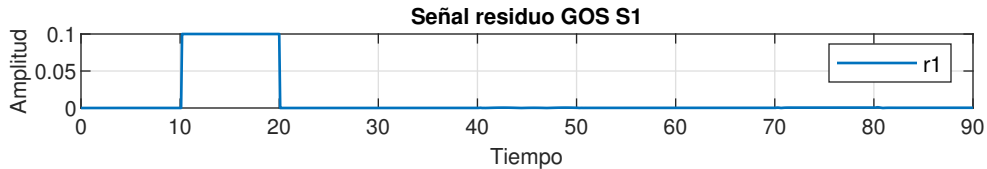


## Funciones de Membresía

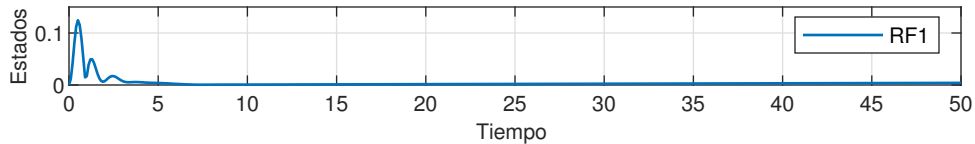


## Funciones de Membresía

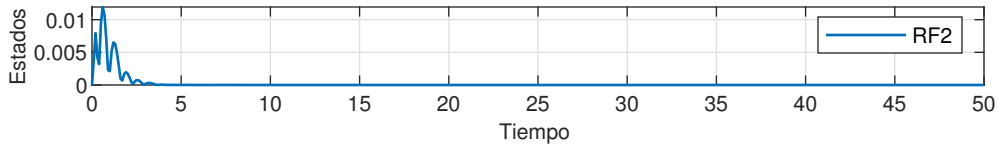




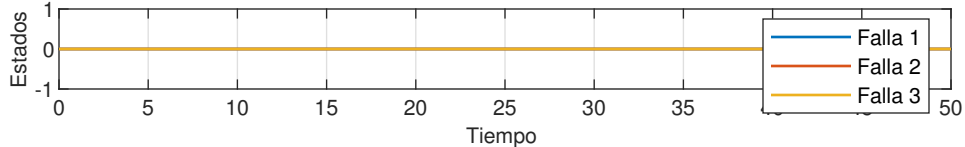
### Señal Residuo GOS 1



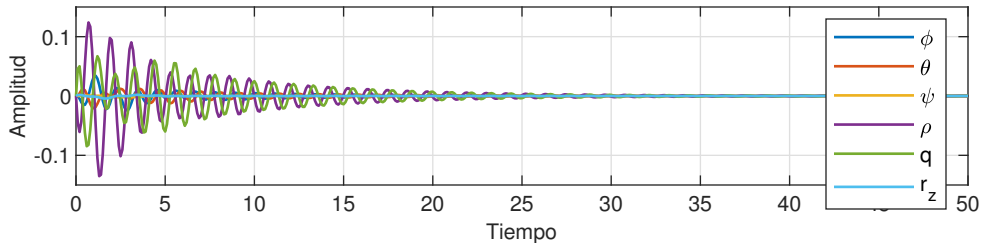
