



**UNIVERSIDAD MICHOCANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**“MODELADO DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSIÓN, DIRECCIÓN Y
TREN MOTRIZ DE UN AUTOMÓVIL Y SU RESPUESTA EN ESTADO
ESTACIONARIO EN BOND GRAPH”**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

PRESENTA

JORGE ALBERTO MADRIGAL SALAS

DIRECTOR DE TESIS

DR. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

AGOSTO 2011



Resumen

Este trabajo de investigación propone un procedimiento para determinar la respuesta de estado estacionario de un automóvil. El modelo matemático de un automóvil es una clase de sistema no lineal.

El modelo del automóvil utilizado en este trabajo, consta únicamente de los elementos que conforman el tren motriz, la dirección (no se hace distinción entre la mecánica o la hidráulica porque no se toma en cuenta el modelado de flúidos), el cuerpo del automóvil (chasis), las suspensiones y los neumáticos.

Para encontrar una solución al problema propuesto es presentado un procedimiento para construir un modelo de Bond Graph de un automóvil en tres dimensiones (3D). Bond Graph es una teoría de modelado altamente estructurada que permite analizar diferentes tipos de sistemas físicos en una forma única. Además, el procedimiento propuesto para obtener el modelo de Bond Graph de un automóvil en 3D está basado en el procedimiento utilizado en [Silva, 2007] y en [Boer, 2002] donde se utilizan los bond graphs de giro.

Los bond graphs de giro son aquellos que permiten hacer un cambio de coordenadas de dos dimensiones a tres dimensiones, lo cual puede describir la posición y orientación de un cuerpo respecto a un punto de referencia en un espacio de tres dimensiones.

El principal resultado de esta tesis es un procedimiento para obtener el estado estacionario de las variables de estado de un automóvil basado en un modelo de Bond Graph en una asignación de Causalidad Derivativa (BGD) de los elementos de almacenamiento del sistema. El BGD no tiene significado físico, pero la teoría de Bond Graph puede dar información importante del sistema, por ejemplo, las propiedades de observabilidad y controlabilidad del sistema.

Abstract

This research work proposes a procedure for determining the steady state response of a car. The mathematical model of an automobile is a class of non linear system.

The automobile's model in this work, consists only of the elements the powertain, direction (there is no distinction between mechanical or hidraulic because the fluids model are not in consideration), automobile body (chasis), suspensions and tires.

In order to find a solution to the proposed problem a procedure for building a Bond Graph model of a car in 3D is presented. Bond Graph is a highly structured modeling technique that allows analyzing different kinds of physical systems in a unique way. Also, the proposed procedure to obtain the Bond Graph model of a car 3D is based on the procedure used on [Silva, 2007] and [Boer, 2002], where screw bond graph are used.

Screw bond graphs are the ones that allows a coordinates change from two dimensions to three dimensions, which can describe the position and orientation of a relative to a point of reference in three dimensions space.

The main result of this thesis is a procedure to determine the steady state response of a car. The procedure is based on a Bond Graph model in a Derivative Causality (BGD) assignment of the storage elements of the system. The BGD does not have physical meaning, but the Bond Graph Theory can provide important information about the system, for example, the observability and controllability properties of the system.

Índice general

Resumen	v
Abstract	vii
Lista de figuras	xiii
Lista de símbolos	xvii
Publicaciones	xix
Agradecimientos	xxi
1 Introducción	1
1.1 Los sistemas de transporte	1
1.2 Modelado Clásico	2
1.2.1 Clasificaciones de los modelos	2
1.2.2 Fases de construcción de un modelo	3
1.3 Bond Graph aplicado a automóviles	4
1.4 Objetivo General	5
1.4.1 Objetivos particulares	5
1.5 Justificación	5
1.6 Estado del arte	6
1.7 Estructura de la tesis	8
2 Modelado de un Automóvil Integral y Bond Graph	11
2.1 Introducción	11
2.2 Introducción a Bond Graph	13
2.3 La Causalidad en un Bond Graph	15
2.4 Elementos de Bond Graph	16
2.4.1 Fuentes	16
2.4.2 Disipadores	16
2.4.3 Almacenadores	17

2.4.4	Transformadores	18
2.4.5	Giradores	19
2.4.6	Puertos de unión	19
2.4.7	Detectores	20
2.5	El modelado de sistemas en Bond Graph	21
2.5.1	Procedimiento para la construcción de modelos en Bond Graph	21
2.5.2	Sistemas eléctricos	22
2.5.3	Sistemas Mecánicos	24
2.5.4	Sistemas Hidráulicos	25
2.6	Estructura de unión en sistemas multipuerto	27
2.6.1	Vectores clave	27
2.6.2	Relaciones de campo y ecuaciones de estado	28
2.6.3	Obtención de un modelo en espacio de estado en Bond Graph	30
2.7	Sistemas multi-cuerpo	35
3	Modelado de un Sistema de Automóvil en Bond Graph	45
3.1	Introducción	45
3.2	Introducción a las suspensiones	46
3.3	Introducción a los sistemas de dirección automotriz	50
3.3.1	Tipos de dirección	51
3.4	Introducción al tren motriz	52
3.5	Sistemas Mecánicos en Bond Graph	54
3.6	Movimiento en dos dimensiones en Bond Graph	54
3.7	Movimiento en tres dimensiones en Bond Graph	57
3.8	Modelado Clásico de Automóviles	59
3.8.1	El cuerpo del automóvil	59
3.8.2	Neumático y eje	60
3.8.3	La suspensión	60
3.8.4	Dirección	63
3.9	Modelo de un cuarto de auto en bond graph	64
3.10	Modelo de un cuarto de auto con suspensión pasiva en bond graph	65
3.11	Modelo de cuarto de auto con suspensión semiactiva en bond graph	65
3.12	Modelo de un cuarto de auto con suspensión activa en bond graph	66
3.13	Modelado equivalente en Bond Graph	69
3.13.1	Modelo de un cuarto de auto	69
3.13.2	Modelo de medio auto	72
3.13.3	Modelo de auto completo	74
3.13.4	El anillo de Euler	74
4	Respuesta en Estado Estacionario de un Automóvil en Bond Graph	85
4.1	Introducción	85
4.2	Estado Estacionario para sistemas modelados en Bond Graph con variables de estado linealmente independientes	85

4.3	Suspensión Pasiva	88
4.4	Estado estacionario a partir de la dinámica obtenida de su Bond Graph con elementos linealmente dependientes	93
4.5	Validación de suspensión pasiva	95
4.6	Suspensión Activa	99
4.7	Estado Estacionario del Modelo integral de auto completo en 3D	110
4.7.1	Suspensión pasiva	110
4.7.2	Suspensión activa	120
5	Conclusiones y Trabajos Futuros	135
5.1	Conclusiones	135
5.2	Trabajos Futuros	136
	Bibliografía	137

Lista de figuras

2.1	Flujo y esfuerzo en un bond	13
2.2	Bond y multi-bond	14
2.3	Relación de elementos en modelado físico	15
2.4	Fuente de Esfuerzo	16
2.5	Fuente de Flujo	16
2.6	Elemento tipo -R	17
2.7	Elemento tipo -I	18
2.8	Elemento tipo -C	18
2.9	Elemento Transformador	18
2.10	Elemento Girador	19
2.11	Unión tipo -0	20
2.12	Unión tipo -1	20
2.13	Elementos detectores	21
2.14	Regla para reducir un bond	22
2.15	Ejemplo de sistema Eléctrico	23
2.16	Bond Graph de sistema eléctrico	23
2.17	Reducción de Bond Graph	23
2.18	Ejemplo de sistema mecánico	24
2.19	Bond Graph sistema mecánico	25
2.20	Reducción de Bond Graph	25
2.21	Ejemplo de sistema hidráulico	26
2.22	Bond Graph de sistema hidráulico	26
2.23	Simplificación de Bond Graph	27
2.24	Vectores clave de un Bond Graph	28
2.25	Suspensión de un auto	30
2.26	Numeración de bonds en la suspensión	31
2.27	Péndulo invertido	37
2.28	Restricciones en un sistema multicuerpo	38
2.29	Bond graph de un transformador multipuerto modulado de desplazamiento	39
2.30	Bond graph del péndulo invertido en un carretón	41
2.31	Doble péndulo invertido	42

2.32	Bond graph del doble péndulo invertido	44
3.1	Suspensión tipo ballesta	46
3.2	Amortiguador hidráulico tipo telescópico	46
3.3	Esquema de suspensión pasiva	47
3.4	Esquema de suspensión Adaptativa	49
3.5	Esquema de suspensión activa y semiactiva	49
3.6	Magnetización del fluido en suspensiones magnetorrológicas	50
3.7	Elementos que conforman el tren motriz	53
3.8	Barra rígida	54
3.9	Bond graph de la barra rígida	55
3.10	Los distintos movimientos en el cuadro fijo del vehiculo	59
3.11	Representación en 3D de un neumático y eje	60
3.12	Algunos tipos de suspensiones	61
3.13	Modelo de una suspensión	62
3.14	Componentes de la dirección de un automóvil	64
3.15	Modelo de un cuarto de automóvil	65
3.16	Modelo de suspensión semiactiva	66
3.17	Modelo de suspensión activa	68
3.18	Esquema mecánico de una servo-válvula	68
3.19	Cuarto de auto con suspensión pasiva	70
3.20	Cuarto de auto con suspensión activa	71
3.21	Medio auto con suspensión pasiva	72
3.22	Medio auto con suspensión activa	73
3.23	Anillos de Euler para fuerzas y torques	75
3.24	Modelo completo del auto	77
3.25	Acople anillos de euler cuerpo automovil	78
3.26	Auto completo con suspensión pasiva	79
3.27	Auto completo con suspensión activa	80
3.28	Modelo de auto completo con dirección	81
3.29	Modelo de auto completo con tren motriz y dirección	82
4.1	Bond graph integral de la configuración de medio auto con suspensión pasiva	89
4.2	Bond graph derivativo de la configuración de medio auto con suspensión pasiva	90
4.3	Resultados simulación suspensión pasiva	92
4.4	Estructura unión de un BGD	93
4.5	Modelo de medio automóvil	96
4.6	Respuesta de los estados en medio auto con suspensión pasiva	98
4.7	Respuesta obtenida en [Wu, 2004]	98
4.8	Esquema de suspensión activa	99
4.9	BGI de configuración de medio auto con suspensión activa	100
4.10	Relaciones entre el BGI y el BGD para las matrices A y A*	105
4.11	BGD de la configuración de medio auto con suspensión activa	106

4.12 Resultados con suspensión activa	110
4.13 Modelo de automóvil en 3D con suspensión pasiva	111
4.14 Respuesta de estado estacionario del auto completo con suspensión pasiva . .	119
4.15 Modelo de automóvil en 3D con suspensión activa	121
4.16 Comparación de respuestas de estado estacionario del auto completo con sus- pensión activa con 20 Sim y ecuaciones matemáticas	133

Lista de símbolos

$e(t)$	Variable de esfuerzo
$f(t)$	Variable de flujo
$p(t)$	Variable de momento
$q(t)$	Variable de desplazamiento
$-R$	Elemento resistencia
$-C$	Elemento capacitor
$-I$	Elemento inercia
$-TF-$	Elemento transformador
$-GY-$	Elemento girador
-0	Unión cero
-1	Unión uno
S_e-	Fuente de esfuerzo
S_f-	Fuente de flujo
$u(t)$	Vector de entrada del sistema
$y(t)$	Vector de salida del sistema
$x(t)$	Vector de estados asociado a elementos en causalidad integral
$z(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad integral
$x_d(t)$	Vector de estados asociado a elementos en causalidad derivativa
$z_d(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad derivativa
A, B, C, D	Matrices de estado
x_{ss}	Variabes de estado en estado estacionario
y_{ss}	Ssalidas en estado estacionario
x_i^i	Variabes de estado con causalidad integral en el Bond Graph integral
x_d^i	Variabes de estado con causalidad derivativa en el Bond Graph derivativo

x_d^i	Variables de estado con causalidad integral en el Bond Graph derivativo
x_d^d	Variables de estado con causalidad derivativa en el Bond Graph derivativo
$x_{i \rightleftarrows d}^i$	Variables de estado con causalidad integral en el Bond Graph interal que cambian a causalidad derivativa en el Bond Graph derivativo
$x_i^{i \rightleftarrows d}$	Variables de estado con causalidad integral en el Bond Graph integral que mantienen la causalidad integral en el Bond Graph derivativo
$x_d^{i \rightleftarrows d}$	Variables de estado con causalidad derivativa en el Bond Graph integral que mantienen la causalidad derivativa en el Bond Graph derivativo

Publicaciones

Publicación asociada con este trabajo de investigación

- Gilberto González-A, Jorge Madrigal, “*Steady State of Passive and Active Suspensions in the Physical Domain*”, International Conference on Electrical, Computer, Information & Communication Engineering ICECICE’10 que se llevó a cabo del 27 al 29 de octubre del 2010, en la ciudad de París, Francia.

Agradecimientos

A mis padres Rogelio Madrigal y Rosa Nelly Salas, por su apoyo durante todo este tiempo, a mis hermanos por sus consejos, a mis amigos por estar siempre cuando los necesitaba.

A mi asesor, el Dr. Gilberto González Avalos cuyas enseñanzas y consejos no sólo me fueron útiles en el posgrado y la realización de esta tesis.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, a la División de Estudios de Posgrad de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y al CONACYT por el apoyo económico proporcionado, gracias al cual la realización de esta tesis fue posible.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Los sistemas de transporte

A través del paso de los años, los automóviles han sido de gran ayuda para desplazarse a lugares distantes por vía terrestre. Los primeros vehículos eran máquinas enormes que se desplazaban lentamente (no más de 20 km/h), pero con los avances en las tecnologías mecánicas esto cambió de un modo drástico, llevando con ello a desarrollar sistemas para aumentar el confort y sistemas de seguridad [Burkett, 1999].

En la parte de la seguridad se realizan investigaciones en los campos de los cinturones de seguridad, las bolsas de aire, sistemas de frenado (Sistema de Frenado Antibloqueo o ABS por sus siglas en inglés, Sistema Electrónico de Seguridad o ESP por sus siglas en inglés, entre otros); mientras que en la parte que une a la seguridad con el confort se realizan investigaciones en el área de las suspensiones.

La suspensión de un vehículo tiene como objetivo "absorber" las desigualdades del terreno sobre el que se desplaza, a la vez que mantiene las ruedas en contacto con el pavimento, proporcionando un adecuado nivel de confort y seguridad de marcha.

El tren motriz es la parte del automóvil conformada por el motor, transmisión, barra estabilizadora, barra de dirección y otras partes que intervienen en el desplazamiento del automóvil, y éste ha aumentado en sus componentes con el paso del tiempo con la finalidad

de aumentar la eficiencia del consumo de combustible .

La dirección no ha cambiado mucho con el paso del tiempo, sólo se han modificado algunos componentes de la misma para hacer más "suave" el manejo al cambiar de sistemas mecánicos a hidráulicos y posteriormente a electrónicos [Oh, 2004].

Estos componentes, agroso modo, son los principales dentro del diseño de un automóvil, por lo que han sido los más estudiados y se ha innovado en un grado mayor, ya que son las partes principales de este sistema en el área de seguridad y confort para los pasajeros.

1.2 Modelado Clásico

En ciencias aplicadas, un modelo matemático es uno de los tipos de modelos científicos, que emplea algún tipo de formulismo matemático para expresar relaciones, proposiciones sustantivas de hechos, variables, parámetros, entidades y relaciones entre variables y/o entidades u operaciones, para estudiar comportamientos de sistemas complejos ante situaciones difíciles de observar en la realidad. El término modelización matemática es utilizada también en diseño gráfico cuando se habla de modelos geométricos de los objetos en dos (2D) o tres dimensiones (3D) [Drozdz, 1991].

El significado de modelo matemático en matemática fundamental, sin embargo, es algo diferente. En concreto en matemáticas se trabajan con modelos formales. La rama de la matemática que se encarga de estudiar sistemáticamente las propiedades de los modelos es la teoría de modelos [Ríos, 1995].

1.2.1 Clasificaciones de los modelos

Se podría decir que un modelo de las ciencias físicas es una traducción de la realidad física de un sistema en términos matemáticos, es decir, una forma de representar cada uno de los tipos entidades que intervienen en un cierto proceso físico mediante objetos matemáticos. Las relaciones matemáticas formales entre los objetos del modelo, deben representar de alguna manera las relaciones reales existentes entre las diferentes entidades o aspectos del sistema u objeto real. Así una vez "traducido" o "representado" cierto problema en forma de modelo

matemático, se pueden aplicar el cálculo, el álgebra y otras herramientas matemáticas para deducir el comportamiento del sistema bajo estudio. Un modelo físico requerirá por tanto que se pueda seguir el camino inverso al modelado, permitiendo reinterpretar en la realidad las predicciones del modelo.

Los modelos por lo tanto, pueden ser clasificados según la información de entrada, que a su vez puede distinguirse respecto a la función de origen en modelos heurísticos o modelos empíricos; según el tipo de representación, que se pueden clasificar en modelos cualitativos o conceptuales y modelos cuantitativos o numéricos si se pretende hacer predicciones de tipo cualitativo o si se pretende cuantificar aspectos del sistema; según la aleatoriedad, depende si una entrada puede corresponder o no a varias salidas se clasifica en determinista o estocástico; según su aplicación u objetivo, donde se puede dividir su clasificación por su uso en modelo de simulación o descriptivo, modelo de optimización o modelo de control [Ríos, 1995].

1.2.2 Fases de construcción de un modelo

En muchos casos la construcción o creación de modelos matemáticos útiles sigue una serie de fases bien determinadas:

a) Identificación de un problema o situación compleja que necesita ser simulada, optimizada o controlada y por tanto requeriría un modelo matemático predictivo.

b) Elección del tipo de modelo, esto requiere precisar qué tipo de respuesta pretende obtenerse, cuales son los datos de entrada o factores relevantes, y para qué pretende usarse el modelo. Esta elección debe ser suficientemente simple como para permitir un tratamiento matemático asequible con los recursos disponibles. Esta fase requiere además identificar el mayor número de datos fidedignos, rotular y clasificar las incógnitas (variables independientes y dependientes) y establecer consideraciones, físicas, químicas, geométricas, etc. que representen adecuadamente el fenómeno en estudio.

c) Formalización del modelo en la que se detallarán qué forma tienen los datos de entrada, qué tipo de herramienta matemática se usará, como se adaptan a la información previa existente. También podría incluir la confección de algoritmos, ensamblaje de archivos infor-

máticos, etc. En esta fase posiblemente se introduzcan también simplificaciones suficientes para que el problema matemático de modelización sea tratable computacionalmente.

d) Comparación de resultados los resultados obtenidos como predicciones necesitan ser comparados con los hechos observados para ver si el modelo está prediciendo bien. Si los resultados no se ajustan bien, frecuentemente se vuelve a la fase a.

1.3 Bond Graph aplicado a automóviles

El comportamiento dinámico de los vehículos terrestres es sumamente complejo debido a la gran cantidad de variables involucradas, al acoplamiento de las mismas, a las no linealidades y fundamentalmente al factor humano. Para su estudio suelen utilizarse modelos computacionales basados en diferentes aproximaciones que intentan predecir el comportamiento de las diferentes partes del vehículo de la manera más realista posible de acuerdo a cuan extenso sea el sistema en estudio. Muchos estudios excluyen al conductor del análisis para evitar complejidades muy difíciles de tratar, como son [Kruczek, 2004], [Silva, 2007], [Boer, 2002], [Filippini, 2007] por citar algunos ejemplos, no obstante el análisis del sistema completo requiere analizar una gran cantidad de subsistemas en general altamente acoplados.

La interacción con el suelo, las cargas aerodinámicas y los dispositivos de maniobras y control suelen ser los principales efectos a tener en cuenta en la simulación. Todos estos efectos introducen movimientos importantes en las tres dimensiones produciendo una importante alteración en la respuesta del vehículo respecto a su configuración de partida.

Todo esto se analiza utilizando la ampliamente difundida teoría de sistemas multicuerpos (multibody systems), la cual será descrita más adelante.

La técnica de modelado utilizada en este trabajo es la de diagramas de enlaces o Bond Graph (BG) que se adapta muy bien a todos los requerimientos de esta aplicación e incluso tiene algunas propiedades muy atractivas como su alta extensibilidad por ser orientado a objetos, la facilidad para desarrollar aplicaciones por su natural sentido físico y un amigable ambiente de entrada de datos mediante interfaces gráficas.

1.4 Objetivo General

El objetivo general del presente trabajo de investigación es modelar y analizar un sistema automotriz en el dominio físico (Bond Graph). El modelo a obtener, es la unión de los sistemas de dirección, el tren motriz, el cuerpo del auto y las suspensiones con neumáticos. A partir de este modelo en Bond Graph determinar el estado estacionario del sistema.

1.4.1 Objetivos particulares

- Dado un sistema automotriz (un automóvil) obtener un modelo en el dominio físico (Bond Graph), siguiendo los pasos que se mencionan a continuación:
 - i)* Proponer una metodología para determinar el modelo en Bond Graph.
 - ii)* Determinar la estructura unión del modelo en Bond Graph del sistema.
 - iii)* Obtener el modelo matemático del sistema.
- Analizar el comportamiento de sistemas que presenten elementos que mantengan su causalidad asignada sin cambios al momento de cambiar la causalidad del sistema en Bond Graph.
- Obtener el estado estacionario de un automóvil en Bond Graph.

1.5 Justificación

Con el paso del tiempo, el énfasis en el diseño se ha extendido hacia la pura funcionalidad y aspectos técnicos como la estética y originalidad, este proyecto se enfoca sobre el comportamiento físico del automóvil y la posible aplicación de un control sobre el mismo.

El modelado de sistemas con Bond Graph está siendo utilizado en muchas áreas de la ingeniería. En la rama automotriz, se pretende aprovechar la característica principal del bond Graph, la cual es unificar en un marco de referencia distintos tipos de energía, ya que en los automoviles se tienen componentes mecánicos, eléctricos, hidráulicos y térmicos.

Dentro de los distintos casos de estudio del estado estacionario de las distintas partes del automóvil que se han realizado, es poco común encontrar alguna referencia en la que se trabaje en un modelo tan complejo como lo es el auto en tres dimensiones con las características mencionadas, ya que es algo complicado y requiere de un tiempo extenso en su estudio dentro del campo del modelado clásico, lo cuál no sucede en el área del modelado de Bond Graph.

Además, con el uso de las herramientas que proporciona en el modelado con Bond Graph, se pueden agregar o separar subsistemas dentro de un modelo y con ello observar un comportamiento más completo o el comportamiento en particular de cada parte del sistema.

La determinación de la respuesta en estado estacionario presenta una clara ventaja mediante la obtención del bond graph en causalidad derivativa de sus elementos de almacenamiento.

1.6 Estado del arte

En esta sección se enuncian importantes trabajos relacionados con este trabajo de tesis. En primer lugar, un Bond Graph es una representación abstracta de un sistema, donde varios componentes interactúan entre ellos por medio de puertos de energía y son colocados en un sistema donde existen intercambio de energía [Karnopp, 2000].

Actualmente, se han publicado un buen número de libros de la metodología de modelado de sistemas en Bond Graph, entre los cuales se tiene [Karnopp, 2000], [Dauphin-Tanguy, 2000], [Thoma, 2000] y [Mukherjee, 2006].

Los sistemas automotrices pueden ser modelados en Bond Graphs con el uso de multibond graphs y con ello representar algunas no linealidades [Tiernego, 1985].

En [Drozdz, 1991] se demostró que las ecuaciones de Newton-Euler pueden modelar un automovil en 3D utilizando transformadores y giradores modulados en Bond Graph.

En [Abadie, 1996] se mencionan las uniones requeridas en la construcción de sistemas mecatrónicos, entre ellos, los sistemas automotrices. Así mismo, los modelos en Bond Graph de algunas no linealidades en sistemas mecánicos e hidráulicos presentes en la rama auto-

motriz.

En [Filippini, 2000] se desarrolla una librería basada en multibond graphs para sistemas multicuerpo dirigida a una representación precisa de rotaciones en coordenadas xyz.

En [Mera, 2000] se utiliza el modelado en Bond Graph para representar las dinámicas mecánicas de un automovil usando transformadores y giradores para relacionar las distintas partes del automóvil, como con el motor, el eje, el diferencial y las suspensiones. Además, se da un ejemplo del sistema y su respectiva simulación.

En general los sistemas mecánicos y un caso particular, los sistemas automotrices pueden ser modelados en Bond Graph utilizando transformadores multipuerto modulados, es decir, transformadores con más de una entrada y salida; cuyo módulo es una señal activa del modelo [Karnopp, 2000].

En [Sheng, 2007] se presenta un sistema mecánico complejo modelado en Bond Graph, el cual tiene una naturaleza interdisciplinaria, es decir, tiene dominios de energía eléctrica y mecánica. El modelo en Bond Graph es desarrollado a partir del Lagrangiano e implementado en el paquete de computadora 20-Sim[®].

En [Gawthrop, 2007] se presentan las bases para modelar sistemas mecánicos en Bond Graph, desde los elementos básicos hasta los transformadores modulados.

El estado del arte para este trabajo de tesis se puede dividir en dos partes: el modelado de suspensiones y cuerpo de un auto en Bond Graph y la determinación de la respuesta en estado estacionario de un sistema en Bond Graph.

En el modelado de suspensiones y cuerpo de un auto utilizando la teoría de Bond Graph se tienen varios artículos publicados. Sin embargo, es importante mencionar que la teoría de la dinámica de sistemas multicuerpo ha sido implementada en términos de Bond Graph con el propósito de modelar suspensiones y el cuerpo de un auto.

Por otra parte, el estado estacionario de un sistema es una respuesta útil para conocer el desempeño final de las variables de estado de un sistema representado en espacio de estado. Por ejemplo, la velocidad nominal de un motor, la corriente de carga de un sistema o la posición final del cuerpo de un automóvil. En estos casos, cuando el periodo transitorio ha desaparecido.

En un sistema lineal invariante en el tiempo la condición de estado estacionario puede ser formulada en términos de la ecuación de estado del sistema, $\dot{x} = A_p x + B_p u$ donde x son las variables de estado, \dot{x} es la derivada de las variables de estado, u son las entradas, A_p es la matriz de estado y B_p es la matriz de entradas u . Haciendo $\dot{x} = 0$, el estado estacionario es $x_{ss} = -A_p^{-1} B_p u_{ss}$, donde x_{ss} y u_{ss} son las variables de estado y las entradas en estado estacionario.

En [Breedveld, 1984] se propone un algoritmo para determinar por inspección directa en Bond Graph el estado estacionario de un sistema.

Finalmente en [González, 2003] se propone la determinación directa simbólica de la respuesta en estado estacionario de un sistema lineal invariante en el tiempo mediante la asignación en causalidad derivativa de los elementos que almacenan energía en Bond Graph.

El estudio realizado en [Silva, 2007] se analizó el modelo de un auto en 3D con suspensión pasiva solamente, haciendo uso de la unión de los anillos de Euler para modelar los movimientos de rotación y traslación del cuerpo del automóvil, lo cuál proporciona un punto de partida para esta tesis.

De este modo, la presente tesis se encuentra ubicada en el estudio posterior de [Silva, 2007]. Se pretende hacer una aportación al estudio del comportamiento del automóvil, más específicamente el estado estacionario, llevando el estudio de este sistema un paso más adelante al agregar otros subsistemas al modelo final, como son la dirección, el tren motriz y la suspensión activa.

1.7 Estructura de la tesis

La presente tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

El Capítulo 2 contiene los antecedentes y los elementos necesarios para modelar sistemas en Bond Graph y una descripción detallada de los transformadores multipuerto modulados. También, se describen los procedimientos para construir modelos de sistemas mecánicos, eléctricos e hidráulicos así como un ejemplo de cada uno de ellos. Se incluye un ejemplo completo (mecánico) de la obtención de su modelo matemático.

En el Capítulo 3 se da una introducción a los sistemas automotrices y el modo en que se trabaja en bond graph con estos sistemas.

En el Capítulo 4 se muestra el desarrollo del modelado de las suspensiones pasiva y activa, tanto en la configuración de tipo bicicleta como en la configuración de auto completo en 3D.

Por último, en el Capítulo 5, se presentan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Modelado de un Automóvil Integral y Bond Graph

2.1 Introducción

Muchas investigaciones han sido realizadas en los campos de las bolsas de aire, cinturones de seguridad y estructuras disipadoras de energía en orden de incrementar la seguridad. Sistemas activos de manejo influyen sobre la potencia y distribución del frenado en los neumáticos, como el ABS (Anti-lock Braking System) y ESP (Electronic Stability Program) proporcionando al usuario mayor seguridad.

Sin embargo, una mayor comodidad es alcanzada con sistemas como las suspensiones activas, sillones adaptables, reducción de ruidos en la cabina y una variedad de características electrónicas controladas remotamente, por ejemplo, cristales, espejos laterales y luces.

Un campo de investigación que cubra tanto comodidad como seguridad es la aproximación X-by-wire. La tecnología X-by-wire en la industria automotriz reemplaza los sistemas de control hidráulicos y mecánicos tradicionales con sistemas de control electrónicos utilizando actuadores electromecánicos e interfaces hombre-máquina como los pedales y emuladores de sensación de giro. Similar a los sistemas Y-by-wire en aeroplanos, la meta es reemplazar todas las funciones controladas mecánicamente o hidráulicamente de un auto por actuadores

electrónicos. Esto significa no más frenos hidráulicos, no más palancas mecánicas de gas, no más eje de dirección. El control eléctrico de estas funciones habilita sistemas de control aún más fundamentales [Boer, 2002].

Por lo tanto, el control de las suspensiones se realizará por medio de actuadores eléctricos, los cuales darán la rigidez o flexibilidad para tener tanto un trayecto más comodo como más seguro. En medio de todo, habrá una computadora que evaluará las condiciones del camino, acciones del usuario y actuará las suspensiones acorde a estas condiciones.

Un paso adelante, es la posibilidad de un acople mutuo de las cuatro suspensiones y actuarlas de modo independiente. Esto da la posibilidad de tener distintas tensiones en cada una de las suspensiones dependiendo de la velocidad y las situaciones de manejo. Una estrategia de control necesita ser desarrollada para este tipo de suspensiones independientes.

La meta consiste en desarrollar una infraestructura física de investigación con resultados dinámicos tales como la aproximación de dirección independiente en la estabilidad del manejo del automóvil. Esta investigación requiere un modelo multi-cuerpo, comprendiendo las principales características del automóvil.

Por supuesto existen varias herramientas de software disponibles enfocadas específicamente al diseño de automóviles [Car Design]. Muchas de ellas entran a la categoría de herramientas de diseño industrial (CAD) por diseño estructural o modelos matemáticos para descripciones físicas.

Para el diseño de bond graph se ha seleccionado 20-SIM[®]. Esta es una herramienta de modelado muy apta, ya que combina características poderosas de cálculos de modelado con características visuales muy útiles. Lo más destacable es el ambiente en DirectX 3D, permitiendo una muestra instantánea en 3D del modelo [Boer, 2002].

2.2 Introducción a Bond Graph

En la historia del diseño y análisis de sistemas complejos, la necesidad de modelos exactos de estos sistemas se ha incrementado. Modelos basados en flujos de energía han probado ser muy satisfactorios. Cuando se conectan dos sistemas, energía es intercambiada entre ellos. Los Bond graphs son un medio de describir una interconexión de sistemas en una base de flujo de energía, independiente del dominio físico del modelo. Ellos fueron introducidos por Henry Paynter [Paynter, 1961].

Un bond graph es una representación gráfica de un sistema físico. Es similar a los diagramas de bloques y a los grafos de flujo de señales. En esta metodología sólo son empleados tipos de variables (variables generalizadas de potencia), esfuerzo e y flujo f ilustrados en la Figura 2.1. Las energías potencial y cinética están relacionadas a través de desplazamiento generalizado q y momento generalizado p .

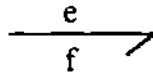


Figura 2.1: Flujo y esfuerzo en un bond

Para construir un modelo en bond graph se necesitan nueve elementos. Dichos elementos son descripciones idealizadas de fenómenos físicos y pertenecen a cinco relaciones principales de energía, los cuales son fuentes de energía (de esfuerzo S_e y de flujo S_f), elementos de disipación (resistencia R), elementos de almacenamiento (capacitancia C e inercia I), elementos transformadores de energía (transformador TF y girador GY) y las uniones (unión de flujo 0 y unión de esfuerzo 1).

La estructura básica de un bond graph se muestra en la Figura 2.2. Aquí la orientación positiva de la potencia está indicada por la dirección de una semiflecha llamada bond como se puede observar en la Figura 2.2, la cual va del sistema 1 al sistema 2 y del sistema 2 al sistema 3. En esta figura también se muestran los llamados multi-bonds. Este es un bond que transporta flujos de energía con más de una dimensión (por ejemplo, para el movimiento

simultáneo de dos ejes), el cual es mostrado en la unión del sistema 2 con el sistema 3.



Figura 2.2: Bond y multi-bond

Para cualquiera de los dominios físicos en el modelo, un bond está disponible, el cual consiste en una versión apropiada de estas dos variables. Así la potencia P , representada por el bond graph, puede ser representado por el producto de su esfuerzo e y su flujo f .

$$P = e \cdot f \tag{2.1}$$

En el dominio eléctrico el esfuerzo y el flujo son respectivamente *voltaje* V y *corriente* I . En el dominio mecánico pueden ser reconocidos como la *fuerza* F y la *velocidad* v en el caso de traslación, y como el *torque* T y *velocidad angular* w en caso de rotación como se aprecia en la Figura 2.3.

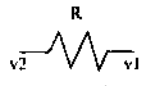
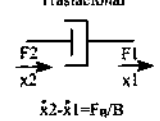

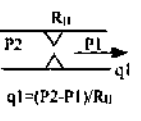
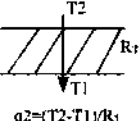
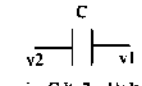
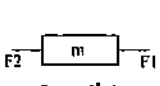
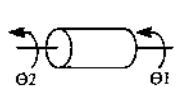

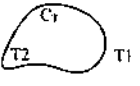
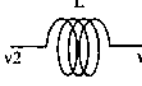
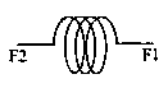
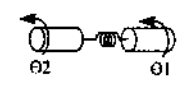
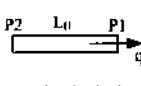
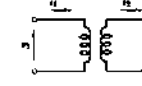
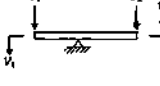

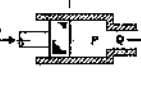
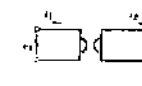
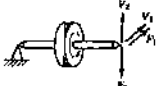
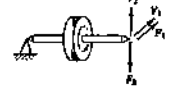
	Eléctrica	Mecánica		Hidráulica	Térmica
Resistencias	 $v_2 - v_1 = Ri$	Traslacional  $\dot{x}_2 - \dot{x}_1 = F_n/B$	Rotacional  $\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1 = T_n/B$	 $q_1 = (P_2 - P_1)/R_u$	 $q_2 = (T_2 - T_1)/R_t$
Capacitancias	 $ic = Cd(v_2 - v_1)/dt$	 $F_m = m\dot{x}/dt$	 $T_i = Jd\dot{\Theta}/dt$	 $q = C_{11}d(P_2 - P_1)/dt$	 $q = C_1 d(T_2 - T_1)/dt$
Inductancias	 $v_1 = L di/dt$	 $F_k = K(x_2 - x_1)$	 $T_k = K(\Theta_2 - \Theta_1)$	 $P_2 - P_1 = L_{11}dq/dt$	Sin interpretación física
Transformador					Sin interpretación física
Girador				Sin interpretación física	Sin interpretación física

Figura 2.3: Relación de elementos en modelado físico

2.3 La Causalidad en un Bond Graph

Como se puede ver en la Figura 2.2, la dirección del bond tiene un trazo pequeño añadido a ella. Este es llamado *trazo causal* e indica la dirección del esfuerzo en el bond. Así en la Figura 2.2, el esfuerzo es una entrada del sistema 2. El flujo siempre está dirigido en la dirección opuesta al esfuerzo, así en la Figura 2.2, el flujo es una salida del sistema 2.

