



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

---

**EFFECTO CAÓTICO POR PARTÍCULAS CARGADAS EN UN  
CONDENSADOR ELÉCTRICO**

---

**TESIS**

Para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

PRESENTA:

**CASANDRA HERREJÓN CALDERÓN**

**ASESORES DE TESIS:**

Doctor en Ciencias en Óptica  
DR. HÉCTOR I. PÉREZ AGUILAR

Doctor en Ciencias en Ingeniería Física  
DR. HUGO ENRIQUE ALVA MEDRANO

Morelia, Michoacán Diciembre de 2023

## RESUMEN

En el presente trabajo de tesis, se realiza un estudio numérico sobre la dinámica de partículas cargadas viajando a través de un condensador eléctrico con paredes caracterizadas por funciones sinusoidales y periódicas, donde está establecido un campo de potencial inhomogéneo. Posteriormente, se trabajó en un sistema formado por paredes plano paralelas que encierran un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares conductoras. Se analiza si, bajo ciertas circunstancias, aparece el fenómeno de caos electromagnético.

Para caracterizar este tipo de sistemas, se implementaron técnicas numéricas basadas en métodos integrales y en el método de diferencias finitas. El método de la ecuación integral es usado para determinar el potencial eléctrico que caracteriza al condensador. Este método tiene como punto de partida el segundo teorema integral de Green, permitiendo obtener un par de ecuaciones integrales que involucran, como incógnitas la función del potencial eléctrico y su derivada normal evaluados en los elementos que definen los perfiles considerados. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial inhomogénea cuya solución determina las funciones fuente, con las que se pueden calcular el campo eléctrico. Por su parte, el método de diferencias finitas se utilizó para determinar la trayectoria de la partícula influenciada por el campo eléctrico.

Presentamos resultados numéricos de la dinámica de las partículas en el condensador por medio de los mapas de Poincaré, variando los parámetros de los que dependen los sistemas. Los resultados obtenidos muestran que las propiedades de transporte de las partículas cargadas en el condensador eléctrico con placas onduladas están determinadas por la separación promedio entre las paredes, la diferencia de fase entre ellas, la amplitud de la ondulación y la magnitud del potencial eléctrico. Mientras que para el condensador formado por superficies planas y paralelas que contiene un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas, el comportamiento de las trayectorias de las partículas está asociado a la variación de parámetros tales como el ancho del canal, el tamaño de las inclusiones y la presencia del campo eléctrico. Concluimos que en ambos sistemas las trayectorias tienden más a ciclos límite u órbitas elípticas (islas), debido a la presencia del campo eléctrico. Sin embargo, se encontraron indicios de caos electromagnético en ambos sistemas.

**Palabras clave:** Condensador eléctrico, Caos electromagnético, Método de la Ecuación Integral, Método de Diferencias Finitas, Mapa de Poincaré.

## ABSTRACT

In the present work, a numerical study on the dynamics of charged particles traveling through an electric capacitor with walls characterized by sinusoidal and periodic functions is carried out, where an inhomogeneous potential field is established. Subsequently, we worked on a system formed by plane-parallel walls enclosing a periodic arrangement of circular cylindrical conductive inclusions. It is analyzed whether, under certain circumstances, the phenomenon of electromagnetic chaos appears.

To characterize this type of systems, numerical techniques were implemented based on integral methods and the finite difference method. The integral equation method is used to determine the electrical potential that characterizes the capacitor. This method has as its starting point the second Green's integral theorem, allowing to obtain a couple of integral equations that involve, as unknowns the function of the electrical potential and its normal derivative evaluated in the elements that define the profiles considered. The discretization of the system results in an inhomogeneous matrix equation whose solution determines the source functions, with which the electric field can be calculated. For its part, the finite difference method was used to determine the trajectory of the particle influenced by the electric field.

We present numerical results of the particle dynamics in the capacitor by means Poincaré's maps, varying the parameters on which the systems depend. The results obtained show that the transport properties of the charged particles in the electric capacitor with rippled plates are determined by the average separation between the walls, the phase difference between them, the amplitude of the ripple and the magnitude of the electrical potential. While for the capacitor formed by parallel plane surfaces that contains a periodic arrangement of cylindrical inclusions, the behavior of the particle trajectories is associated with the variation of parameters such as the channel width, the size of the inclusions and the presence of the electric field. We conclude that in both systems the trajectories tend more to limit cycles or elliptical orbit (islands), due to the presence of the electric field. However, signs of electromagnetic chaos were found in both systems.

**Keywords:** Electric capacitor, Electromagnetic chaos, Integral Equation Method, Finite Difference Method, Poincaré map.

*En memoria de mi abuelo*

*Octavio Calderón Ortiz*

*A mi familia*

# Agradecimientos

Doy gracias a Dios por no abandonarme y darme la fortaleza para sacar adelante este proyecto.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca que me concedió durante los 2 años de la maestría, sin la cual no me hubiera sido posible concluir esta etapa de mi formación académica.

Agradezco al Dr. Héctor Pérez Aguilar y al Dr. Hugo Enrique Alva Medrano, mis asesores de tesis. Gracias Dr. Héctor por aceptar ser mi asesor de tesis y por depositar su confianza en mí para llevar a cabo este trabajo. Así como también por todas las atenciones que recibí de su parte. Gracias Dr. Hugo por su apoyo constante, motivación y por todas esas horas que me dedico para guiarme en el desarrollo de este proyecto. Su excelente disposición e interés hicieron de este trabajo una experiencia agradable. Gracias por todo profesores.

También, quiero agradecer a los miembros de mi comité tutorial: M.C. Gabriel Arroyo Correa, Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova y Dr. José Gerardo Tinoco Ruiz, por aceptar evaluar mi trabajo y por darle seguimiento al mismo. Por todo el tiempo que dedicaron a mi tesis, gracias.

Finalmente, agradezco de forma especial a todos los miembros de mi familia y amigos. En particular a mis padres, les agradezco mucho su apoyo moral, comprensión y paciencia que siempre me han brindado.

Morelia, Michoacán, México

Casandra Herrejón

23 de Octubre de 2023

# Contenido

	Página
<b>Resumen</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>iv</b>
<b>Contenido</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
I.1. Antecedentes . . . . .	1
I.2. Presentación del problema . . . . .	4
I.3. Estructura de la tesis . . . . .	5
<b>II. SISTEMAS DINÁMICOS Y CAOS</b>	<b>7</b>
II.1. Sistemas dinámicos . . . . .	7
II.1.1. Tipos de sistemas dinámicos . . . . .	8
II.1.2. Comportamiento de los sistemas dinámicos . . . . .	10
II.2. Cuantificación del caos . . . . .	12
II.2.1. Exponentes de Lyapunov . . . . .	13
II.2.2. Mapa de Poincaré . . . . .	14
II.3. Caos clásico y billares . . . . .	16
II.3.1. Transporte en sistemas balísticos . . . . .	16
II.3.2. El billar de Sinai . . . . .	24
<b>III. MÉTODOS NUMÉRICOS</b>	<b>35</b>
III.1. Consideraciones preliminares . . . . .	35
III.2. Método de la Ecuación Integral . . . . .	37
III.2.1. Ecuación de Laplace . . . . .	38
III.2.2. Función de Green para la ecuación de Laplace . . . . .	39
III.2.3. Representación integral de la ecuación de Laplace . . . . .	40
III.2.4. Discretización de las ecuaciones integrales . . . . .	41
III.3. Método de Diferencias Finitas . . . . .	46
<b>IV. Resultados</b>	<b>49</b>
IV.1. Condensador eléctrico con placas sinusoidales . . . . .	50
IV.1.1. Trayectorias de partículas . . . . .	51

## Contenido (continuación)

	Página
IV.1.2. Mapas de Poincaré . . . . .	55
IV.2. Condensador eléctrico con placas plano paralelas que contiene inclusiones cilíndricas circulares . . . . .	60
IV.2.1. Trayectorias de partículas . . . . .	61
IV.2.2. Mapas de Poincaré . . . . .	64
<b>V. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>A. ELEMENTOS DE MATRIZ</b>	<b>74</b>
A.1. Elementos no diagonales . . . . .	75
A.2. Elementos diagonales . . . . .	76
<b>REFERENCIAS</b>	<b>79</b>

# Lista de Figuras

Figura		Página
1	Atractor de Lorenz. . . . .	12
2	Geometría del mapa de Poincaré para una órbita periódica. . . . .	16
3	Trayectoria de una partícula en un canal formado por superficies onduladas y periódicas. . . . .	17
4	Representación de la trayectoria de una partícula en un canal sinusoidal. . . . .	18
5	Colisiones posibles de la partícula con la placa superior. La imagen fue tomada de la referencia Rojas-Sánchez (2015). . . . .	22
6	Colisiones posibles de la partícula con la placa inferior. La imagen fue tomada de la referencia Rojas-Sánchez (2015). . . . .	23
7	(a) Espacio de configuración de un billar formado por un cuadrado y un obstáculo circular en su centro y (b) trayectoria de una partícula que se mueve clásicamente experimentando colisiones elásticas. . . . .	25
8	Esquema de las colisiones posibles de una partícula con el obstáculo circular. . . . .	30
9	Esquema de las colisiones posibles de una partícula con el obstáculo circular. . . . .	31
10	Esquema de las colisiones posibles de una partícula con el obstáculo circular. . . . .	32
11	Trayectoria de la partícula con (a) 50 iteraciones y (b) 100 iteraciones. . . . .	34
12	Descripción gráfica de un condensador formado por superficies sinusoidales infinitas de periodo $P$ en el plano $x-y$ . . . . .	36
13	Descripción gráfica de un condensador formado por superficies plano paralelas infinitas y un arreglo de inclusiones cilíndricas circulares de radio $a$ en el plano $x-y$ . . . . .	37
14	Elección del punto de observación $\mathbf{r}$ , muy cerca de la superficie representada por $\partial R$ . . . . .	41
15	Celda unitaria ondulada que está limitada por los contornos $\Gamma_1$ , $\Gamma_2$ , $\Gamma_3$ y $\Gamma_4$ . . . . .	42
16	Celda unitaria que está limitada por los contornos $\Gamma_1$ , $\Gamma_2$ , $\Gamma_3$ , $\Gamma_4$ y $\Gamma_5$ . . . . .	45

## Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
17	Potencial eléctrico para un condensador de (a) placas planas ( $A = 0$ ), (b) placas sinusoidales de amplitud $A = 0.17\pi$ y (c) $A = 0.08\pi$ . Campo eléctrico para un condensador con amplitud (d) $A = 0$ , (e) $A = 0.17\pi$ y (f) $A = 0.08\pi$ . . . . .	51
18	Trayectorias de una partícula con $v_y > 0$ para (a) condensador plano con $A = 0.0$ , $v_x = 0.3$ , $v_y = 1.0$ y (c) condensador ondulado con $A = 0.14\pi$ , $v_x = 0.48$ , $v_y = 1.24$ . Trayectorias de una partícula con $v_y < 0$ para (b) condensador ondulado con $A = 0.08\pi$ , $v_x = 0.2$ , $v_y = -0.6$ y (d) $A = 0.25$ , $v_x = 0.5$ , $v_y = -1.0$ . . . . .	52
19	Trayectorias de una partícula en un condensador con amplitud (a) $A = 0.0$ , (b) $A = 0.2$ , (c) $A = 0.17\pi$ y (d) $A = 0.3$ . . . . .	54
20	Distribución angular de dos fuentes con 16 partículas cada una en un condensador con parámetros: $A = 0.04$ , $b = \pi$ y $L = 4\pi$ . . . . .	55
21	Mapas de Poincaré para un condensador con amplitud (a) $A = 0$ , (b), (c) y (d) $A = 0.08$ con los potenciales (a) $U = 0$ , (b) $U = 0$ , (c) $U =  0.2 $ y (d) $U =  0.9 $ . . . . .	57
22	Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0.08$ y ancho $b = 1.0$ para los potenciales (a) $U =  0.6 $ y (b) $U =  1.5 $ . . . . .	57
23	Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud (a) y (b) $A = 0.02\pi$ , (c) y (d) $A = 0.045\pi$ para los potenciales (a) y (c) $U =  0.2 $ , (b) y (d) $U =  0.6 $ . En todos los casos el ancho es $b = 0.15\pi$ . . . . .	58
24	Mapas de Poincaré para un condensador con amplitud $A = 0.02\pi$ , ancho $b = 0.15\pi$ , potencial $U =  0.81 $ y diferencias de fase (a) $r = 0$ , (b) $r = \pi$ y (c) $r = 3\pi$ . . . . .	59
25	Potenciales eléctricos obtenidos con (a) $U_1 = -1$ , $U_2 = -1$ , $U_3 = 0.5$ y $a = 0.2\pi$ ; (b) $U_1 = 0.6$ , $U_2 = 0.6$ , $U_3 = -0.3$ y $a = 0.30\pi$ ; (c) $U_1 = 2$ , $U_2 = -2$ , $U_3 = 1$ y $a = 0.32\pi$ . (d), (e) y (f) Campos eléctricos correspondientes para cada caso. . . . .	61

## Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
26	Trayectorias de una partícula en un condensador con los siguientes parámetros: $L = 2\pi$ , $b = 2\pi$ , $a = 0.4\pi$ , (a) $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ , (b) $U_1 = 0.5$ , $U_2 = 0.7$ y $U_3 = -0.8$ . Y valores iniciales para la partícula: (a) $x_0 = 1.4$ , $y_0 = 0.0$ , $v_x = 0.2$ , $v_y = 0.4$ y (b) $x_0 = 0.0$ , $y_0 = 0.0$ , $v_x = 0.4$ , $v_y = 0.7$ . . . . .	62
27	Evolución de las trayectorias de una partícula en un condensador con parámetros: $b = 2\pi$ , $L = 2\pi$ , (a) $a = 0.30\pi$ , (b) $a = 0.2\pi$ , (c) $a = 0.32\pi$ y (d) $a = 0.26\pi$ . Además con un potencial (a) $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ ; (b) $U_1 = 0.5$ , $U_2 = 0.4$ , $U_3 = -0.8$ ; (c) $U_1 = 0.7$ , $U_2 = -0.5$ , $U_3 = 0.4$ y (d) $U_1 = -1.3$ , $U_2 = -1.3$ , $U_3 = 1.0$ y condiciones iniciales para la partícula: (a) $x_0 = 2.6$ , $y_0 = 0.0$ , $v_x = 0.2$ , $v_y = 0.3$ ; (b) $x_0 = 0.0$ , $y_0 = 3.2$ , $v_x = 0.4$ , $v_y = 0.5$ ; (c) $x_0 = 0.0$ , $y_0 = 0.0$ , $v_x = 0.4$ , $v_y = 0.7$ y (d) $x_0 = 2.0$ , $y_0 = 0.0$ , $v_x = 0.3$ , $v_y = 0.6$ . . . . .	63
28	Distribuciones angulares de dos fuentes con 16 partículas cada una en un condensador con parámetros: $b = \pi$ , $L = 4\pi$ y $a = 0.1\pi$ . . . . .	65
29	Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en (a) un condensador plano sin inclusiones y (b) un condensador plano con inclusiones. Para los parámetros: $L = 4\pi$ , $b = 0.5\pi$ , (a) $U_1 = 0.1$ , $U_2 = -0.1$ y (b) $a = 0.06\pi$ , $U_1 = 0.1$ , $U_2 = 0.1$ y $U_3 = -0.1$ . . . . .	66
30	Mapas de Poincaré para un condensador plano con ancho $b = 0.5\pi$ y potenciales eléctricos (a) y (b) $U_1 = -0.2$ , $U_2 = -0.2$ , $U_3 = 0.5$ ; (c) $U_1 = 0.7$ , $U_2 = -0.5$ , $U_3 = 0.9$ ; (d) $U_1 = -0.1$ , $U_2 = -0.1$ , $U_3 = 0.3$ ; (e) $U_1 = 1.0$ , $U_2 = 1.0$ , $U_3 = -0.6$ y (f) $U_1 = 0.1$ , $U_2 = 0.4$ , $U_3 = -0.2$ . . . . .	67
31	Mapas de Poincaré para un condensador plano con ancho $b = 0.2\pi$ y potenciales eléctricos (a) $U_1 = -0.5$ , $U_2 = -0.5$ , $U_3 = 0.2$ ; (b) $U_1 = 0.7$ , $U_2 = -0.5$ , $U_3 = 0.4$ ; (c) $U_1 = 0.6$ , $U_2 = 0.5$ , $U_3 = -0.3$ y (d) $U_1 = 2.0$ , $U_2 = 2.0$ , $U_3 = -2.0$ . . . . .	68
32	Mapas de Poincaré para un condensador plano con ancho $b = 0.1\pi$ y potenciales eléctricos (a) $U_1 = -0.3$ , $U_2 = -0.3$ , $U_3 = 0.1$ y (b) $U_1 = -0.1$ , $U_2 = -0.1$ , $U_3 = 0.2$ . . . . .	70
33	Mapas de Poincaré para un condensador plano con ancho $b = 0.1\pi$ y potenciales eléctricos (a) $U_1 = 0.2$ , $U_2 = -0.6$ , $U_3 = 0.1$ ; (b) $U_1 = -0.3$ , $U_2 = -0.3$ , $U_3 = -0.1$ y (c) $U_1 = 2.0$ , $U_2 = 2.0$ , $U_3 = -2.0$ . . . . .	70

# Capítulo I

---

## INTRODUCCIÓN

---

### I.1. Antecedentes

La teoría del caos ha sido considerada como el tercer mayor descubrimiento en la ciencia y la filosofía del siglo xx, después de la relatividad y la mecánica cuántica. En los últimos 30 años, los científicos y tecnólogos han mostrado el uso potencial del caos en las ciencias naturales y tecnológicas. Un ejemplo de esto son las potenciales aplicaciones del caos en el área de las comunicaciones y en sistemas de encriptación de datos (Grassi, 2021; Moysis *et al.*, 2022; Núñez, 2006) donde se han reportado un gran número de trabajos que abordan problemáticas interesantes del mundo real. Es en este sentido que el presente trabajo está motivado en gran parte por la necesidad de una nueva alternativa de desarrollo en la tecnología de telecomunicaciones que sirva de apoyo en las posibles aplicaciones con esquemas de encriptación de la información mediante el fenómeno de caos electromagnético en un condensador eléctrico.

Históricamente, el estudio del caos determinista se remonta al menos a la época en que Newton resolvió el problema de los dos cuerpos: el problema de determinar el movimiento de la Tierra orbitando al Sol, utilizando su ecuación diferencial recién

inventada. En este estudio se había ignorado el efecto gravitatorio de un planeta sobre otro en sus cálculos. Por ello, muchos grandes matemáticos y físicos intentaron extender el método analítico de Newton al problema de los tres cuerpos (el Sol, la Tierra y la Luna). No fue hasta finales de 1800 que llegó Poincaré con el método cualitativo donde demostró que es esencialmente imposible resolver el problema de los tres cuerpos. Demostró que las órbitas son aperiódicas, pero no aumentan infinitamente (es decir, son deterministas) y no se acercan a ningún punto fijo o ciclo límite. Señaló que la dificultad para resolver el problema de los tres cuerpos se debía a la sensibilidad a las condiciones iniciales que hacían imposible la predicción a largo plazo. Por lo tanto, se puede considerar a Poincaré como la primera persona en imaginar el “Caos” (Gleick, 1987; Strogatz, 2001).