### Señal Residuo GOS 2



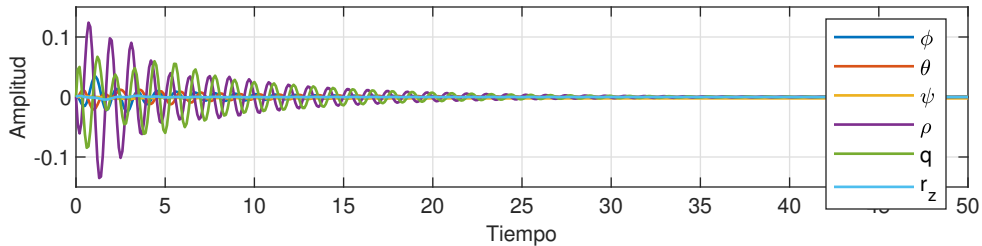
### Señales de falla



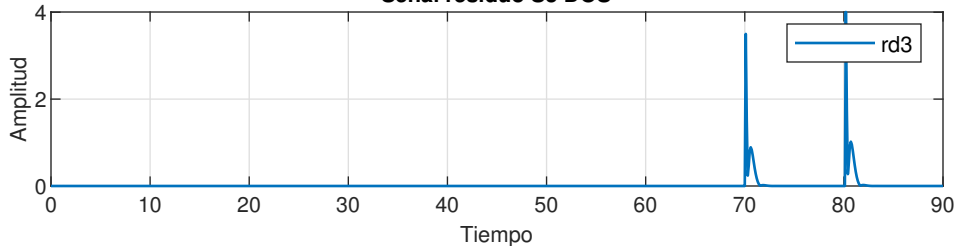
### Estados Reales



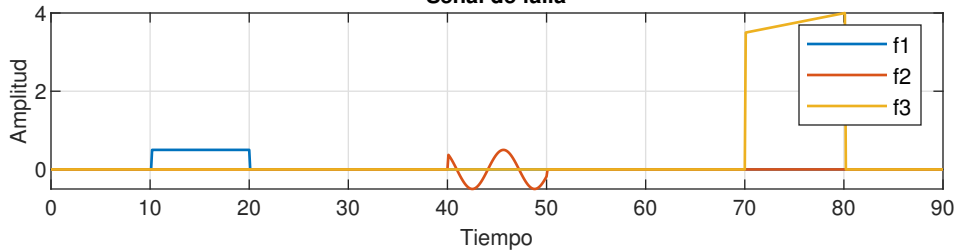
### Estados Estimados 4 submodelos

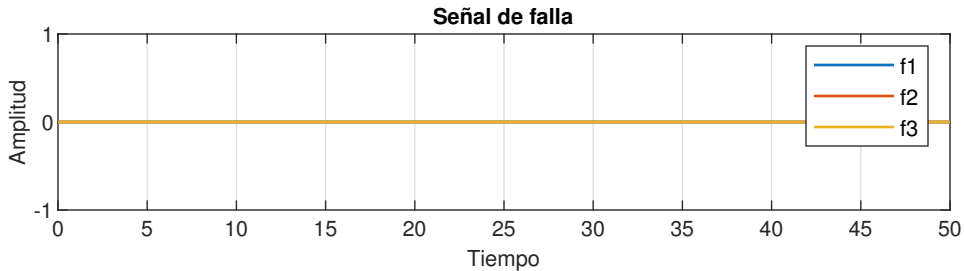
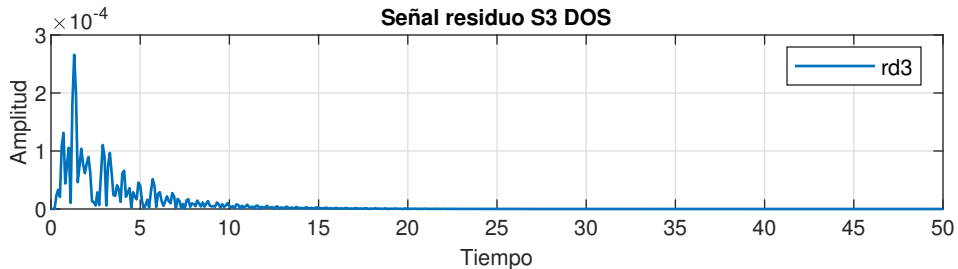