En algunas ocasiones la causalidad puede ser seleccionada libremente, pero muchas veces un elemento tiene una causalidad preferida o incluso fija. Cuando se modela, estas restricciones tienen que estar bien consideradas. Descuidar estas restricciones puede resultar en resultados de simulación no deseados o la incapacidad de analizar el modelo.

2.4 Elementos de Bond Graph

Esta sección proporciona la descripción de los elementos usados en el modelado en bond graph y como deben de ser usados. Se puede distinguir entre *fuentes*, *disipadores*, *amplificadores*, *transformadores*, *giradores* y *uniones*.

2.4.1 Fuentes

Las fuentes son elementos generadores de potencia. Uno puede seleccionar una Fuente de Esfuerzo S_e ilustrada en la Figura 2.4 o una Fuente de Flujo S_f mostrada en la Figura 2.5. Otras posibilidades son las Fuentes Moduladas de Esfuerzo MS_e y las Fuentes Moduladas de Flujo MS_f . Estas fuentes tienen la posibilidad de ser controladas por una señal externa. La causalidad de estos elementos es fija, así que los elementos S_e y MS_e son salidas de esfuerzo y S_f y MS_f son salidas de flujo (o entradas de esfuerzo).

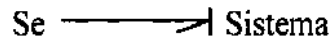


Figura 2.4: Fuente de Esfuerzo

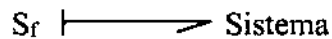


Figura 2.5: Fuente de Flujo

2.4.2 Disipadores

Los disipadores son elementos que disipan energía, en este caso, el elemento -R que se muestra en la Figura 2.6. El elemento -R puede ser usado para modelar resistencia o fricción. La causalidad del elemento -R es indiferente. El disipador puede tener tanto entrada de esfuerzo como entrada de flujo.

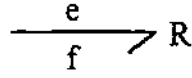


Figura 2.6: Elemento tipo -R

2.4.3 Almacenedores

Los almacenadores son elementos que pueden almacenar energía. Se pueden distinguir dos tipos distintos: elementos tipo -I, como se ilustra en la Figura 2.7, y elementos tipo -C, como se aprecia en la Figura 2.8. El elemento lineal tipo -I relaciona el flujo con la integral del esfuerzo p . La función de energía $E(q)$ del elemento tipo -I es:

$$E_I(p) = \frac{1}{2I}p^2 \quad \text{con} \quad p = \int e dt + p(0) \quad (2.2)$$

$$f = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{1}{I}p \quad (2.3)$$

[Karnopp, 2000]

El elemento lineal tipo -C por otro lado relaciona el esfuerzo con la integral del flujo q .

$$E_C(q) = \frac{1}{2C}q^2 \quad \text{con} \quad q = \int f dt + q(0) \quad (2.4)$$

$$e = \frac{\partial E}{\partial q} = \frac{1}{C}q \quad (2.5)$$

[Karnopp, 2000]

Su causalidad depende si las ecuaciones constitutivas usan una integración o una derivación para calcular el estado físico de la función de almacenamiento. La causalidad preferida siempre es tal que la integración sea usada.

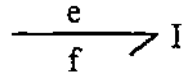


Figura 2.7: Elemento tipo -I

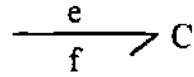


Figura 2.8: Elemento tipo -C

2.4.4 Transformadores

Los transformadores ideales son representados por un elemento -TF, el cual se muestra en la Figura 2.9. Es un elemento multipuerto de potencia continua, relacionando al esfuerzo y a la potencia de la entrada y la salida. La relación del esfuerzo es descrita por,

$$e_{in} = ne_{out} \quad (2.6)$$

La demanda de potencia continua describe la relación constitutiva del flujo.

$$f_{out} = nf_{in} \quad (2.7)$$

De un modo similar a las fuentes moduladas, estos elementos -TF también vienen en versión modulada. Estos elementos son representados como *MTF*. En un *MTF*, el factor de transformación n es establecido externamente y puede variar con el tiempo.

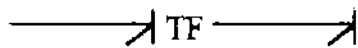


Figura 2.9: Elemento Transformador

2.4.5 Giradores

Un elemento $-GY$, que se muestra en la Figura 2.10, también es un elemento multipuerto de potencia continua, y este relaciona el esfuerzo de entrada con el flujo de salida y viceversa. Así, las relaciones constitutivas son,

$$e_{in} = g f_{out} \quad (2.8)$$

La continuidad de potencia requiere una segunda relación que es,

$$e_{out} = g f_{in} \quad (2.9)$$

De modo similar al elemento transformador, una versión modulada del girador, MGY , puede ser aplicada. En estos elementos, el módulo g es aplicado externamente y puede tener un valor variable.



Figura 2.10: Elemento Girador

2.4.6 Puertos de unión

Para ser aptos para realizar cualquier estructura con cualquiera de estos elementos, las conexiones son necesarias. Estos elementos necesitan más de dos puertos. Se pueden reconocer dos tipos de uniones, la unión tipo -0 , ilustrado en la Figura 2.11 y la unión tipo -1 ilustrado en la Figura 2.12. Estas tienen que responder los dos siguientes requerimientos.

a) **Continuidad de potencia**, la cual significa que la unión no puede disipar o generar energía, así que la suma algebraica de la potencia de todos los puertos es cero.

b) **Simetría de puerto**, esto implica que la relación constitutiva de los puertos son intercambiables. Uno puede desarrollar estas relaciones de esfuerzo o flujo de cualquiera de los elementos conectados.

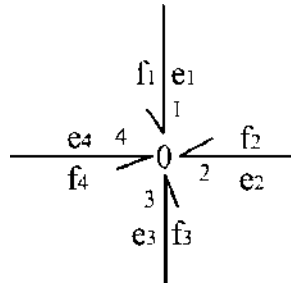


Figura 2.11: Unión tipo -0

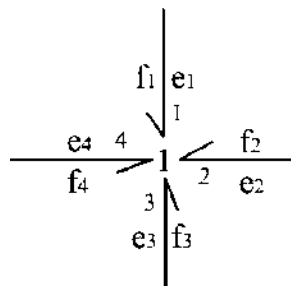


Figura 2.12: Unión tipo -1

La unión -0 se comporta como el análogo de la *ley de nodos de Kirchhoff* en el dominio eléctrico, así, la suma de todos los flujos entrantes y salientes en la unión es igual a cero y todos los esfuerzos tienen el mismo valor.

En la unión -1, por otro lado, la suma de todos los esfuerzos en la unión es cero y todos los flujos son iguales, justo como en la *ley de mallas de Kirchhoff* para el dominio eléctrico.

2.4.7 Detectores

Los detectores en Bond Graph son empleados como sensores de medición de las variables de esfuerzo o flujo y son expresados por D_e y D_f respectivamente. Estos elementos no consumen potencia es por eso que se les considera como elementos de instrumentación ideales para medición. Su representación en Bond Graph se muestra en la Figura 2.13.

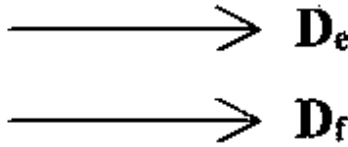


Figura 2.13: Elementos detectores

2.5 El modelado de sistemas en Bond Graph

Al modelar en Bond Graph pasamos de un dominio físico que puede ser eléctrico, mecánico, etc. a otro dominio en el cual se utilizan variables generalizadas, sin importar si el sistema viene de uno o más dominios de energía. El siguiente procedimiento explica los pasos a seguir para obtener un modelo en Bond Graph.

2.5.1 Procedimiento para la construcción de modelos en Bond Graph

1. Dibujar una unión-0 ó unión-1 de acuerdo al sistema correspondiente para los puntos donde las trayectorias paralelas coincidan. Las trayectorias paralelas se refiere cuando dos o más elementos se encuentran conectados a los mismos nodos o a los mismos elementos.
2. Dibujar una unión-0 ó unión-1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph usando un bond en esa unión. La dirección asumida del flujo de potencia es a partir de las fuentes hacia los elementos almacenadores y/o disipadores de energía, la dirección se indica por el sentido de la semiflecha.
3. Dibujar bonds entre las uniones adyacentes indicando la dirección del flujo de potencia.
4. Remover la unión-0 ó unión-1 que representa el punto de referencia, así como también todos los bonds conectados a dicha unión.
5. Simplificar el modelo obtenido usando las reglas que se muestran en la Figura 2.14.

6. Asignar la causalidad a los elementos comenzando con las fuentes (causalidad necesaria), después los elementos almacenadores (causalidad integral) y finalmente los elementos disipadores (causalidad arbitraria).



Figura 2.14: Regla para reducir un bond

El procedimiento anterior es general, a continuación se muestra dicho procedimiento aplicado a sistemas específicos.

2.5.2 Sistemas eléctricos

Para obtener el Bond Graph de sistemas eléctricos se usa el procedimiento general con las siguientes modificaciones:

- En el inciso 1 se asignan uniones-0 en los puntos que tienen voltaje distinto.
- En el inciso 4 se asigna como punto de referencia el nodo de voltaje cero, que es la tierra del circuito.

Como ejemplo del procedimiento para sistemas eléctricos considérese el circuito mostrando en la Figura 2.15.

Aplicando el inciso 1 se identifican los nodos donde existen diferentes voltajes (marcados como a , b , c , d , e y f) y se colocan uniones-0 por cada uno de ellos. En el paso 2 se colocan uniones-1 para unir los diferentes elementos al Bond Graph. En el paso 3 se agregan los bonds faltantes para terminar de unir todos los componentes. Por último, en el paso 4 se identifican los nodos de referencia (e) los cuales se eliminarán junto con los bonds que están conectados a ellos, esto se muestra en la Figura 2.16.

Simplificando como se indica en el paso 5 y colocando los trazos causales de acuerdo al paso 6 se obtiene el Bond Graph que se muestra en la Figura 2.17.

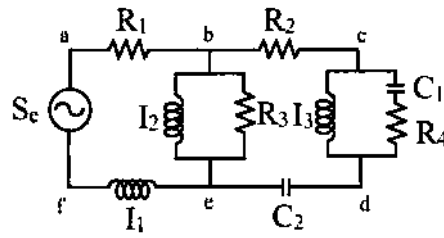


Figura 2.15: Ejemplo de sistema Eléctrico

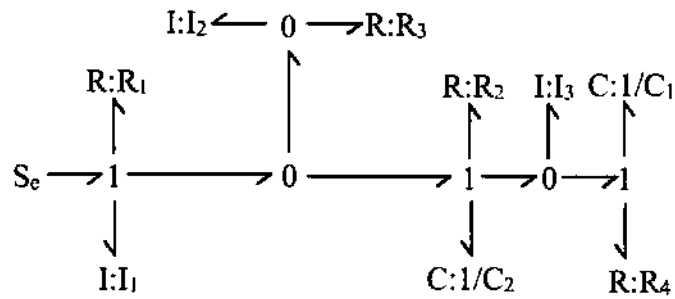


Figura 2.16: Bond Graph de sistema eléctrico

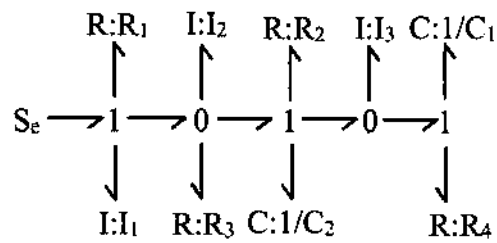


Figura 2.17: Reducción de Bond Graph

2.5.3 Sistemas Mecánicos

En la obtención del Bond Graph para los sistemas mecánicos se usa el procedimiento general con las siguientes observaciones:

- En el inciso 1 se asignan uniones-1 en los puntos donde se tienen velocidades distintas.
- En el inciso 2 se insertan los elementos de generación de fuerza entre el par correspondiente de uniones-1 usando uniones-0. También, se deben incluir inercias en sus respectivas uniones-1.
- En el inciso 4 el nodo de referencia es cualquier velocidad cero.

Como ejemplo del procedimiento para sistemas mecánicos considérese el sistema de la suspensión de un auto como el que se muestra en la Figura 2.18.

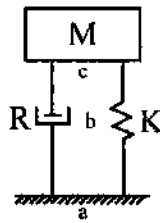


Figura 2.18: Ejemplo de sistema mecánico

De forma similar que en el sistema eléctrico, aplicando el paso 1 se identifican los puntos donde existen velocidades distintas (marcados como a , b y c) y se colocan uniones-1 por cada una de ellas. En el paso 2 se colocan uniones-0 para unir los diferentes elementos al Bond Graph. En el paso 3 se agregan los bonds faltantes para terminar de unir todos los componentes. Finalmente, en el paso 4 se identifica el nodo de referencia (denotado como a) el cuál se eliminará junto con los bonds que están conectados a él, esto se muestra en la Figura 2.19.

Simplificando y colocando la causalidad a los bonds de acuerdo al pasos 5 y 6 respectivamente, se obtiene el Bond Graph que se muestra en la Figura 2.20.

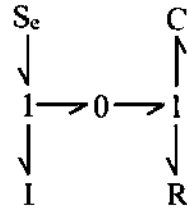


Figura 2.19: Bond Graph sistema mecánico

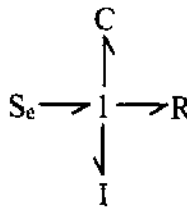


Figura 2.20: Reducción de Bond Graph

2.5.4 Sistemas Hidráulicos

Para obtener el Bond Graph de sistemas hidráulicos se realizan las siguientes observaciones al procedimiento general:

- En el inciso 1 se asignan uniones-0 en los puntos que tienen presión distinta.
- En el inciso 2 se insertan los elementos utilizando uniones-1 entre los pares de uniones-0 correspondientes, incluir también las fuentes de flujo y/o de presión.
- En el inciso 4 escoger una presión de referencia (por lo general se usa la presión atmosférica) y eliminar la unión-0 de referencia del modelo así como los bonds asociados a ella.

Como ejemplo del procedimiento para sistemas hidráulicos considérese el sistema mostrando en la Figura 2.21.

Aplicando el paso 1 se identifican los nodos donde existen diferentes presiones (marcados

como a,b,c,etc.) y se colocan uniones-0 por cada uno de ellos. En el paso 2 se colocan uniones-1 para unir los diferentes elementos al Bond Graph. En el paso 3 se agregan los bonds faltantes para terminar de unir todos los componentes. Por último, en el paso 4 se identifica la presión de referencia (atmosférica, denotada como a) la cuál se eliminarán junto con los bonds que están conectados a ella, esto se muestra en la Figura 2.22.

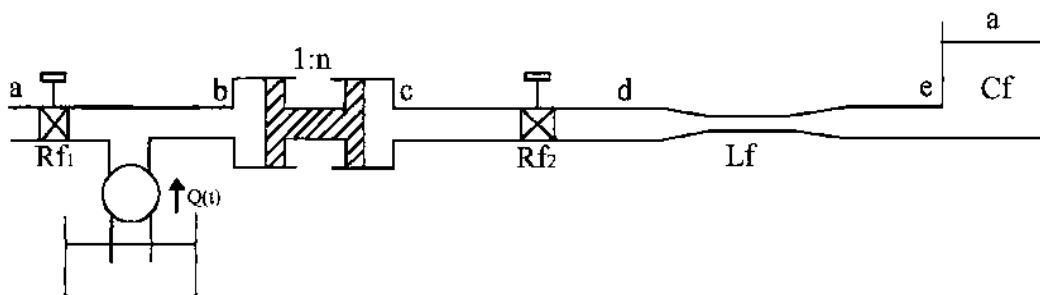


Figura 2.21: Ejemplo de sistema hidráulico

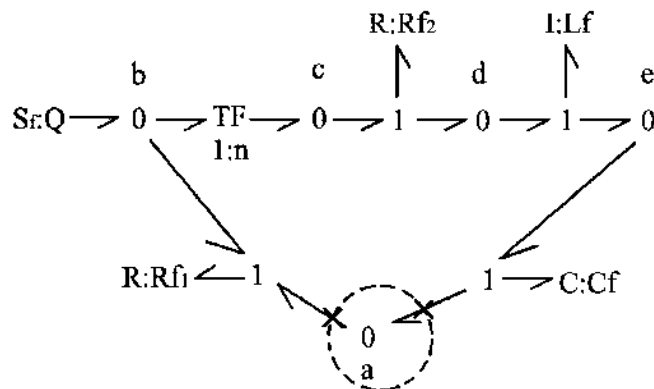


Figura 2.22: Bond Graph de sistema hidráulico

Realizando la simplificación y agregando la causalidad de acuerdo a los incisos 5 y 6, se obtiene el Bond Graph que se muestra en la Figura 2.23.

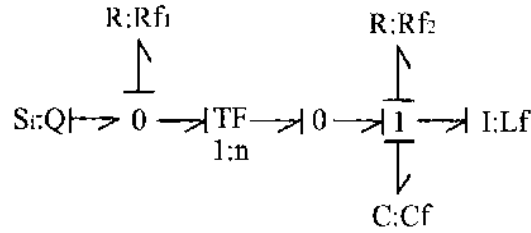


Figura 2.23: Simplificación de Bond Graph

2.6 Estructura de unión en sistemas multipuerto

Si se consideran sistemas de grandes dimensiones como los campos interconectados, se obtiene una estructura dinámica y por lo que la generación, manipulación, y reducción de un gran número de ecuaciones se realiza de una forma sistemática para obtener una implementación exitosa del modelo.

2.6.1 Vectores clave

En un Bond Graph (BG) en forma convencional es posible clasificar como *bonds externos* a los elementos o puertos que conectan R , C , I , S_e y S_f y a los que conectan con los elementos 0 , 1 , TF y GY se les llaman *bonds internos*. Los *bonds externos* pueden ser clasificados de acuerdo a su forma de manifestación de energía. La Figura 2.24 muestra un diagrama a bloques que describe la *estructura unión* de un modelo en Bond Graph.

En la Figura 2.24, los vectores clave son formados por las fuentes (S_e y S_f), elementos almacenadores (I y C), disipadores (R), detectores (D) y por último se tiene en la estructura unión donde intervienen los transformadores, giradores y uniones-0 y uniones-1 ($1, 0, TF, GY$).

Los vectores clave son los que representan el sistema, donde $u(t) \in \mathbb{R}^p$ contiene las variables de potencia (esfuerzos y flujos) debidas a las fuentes en la Estructura de Unión. Los estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $x_d(t) \in \mathbb{R}^m$ están compuestos de variables de energía, momento generalizado $p(t)$ en elementos almacenadores I y desplazamiento generalizado $q(t)$ en elementos almacenadores C en causalidad integral y derivativa respectivamente. Las $z(t) \in \mathbb{R}^n$

y $z_d(t) \in \mathbb{R}^m$ son variables de co-energía en causalidad integral y derivativa, respectivamente. $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ y $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$ son una mezcla de esfuerzos y flujos que contienen los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la estructura de unión. Donde n y m son el número de elementos almacenadores en causalidad integral y derivativa, respectivamente. p es el número de fuentes y r es el número de elementos disipadores de energía.

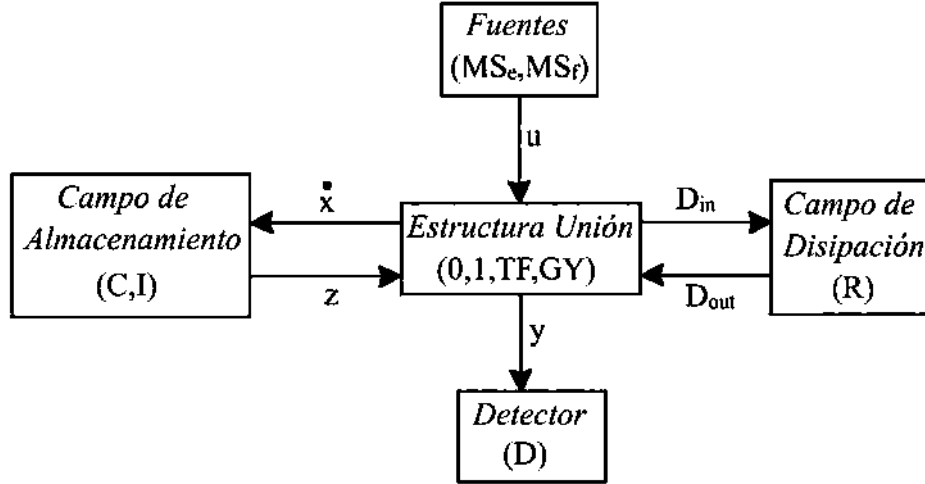


Figura 2.24: Vectores clave de un Bond Graph

2.6.2 Relaciones de campo y ecuaciones de estado

Las relaciones de campo no lineales de la Figura 2.24 de los elementos de almacenamiento y de disipación son:

$$z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.10)$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d) \quad (2.11)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}) \quad (2.12)$$

donde,

Φ_F es una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.

Φ_{Fd} representa una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i = 1, \dots, m$.

Φ_L denota una función que relaciona cada D_{outi} con D_{ini} para $i = 1, \dots, r$.

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual se conoce como *relación constitutiva*. Si las relaciones constitutivas son tipo lineal tenemos:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.13)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.14)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (2.15)$$

donde L , F y F_d son matrices reales de dimensión $r \times r$, $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de estructura unión } S} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Los elementos dentro de la matriz de estructura unión S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm kt, \pm kg\}$ donde kt y kg representan el módulo o relación del transformador y del girador. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave.

Las submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

- Propiedad 1.- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.
- Propiedad 2.- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades 1 y 2 están basadas en el principio de conservación de energía [González, 2003].

Un sistema LTI (Lineal con parámetros invariantes en el tiempo) MIMO (múltiple entrada múltiple salida) se representa en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.17)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t) \quad (2.18)$$

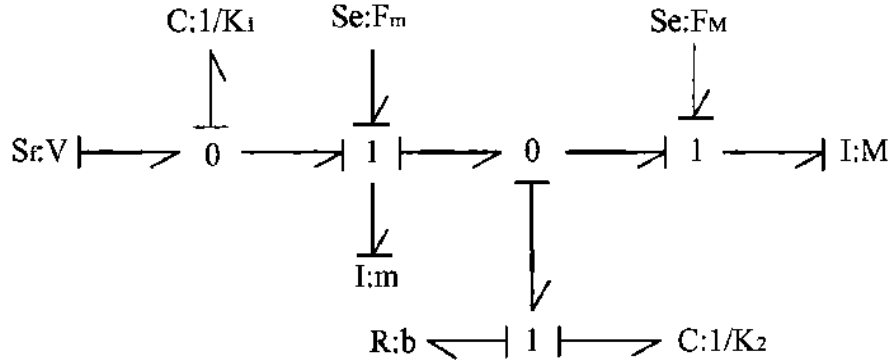


Figura 2.25: Suspensión de un auto

Relacionando las ecuaciones (2.13) a la (2.15) con (2.17) y (2.18) obtenemos las matrices que representan este tipo de sistemas y que permiten conocer el modelo matemático en variables de estado utilizando la representación en Bond Graph:

$$A_p = E^{-1} (S_{11} + S_{12}MS_{21}) F \quad (2.19)$$

$$B_p = E^{-1} (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.20)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21}) F \quad (2.21)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.22)$$

Las matrices E y M se encuentran mediante las siguientes expresiones:

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.23)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1} L \quad (2.24)$$

2.6.3 Obtención de un modelo en espacio de estado en Bond Graph

Utilizando el sistema de la suspensión de un auto de la Figura 2.25 tomando como salida la velocidad de la masa m , al modelo en Bond Graph que se obtuvo se le agrega una numeración a los bonds tal como se muestra en la Figura 2.26.

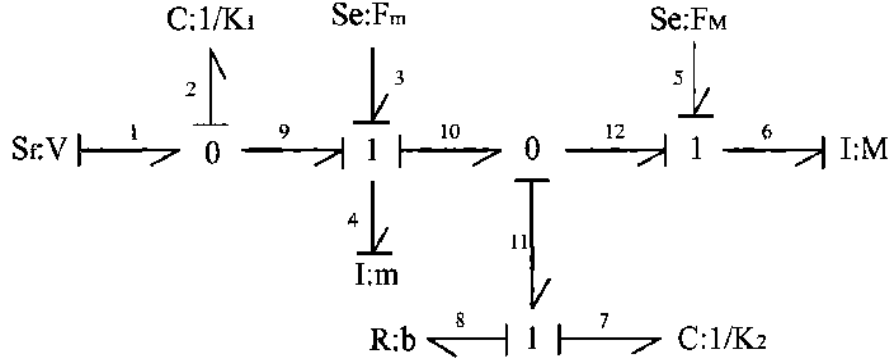


Figura 2.26: Numeración de bonds en la suspensión

Los vectores clave son:

$$x = \begin{bmatrix} q_2 \\ p_4 \\ p_6 \\ q_7 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ e_7 \end{bmatrix}, \quad D_{in} = f_8, \quad D_{out} = e_8, \quad u = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix}, \quad y = f_4 \quad (2.25)$$

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$F = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad D_{out} = LD_{in} \implies e_8 = Lf_8 \quad \therefore L = b \quad (2.26)$$

Como no hay elementos almacenadores en causalidad derivativa:

$$F_d = 0 \quad (2.27)$$

De acuerdo con (2.16) para la matriz de estructura de unión se tiene que:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_4 \\ e_6 \\ \frac{f_7}{f_8} \\ f_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ \hline S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ \hline S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ \frac{e_7}{e_8} \\ f_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Un análisis del modelo en Bond Graph de la Figura 2.26 permite determinar las ecuaciones que definen a $\dot{x}(t)$, $D_{in}(t)$ y $y(t)$:

Para f_2 tenemos que:

$$f_2 = f_1 - f_9 \text{ y como: } f_9 = f_4 \therefore f_2 = f_1 - f_4 \quad (2.29)$$

Para e_4 tenemos que:

$$e_4 = e_9 + e_3 - e_{10} \text{ y como: } e_9 = e_2 ; e_{10} = e_{11} ; e_{11} = e_8 + e_7 \quad (2.30)$$

$$\therefore e_4 = e_2 + e_3 - e_8 - e_9 \quad (2.31)$$

Para e_6 tenemos que:

$$e_6 = e_{12} + e_5 \text{ y como: } e_{12} = e_{11} = e_8 + e_7 \therefore e_6 = e_{12} + e_5 \quad (2.32)$$

Para f_7 tenemos que:

$$f_7 = f_{11} \text{ y como: } f_{11} = f_{10} - f_{12} ; f_{12} = f_6 ; f_{10} = f_4 \quad (2.33)$$

$$\therefore f_7 = f_4 - f_6 \quad (2.34)$$

Para f_8 tenemos que:

$$f_8 = f_7 = f_4 - f_6 \quad (2.35)$$

La matriz de estructura unión queda de la siguiente forma,

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_4 \\ e_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ f_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

de la estructura unión, ecuación (2.36) se obtiene que:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.38)$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$S_{22} = 0 \quad (2.41)$$

$$S_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$S_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$S_{32} = 0 \quad (2.44)$$

$$S_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Mediante las ecuaciones (2.19) a (2.22) la representación en espacio de estado de un sistema modelado en bond graph puede ser determinado. Como no hay elementos almacenadores en causalidad derivativa se tiene que:

$$E = I + S_{14} \underbrace{F_d^{-1}}_0 S_{14}^T F = I \quad y \quad M = \left(I - L \underbrace{S_{22}}_0 \right)^{-1} \quad L = L \quad (2.46)$$

Entonces $E = E^{-1} = I$. Por lo que para A_p es:

$$A_p = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * [b] * \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} k_1 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & \frac{b}{M} & -k_2 \\ 0 & \frac{b}{m} & -\frac{b}{M} & k_2 \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

B_p se obtiene mediante:

$$B_p = \underbrace{E^{-1}}_I \left(S_{13} + S_{12} M \underbrace{S_{23}}_0 \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Para encontrar C_p se tiene que:

$$C_p = \left(S_{31} + \underbrace{S_{32}}_0 M S_{21} \right) F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D_p se obtiene de:

$$D_p = \underbrace{S_{33}}_0 + \underbrace{S_{32}}_0 MS_{23} = 0 \quad (2.51)$$

La representación de espacio de estados queda:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_4 \\ e_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & \frac{b}{M} & -k_2 \\ 0 & \frac{b}{m} & -\frac{b}{M} & k_2 \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_4 \\ p_6 \\ q_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_4 \\ p_6 \\ q_7 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Donde las variables de estado son:

q_2 es el desplazamiento del resorte k_1 y f_2 es la velocidad en dicho resorte.

p_4 es el momento inercial en la masa m y e_4 es la fuerza en dicha masa.

p_6 es el momento inercial en la masa M y e_6 es la fuerza en dicha masa.

q_7 es el desplazamiento del resorte k_2 y f_7 es la velocidad en dicho resorte.

Además, e_3 y e_5 son los esfuerzos debidos a la fuerza de gravedad en las masas m y M respectivamente; f_1 es una fuente de velocidad externa la cual inicial el movimiento del sistema; f_4 es la velocidad en la masa m la cual es la salida seleccionada del sistema.

2.7 Sistemas multi-cuerpo

Los sistemas multi-cuerpo son utilizados para modelar un conjunto de sólidos rígidos o flexibles y las uniones entre ellos. Son necesarios para definir correctamente el sistema y explicar de forma clara la unión entre los cuerpos, que pueden restringir o permitir el movimiento en los distintos grados de libertad.

La descripción y análisis de sistemas multicuerpo ha sido objeto de investigación por mucho tiempo, como en [Filippini, 2000], [Ting-Yung], [Cuadrado, 2009], [Fortes, 2008], [Wasfi, 2003], por mencionar algunos. Cuando un número de cuerpos rígidos son forzados por diferentes tipos de uniones y se mueven a través de grandes ángulos en tres dimensiones, las relaciones cinemáticas pueden llegar a ser muy complejas. Especialistas en sistemas multicuerpo han desarrollado un número de técnicas para la manipulación de este tipo de sistemas mecánicos dinámicos y sería presuntuoso sugerir que los Bond Graphs siempre serían una mejor selección como un mecanismo descriptivo que las técnicas establecidas alternativas. Aún así, se puede utilizar un enfoque de Bond Graph cuando el sistema a ser estudiado contiene otros componentes, los cuales, son particularmente bien trabajados utilizando esta metodología, aprovechando la características multidominio del modelado en Bond Graph.

Como un ejemplo elemental, considérese el sistema de la Figura 2.27, el cual consiste de un motor eléctrico que mueve un carretón a través de una polea y una banda, y en el carretón se monta un péndulo invertido. El objetivo es diseñar un sistema de control el cual varíe el voltaje en el motor de tal manera que el péndulo esté estabilizado en la posición derecha hacia arriba en cualquier posición x deseada del carretón. Como se muestra en la Figura 2.27.

La representación en Bond Graph del sistema se obtiene directamente, pero la limitación rígida entre el carretón y la barra ciertamente causará problemas de causalidad derivativa los cuales son complicados si el ángulo ϕ_1 no es pequeño.

Continuando con el desarrollo, se muestra que el enfoque de Bond Graph a sistemas multicuerpo está estrechamente relacionado a un enfoque de sistema multicuerpo obteniendo las ecuaciones en la forma descriptiva.

El primer paso es considerar elementos de Bond Graph representando la dinámica del cuerpo rígido sin considerar restricciones entre los cuerpos. Las coordenadas x para el carretón y x_1 , y_1 y ϕ_1 para la barra se definen con respecto a un marco de referencia inercial. Por lo tanto, los cuatro elementos- I del lado derecho de la Figura 2.27 representan correctamente las leyes bajo las cuales se afirma que la suma de todas las fuerzas aplicadas es igual a la relación de cambio del momento lineal y que las componentes de velocidad del centro de masa son los momentos divididos entre las masas. La suma del momento sobre el centro de

masa de la barra es igual a la relación de cambio del momento angular, para este caso del movimiento plano, la velocidad angular dividida por el momento centroide de la inercia da la velocidad angular de la barra.

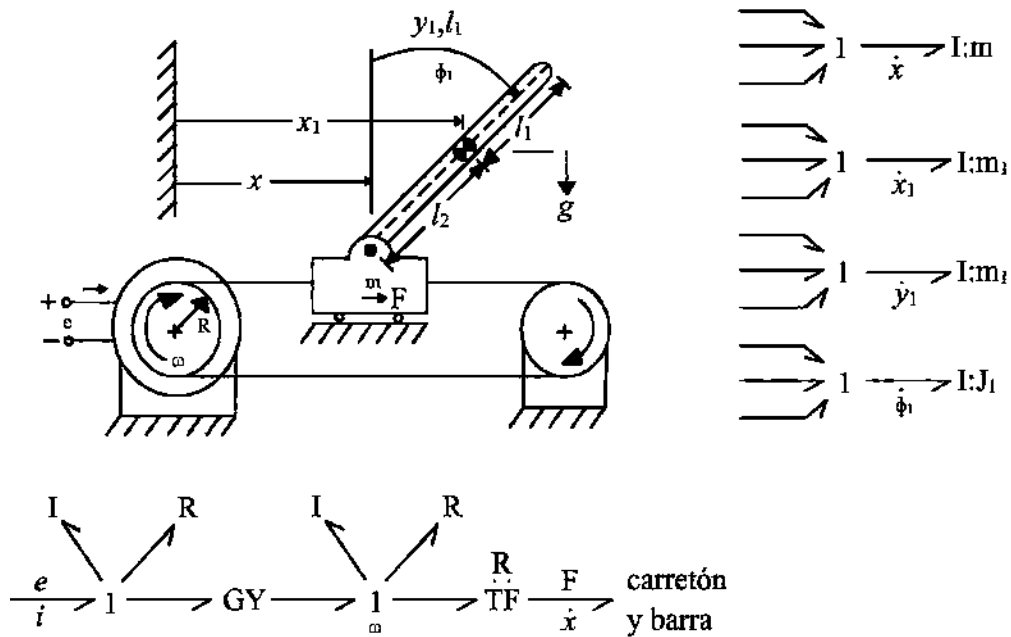


Figura 2.27: Péndulo invertido

A fin de limitar los cuatro elementos-I y por lo tanto crear un Bond Graph para la barra y el subsistema del carretón que será conectado al bond graph de la transmisión. Primero definimos las separaciones δ_1 y δ_2 en la Figura 2.28, estas separaciones horizontales y verticales entre el pivote de la barra y el pivote del carretón se desvanecerán. Además, serán necesarias las fuerzas λ_1 y λ_2 a través de las separaciones para asegurar que δ_1 y δ_2 desaparezcan. El uso de λ para representar fuerzas asociadas con restricciones se propone para recordar que en el formalismo multicuerpo estas fuerzas de separación son multiplicadores de Lagrange [Dauphin-Tanguy, 2000].