Sin embargo, no fue hasta la década de 1970 que los científicos comenzaron a darse cuenta de la importancia del caos determinista con el advenimiento de las computadoras digitales lo suficientemente potentes como para simular la evolución temporal de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de baja dimensión. Un resultado inicial importante de tales simulaciones, cuya importancia sólo se reconoció una década más tarde, fue un artículo del meteorólogo Edward Lorenz (Lorenz, 1963). El artículo de Lorenz documenta los resultados de su modelo simple (tres ecuaciones diferenciales ordinarias) pero no lineal del flujo atmosférico. Los resultados de la simulación por computadora de Lorenz de las ecuaciones para valores de parámetros críticos resultan ser una articulación de las dos características principales de los sistemas caóticos. La primera es la aperiodicidad. En el régimen crítico, una trayectoria generada por su modelo se asienta en un atractor; es decir, la trayectoria permanece confinada a una región del espacio, pero no se repite. Estos atractores se han denominado atractores extraños. En el mismo régimen, las trayectorias generadas también exhiben sensibilidad a

las condiciones iniciales; es decir, las trayectorias cercanas divergen exponencialmente.

Desde el trabajo pionero de Lorenz, se han examinado modelos caóticos para una amplia gama de sistemas en diferentes disciplinas, por ejemplo: en el crecimiento de la población en ecología (May and Mclean, 2007), en economía (Kyrtsov and Vorlow, 2005), en circuitos eléctricos (Chen and Ueta, 2002), en las ciencias sociales (Elliott and Kiel, 1996), por mencionar sólo algunos. Además, en la actualidad la teoría del caos se aplica con éxito en la seguridad informática, las marcas de agua digitales, la agregación segura de datos y la video vigilancia. Por lo tanto, los fenómenos caóticos no sólo son destructivos como tornados, tsunamis, etc., sino que también pueden utilizarse de manera efectiva para el bienestar de los seres humanos.

Una de las áreas que ha contribuido a la comprensión del fenómeno del caos, es la teoría de billares. Una gran cantidad de problemas en física se pueden modelar como sistemas dinámicos de billar, donde los bloques de construcción son partículas de masa puntual confinada a un cierto dominio donde se mueve a velocidad constante sin fricción y choca elásticamente con el límite del billar; cuya geometría puede ser usada para reproducir una amplia variedad de comportamientos, en particular los caóticos. La descripción de estas trayectorias conduce a la solución de varias cuestiones, desde el comportamiento de las partículas de un gas en un determinado contenedor, hasta una partícula confinada a un pozo cuadrado infinito. Además, algunas de las propiedades de los billares se han aplicado con éxito, por ejemplo: en fibras ópticas (Doya *et al.*, 2002), en superconductores (Diggins *et al.*, 1994), en cristales fotónicos (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011) y en nano-física (Park *et al.*, 2000).

Por otra parte, también se han estudiado las propiedades de transporte en sistemas balísticos para el caso clásico. Se han estudiado propiedades de transporte de partículas en un canal bidimensional con fronteras onduladas y desfasadas, tomando en cuenta

pequeñas amplitudes de onda en un canal sinusoidal periódico (Luna-Acosta *et al.*, 1996). En estos trabajos se ha considerado que no existen fuerzas externas sobre las partículas, excepto por fuerzas instantáneas de choque con las paredes del perfil. Se demostró que la resistividad se aumenta considerablemente por desfase de las paredes del canal (Herrera-González *et al.*, 2011). Trabajos con geometrías similares a los mencionados pero con guías de onda cuánticas infinitas, muestran que bajo algunas condiciones presenta el comportamiento caótico (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a). De igual manera han tratado el mismo problema desde el punto de vista electromagnético (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013b). En ambos sistemas se muestran patrones de intensidades del campo desordenados mediante el cálculo de algunas propiedades estadísticas; en particular, la función de autocorrelación y la longitud de correlación permitiendo caracterizar el fenómeno del caos cuántico o electromagnético en una guía de ondas (Doya *et al.*, 2002).

## I.2. Presentación del problema

Este proyecto de tesis se enfoca en el estudio de la dinámica de las trayectorias de partículas cargadas en un condensador eléctrico para dos geometrías diferentes. El primero se caracteriza por tener placas sinusoidales y periódicas, mientras que el segundo está formado por dos placas planas y paralelas que contiene un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares. Cabe señalar que el primer sistema ya se ha trabajado anteriormente (Rojas-Sánchez, 2015). En este trabajo de tesis retomamos este caso para reproducir algunos resultados y lo usamos como base para estudiar el segundo sistema. Tenemos interés específico en los efectos que la geometría de los sistemas puede tener sobre las propiedades de transporte. El objetivo es analizar si, bajo ciertas circunstancias, aparece el fenómeno de caos electromagnético. Los sistemas propuestos

tienen como primer problema calcular el potencial en todo punto de la trayectoria, ya que debido a la geometría de los sistemas el potencial resulta ser inhomogéneo. El siguiente problema consiste en poder analizar las trayectorias de partículas y ver como éstas se ven afectadas por la presencia del campo eléctrico. Para tal propósito se emplearán métodos numéricos, como lo son: el Método de la Ecuación Integral (IEM<sup>1</sup>) (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011) y el Método de Diferencias Finitas (FDM<sup>2</sup>).

### I.3. Estructura de la tesis

El contenido de esta tesis se resume a continuación:

- En el capítulo II damos una breve descripción sobre sistemas dinámicos y se presentan algunas herramientas básicas para el análisis de sistemas caóticos, como lo son los mapas de Poincaré. Esto será útil porque los sistemas que queremos analizar en esta tesis son un caso particular de sistemas dinámicos. También, se analizan dos trabajos con geometrías y condiciones similares a los problemas planteados. Estos trabajos muestran la presencia del fenómeno del caos para el caso clásico.
- En el capítulo III se introducen los métodos numéricos empleados para realizar los cálculos en los sistemas considerados. Como ya se mencionó anteriormente, los métodos utilizados son el IEM y el FDM.
- En el capítulo IV se presentan los resultados numéricos obtenidos. Se obtienen algunos mapas de Poincaré que nos muestran el comportamiento dinámico de

---

<sup>1</sup>Por sus siglas en inglés, Integral Equation Method.

<sup>2</sup>Por sus siglas en inglés, Finite Difference Method.

trayectorias de partículas dentro de un condensador con las dos geometrías consideradas.

- En el capítulo V se incorpora las conclusiones de esta tesis, incluyendo una breve discusión sobre los resultados.

## Capítulo II

---

# SISTEMAS DINÁMICOS Y CAOS

---

Caos es una palabra que proviene del griego “ $\chi\alpha\omicron\varsigma$ ” que significa sin un orden, a diferencia de  $\kappa\omicron\sigma\mu\omicron\sigma$  que significa orden. El término caos se usa para describir el comportamiento aparentemente complejo de lo que es aparentemente simple; es decir, sistemas bien comportados. En una primera instancia puede considerarse un sistema errático y casi aleatorio. Casi como el comportamiento de un sistema fuertemente influenciado por “ruido” aleatorio o el comportamiento complicado de un sistema con muchos grados de libertad, cada uno haciendo sus “propias cosas” (Hilborn, 2004). El problema de entender el caos consiste en reconciliar las nociones aparentemente conflictivas: aleatoriedad y determinismo, cuyo elemento clave es la no-linealidad. En este capítulo describimos algunas de las características generales de sistemas dinámicos, así como algunas herramientas básicas para el análisis de sistemas caóticos. También, presentamos dos resultados de trabajos anteriores que motivaron el presente trabajo.

### II.1. Sistemas dinámicos

En pocas palabras, los sistemas dinámicos son sistemas que exhiben cambios. Como tal, el campo de los sistemas dinámicos es variado y rico. Generalmente, un sistema de  $n$

ecuaciones diferenciales de primer orden en el espacio  $\mathbb{R}^n$  se denomina sistema dinámico de dimensión  $n$  que determina el comportamiento temporal del proceso evolutivo. Los procesos evolutivos pueden poseer las propiedades de determinismo o no determinismo, dimensionalidad finita o infinita. Un sistema se llama determinista si todo su curso futuro y todo su pasado están determinados únicamente por su estado en el momento presente. De lo contrario, el sistema se llama no determinista. En mecánica clásica, el movimiento de un sistema cuyo futuro y pasado están determinados únicamente por las posiciones iniciales y las velocidades iniciales, es un ejemplo de un sistema dinámico determinista. El enfoque de los sistemas dinámicos es comprender el comportamiento cualitativo de las soluciones. Las preguntas típicas incluyen: ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio o periódicas en el tiempo? ¿Son estables estas soluciones? ¿Cuál es el comportamiento asintótico a largo plazo de las soluciones generales? ¿Las soluciones se comportan caóticamente? ¿Cómo cambia la dinámica cualitativa a medida que varían los parámetros de los que depende el sistema?

### II.1.1. Tipos de sistemas dinámicos

En un sistema dinámico, el proceso evolutivo puede describirse, a saber por: (i) un proceso de tiempo continuo y (ii) un proceso de tiempo discreto. El proceso de tiempo continuo se representa mediante ecuaciones diferenciales, mientras que el proceso de tiempo discreto se representa mediante ecuaciones en diferencias (o mapas). Los sistemas dinámicos de tiempo continuo y discreto, respectivamente, se pueden describir matemáticamente de la siguiente manera:

**Definición II.1.** Sea  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$  el vector que representa la dinámica de un sistema continuo. La representación matemática del sistema se puede escribir como

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t), \quad (1)$$

donde  $f(x, t)$  es una función suficientemente suave definida en algún subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Esquemáticamente, esto se puede representar como:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \times & \mathbb{R} \\ \text{(espacio de estados)} & & \text{(tiempo)} \end{array} = \begin{array}{c} \mathbb{R}^{n+1} \\ \text{(espacio de movimiento)} \end{array}.$$

La variable  $t$  suele interpretarse como el tiempo y la función  $f(x, t)$  es generalmente no lineal.

**Definición II.2.** Un sistema dinámico discreto (de primer orden, autónomo) para  $x_n \in \mathbb{R}^n$  tiene la forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2)$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $n \in \mathbb{Z}$  es una variable de tiempo discreta. Una órbita o trayectoria de la Ec. (2) consiste en una secuencia de puntos  $\{x_n\}$  que se obtiene iterando el mapa  $f$ . Si  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  denota la composición de  $n$  veces  $f$ , entonces,  $x_n = f^n(x_0)$ .

## Sistemas autónomos y no autónomos

Por otra parte, si el lado derecho de la Ec. (1) es explícitamente independiente del tiempo, entonces el sistema se llama autónomo. Las trayectorias de tal sistema no cambian en el tiempo. Por otro lado, si el lado derecho de la Ec. (1) tiene una dependencia explícita en el tiempo, entonces el sistema se llama no autónomo; como vemos en las siguientes definiciones.

**Definición II.3.** Un sistema dinámico es autónomo si éste no depende en forma explícita del tiempo. Un sistema autónomo de EDO de primer orden tiene la forma

$$\dot{x} = f(x), \quad (3)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es un vector de variables dependientes que describen una trayectoria,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial.

**Definición II.4.** Un sistema no autónomo para  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  tiene la forma

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (4)$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Una EDO no autónoma describe sistemas gobernados por leyes que varían en el tiempo; por ejemplo, debido a influencias externas. Además, la Ec. (4) se puede escribir como un sistema autónomo (“suspendido”) para  $y = (x, s) \in \mathbb{R}^{n+1}$  con  $s = t$  como:  $\dot{x} = f(x, s)$ ,  $\dot{s} = 1$ .

## II.1.2. Comportamiento de los sistemas dinámicos

En dinámica, estudiamos el comportamiento de los sistemas dinámicos a medida que evolucionan con el tiempo. Describimos el comportamiento de estos sistemas en términos de soluciones de equilibrio, ciclos límite y caos.

- **Soluciones de equilibrio:** Si  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  es un cero de  $f$ , significa que  $f(\bar{x}) = 0$ , entonces la Ec. (3) tiene la solución constante  $x(t) = \bar{x}$ . Llamamos a  $\bar{x}$  una solución de equilibrio, o solución de estado estacionario, o punto fijo de la Ec. (3). Una solución de equilibrio puede ser estable o inestable, dependiendo de si las pequeñas perturbaciones del equilibrio decaen (o, al menos, permanecen acotadas) o aumentan.
- **Órbitas periódicas:** Sea  $F(t, x_0)$  una solución al tiempo  $t$  con valor inicial  $x_0$ . Si existe un  $T > 0$  tal que  $F(t + T, x_0) = F(t, x_0)$ ,  $\forall t$  y si  $x_0$  no es un punto de equilibrio, entonces la solución  $F(t, x_0)$  es llamada órbita periódica o ciclo. Además, la órbita periódica traza una curva cerrada simple.
- **Órbita caótica:** Una órbita que exhibe un comportamiento inestable que no es a su vez fijo o periódico se denomina órbita caótica. En cualquier punto de dicha

órbita, hay puntos arbitrariamente cercanos que se alejarán del punto durante una iteración posterior. En términos de soluciones, significa que son muy sensibles a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales y casi todas ellas no parecen periódicas ni convergen a soluciones de equilibrio.

Un sistema clásico que muestra soluciones de equilibrio estables y un comportamiento caótico para diferentes valores de un parámetro es el modelo de Lorenz (Lorenz, 1963). El sistema de Lorenz para  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - \beta z,\end{aligned}\tag{5}$$

donde  $\sigma, \rho, \beta > 0$  son parámetros.  $\sigma$  es conocido como *número de Prandtl* y  $\rho$  es el *número de Rayleigh*. Lorenz descubrió que este sistema determinista de apariencia simple podría tener una dinámica extremadamente errática. Es decir, en una amplia gama de parámetros, las soluciones oscilan de manera irregular, sin repetirse nunca con exactitud, pero permaneciendo siempre en una región delimitada del espacio de fase. Cuando trazó las trayectorias en tres dimensiones, descubrió que se asentaban en un conjunto complicado, ahora llamado *atractor extraño*. A diferencia de los puntos fijos estables y los ciclos límite, el atractor extraño no es un punto, ni una curva, ni siquiera una superficie: es un fractal, con una dimensión fraccionaria entre 2 y 3 (Strogatz, 2001).

Los valores asumidos por Lorenz  $\sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28$  conducen a dinámicas fuertemente caóticas, y son también las más estudiadas. Una órbita típica, es decir, una solución  $(x(t), y(t), z(t))$  de las ecuaciones de Lorenz proyectada en el plano  $(x, z)$  se muestra en la Fig. 1 (Broer and Takens, 2009).

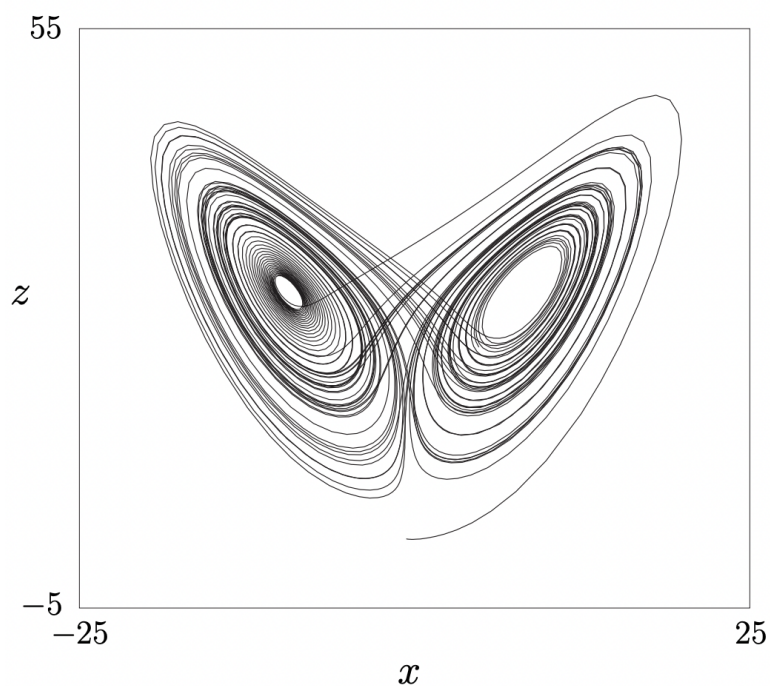


Figura 1. Atractor de Lorenz.

## II.2. Cuantificación del caos

Hay diferentes formas de estudiar las propiedades de los movimientos caóticos. Naturalmente, una forma de entender el caos es buscar las medidas cualitativas y cuantitativas al menos aplicables para algunos sistemas. Los indicadores utilizados dependen principalmente de la característica del sistema que se quiere analizar. Los indicadores más importantes son los siguientes: espacios fase, mapas de Poincaré, exponentes de Lyapunov, la entropía de Kolmogorov, espectro de potencia y series temporales (observar las variables de estado). A continuación discutimos algunos de estos métodos.

### II.2.1. Exponentes de Lyapunov

Una forma de ver la tendencia hacia el caos de un sistema es mediante los exponentes de Lyapunov, lo cual nos da una medida de la divergencia de dos trayectorias inicialmente cercanas. En realidad, el exponente de Lyapunov es una medida de la rapidez de atracción o repulsión hacia un punto fijo. Para definir el exponente de Lyapunov para el caso de un espacio de estados unidimensional, consideremos el sistema dinámico descrito mediante la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(x). \quad (6)$$

Sea  $x_0$  un punto inicial y  $x$  un punto inicial cercano con separación,  $s = x - x_0$ . Sea  $x_0(t)$  la trayectoria que parte del punto  $x_0$ , mientras que  $x(t)$  es la trayectoria que parte del otro punto inicial  $x$ . Entonces, podemos mostrar que la “distancia”  $s$  entre las dos trayectorias,  $s = x(t) - x_0(t)$ , crece o se contrae exponencialmente en el tiempo.

Dado que asumimos que  $x$  está cerca de  $x_0$ , podemos usar una expansión de la serie de Taylor para escribir:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots \quad (7)$$

Ahora, encontramos que la tasa de cambio de la distancia entre las dos trayectorias está dada por

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x} - \dot{x}_0 \\ &= f(x) - f(x_0) \approx \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} s \\ &\equiv \lambda s. \end{aligned} \quad (8)$$

La solución de la ecuación diferencial, Ec. (8), está dada por

$$s(t) = s_0 e^{\lambda t}, \quad (9)$$

donde  $s_0 = s(t = 0)$  es la condición inicial. A partir de esto podemos definir el exponente de Lyapunov como:

$$\lambda \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}. \quad (10)$$

De acuerdo con la Ec. (10) podemos tener dos casos de interés: si  $\lambda > 0$  es una trayectoria divergente, y si  $\lambda < 0$  es una trayectoria convergente (Hilborn, 2004). En otras palabras, un exponente positivo indica una dependencia sensible de las condiciones iniciales, ya que los puntos inicialmente cercanos divergirán exponencialmente a lo largo de trayectorias vecinas. Los exponentes negativos se encuentran en sistemas donde las trayectorias convergen, por lo que la separación inicial entre dos puntos disminuirá con el tiempo.

Para el caso de un mapeo discreto unidimensional, tenemos la siguiente definición.