### Señal residuo S3 DOS

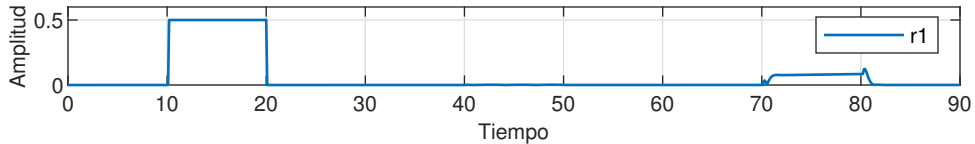


### Señal de falla

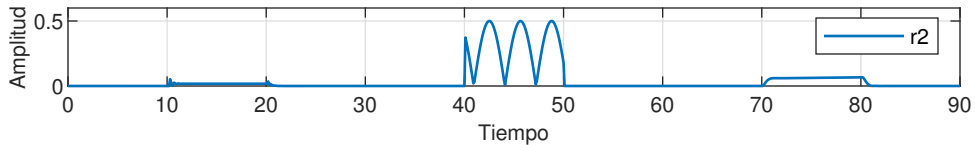




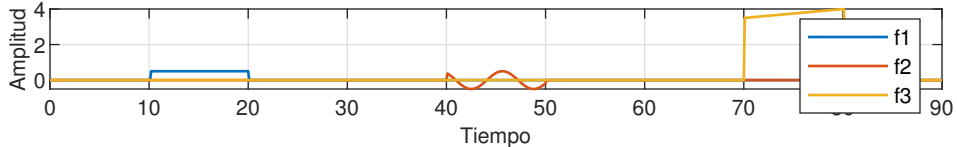
### Señal residuo GOS S1

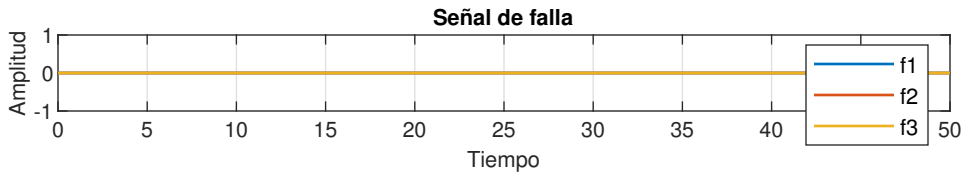
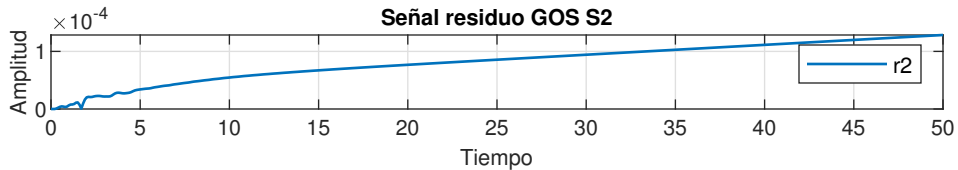
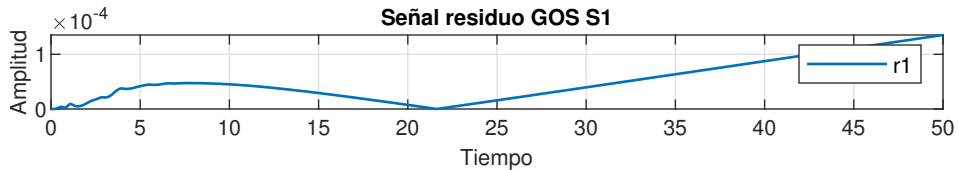