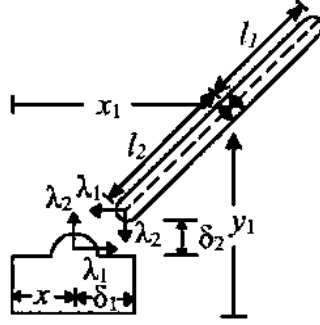


Figura 2.28: Restricciones en un sistema multicuerpo

Estas separaciones se relacionan con las coordenadas de posición de los cuerpos rígidos en la Figura 2.28.

$$\delta_1 = x_1 - x - l_1 \sin \phi_1 \quad (2.54)$$

$$\delta_2 = y_1 - l_1 \cos \phi_1$$

Por diferenciación de las expresiones de las separaciones, se pueden relacionar las velocidades de las separaciones con las velocidades del cuerpo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -l_1 \cos \phi_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \sin \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\phi}_1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

La relación (2.55) puede ser representada en términos de bond graph por un transformador multipuerto modulado de desplazamiento. La Figura 2.29 muestra el transformador conectado a los cuatro elementos- I representando los dos cuerpos.

La transpuesta de la matriz en la ecuación (2.55) relaciona automáticamente las fuerzas de abertura λ_1 y λ_2 a las fuerzas efectivas en los cuatro elementos- I :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_{x1} \\ F_{y1} \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\ell_1 \cos \phi_1 & \ell_1 \sin \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

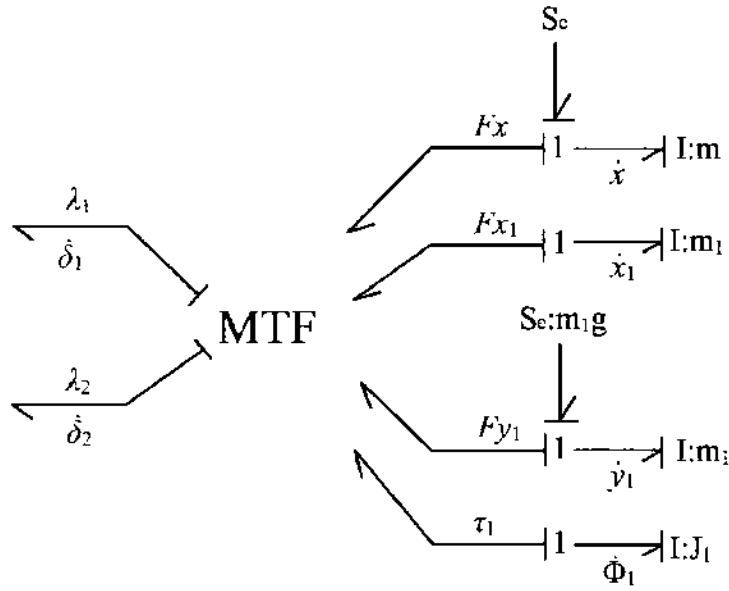


Figura 2.29: Bond graph de un transformador multipuerto modulado de desplazamiento

En el Bond Graph también es aplicada la fuerza debido a la gravedad $m_1 g$. Siguiendo las trayectorias de los esfuerzos y flujos en la Figura 2.29, se pueden escribir algunas ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= F - F_x = F + \lambda & \dot{x} &= \frac{p_x}{m} \\ \dot{p}_{x1} &= -F_{x1} = -\lambda_1 & \dot{x}_1 &= \frac{p_{x1}}{m_1} \\ \dot{p}_{y1} &= -m_1 g - F_{y1} = -m_1 g - \lambda_2 & \dot{y}_1 &= \frac{p_{y1}}{m_1} \\ \dot{p}_{\phi 1} &= -\tau_1 = (\ell_1 \cos \phi_1) \lambda_1 - (\ell_1 \sin \phi_1) \lambda_2 & \dot{\phi}_1 &= \frac{p_{\phi 1}}{J_1} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Rescribiendo se obtiene:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= F + \lambda \\
 m_1\ddot{x}_1 &= -\lambda_1 \\
 m_1\ddot{y}_1 &= -m_1g - \lambda_2 \\
 J\ddot{\phi}_1 &= (\ell_1 \cos \phi_1) \lambda_1 - (\ell_1 \sin \phi_1) \lambda_2
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

En las ecuaciones anteriores las fuerzas de abertura λ_1 y λ_2 se desconocen. En la formulación convencional de multicuerpos, la información extra es suministrada requiriendo que δ_1 y δ_2 tiendan a desaparecer. A pesar de que esta información es matemáticamente correcta el Bond Graph de la Figura 2.29 sugiere un enfoque alternativo.

Suponiendo que en lugar de requerir que δ_1 y δ_2 desaparezcan completamente, modelamos la interacción del pivote entre los dos cuerpos como si existieran resortes rígidos, los cuales generarían las fuerzas cada vez que las aberturas no fueran cero. En un sentido, esto parece ser más real, a partir de que los cuerpos rígidos realmente no existen. Sin embargo, si no se usarán barras rígidamente reales, se podría crear un modelo con frecuencias naturales muy altas de vibración, lo cual necesitaría pasos de tiempo cortos en cualquier simulación numérica. Es mejor considerar resortes y amortiguadores insertados a lo largo de las aberturas como dispositivos artificiales para forzar las limitaciones y hacer esto con ecuaciones diferenciales explícitas en lugar de ecuaciones diferenciales algebraicas.

La idea es experimentar con resortes rígidos para encontrar la rigidez menor la cual producirá valores lo suficientemente pequeños de δ_1 y δ_2 en la operación del sistema real. Esto producirá pasos de tiempo más grandes en simulación y tiempos de simulación cortos.

El Bond Graph completo del sistema se muestra en la Figura 2.30. Los elementos R y C generan las fuerzas de restricción y como una función de δ_1 , δ_2 , $\dot{\delta}_1$ y $\dot{\delta}_2$. Incrementando la rigidez de los elementos- C tendrá el efecto de producir fuerzas más grandes cuando las aberturas no son cero y por lo tanto reducirá dichas separaciones. Ya que la introducción de los resortes implica que es posible el movimiento de vibración, también es útil introducir elementos- R artificiales para proveer amortiguamiento. Así mismo, es necesario algo de experimentación con los valores de los parámetros de amortiguamiento para alcanzar un resultado favorable.

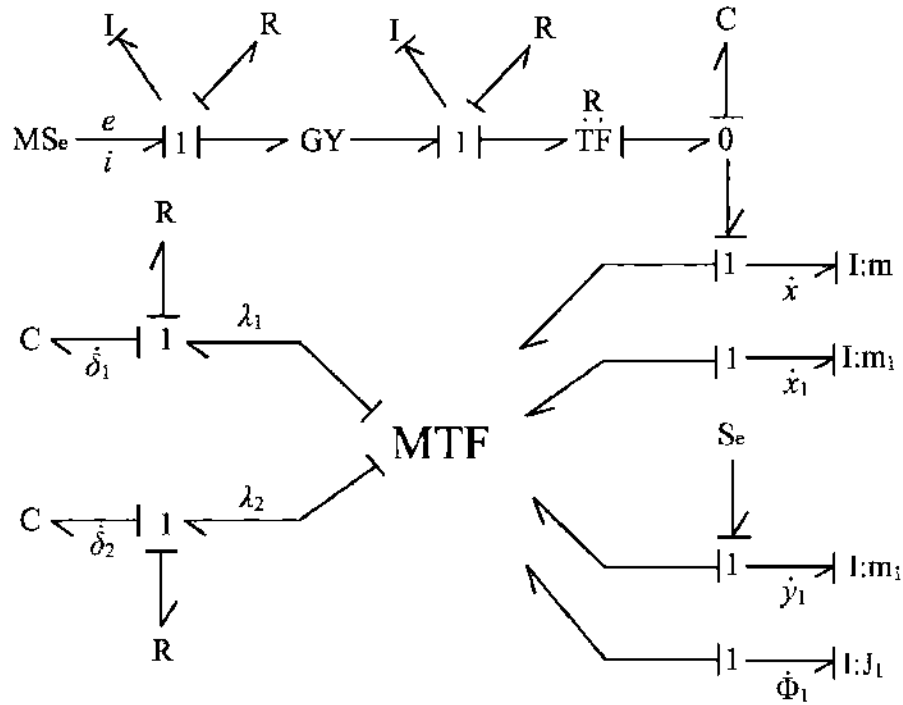


Figura 2.30: Bond graph del péndulo invertido en un carretón

El elemento- C extra agregado, es porque si los dos fragmentos de Bond Graph son simplemente conectados, la inercia rotatoria del motor y la inercia del carretón están acopladas por un transformador relacionando variables de movimiento rotatorio a lineal.

Esta es otra alternativa de acoplamiento rígido entre elementos de inercia que siempre induce causalidades derivativas. En este caso, sería simple eliminar este inconveniente definiendo una equivalencia sencilla rotatoria o elementos de inercia lineal, ó definir un campo- I usando los métodos establecidos. En lugar de esto, esta restricción rígida ha sido reemplazada con una aproximación definiendo un elemento- C equivalente. Este elemento podría ser considerado para representar la flexibilidad de conducción de la polea o simplemente un dispositivo para hacer que el modelo completo pueda tener causalidad integral.

Finalmente, podemos notar que sería relativamente fácil escribir las ecuaciones de estado para todos los elementos I y C en la Figura 2.30. Se debe recordar, sin embargo, que en esta

técnica de multipuerto, el transformador modulado de desplazamiento utiliza los desplazamientos de los elementos de inercia para expresar las restricciones o ecuaciones de abertura. En Bond Graphs, las variables de desplazamiento para elementos de inercia normalmente no son necesarias como variables de estado, entonces serán necesarias algunas ecuaciones de estado extras.

Las matrices del transformador de este ejemplo, en realidad necesitan el desplazamiento ϕ_1 , entonces, estrictamente hablando, solamente la última ecuación en (2.57), $\dot{\phi}_1 = \frac{p\phi_1}{J_1}$ necesitaría ser incluida. Para este tipo de sistemas sería, probablemente, más útil incluir ecuaciones de estado para todos los desplazamientos x , x_1 , y_1 y ϕ_1 en cualquier caso, como se indica en las ecuaciones (2.57). Estas ecuaciones hacen que se incremente el orden del sistema, pero su inclusión solamente tiene un efecto menor en el tiempo de simulación para un estudio por computadora.

Para ilustrar como este método de introducir restricciones entre cuerpos interconectados puede ser de gran extensión, consideremos una segunda barra conectada al sistema anteriormente estudiado, como se muestra en la Figura 2.31.

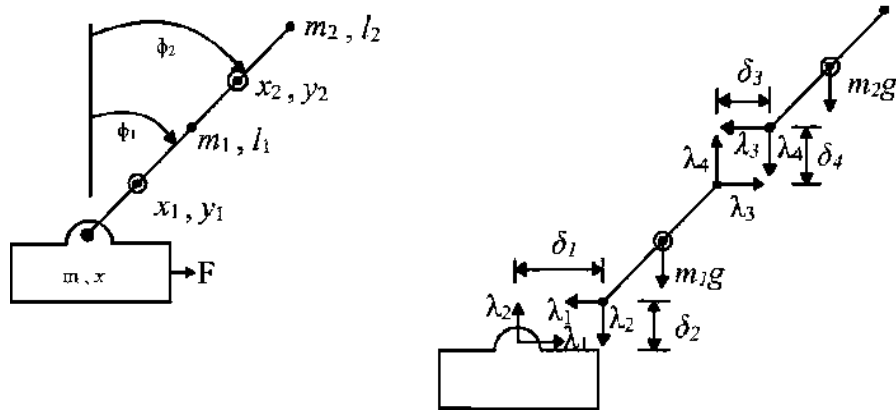


Figura 2.31: Doble péndulo invertido

Definiendo δ_3 , δ_4 y las fuerzas correspondientes λ_3 y λ_4 que pertenecen al segundo conjunto de restricciones relacionando la posición de arriba de la barra 1 a la parte de abajo

de la barra 2, podemos deducir dos relaciones más para obtener:

$$\delta_3 = x_2 - \ell_2 \sin \phi_2 - x_1 - \ell_1 \sin \phi_1 \quad (2.59)$$

$$\delta_4 = y_2 - \ell_2 \cos \phi_2 - y_1 - \ell_1 \cos \phi_1$$

Diferenciando las ecuaciones anteriores, resultan ecuaciones que relacionan $\dot{\delta}_3$, $\dot{\delta}_4$ a \dot{x}_1 , \dot{y}_1 , $\dot{\phi}_1$, \dot{x}_2 , \dot{y}_2 y $\dot{\phi}_2$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_3 \\ \dot{\delta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\ell_1 \cos \phi_1 & 1 & 0 & -\ell_2 \cos \phi_2 \\ 0 & -1 & \ell_1 \sin \phi_1 & 0 & 1 & \ell_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

La transpuesta de la matriz (2.60) relaciona las seis componentes de fuerza para λ_3 y λ_4 :

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \tau_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\ell_1 \cos \phi_1 & \ell_1 \sin \phi_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\ell_2 \cos \phi_2 & \ell_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

En este caso, ambas barras tienen tres grados de libertad, así como seis velocidades generalizadas que son involucradas cuando dos cuerpos son forzados. Asimismo, hay la posibilidad de relacionar λ_3 y λ_4 a las fuerzas que están actuando en los elementos- I y requiriendo que δ_3 y δ_4 tiendan a desaparecer en las ecuaciones (2.59).

En la Figura 2.32 se muestra el Bond Graph usando resortes y amortiguadores para forzar la restricción de una manera aproximada.

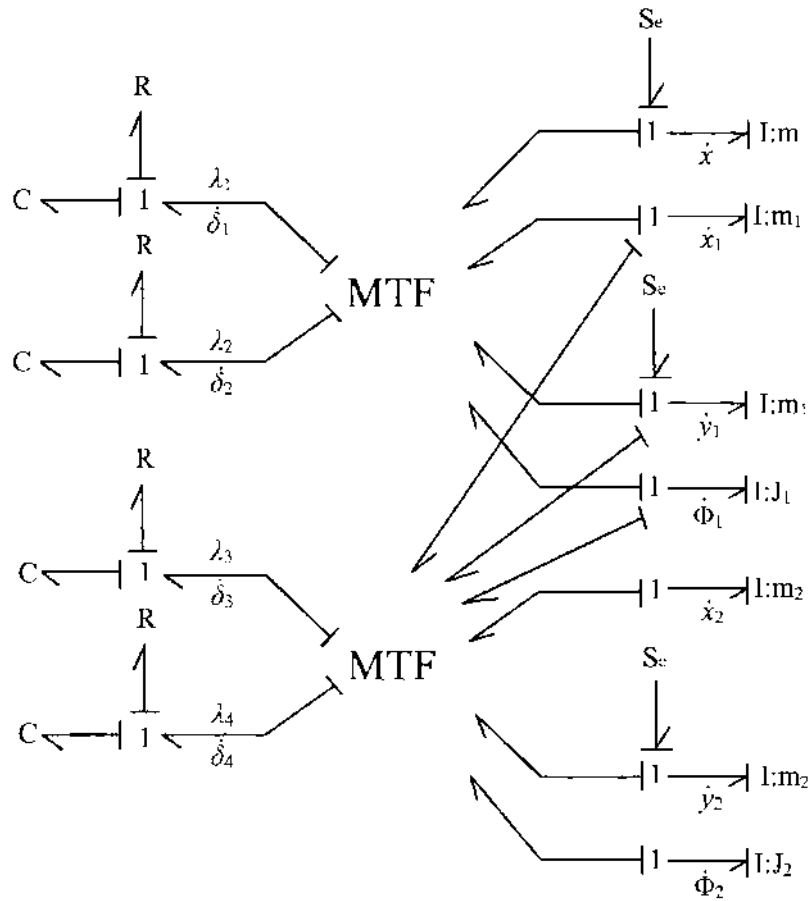


Figura 2.32: Bond graph del doble péndulo invertido

Con esto se da por terminada la introducción al modelado en bond graph, dentro de la cuál se estudiaron los sistemas mecánicos y los sistemas multicuerpos, los cuales son los modelos principales en el estudio del comportamiento del automóvil.

Dadas las bases anteriores, se procede a analizar cada uno de los subsistemas que componen el automóvil en la configuración previamente enunciada, y se comienza el modelado del sistema.

Capítulo 3

Modelado de un Sistema de Automóvil en Bond Graph

3.1 Introducción

Los sistemas automotrices están formados de una gran cantidad de subsistemas térmicos, mecánicos, hidráulicos y electrónicos, de los cuales, los principales para obtener una respuesta aproximada a la que se obtiene con el sistema completo son el sistema de dirección, tren motriz, el cuerpo del automóvil, las suspensiones y los neumáticos.

Estos subsistemas son considerados en este trabajo como los de más importancia debido a que son los que generan los movimientos rotacionales, traslacionales y longitudinales, cada uno proporcionando una entrada de distinta naturaleza.

A pesar de que todos tienen una parte mecánica y térmica, en varios de ellos también se encuentra la hidráulica y electrónica, y debido a la complejidad que esto atrae, el sistema será analizado mayormente desde el área mecánica para un estudio con el menor grado de error posible respecto a estudios anteriores como en [Silva, 2007].

A continuación se enunciarán las principales características físicas y matemáticas de cada uno de los subsistemas anteriormente mencionados.

3.2 Introducción a las suspensiones

Los automóviles de finales del siglo XIX eran básicamente carruajes jalados por un motor en lugar de caballos. Debido a que no alcanzaban grandes velocidades apenas necesitaban suspensión. Fue hasta 1898 que las primeras suspensiones eran simples ballestas, similares a la mostrada en la Figura 3.1, como las de los carros de caballos [Urbieta, 2003].

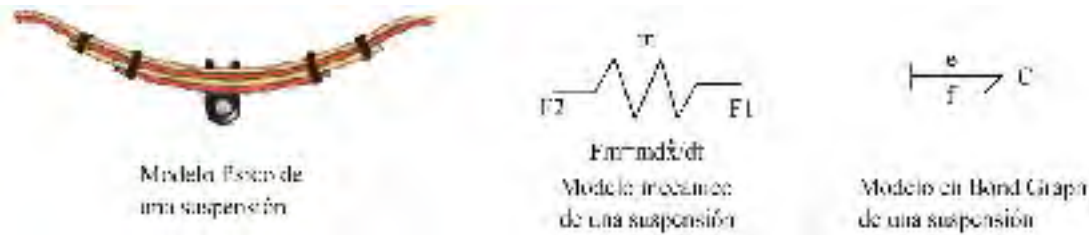


Figura 3.1: Suspensión tipo ballesta

Desde hace unos años atrás se ha impuesto en la industria el uso de los amortiguadores hidráulicos. En estos, la fuerza amortiguadora es función creciente con la velocidad. Han existido varios tipos de amortiguadores hidráulicos, como lo son los giratorios y los de pistón, pero los que se utilizan actualmente son los de tipo telescópico, como se puede apreciar en la Figura 3.2.

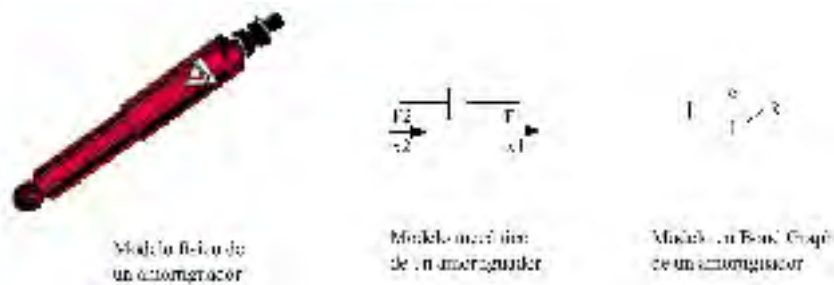


Figura 3.2: Amortiguador hidráulico tipo telescópico

Como en todos los ámbitos automovilísticos, cada vez son más los dispositivos controlados electrónicamente, y los amortiguadores no suponen una excepción.

Lo que hasta ahora se ha visto, han sido los componentes de las tradicionales "suspensiones pasivas", mostrado en la Figura 3.3. Lo más importante hoy en día es lograr el balance confort-estabilidad, ya que si se hace un vehículo muy cómodo para los ocupantes, se sacrifica su comportamiento dinámico y viceversa [Urbieta, 2003].

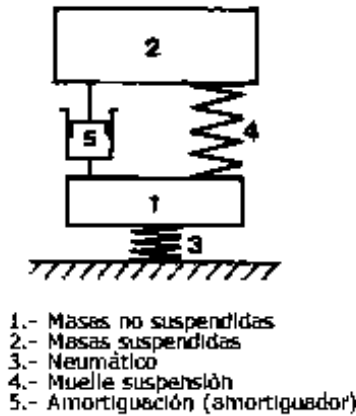


Figura 3.3: Esquema de suspensión pasiva

En la Figura 3.3 se numeran los elementos que constituyen la suspensión pasiva, donde la masas suspendidas son el cuerpo del auto y todo lo que se encuentre sobre el mismo; el muelle de suspensión es la parte de la suspensión que trabaja cuando se presentan irregularidades "pequeñas" en el camino o generadas por la masa suspendida; el amortiguador es el elemento que trabaja en conjunto con el muelle de suspensión cuando se encuentran perturbaciones de gran magnitud y es necesaria una fuerza de oposición mayor ante estas perturbaciones para tener una mayor estabilidad en la masa suspendida, teniendo como desventaja que esto sólo tiene un funcionamiento óptimo con perturbaciones de baja frecuencia, ya que los componentes de los que está formado este sistema suelen tener una respuesta "lenta"; la masa no suspendida es aquello que une a los neumáticos con el sistema de suspensión y no presenta oposición alguna al trabajo realizado por la suspensión; y por último se tiene el neumático, el cuál es el medio por el que se transmiten las irregularidades del camino y además absorbe y disipa un poco de la energía que se genera con las irregularidades que presente el camino.

Así, la evolución de los sistemas de suspensión parece que va en la línea de los llamados sistemas "inteligentes". Entre estas se encuentran las suspensiones adaptativas, como se puede apreciar en la Figura 3.4, suspensiones activas y semiactivas, ilustradas en la Figura 3.5 y las magnetorreológicas descritas en la Figura 3.6.

En las suspensiones adaptativas mostrada en la Figura 3.4, se modifica la rigidez del muelle o bien del amortiguador mediante actuadores de baja potencia, normalmente de manera discreta en función de diferentes parámetros previamente monitoreados por sensores [Urbieta, 2003]. En este tipo de suspensiones, el aislante es el elemento que acopla la parte de potencia del sistema eléctrico del automóvil con los sensores y amortiguadores, por lo que es el elemento de protección de los elementos electrónicos. El amortiguador de multi-configuración es el elemento que determina si el actuador de nivel realiza alguna acción dependiendo de la frecuencia de los perturbaciones y de los datos enviados por los sensores.

Las suspensiones activas y semiactivas de la Figura 3.5, consisten en un sistema de lazo cerrado con retroalimentación. En las suspensiones activas no hay muelle ni amortiguador. Un actuador hidráulico genera fuerzas para compensar el balanceo y cabeceo del vehículo, mientras que una computadora (unidad de control) se encarga de monitorear constantemente (gracias a los diversos sensores y detectores), el perfil de la carretera y envía señales eléctricas a las suspensiones delantera y trasera. Debido al tiempo de respuesta es que los sistemas se dividen en dos rangos de frecuencia de operación (baja y alta frecuencia), aquí es en donde entran las suspensiones semiactivas. Estas controlan las bajas frecuencias con elementos pasivos, que en este caso es una muelle fijo, y las altas con elementos activos, como es el amortiguador regulable.

Las suspensiones magnetorreológicas de la Figura 3.6, se basan en amortiguadores mono-tubo semiactivos que en vez de aceite corriente llevan un fluido magnético-reológico, prescindiendo de válvulas electromecánicas. [Urbieta, 2003].

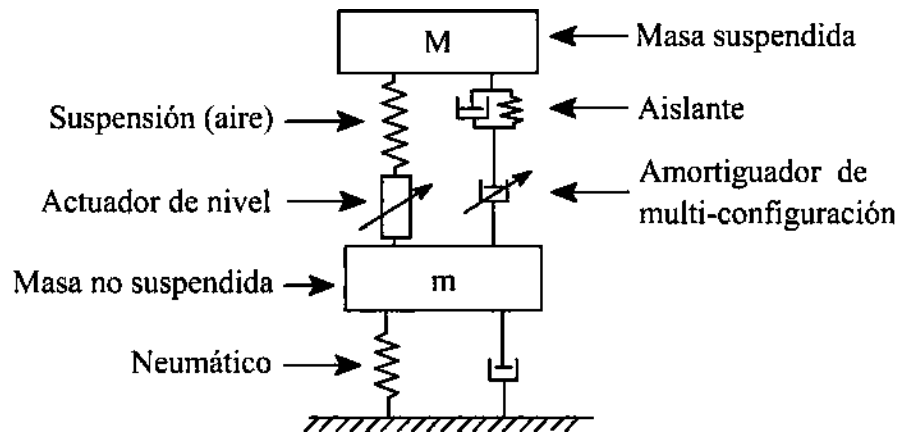


Figura 3.4: Esquema de suspensión Adaptativa

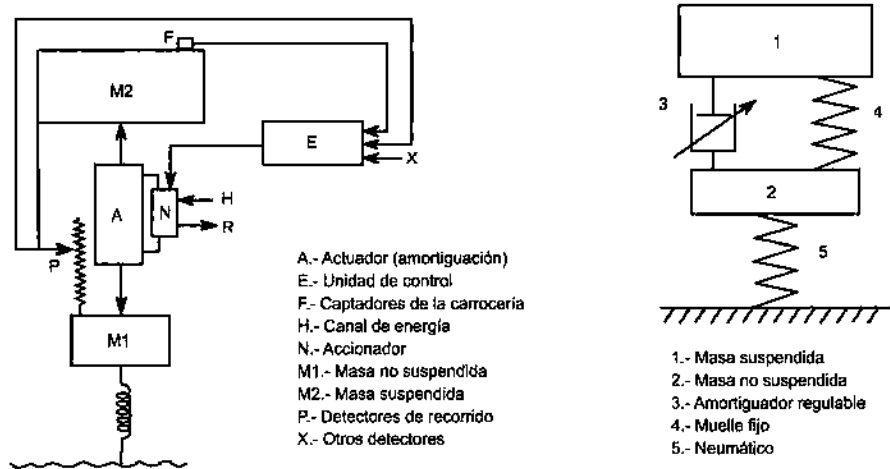


Figura 3.5: Esquema de suspensión activa y semiactiva

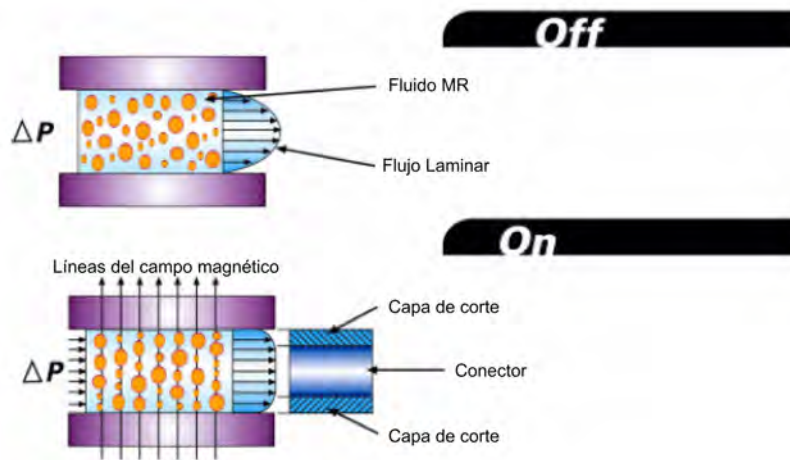


Figura 3.6: Magnetización del fluido en suspensiones magnetorrológicas

3.3 Introducción a los sistemas de dirección automotriz

El conjunto de mecanismos que componen el sistema de dirección tienen la misión de orientar las ruedas delanteras para que el vehículo tome la trayectoria deseada por el conductor.

Para que el conductor no tenga que realizar esfuerzo en la orientación de las ruedas, el vehículo dispone de un mecanismo desmultiplicador, en los casos simples (coches antiguos), o de servomecanismo de asistencia (en los vehículos actuales).

En los primeros vehículos el accionamiento de la dirección se hacía mediante una palanca o manubrio. Posteriormente, por razones prácticas se adoptó el volante redondo que hasta hoy conocemos, además se hizo necesario darle firmeza al sistema logrando cierta irreversibilidad, sobretodo cuando las ruedas chocaban contra un objeto sólido o ante las irregularidades del camino, que repercutían con violencia sobre el timón, haciéndole perder el rumbo al vehículo con gran facilidad, con los peligros consiguientes.

Adicionalmente el mover el volante debía ser una maniobra sencilla, y suave de ejecutar por lo cual se montaron los primeros sistemas de desmultiplicación, que aumentaban la suavidad de operación del sistema.

La mezcla de estas dos características necesarias, produjo a lo largo de su evolución hasta

nuestros días, sistemas más suaves, precisos y sensibles para el conductor, que debe percibir a través de él, el camino por el que transita [Hernández, 2010].

Hasta finales de los años 30, los vehículos usaban eje delantero rígido. Con este primitivo sistema bastaba con poner pivotes en los extremos del eje, para que las ruedas pudieran girar. Una simple barra sólida se encargaba de transmitir el movimiento del timón a la caja de dirección y de allí a los brazos de dirección, para finalizar el recorrido en las ruedas.

En los últimos años se ha popularizado el sistema de dirección de cremallera, usado en los años 30 por BMW.

En los años 40 y 50 se comenzaron a utilizar en los Estados Unidos, sistemas de asistencia de dirección, que sumados a la desmultiplicación lograda, hacían muy peligroso el conducir un vehículo, ya que la dirección quedaba demasiado suave y sensible.

Este problema motivó el desarrollo de dispositivos que endurecieran la dirección, a medida que aumentaba la velocidad de desplazamiento del vehículo.

3.3.1 Tipos de dirección

Bolas recirculantes: Su funcionamiento básico es el siguiente: Inmersos dentro de una caja con aceite grueso (valvulina) hay un gran tornillo roscado, que recibe el extremo de la barra de dirección. Este tornillo da tres o cuatro vueltas alrededor de sí mismo, produciendo el movimiento de una serie de engranajes, este desplazamiento disminuye el esfuerzo que debe realizar el conductor para mover los neumáticos, debe su nombre a que utiliza una serie de esferas que facilitan el movimiento, al hacerlo más suave. Este tipo de dirección se utiliza en vehículos de trabajo pesado y autobuses y camiones de carga [Hernández, 2010].

Cremallera: Es un sistema muy sencillo, cuenta con un piñón que gira hacia la derecha o hacia la izquierda sobre un riel dotado de dientes (cremallera). Estos componentes trabajan inmersos en grasa. Por eso es importante revisar el estado de los cauchos retenedores de este lubricante, para evitar que con su escape, se produzcan desgastes en los componentes.

Dirección asistida hidráulicamente

Funciona igual para cualquier sistema. Cuenta con un tanque de almacenamiento, que suministra el aceite especial a una bomba, que a su vez es accionada por el motor del vehículo mediante una correa proveniente del cigüeñal. Esta bomba acciona un mecanismo hidráulico, que proporciona una fuerza que se suma al esfuerzo que debe hacer el conductor para mover los neumáticos [Hernández, 2010].

Sistema electrohidráulico

Es similar al anterior, pero la fuerza para accionar la bomba hidráulica la suministra un pequeño motor eléctrico, en lugar del motor del vehículo. Tiene como ventaja que no le quita potencia al motor, lo que hace a este sistema ideal para ser usado en vehículo de baja cilindrada. Adicionalmente al ser accionada por un motor eléctrico es susceptible de ser informado por la computadora sobre el comportamiento de la suspensión y la velocidad del vehículo, para ajustar de manera progresiva su dureza.

3.4 Introducción al tren motriz

El tren motriz es la parte más importante del automóvil y es el encargado de convertir la energía del combustible en movimiento de los neumáticos para impulsarlo, puede ser de diversas arquitecturas de acuerdo al propósito a que se destine el vehículo. A continuación se enuncian los esquemas más comunes utilizados en los automóviles de hoy. En todos los casos es necesario la existencia de un elemento de desconexión/conexión entre el motor y el resto de la transmisión conocido como embrague [Riquelme, 2004].

a) Motor delantero. Esquema clásico utilizado en los camiones ligeros y medianos así como en algunos coches de turismo, fue hasta los años 70 casi universalmente utilizado por la mayoría de los autos.

b) Motor transversal. Esquema de la mayoría de los coches de turismo a partir de los años 80s, el motor es transversal al vehículo y toda la transmisión es un sólo conjunto del cual salen los ejes motrices a las ruedas delanteras y directrices al mismo tiempo. Tiene sus

ventajas pero la durabilidad es menor que el clásico.

c) Motor delantero con caja de reenvío. Este esquema es típico de los automóviles 4x4, tiene adicionalmente una caja de reenvío que introduce más reducción en la transmisión (más fuerza) y además divide el movimiento a los dos ejes del vehículo. Generalmente el puente delantero puede hacer tracción o no, a voluntad del conductor

d) Motor trasero. Es el caso típico del automóvil ligero de motor detrás, en él hay un conjunto de caja de velocidades y diferencial, del cual salen los ejes motrices directamente a las ruedas traseras.

e) Motor central. Este esquema es utilizado en algunos transportes públicos grandes ya que dada la longitud, permite colocar el motor entre los ejes delantero y trasero. También se usa el motor detrás del puente motriz con el mismo esquema, claro está, invertido.

De acuerdo a los esquemas vistos el tren motriz puede dividirse en motor, embrague, caja de velocidades, caja de reenvío, barra de transmisión y puente motriz, y esto se puede observar en la Figura 3.7.