**Definición II.5.** Sea  $f$  un mapeo suave de  $\mathbb{R}$ . El número de Lyapunov  $L(x_1)$  de la órbita  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  es:

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=1}^n |f'(x_i)| \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (11)$$

si este límite existe. El exponente de Lyapunov  $\lambda(x_1)$  se define como:

$$\lambda(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|, \quad (12)$$

si este límite existe. Nótese que  $\lambda$  existe si y sólo si  $L$  existe y es distinto de cero, y  $\ln L = \lambda$  (Kathleen *et al.*, 1997).

## II.2.2. Mapa de Poincaré

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

donde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^r$  en algún conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  (Nota: recordemos que se dice que una función es  $C^r$  si es  $r$  veces diferenciable y cada derivada es continua; en cambio si  $r = 0$ , la función es meramente continua). Para estudiar el comportamiento local de las soluciones de la Ec. (13) cerca de una órbita periódica hacemos uso de una herramienta técnica conocida como *mapas de Poincaré*. El mapa de Poincaré es la intersección de una órbita periódica en el espacio de estados de un sistema dinámico continuo con un cierto subespacio de dimensión inferior, llamado *sección de Poincaré*, transversal al flujo del sistema. Por lo general, la sección de Poincaré se tiene en un plano. En particular, tenemos la siguiente definición.

**Definición II.6.** Una *sección de Poincaré* de un campo vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es una variedad orientable  $\Sigma$  de dimensión  $(n - 1)$ , que está sumergida en  $\mathbb{R}^n$  y es transversal al campo vectorial  $f$  en cada  $p \in \Sigma$ . Una orientación en  $\Sigma$  es un campo vectorial normal unitario continuo  $n : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; es decir,  $|n| = 1$  y  $n(x) \perp T_x \Sigma$  para todo  $x \in \Sigma$  (Maruskin, 2018).

Para describir el mapa de Poincaré, supongamos que la Ec. (13) tiene una solución periódica de periodo  $T$  que denotamos por  $\phi(t, x_0)$ , donde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es algún punto a través del cual pasa esta solución periódica (es decir,  $\phi(t + T, x_0) = \phi(t, x_0)$ ). Sea  $\Sigma$  la sección de Poincaré asociada al campo vectorial de la Ec. (13). Luego, podemos probar que si  $f(x)$  es de clase  $C^r$  entonces  $\phi(t, x)$  también lo es. Por lo tanto, podemos encontrar un conjunto abierto  $V \subset \Sigma$  de tal manera que las trayectorias que comienzan en  $V$  regresan a  $\Sigma$  en un tiempo cercano a  $T$ . El mapa que asocia puntos en  $V$  con sus puntos de primer regreso a  $\Sigma$  se llama *mapa de Poincaré*, que denotamos por  $P$ . Para ser más precisos,

$$\begin{aligned}
 P : V &\rightarrow \Sigma, \\
 x &\mapsto \phi(\tau(x), x),
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

donde  $\tau(x)$  es el momento del primer retorno del punto  $x$  a  $\Sigma$ . Por construcción, tenemos  $\tau(x_0) = T$  y  $P(x_0) = x_0$ .

Por lo tanto, un punto fijo de  $P$  corresponde a una órbita periódica (Ec. (13)), y un período  $k$  de  $P$  (es decir, un punto  $x \in V$  tal que  $P^k(x) = x$  proporcionó  $P^i(x) \in V$ ,  $i = 1, \dots, k$ ) corresponde a una órbita periódica de la Ec. (13) que intercepta  $\Sigma$   $k$  veces antes de cerrar (ver Fig. 2) (Wiggins, 2003).

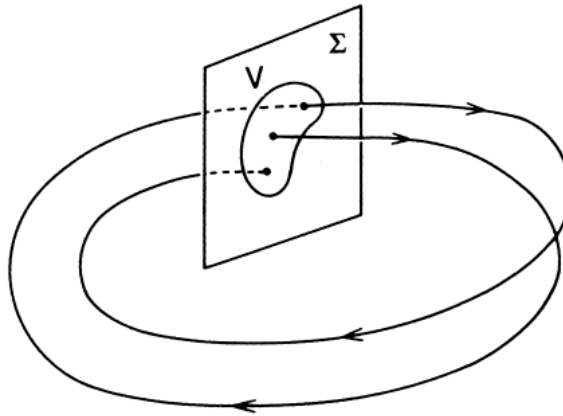


Figura 2. Geometría del mapa de Poincaré para una órbita periódica.

## II.3. Caos clásico y billares

En esta parte analizamos dos sistemas clásicos que bajo ciertas condiciones, presentan el fenómeno del caos. Tales sistemas inspiraron el presente trabajo.

### II.3.1. Transporte en sistemas balísticos

El estudio del caos por medio de propiedades de transporte clásico en sistemas balísticos ha sido de gran interés en los últimos años. El problema consiste en observar la evolución de las trayectorias de una partícula que es lanzada con condiciones iniciales  $(x_0, y_0, \alpha_0)$  conforme va chocando elásticamente con las paredes y la partícula rebota de forma

especular. Es decir, el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflejado con respecto a la normal a la recta tangente en punto donde choca la partícula (Herrera-González *et al.*, 2011). Para el análisis, consideremos un canal bidimensional compuesto por dos paredes sinusoidales como se muestra en la Fig. 3. Los perfiles superior e inferior de las paredes son descritos respectivamente por las siguientes ecuaciones:

$$y_1 = \frac{b}{2} + A \sin(2\pi x), \quad (15)$$

$$y_2 = -\frac{b}{2} + A \sin(2\pi x + r). \quad (16)$$

En las Ecs. (15) y (16),  $b$  es el ancho medio del canal,  $A$  es la amplitud y  $r$  es el desfase entre ambas paredes.

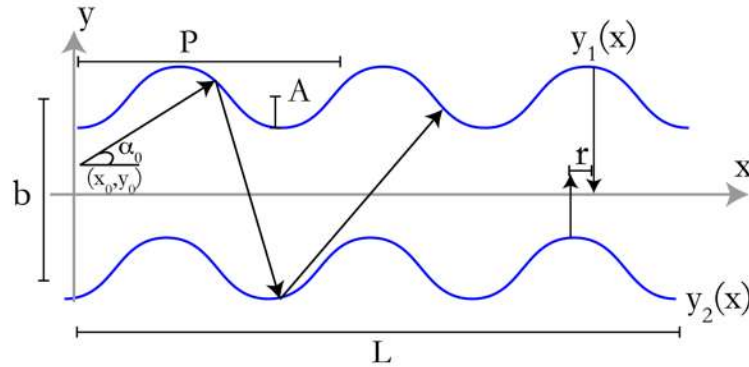


Figura 3. Trayectoria de una partícula en un canal formado por superficies onduladas y periódicas.

El análisis de las trayectorias se puede realizar tomando un conjunto de puntos de choques consecutivos en ambas paredes. En la Fig. 4 se muestra la simulación de la trayectoria seguida por una partícula dentro del canal. Las coordenadas de los puntos de choque considerados con las paredes son:  $(x_n, y_1(x_n))$ ,  $(x_n^*, y_2(x_n^*))$  y  $(x_{n+1}, y_1(x_{n+1}))$ , donde  $(x_n, y_1(x_n))$  y  $(x_{n+1}, y_1(x_{n+1}))$  corresponden a puntos consecutivos de choque en la pared superior como se muestra en la Fig. 4.  $R_n$  y  $S_n$  son las pendientes a los perfiles  $y_1$  y  $y_2$  en los puntos de choque  $(x_{n+1}, y_1(x_{n+1}))$  y  $(x_n^*, y_2(x_n^*))$ , respectivamente. La

evolución de las trayectorias se puede estudiar mediante el análisis de la geometría del sistema. Sean  $\alpha_n$  el ángulo medido a partir de la horizontal y la trayectoria de la partícula al pasar del punto  $(x_n, y_1(x_n))$  al  $(x_{n+1}, y_1(x_{n+1}))$ . De la Fig. 4 tenemos que los ángulos  $\alpha_n$  y  $S_n$  se pueden expresar de la forma:

$$\alpha_n = \arctan \left( \frac{y_1(x_n) - y_2(x_n^*)}{x_n - x_n^*} \right), \quad (17)$$

$$S_n = \arctan \left( \frac{dy_2(x)}{dx} \right) \Big|_{x=x_n^*}. \quad (18)$$

Para el análisis entre la trayectoria que va desde el punto de choque  $(x_n, y_1(x_n))$  al  $(x_n^*, y_2(x_n^*))$  podemos evaluar las Ecs. (15) y (16) en estos puntos, respectivamente. Luego restamos la Ec. (16) de la Ec. (15), de donde obtenemos

$$y_1(x_n) - y_2(x_n^*) = b + A \sin(2\pi x_n) - A \sin(2\pi(x_n^* + r)). \quad (19)$$

El término  $y_1(x_n) - y_2(x_n^*)$  puede ser despejado de la Ec. (17) y sustituyendo en la Ec. (19) llegamos a

$$\tan(\alpha_n)(x_n - x_n^*) = b + A \sin(2\pi x_n) - A \sin(2\pi(x_n^* + r)). \quad (20)$$

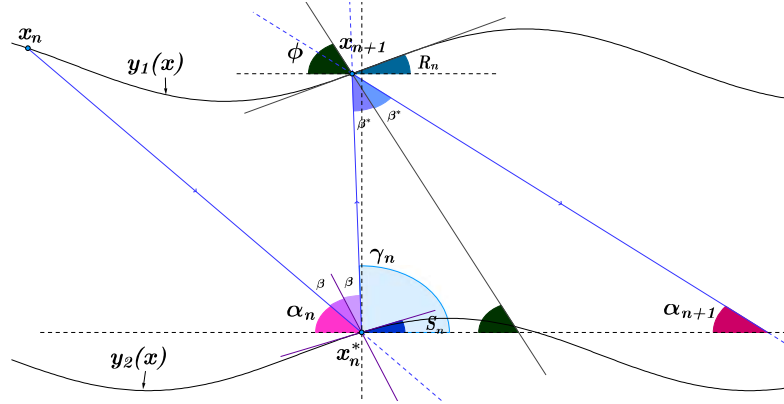


Figura 4. Representación de la trayectoria de una partícula en un canal sinusoidal.

Debido al sistema de referencia considerado podemos observar que  $\alpha_n < 0$ . Utilizando la ley de reflexión en el choque se puede escribir el ángulo respecto al eje  $x$  con

el que sale la trayectoria después del choque  $\gamma_n$ . Ya que no se han considerado fuerzas externas en el canal,  $\gamma_n$  será el ángulo con el que llegará la partícula al choque siguiente. Para nuestro sistema se tiene que

$$\gamma_n = |\alpha_n| + 2S_n. \quad (21)$$

Con un razonamiento análogo se puede tratar la trayectoria del punto  $(x_n^*, y_2(x_n^*))$  al punto  $(x_{n+1}, y_1(x_{n+1}))$ . Evaluando las Ecs. (15) y (16) en estos puntos, respectivamente. Luego si restamos la Ec. (16) de la Ec. (15), obtenemos

$$y_1(x_{n+1}) - y_2(x_n^*) = b + A \sin(2\pi x_{n+1}) - A \sin(2\pi(x_n^* + r)). \quad (22)$$

Ahora  $\gamma_n$  es el ángulo con el que la partícula llegará al punto  $(x_{n+1}, y_1(x_{n+1}))$ , por lo que podemos escribirlo también como

$$\gamma_n = \arctan\left(\frac{y_1(x_{n+1}) - y_2(x_n^*)}{x_{n+1} - x_n^*}\right). \quad (23)$$

Despejando  $y_1(x_{n+1}) - y_2(x_n^*)$  de la Ec. (23) y sustituyendo en la Ec. (19) llegamos a

$$\tan(\gamma_n)(x_{n+1} - x_n^*) = b + A \sin(2\pi x_{n+1}) - A \sin(2\pi(x_n^* + r)). \quad (24)$$

Las Ecs. (20) y (24) muestran la dependencia de la trayectoria de una partícula con los ángulos y posiciones de choques previos. Finalmente el ángulo con el que la partícula saldrá del punto  $(x_{n+1}, y_1(x_{n+1}))$  es

$$\alpha_{n+1} = |\alpha_n| + 2(S_n - R_n). \quad (25)$$

Recordemos que  $R_n$  es el ángulo correspondiente a la tangente de la curva  $y_1$  evaluada en el punto  $x_{n+1}$ .  $\alpha_{n+1}$  está relacionado con las pendientes de los perfiles en los puntos  $(x_n, y_1(x_n))$  y  $(x_n^*, y_2(x_n^*))$ ; es decir, está relacionada con los choques previos.

Es importante mencionar que el desarrollo mostrado es sólo un caso particular, ya que la relación entre los ángulos cambiará por la dependencia con las pendientes de los perfiles en cada punto de choque.

Un análisis de los distintos choques que se hacen presentes en un canal de placas sinusoidales se puede encontrar en el trabajo de Rojas-Sánchez (2015). En las Tablas I y II se muestra un resumen de la clasificación de los diferentes tipos de rebotes, los cuales también se muestran esquematizados en las Figs. 5 y 6. Estas tablas indican la dirección en la que se mueve la partícula después del choque, conociendo  $(\alpha_f, \alpha_0, \theta$  y  $\beta)$ . Donde  $\alpha_0$  y  $\alpha_f$  son el ángulo inicial y final de la partícula, respectivamente. El parámetro  $\beta$  representa el ángulo de reflexión y  $\theta$  el ángulo correspondiente a la pendiente en el punto de choque medido respecto al eje  $x$ .  $v_{x0}$  y  $v_{y0}$  son las componentes de la velocidad de la partícula antes del choque y  $v_{xf}$ , y  $v_{yf}$  son las componentes de la velocidad después del choque.

Tabla I. Clasificación de los diferentes tipos de colisiones de la partícula con la placa superior de un canal sinusoidal.

Figura	$\theta$	$v_{x0}$	$v_{y0}$	Ángulo de reflexión	Ángulo final	$v_{xf}$	$v_{yf}$
Fig. 5 a)	-	+	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + \theta$	-	-
Fig. 5 b)	+	+	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - \theta$	+	-
Fig. 5 c)	-	+	+	$\beta = \alpha_0 + \theta - \frac{\pi}{2}$	$\alpha_f = \pi - (\alpha_0 + \theta)$	-	-
Fig. 5 d)	+	-	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + \theta$	+	-
Fig. 5 e)	+	-	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - \theta$	-	-
Fig. 5 f)	-	-	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - \theta$	+	-
Fig. 5 g)	+	-	+	$\beta = \alpha_0 + \theta - \frac{\pi}{2}$	$\alpha_f = \pi - (\alpha_0 + \theta)$	+	-
Fig. 5 h)	-	-	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - \theta$	-	-
Fig. 5 i)	+	+	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 + \theta$	+	+
Fig. 5 j)	-	+	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + \theta$	+	-

Tabla II. Clasificación de los diferentes tipos de colisiones de la partícula con la placa inferior de un canal sinusoidal.

Figura	$\theta$	$v_{x0}$	$v_{y0}$	Ángulo de reflexión	Ángulo final	$v_{xf}$	$v_{yf}$
Fig. 6 a)	-	+	-	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - 2\theta$	+	+
Fig. 6 b)	-	-	-	$\beta = \alpha_0 + \theta - \frac{\pi}{2}$	$\alpha_f = \pi - \alpha_0 - 2\theta$	+	+
Fig. 6 c)	-	+	-	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = 2\theta - \alpha_0$	+	-
Fig. 6 d)	-	-	-	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \pi - \alpha_0 - 2\theta$	+	+
Fig. 6 e)	+	-	-	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = 2\theta - \alpha_0$	-	-
Fig. 6 f)	+	+	-	$\beta = \alpha_0 + \theta - \frac{\pi}{2}$	$\alpha_f = \pi - \alpha_0 - 2\theta$	-	+
Fig. 6 g)	-	-	-	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + 2\theta$	-	+
Fig. 6 h)	+	+	-	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + 2\theta$	+	+
Fig. 6 i)	+	+	-	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + \theta$	-	+
Fig. 6 j)	+	-	-	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - 2\theta$	-	+

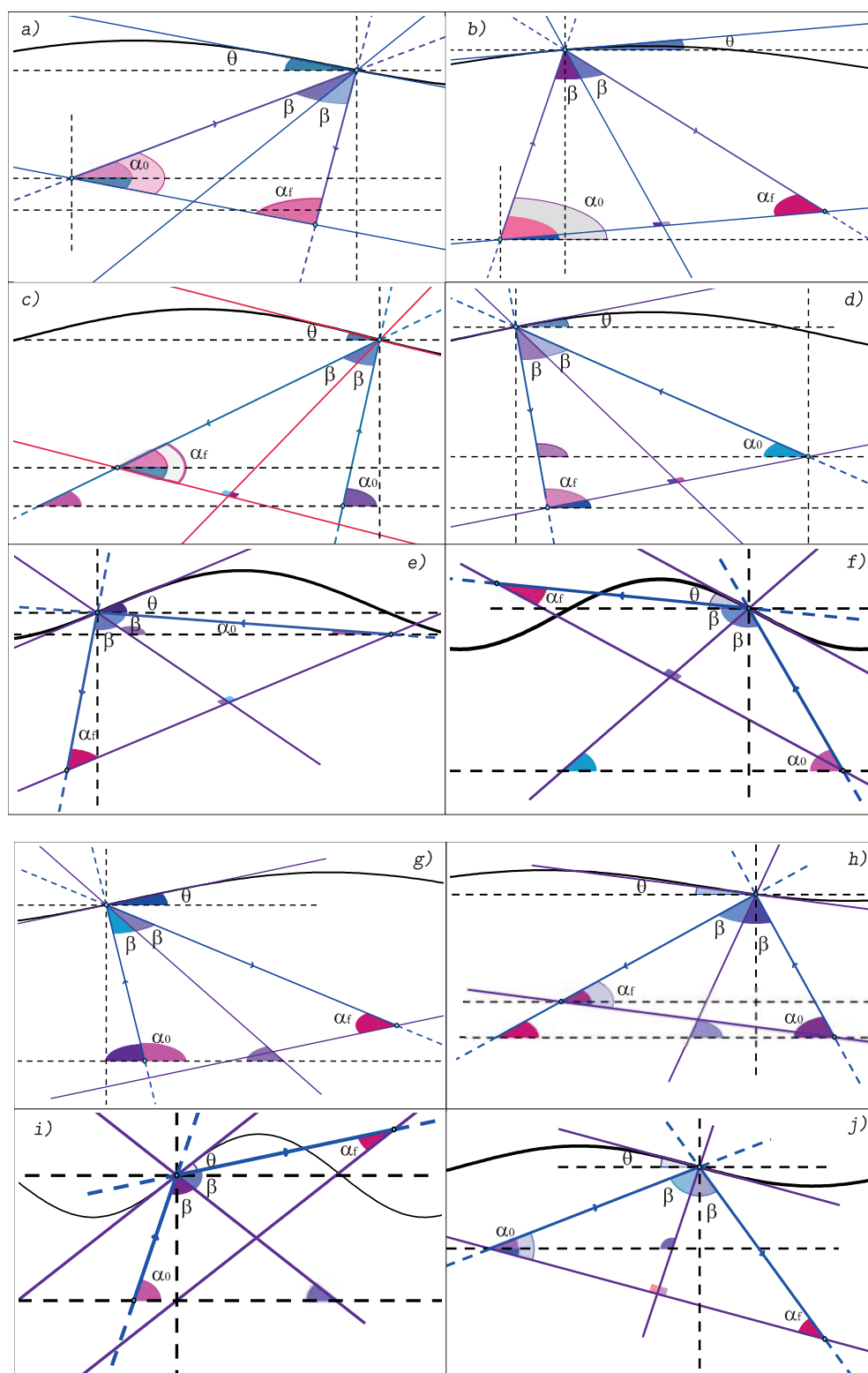


Figura 5. Colisiones posibles de la partícula con la placa superior. La imagen fue tomada de la referencia Rojas-Sánchez (2015).