### Señal residuo GOS S2

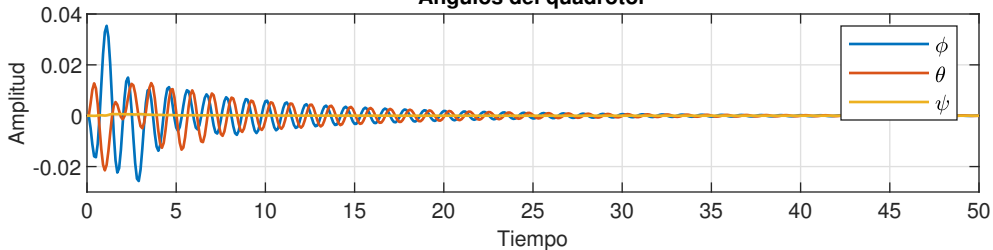


### Señal de falla

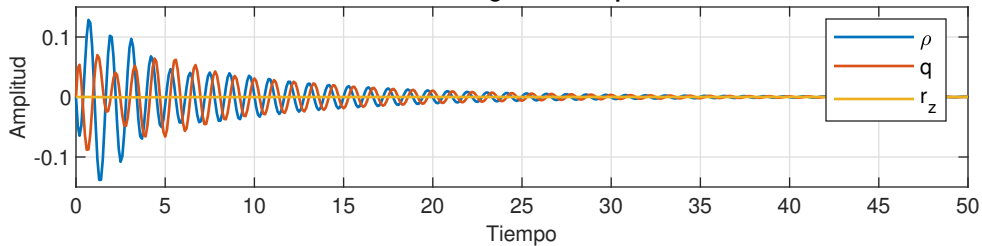




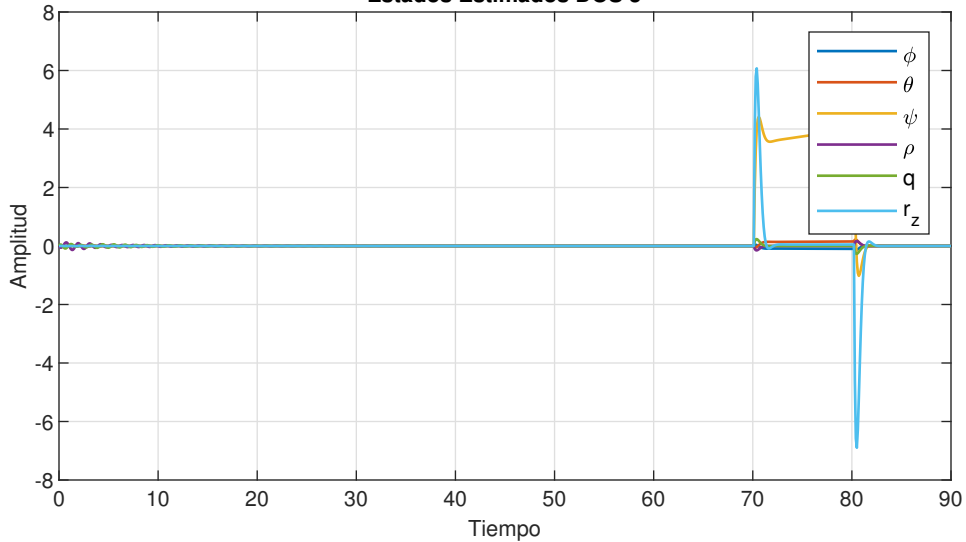
### Ángulos del quadrotor



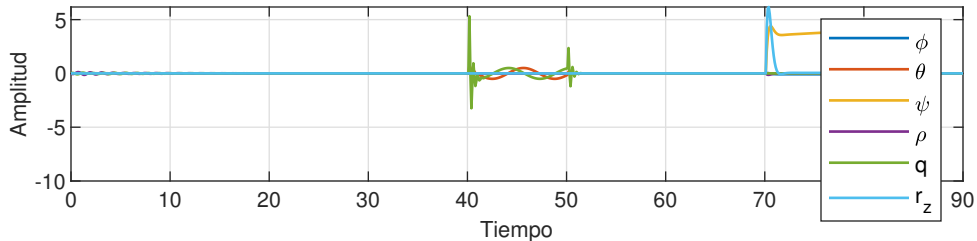
### Velocidades angulares del quadrotor



### Estados Estimados DOS 3



### Estados Estimados GOS 1



### Estados Estimados GOS 2