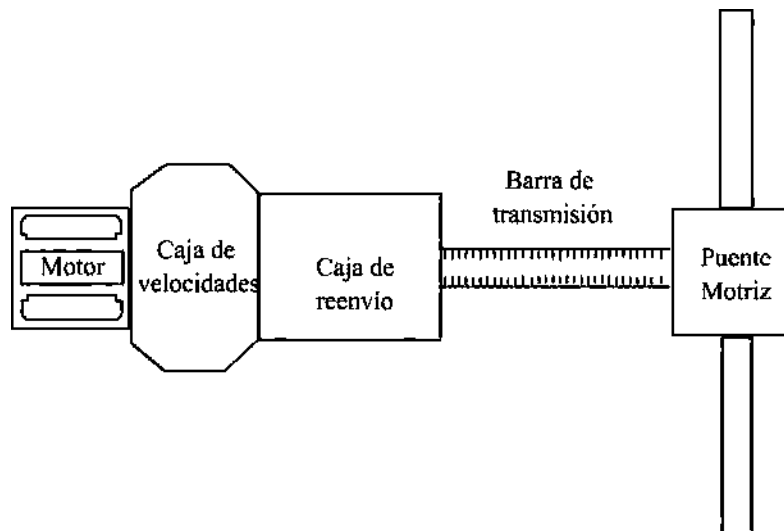


Figura 3.7: Elementos que conforman el tren motriz

3.5 Sistemas Mecánicos en Bond Graph

Existen diferentes caminos para determinar las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos. El propósito de esta sección es mostrar como el Bond Graph proporciona un camino sistemático para describir los sistemas mecánicos y su dinámica correspondiente. El documento fundamental en esta área es el que redactó Karnopp [Barasözen, 1995] y las extensiones de esta teoría aparecen en un libro de texto escrito por Karnopp y otros autores [Wellstead, 1979].

Un concepto clave introducido por Karnopp es la representación de *transformaciones* geométrica (conservadoras de energía) usando *transformadores* en Bond Graph. Esto permite que el Bond Graph sea escrito bajo consideraciones *geométricas*; la conservación de potencia implica automáticamente las fuerzas correspondientes a las velocidades [Fu, 1989].

3.6 Movimiento en dos dimensiones en Bond Graph

La barra rígida de la Figura 3.8 que se mueve en el plano, es un componente estándar de los sistemas mecánicos. Los tres puntos importantes en la barra son los dos extremos y el centro de masa.

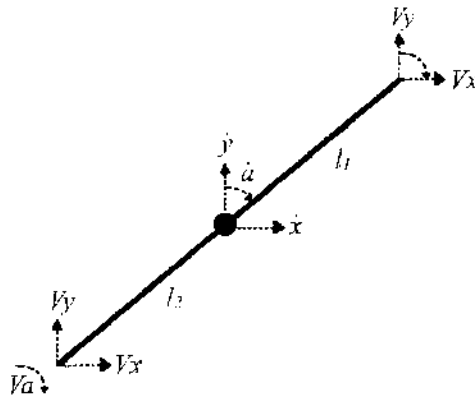


Figura 3.8: Barra rígida

Los extremos son importantes porque definen las conexiones en la barra; el centro de masa es importante debido a que en este punto es más conveniente escribir las ecuaciones de movimiento. La barra rígida por lo tanto, actúa como una *restricción* entre estos tres puntos del espacio [Fu, 1989]. La Figura 3.9 muestra el Bond Graph de un cuerpo rígido.

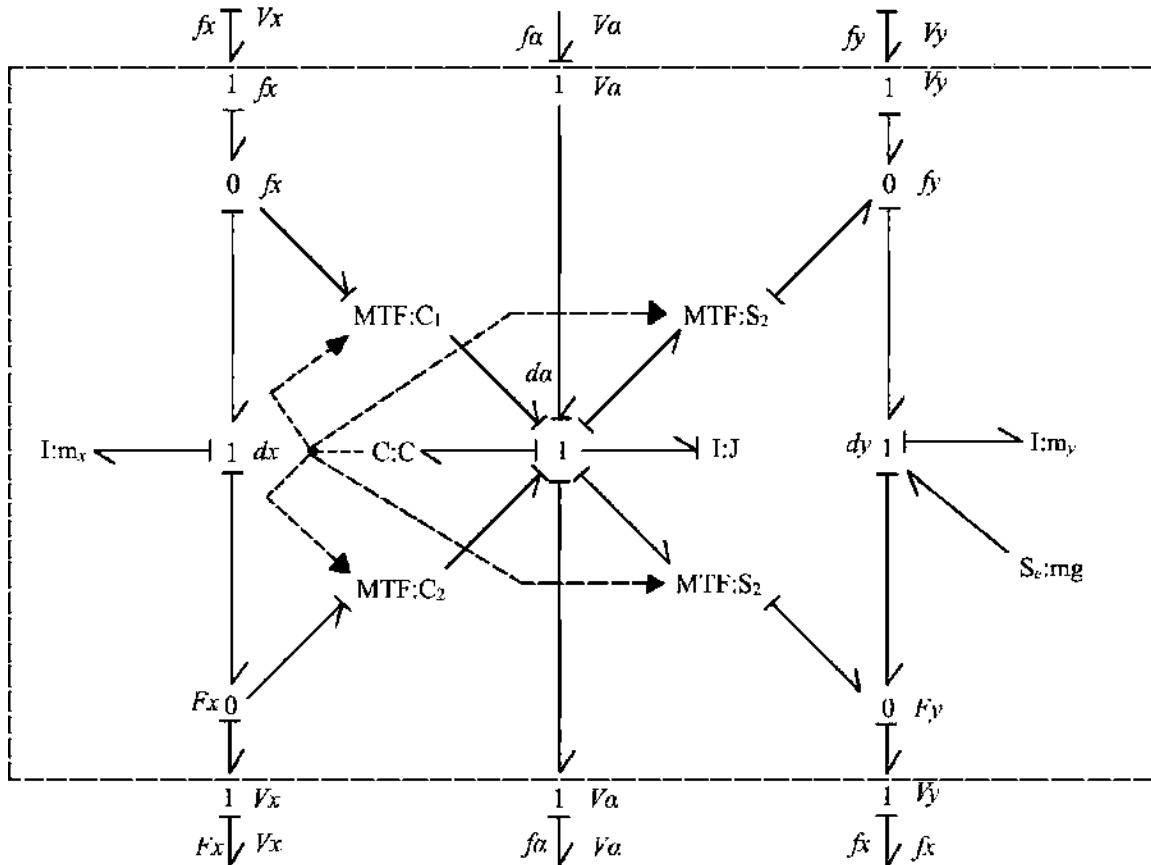


Figura 3.9: Bond graph de la barra rígida

El movimiento se considera con respecto a un sistema de coordenadas absoluto: v_x y v_y son las componentes de velocidad de un extremo con respecto a dicho sistema de coordenadas; V_x y V_y son las componentes de velocidad del otro extremo; \dot{x} y \dot{y} son las componentes de velocidad del centro de masa. Estos tres puntos muestran la misma velocidad angular $\dot{\alpha} = v_\alpha = V_\alpha$. La distancia a partir del primer extremo al centro de masa es l_1 y la distancia

a partir del segundo extremo al centro de masa es l_2 .

La cinemática de la barra es expresada por las ecuaciones:

$$\dot{x} = v_x - v_{x\alpha} \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = v_y + v_{y\alpha} \quad (3.2)$$

$$V_x = \dot{x} - V_{x\alpha} \quad (3.3)$$

$$V_y = \dot{y} + V_{y\alpha} \quad (3.4)$$

donde $v_{x\alpha}$, $v_{y\alpha}$, $V_{x\alpha}$ y $V_{y\alpha}$ son las componentes de velocidad debido a la velocidad angular $\dot{\alpha}$ dada por las ecuaciones de *transformación*:

$$v_{x\alpha} = l_1 \cos \alpha \dot{\alpha} \quad (3.5)$$

$$v_{y\alpha} = l_1 \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (3.6)$$

$$V_{x\alpha} = l_2 \cos \alpha \dot{\alpha} \quad (3.7)$$

$$V_{y\alpha} = l_2 \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (3.8)$$

La dinámica de la barra está dada por las tres ecuaciones (Newton-Euler):

$$\ddot{x} = \frac{\Delta f_x}{m_x}; \quad \ddot{y} = \frac{\Delta f_y}{m_y}; \quad \ddot{\alpha} = \frac{\Delta \tau}{J} \quad (3.9)$$

donde m y J son la masa e inercia de la barra respectivamente, y Δf_x y Δf_y son las fuerzas netas que están actuando en el centro de masa en las direcciones x y y , y $\Delta \tau$ es el par neto que está actuado en el centro de la masa.

El área dentro del cuadro punteado en la Figura 3.9 representa la barra, los seis bonds externos indican cómo se hacen las conexiones a la barra.

- Hay tres componentes etiquetados como m_x , m_y y J , estos implementan las tres ecuaciones de la dinámica de la barra (Ecuación 3.9).
- Hay un elemento- C llamado " C " este tiene rigidez cero y por lo tanto no afecta en el comportamiento del sistema, pero su correspondiente variable de flujo integrada q es:

$$q = \int_0^t \dot{\alpha}(t') dt' = \alpha + q_0 \quad (3.10)$$

Si inicializamos en $q_0 = 0$, $q = \alpha$ y así proporcionar una señal modulante para los transformadores.

- Hay tres uniones-1 etiquetadas dx , dy y $d\alpha$.
 - Estas uniones-1 transportan las tres velocidades asociadas con el centro de masa \dot{x} , \dot{y} y $\dot{\alpha}$.
 - Estas uniones-1 calculan los esfuerzos netos que están actuando en el elemento- I correspondiente (Δf_x , Δf_y y $\Delta \tau$).
- Hay cuatro uniones-0 llamadas f_x , f_y , F_x , F_y .
 - Estas uniones-0 transportan las componentes x y y de la fuerza asociada con las partes *superiores* e *inferiores* de la barra.
 - Estas uniones-0 implican las ecuaciones de la cinemática de la barra (ecuaciones 3.1 a la 3.4).
- Hay cuatro transformadores modulados etiquetados como c_1 , s_1 , c_2 y s_2 .
 - Estos transformadores modulados implican las ecuaciones de transformación (ecuaciones 3.5 a la 3.8).
 - Estos transformadores modulados, por conservación de potencia, también implican las transformaciones de fuerza correspondientes.
 - Estos transformadores son modulados por α (generada por el elemento- C).

3.7 Movimiento en tres dimensiones en Bond Graph

Un Bond Graph entrega una representación de un sistema de libre causalidad en el que, a pesar de que esto implica restricciones en las posibles causalidades de los componentes del sistema; no especifica cuál de las posibles causalidades puede ser utilizada. Esta flexibilidad puede ser usada para dar representaciones causales alternativas del mismo sistema; la selección entre

estas alternativas depende del uso de la representación que se realizará. En este contexto (automotriz) hay tres consideraciones fundamentales para esta selección:

- La necesidad de obtener un significado físico en la dinámica del manipulador.
- La necesidad de generar un código de simulación efectivo.
- La necesidad de comparar las ecuaciones obtenidas con la ecuación de automóvil estándar.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = \tau \quad (3.11)$$

En particular, en el contexto de los manipuladores con manejadores de corriente directa (CD), podemos creer que una perspectiva intuitiva correcta para tales manipuladores es resumida como: *un manipulador es un conjunto de motores de CD acoplados a un mecanismo*. Existen algunas razones para este punto de vista:

1. Si los motores están acoplados al mecanismo a través de una caja de transmisión de una alta relación, el mecanismo parecerá tener una inercia relativamente pequeña para el motor, por lo que la dinámica es dominada por los motores.
2. Es natural pensar en las variables de estado del sistema en términos de velocidades del motor y posiciones; en el caso rígido, este estado determina la posición y velocidad de cada eslabón del mecanismo.
3. Desde el punto de vista del control, es agradable ver el sistema como un conjunto ordenado de sensores y actuadores que muestran de un modo más claro las velocidades angulares y pares del motor.
4. El control, simulación y comprensión de un conjunto de motores desacoplados es relativamente sencillo: la dinámica es expresada por ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que corresponden a un conjunto de integradores dobles [Gawthrop, 1995].

3.8 Modelado Clásico de Automóviles

Antes de entrar de lleno al modelado, se deben de mencionar algunas características del automóvil. Primero, está el sistema de coordenadas fijas Ψ_0 . Con este análisis el cuadro puede ser considerado inercial. Luego, se tiene que asumir un cuadro de cuerpo fijo asignado al cuerpo del auto, Ψ_{auto} . El eje z es seleccionado en la dirección delantera de manejo. El eje y es vertical hacia arriba y el eje x es escogido de tal forma que el sistema coordenado de mano derecha sea usado. En la Figura 3.10 se muestra esta configuración.

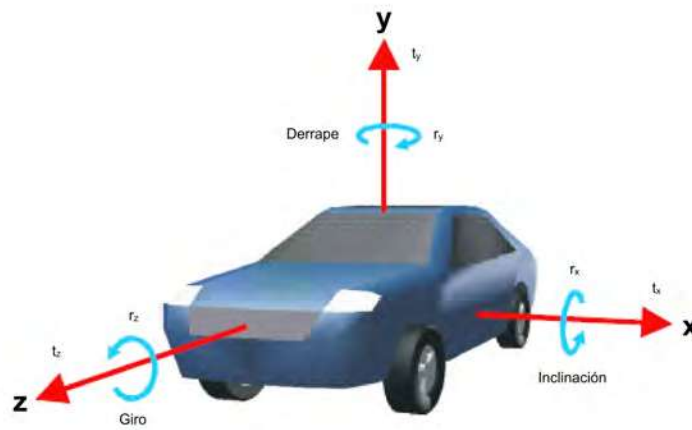


Figura 3.10: Los distintos movimientos en el cuadro fijo del vehiculo

El automóvil puede ser dividido en varios subsistemas, cada uno representando una función elemental de un automóvil. Estas son los neumáticos (y ejes), la suspensión, tren motriz y la dirección.

3.8.1 El cuerpo del automóvil

El núcleo del cuerpo del automóvil es un cuerpo rígido como cualquier otro. Solamente diferirá de cuerpos rígidos como los neumáticos o rodamientos en masa e inercia. Lo importante del

modelado son las conexiones y limitantes con otros cuerpos rígidos.

El modelo del auto será construido desde abajo hacia arriba, comenzando con los neumáticos. El auto necesita de cuatro de estos subsistemas. Cada uno de estas sistemas de eje-llanta tiene que ser conectado al cuerpo del auto con una suspensión. Eventualmente, un torque se tiene que añadir en los neumáticos para la propulsión, y el giro de la dirección tiene que ser implementado.

3.8.2 Neumático y eje

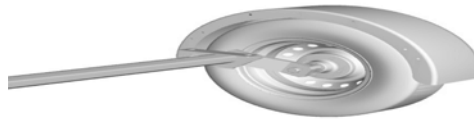


Figura 3.11: Representación en 3D de un neumático y eje

La investigación se comienza con la construcción de una simple llanta con un eje. Estos son conectados por un par cinemático, y en la conexión todos los movimientos menos el rotacional sobre el eje longitudinal del eje están limitadas. Cuando se impone un giro en el primer elemento en la conexión cinemática, la llanta y el eje comienzan a rodar en dirección opuesta. Este comportamiento es consistente con la ley física de la conservación del momento. La figura 3.11 muestra la representación en 3D de este subsistema.

3.8.3 La suspensión

Las suspensiones son de varios tipos dependiendo del comportamiento deseado. Una primera selección es realizada cuando se toma una decisión por resortes independientes. Esto deja fuera a todas las variaciones de la torsión de suspensión, la cual ambas amortigua las dos ruedas en ambos lados de un eje. Cuando se añaden requerimientos para suspensiones separadas, sólo quedan suspensiones de una sola rueda. La Figura 3.12 muestra algunas variaciones de suspensiones de una sola rueda.

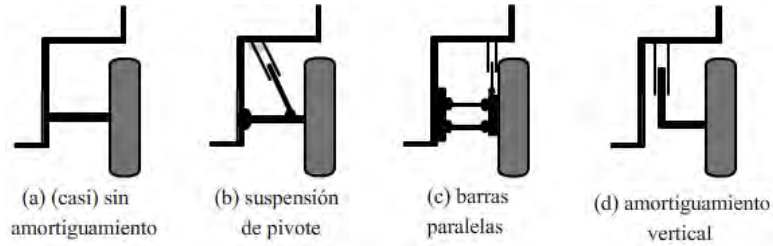


Figura 3.12: Algunos tipos de suspensiones

Como se puede ver, en la Figura 3.12 (a) amortigua muy poco los movimientos verticales debido a la rigidez del eje. La Figura 3.12 (b) amortigua los movimientos verticales usando un eje conectado a una articulación. La rueda describe un movimiento circular, más que un movimiento vertical alrededor de este punto. Esta configuración ya no es usada comunmente. El elemento (c) de la Figura 3.12 usa dos barras paralelas para habilitar un movimiento casi vertical para la rueda. Varios tipos de suspensiones de horquilla están basadas en este concepto. Esta es la variación más realista en la figura. Finalmente, la Figura 3.12 (d) muestra un verdadero movimiento vertical, aunque no es real su construcción.

Restringiendo el cuerpo rígido a cierto tipo de movimientos, puede agregar algunas dificultades, ya que algunos movimientos de giro son acoplados. Para un cuerpo rígido, los movimientos circulares son mecánicamente acoplados a los movimientos traslacionales, de modo que, tanto la rotación como la traslación son deseadas, un tercer movimiento no deseado puede presentarse. Este problema puede ser resuelto proyectando el movimiento del cuerpo en las direcciones posibles e ignorando las fuerzas en las direcciones restringidas usando ecuaciones de Lagrange-d' Alembert. Podemos evitar estas matemáticas relativamente complejas mediante la asignación de los movimientos a cuerpos separados, de modo que cada cuerpo sólo realice un movimiento en particular. En el modelo, la última solución ha sido aplicada definiendo una carga. De esta manera, el eje puede ser restringido sólo a rotaciones y la carga a simples traslaciones verticales.

La suspensión requiere un movimiento vertical amortiguado. Esto significa que el par cinemático de la llanta y el eje tiene que ser cinemáticamente conectado al cuerpo del auto y

limitado solamente a movimientos verticales.

La Figura 3.13 muestra la construcción de una suspensión para un neumático. La limitante a movimientos verticales (T_y) es hecha en forma similar que la rotación de la llanta. La descripción de la suspensión es un submodelo de ecuaciones, las cuales integran la velocidad del movimiento vertical a la posición relativa x , subsecuentemente, esta posición es usada para regresar una fuerza en la dirección opuesta de la forma de la ecuación (3.12).

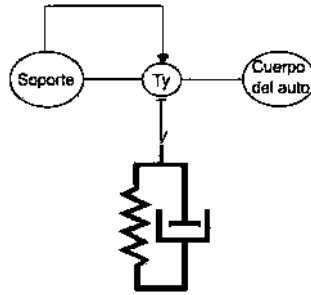


Figura 3.13: Modelo de una suspensión

$$F = \frac{1}{2}k_2 \left(x + \sqrt{\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + (ep \cdot s)^2} + x - \sqrt{\left(-x - \frac{s}{2}\right)^2 + (ep \cdot s)^2} \right) + k_1 \cdot x + d \cdot v \quad (3.12)$$

donde

F es la fuerza generada por el sistema, la cuál será "absorvida" por el amortiguador

k_1 es la rigidez en la región nominal

k_2 es la rigidez fuera de la región nominal

s es el intervalo del juego (región de la suspensión)

d es el coeficiente de amortiguamiento

ep es la "nitidez" de la región de transición

v es la velocidad vertical

[Boer, 2002].

3.8.4 Dirección

En un sistema de dirección del automóvil convencional, el volante está mecánicamente vinculado a las ruedas delanteras. La dirección por cable elimina la conexión mecánica y en cambio, controla electrónicamente el ángulo de dirección basado en la medición del ángulo de volante.

Un modelo de la dirección por la aplicación de cable se muestra en la Figura 3.14. El sistema de accionamiento de dirección está formado por el actuador, sensor de ángulo del eje y válvula de carrete giratoria (una parte integral de la potencia hidráulica ayuda a la unidad). Junto con la cremallera y el piñón, las uniones de dirección, y las ruedas delanteras, el sistema combinado puede ser aproximarse por un modelo de dos grados de libertad. La inercia del actuador del rotor y la inercia del eje superior se agrupan en una sola inercia. La inercia del piñón, la masa de la cremallera, las inercias de unión de dirección, y las inercias de las ruedas se agrupan en una inercia por separado. Con la finalidad de obtener una mayor estabilidad, la inercia se define en torno al eje de rotación de la dirección de las ruedas delanteras. La barra de torsión, que se encuentra dentro de la válvula de carrete giratorio, conecta las dos masas y les permite moverse uno respecto al otro [Oh, 2004].

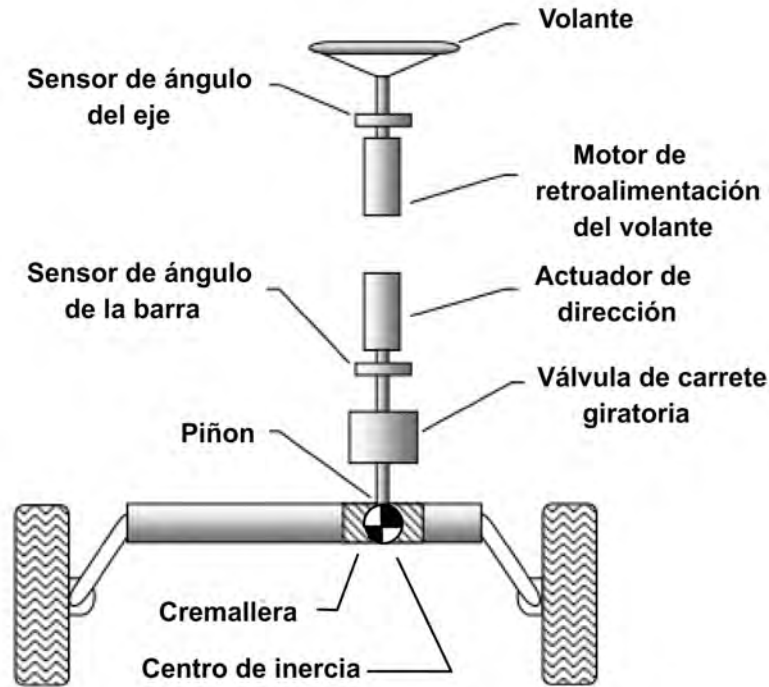


Figura 3.14: Componentes de la dirección de un automóvil

3.9 Modelo de un cuarto de auto en bond graph

El modelo de un cuarto de auto consiste en la rueda, una masa sin suspensión, una masa con suspensión y los componentes de la suspensión descritos en la Figura 3.15 [Silva, 2007]. La rueda es representada por la llanta, la cual tiene características elásticas. El peso de la rueda, el peso del eje y todo lo que se encuentra geoméricamente abajo de la suspensión está incluido en la masa sin suspensión. La masa con suspensión es el cuerpo, o en otras palabras, el chasis del auto. La suspensión puede consistir de varias partes, por lo que se puede hablar sobre suspensiones pasivas, semiactivas y activas.

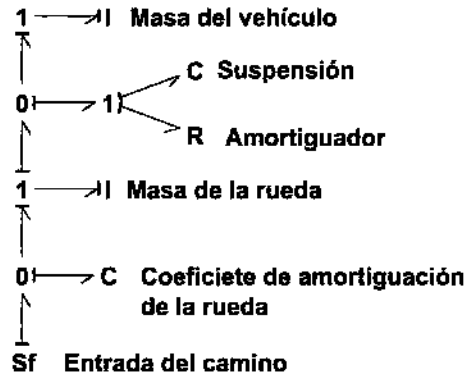


Figura 3.15: Modelo de un cuarto de automóvil

3.10 Modelo de un cuarto de auto con suspensión pasiva en bond graph

La configuración del modelo de un cuarto de auto con suspensión pasiva es el más sencillo, ya que en este modelo sólo se representa la rueda, la masa no suspendida, la suspensión pasiva (amortiguador y resorte) y la masa con suspensión, como se muestra en la Figura 3.15.

3.11 Modelo de cuarto de auto con suspensión semiactiva en bond graph

Mediante el empleo de sistemas regulados se permite variar los mecanismos de suspensión y amortiguación para adaptarlos a necesidades de uso deportivo o confort. Por eso se habla del mecanismo de suspensión semiactiva, en Figura 3.16 se mencionan sus componentes básicos, que utilizan al contrario que una suspensión convencional, componentes regulables que pueden estar asistidos por la electrónica: sensores, módulos electrónicos, etc. Estos sistemas se denominan "semiactivos" y no necesitan de canal externo de energía.

En la suspensión semiactiva el amortiguador es el elemento que "absorbe" la energía

generada por las irregularidades en el camino cuando estos se presentan en altas frecuencias, mientras que la suspensión es la que absorbe esta energía cuando las irregularidades se presentan en bajas frecuencias y su rigidez es determinada por el regulador que obtiene la información de sensores.

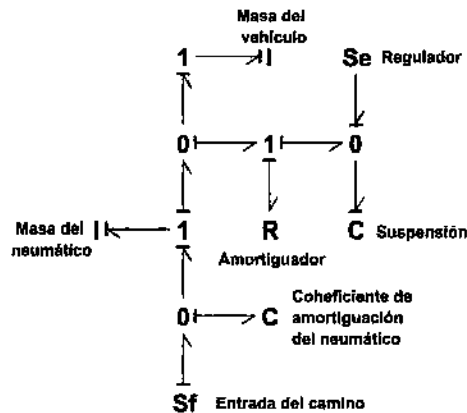


Figura 3.16: Modelo de suspensión semiactiva

El regulador es el elemento más importante de la suspensión semiactiva al ser el que proporciona la energía a la suspensión, regulando su rigidez y permitiendo que exista movimiento en esta.

3.12 Modelo de un cuarto de auto con suspensión activa en bond graph

Las suspensiones activas se componen de un sistema hidráulico o neumático, capaz de generar fuerzas para compensar el balanceo y el cabeceo del vehículo. Una computadora o un microcontrolador se encarga de recolectar los datos tomados por sensores distribuidos estratégicamente para poder enviar las señales adecuadas a los actuadores, y que éstos actúen de forma que se mantenga un nivel máximo de estabilidad.

La principal ventaja de la suspensión activa frente a la suspensión pasiva es que la suspensión activa permite un control de cada rueda independiente. Gracias a este control se consigue mayor adherencia del vehículo al terreno, con lo que se aumenta la seguridad en la conducción.

Las principales desventajas de la suspensión activa es su elevado costo y el alto consumo energético, principalmente para el control sobre altas frecuencias, cuya implementación resulta demasiado costosa, por lo que es inviable en vehículos de serie en estos tiempos.

Un modelo de esta configuración se muestra en la Figura 3.17, y en ella se muestran los elementos que la conforman, los cuales son prácticamente los mismos que en la suspensión pasiva, con excepción de la suspensión, el cual en esta configuración es una servo-válvula hidráulica, la cual está conectada a un sistema de control [Urbieto, 2003]. En la Figura 3.18 se muestra el esquema mecánico de una servo-válvula.

En la Figura 3.17 los elementos C_n e I_n son los elementos correspondientes a la rueda (coeficiente de amortiguación y masa respectivamente); el elemento R_a es el amortiguador que mantiene el mismo comportamiento; los elementos $MS_f : a$, $MS_f : b$ y R_c constituyen un sistema comparador de los datos obtenidos de los sensores colocados en la rueda y la unión con el cuerpo del auto; el elemento $MS_e : c$ transmite la señal de entrada (datos comparados) al flujo de potencia; la inercia I_e representa una bobina y la R_e una resistencia eléctrica, estos elementos son los que forman la parte eléctrica de la servo-válvula; el elemento $GY : r$ transforma el campo magnético generado por la bobina en fuerza mecánica; el elemento I_m representa la masa de la suspensión; el elemento R_m representa un amortiguador y el elemento C_m representa el resorte de la suspensión de la servo-válvula [Cellier, 2005].

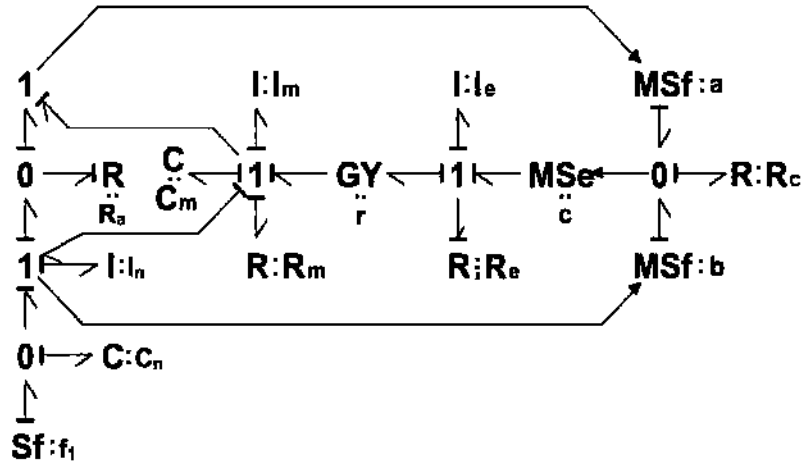


Figura 3.17: Modelo de suspensión activa

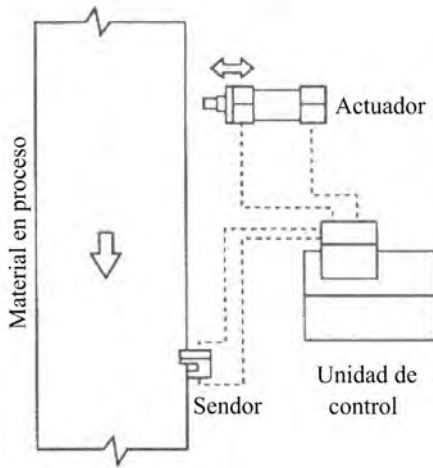


Figura 3.18: Esquema mecánico de una servo-válvula

3.13 Modelado equivalente en Bond Graph

La finalidad de estos modelos equivalentes en bond graph respecto a los sistemas físicos, es la de mostrar la correspondencia de sus elementos en Bond Graph.

3.13.1 Modelo de un cuarto de auto

El modelo de un cuarto de un automóvil es la primera parte a estudiar para comprender el funcionamiento del auto. Este subsistema corresponde a un neumático con su correspondiente suspensión y peso del auto correspondiente.

Suspensión pasiva

En la Figura 3.19 se muestra la correspondencia de elementos en bond graph con un sistema físico. En la Figura 3.19 el elemento $Sf : f$ representa el terreno por donde transita el auto y es el elemento por el que entran perturbaciones al sistema; los elementos C_n e I_n son las componentes del neumático, donde C_n es el amortiguamiento que presenta el neumático cuando se presentan irregularidades en el terreno, no es un amortiguamiento a gran escala, ya que la mayor parte de la energía la absorbe el sistema de la suspensión, mientras que I_n es la representación de la masa del neumático; I_{au} representa la masa del auto correspondiente al cuarto de automóvil; R_a y C_a representan el sistema de suspensión, R_a es la parte de amortiguamiento, que es la que evita movimientos bruscos del cuerpo del auto, y C_a es la parte de suspensión, soporta la mayor parte del peso del cuerpo del auto mientras se encuentra en reposo o sin perturbaciones, pero en cuanto alguna irregularidad en el camino se hace presente, es el elemento que absorbe la mayor parte de la energía generada, y junto al amortiguamiento evitan movimientos bruscos (saltos) en el cuerpo del auto.

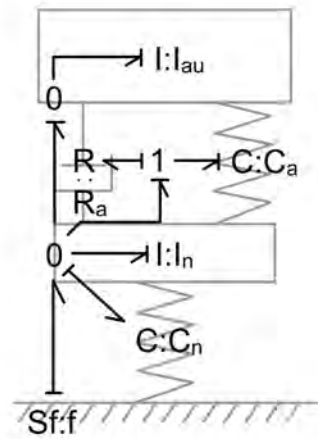


Figura 3.19: Cuarto de auto con suspensión pasiva

Suspensión activa

En el modelo de suspensión activa parece que los elementos C_m y R_a cambiarán, pero esto se debe a que cuando se trabaja con estas suspensiones en Bond Graph, el comportamiento del elemento C_m es similar al del elemento R_a debido a la presencia de la servo-válvula, ya que en una suspensión pasiva el elemento C_a es el encargado de absorber la mayoría de la energía generada por las irregularidades del camino y de soportar el peso del automóvil, pero en la suspensión activa es la servo-válvula la que disipa la energía generada por las irregularidades del camino y soporta la mayor parte del peso del automóvil durante el trayecto. Esto se puede observar en la Figura 3.20.

De igual forma que en la suspensión pasiva $Sf : f$ representa el terreno por el que transita el auto y las irregularidades entran al sistema; $I : I_{au}$ representa la masa del cuerpo del auto correspondiente al cuarto de auto; I_n y C_n son los elementos que representan la masa y el amortiguamiento del neumático respectivamente, y su funcionamiento es el mismo; para el sistema de suspensión se tienen los componentes del amortiguador, que en este caso es una servo-válvula formada por los elementos $MSe : e, I : I_e, R : R_e$ (parte eléctrica),

$GY : r, I : I_m, R : R_m, C : C_m$ (parte mecánica) y R_a (suspensión), el elemento R_a es el que absorbe gran parte de la energía generada cuando son perturbaciones de baja frecuencia (irregularidades poco frecuentes en un tiempo corto) y la servo-válvula absorbe la otra parte de la energía y proporciona la posición final del cuerpo del auto, pero cuando se presentan perturbaciones de alta frecuencia (irregularidades constantes en un tiempo muy corto) la servo-válvula absorbe la mayor parte de la energía generada y proporciona la posición final del cuerpo del auto y la demás energía es absorbida por el elemento R_a .

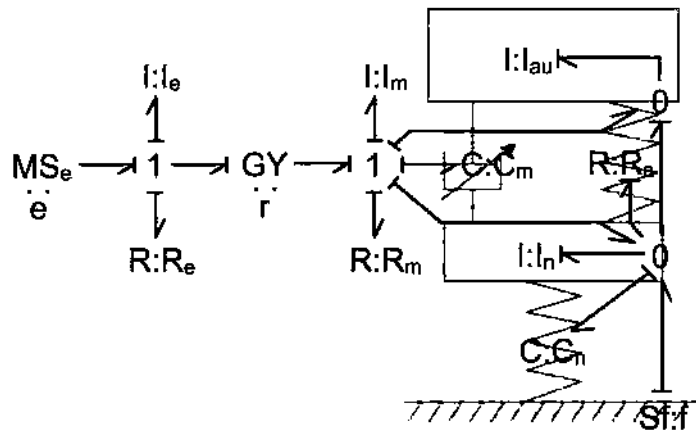


Figura 3.20: Cuarto de auto con suspensión activa

3.13.2 Modelo de medio auto

El modelo de medio automóvil también es llamado configuración de bicicleta [Wu, 2004], ya que este modelo corresponde a un corte longitudinal del auto. En este modelo se toma en cuenta el cuerpo del auto y su inclinación.