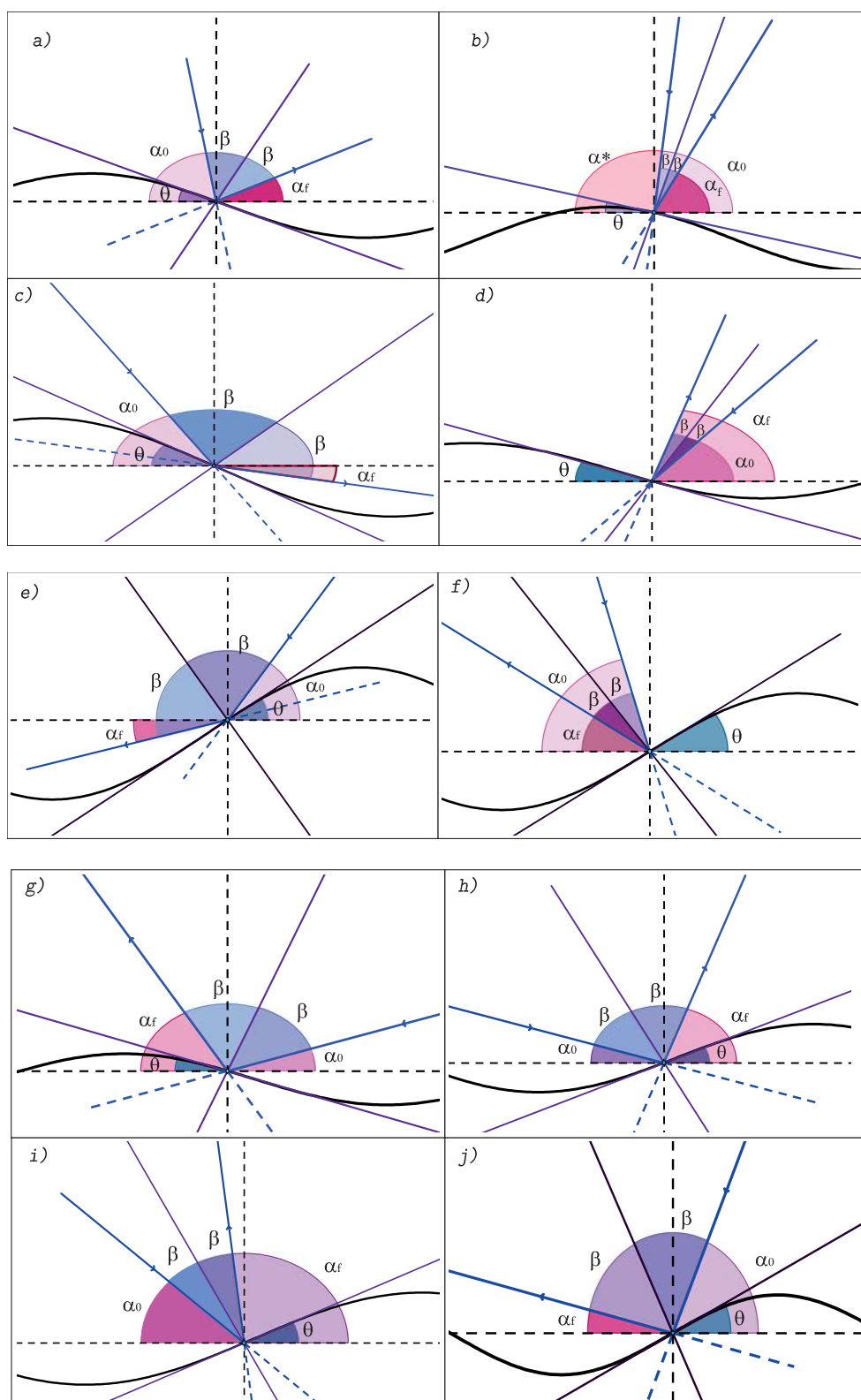


Figura 6. Colisiones posibles de la partícula con la placa inferior. La imagen fue tomada de la referencia Rojas-Sánchez (2015).

### II.3.2. El billar de Sinai

Un billar plano es el sistema dinámico que describe el movimiento de una partícula puntual en un conjunto compacto conexo  $Q \subset \mathbb{R}^2$  cuya frontera es la unión de un número finito de curvas regulares. Dentro de  $Q$  el movimiento es uniforme (velocidad constante) y la reflexión en la frontera  $\partial Q$  es elástica (ángulo de salida igual al de entrada).

El billar de Sinai está definido geoméricamente por un doble límite, compuesto por un cuadrado exterior  $Q \subset \mathbb{R}^2$  de dimensión lateral  $b$  y un obstáculo circular interior concéntrico; denotado por  $D$  como el disco  $(x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2$  (ver Fig. 7(a)). En la Fig. 7(b) está representado el movimiento de una partícula en dicho billar. Así la partícula se mueve uniformemente y cubre segmentos de rectas, y cuando la partícula llega al borde del cuadrado o rebote en la frontera  $\partial D$ , podemos hacerla rebotar de acuerdo con la regla “el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión”. El problema es comprender la naturaleza de este movimiento en un tiempo amplio.

Denotamos por  $q = (x_n, y_n)$  las coordenadas de la partícula en movimiento al tiempo  $t$ , y por  $v = (v_x, v_y)$  su vector de velocidad. Entonces, su posición y velocidad en el tiempo se puede calcular mediante:

$$x_{n+1} = x_n + v_x t, \quad v_x = v_x, \quad (26)$$

$$y_{n+1} = y_n + v_y t, \quad v_y = v_y, \quad (27)$$

mientras la partícula no haga contacto con las fronteras. Cuando la partícula colisiona con la frontera del cuadrado, el vector velocidad  $v$  se refleja a través de la recta tangente a  $\partial Q$  en el punto de colisión. Como resultado de la colisión elástica, la componente normal cambia de signo mientras que la componente tangencial permanece invariable. Es decir, si la partícula colisiona con un lado vertical de la región  $Q$  en el tiempo  $t$ ,

entonces  $v_x = -v_x$  mientras que  $v_y$  permanece invariante. En cambio, si choca contra un lado horizontal, entonces  $v_x$  no cambia y  $v_y = -v_y$ .

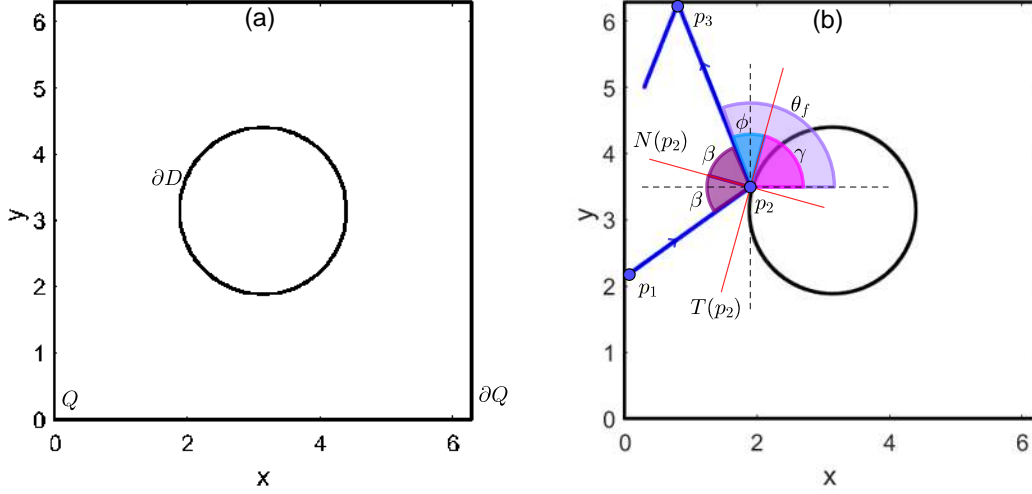


Figura 7. (a) Espacio de configuración de un billar formado por un cuadrado y un obstáculo circular en su centro y (b) trayectoria de una partícula que se mueve clásicamente experimentando colisiones elásticas.

Definimos la trayectoria de la partícula como el segmento  $\overline{p_1 p_2}$ , donde  $p_1$  y  $p_2$  son los puntos en  $Q$ . El análisis de la trayectoria se puede realizar considerando  $p_1$ ,  $p_2$ , y  $p_3$  como tres puntos consecutivos que la partícula contacta con las superficies del billar, como se muestra en la Fig. 7(b). Definimos  $N(p)$  y  $T(p)$  como la recta normal y tangente, respectivamente, en el punto  $p \in \partial D$ . En el punto  $p_2$  definimos el ángulo de incidencia,  $\beta$ , como el ángulo entre la recta normal  $N(p_2)$  en el punto  $p_2$  y la trayectoria de la partícula  $\overline{p_1 p_2}$ . Del mismo modo, definimos el ángulo de reflexión como el ángulo entre  $N(p_2)$  y la trayectoria de la partícula  $\overline{p_2 p_3}$ . En cada punto  $p \in \partial D$ , donde la partícula choca, el ángulo de incidencia es el mismo que el ángulo de reflexión.

Además, introducimos las siguientes variables: como  $\gamma$  el ángulo entre  $T(p_2)$  y el eje  $x$  positivo y consideremos el ángulo  $\phi$  de  $T(p_2)$  a la trayectoria de la partícula  $\overline{p_2 p_3}$ . De este modo, encontramos las siguientes relaciones:

1. La ecuación de la recta tangente  $T(p_2)$  a  $D$  en el punto  $p_2 = (x_n, y_n)$  es

$$y - y_n = D'(x_n, y_n)(x - x_n) \implies y - y_n = -\frac{(x_n - h)}{(y_n - k)}(x - x_n), \quad (28)$$

donde  $D'(x_n, y_n)$  denota la derivada de  $(x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2$  evaluada en el punto  $p_2 = (x_n, y_n)$ .

2. La ecuación de la recta normal  $N(p_2)$  en el punto  $p_2 = (x_n, y_n)$  está dada por

$$y - y_n = \frac{-1}{D'(x_n, y_n)}(x - x_n) \implies y - y_n = \frac{(y_n - k)}{(x_n - h)}(x - x_n). \quad (29)$$

3. La ecuación de la recta de la trayectoria de la partícula  $\overline{p_1 p_2}$ , con  $p_1 = (x_{n-1}, y_{n-1})$  y  $p_2 = (x_n, y_n)$ , está dada por

$$y - y_n = \frac{(x_n - x_{n-1})}{(y_n - y_{n-1})}(x - x_n). \quad (30)$$

4. Usando el hecho que la tangente del ángulo entre dos rectas no verticales y no perpendiculares de pendientes  $m_1$  y  $m_2$ , se puede calcular de acuerdo con  $\tan \beta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \right|$ . Encontramos que el ángulo entre la recta normal  $N(p_2)$  en el punto  $p_2$  y la trayectoria de la partícula  $\overline{p_1 p_2}$  está determinado por

$$\beta = \arctan \left| \frac{m_{N(p_2)} - m_{\overline{p_1 p_2}}}{1 + m_{N(p_2)} m_{\overline{p_1 p_2}}} \right|, \quad (31)$$

que utilizando las Ecs. (29) y (30), tenemos que

$$m_{N(p_2)} = \frac{(y_n - k)}{(x_n - h)} \quad \text{y} \quad m_{\overline{p_1 p_2}} = \frac{(x_n - x_{n-1})}{(y_n - y_{n-1})}. \quad (32)$$

5. Claramente de la Fig. 7(b) se puede ver que el ángulo  $\phi$  viene dado por

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \beta. \quad (33)$$

6. El ángulo de la recta tangente en el punto de colisión está dado por

$$\gamma = \arctan(m_{T(p_2)}) \implies \gamma = \arctan \left( -\frac{x_n - h}{y_n - k} \right). \quad (34)$$

De esta forma, conociendo  $\beta$ ,  $\phi$  y  $\gamma$  se puede conocer el valor del ángulo de salida  $\theta_f$  de la partícula después de colisionar con la frontera del obstáculo circular. En el caso particular de la Fig. 7(b), tendríamos que el ángulo con el que llegará la partícula a la colisión siguiente es

$$\theta_f = \gamma + \phi.$$

Y con esto tenemos que la posición de la partícula después de la primer reflexión con el obstáculo circular queda determinada por

$$x_{n+1} = x_n + t \cos(\theta_f), \quad v_x = \cos(\theta_f) \quad (35)$$

$$y_{n+1} = y_n + t \sin(\theta_f), \quad v_y = \sin(\theta_f). \quad (36)$$

Como la relación entre los ángulos cambiará dependiendo del punto donde choque la partícula, necesitamos seguir el sentido y dirección de la trayectoria de la partícula cuando ésta ha colisionado con el obstáculo circular. Para ello construimos el esquema de la Tabla III. Para el análisis nos basamos en el cuadrante de la circunferencia donde tiene lugar la colisión:

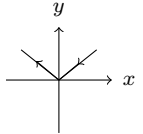
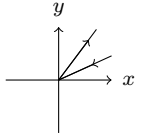
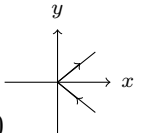
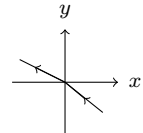
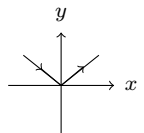
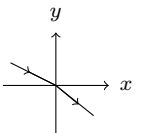
- Si  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  y  $y_n \geq b/2$ , está en el primer cuadrante.  
Si  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$  y  $y_n \geq b/2$ , está en el segundo cuadrante.
- Si  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  y  $y_n \leq b/2$ , está en el tercer cuadrante.  
Si  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$  y  $y_n \leq b/2$ , está en el cuarto cuadrante.

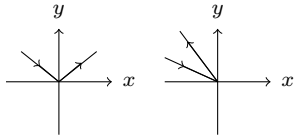
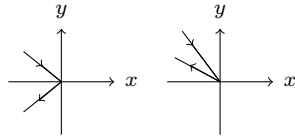

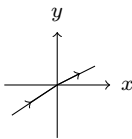
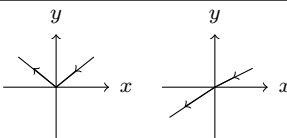
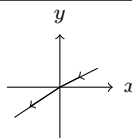
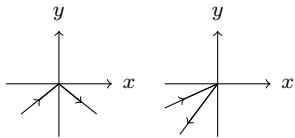
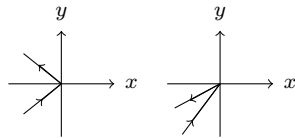

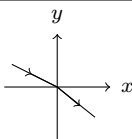
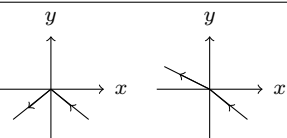
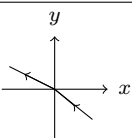
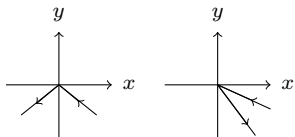
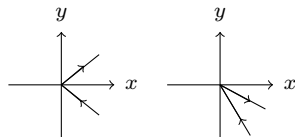
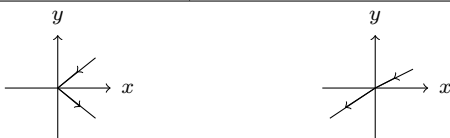
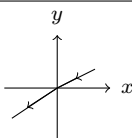
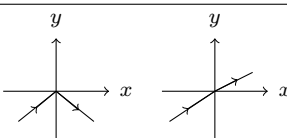
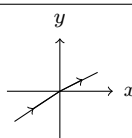
Donde  $\theta = \arctan(m_N)$ ,  $m_N$  es la pendiente de la recta normal en el punto de colisión y  $b$  es el ancho del billar.

- Después vemos el signo que toma la pendiente de la recta tangente. En el primer y tercer cuadrante  $\gamma$  siempre es negativa, mientras que en el segundo y cuarto cuadrante  $\gamma$  siempre es positiva.

- Analizamos los signos de las componentes de la velocidad inicial de la partícula antes de colisionar. Nótese que existen cuatro combinaciones posibles para ésta, como vemos en la tercer columna de la Tabla III.
- Ahora vemos el signo del ángulo  $\beta$  y recordemos que  $\beta$  es el ángulo medido de la recta incidente hacia la recta normal. Definimos  $\beta > 0$  en sentido antihorario y  $\beta < 0$  en sentido horario. Entonces, el signo de la velocidad inicial y el del ángulo  $\beta$  determinará el sentido en que rebota la partícula (ver columna cuatro de la Tabla III).
- Finalmente, para obtener la expresión del ángulo  $\theta_f$  con que es reflejada la partícula justo después de la colisión, empleamos los esquemas de las Figs. 8, 9 y 10. En este esquema se representan todos los casos posibles que se tienen en la Tabla III. La expresión del ángulo  $\theta_f$  para cada caso se encuentran resumidos en la Tabla IV.

Tabla III. Esquema para determinar el sentido de la trayectoria de una partícula cuando colisiona con el obstáculo circular.