Suspensión pasiva

El modelo de medio auto con suspensión pasiva se muestra en la Figura 3.21, donde se aprecia que en este modelo se agregan elementos que representan la masa del auto, la inclinación y la fuerza de gravedad que actúa sobre el cuerpo del auto.

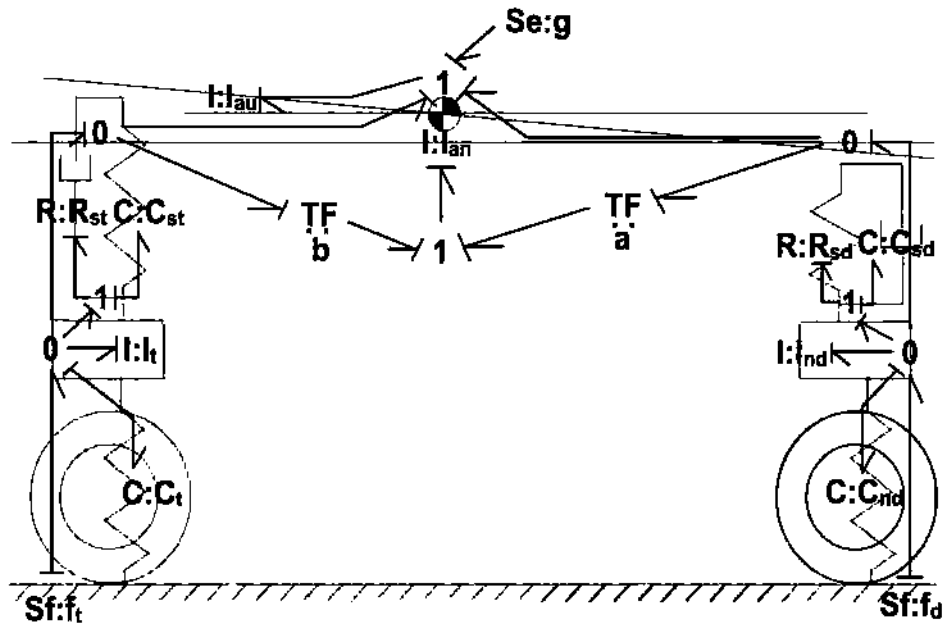


Figura 3.21: Medio auto con suspensión pasiva

En el modelo de medio auto los elementos $Sf : f_t, C : C_t, I : I_t, R : R_{st}, C : C_{st}$ son los elementos de la parte trasera del modelo; $Sf : f_d, C : C_{nd}, I : I_{nd}, R : R_{sd}, C : C_{sd}$ son los elementos de la parte delantera del modelo, $Se : g$ es la representación de la fuerza de gravedad presente sobre el cuerpo del auto, $I : I_{au}$ representa la masa del auto, $I : I_{an}$

representa el ángulo de inclinación del cuerpo del auto, y los elementos $TF : a$ y $TF : b$ son los que transforman los esfuerzos del sistema de suspensión delantero y trasero, respectivamente en momentos angulares para determinar la posición angular del cuerpo del auto.

Suspensión activa

En la Figura 3.22 se muestra el modelo de medio auto con suspensión activa. Como se puede apreciar, las suspensiones están conectadas a la unión que indica la presencia de la fuerza de gravedad y la inclinación del cuerpo, debido a que el comportamiento de las suspensiones son las que tienen más impacto en el ángulo de inclinación del cuerpo del modelo.

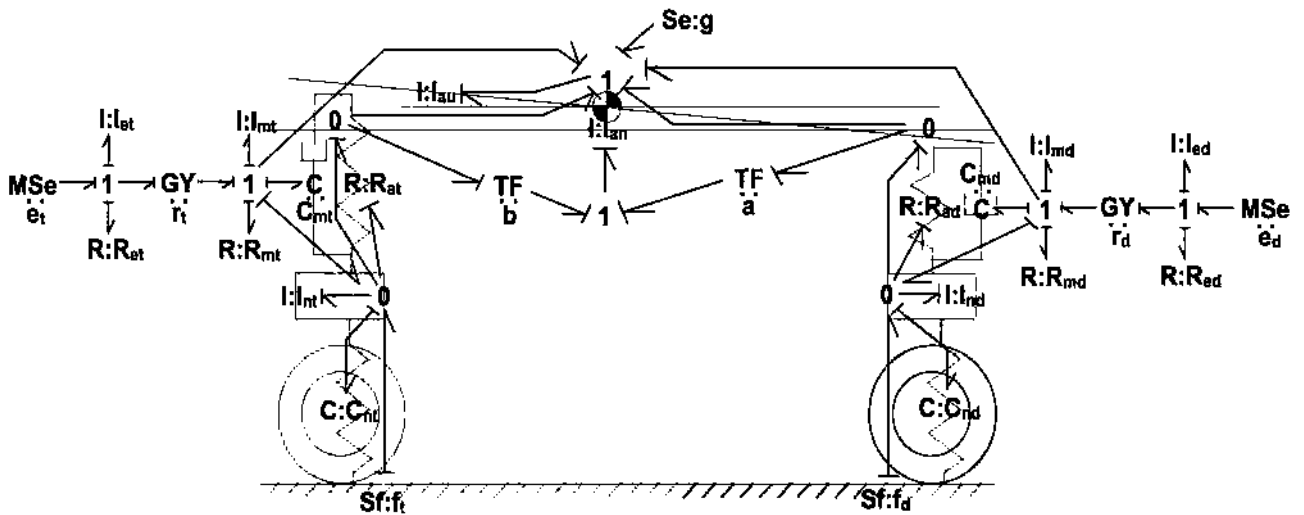


Figura 3.22: Medio auto con suspensión activa

De la misma manera se hace distinción entre los elementos de la parte trasera y delantera, los elementos de transformación, masa del auto y ángulo del cuerpo del auto; la diferencia más notoria es el cambio del sistema de suspensión, ya que en este modelo son dos los sistemas de suspensión los que actúan sobre el cuerpo del auto junto con la fuerza de gravedad, pero esto no agrega cálculos complejos al sistema, sólo ecuaciones simples para el desarrollo del modelo de medio auto.

3.13.3 Modelo de auto completo

Este modelo consiste en cuatro modelos de cuarto de auto unidos por medio de un arreglo de anillos de Euler, el cuál representa el cuerpo del automóvil en 3D.

3.13.4 El anillo de Euler

En el modelado de objetos en 3D, es necesario utilizar las ecuaciones de Euler que representan el movimiento de un cuerpo en movimiento en 3D en un marco local. Las fuerzas F_x, F_y, F_z (3.13) y el momento T_x, T_y, T_z (3.14) resultan del efecto de los subsistemas de la rueda y la suspensión, como se puede apreciar en la Figura 3.23. Cada uno de ellos es modelado a continuación descompuesto en los ejes -x, -y y -z, los cuales corresponden a las dinámicas longitudinal, lateral y vertical, respectivamente.

$$\begin{aligned} F_x &= m\dot{v}_x + m\omega_y v_z - m\omega_z v_y \\ F_y &= m\dot{v}_y + m\omega_z v_x - m\omega_x v_z \\ F_z &= m\dot{v}_z + m\omega_x v_y - m\omega_y v_x \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} T_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y I_{zz}\omega_z - \omega_z I_{yy}\omega_y \\ T_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z I_{xx}\omega_x - \omega_x I_{zz}\omega_z \\ T_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x I_{yy}\omega_y - \omega_y I_{xx}\omega_x \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para la dinámica vertical se utiliza el bond graph de la Figura 3.15, pero este modelo está unido al modelo del cuerpo del auto en lugar de sólo a un elemento de almacenamiento I. La fuerza F_z ejercida en el centro de la masa es calculada en (3.15), donde F_{zi} es la fuerza de la suspensión i -ésima.

$$F_z = \sum_{i=1}^{i=4} F_{zi} \quad (3.15)$$

En la dinámica lateral, las componentes F_y totales sobre el cuerpo resultan de las contribuciones de cada una de las fuerzas laterales, cada una siendo determinada por el modelo lateral de Pacejka.[Aparicio, 1995] En las siguientes ecuaciones $F_z N_i$ es la fuerza del neumático i -ésimo, y sa_i es el ángulo de deslizamiento i -ésimo.

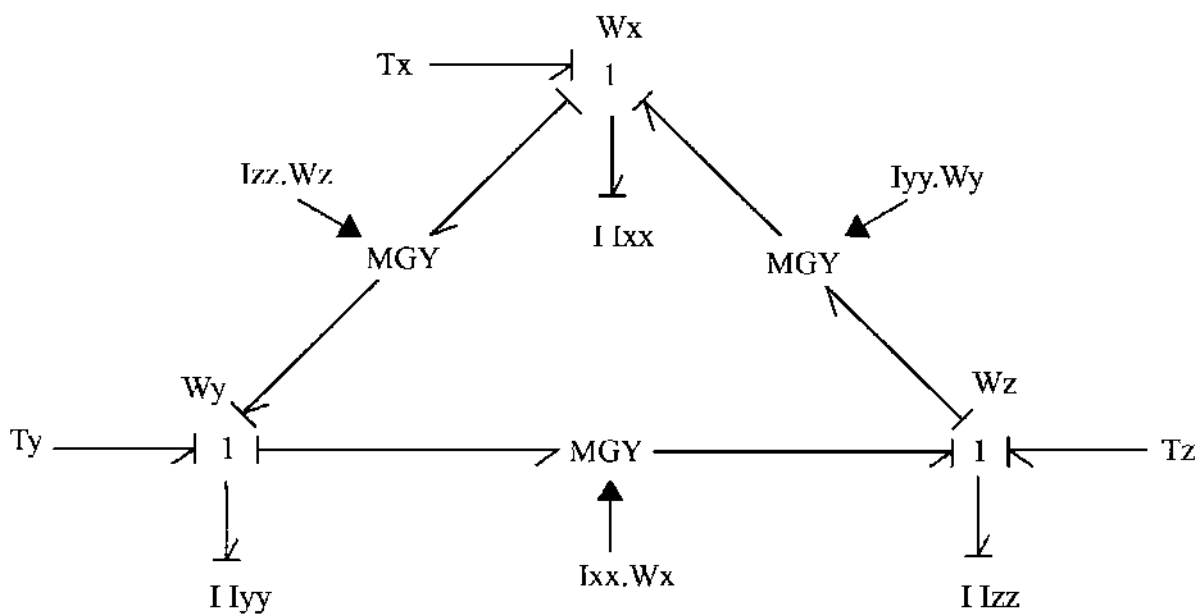
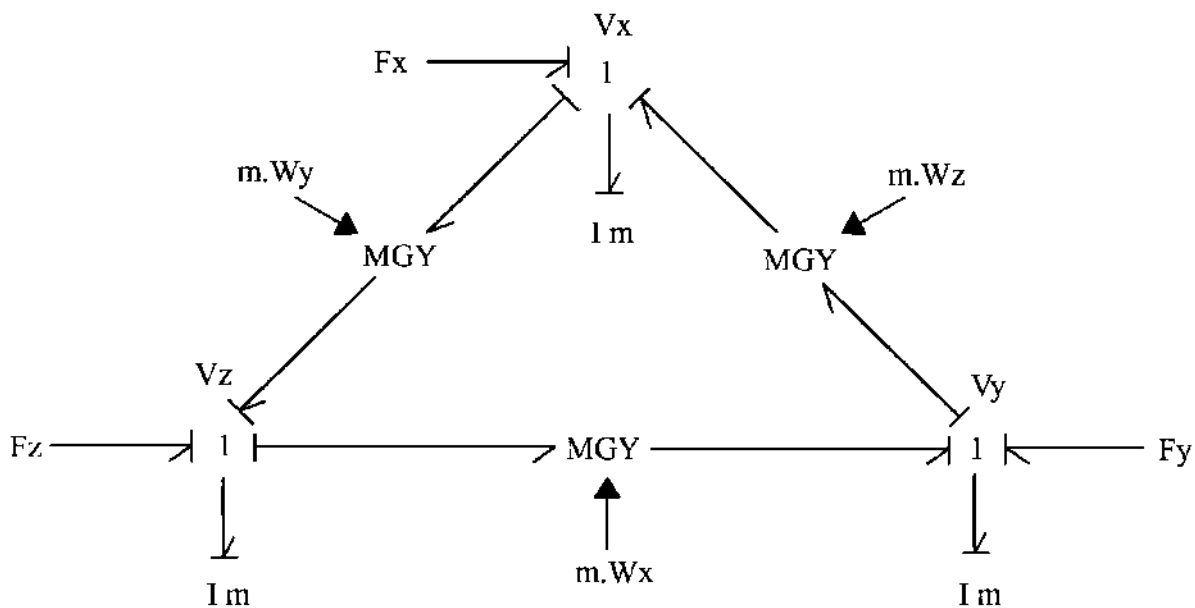


Figura 3.23: Anillos de Euler para fuerzas y torques

$$\begin{aligned}
 F_y &= F_{lat1} \cdot \cos \delta + F_{lat2} \cdot \cos \delta + F_{lat3} + F_{lat4} \\
 F_{lati} &= f_{NL}(F_z N_i; s a_i)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

De acuerdo con [Aparicio, 1995], las ecuaciones para los ángulos de deslizamiento (frontal y trasero) son las siguientes,

$$s a_{1,2} = \delta - \frac{v_y}{v_x} - \frac{a \cdot \omega_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}; s a_{3,4} = -\frac{v_y}{v_x} + \frac{b \cdot \omega_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \tag{3.17}$$

En las dinámicas longitudinales, la fuerza total F_x en (3.18) está compuesta por todas las fuerzas longitudinales de los neumáticos y la proyección de dos fuerzas laterales (F_{lat1} y F_{lat2}) sobre el eje x. El modelo también considera la fuerza aerodinámica, cuyo valor depende de la velocidad longitudinal V_x .

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_{long1} \cdot \cos \delta + F_{long2} \cdot \cos \delta + F_{long3} + F_{long4} \\
 &\quad - F_{lat1} \cdot \sin \delta - F_{lat2} \cdot \sin \delta - F_{aero} \\
 F_{longi} &= f_{NL}(F_i N_i; deslizaje_i) \text{ Modelo longitudinal de Pacejka} \\
 deslizaje_i &= \frac{R \cdot \omega_{neumáticoi} - V_x}{R \cdot \omega_{neumáticoi}}, F_{aero} = \frac{1}{2} C_x \cdot \rho \cdot V_x^2 \cdot A
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

El coeficiente C_x representa la resistencia aerodinámica (variable que cambia dependiendo del tipo de automóvil a estudiar); ρ la densidad del aire; y A el área total frontal del auto.

Los momentos sobre el cuerpo corresponden a la serie de ecuaciones (3.19) que representan los momentos sobre el cuerpo producidos por las fuerzas mencionadas anteriormente. T_M es la suma de los momentos que produce el motor sobre las cuatro ruedas.

$$\begin{aligned}
 T_x &= (F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4}) \cdot h + (F_{z1} + F_{z3}) \cdot (-c) + (F_{z2} + F_{z4}) \cdot d \\
 T_y &= -(F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4}) \cdot (h - R) + (F_{x1} + F_{x2}) \cdot (-a) + (F_{x3} + F_{x4}) \cdot b + T_M \\
 T_z &= (F_{x1} + F_{x3}) \cdot c + (F_{x2} + F_{x4}) \cdot (-d) + (F_{y1} + F_{y2}) \cdot a + (F_{y3} + F_{y4}) \cdot (-b)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde a y b son la mitad longitudinal del cuerpo del auto respectivamente; c y d son la mitad transversal del cuerpo del auto respectivamente; h corresponde a la altura desde el suelo

hasta el centro del cuerpo del auto; y R es el radio de los neumáticos. Lo anterior se puede apreciar en la Figura 3.24.

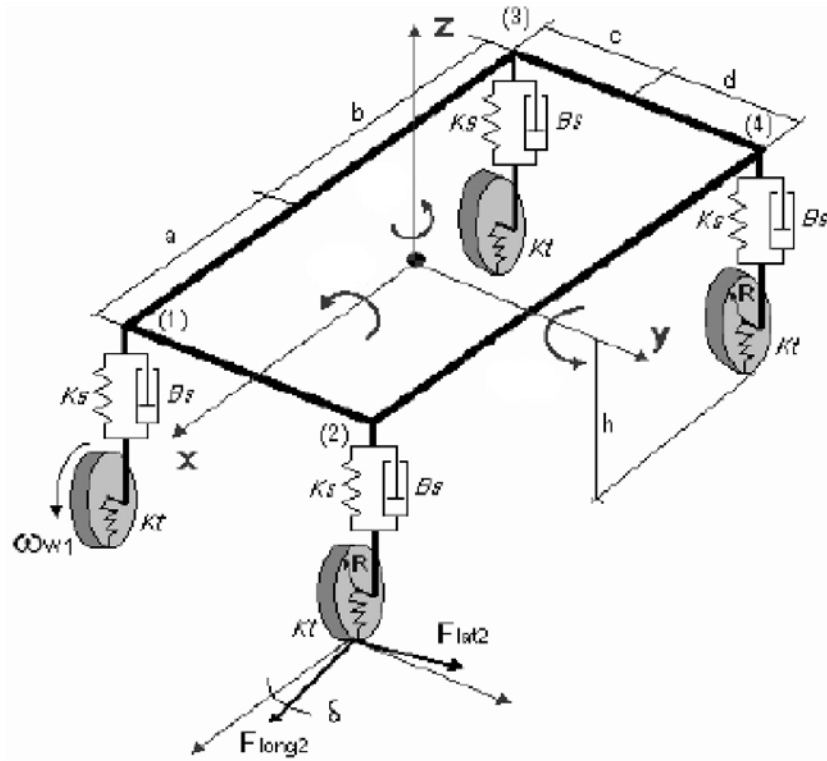


Figura 3.24: Modelo completo del auto

Los anillos de Euler aplicados al modelo en bond graph de un automóvil se ilustra en la figura 3.25.

Los esfuerzos en (3.21) son definidos a partir del conjunto de ecuaciones de esfuerzo (3.20), son utilizados para calcular el conjunto de esfuerzo en las ruedas con el bond graph de transformadores (TF BG) de la Figura 3.25. Aquí, se asume un desplazamiento angular pequeño, el cuál resulta en un bond graph lineal parametrizado por las dimensiones del cuerpo del auto [Bel]. La sub-implementación en bond graph (3.21), necesaria para acoplar los bond graphs de las Figuras 3.23 y 3.25, se muestran a continuación.

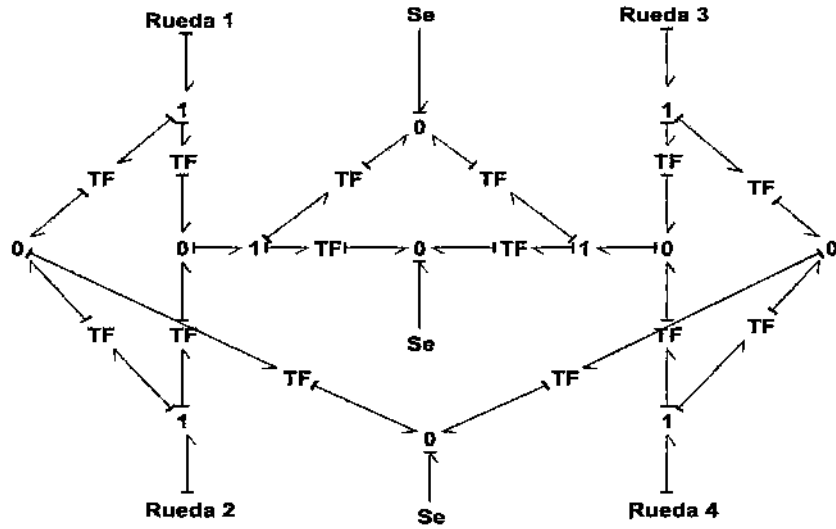


Figura 3.25: Acople anillos de euler cuerpo automovil

$$\begin{aligned}
 T_x &= F_y h + (F_{z1} + F_{z3})(-c) + (F_{z2} + F_{z4})d \\
 T_y &= -F_x(h - R) + (F_{z1} + F_{z2})(-a) + (F_{z3} + F_{z4})b - T_M
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$F_z = F_{z1} + F_{z2} + F_{z3} + F_{z4} + peso_z$$

$$\begin{aligned}
 T'_x &= T_x - F_y h \\
 T'_y &= T_y + F_x(h - R) + T_M
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$F'_z = F_z - peso_z$$

[Silva, 2007].

Suspensión pasiva

En el modelo del auto completo con suspensión pasiva ilustrado en la Figura 3.26 se muestran las conexiones de los cuatro modelos de las suspensiones pasivas al arreglo de transformadores que representan el cuerpo del auto.

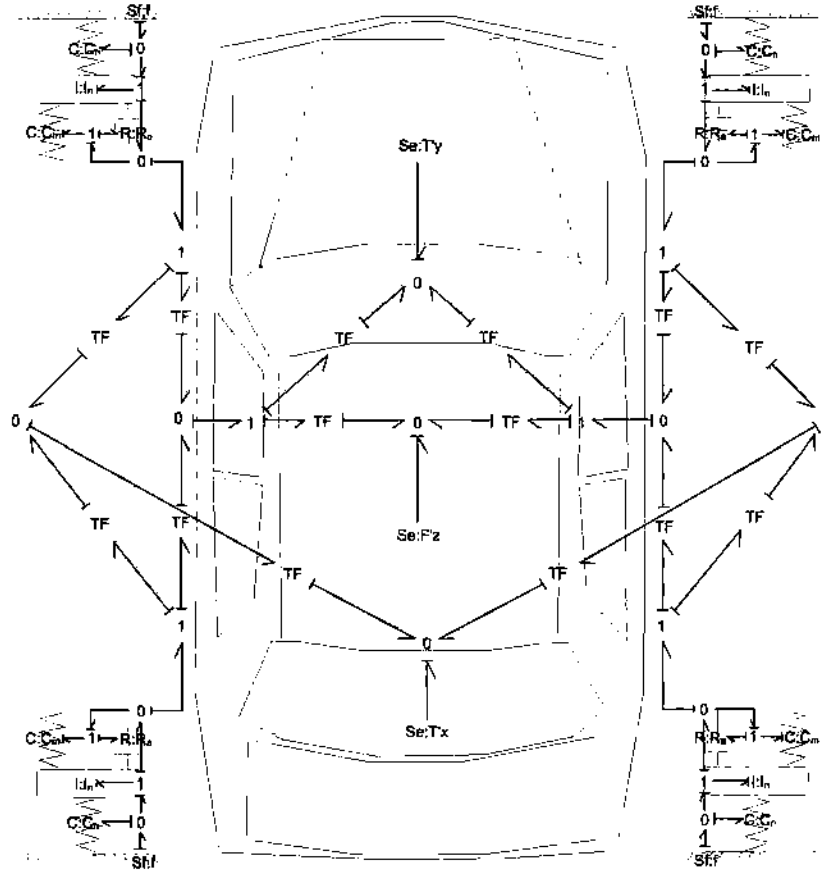


Figura 3.26: Auto completo con suspensión pasiva

Suspensión activa

Para poder acoplar los modelos de suspensiones activas al auto completo, es necesario representar el peso del automóvil añadiendo un elemento I (como se puede apreciar en la Figura 3.27) al cuál se conecta la servo-válvula para que pueda realizar la acción de amortiguamiento correctamente. El peso del auto no es añadido a este modelo como una inercia calculada mediante las ecuaciones correspondientes del arreglo de anillos de Euler, que serán mostradas más adelante, ya que el peso del auto está distribuido en el arreglo en forma de torsiones y esfuerzos.

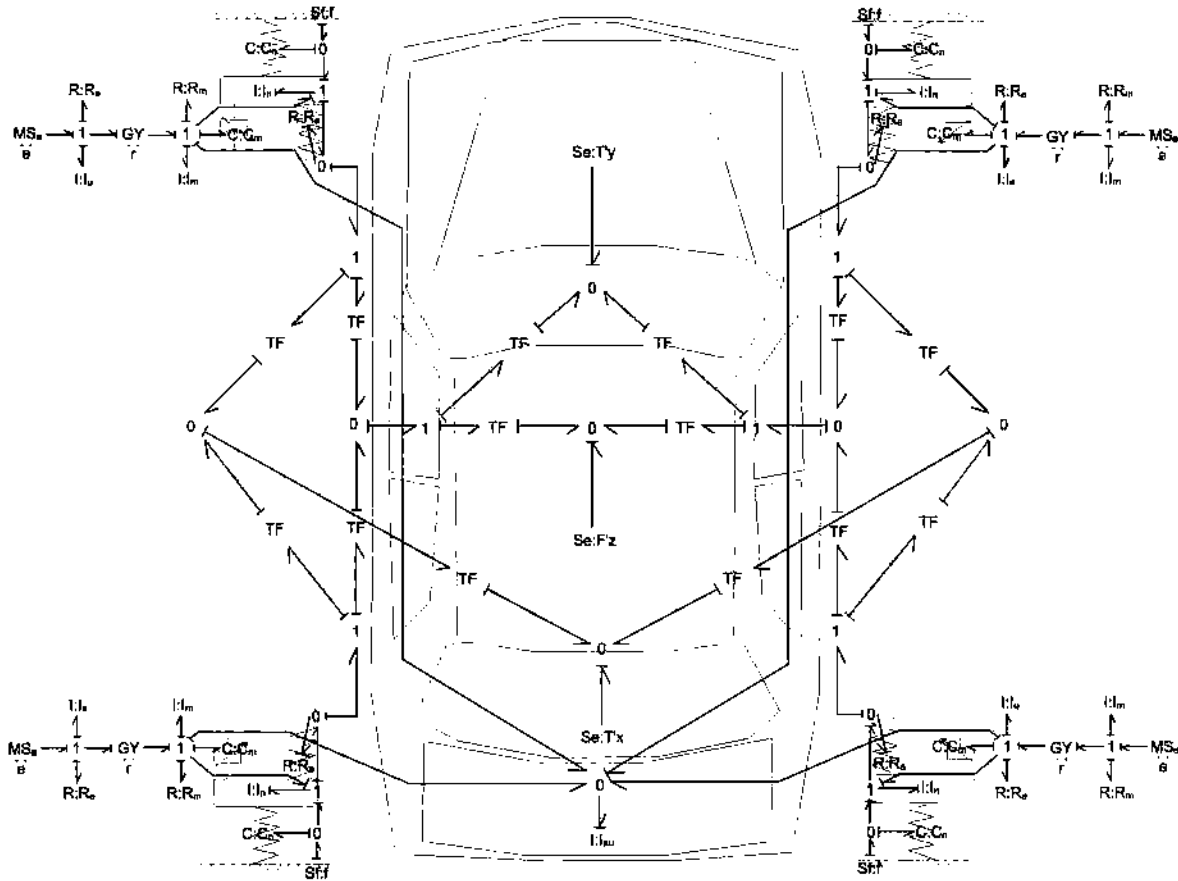


Figura 3.27: Auto completo con suspensión activa

Modelo de auto completo con sistema de dirección

Al modelo anterior se acopla el sistema de dirección, el cuál es conectado a las ruedas delanteras ya que es la configuración más utilizada en la actualidad en el diseño de los automóviles. En la Figura 3.28 sólo se muestra con suspensión pasiva por cuestión de dimensiones, ya que el modelo es el mismo que los anteriores y la finalidad es mostrar la unión de los modelos de los sistemas.

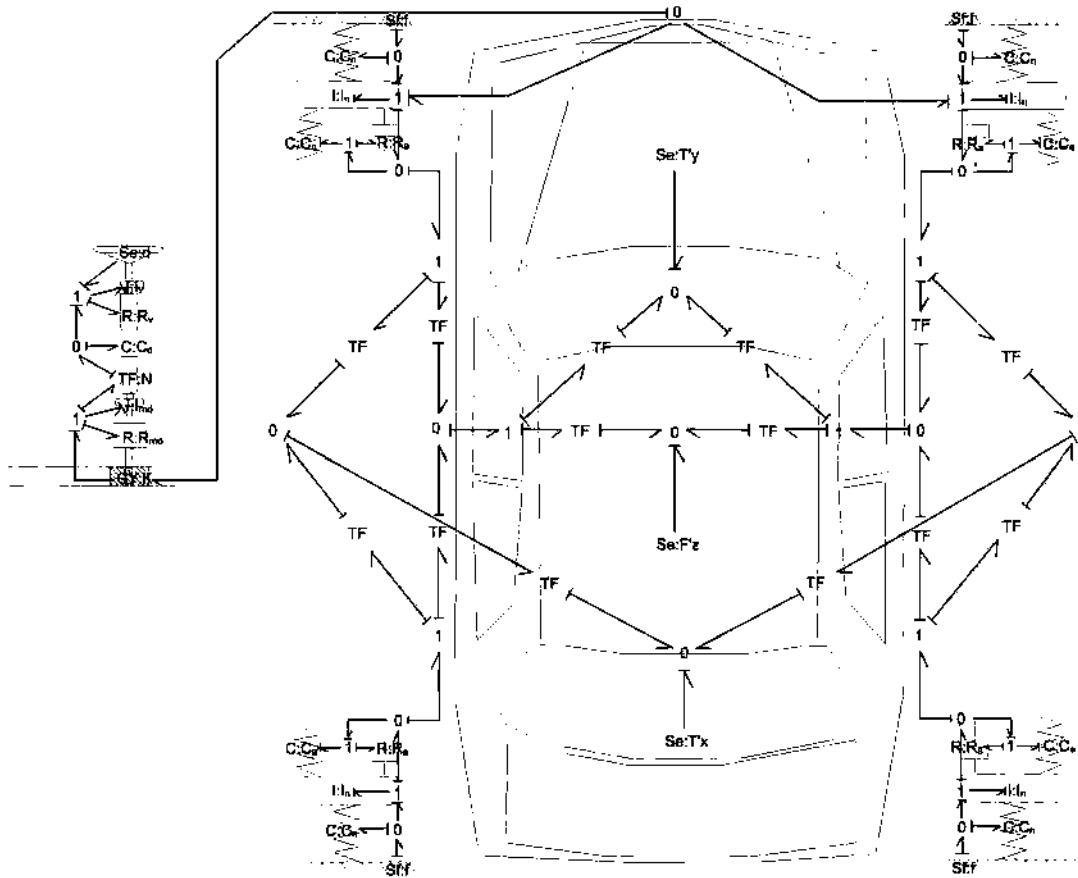


Figura 3.28: Modelo de auto completo con dirección

El modelo del sistema de dirección consta de un elemento $Se : d$ indica los movimientos del volante que realiza el conductor, I_v y R_v representan el volante, C_d representa la columna

de la dirección, $TF : N$ representa la proporción de giro del motor de la dirección, I_{md} y R_{md} representan al motor de la dirección y el elemento $GY : K$ representa la constante de conversión del motor de la dirección [Oh, 2004].

Modelo de auto completo con sistema de dirección y tren motriz

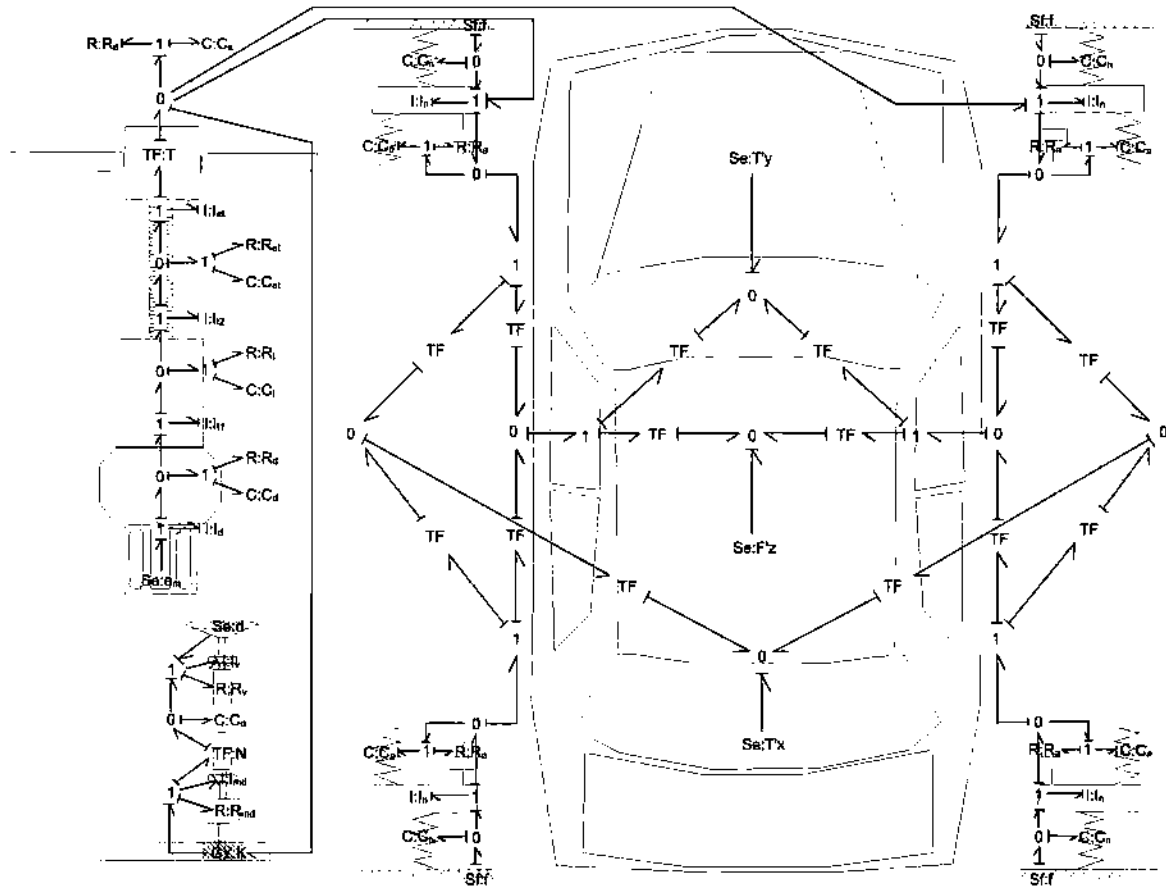


Figura 3.29: Modelo de auto completo con tren motriz y dirección

De igual manera que el anterior modelo, en la Figura 3.29 sólo se muestra el modelo con suspensión pasiva y los modelos de la dirección y el tren motriz. En este modelo de tren motriz, el motor se modela como una fuente de esfuerzo debido a que su modelado es muy complejo porque en el intervienen sistemas mecánicos, eléctrico, hidráulicos y térmicos, y

con esto se puede evitar las variaciones en el sistema que se presentan durante el arranque y calentamiento del motor, ya que el objeto de estudio de este modelo en particular es el estado estacionario.

Para el modelo del tren motriz se utilizó principalmente el árbol de transmisión y el diferencial, el cuál según la literatura consultada [Louca, 2001], es el propuesto, agregando una fuente de esfuerzo que indica la presencia de la fuerza del motor en estado estable, lo que facilita los análisis del modelo.

La fuente $Se : e_m$ es la fuente que representa el comportamiento del motor; $I : I_d, R : R_d, C : C_d$ son los elementos del diferencial; los elementos $I : I_{t1}, I : I_{t2}, C : C_t, I : I_t$ son los elementos que conforman la transmisión; $C : C_{ed}, I : I_{ed}, R : R_{ed}$ representan al eje del diferencial; un elemento $TF : T$ representa la caja de transmisión; y por último se tienen $C : C_e, R : R_e$ que representan al eje de salida o el eje de los neumáticos [Louca, 2001].

En este tema se mostraron los subsistemas de los que consta el modelo del automóvil integral a analizar, explicando el comportamiento de cada uno de manera aislada y en forma interconectada con otros subsistemas hasta llegar al modelo del automóvil integral completo en tres dimensiones.

Con lo anterior se da por terminada la introducción del modelado de un sistema integral de un automóvil en Bond Graph, al mostrar las respectivas conversiones de los distintos elementos del modelado físico al modelado en Bond Graphs, además de que en el Capítulo 2 se mencionaron los pasos a seguir para realizar el análisis de los sistemas en Bond Graph y con esto se tienen las bases para poder analizar los sistemas previamente mostrados y obtener su estado estacionario.

Capítulo 4

Respuesta en Estado Estacionario de un Automóvil en Bond Graph

4.1 Introducción

Los distintos sistemas que conforman el modelo del auto interal ya han sido presentados y brevemente explicados, por lo que se procede a realizar el análisis del auto integral en modelado en Bond Graph con la finalidad de obtener el estado estacionario.

4.2 Estado Estacionario para sistemas modelados en Bond Graph con variables de estado linealmente independientes

La respuesta en estado estacionario, es útil para conocer el valor que alcanza cada variable de estado del sistema físico en una representación en espacio de estado cuando el periodo dinámico ha terminado. Aplicando el teorema del valor final se puede determinar el valor de estado estacionario de la respuesta de un sistema.

Así, el error de estado estacionario queda determinado por:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s e(s)] \quad (4.1)$$

[González, 2003].

Empleando (4.1), (2.17) y (2.18) se tiene que la respuesta en estado estacionario para las variables de estado y salida son:

$$x_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)] = -A^{-1}Bu_{ss} \quad (4.2)$$

$$y_{ss} = (D - CA^{-1}B)u_{ss} \quad (4.3)$$

donde

$$u_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [s u(s)]$$

De esta manera utilizando (4.2) y (4.4) se calcula el estado estacionario, pero es necesario que se calcule A^{-1} , lo cual conlleva una complejidad cuando el sistema es de alto orden y además la matriz de estados A no sea numérica.

Si el sistema es representado en función de transferencia, se tiene que:

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (4.4)$$

Con el teorema del valor final, se obtiene el valor de estado estacionario de la salida:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s G(s)u(s)] \quad (4.5)$$

Utilizando la metodología de Bond Graph se resuelve directamente el problema de obtener A^{-1} al tener el BGD del sistema físico; de igual forma es posible determinar el valor de estado estacionario de la respuesta del sistema [González, 2003].

Antes de realizar este análisis se deben de hacer dos consideraciones en el modelo en Bond Graph, las cuales son:

- El modelo de Bond Graph deberá ser el de un sistema lineal o en su caso estar trabajando en un punto de equilibrio.
- El BGD del sistema debe existir.

Los elementos de almacenamiento poseen una relación constitutiva entre flujo y esfuerzo, por ejemplo, el elemento C , relaciona $e(t)$ a una variable de flujo acumulada $q(t) = \int f(t)dt$. Esto es, si $f(t)$ es la entrada a un elemento C , se integra primero $q(t)$ y entonces $e(t)$ es una salida relacionada a $q(t)$, a esta causalidad en un elemento de

almacenamiento se le llama *causalidad integral*, debido a que la integral de la entrada $f(t)$ se relaciona con la salida $e(t)$, esto es,

$$e(t) \triangleq \frac{1}{C} \int f(t) dt \quad (4.6)$$

Si se invierte la causalidad, se obtiene la misma relación (4.6) pero escrita con derivadas:

$$f(t) \triangleq C \frac{de(t)}{dt} \quad (4.7)$$

a esta causalidad se le llama *causalidad derivativa* de un elemento de almacenamiento, por lo que un bond graph en causalidad derivativa (BGD) es aquel modelo con asignación preferida de causalidad derivativa en sus elementos de almacenamiento.

El proceso de obtención de los vectores claves se hace de la misma manera que el mencionado en el Capítulo 2. La matriz L , los vectores D_{in} y D_{out} son obtenidos directamente del BGD y son designados como: L_d , D_{ind} y D_{outd} .

Suponer que la matriz A es invertible y se tiene una asignación de causalidad derivativa en el modelo en Bond Graph. A partir de (2.16) y la Figura 4.4 la estructura unión queda descrita como:

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ D_{ind}(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{outd}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

La relación constitutiva de los elementos disipativos en el BGD, es:

$$D_{outd}(t) = L_d D_{ind}(t) \quad (4.9)$$

Al cambiar la causalidad de los elementos de almacenamiento y aplicando las reglas de causalidad a las fuentes, transformadores, giradores y uniones, la causalidad de los elementos de disipación en algunos casos tiene que cambiar respecto al BGI, para que el BGD sea causalmente correcto.

Una representación del sistema basado en el BGD es obtenida de (2.17) a (2.24), (4.8) y (4.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} z(t) &= A^* \dot{x}(t) + B^* u(t) \\ y_d(t) &= C^* \dot{x}(t) + D^* u(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Las matrices para determinar el estado estacionario están definidas por [González, 2003]:

$$A^* = J_{11} + J_{12}N J_{21} \quad (4.11)$$

$$B^* = J_{13} + J_{12}N J_{23} \quad (4.12)$$

$$C^* = J_{31} + J_{32}N J_{21} \quad (4.13)$$

$$D^* = J_{33} + J_{32}N J_{23} \quad (4.14)$$

donde

$$N = (I - L_d J_{22})^{-1} L_d$$

Las relaciones entre la realización en espacio de estado del sistema en el BGI y BGD se obtienen de (2.13), (2.17), (2.18) y (4.10) se tiene:

$$A^* = F A^{-1} \quad (4.15)$$

$$B^* = -F A^{-1} B \quad (4.16)$$

$$C^* = C A^{-1} \quad (4.17)$$

$$D^* = D - C A^{-1} B \quad (4.18)$$

Finalmente el estado estacionario, x_{ss} , está dado por:

$$x_{ss} = F^{-1} B^* u \quad (4.19)$$

$$y_{ss} = D^* u \quad (4.20)$$

4.3 Suspensión Pasiva

El modelo de medio auto con suspensiones usualmente es representado como un sistema de cuatro grados de libertad, el cual tiene empuje, inclinación y movimiento de las ruedas trasera y delantera. La Figura 4.1 muestra la representación en bond graph del sistema de suspensiones. La dinámica solamente se asume solamente en el eje vertical y las acciones de suspensión están denotadas como F_z . Los fenómenos de los componentes resorte/amortiguador de la suspensión corresponden a los elementos tipo C de almacenamiento y disipación de energía; un par de elementos C y R también representan estos fenómenos.

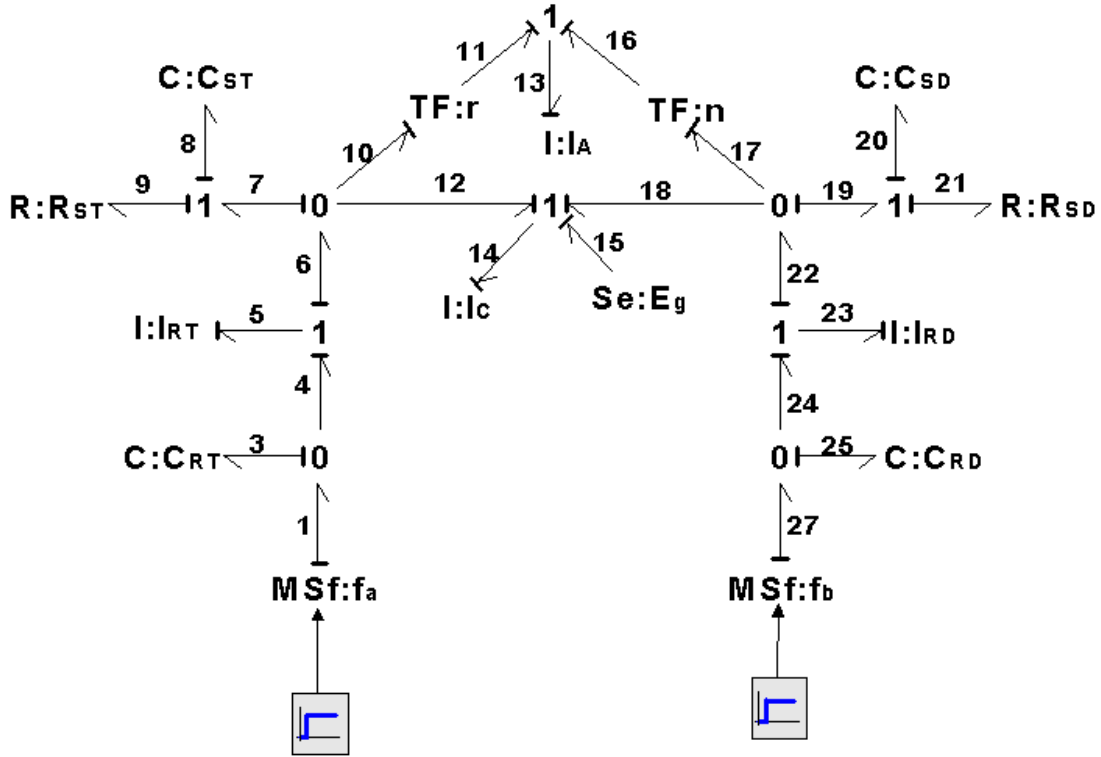


Figura 4.1: Bond graph integral de la configuración de medio auto con suspensión pasiva

El bond graph en asignación de causalidad derivativa de la suspensión pasiva es mostrada en la Figura 4.2.

Notar que $n = 8$ y $q = 8$, es decir, todos los elementos de almacenamiento son linealmente independientes en BGI y BGD, resultando las matrices A y A^* no singulares.

Los vectores clave del bond graph en casualiad derivativa y las relaciones constitutivas son,

$$\begin{aligned}
 x_d^d &= [q_3 \ p_5 \ q_8 \ p_{13} \ p_{14} \ q_{20} \ p_{23} \ q_{25}]^T \\
 \dot{x}_d^d &= [f_3 \ e_5 \ f_8 \ e_{13} \ e_{14} \ f_{20} \ e_{23} \ f_{25}]^T \\
 z_d^d &= [e_3 \ f_5 \ e_8 \ f_{13} \ f_{14} \ e_{20} \ f_{23} \ e_{25}]^T
 \end{aligned}$$

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{r}{1-nr} & \frac{-nr}{1-nr} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r}{1-nr} & \frac{-nr}{1-nr} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-n}{nr-1} & 0 & \frac{-n}{nr-1} & 0 & 0 & \frac{n}{nr-1} & 0 & \frac{n}{nr-1} \\ \frac{1}{nr-1} & 0 & \frac{1}{nr-1} & 0 & 0 & \frac{-nr}{nr-1} & 0 & \frac{-nr}{nr-1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r}{nr-1} & \frac{1}{nr-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{nr-1} & \frac{-nr}{nr-1} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; J_{22} = J_{23} = 0$$

$$J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{n}{nr-1} & \frac{-1}{nr-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{nr}{1-nr} & 0 & \frac{nr}{1-nr} & 0 & 0 & \frac{-1}{1-nr} & 0 & \frac{nr}{1-nr} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-n}{nr-1} & \frac{nr}{nr-1} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Debido a que $J_{23} = 0$ de las ecuaciones (4.19) y (4.12), la respuesta en estado estacionario se reduce a,

$$\left(z_d^d \right)_{ss} = J_{13} u_{ss} \quad (4.21)$$

Con la finalidad de verificar el comportamiento del estado estacionario, los resultados de la simulación utilizando los parámetros utilizados en [Wu, 2004], que son los siguientes: $C_{ST} = C_{SD} = 5.9481 \times 10^{-5} \frac{N}{m}$ (suspensiones); $R_{ST} = R_{SD} = 1000 \frac{N}{m}$ (amortiguadores); $I_{RT} = I_{RD} = 0.01666 Kg$ (masa de los neumáticos); $I_A = 0.001$ (ángulo de inclinación del auto); $C_{RT} = C_{RD} = 5.2631 \times 10^{-6} \frac{N}{m}$ (amortiguamiento de los neumáticos); $I_C = 0.001739 Kg$ (peso del auto); $r = 1$ (módulo de transformación); $n = -1$ (módulo de transformación); $e_{15} = -9.81 \frac{m}{s^2}$ (fuerza de gravedad); $f_1 = 0.1m$ y $f_{27} = 0.5m$ son mostrados en la Figura 4.3

Utilizando parámetros numéricos y (4.21), el estado estable para $(f_5)_{ss}$, $(f_{23})_{ss}$ y $(f_{14})_{ss}$ está dado por,

$$\begin{aligned}
 (f_5)_{ss} &= (f_1)_{ss}; (f_{23})_{ss} = (f_{27})_{ss} \\
 (f_{14})_{ss} &= \frac{-(f_1)_{ss}}{nr-1} + \frac{nr(f_{27})_{ss}}{nr-1} \\
 (f_5)_{ss} &= 0.1 \frac{m}{s}; (f_{23})_{ss} = 0.5 \frac{m}{s}; (f_{14})_{ss} = 0.3 \frac{m}{s}
 \end{aligned}$$

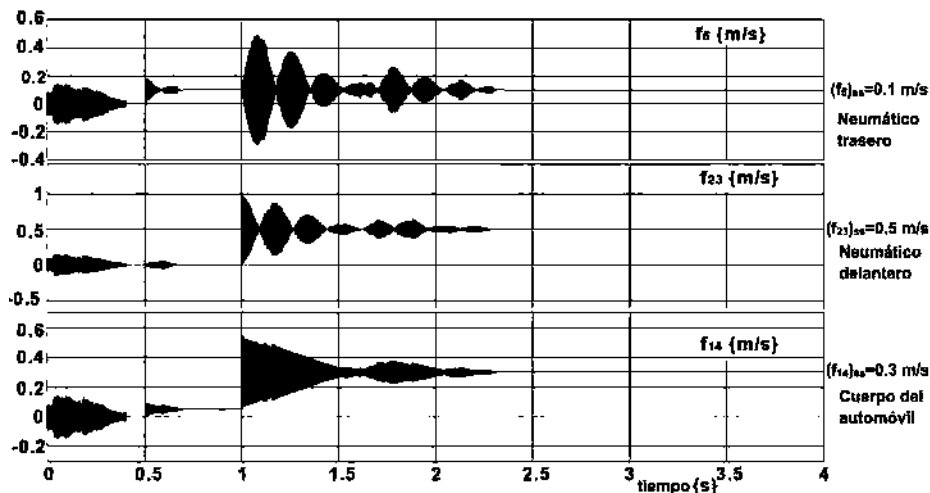


Figura 4.3: Resultados simulación suspensión pasiva

En la Figura 4.3 se tienen 3 gráficas, las cuales representan (de arriba hacia abajo) la carga en el neumático trasera, la carga en el neumático delantero y el movimiento del cuerpo del auto. Dos irregularidades en el camino son introducidas en 0.5 segundos y 1 segundo en los neumáticos trasero y delantero, respectivamente. Se puede apreciar tanto la carga en el neumático trasero, la carga en el neumático delantero y el cuerpo del auto presentan oscilaciones desde el inicio de la simulación, lo cuál es generado por la entrada e_{15} , que en este caso es la presencia de la fuerza de gravedad. A los 0.5 segundos se presenta la primera irregularidad en el camino, que en este caso es un escalón con valor de 0.1 que genera pequeñas oscilaciones en el sistema que son absorbidas por las suspensiones en un corto tiempo. Se aprecia que la irregularidad afecta a todo el sistema, pero solamente el neumático delantero no presenta cambio en su magnitud debido a que la entrada escalón fue aplicada al neumático trasero. Lo mismo sucede cuando se presenta la irregularidad en el neumático delantero, pero este causa un mayor impacto debido a la magnitud del mismo. Por último, se aprecia que el cuerpo del automóvil termina con una magnitud distinta a la suma de las entradas, debido a la inclinación que se genera por las magnitudes de simulación utilizadas.

4.4 Estado estacionario a partir de la dinámica obtenida de su Bond Graph con elementos linealmente dependientes

La configuración de una estructura unión de un bond graph con asignación preferida de causalidad Derivativa (BGD) se muestra en la Figura 4.4. Esta estructura unión permite representar sistemas que tienen elementos de almacenamiento en asignación de causalidad derivativa y algunos que permanecen en causalidad integral.

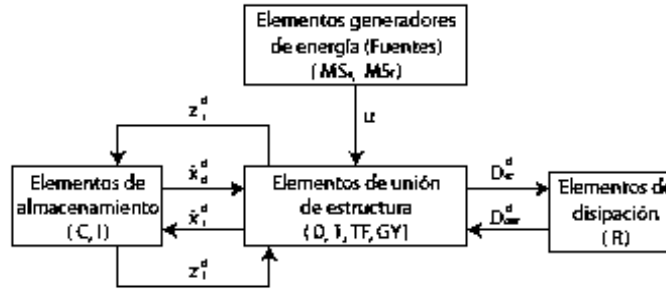


Figura 4.4: Estructura unión de un BGD

En la Figura 4.4 los estados $x_d^d \in \mathfrak{R}^q$ y $x_i^d \in \mathfrak{R}^h$ están compuestos de variables de energía asignadas con causalidad derivativa e integral respectivamente; $z_d^d \in \mathfrak{R}^q$ y $z_i^d \in \mathfrak{R}^h$ son las variables de co-energía en asignación de causalidad derivativa e intragrual respectivamente; $D_{in}^d \in \mathfrak{R}^r$ y $D_{out}^d \in \mathfrak{R}^r$ son los elementos de disipación con asignación preferente en causalidad derivativa y $u \in \mathfrak{R}^p$ es la entrada de la planta.

Para determinar un relación entre el BGI y el BGD de un sistema, $q = n + m$. La relación $q = n + m$ se refiere al rango en Bond Graph de la matriz A , donde n es igual al número de elementos I y C en causalidad integral en el BGI y m es igual al número de elementos I y C en causalidad derivativa en el BGI. Las relaciones de los elementos de almacenamiento y de disipación en un BGD de un sistema LTI son:

$$z_d^d = F_d^d x_d^d \quad (4.22)$$

$$D_{out}^d = L^d D_{in}^d \quad (4.23)$$

La matriz de estructura unión para la configuración de estructura unión propuesta de un BGD está definida en el siguiente lema.

Lema 1. *En un modelo de Bond Graph de un sistema con asignación preferente de causalidad derivativa en la configuración de estructura unión de la Figura 4.4, entonces, una matriz J de estructura unión es,*

$$\begin{bmatrix} z_d^d \\ D_{in}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d^d \\ D_{out}^d \\ u \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

esto, es un bloque particionando acorde con las dimensiones de \dot{x}_d^d , D_{out}^d y u , y sus entradas toman valores dentro del rango $\{0, \pm 1, \pm r, \pm l\}$ donde r y l son los coeficientes de los transformadores y giradores respectivamente. Entonces, la ecuación (4.25) es obtenida directamente de (4.24),

$$z_d^d = A^* \dot{x}_d^d + B^* u \quad (4.25)$$

donde

$$A^* = J_{11} + J_{12} M_d J_{21} \quad (4.26)$$

$$B^* = J_{13} + J_{12} M_d J_{23} \quad (4.27)$$

siendo

$$M_d = (I_r - L^d J_{22})^{-1} L^d \quad (4.28)$$

Prueba. En el BGD, de la segunda línea de (4.24) y usando (4.23), se tiene,

$$D_{in}^d = (I_r - J_{22}L^d)^{-1}[J_{21}\dot{x}_d^d + J_{23}u] \quad (4.29)$$

sustituyendo (4.29) dentro de la primera línea de (4.24) y usando (4.23) se obtiene,

$$z_d^d = [J_{11} + J_{12}M_dJ_{21}]\dot{x}_d^d + [J_{13} + J_{12}M_dJ_{23}]^*u \quad (4.30)$$

y la ecuación (4.25) es lo que resulta. ■

El procedimiento anterior es muy práctico cuando se desea obtener el estado estacionario de sistemas con una gran cantidad de elementos, ya que la matriz A del BGI al ser demasiado grande es difícil hacer las operaciones de manualmente para su inversión, y con este procedimiento se puede obtener el estado estacionario más facilmente.

4.5 Validación de suspensión pasiva

Para realizar la validación se va a hacer uso del modelo de medio auto utilizado en [Wu, 2004], el cuál es un modelo de medio auto con suspensión pasiva y activa, modelado con la técnica de modelado matemático, en el que se parte de la Figura 4.5, y se utilizan las variables m_s (masa del cuerpo del vehículo), m_{uf} y m_{ur} (masa de los neumáticos delantero y trasero), z_{rf} y z_{rr} (entrada del camino en las ruedas delantera y trasera), k_f y k_r (coeficientes del amortiguador delantero y trasero), k_{tr} y k_{tf} (coeficiente de amortiguacion de los neumáticos delantero y trasero).

Utilizando los siguientes valores para las variables anteriormente mencionadas, $m_s = 575$ Kg, $m_{uf} = m_{ur} = 60$ Kg, $k_f = k_r = 16812$ N/m, $B_f = B_r = 1000$ N/m, $k_{tf} = k_{tr} = 19000$ N/m; se obtienen las simulaciones que a continuación se describen.

$$z_{rf}(t) = \mu_r(1 - \cos 8\pi t), 0.5 \text{ sec} \leq t \leq 0.75 \text{ sec}$$

$$z_{rr}(t) = \mu_r(1 - \cos 8\pi t), 3 \text{ sec} \leq t \leq 3.25 \text{ sec}$$

con $\mu_r = 0.5m$ (amplitud de la perturbación del camino)

En [Wu, 2004] se muestra el comportamiento del modelo mostrado, el cuál se procede a compararlo con el modelo de medio auto con suspensión pasiva en bond graph ilustrado

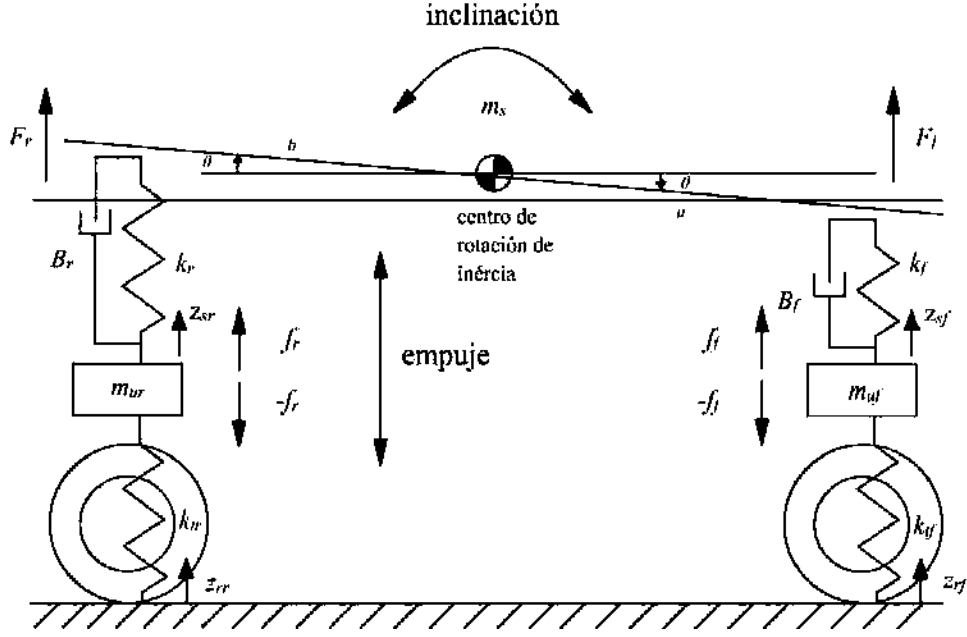


Figura 4.5: Modelo de medio automóvil

anteriormente en la Figura 4.1,

del cual se obtienen las siguientes matrices,

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -r & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{n} \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; J_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -r & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; J_{22} = J_{23} = 0$$

utilizando las ecuaciones (4.11) y (4.12) se obtiene,

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{I_{RT}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_{RT}} & \frac{-R_{ST}}{I_{RT}} & \frac{-1}{C_{ST}} & \frac{rR_{ST}}{I_A} & \frac{R_{ST}}{I_C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{RT}} & 0 & \frac{-r}{I_A} & \frac{-1}{I_C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_{ST}}{rI_{RT}} & \frac{1}{rC_{ST}} & \frac{-R_{SD}-R_{ST}}{I_A} & \frac{-rR_{SD}-nR_{ST}}{nrI_C} & \frac{1}{nC_{SD}} & \frac{R_{SD}}{nI_{RD}} & 0 \\ 0 & \frac{R_{ST}}{I_{RT}} & \frac{1}{C_{ST}} & \frac{nR_{SD}-rR_{ST}}{I_A} & \frac{-R_{SD}-R_{ST}}{I_C} & \frac{1}{C_{SD}} & \frac{R_{SD}}{I_{RD}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-n}{I_A} & \frac{-1}{I_C} & 0 & \frac{1}{I_{RD}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{nR_{SD}}{I_A} & \frac{R_{SD}}{I_C} & \frac{-1}{C_{SD}} & \frac{-R_{SD}}{I_{RD}} & \frac{1}{C_{RD}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{I_{RD}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidas las matrices A^* y B^* , se procede a determinar el estado estacionario utilizando la ecuación $x_{ss} = -A^{-1}B^*u_{ss} = F^{-1}B^*u_{ss}$, por lo que sustituyendo (4.16) en (4.19);

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-nC_{RT}}{r-n} - C_{RT} & 0 \\ I_{RT} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-nC_{ST}}{r-n} - C_{ST} & 0 \\ \frac{I_A}{r-n} & 0 & \frac{I_A}{r-n} \\ \frac{-nI_C}{r-n} & 0 & \frac{rI_C}{r-n} \\ 0 & \frac{nC_{SD}}{r-n} & 0 \\ 0 & 0 & I_{RD} \\ 0 & \frac{nC_{RD}}{r-n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_{15} \\ f_{27} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

de esta manera, al momento de simular (eliminando la fuente de entreda $Se : Eg$, ya que

en [Wu, 2004] no añaden a su modelo el efecto de la fuerza de gravedad) se obtienen los resultados que se ilustran en la Figura 4.6,

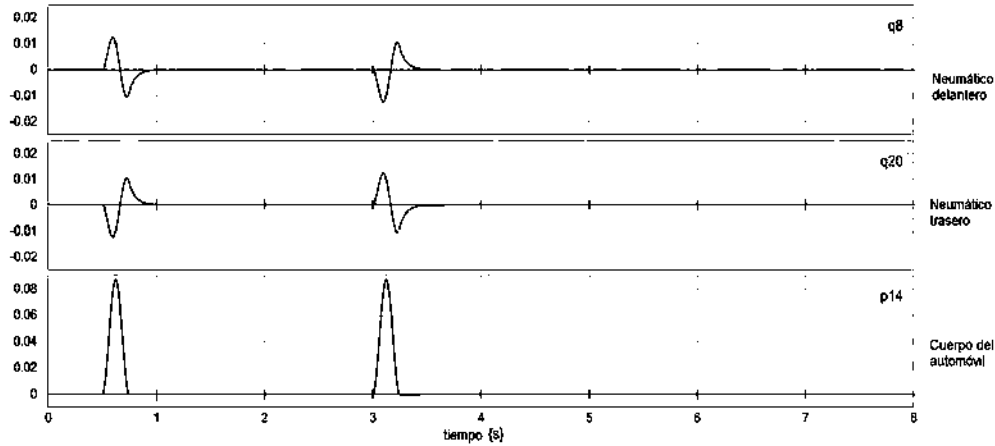


Figura 4.6: Respuesta de los estados en medio auto con suspensión pasiva

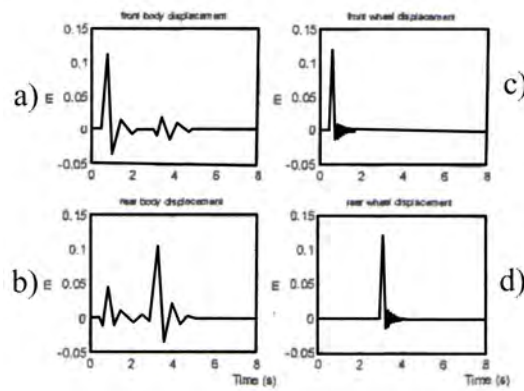


Figura 4.7: Respuesta obtenida en [Wu, 2004]

Ahora, se comparan los resultados obtenidos en la Figura 4.6 con los del modelo utilizado en [Wu, 2004] mostrados en la Figura 4.7, comparando la respuesta del neumático delantero con la Figura 4.7 a), la respuesta del neumático trasero con la Figura 4.7 b), y la respuesta del cuerpo del automóvil con las Figuras 4.7 c) y d), se puede observar que las respuestas son muy

similares, con pequeñas diferencias en la amplitud y tiempo de estabilización debido a que en [Wu, 2004] se utilizan en la simulación valores de longitud de separación del centro del medio auto respecto a los amortiguadores y un momento de inercia en la masa suspendida (masa del auto), los cuales no pueden ser agregados en este tipo de modelado, ya que al momento de agregar dichos elementos al modelo en bond graph, se estaría alterando el modelo analizado y con ello el comportamiento en estado estable.

4.6 Suspensión Activa

La suspensión pasiva tiene limitaciones significantes en aplicaciones estructurales donde perturbaciones de banda ancha de naturaleza altamente incierta son encontrados. Este tipo de perturbaciones suelen ser irregularidades constantes en el camino, como pueden ser baches, topes, reductores de velocidad, terracería, curvas constantes, inclinaciones del camino. El modo de compensar esas limitaciones, sistemas de control activa para dichas perturbaciones son utilizados. La Figura 4.8 muestra la suspensión activa utilizada en medio auto, cuyo principio de funcionamiento fue previamente explicado en el capítulo anterior.

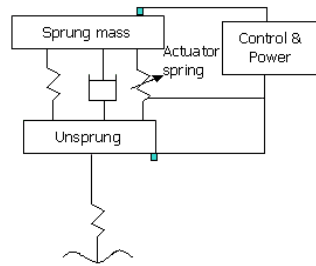


Figura 4.8: Esquema de suspensión activa

Un bond graph con asignación de causalidad integral de una suspensión activa en medio auto es mostrada en la Figura 4.9, cuyo principio de funcionamiento ya ha sido descrito en el capítulo anterior. Este modelo es interesante debido a que algunos elementos tienen causalidad integral y otros tienen causalidad derivativa.

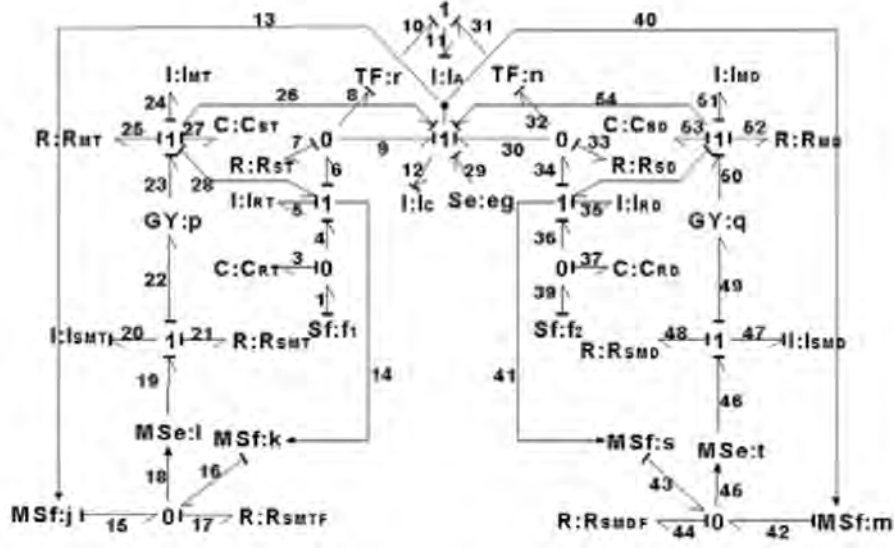


Figura 4.9: BGI de configuración de medio auto con suspensión activa

La determinación de la respuesta en estado estacionario requiere obtener el BGD del sistema a partir del BGI. Sin embargo, es importante considerar que el BGI de la suspensión activa de la Figura 4.9 tiene elementos de almacenamiento en causalidad integral y derivativa, lo cual indica que el sistema tiene estados linealmente independiente y dependiente. Los elementos de almacenamiento linealmente independientes son, $I_{SMT_{mt}}$, C_{ST} , C_{RT} , I_A , I_C , C_{RD} , I_{SMD} y C_{SD} , y linealmente dependiente son, I_{MT} , I_{RT} , I_{RD} e I_{MD} . Por lo tanto, $n = 8$ y $m = 4$.