Cuadrante	$\gamma$	$(v_{x0}, v_{y0})$	Sentido de la trayectoria
Primero	$\gamma < 0$	$(-, -)$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>\beta &gt; 0</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>\beta &lt; 0</math></p> </div> </div>
		$(-, +)$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>\beta &gt; 0</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>\beta &lt; 0</math></p> </div> </div>
		$(+, -)$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>\beta &lt; 0</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>\beta &lt; 0</math></p> </div> </div>
		$(+, +)$	No es posible

Cuadrante	$\gamma$	$(v_{x0}, v_{y0})$	Sentido de la trayectoria	
Segundo	$\gamma > 0$	$(+, -)$	$\beta < 0$ 	$\beta > 0$ 
		$(+, +)$	$\beta < 0$ 	
		$(-, -)$		
		$(-, +)$	No es posible	
Tercero	$\gamma < 0$	$(+, +)$	$\beta > 0$ 	$\beta < 0$ 
		$(+, -)$	$\beta > 0$ 	
		$(-, +)$		
		$(-, -)$	No es posible	
Cuarto	$\gamma > 0$	$(-, +)$	$\beta < 0$ 	$\beta > 0$ 
		$(-, -)$	$\beta < 0$ 	
		$(+, +)$		
		$(+, -)$	No es posible	

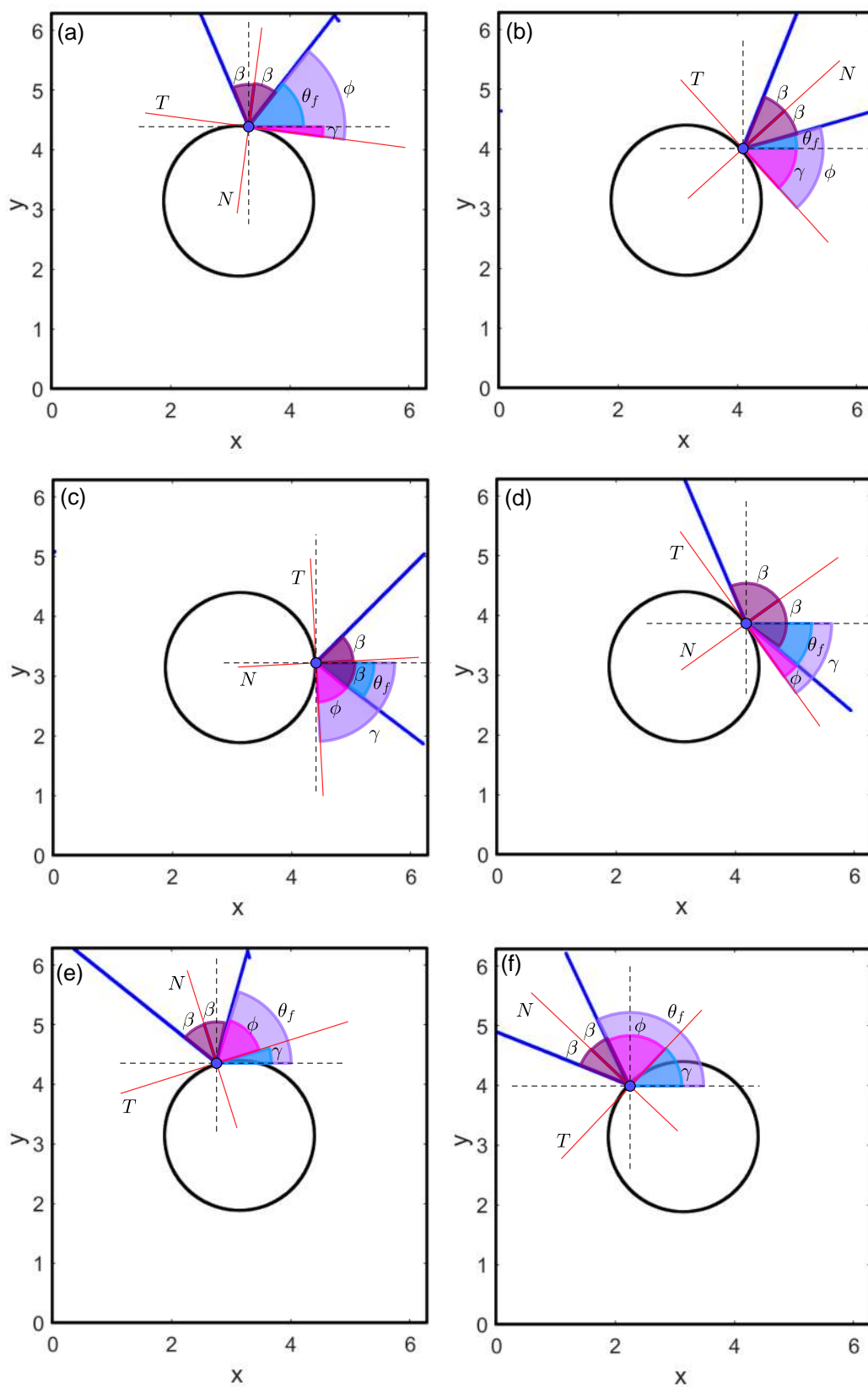


Figura 8. Esquema de las colisiones posibles de una partícula con el obstáculo circular.

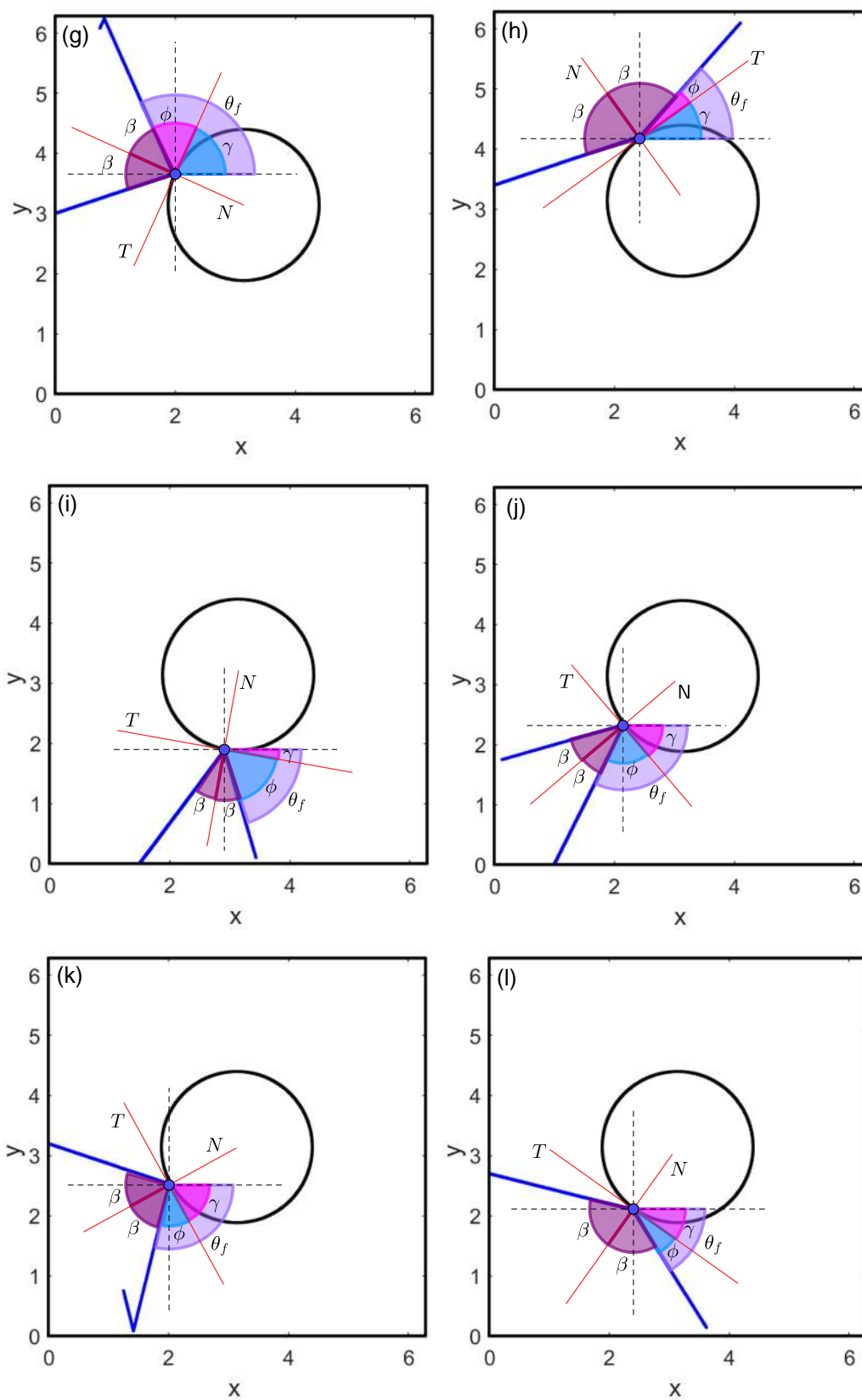


Figura 9. Esquema de las colisiones posibles de una partícula con el obstáculo circular.

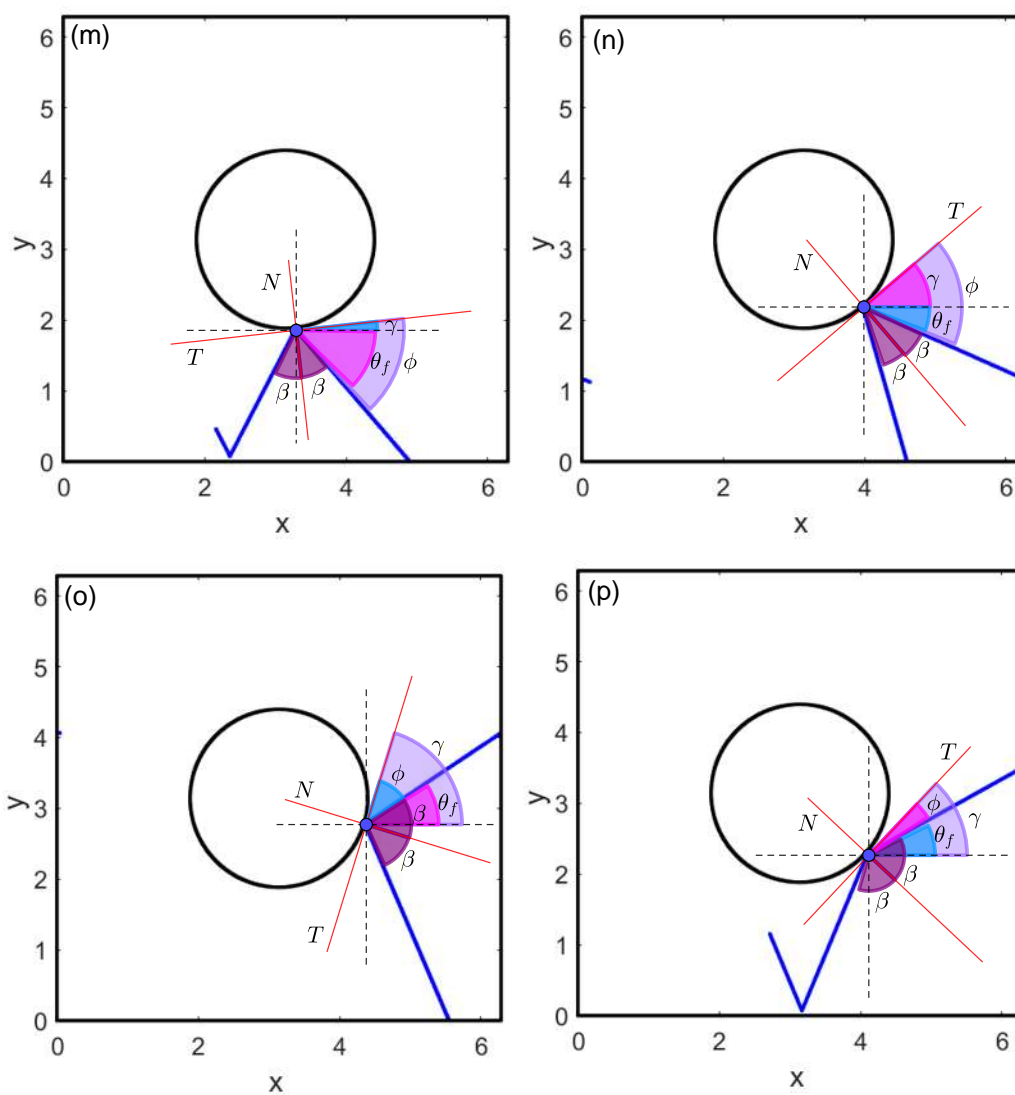


Figura 10. Esquema de las colisiones posibles de una partícula con el obstáculo circular.

En la Tabla IV se muestra un resumen de las expresiones de  $\theta_f$  para los diferentes tipos de rebotes previamente mostrados en las Figs. 8, 9 y 10.

Nota: El ángulo  $\theta_f$  es medido desde la horizontal hacia la recta reflejada de la trayectoria de la partícula, y tomando el cuenta que en sentido antihorario  $\theta_f$  es negativo; mientras que en sentido horario consideramos que  $\theta_f$  es positivo.

Tabla IV. Clasificación de los diferentes tipos de colisiones de la partícula con el obstáculo circular.

Cuadrante I y II											
Figura	$v_{x0}$	$v_{y0}$	Ángulo final	$v_{xf}$	$v_{yf}$	Figura	$v_{x0}$	$v_{y0}$	Ángulo final	$v_{xf}$	$v_{yf}$
10(a)	+	-	$\theta_f = -(\phi -  \gamma )$	+	+	10(e)	+	-	$\theta_f = -(\gamma + \phi)$	+	+
	-	-	$\theta_f = -\phi +  \gamma  - 2 \beta $	-	+		-	-	$\theta_f = -\gamma - \phi - 2 \beta $	-	+
10(b)	-	-	$\theta_f = -(\phi -  \gamma )$	+	+	10(f)	+	-	$\theta_f = -(\gamma + \phi)$	-	+
	-	-	$\theta_f = -\phi +  \gamma  - 2 \beta $	+	+		+	-	$\theta_f = -\gamma - \phi - 2 \beta $	-	+
10(c)	-	-	$\theta_f =  \gamma  - \phi$	+	-	10(g)	+	+	$\theta_f = -(\gamma + \phi)$	-	+
	-	+	$\theta_f = -2 \beta  +  \gamma  - \phi$	+	+		+	-	$\theta_f = -\gamma - \phi - 2 \beta $	-	-
10(d)	+	-	$\theta_f =  \gamma  - \phi$	+	-	10(h)	+	+	$\theta_f = -(\gamma + \phi)$	+	+
	-	+	$\theta_f = -2 \beta  +  \gamma  - \phi$	-	+		-	-	$\theta_f = -\gamma - \phi - 2 \beta $	-	-

Cuadrante III y IV											
Figura	$v_{x0}$	$v_{y0}$	Ángulo final	$v_{xf}$	$v_{yf}$	Figura	$v_{x0}$	$v_{y0}$	Ángulo final	$v_{xf}$	$v_{yf}$
10(i)	+	+	$\theta_f =  \gamma  + \phi$	+	-	10(m)	+	+	$\theta_f = \phi - \gamma$	+	-
	-	+	$\theta_f =  \gamma  + \phi + 2 \beta $	-	-		-	+	$\theta_f = \phi - \gamma + 2 \beta $	-	-
10(j)	+	+	$\theta_f =  \gamma  + \phi$	-	-	10(n)	-	+	$\theta_f = \phi - \gamma$	+	-
	+	+	$\theta_f =  \gamma  + \phi + 2 \beta $	-	-		-	+	$\theta_f = \phi - \gamma + 2 \beta $	+	-
10(k)	+	-	$\theta_f =  \gamma  + \phi$	-	-	10(o)	-	+	$\theta_f = -(\gamma - \phi)$	+	+
	+	+	$\theta_f =  \gamma  + \phi + 2 \beta $	-	+		-	-	$\theta_f = 2 \beta  - (\gamma - \phi)$	+	-
10(l)	+	-	$\theta_f =  \gamma  + \phi$	+	-	10(p)	+	+	$\theta_f = -(\gamma - \phi)$	+	+
	-	+	$\theta_f =  \gamma  + \phi + 2 \beta $	-	+		-	-	$\theta_f = 2 \beta  - (\gamma - \phi)$	-	-

En la Fig. 11 se muestra la dinámica caótica para las trayectorias de la partícula, con 50 reflexiones sucesivas en la Fig. 11(a) y 100 en la Fig. 11(b). En ambos casos las

condiciones iniciales de posición y velocidad del lanzamiento fueron:  $(0, -1)$ ,  $v_{x0} = 0.8$  y  $v_{y0} = 0.5$ , respectivamente. El radio del obstáculo circular es de  $r = 0.5$ .

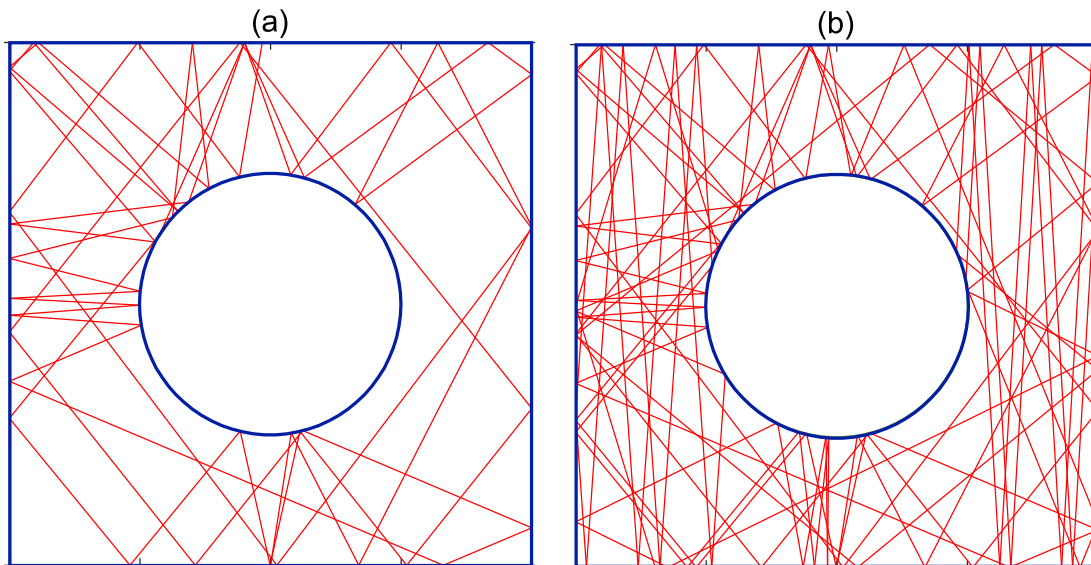


Figura 11. Trayectoria de la partícula con (a) 50 iteraciones y (b) 100 iteraciones.

## Capítulo III

---

# MÉTODOS NUMÉRICOS

---

En este capítulo se describe el Método de la Ecuación Integral (IEM) y el Método de Diferencias Finitas (FDM), los cuales son métodos numéricos rigurosos que permiten el análisis de los sistemas electromagnéticos propuestos en este trabajo de investigación. El IEM se desarrolla y aplica para calcular, en particular, el potencial electrostático presente en el condensador eléctrico para las dos geometrías propuestas. Una vez establecido el potencial, éste a su vez nos va a permitir conocer el campo eléctrico generado entre las superficies conductoras. Por su parte, el FDM nos permitirá realizar el cálculo de las trayectorias de las partículas cargadas bajo la influencia de un campo eléctrico inhomogéneo para los sistemas de estudio.

### III.1. Consideraciones preliminares

En este trabajo de tesis consideramos dos sistemas electromagnéticos. Para modelar el primero de ellos, consideramos dos superficies conductoras y periódicas de tipo sinusoidal separadas un ancho  $b$ , como se muestra en la Fig. 12. Los perfiles superior e

inferior están representados, respectivamente, por las funciones armónicas:

$$y_1(x) = b + A \cos(2\pi x/P), \quad (37)$$

$$y_2(x) = A \cos(2\pi x/P + r), \quad (38)$$

donde  $A$  representa la amplitud de la ondulación,  $P$  es el periodo y  $r$  es una diferencia de fase entre los perfiles. El sistema considerado es bidimensional, es decir, es invariante en la dirección  $z$ .

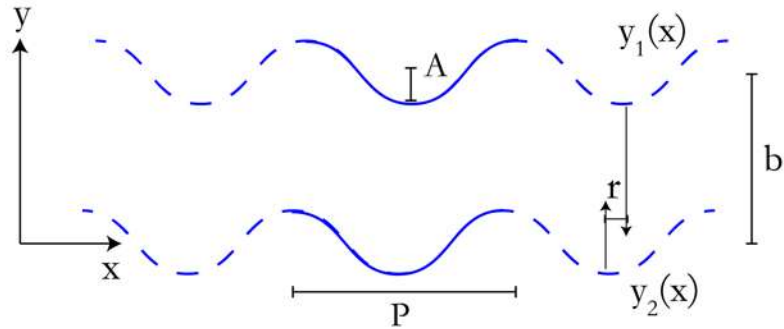


Figura 12. Descripción gráfica de un condensador formado por superficies sinusoidales infinitas de periodo  $P$  en el plano  $x$ - $y$ .

La región entre las placas se supone vacía. Además, las placas están sometidas a un potencial  $U_1$  en la placa superior y otro  $U_2$  en la inferior, que fija la diferencia de potencial entre las placas en un valor de  $\Delta U = U_2 - U_1$ .

El segundo sistema está formado por dos placas plano paralelas que encierran un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares. Las superficies involucradas son materiales conductores y el medio entre las placas y las inclusiones es vacío. La geometría del sistema se muestra en la Fig. 13, donde  $P$  es el periodo del condensador en la dirección  $x$ ,  $b$  es la distancia entre las superficies planas y  $a$  es el radio de cada inclusión circular. De manera similar, se establece un potencial  $U_1$  en la placa superior, otro  $U_2$  en la inferior y un potencial  $U_3$  en cada inclusión.

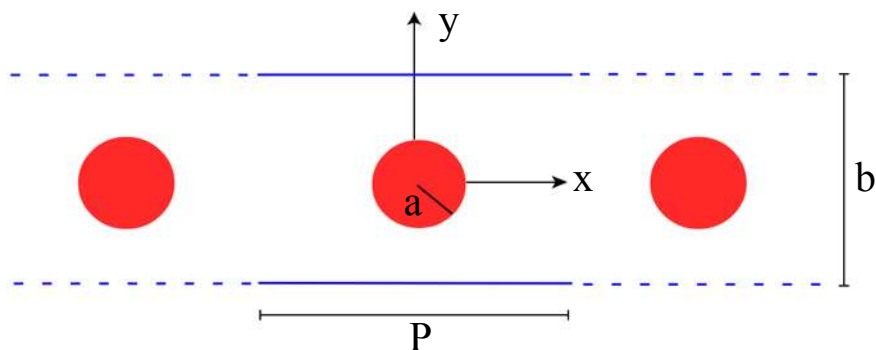


Figura 13. Descripción gráfica de un condensador formado por superficies plano paralelas infinitas y un arreglo de inclusiones cilíndricas circulares de radio  $a$  en el plano  $x-y$ .

El primer paso en el análisis de los sistemas es establecer el potencial y el campo eléctrico en la región vacía entre las placas conductoras; ya que la geometría considerada en los sistemas da lugar a un potencial y a un campo eléctrico inhomogéneo. Este problema implica la solución de la ecuación de Laplace cuando se especifican las condiciones de frontera para el potencial electrostático. En seguida nos interesa observar la evolución de la trayectoria de una partícula cargada que es lanzada con condiciones iniciales de posición,  $(x_0, y_0)$ , y velocidad,  $(v_{x0}, v_{y0})$ , conforme va chocando con las paredes.

### III.2. Método de la Ecuación Integral

Para los dos sistemas considerados en este trabajo, el método integral se basa en resolver numéricamente la ecuación de Laplace a partir de ecuaciones integrales (Mendoza-Suárez and Villa-Villa, 2010). El IEM parte del segundo teorema integral de Green, de donde se obtienen ecuaciones integrales acopladas que involucran como incógnitas: el potencial eléctrico y su derivada normal, evaluadas en los perfiles considerados. La discretización de las ecuaciones permite pasar de un sistema de ecuaciones integrales a un sistema de ecuaciones algebraico, cuya solución determina las funciones fuente. Una

vez calculadas las fuentes es posible calcular el campo eléctrico del sistema de estudio.

### III.2.1. Ecuación de Laplace

En primer lugar, vamos a obtener la ecuación diferencial que satisface el potencial  $U = U(x, y)$  en la región situada entre las placas. Para ello, es necesario tener en cuenta que en esta región no puede haber cargas libres, con lo cual, la expresión diferencial del teorema de Gauss en dicha región toma la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (39)$$

y la ley de Faraday como

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (40)$$

La Ec. (40) implica que existe un potencial escalar  $U$ , de tal manera que

$$\mathbf{E} = -\nabla U(x, y). \quad (41)$$

Entonces, sustituyendo la Ec. (41) en la Ec. (39), obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla U(x, y)) = 0 \quad \implies \quad \nabla^2 U(x, y) = 0, \quad (42)$$

lo cual nos indica que el potencial satisface la ecuación de Laplace en la región vacía entre las placas del condensador. Para el caso de un condensador compuesto por dos placas conductoras plano paralelas (sin inclusiones), la ecuación de Laplace se puede resolver fácilmente en coordenadas cartesianas, obteniéndose la solución exacta:

$$U(x, y) = -\left(\frac{U_2 - U_1}{b}\right)y + U_2 = \frac{-\Delta U}{b}y + U_2, \quad (43)$$

donde se ha considerado las siguientes condiciones de frontera dadas en las superficies conductoras

$$U(x, y)|_{y_1(x)=b} = U_1 \quad \text{y} \quad U(x, y)|_{y_2(x)=0} = U_2. \quad (44)$$

Sobre la base de este caso, obtendremos la solución de la ecuación de Laplace para una superficie de forma arbitraria.

### III.2.2. Función de Green para la ecuación de Laplace

Consideremos los problemas geométricos mostrados en las Figs. 12 y 13. En este caso el potencial es no homogéneo y por lo tanto, su cálculo es complejo. Entonces, para resolver el problema consideremos una función de Green,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , que depende de las coordenadas cartesianas de un punto de observación  $\mathbf{r}$  y de un punto fuente  $\mathbf{r}'$ . La función de Green para la ecuación de Laplace satisface

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (45)$$

donde  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  es la delta de Dirac. La delta de Dirac está definida como sigue:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \infty & \text{si } (x, y) = (x', y'), \\ 0 & \text{si } (x, y) \neq (x', y'), \end{cases} \quad (46)$$

donde  $\mathbf{r} = (x, y)$  y  $\mathbf{r}' = (x', y')$ .

Es bien sabido que una posible función de Green para la Ec. (45) está dada por la función logarítmica (Arfken *et al.*, 2012):

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad (47)$$

que básicamente es el potencial generado en el punto de observación  $(x, y)$  por una distribución de carga eléctrica lineal y uniforme ( $\lambda = \varepsilon_0$ ). Esta distribución de carga eléctrica estaría extendida a lo largo del eje  $x$  y pasaría por el punto fuente  $(x', y')$ .

### III.2.3. Representación integral de la ecuación de Laplace

Multiplicando la Ec. (45) por  $U(\mathbf{r})$ , restando  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  veces la Ec. (42) e integrando sobre una superficie arbitraria  $R$  ( $\mathbf{r} \in R$ ), obtenemos

$$\int_R [U(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla^2 U(\mathbf{r})] da = \int_R -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')U(\mathbf{r}) da. \quad (48)$$

Usando  $U\nabla^2 G - G\nabla^2 U = \nabla \cdot (U\nabla G - G\nabla U)$  y el teorema de Green bidimensional, obtenemos

$$\oint_{\partial R} \left( G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n} - U(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) ds = \begin{cases} U(\mathbf{r}) & \text{si } \mathbf{r} \in R, \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin R, \end{cases} \quad (49)$$

donde  $\partial R$  es el contorno que encierra a la superficie  $R$ ,  $ds$  es la longitud de arco,  $\hat{\mathbf{n}}$  es la normal hacia afuera de la superficie y  $\partial/\partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla$  denota la derivada normal.

En la Ec. (49), la función de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  y su derivada normal  $\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial n$  son variables conocidas. El potencial  $U(\mathbf{r})$  y su derivada normal  $\partial U(\mathbf{r})/\partial n$  son las incógnitas a determinar. Entonces, a partir de la Ec. (49) podemos formular un método numérico que nos permita obtener las funciones fuente (el potencial y su derivada normal) a través de las ecuaciones integrales. A partir de este resultado, será posible calcular el campo eléctrico generado entre las superficies conductoras.

Para desarrollar el algoritmo para resolver numéricamente la Ec. (49), usamos el caso en el que el punto de observación  $\mathbf{r} = (x, y)$  está a fuera de la región  $R$ . Específicamente, usaremos puntos que estén infinitesimalmente separados del contorno  $\partial R$ . Estos puntos están representados como

$$(x, y) = (x' + \varepsilon n_x, y' + \varepsilon n_y), \quad (50)$$

donde  $\varepsilon$  es un infinitesimal positivo,  $(n_x, n_y)$  es la normal hacia afuera de la superficie y  $(x', y')$  es un vector del perfil  $\partial R$ , como se muestra en la Fig. 14.

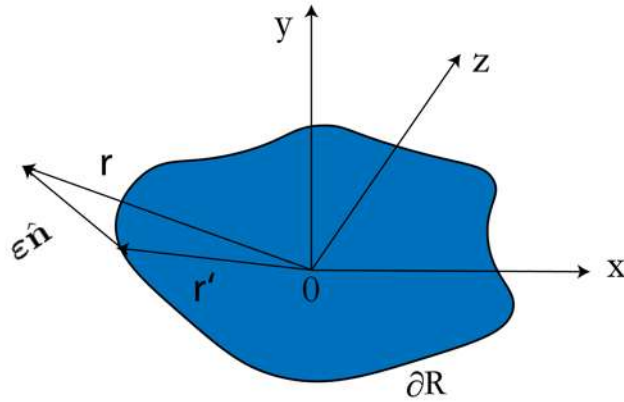


Figura 14. Elección del punto de observación  $\mathbf{r}$ , muy cerca de la superficie representada por  $\partial R$ .

Con esta elección, se tiene que el lado derecho de la Ec. (49) es igual a cero. Entonces la ecuación integral se reduce a resolver

$$\oint_{\partial R} \left( G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n} - U(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (51)$$

Una vez determinadas las fuentes, podremos regresar a la Ec. (49) y obtener el potencial  $U(\mathbf{r})$  para cuando el punto de observación esté dentro de la región  $R$ .

### III.2.4. Discretización de las ecuaciones integrales

Debido a que no es posible resolver de manera analítica el sistema de ecuaciones integrales acopladas de la Ec. (51), recurrimos a una discretización del sistema. Para esto es necesario convertir las ecuaciones integrales obtenidas en un sistema de ecuaciones algebraico que se puede resolver por medio de métodos numéricos matriciales. Para ello consideremos concretamente los dos sistemas que deseamos analizar.

### Condensador eléctrico con placas sinusoidales

Comenzamos con el primer sistema el cual consiste en un condensador eléctrico formado por dos superficies sinusoidales y periódicas. Para realizar la discretización de la Ec.

(51) se aprovecha la periodicidad del sistema tomando una celda unitaria. Esta celda unitaria es un periodo del perfil sinusoidal como se muestra en la Fig. 15.

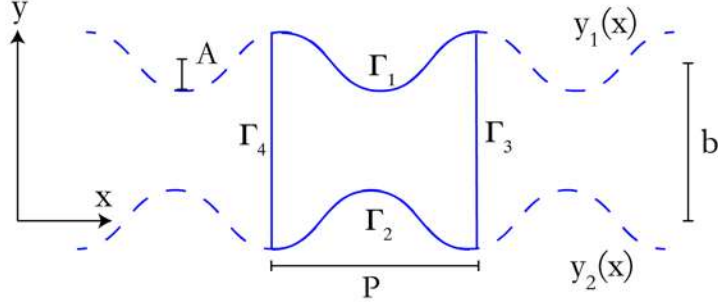


Figura 15. Celda unitaria ondulada que está limitada por los contornos  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$ .

La geometría de la celda unitaria de la Fig. 15 puede ser descrita por la representación de puntos a lo largo del contorno  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  con coordenadas cartesianas  $(x(s), y(s))$  como funciones paramétricas de la longitud de arco  $s$ ; así como de sus derivadas de primer  $(x'(s), y'(s))$  y segundo  $(x''(s), y''(s))$  orden. Para cada contorno  $\Gamma_j$  corresponde un vector normal  $\hat{n}_j$  que apunta hacia afuera de la celda unitaria. Para resolver la Ec. (51) se realiza una discretización en el contorno  $\Gamma_j$ , dividiendo el contorno  $\Gamma_j$  en  $N_j$  pequeños segmentos de longitud de arco  $s$ . Sea  $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$  el número total de puntos en la celda unitaria que corresponden a cada uno de los contornos  $\Gamma_j$ . De este modo, la Ec. (51) puede expresarse como sumas sobre pequeños intervalos y si  $\Delta s_j$  es suficientemente pequeño, entonces podemos considerar que el potencial  $U_j$  y su derivada normal  $\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{s=s_j}$  son aproximadamente constantes entre dos puntos consecutivos de la discretización y por lo tanto podríamos sacarlos de las integrales. Con esta hipótesis podemos representar la integral de la Ec. (51) de la siguiente

manera:

$$\oint_{\partial R} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n} ds \approx \sum_{j=1}^n L_{ij} F_j, \quad (52)$$

$$\oint_{\partial R} U(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} ds \approx \sum_{j=1}^n N_{ij} U_j, \quad (53)$$

donde  $F_j = \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{s=s_j}$  es la derivada normal del potencial electrostático evaluada en el  $j$ -ésimo punto,  $U_j$  es el potencial evaluado en el  $j$ -ésimo punto. Evaluando las integrales de las Ecs. (52) y (53) en el punto de observación  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ , definiremos los elementos de matriz  $L_{ij}$  y  $N_{ij}$  como:

$$L_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} G(\mathbf{r}_i + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{r}') ds, \quad (54)$$

$$N_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \frac{\partial G(\mathbf{r}_i + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{r}')}{\partial n} ds. \quad (55)$$

Resulta que  $L_{ij}$  y  $N_{ij}$  (ver Apéndice A) están dados por:

$$L_{ij} = \left( -\frac{\Delta s}{2\pi} \right) \ln(R_{ij})(1 - \delta_{ij}) - \frac{\Delta s}{2\pi} \ln\left(\frac{\Delta s}{2e}\right) \delta_{ij}, \quad (56)$$

$$N_{ij} = \left( \frac{\Delta s}{2\pi} \right) \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \frac{\mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^2} (1 - \delta_{ij}) + \left( \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} (\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{t}}'_j) \right) \delta_{ij}, \quad (57)$$

donde

$$R_{ij} = \sqrt{(x_i - y_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (58)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \mathbf{R}_{ij} = -y'(s)(x_i - y_j) + x'(s)(y_i - y_j), \quad (59)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{t}}'_j = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s). \quad (60)$$

Asimismo, en las Ecs. (59) y (60) hemos definido  $x'_j(s) = x'(s)|_{s=s_j}$ ,  $x''_j(s) = x''(s)|_{s=s_j}$ , y así sucesivamente.

Ahora aplicando la discretización en las Ecs. (52) y (53) para el sistema se obtiene

el siguiente sistema de ecuaciones algebraico:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_1} [L_{ij(1)}F_{j(1)} - N_{ij(1)}U_{j(1)}] + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} [L_{ij(2)}F_{j(2)} - N_{ij(2)}U_{j(2)}] + \\ & \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} [L_{ij(3)}F_{j(3)} - N_{ij(3)}U_{j(3)}] + \sum_{j=n_1+n_2+n_3+1}^{n_1+n_2+n_3+n_4} [L_{ij(4)}F_{j(4)} - N_{ij(4)}U_{j(4)}] = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3 + n_4$  y el subíndice entre paréntesis hace referencia al perfil. Luego, en los perfiles  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  las condiciones de periodicidad se pueden expresar como:

$$U(x, y) = U(x + P, y), \quad (62)$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial n} = -\frac{\partial U(x + P, y)}{\partial n}. \quad (63)$$

Por otro lado, las condiciones de frontera de los perfiles armónicos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son respectivamente:

$$U(x, y)|_{y_1(x)} = U_1 \quad \text{y} \quad U(x, y)|_{y_2(x)} = U_2. \quad (64)$$

Entonces, la Ec. (61) se puede reescribir como el sistema lineal e inhomogéneo de ecuaciones algebraicas,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_1} L_{ij(1)}F_{j(1)} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} L_{ij(2)}F_{j(2)} + \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} (L_{ij(3)} - L_{ij(4)}) F_{j(3)} \\ & - \sum_{j=n_1+n_2+n_3+1}^{n_1+n_2+n_3+n_4} (N_{ij(3)} + N_{ij(4)}) U_{j(3)} = b_i, \end{aligned} \quad (65)$$

donde el término no homogéneo  $b_i$ , está dado por

$$b_i = U_1 \sum_{j=1}^{n_1} N_{ij} + U_2 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} N_{ij}. \quad (66)$$

En forma matricial el sistema de ecuaciones algebraico sería:

$$\begin{pmatrix} L_{ij(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{ij(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (L_{ij(3)} - L_{ij(4)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (N_{ij(3)} + N_{ij(4)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{j(1)} \\ F_{j(2)} \\ F_{j(3)} \\ U_{j(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 N_{ij} \\ U_2 N_{ij} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

## Condensador eléctrico con placas plano paralelas que contiene inclusiones cilíndricas circulares

En la Fig. 16 se muestra el siguiente sistema a analizar, el cual es un condensador eléctrico formado por dos placas conductoras paralelas y un arreglo de inclusiones cilíndricas circulares que involucran un material conductor. De igual manera con el objetivo de discretizar la Ec. (51) para este sistema, se toma una celda unitaria, la cual está delimitada por los límites laterales  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_5$  y las placas conductoras por los límites superior e inferior dados por  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , respectivamente. Esta región contiene la inclusión circular con un perfil dado por  $\Gamma_3$ .

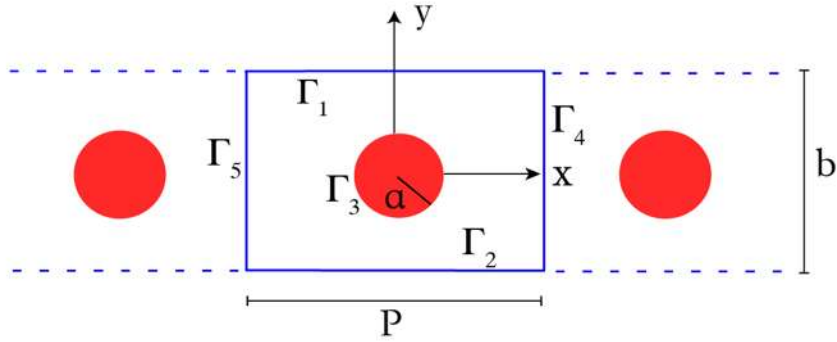


Figura 16. Celda unitaria que está limitada por los contornos  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_5$ .

Con un análisis análogo al realizado en el apartado anterior llegamos al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{n_1} L_{ij(1)} F_{j(1)} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} L_{ij(2)} F_{j(2)} + \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} L_{ij(3)} F_{j(3)} + \sum_{j=n_1+n_2+n_3+1}^{n_1+n_2+n_3+n_4} (L_{ij(4)} - L_{ij(5)}) F_{j(4)} \\
 & - \sum_{j=n_1+n_2+n_3+n_4+1}^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5} (N_{ij(4)} + N_{ij(5)}) U_{j(4)} = b_i, \tag{68}
 \end{aligned}$$

donde el término no homogéneo  $b_i$ , está dado por

$$b_i = U_1 \sum_{j=1}^{n_1} N_{ij} + U_2 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} N_{ij} + U_3 \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} N_{ij}, \quad (69)$$

con  $i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$  en la Ec. (68).