Lema 2. *En un modelo de Bond Graph de un sistema LTI con asignación preferente de causalidad integral cuya estructura unión puede ser escrita por,*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i^{i \leftarrow d} \\ \dot{x}_i^{i \leftarrow d} \\ D_{in}^i \\ z_d^{i \leftarrow d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{11} & S_{11}^{12} & S_{11}^{13} & S_{11}^{14} & S_{11}^{15} \\ S_{21}^{11} & S_{21}^{12} & S_{21}^{13} & S_{21}^{14} & S_{21}^{15} \\ S_{21}^{11} & S_{21}^{12} & S_{21}^{13} & S_{21}^{14} & 0 \\ S_{31}^{11} & S_{31}^{12} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i^{i \leftarrow d} \\ z_i^{i \leftarrow d} \\ D_{out}^i \\ u \\ \dot{x}_d^{i \leftarrow d} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

donde $x_i^i = \begin{bmatrix} x_{i \leftarrow d}^{i \leftarrow d} \\ x_i^{i \leftarrow d} \end{bmatrix}$; $z_i^i = \begin{bmatrix} z_{i \leftarrow d}^{i \leftarrow d} \\ z_i^{i \leftarrow d} \end{bmatrix}$; $x_i^i \in \mathfrak{R}^n$ y $x_d^{i \leftarrow d} \in \mathfrak{R}^m$. x_i^i indica los elementos de almacenamiento están en causalidad integral el en BGI, x_d^d indica los elementos de almacenamiento están en causalidad derivativa en el BGD, $x_{i \leftarrow d}^{i \leftarrow d}$ indica que los elementos de almacenamiento cambian de causalidad integral a derivativa al cambiar del BGI al BGD, $x_i^{i \leftarrow d}$ indica que los elementos de almacenamiento conservan la causalidad integral al cambiar del BGI al BGD, y $x_d^{i \leftarrow d}$ indica que los elementos de almacenamiento conservan la causalidad derivativa al cambiar del BGI al BGD. La estructura unión con una asignación preferente de causalidad derivativa es,

$$\begin{bmatrix} z_{i \leftarrow d}^{i \leftarrow d} \\ z_d^{i \leftarrow d} \\ D_{in}^i \\ x_i^{i \leftarrow d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & J_{11}^{12} & J_{12}^{11} & J_{13}^{11} & J_{14}^{11} \\ J_{11}^{21} & J_{11}^{22} & J_{12}^{21} & J_{13}^{21} & J_{14}^{21} \\ J_{21}^{11} & J_{21}^{12} & J_{22}^{11} & J_{23}^{11} & 0 \\ J_{31}^{11} & J_{31}^{12} & 0 & J_{33}^{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i \leftarrow d}^{i \leftarrow d} \\ x_d^{i \leftarrow d} \\ D_{out}^i \\ u \\ z_i^{i \leftarrow d} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

donde $x_d^d = \begin{bmatrix} x_{i \leftarrow d}^{i \leftarrow d} \\ x_d^{i \leftarrow d} \end{bmatrix}$; $z_d^d = \begin{bmatrix} z_{i \leftarrow d}^{i \leftarrow d} \\ z_d^{i \leftarrow d} \end{bmatrix}$; $x_d^d \in \mathfrak{R}^q$ y $x_i^{i \leftarrow d} \in \mathfrak{R}^h$. Entonces, un sistema equivalente reducido esta definido por,

$$E_r^* z_{i \leftarrow d}^{i \leftarrow d} = A_r^* x_{i \leftarrow d}^{i \leftarrow d} + B_r^* u + Q_r^* \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (4.34)$$

donde

$$A_r^* = A_{11}^* + A_{12}^* H_3 H_4 \quad (4.35)$$

$$B_r^* = B_1^* + A_{12}^* H_3 H_1 J_{33}^{11} \quad (4.36)$$

$$Q_r^* = J_{14}^{11} F_i^{i \leftarrow d} (I + J_{31}^{12} H_3 H_1) J_{33}^{11} \quad (4.37)$$

$$E_r^* = \left[I + J_{14}^{11} F_i^{i \leftarrow d} (J_{31}^{11} + J_{31}^{12} H_3 H_4) \right] (F_{i \leftarrow d}^{i \leftarrow d})^{-1} \quad (4.38)$$

donde las relaciones constitutivas de los elementos de almacenamiento son

$$z_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} = F_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} x_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} \quad (4.39)$$

$$z_d^{i \leftrightarrow d} = F_d^{i \leftrightarrow d} x_d^{i \leftrightarrow d} \quad (4.40)$$

$$z_i^{i \leftrightarrow d} = F_i^{i \leftrightarrow d} x_i^{i \leftrightarrow d} \quad (4.41)$$

con $H_1 = (F_d^{i \leftrightarrow d})^{-1}[J_{14}^{21} - A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1}J_{14}^{11}]F_i^{i \leftrightarrow d}$; $H_2 = (F_d^{i \leftrightarrow d})^{-1}A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1}F_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d}$;
 $H_3 = (I - H_1J_{31}^{12})^{-1}$; $H_4 = H_2 + H_1J_{31}^{11}$; $H_5 = C_{11}^* + C_{12}^*H_3H_4$; $B_1^* = J_{13}^{11} + J_{12}^{11}M_dJ_{23}^{11}$;
 $C_{11}^* = J_{31}^{11} + J_{32}^{11}M_dJ_{21}^{11}$; $C_{12}^* = J_{31}^{12} + J_{32}^{11}M_dJ_{21}^{12}$; $D_p^* = J_{33}^{11} + J_{32}^{11}M_dJ_{23}^{11}$; $A_{11}^* = J_{11}^{11} + J_{12}^{11}M_dJ_{21}^{11}$;
 $A_{12}^* = J_{11}^{12} + J_{12}^{11}M_dJ_{21}^{12}$; $A_{21}^* = J_{11}^{21} + J_{12}^{21}M_dJ_{21}^{11}$ y $M_d = L^d(I_r - J_{22}^{11}L^d)^{-1}$.

Prueba. Para poder obtener un sistema equivalente reducido en este caso, el siguiente análisis es realizado. De la tercera línea de (4.33) y sustituyendo en la primera línea de la misma ecuación,

$$z_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} = A_{11}^* \dot{x}_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} + B_1^* u + A_{12}^* \dot{x}_d^{i \leftrightarrow d} + J_{14}^{11} z_i^{i \leftrightarrow d} \quad (4.42)$$

donde $A_{11}^* = J_{11}^{11} + J_{12}^{12}M_dJ_{12}^{11}$; $A_{12}^* = J_{11}^{11} + J_{12}^{11}M_dJ_{21}^{12}$; $B_1^* = J_{13}^{11} + J_{12}^{11}M_dJ_{23}^{11}$ y $M_d = L_d(I_r - J_{22}^{11}L_d)$. De manera similar, la segunda línea de (4.33) puede ser escrita como,

$$z_d^{i \leftrightarrow d} = A_{21}^* \dot{x}_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} + B_2^* u + A_{22}^* \dot{x}_d^{i \leftrightarrow d} + J_{14}^{21} z_i^{i \leftrightarrow d} \quad (4.43)$$

donde $A_{21}^* = J_{11}^{21} + J_{12}^{21}M_dJ_{21}^{11}$; $A_{22}^* = J_{11}^{22} + J_{12}^{21}M_dJ_{21}^{12}$ y $B_2^* = J_{13}^{21} + J_{12}^{21}M_dJ_{23}^{11}$. De (4.42) y (4.43) se tiene

$$z_d^{i \leftrightarrow d} = A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1} z_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} + [B_2^* - A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1}B_1^*]u \quad (4.44)$$

$$+ [A_{22}^* - A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1}A_{12}^*] \dot{x}_d^{i \leftrightarrow d} \quad (4.45)$$

$$+ [J_{14}^{21} + A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1}J_{14}^{11}] z_i^{i \leftrightarrow d} \quad (4.46)$$

Se puede asignar A^* como,

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

la cuál es una matriz singular. La submatriz A_{11}^* es no singular, debido a que esta parte contiene elementos que tienen causalidad integral en el BGI y tienen causalidad derivativa en el BGD, $x_{i \leftrightarrow d}^{i \leftarrow d}$. Por tanto, se tiene

$$A_{22}^* - A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1}A_{12}^* = 0 \quad (4.48)$$

También, de (4.45),

$$B_2^* = A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1}B_1^* \quad (4.49)$$

donde B_2^* son caminos causales de las entradas u hacia $z_d^{i \leftarrow d}$ en el BGD. Sin embargo, estos caminos causales pueden ser obtenidos por (4.49). Esto es, debido a la parte $(A_{11}^*)^{-1}B_1^*$ indica caminos causales desde las entradas u hacia $\dot{x}_{i \leftrightarrow d}^{i \leftarrow d}$ en el BGI. La submatriz $(A_{11}^*)^{-1}$ indica cambiar el BGD por BGI. Finalmente, A_{21}^* es la relación entre $\dot{x}_{i \leftrightarrow d}^{i \leftarrow d}$ y $z_d^{i \leftarrow d}$. Utilizando (4.48) y (4.49), la ecuación (4.45) puede ser reducida a

$$z_d^{i \leftarrow d} = A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1}z_{i \leftrightarrow d}^{i \leftarrow d} + [J_{14}^{21} + A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1}J_{14}^{11}]z_i^{i \leftarrow d} \quad (4.50)$$

integrando la quinta línea de (4.33) y sustituyendola en (4.50), además utilizando (4.40) y (4.41), se tiene

$$x_d^{i \leftarrow d} = (I - H_1 J_{31}^{12})^{-1} \left[(H_2 + H_1 J_{31}^{11})x_{i \leftrightarrow d}^{i \leftarrow d} + H_1 J_{33}^{11} \int_0^t u(\tau) d\tau \right] \quad (4.51)$$

donde $H_1 = (F_d^{i \leftarrow d})^{-1} [J_{14}^{21} - A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1}J_{14}^{11}] F_i^{i \leftarrow d}$ y $H_2 = (F_d^{i \leftarrow d})^{-1} A_{21}^*(A_{11}^*)^{-1} F_{i \leftrightarrow d}^{i \leftarrow d}$. Utilizando la quinta línea de (4.33) y (4.51),

$$x_d^{i \leftarrow d} = [J_{41}^{11} + J_{31}^{12} H_3 H_4] x_{i \leftrightarrow d}^{i \leftarrow d} + [I + J_{31}^{12} H_3 H_1] J_{33}^{11} \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (4.52)$$

donde $H_3 = (I - H_1 J_{31}^{12})$ y $H_4 = H_2 + H_1 J_{31}^{11}$. Si se encuentra la derivada de (4.51)

$$\dot{x}_d^{i \leftrightarrow d} = H_3 \left[H_4 \dot{x}_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} + H_1 J_{33}^{11} u \right] \quad (4.53)$$

sustituyendo (4.53) en (4.42) resulta

$$z_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} = [A_{11}^* + A_{12}^* H_3 H_4] \dot{x}_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} + A_{12}^* H_3 H_1 J_{33}^{11} u + J_{14}^{11} z_i^{i \leftrightarrow d} \quad (4.54)$$

de (4.41), (4.52) y (4.54) se tiene,

$$z_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} = A_r^* \dot{x}_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} + [A_{12}^* H_3 H_1 J_{33}^{11} + B_1^*] u \quad (4.55)$$

$$+ J_{14}^{11} F_i^{i \leftrightarrow d} [J_{31}^{11} + J_{31}^{12} H_3 H_4] \dot{x}_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} \quad (4.56)$$

$$+ J_{14}^{11} F_i^{i \leftrightarrow d} [I + J_{31}^{11} H_3 H_1] J_{33}^{11} \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (4.57)$$

donde $A_r^* = A_{11}^* + A_{12}^* H_3 H_4$. De (4.39) y (4.56) con (4.36), (4.37) y (4.38), se prueba (4.34).

■

En el BGI se tienen elemento $x_i^i \in \mathfrak{R}^n$ y elementos $x_d^i \in \mathfrak{R}^m$, mientras que el BGD tiene los elementosreciprosos $x_d^d \in \mathfrak{R}^q$ y $x_i^d \in \mathfrak{R}^h$, los cuales deben de cumplir la igualdad:

$$n + m = q + h \quad (4.58)$$

y esto es debido a que n, m, q y h indican el número de variables de estado tanto independietes como dependientes.

Existen cuatro relaciones que determinan la singularidad de las matrices A y A^* entre el BGI y el BGD dependiendo de la cantidad de variables independientes y dependientes que estos contengan, estos casos son:

1. Si $m = 0$ y $h = 0$, entonces esto indica que $n = q$, y por lo tanto las matrices A y A^* son no singulares (se pueden invertir).
2. Si $m \neq 0$ y $h = 0$, entonces con esto se tiene $q = n + m$, por lo que la matriz A es no singular, pero la matriz A^* es singular.

3. Si $m = 0$ y $h \neq 0$, se tiene que $n = q + h$, lo que genera una matriz A singular y una matriz A^* no singular.
4. Por último si $m \neq 0$ y $h \neq 0$, significa que $n + m = q + h$, entonces las matrices A y A^* son singulares.

Las relaciones anteriores se muestran de modo gráfico a continuación en la Figura 4.10.

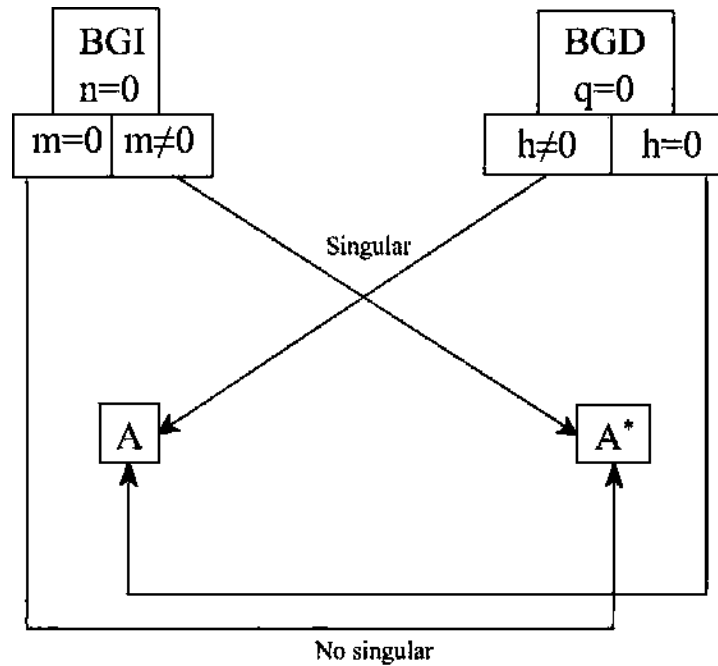


Figura 4.10: Relaciones entre el BGI y el BGD para las matrices A y A^*

Esto es el punto de partida para realizar el análisis anterior y poder determinar propiedades de las matrices en Bond Graph que anteriormente eran desconocidas.

El bond graph en causalidad derivativa de la suspensión activa es mostrada en la Figura 4.11. Este modelo de bond graph tiene propiedades generales desde el punto de vista de la causalidad. Por lo tanto, el BGD contiene elementos de almacenamiento en causalidad integral y derivativa. Por lo que para obtener la estructura unión del BGD, el Lema 2 es aplicado.

En el BGD los elementos de almacenamiento en causalidad integral son, C_{RT} , I_C , C_{RD} y C_{SD} , y en causalidad derivativa son, I_{SMT} , I_{MT} , C_{ST} , I_{RT} , I_A , I_{RD} , I_{SMD} e I_{MD} . Por lo tanto, $q = 4$ y $h = 8$.

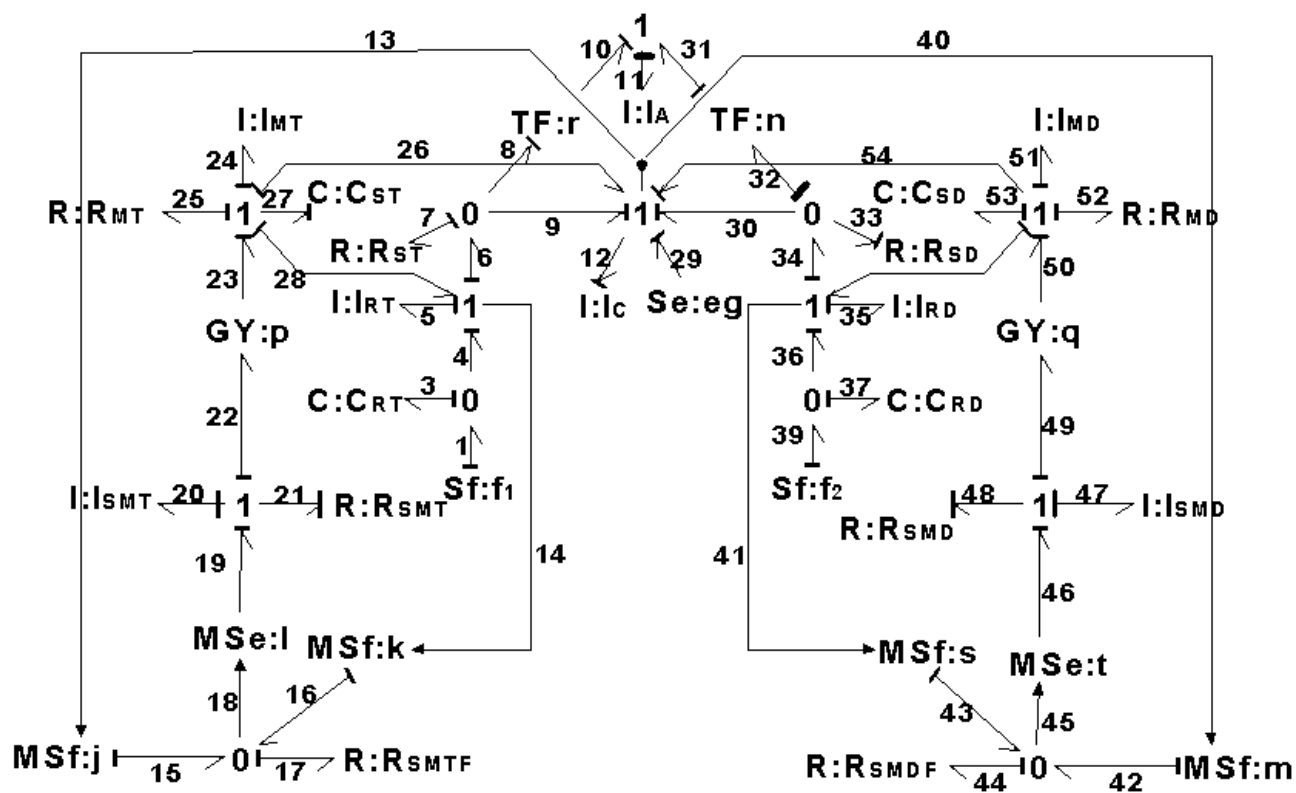


Figura 4.11: BGD de la configuración de medio auto con suspensión activa

Los vectores clave del BGD son,

$$\begin{aligned}
 x_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} &= \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{20} \\ q_{27} \\ p_{47} \end{bmatrix}; \dot{x}_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{20} \\ f_{27} \\ e_{47} \end{bmatrix}; z_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{20} \\ e_{27} \\ f_{47} \end{bmatrix} \\
 D_{in}^d &= \begin{bmatrix} f_7 & f_{17} & e_{21} & f_{25} & e_{33} & f_{44} & e_{48} & f_{52} \end{bmatrix}^T \\
 D_{out}^d &= \begin{bmatrix} e_7 & e_{17} & f_{21} & e_{25} & f_{33} & e_{44} & f_{48} & e_{52} \end{bmatrix}^T \\
 x_d^{i \leftrightarrow d} &= \begin{bmatrix} p_5 \\ p_{24} \\ p_{35} \\ q_{53} \end{bmatrix}; \dot{x}_d^{i \leftrightarrow d} = \begin{bmatrix} e_5 \\ e_{24} \\ e_{35} \\ f_{53} \end{bmatrix}; z_d^{i \leftrightarrow d} = \begin{bmatrix} f_5 \\ f_{24} \\ f_{35} \\ e_{53} \end{bmatrix} \\
 x_i^{i \leftrightarrow d} &= \begin{bmatrix} q_3 & q_{37} & q_{53} \end{bmatrix}^T; \dot{x}_i^{i \leftrightarrow d} = \begin{bmatrix} f_3 & f_{37} & f_{53} \end{bmatrix}^T \\
 z_i^{i \leftrightarrow d} &= \begin{bmatrix} e_3 & e_{37} & e_{53} \end{bmatrix}^T; u = \begin{bmatrix} f_1 & e_{29} & f_{39} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

las relaciones constitutivas son,

$$F_{i \leftrightarrow d}^{i \leftrightarrow d} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{I_A}, \frac{1}{I_C}, \frac{1}{I_{SMT}}, \frac{1}{C_{ST}}, \frac{1}{I_{SMD}} \right\} \quad (4.59)$$

$$F_i^{i \leftrightarrow d} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_{RT}}, \frac{1}{C_{RD}}, \frac{1}{C_{SD}} \right\} \quad (4.60)$$

$$F_d^{i \leftrightarrow d} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{I_{RT}}, \frac{1}{I_{MT}}, \frac{1}{I_{RD}}, \frac{1}{I_{MD}} \right\} \quad (4.61)$$

$$L^d = \text{diag} \left\{ R_{ST}, R_{SMTF}, \frac{1}{R_{SMT}}, R_{MT}, \frac{1}{R_{SD}}, R_{SMDF}, \frac{1}{R_{SMD}}, R_{MD} \right\} \quad (4.62)$$

y la estructura unión es,

$$J_{11}^{11} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & h_1 \\ -h_1^T & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}; J_{11}^{12} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} \\ h_2 \\ 0_{1 \times 4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 J_{11}^{21} &= -(J_{11}^{12})^T; J_{11}^{22} = J_{12}^{21} = J_{21}^{12} = J_{13}^{21} = J_{14}^{21} = J_{23}^{11} = J_{41}^{12} = 0 \\
 J_{13}^{11} &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ h_3 \\ 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}; J_{14}^{11} = -(J_{41}^{11})^T = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ h_4 \\ 0_{1 \times 3} \end{bmatrix} \\
 J_{12}^{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 & 0 & 0 & q & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 J_{21}^{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j+k & -p & 1 & 0 & m+s & -q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \\
 J_{21} &= \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & h_5 & 0_{2 \times 2} \\ h_6 & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 3} \\ 0_{2 \times 2} & h_7 & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; h_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}^T \\
 h_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; h_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 h_6 &= \begin{bmatrix} 0 & l \\ 0 & 0 \\ -\frac{n}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; h_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{n}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 h_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El estado estable está definido por,

$$B_r^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; Q_r^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_r^* = \begin{bmatrix} I_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_8 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + 1 \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_9 \end{bmatrix}$$

Los parámetros numéricos son: $C_{RD} = C_{RT} = 5.2631 \times 10^{-6} \frac{N}{m}$; $C_{SD} = C_{ST} = 5.94811 \times 10^{-5} \frac{N}{m}$; $I_{RT} = I_{RD} = 0.01666 \frac{N}{m}$; $j = l = k = p = s = m = t = 1$; $R_{SMTF} = R_{SMT} = 1 \frac{N}{m}$; $I_{MT} = I_{SMT} = I_{MD} = I_{SMD} = 1Kg$; $I_C = 1.739 \times 10^{-3}Kg$; $f_1 = f_{39} = e_{29} = 1m$ y sustituyendo tenemos:

$$(p_{11})_{ss} = 0N - s; (p_{12})_{ss} = 0.0015N - s; (p_{20})_{ss} = 0.91N - s; (q_{27})_{ss} = \infty m; (p_{47})_{ss} = 0.91N - s \quad (4.63)$$

Finalmente, los resultados de la simulación de la suspensión activa en medio auto es mostrada en la Figura 4.12. Hagase notar que, el estado estable de las variables de estado linealmente independientes, $x_i \overset{i \rightarrow d}{\longleftarrow d}$, es verificado desde (4.63).

En la gráfica de la Figura 4.12 se tienen cinco resultados, los cuales representan (de arriba hacia abajo) el movimiento del cuerpo del auto, la carga eléctrica en la inductancia de la suspensión trasera, la carga en el amortiguador trasero, la carga eléctrica en la inductancia de la suspensión delantera y el ángulo de inclinación del cuerpo del auto. El movimiento del cuerpo del auto presenta oscilaciones causadas por las irregularidades en el camino, pero de menor magnitud que las observadas en el modelo con suspensión pasiva con entradas de la misma intensidad. Las cargas en las inductancias se oponen a las perturbaciones del camino, por lo que generan un esfuerzo similar al de la entrada, pero no llegan al mismo nivel ya que parte de la energía es absorbida por los demás elementos, esto se puede observar al comparar

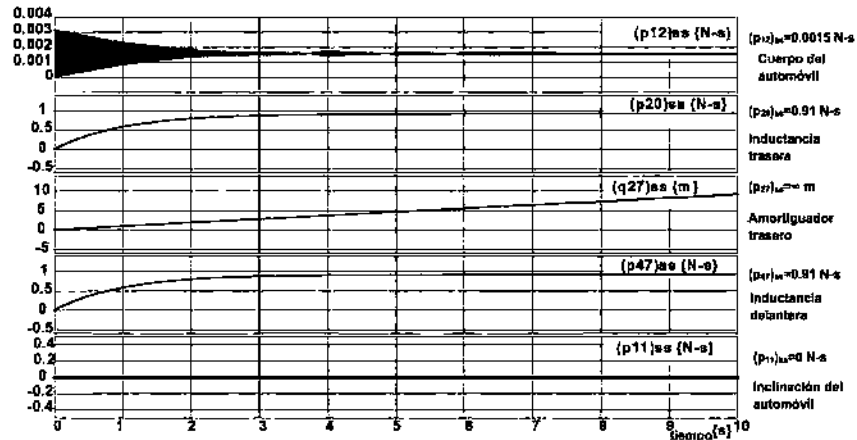


Figura 4.12: Resultados con suspensión activa

la segunda y la cuarta gráfica con el valor que se le asignó previamente a la entrada. Al final se tiene el comportamiento de la inclinación del cuerpo del auto, en este caso no hay movimiento alguno ya que las irregularidades se presentan al mismo tiempo y con la misma intensidad, como el comportamiento de las suspensiones es el mismo, esto causa que no se presenten perturbaciones en la inclinación del cuerpo del auto.

4.7 Estado Estacionario del Modelo integral de auto completo en 3D

El modelo desarrollado en Bond Graph de un automóvil considerando suspensión, dirección y tren motriz que se denomina modelo integral, se obtiene del BGI y el BGD con la finalidad de obtener la respuesta en estado estacionario de sus variables de estado.

4.7.1 Suspensión pasiva

El modelo del auto completo en 3D utilizando suspensiones pasivas se muestra en la Figura 4.13, el cual sirve como introducción al análisis de modelos en 3D.

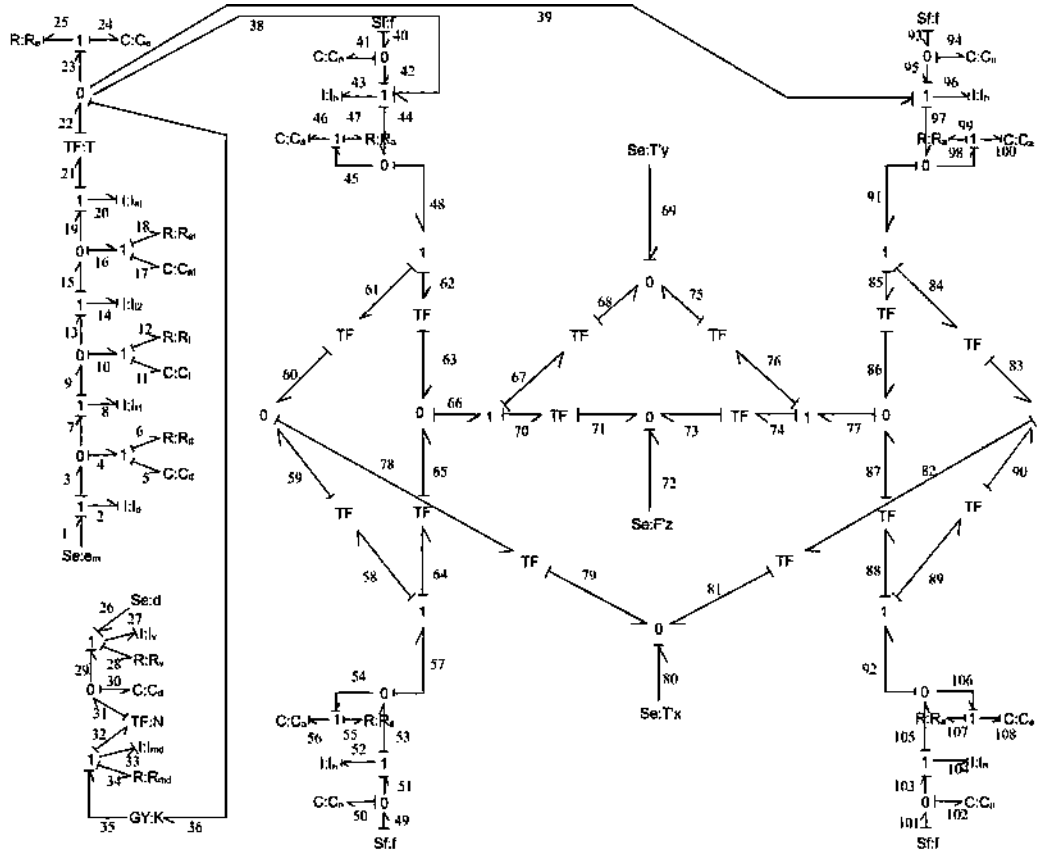


Figura 4.13: Modelo de automóvil en 3D con suspensión pasiva

Los vectores clave del BGD son,

$$\begin{aligned}
 x = & \begin{bmatrix} p_2 \\ q_5 \\ p_8 \\ q_{11} \\ p_{14} \\ q_{17} \\ p_{20} \\ q_{24} \\ p_{27} \\ q_{30} \\ p_{33} \\ q_{41} \\ p_{43} \\ q_{47} \\ q_{50} \\ p_{52} \\ q_{56} \\ q_{94} \\ p_{96} \\ q_{100} \\ q_{102} \\ p_{104} \\ q_{108} \end{bmatrix} & \dot{x} = & \begin{bmatrix} e_2 \\ f_5 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{14} \\ f_{17} \\ e_{20} \\ f_{24} \\ e_{27} \\ f_{30} \\ e_{33} \\ f_{41} \\ e_{43} \\ f_{47} \\ f_{50} \\ e_{52} \\ f_{56} \\ f_{94} \\ e_{96} \\ f_{100} \\ f_{102} \\ e_{104} \\ f_{108} \end{bmatrix} & z = & \begin{bmatrix} f_2 \\ e_5 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{14} \\ e_{17} \\ f_{20} \\ e_{24} \\ f_{27} \\ e_{30} \\ f_{33} \\ e_{41} \\ f_{43} \\ e_{47} \\ e_{50} \\ f_{52} \\ e_{56} \\ e_{94} \\ f_{96} \\ e_{100} \\ e_{102} \\ f_{104} \\ e_{108} \end{bmatrix} & D_{in} = & \begin{bmatrix} f_6 \\ f_{12} \\ f_{18} \\ e_{25} \\ f_{28} \\ f_{34} \\ f_{46} \\ f_{55} \\ f_{99} \\ f_{107} \end{bmatrix} & D_{out} = & \begin{bmatrix} e_6 \\ e_{12} \\ e_{18} \\ e_{25} \\ e_{28} \\ e_{34} \\ e_{46} \\ e_{55} \\ e_{99} \\ e_{107} \end{bmatrix} & u = & \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{26} \\ f_{40} \\ f_{49} \\ e_{69} \\ e_{72} \\ e_{80} \\ f_{93} \\ f_{101} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(4.64)

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-b}{ac} & 0 & \frac{-b}{ac} & 0 & \frac{-b}{ac} & 0 & \frac{-b}{ac} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{ac} & 0 & \frac{-1}{ac} & 0 & \frac{-1}{ac} & 0 & \frac{-1}{ac} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$J_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b}{ac} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{ac} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$J_{22} = 0 \quad (4.72)$$

La respuesta de estado estacionario es,

$$x_{ss} = F^{-1}B^* u_{ss} \quad (4.73)$$

La matriz B^* , de acuerdo a (4.12) está definida por,

$$B^* = \begin{bmatrix}
 \frac{1}{a^2 c^2 R_6} + \frac{1}{a^2} \frac{b^2}{c^2 R_5} & -\frac{1}{a} \frac{b}{c} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{a^2 c^2 R_6} + \frac{1}{a^2} \frac{b^2}{c^2 R_5} & -\frac{1}{a} \frac{b}{c} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{a^2 c^2 R_6} + \frac{1}{a^2} \frac{b^2}{c^2 R_5} & -\frac{1}{a} \frac{b}{c} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{a^2 c^2 R_6} + \frac{1}{a^2} \frac{b^2}{c^2 R_5} & -\frac{1}{a} \frac{b}{c} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\
 \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{b}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{b}{c} + \frac{1}{a} \frac{b}{c R_5} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{ac} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & gj & gk & dl & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & gj & gk & dl & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & ij & ik & hl & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & ij & ik & hl & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & mq & nq & ps & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & mq & nq & ps & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & mr & nr & pt & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & mr & nr & pt & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

El estado estacionario está definido por,

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} I_{10} \left(\frac{1}{a^2 c^2 R_6} + \frac{1}{a^2} \frac{b^2}{c^2 R_5} \right) & -\frac{1}{a} \frac{b}{c} I_{10} & \frac{1}{a} I_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} I_{10} & 0 \\ C_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{13} \left(\frac{1}{a^2 c^2 R_6} + \frac{1}{a^2} \frac{b^2}{c^2 R_5} \right) & -\frac{1}{a} \frac{b}{c} I_{13} & \frac{1}{a} I_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} I_{13} & 0 \\ C_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{14} \left(\frac{1}{a^2 c^2 R_6} + \frac{1}{a^2} \frac{b^2}{c^2 R_5} \right) & -\frac{1}{a} \frac{b}{c} I_{14} & \frac{1}{a} I_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} I_{14} & 0 \\ C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline I_{15} \left(\frac{1}{a^2 c^2 R_6} + \frac{1}{a^2} \frac{b^2}{c^2 R_5} \right) & -\frac{1}{a} \frac{b}{c} I_{15} & \frac{1}{a} I_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} I_{15} & 0 \\ \frac{1}{a} C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} \frac{b}{c} I_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline C \left(\frac{1}{a} \frac{b}{c} + \frac{1}{a} \frac{b}{c R_5} \right) & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{ac} I_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} C_4 & 0 & 0 & 0 & gjC_4 & gkC_4 & dlC_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & gjC_3 & gkC_3 & dlC_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ijC_2 & ikC_2 & hlC_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ijC_1 & ikC_1 & hlC_1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} C_8 & 0 & 0 & 0 & mqC_8 & nqC_8 & psC_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & mqC_7 & nqC_7 & psC_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & mrC_6 & nrC_6 & ptC_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & mrC_5 & nrC_5 & ptC_5 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_{ss} \quad (4.75)$$

En la matriz de estado estacionario anterior (x_{ss}) se puede apreciar que los resultados se obtuvieron en forma simbólica, por lo que si se quiere conocer un estado estacionario específico para cualquier elemento de almacenamiento, basta con sustituir los parámetros

numéricos requeridos.

Los primeros 6 renglones de la matriz corresponden a los estados estacionarios de los elementos del tren motriz, los cuales al tener la misma configuración presentan un comportamiento similar; los siguientes 3 renglones corresponden a la dirección; y los últimos renglones corresponden a los neumáticos y suspensiones dividiéndolos en 3 renglones por cada subsistema, los primeros son para el subsistema delantero izquierdo, el cuál tiene conexión al tren motriz y a la dirección, los siguientes pertenecen al subsistema trasero izquierdo, el cuál no tiene influencia del tren motriz y la dirección, esto se puede observar en el primer elemento del subsistema delantero representa la interacción $(-\frac{1}{a}C_4)$ mientras que en el subsistema trasero no existe esta interacción, y por último se tienen los elementos delantero y trasero derecho, los cuales tienen el mismo comportamiento que los subsistemas de la parte izquierda.

Con las matrices anteriores se procede a realizar la simulación del sistema con los siguientes parámetros numéricos, donde a los que se les asignó el valor de 1, son elementos que no se han estudiado con anterioridad (con excepción de las entradas y modulos de transformación) y con esto se evitan tiempos grandes de simulación o que se generen inestabilidades en el sistema.