En forma matricial el sistema de ecuaciones algebraico sería de la forma:

$$\begin{pmatrix} L_{ij(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{ij(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{ij(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (L_{ij(4)} - L_{ij(5)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (N_{ij(4)} + N_{ij(5)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{j(1)} \\ F_{j(2)} \\ F_{j(3)} \\ F_{j(4)} \\ U_{j(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 N_{ij} \\ U_2 N_{ij} \\ U_3 N_{ij} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

### III.3. Método de Diferencias Finitas

Ahora consideremos las partículas cargadas moviéndose por el túnel formado por las placas del condensador en donde está establecido un potencial inhomogéneo dependiente de la posición de la partícula. Es bien conocido que las trayectorias de una partícula cargada inmersa en un campo eléctrico uniforme no son afectadas por el campo eléctrico. En este caso, la trayectoria solamente dependerá de las condiciones iniciales de velocidad  $(v_x, v_y)$  y de posición  $(x_0, y_0)$ . Calcular la trayectoria de una partícula cargada en presencia de un campo eléctrico no homogéneo (como es el caso de los sistemas considerados en este trabajo) es un problema más complicado y no puede resolverse de manera analítica. Por lo tanto, es necesario recurrir a métodos numéricos con los que se pueda hacer una buena aproximación. El método numérico que emplearemos es el Método de Diferencias Finitas.

Consideremos la tarea de encontrar la posición de la partícula,  $\mathbf{r}(t)$ , como función

del tiempo, dadas las condiciones iniciales de posición y velocidad:  $\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0$ , respectivamente. Si la partícula cargada se mueve en presencia de un campo eléctrico, entonces la fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre ella es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (71)$$

donde  $q$  es la carga de la partícula y  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico en la región vacía entre las superficies conductoras. Entonces, la trayectoria de la partícula cargada moviéndose en presencia del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  puede ser encontrada a partir de la segunda ley de Newton,

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (72)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $d^2 \mathbf{r}/dt^2$  es su aceleración y  $\mathbf{F}$  es la fuerza total que actúa sobre ésta. En este caso, consideramos que la única fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza eléctrica. Es necesario precisar que lo anterior es válido mientras la partícula no choque con alguna de las placas del condensador, porque cuando choca aparece una fuerza extra impulsiva que habría que considerar. Un modelo usual para considerar el impacto es suponer que se realiza un choque elástico, por lo que la partícula tiene una energía cinética después del impacto igual a la que tenía antes del impacto. Además, localmente rebota cumpliendo una “ley de la reflexión” en donde el ángulo de reflexión es igual al de incidencia para el caso plano.

De esta forma, para conocer la trayectoria de una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  cuyas condiciones iniciales de posición y velocidad son dadas, podemos resolver numéricamente la Ec. (72) por el método de diferencias finitas.

Las ecuaciones de movimiento serían:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (73)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (74)$$

Las cuales podemos discretizar de la siguiente manera

$$\mathbf{v}\left(t + \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \mathbf{v}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t)}{m}\Delta t, \quad (75)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t + \Delta t)\Delta t, \quad (76)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición en el plano  $x-y$ . En las ecuaciones anteriores  $\Delta t$  es un transcurso de tiempo suficientemente pequeño como para que la trayectoria obtenida numéricamente tenga un aspecto de curva continua a la hora de ser representada. Para esto basta con elegir a  $\Delta t$  como una cantidad pequeña en relación a un tiempo característico en el sistema. Las Ecs. (75) y (76) permiten encontrar la posición y velocidad en un tiempo “futuro” dando estas propiedades en un tiempo “presente”. Además el cálculo de la posición y la velocidad deben estar “defasados” en un tiempo  $\Delta t/2$  para darle estabilidad numérica al método.

## Capítulo IV

---

### RESULTADOS

---

En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos para cada sistema considerado. Para ello se utilizó la implementación del método de la ecuación integral y el método de diferencias finitas en el lenguaje de FORTRAN. Para formar los sistemas considerados se utilizó un conjunto de puntos finitos, donde se usó un muestreo con una resolución  $ds = 1/40$  para los puntos que modelan los perfiles de las placas del condensador y  $dt = 1/45$  para los puntos de la trayectoria de la partícula. Para realizar las pruebas, se tomó una celda unitaria arbitraria del condensador y se observó lo que ocurre en ella. El algoritmo está diseñado para que una vez que la partícula llegue a un extremo de la celda unitaria ésta vuelva a entrar a la celda, al inicio si  $v_x > 0$  o al final si  $v_x < 0$ . Cabe resaltar que esto se puede hacer debido a la periodicidad de los sistemas que estamos tratando.

## IV.1. Condensador eléctrico con placas sinusoidales

### Potencial electrostático

Una vez obtenido el potencial eléctrico,  $U(x, y)$ , por medio del IEM calculamos el campo eléctrico a través de la relación que existe entre ellos:  $E = -\nabla U(x, y)$ . En la Fig. 17, se muestra el potencial y el campo eléctrico para un condensador con placas planas de amplitud  $A = 0.0$  (Fig. 17 (a) y Fig. 17 (d), respectivamente); otro con placas onduladas de amplitud  $A = 0.17\pi$  (Fig. 17(b) y Fig. 17 (e), respectivamente) y uno más de placas onduladas de amplitud  $A = 0.08\pi$  (Fig. 17 (c) y Fig. 17 (f), respectivamente). En los tres casos se utilizó un ancho  $b = \pi$  y una longitud  $L = 4\pi$  en las Figs. 17 (a) y (c); mientras que en la Fig. 17 (b) la longitud fue  $L = 2\pi$ .

Como se muestra en la Fig. 17 las condiciones de frontera se cumplen, lo que le da validez al método numérico desarrollado. Además, en las Figs. 17 (d), (e) y (f) se cumple que las líneas de campo eléctrico van siempre de la placa con carga positiva a la placa con carga negativa. Estos resultados muestran que para un condensador con placas onduladas Figs. 17 (e) y (f) el campo eléctrico deja de ser uniforme, haciendo evidente que la intensidad del campo y, por lo tanto, la fuerza que actúa sobre una partícula será diferente en cada punto.

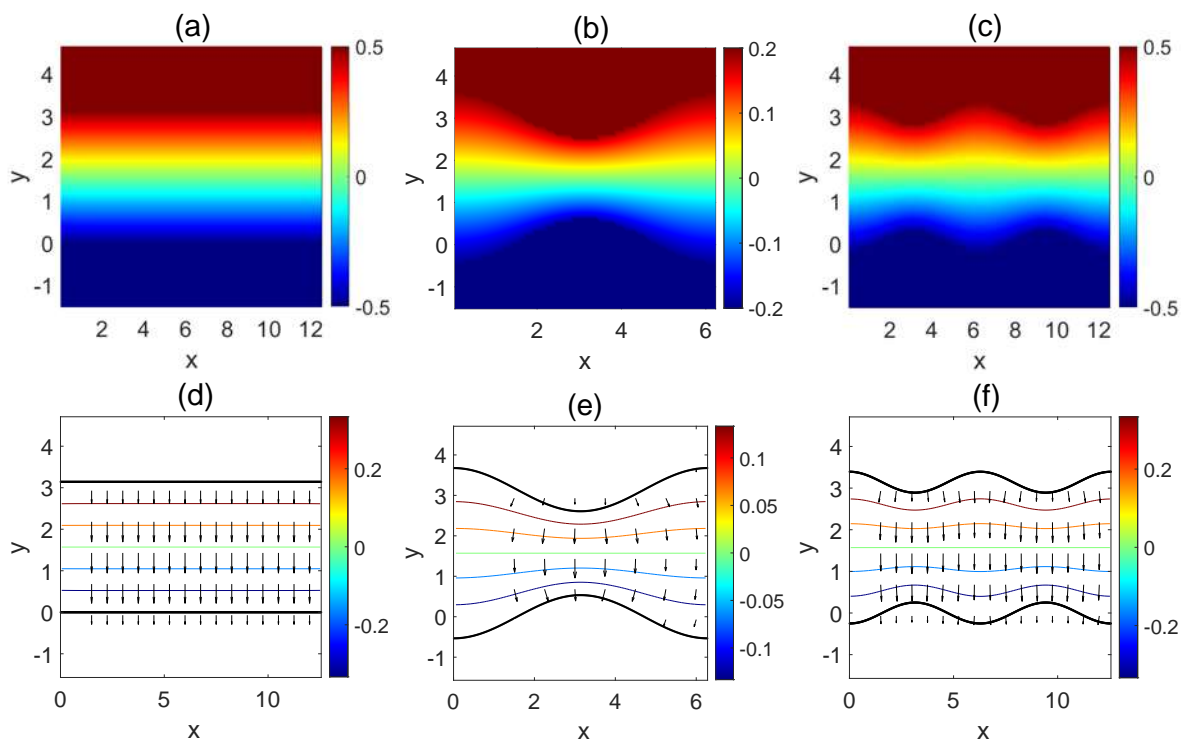


Figura 17. Potencial eléctrico para un condensador de (a) placas planas ( $A = 0$ ), (b) placas sinusoidales de amplitud  $A = 0.17\pi$  y (c)  $A = 0.08\pi$ . Campo eléctrico para un condensador con amplitud (d)  $A = 0$ , (e)  $A = 0.17\pi$  y (f)  $A = 0.08\pi$ .

#### IV.1.1. Trayectorias de partículas

Primero realizamos la simulación de la trayectoria que sigue una partícula cargada con una cierta velocidad inicial, dentro del condensador bajo cuatro condiciones distintas de lanzamiento y de geometría del condensador. El primer lanzamiento, Fig. 18 (a), se realizó dentro de un condensador de placas planas y paralelas ( $A = 0$ ) con las condiciones iniciales de velocidad  $v_x = 0.3$ ,  $v_y = 1.0$ . En el segundo lanzamiento, Fig. 18 (b), se consideró placas onduladas de amplitud  $A = 0.08\pi$  y condiciones iniciales de velocidad  $v_x = 0.2$ ,  $v_y = -0.6$ . En el tercer caso, Fig. 18 (c), se utilizaron placas onduladas de amplitud  $A = 0.14\pi$  y una velocidad inicial  $v_x = 0.48$  y  $v_y = 1.24$ . Finalmente, en el último lanzamiento, Fig. 18 (d), se consideraron placas onduladas

con amplitud  $A = 0.25$  y velocidad inicial de  $v_x = 0.5$  y  $v_y = 1.0$ . La condición inicial de posición,  $(x_0, y_0)$ , fue  $(0.05, 0.5b)$  (Figs. 18 (a) y (b)),  $(0.05, 0.0)$  (Fig. 18 (c)) y  $(0.05, 0.7b)$  (Fig. 18 (d)). Los parámetros del condensador fueron: ancho  $b = \pi$ , periodo  $P = 2\pi$ , diferencia de fase  $r = \pi$ , longitud  $L = 2\pi$  (1 periodo) (Figs. 18 (a), (b) y (c)) y 2 periodos (Fig. 18 (d)). Con condiciones de frontera  $U_1 = 0.7, U_2 = -0.7$  (Fig. 18 (a));  $U_1 = 0.2, U_2 = -0.2$  (Fig. 18 (b));  $U_1 = 0.5, U_2 = -0.5$  (Fig. 18 (c)) y  $U_1 = 1.0, U_2 = -1.0$  (Fig. 18 (d)).

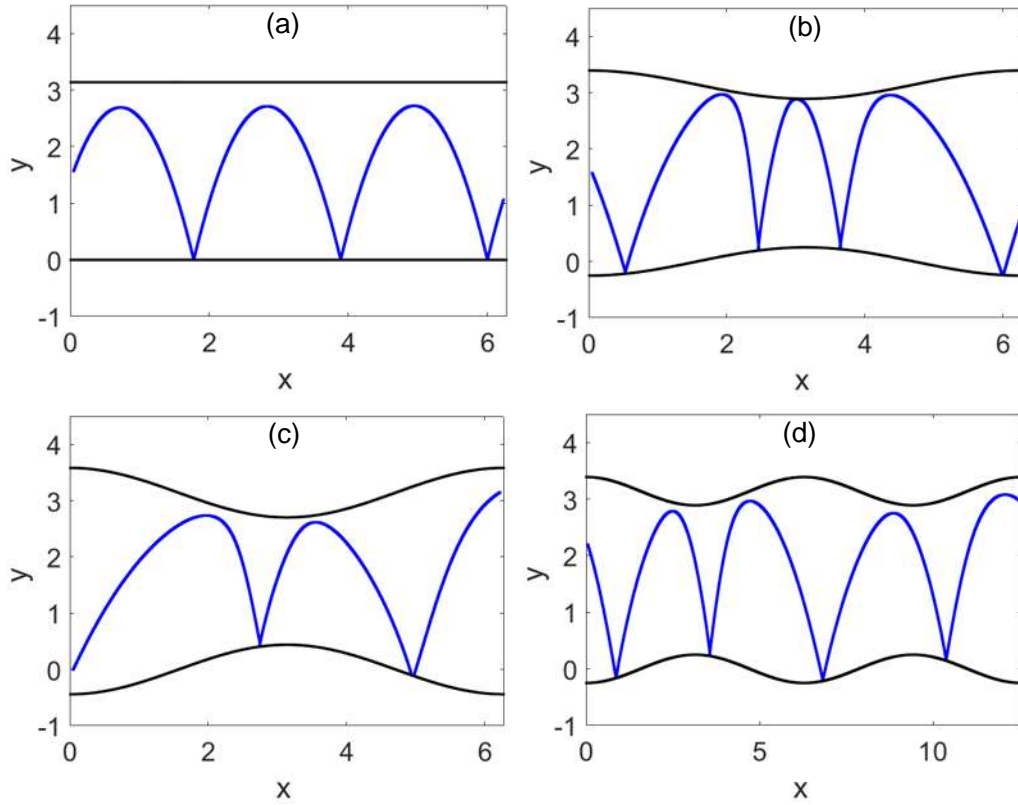


Figura 18. Trayectorias de una partícula con  $v_y > 0$  para (a) condensador plano con  $A = 0.0, v_x = 0.3, v_y = 1.0$  y (c) condensador ondulado con  $A = 0.14\pi, v_x = 0.48, v_y = 1.24$ . Trayectorias de una partícula con  $v_y < 0$  para (b) condensador ondulado con  $A = 0.08\pi, v_x = 0.2, v_y = -0.6$  y (d)  $A = 0.25, v_x = 0.5, v_y = -1.0$ .

Como se muestra en la Fig. 18 (a), en el caso plano la partícula describe un movimiento uniformemente acelerado al entrar al interior del condensador; debido a

que está bajo la influencia de un campo eléctrico uniforme generado por el condensador. Además podemos observar que la partícula describe un movimiento en forma de parábola como ya es conocido. En las Figs. 18 (b), (c) y (d) se aprecia como la trayectoria de la partícula sigue un movimiento en forma parabólica también, sin importar las condiciones iniciales del lanzamiento. Pero es notorio que la trayectoria de la partícula es influenciada por las ondulaciones de las placas del condensador, a diferencia del caso plano paralelo. Cuando la partícula se aproxima a la ondulación en las Figs. 19 (b), (c) y (d), se puede observar como se ve influenciada la trayectoria debido a la ondulación. Entonces, podemos decir que entre más cerca se encuentre la partícula de la placa ondulada mayor será la influencia de ésta sobre la dinámica de la trayectoria de la partícula.

En las siguientes gráficas (Fig. 19) se muestra la evolución temporal de una partícula con diferentes condiciones iniciales. Para obtener las gráficas, en la Fig. 19 (a) se utilizó un condensador con una amplitud de  $A = 0.0$  y un potencial eléctrico con un valor de  $U_1 = 0.5$ ,  $U_2 = -0.5$ . La partícula inicia su movimiento en el punto  $(0.2, 0.5b)$  con velocidad inicial  $v_x = 1.9$ ,  $v_y = 1.3$ . En seguida (Fig. 19 (b)), consideramos una amplitud de  $A = 0.2$  manteniendo el mismo valor del potencial. La partícula se lanzó con una velocidad  $v_x = 0.5$ ,  $v_y = 1.1$  en la posición  $(0.5, 0.5b)$ . En el caso de la Fig. 19 (c) consideramos una amplitud  $A = 0.17\pi$  y un valor de  $U_1 = 0.2$ ,  $U_2 = -0.2$  para el potencial eléctrico y la partícula se lanzó con una velocidad de  $v_x = 0.4$ ,  $v_y = -0.9$  en la posición  $(0.5, 0.7b)$ . Finalmente, en la Fig. 19 (d) se consideró una amplitud  $A = 0.3$  con potenciales  $U_1 = 0.25$ ,  $U_2 = -0.25$ . En este caso la partícula fue lanzada en la misma posición inicial que la Fig. 19 (c) con una velocidad inicial  $v_x = 1.5$ ,  $v_y = -1.8$ . Los parámetros usados para formar el condensador fueron: ancho  $b = \pi$ , periodo  $P = 2\pi$ , longitud  $L = 2\pi$  (1 periodo) en las Figs. 19 (a), (c) y (d) y  $L = 4\pi$  (2 periodos) para la

Fig. 19 (b). Las gráficas (c) y (d) involucran ondulaciones donde la diferencia de fase utilizada fue  $r = \pi$ .

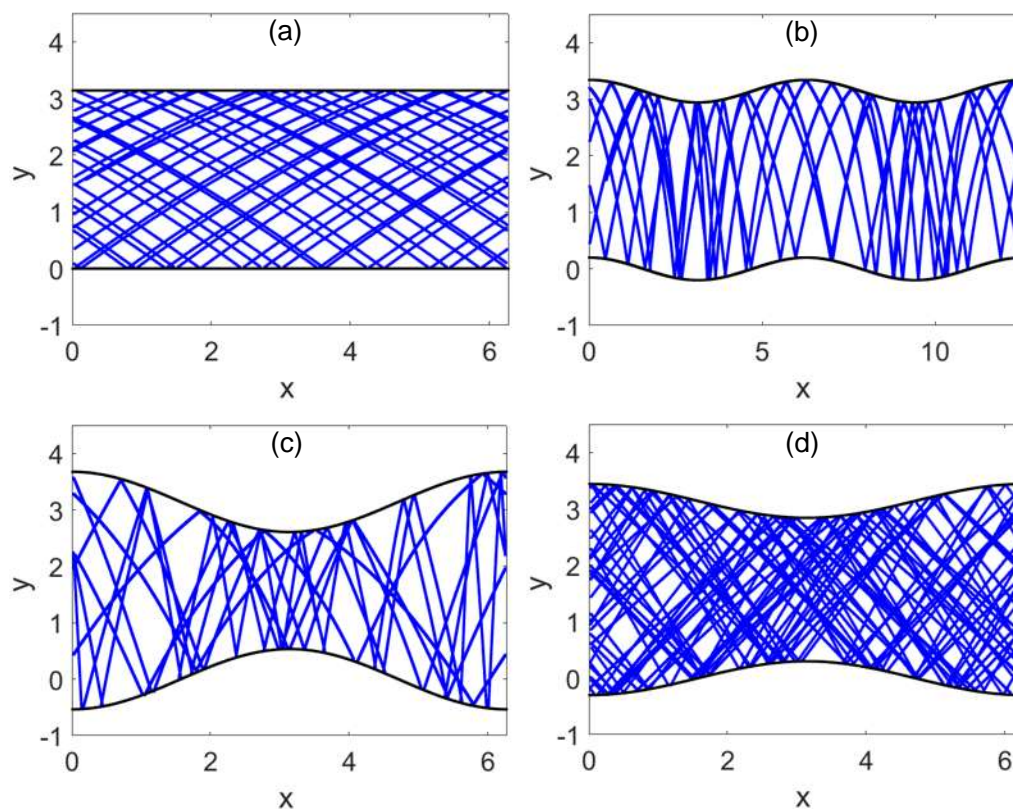


Figura 19. Trayectorias de una partícula en un condensador con amplitud (a)  $A = 0.0$ , (b)  $A = 0.2$ , (c)  $A = 0.17\pi$  y (d)  $A = 0.3$ .