$a = b = c = g = h = i = k = l = m = n = p = q = r = t = 1$ (módulos de transformación), $C = C_1 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = C_{10} = C_{11} = C_{12} = 1\frac{N}{m}$ (rigidez de los elementos del tren motriz, dirección y suspensiones), $I_{10} = I_{11} = I_{12} = I_{13} = I_{14} = I_{15} = 1Kg$ (masas en el tren motriz y dirección), $R = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = R_9 = 1\frac{N}{m}$ (resistencia de los elementos en el tren motriz y la dirección), $e_1 = e_{26} = f_{40} = f_{49} = e_{69} = e_{72} = e_{80} = f_{93} = f_{101} = 1m$ (entradas); $d = j = s = -1$ (módulos de transformación); $C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 5.2631 \times 10^{-5}\frac{N}{m}$ (amortiguación en los neumáticos); $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 0.01666Kg$ (masa de los neumáticos); $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1000\frac{N}{m}$ (amortiguadores); sustituyendo en la matriz se tiene,

$$(p_2)_{ss} = 3Kg; (q_5)_{ss} = 1\frac{N}{m}; (p_{27})_{ss} = 1Kg; (q_{41})_{ss} = 0m;$$

$$(q_{47})_{ss} = -1m; (q_{102})_{ss} = 3m; (q_{108})_{ss} = 3m$$

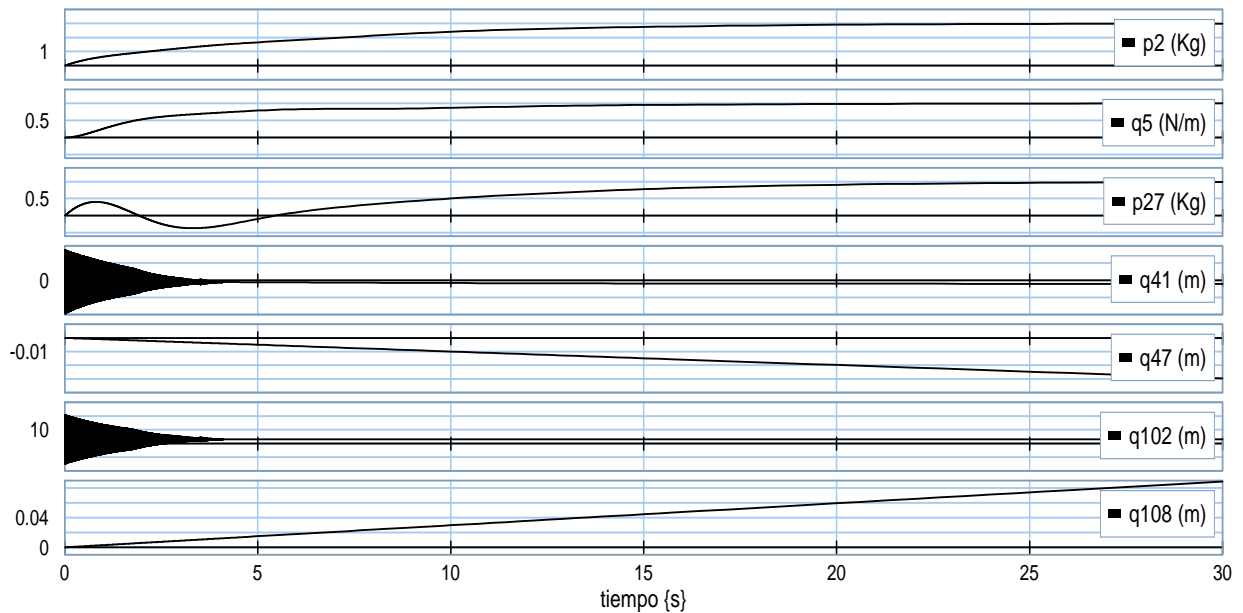


Figura 4.14: Respuesta de estado estacionario del auto completo con suspensión pasiva

De la Figura 4.13, los elementos I_{10} , C_9 , I_{11} , C_4 , C_3 , C_6 y C_5 (p_2 , q_5 , p_{27} , q_{41} , q_{47} , q_{102} y q_{108} respectivamente) fueron seleccionados para ser mostrados en la Figura 4.14 porque son partes representativas de los subsistemas y se realizaron las operaciones correspondientes para poder observar el comportamiento general del sistema del auto completo.

La parte del tren motriz es representada por los elementos I_{10} y C_9 , y muestran el comportamiento de esta sección del auto con la carga del motor, la dirección y el auto.

Las perturbaciones en la dirección son representadas por el elemento I_{11} , el cuál muestra el comportamiento de la dirección cuando presentan fuerzas en el tren motriz y los neumáticos delanteros, que por lo generalmente son contrarrestadas por el conductor (e_{26}) y los elementos de la dirección.

Los elementos C_4 y C_3 representan los neumáticos delanteros y las suspensiones delanteras, representan ambos neumáticos y ambas suspensiones ya que el comportamiento es el mismo si las perturbaciones en el camino son de la misma magnitud y al mismo tiempo, como en este caso.

Lo mismo es para los elementos C_6 y C_5 , pero estos representan los neumáticos y suspensiones traseras.

En estas gráficas, no se puede apreciar que los elementos C_3 y C_5 tengan un estado estacionario, pero esto se debe a que los elementos presentan una dinámica lenta (su respuesta es lenta y tienen a su valor final en un tiempo mayor) y tardan más tiempo que los demás elementos para poder alcanzar en su estado estacionario.

Debido a que se realiza un análisis con sistemas que previamente no se han acoplado en un solo sistema, la validación que se realiza es el comparar los resultados de simulación con los resultados del análisis matemático que se mostro en el desarrollo de esta sección y se puede comprobar que concuerdan.

4.7.2 Suspensión activa

La determinación de la respuesta en estado estacionario del modelo integral del auto con suspensión activa se realiza utilizando el Lema 1, ya que todos sus elementos de almacenamiento en el BGI se encuentran en causalidad integral y en el BGD en causalidad derivativa. En la Figura 4.15 se muestra el modelo en bond graph del auto completo con suspensión activa.

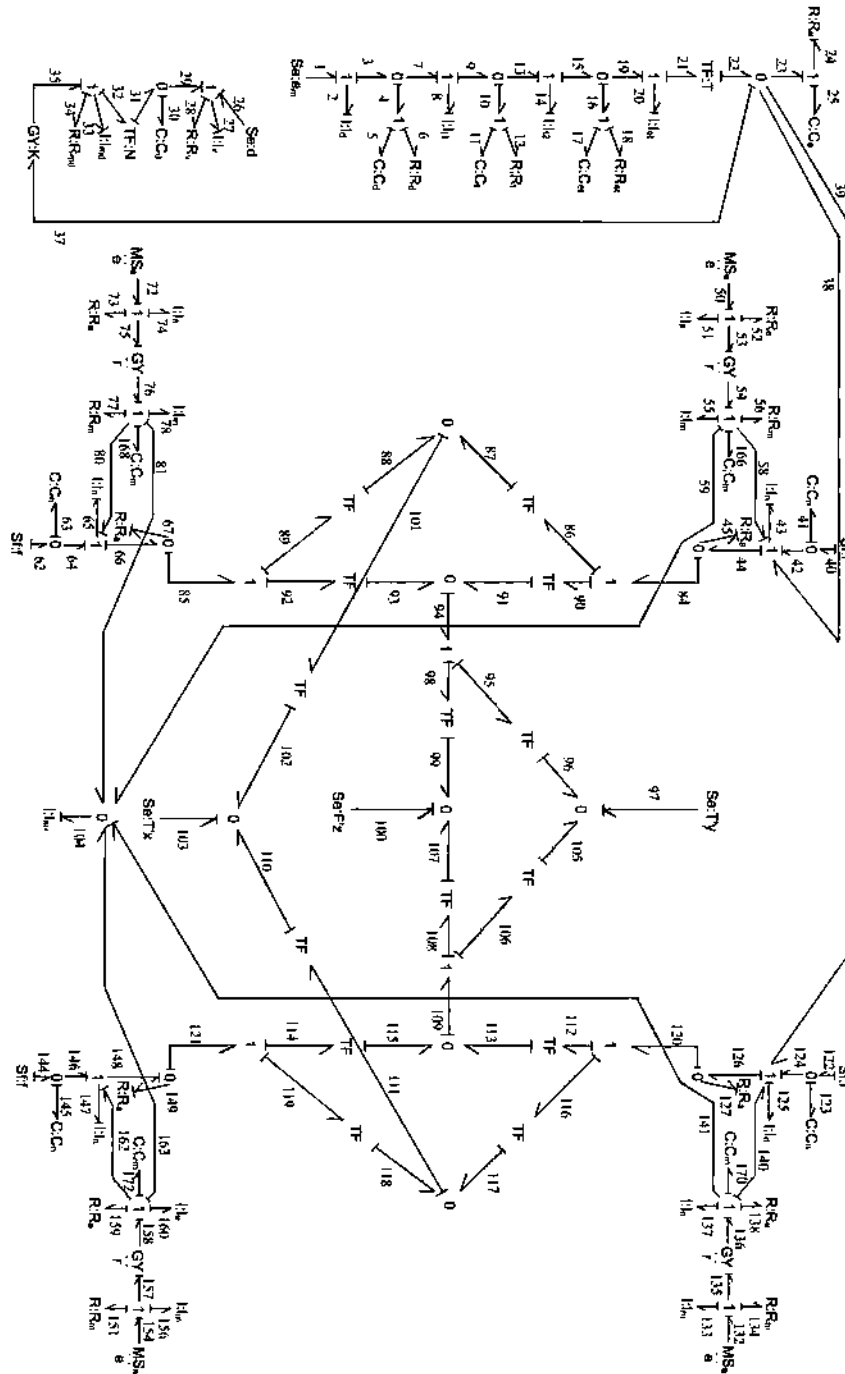


Figura 4.15: Modelo de automóvil en 3D con suspensión activa

Los vectores clave del BGD son,

$$\begin{aligned}
 x = & \begin{bmatrix} p_2 \\ q_5 \\ p_8 \\ q_{11} \\ p_{14} \\ q_{17} \\ p_{20} \\ q_{24} \\ p_{27} \\ q_{30} \\ p_{33} \\ q_{41} \\ p_{43} \\ q_{51} \\ p_{55} \\ q_{63} \\ p_{65} \\ q_{74} \\ p_{78} \\ p_{104} \\ q_{123} \\ p_{125} \\ p_{133} \\ p_{137} \\ q_{145} \\ p_{147} \\ p_{156} \\ p_{160} \\ q_{166} \\ q_{168} \\ q_{170} \\ q_{172} \end{bmatrix} ; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_5 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{14} \\ f_{17} \\ e_{20} \\ f_{24} \\ e_{27} \\ f_{30} \\ e_{33} \\ f_{41} \\ e_{43} \\ e_{51} \\ e_{55} \\ f_{63} \\ e_{65} \\ e_{74} \\ e_{78} \\ e_{104} \\ f_{123} \\ e_{125} \\ e_{133} \\ e_{137} \\ f_{145} \\ e_{147} \\ e_{156} \\ e_{160} \\ f_{166} \\ f_{168} \\ f_{170} \\ f_{172} \end{bmatrix} ; z = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_5 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{14} \\ e_{17} \\ f_{20} \\ e_{24} \\ f_{27} \\ e_{30} \\ f_{33} \\ e_{41} \\ f_{43} \\ f_{51} \\ e_{55} \\ e_{63} \\ f_{65} \\ f_{74} \\ f_{78} \\ f_{104} \\ e_{123} \\ f_{125} \\ f_{133} \\ f_{137} \\ e_{145} \\ f_{147} \\ f_{156} \\ f_{160} \\ e_{166} \\ e_{168} \\ e_{170} \\ e_{172} \end{bmatrix} ; D_{in} = \begin{bmatrix} f_6 \\ f_{12} \\ f_{18} \\ f_{25} \\ f_{28} \\ f_{34} \\ e_{45} \\ f_{46} \\ e_{52} \\ f_{56} \\ e_{67} \\ f_{68} \\ e_{73} \\ f_{77} \\ e_{127} \\ f_{128} \\ e_{134} \\ f_{138} \\ e_{149} \\ f_{150} \\ e_{155} \\ f_{159} \\ f_{167} \\ f_{169} \\ f_{171} \\ f_{173} \end{bmatrix} ; D_{out} = \begin{bmatrix} e_6 \\ e_{12} \\ e_{18} \\ e_{25} \\ e_{28} \\ e_{34} \\ f_{45} \\ e_{46} \\ f_{52} \\ e_{56} \\ f_{67} \\ e_{68} \\ f_{73} \\ e_{77} \\ f_{127} \\ e_{128} \\ f_{134} \\ e_{138} \\ f_{149} \\ e_{150} \\ f_{155} \\ e_{159} \\ e_{167} \\ e_{169} \\ e_{171} \\ e_{173} \end{bmatrix} \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

$$u = \left[e_1 \quad e_{26} \quad f_{40} \quad f_{62} \quad e_{97} \quad e_{100} \quad e_{103} \quad f_{122} \quad f_{144} \right]^T \quad (4.77)$$

las relaciones constitutivas son,

$$F = \text{diag}\{F_1, F_2\} \quad (4.78)$$

$$L = \text{diag}\{L_1, L_2\} \quad (4.79)$$

donde

$$F_1 = \frac{1}{I_{18}}, \frac{1}{C_9}, \frac{1}{I_{13}}, \frac{1}{C_{10}}, \frac{1}{I_{14}}, \frac{1}{C_{11}}, \frac{1}{I_{15}}, \frac{1}{C_{12}}, \frac{1}{I_{16}}, \frac{1}{C}, \frac{1}{I_{17}}, \frac{1}{C_4}, \frac{1}{I_1}, \frac{1}{I_3}, \frac{1}{I_5}, \frac{1}{C_2} \quad (4.80)$$

$$F_2 = \frac{1}{I_2}, \frac{1}{I_4}, \frac{1}{I_8}, \frac{1}{I}, \frac{1}{C_8}, \frac{1}{I_{10}}, \frac{1}{I_{11}}, \frac{1}{I_{12}}, \frac{1}{C_6}, \frac{1}{I_6}, \frac{1}{I_7}, \frac{1}{I_9}, \frac{1}{C_7}, \frac{1}{C_5}, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_3} \quad (4.81)$$

$$L_1 = R, R_{19}, R_{20}, R_{21}, R_{17}, R_{18}, \frac{1}{R_3}, R_8, \frac{1}{R_4}, R_5, \frac{1}{R_1}, R_7, \frac{1}{R_2} \quad (4.82)$$

$$L_2 = R_6, \frac{1}{R_{13}}, R_{16}, \frac{1}{R_{14}}, R_{15}, \frac{1}{R_9}, R_{12}, \frac{1}{R_{10}}, R_{11}, R_{25}, R_{24}, R_{22}, R_{23} \quad (4.83)$$

Debido a la dimensión del sistema, la estructura de unión del BGD es particionada, sabemos que,

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

la estructura unión es,

$$J_{11} = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & J_{11}^{12} & J_{11}^{13} \\ J_{11}^{21} & J_{11}^{22} & J_{11}^{23} \\ J_{11}^{31} & J_{11}^{32} & J_{11}^{33} \end{bmatrix}; J_{12} = \begin{bmatrix} J_{12}^{11} \\ J_{12}^{21} \\ J_{12}^{31} \end{bmatrix}; J_{13} = \begin{bmatrix} J_{13}^{11} \\ J_{13}^{21} \\ J_{13}^{31} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} J_{21}^{11} & J_{21}^{12} & J_{21}^{13} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$J_{21}^{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J - 2Ii & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

El estado estacionario está definido por (4.19),

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{R_{18}}{ac} + \frac{R_{17}b}{ac} & \frac{-b}{ac} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{18}}{ac} + \frac{R_{17}b}{ac} & \frac{-b}{ac} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{18}}{ac} + \frac{R_{17}b}{ac} & \frac{-b}{ac} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{18}}{ac} + \frac{R_{17}b}{ac} & \frac{-b}{ac} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b}{ac} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b}{ac} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{ac} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{a} & 0 & \frac{KdR_8}{R_4} & 0 & jl & jm & hn & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_8K}{R_4} - \frac{d}{R_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kl & km & in & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{LR_7}{R_2} - \frac{g}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{a} & 0 & 0 & 0 & sp & sq & vr & -\frac{MR_{16}x}{R_{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GM R_{16}}{R_{14}} - \frac{x}{R_{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & tp & tq & wr & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{JNR_{12}}{R_{10}} - \frac{y}{R_{10}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & R_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{23} \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

La respuesta en estado estacionario del modelo de auto integral con suspensión activa está dada por:

$C = C_9 = C_{10} = C_{11} = C_{12} = 1 \frac{N}{m}$ (rigidez de los elementos en el tren motriz, dirección y parte mecánica de la suspensión activa), $I_3 = I_4 = I_5 = I_7 = I_8 = I_9 = I_{11} = I_{12} = I_{13} = I_{14} = I_{15} = I_{16} = I_{17} = I_{18} = 1Kg$ (masas de los elementos en el tren motriz, dirección y parte mecánica de suspensión activa, valor de inductancia en parte eléctrica en suspensión activa $1H$), $R = R_2 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = R_{10} = R_{11} = R_{12} = R_{14} = R_{15} = R_{16} = R_{17} = R_{18} = R_{19} = R_{20} = R_{21} = R_{22} = R_{23} = R_{24} = R_{25} = 1 \frac{N}{m}$ (resistencia en los elementos en el tren motriz, dirección y suspensión activa), $e_1 = e_{26} = f_{40} = f_{62} = e_{96} = e_{100} = e_{103} = f_{122} = f_{144} = 1m$; $C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 5.2631 \times 10^{-5} \frac{N}{m}$ (amortiguación de los neumáticos); $C_1 = C_3 = C_5 = C_7 = 5.9481 \times 10^{-5} \frac{N}{m}$ (rigidez inicial de la suspensión activa); $I_1 = I_2 = I_6 = I_{10} = 0.01666Kg$ (masa de los neumáticos); $R_1 = R_3 = R_9 = R_{13} = 1000 \frac{N}{m}$ (amortiguadores); $I = 1.7939 \times 10^{-3}Kg$ (masa del auto); donde f_{40}, f_{62}, f_{122} y f_{144} son impulsos de 5ms de duración, por lo que despues de 0.1s su respuesta se considera igual a 0, entonces sustituyendo en la matriz se tiene,

$$\begin{aligned}
 (p_2) = 1Kg; (q_5) = 1 \frac{N}{m}; (p_{27}) = 1Kg; (q_{41}) = 2 \frac{N}{m}; (p_{51}) = 0H; (q_{145}) = 3 \frac{N}{m}; (p_{156}) = \\
 0H; (q_{166}) = 0 \frac{N}{m}; (q_{172}) = 0 \frac{N}{m}
 \end{aligned}$$

En la Figura 4.16 se seleccionan las variables p_2 y q_5 para mostrar el comportamiento del tren motriz, el elemento p_{27} para la dirección, los elementos q_{41}, p_{51} y q_{166} para el subsistema de neumático con suspensión activa delantero izquierdo que a la par es el mismo comportamiento que el subsistema delantero derecho, y por último los elementos q_{145}, p_{156} y q_{172} para el subsistema de neumático con suspensión activa trasero derecho que a la vez presenta el mismo comportamiento el subsistema trasero izquierdo.

La parte del tren motriz es representada por los elementos $I_{18}(p_2)$ y $C_9(q_5)$, y muestran el comportamiento de esta sección del auto con la carga del motor, la dirección y el auto, que presentan una perturbación generada por la dirección y las perturbaciones en los neumáticos..

Las perturbaciones en la dirección son representadas por el elemento $I_{16}(p_{27})$, el cuál muestra el comportamiento de la dirección cuando presentan fuerzas en el tren motriz y los neumáticos delanteros, que por lo generalmente son contrarrestadas por el conductor (e_{26}) y los demás elementos de la dirección.

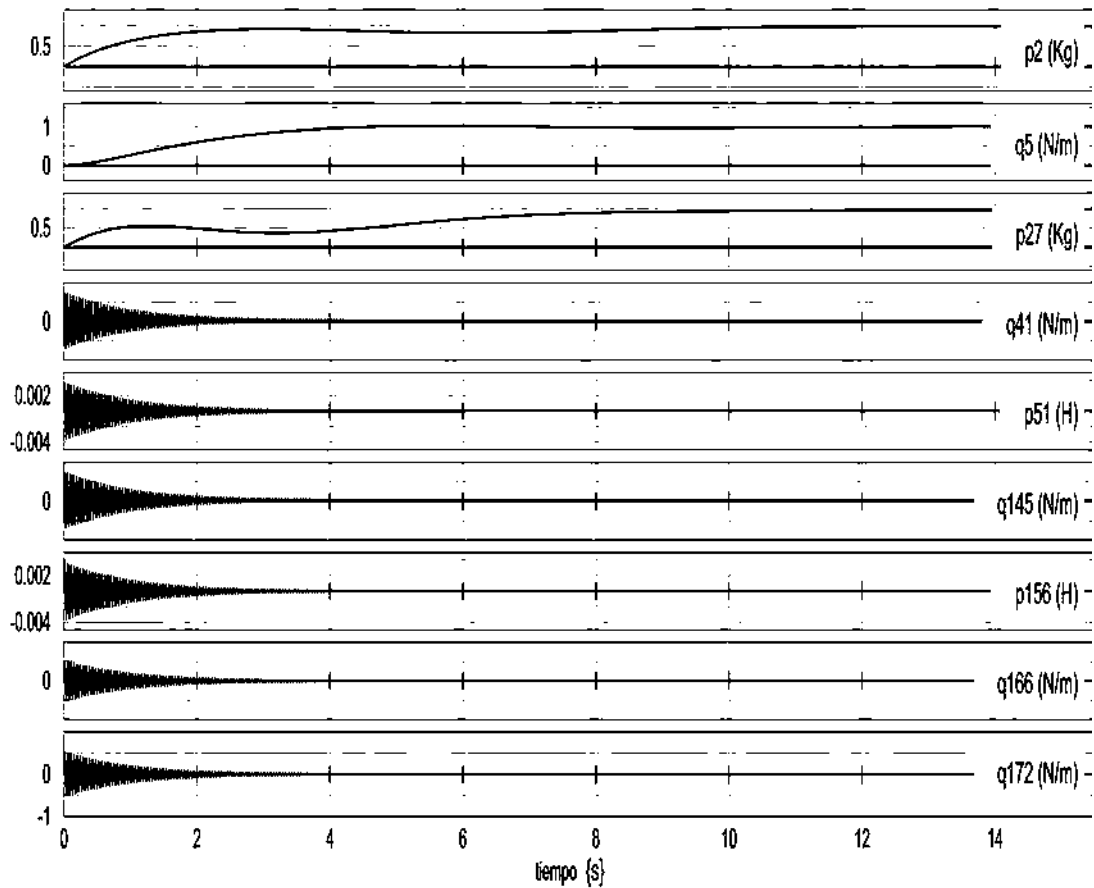


Figura 4.16: Comparación de respuestas de estado estacionario del auto completo con suspensión activa con 20 Sim y ecuaciones matemáticas

Los elementos $C_4(q_{41})$, $I_3(p_{51})$ y $C_7(q_{166})$ representan los neumáticos delanteros y las suspensiones delanteras, representan ambos neumáticos y ambas suspensiones ya que el comportamiento es el mismo si las perturbaciones en el camino son de la misma magnitud y al mismo tiempo, como en este caso, como lo es en este caso. De estos solamente I_3 presenta un estado estacionario con valor de 0 debido a que no necesita generar energía para contrarrestar perturbación alguna y el peso del auto se divide en los neumáticos y las suspensiones por lo que presentan un estado estacionario distinto a 0.

Lo mismo es para los elementos $C_6(q_{145})$, $I_7(p_{156})$ y $C_3(q_{172})$, pero estos representan los neumáticos y suspensiones traseras.

El modelado en bond graph de los sistemas automotrices representa una ventaja sobre el modelado clásico al no tener que realizar varios submodelos de un sistema, tomando por ejemplo el sistema de la suspensión, el cuál en el modelado clásico tiene componentes mecánicas e hidráulicas y esto puede generar problemas en la comprensión del modelo, lo que no sucede en el modelado con bond graph, ya que la conversión de estos sistemas es directo, debido a que existen equivalencias para los sistemas mecánicos e hidráulicos por lo que el acople es directo.

No es la única ventaja que se presenta en este tipo de modelos, esta técnica de modelado permite en un momento dado, separar los distintos subsistemas presentes y analizar su comportamiento individual o también permite analizar el modelo quitándole submodelos sin tener que hacer grandes modificaciones en las ecuaciones del modelo.

La comprobación de los modelos del auto completo en 3D no se realizó respecto a softwares de diseño automotriz disponibles, ya que necesitan de datos no contemplados en estos modelos, como es el tipo de materiales utilizados en la construcción de los subsistemas, constantes de rigidez, interacción de fluidos en las uniones, y otros factores mecánicos desconocidos en el área eléctrica, pero si se realizó la comprobación de los resultados de simulación con los resultados matemáticos y concuerdan como ya se pudo observar cuando se presentaron los resultados correspondientes.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos Futuros

5.1 Conclusiones

En este trabajo se obtuvo el modelo en Bond Graph de un automóvil en 3D, tanto en el uso de la suspensión pasiva así como de la suspensión activa; donde el objetivo principal no solamente era para observar su comportamiento en presencia de perturbaciones, sino también obtener su estado estacionario con el uso de la técnica de modelado de Bond Graph.

En el análisis del comportamiento del automóvil en 3D, primeramente fue necesario realizar el análisis de modelos existentes, los cuales en este caso fueron modelos de suspensiones pasivas en su configuración de un cuarto de automóvil y medio auto.

Una vez analizados dichos modelos, se procedió a integrar una suspensión activa, de la cual existen referencias, pero no ha sido analizada tan ampliamente como la suspensión pasiva, por lo que se optó por utilizar un modelo de una servoválvula para realizar el acople de la suspensión activa.

Al estar trabajando con estos elementos dentro del modelo utilizado, se encontraron características distintas a las que se presentan normalmente en la mayoría de los modelos representados en Bond Graph, lo cual generó un nuevo método de análisis de los modelos que presentan estas características, las cuales son el mantener la causalidad al momento de cambiar del BGI al BGD y con ello tener ambas causalidades en los dos modelos.

Este nuevo método de análisis matemático dentro de la técnica de Bond Graph, permitió obtener resultados satisfactorios de respuesta en estado estacionario de una manera más directa y sencilla que la metodología usada normalmente.

Además de obtener este nuevo método, también se acopló al análisis del modelo el comportamiento del eje de transmisión y la dirección, algo que no había sido analizado en conjunto anteriormente en la teoría de Bond Graph.

Se pudo demostrar que el estado estacionario se puede obtener utilizando la nueva formulación utilizada en este trabajo, y gracias a esto se obtuvieron los resultados esperados.

Por último, quedaron establecidas las bases para el modelado de un automóvil en 3D con el de ambas suspensiones bajo la teoría de Bond Graph, y a la vez se demuestra que esta técnica de modelado puede ser acoplada con el modelado clásico.

5.2 Trabajos Futuros

Los trabajos futuros que pueden ser realizados son extender el procedimiento planteado dentro del presente trabajo que se realizó al aumentar la cantidad de subsistemas conectados al mismo. Otro punto importante a desarrollar sería modelar en Bond Graph los diferentes tipos de automóviles como podrían ser los automóviles de carrera tipo formula 1, autos de carreras rally, autos de carga, etc. Por último, este trabajo sirve como base para el estudio de la observabilidad y controlabilidad del automóvil.

Bibliografía

- [Abadie, 1996] Vincent Abadie, Franck Guillemard, André Rault, *Apport du Bond Graph dans la démarche mécatronique appliquée à l'automobile*, Les Bond Graphs, pp351-375
- [Aparicio, 1995] F. Aparicio Izquierdo, C. Vera Alvarez, V. Díaz López, *“Teoría de los vehículos automóviles”*, Ed. Madrid: Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid, 1995.
- [Barasözen, 1995] B. Barasözen, P. Rentrop, Y. Wagner (1995), *Inverter n-Bar Model in Description and in State Space Form*, Math. Model. Syst., **1**, 272-285.
- [Bel] D. José Bel Cacho, *“Formulación e implementación de una metodología de elementos finitos para el análisis de modelos bond graph de sistemas discretos-continuos”*, Tesis doctoral, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Zaragoza, España.
- [Breedveld, 1984] P. C. Breedveld (1984) *A Bond Graph Algorithm to Determine the Equilibrium State of a System*, Journal of The Franklin Institute, vol. 318, No. 2, pp. 77-75.
- [Boer, 2002] G.R. de Boer (2002), *A physical multi-body car model using 3-D (screw) bond graphs*, Universidad de Twente.
- [Burkett, 1999] Molly Burkett, Colin Hynson, David Corbett, *History of Automobiles*, Ticktock Media Limited, 1999.

-
- [Car Design] <http://www.carbodydesign.com/directory/car-design/car-design-software>
- [Cellier, 2005] François E. Cellier, Àngela Nebot (2005), *The Modelica Bond Graph Library*, Proc. 4th International Modelica Conference, Hamburgo, Alemania, Vol. 1 pp 57-65.
- [Cuadrado, 2009] Javier Cuadrado Aranda, *Introducción a la dinámica de sistemas multicuerpo y aplicaciones biomecánicas*, UPC, Barcelona, Noviembre 2009.
- [Dauphin-Tanguy, 2000] Dauphin-Tanguy Geneviève (2000), et al., *Les Bond Graphs*, Hermes Science Publications, Francia.
- [Drozd, 1991] W. Drozd, H.B. Pacejka, *Developmen and Validation of a Bond Graph Handling Model of an Automobile*, Journal of the Franklin Institute, pp 941-957, Grán Bretaña
- [Filippini, 2000] G. Filippini, D. Delarmelina, J. Pagano, J. P. Alianak, S. Junco and N. Nigro, *Dynamics of Multibody Systems with Bond Graph*. Mecánica Computacional Vol XXVI, pp. 2943-2958, Córdoba, Argentina, Octubre 2007.
- [Filippini, 2007] G. Filippini, N. Nigro, S. Junco, *Vehicle Dynamics Simulation using Bond Graphs*, IMAACA, 2007.
- [Fortes, 2008] Juan Carlos Fortes Garrido, *Modelado Computacional para el análisis Dinámico Mediante Método Matricial de Sistemas Multicuerpo de Seis Elementos*, Universidad de Huelva, 2008.
- [Fu, 1989] K. S. Fu., R. C. González y C. S. G. Lee (1989), *Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia*, McGraw-Hill.
- [Gawthrop, 1995] P. Gawthrop and L. Smith (1995), *Metamodeling*, Prentice Hall.
- [Gawthrop, 2007] Peter J. Gawthrop and Geraint P. Bevan (2007), *Bond-Graph Modeling: A Tutorial Introduction for Control Engineers*, IEEE Control Systems Magazine, April, 2007, pp. 24-45.

-
- [González, 2003] G. Gonzalez-A y R. Galindo(2003), *Steady-State Values for a Physical System with Bond Graph Approach*, 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, pp. 25-28, Miedzyszdroje, Poland.
- [Hernández, 2010] Jorge Hernández Valencia (2010), *Guía de Nº 2 Mecánica Automotriz. Sistemas de Suspensión, amortiguación y dirección*, Fundación Universidad de Atacama Escuela Técnico Profesional Unidad Técnico Pedagógica.
- [Karnopp, 2000] Dean. C. Karnopp D. L. Margolis and Roland C. Rosenber (2000), *System Dynamics: Modeling and Simulation of -mechatronic Systems*, John Wiley & Sons, Abril.
- [Kruczek, 2004] Ales Kruczek, Antonin Stribrsky, *A Full-Car Model For Active Suspensions - Some Practical Aspects*, Proceedings of the 2004 IEEE International Conference in Mechatronics.
- [Louca, 2001] Loucas S. Louca, J.L. Stein, D.G. Rideout (2001), *Generating Proper Integrated Dynamic Models for Vehicle Mobility Using a Bond Graph Formulation*, Proceedings of the 2001 International Conference on Bond Graph Modeling, Enero, Phoenix. U.S.A.
- [Mera, 2000] J. M. Mera, C. Vera, J. Fález (2000), *2WD Power Train Modelling With Bond Graphs Applied To Vehicular Dynamics*,
- [Mukherjee, 2006] A. Mukherjee, R. Karmakar and A. K. Samantaray (2006), *Bond Graph in Modeling, Simulation and Fault Identification*, International Publishing House Pvt. Ltd.
- [Oh, 2004] Se-Wook Oh, Ho-Chol Chae, Seok-Chan Yun, Chang-Soo Han, *The Design of a Controller for the Steer-by-Wire System*, JSME International Journal, Series C, Vol. 47, No 3,2004.

-
- [Paynter, 1961] Henry Paynter (1961), *Analysis and Design of Engineering Systems*, The M.I.T. Press.
- [Riquelme, 2004] Ricardo Riquelme Martínez (2004), *Investigacion de características de operacion, prestacion al cliente y fallas de operacion en el tren motriz de vehiculos compactos y subcompactos en el Valle de Mexico*, Tesis profesional Universidad de las Américas Puebla, 2004, Puebla, México.
- [Sheng, 2007] Dejun Sheng, Dapeng Fan, Hu Luo and Xutao Nie (2007), *Bond Graph Approach to the Modeling and Simulation of a Two-Axis Pointing and Tracking System*, IEEE International Conference on Mechatronics and Automation August 5-8, 2007, Harbin, China.
- [Silva, 2007] Luis Silva, Diego Delarmelina, Sergio Junco, Nacer K. M'Sirdi, Hassan Noura (2007), *Bond Graph Based Fault Diagnosis of 4W-Vehicle Suspension Systems*, 8th International Conference on Bond Graph Modeling And Simulacion, 2007, California, U.S.A.
- [Ting-Yung] John Ting-Yung Wen, *Kinematic Manipulability of General Constrained Rigid Multibody Systems*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 15, No. 3, June 1999.
- [Thoma, 2000] J. Thoma and B. Ould Bouamama (2000), *Modelling and Simulation in Thermal and Chemical Engineering: A Bond Graph Approach*, Springer.
- [Tierneho, 1985] M. J. L. Tierneho, A. M. Bos (1985), *Modelling the Dynamics and Kinematics of Mechanical Systems with Multibond Graphs*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 37-50.
- [Urbieta, 2003] Juan Alberdi Urbieta, *Manuales de automoción: Amortiguadores y suspensión*, Escuela de Ingeniería de San Sebastián, Universidad de Navarra.
- [Wasfi, 2003] Tamer M. Wasfi, Ahmed K. Noor, *Computational strategies for flexible multibody systems*, American Society of Mechanical Engineers, 2003

- [Wellstead, 1979] P. E. Wellstead (1979), *Introduction to Physical System Modelling*, Academic Press.
- [Wu, 2004] Shing-Jen Wu, Hsin-Han Chiang, Jiun-Hau Chen, Tsu-Tian Lee (2004), *Optimal Fuzzy Control Design for Half-Car Active Suspension Systems*, IEEE International Conference on Networking, Sensing & Control, 2004, Taipei, Taiwan.
- [Ríos, 1995] Sixto Ríos, *Modelización*, Alianza Universidad.