En la Fig. 19 (a) la partícula experimentó 34 colisiones para las cuales se consideró 8,100 puntos. Por su parte, en la Fig. 19 (b) se presentaron 62 colisiones con 20,500 puntos. En el caso de la Fig. 19 (c) ésta muestra 48 colisiones utilizando 13,530 puntos y finalmente, en la Fig. 19 (d) se puede observar que la partícula colisionó 102 veces con 13,510 puntos. A medida que se incrementa el número de puntos eventualmente todo el espacio accesible en la superficie del condensador es cubierto por la trayectoria de la partícula siguiendo patrones característicos.

Ahora, estamos interesados en determinar la evolución de  $n$  partículas inyectadas simultáneamente en el condensador. Las partículas son inyectadas por  $N$  fuentes que

están uniformemente distribuidas a lo largo del eje  $x$ . Las fuentes tienen por origen el punto  $(x_N, b/2)$ , donde  $x_N$  es la posición horizontal correspondiente a cada una de las  $N$  fuentes y  $b$  es el ancho del condensador. Cada fuente inyecta  $n$  partículas con una distribución angular que está entre  $270^\circ$  y  $90^\circ$ , como se ilustra en la Fig. 20. De las  $n$  partículas,  $n/2$  se lanzan de tal manera que su primer colisión sea con la placa superior y las otras  $n/2$  restantes sea con la placa inferior. Por lo tanto, el ángulo está determinado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right), \quad (77)$$

donde  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes de la velocidad sobre el eje  $x$  y  $y$ , respectivamente. Además, se tiene que  $v_x = v \cos(\theta)$  y  $v_y = v \sin(\theta)$ .

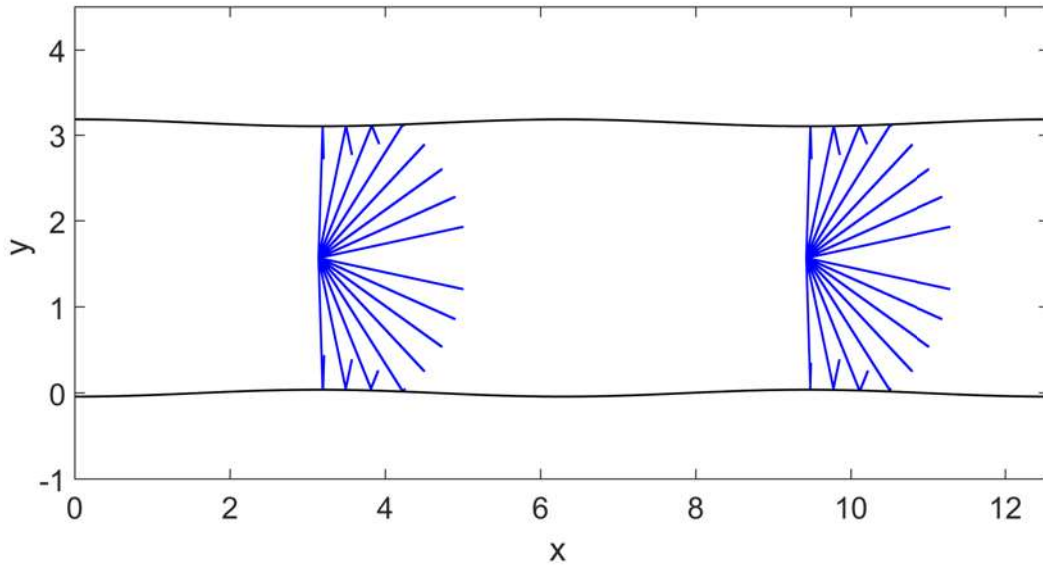


Figura 20. Distribución angular de dos fuentes con 16 partículas cada una en un condensador con parámetros:  $A = 0.04$ ,  $b = \pi$  y  $L = 4\pi$ .

### IV.1.2. Mapas de Poincaré

Para analizar la dinámica de las partículas construimos los mapas de Poincaré. Para trazar las secciones de Poincaré, elegimos el par conjugado  $(x, p_y)$ , donde  $x$  es la posición

de la partícula en el eje  $x$ ,  $p_y = v \cos \alpha$  es el momento en la dirección  $x$  y  $v$  es la magnitud de la velocidad.  $\alpha$  es el ángulo con el que avanza la partícula conforme transcurre el tiempo, dado por la Ec. (77). En los puntos de colisión con los perfiles  $\alpha = \beta$ , que es el ángulo de reflexión. Para obtener las gráficas de Poincaré, consideramos  $P = 2\pi$  y  $L = 6\pi$  en todos los casos. Los valores de  $x$  considerados están en el intervalo  $[0, 1]$ .

### Condensador con ancho $b = 2.0$

Consideremos primero el caso de un condensador de placas planas con potencial electrostático  $U = 0$  (Fig. 21 (a)). En seguida, consideremos una pequeña amplitud de ondulación en las placas del condensador de  $A = 0.08$  para tres variaciones del potencial:  $U = 0$  (Fig. 21 (b)),  $U = |0.2|$  (Fig. 21 (c)) y  $U = |0.9|$  (Fig. 21 (d)). En todos los casos se utilizaron 6 fuentes con 20 partículas.

En la Fig. 21 (a) podemos observar que en el caso clásico, no existe comportamiento caótico como era de esperarse. La trayectoria no sufre alteraciones debido a la reflexión local en el choque y a que no existen fuerzas externas en el sistema. Se observa en la Fig. 21 (b) para el caso de un potencial eléctrico nulo con una pequeña amplitud de ondulación, una dinámica similar como en el caso de un condensador con placas plano paralelas. Mientras que en las Figs. 21 (c) y (d) presentan la formación de islas o ciclos límite, con la presencia del campo eléctrico.

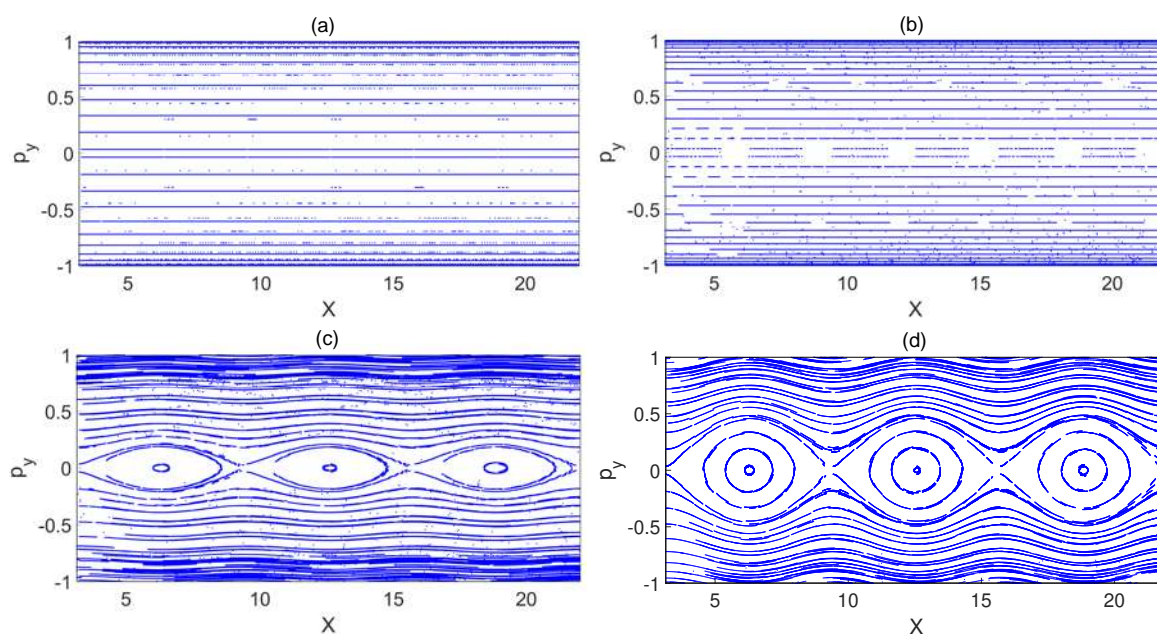


Figura 21. Mapas de Poincaré para un condensador con amplitud (a)  $A = 0$ , (b), (c) y (d)  $A = 0.08$  con los potenciales (a)  $U = 0$ , (b)  $U = 0$ , (c)  $U = |0.2|$  y (d)  $U = |0.9|$ .

### Condensador con ancho $b = 1.0$

Ahora se considera un ancho más pequeño manteniendo la misma amplitud que el caso anterior,  $A = 0.08$ , bajo dos variantes para el potencial eléctrico. Los valores utilizados fueron:  $U = |0.6|$  (Fig. 22 (a)) y  $U = |1.5|$  (Fig. 22 (b)). En ambos casos se utilizaron 6 fuentes con 20 partículas lanzadas en la posición  $y = 0.52b$ .

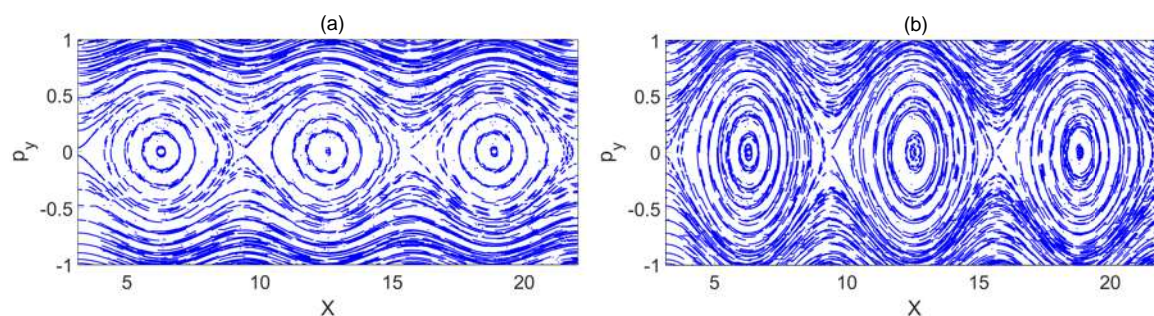


Figura 22. Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud  $A = 0.08$  y ancho  $b = 1.0$  para los potenciales (a)  $U = |0.6|$  y (b)  $U = |1.5|$ .

En la Fig. 22 se puede observar que a medida que se incrementa el valor del potencial eléctrico se observan más trayectorias cerradas. Las trayectorias cerradas representan partículas que se encuentran atrapadas en el condensador.

### Condensador con ancho $b = 0.15\pi$

En la Fig. 23 se presenta la dinámica de las partículas dentro del condensador al variar la amplitud de la ondulación en las placas y manteniendo fijo el valor del potencial eléctrico. En las Figs. 23 (a) y (c) se usó un potencial de  $U = |0.2|$  para las amplitudes: (a)  $A = 0.02\pi$  y (c)  $A = 0.045\pi$ . Así mismo, en las Figs. 23 (b) y (d) se consideró un potencial de  $U = |0.6|$  para las amplitudes: (b)  $A = 0.02\pi$  y (d)  $A = 0.045\pi$ . Se utilizaron 6 fuentes en el condensador con (a) y (b) 20 partículas y (c) y (d) 19 partículas.

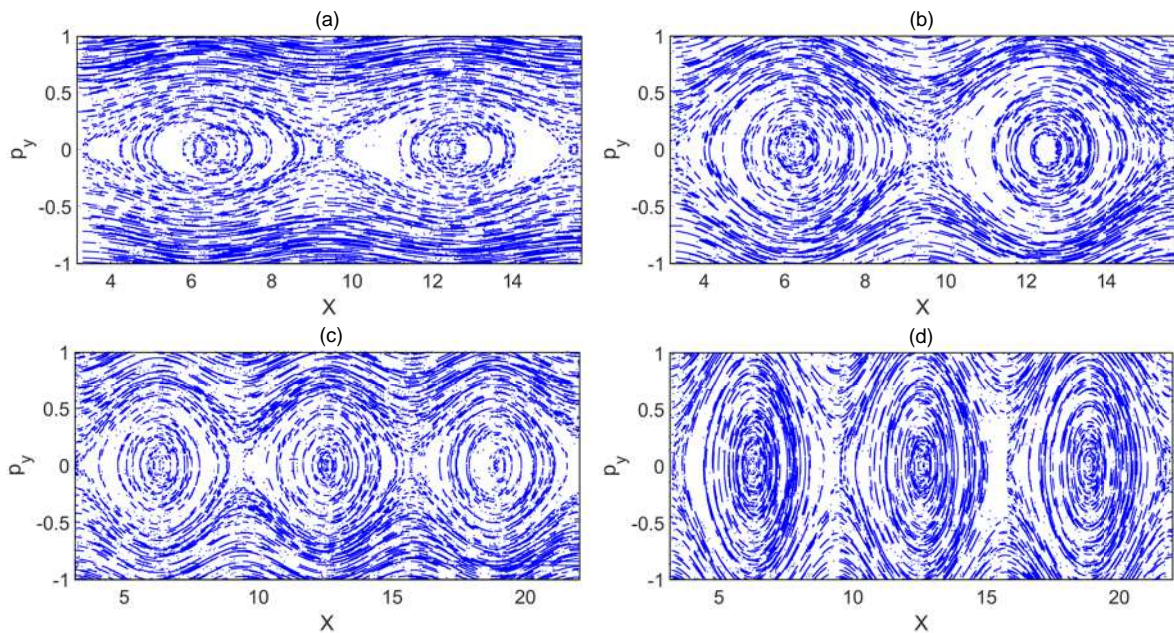


Figura 23. Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud (a) y (b)  $A = 0.02\pi$ , (c) y (d)  $A = 0.045\pi$  para los potenciales (a) y (c)  $U = |0.2|$ , (b) y (d)  $U = |0.6|$ . En todos los casos el ancho es  $b = 0.15\pi$ .

En las Figs. 23 (c) y (d) se muestra que al hacer la amplitud mayor los ciclos límite

son más notorios. En este caso las trayectorias caen a ciclos límite rápidamente, aún con un campo eléctrico pequeño. Por lo tanto, la amplitud de la ondulación en las placas desempeña un papel importante en el comportamiento de las partículas.

Hasta ahora se ha considerado una diferencia de fase fija entre las placas del condensador con un valor de  $r = 0$ . Entonces, ahora vamos a analizar el comportamiento de las partículas al variar el parámetro de la diferencia de fase entre las placas del condensador. En la Fig. 24 se pueden apreciar secciones de Poincaré obtenidas con  $A = 0.02\pi$ ,  $b = 0.15\pi$  y  $U = |0.81|$  para (e)  $r = 0$ , (f)  $r = \pi$  y (g)  $r = 3\pi$ . Además, para estos cálculos se utilizaron 19 partículas lanzadas en la posición  $y = 0.52b$ .

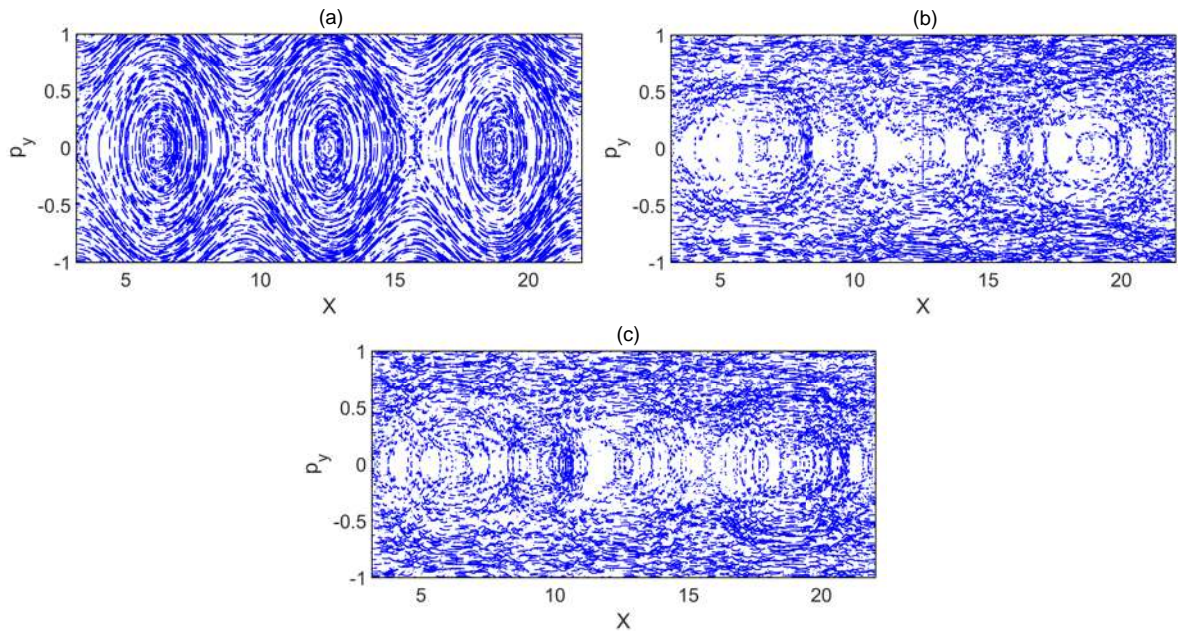


Figura 24. Mapas de Poincaré para un condensador con amplitud  $A = 0.02\pi$ , ancho  $b = 0.15\pi$ , potencial  $U = |0.81|$  y diferencias de fase (a)  $r = 0$ , (b)  $r = \pi$  y (c)  $r = 3\pi$ .

Para el caso  $r = 0$  (Fig. 24 (a)) el comportamiento es semejante al de los casos anteriores; es decir, se puede observar órbitas elípticas bien definidas. Para una diferencia de fase de  $r = \pi$ , podemos ver de la Fig. 24 (b) que las elipses comienzan a deformarse. Si aumentamos más la diferencia de fase a  $r = 3\pi$  (Fig. 24 (c)) se modifica

la dinámica de las partículas aún más en comparación con el caso sin diferencia de fase. Esto permite la presencia de un comportamiento caótico para las partículas.

## IV.2. Condensador eléctrico con placas plano paralelas que contiene inclusiones cilíndricas circulares

### Potencial electrostático

En la Fig. 25 se presentan los resultados del potencial y el campo eléctrico asociado para un condensador formado por dos superficies planas y paralelas que contiene un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares. Para este sistema hemos considerado los siguientes parámetros: longitud  $L = 2\pi$ , ancho  $b = 2\pi$ , radios  $a = 0.2\pi$  (Fig. 25 (a)),  $a = 0.30\pi$  (Fig. 25 (b)) y  $a = 0.32\pi$  (Fig. 25 (c)).

De la Fig. 25 se puede observar que para el campo eléctrico, de nuevo, se sigue cumpliendo que las líneas de fuerza van de la superficie con carga positiva a la superficie con carga negativa. También, se puede corroborar que la intensidad del campo está de acuerdo con las condiciones de frontera consideradas, siendo notoria la perturbación que sufre el campo de potencial debido a la presencia de la inclusión. Además, nótese que en todos los casos se cumplen las condiciones de frontera, lo cual implica la validez del método numérico empleado.

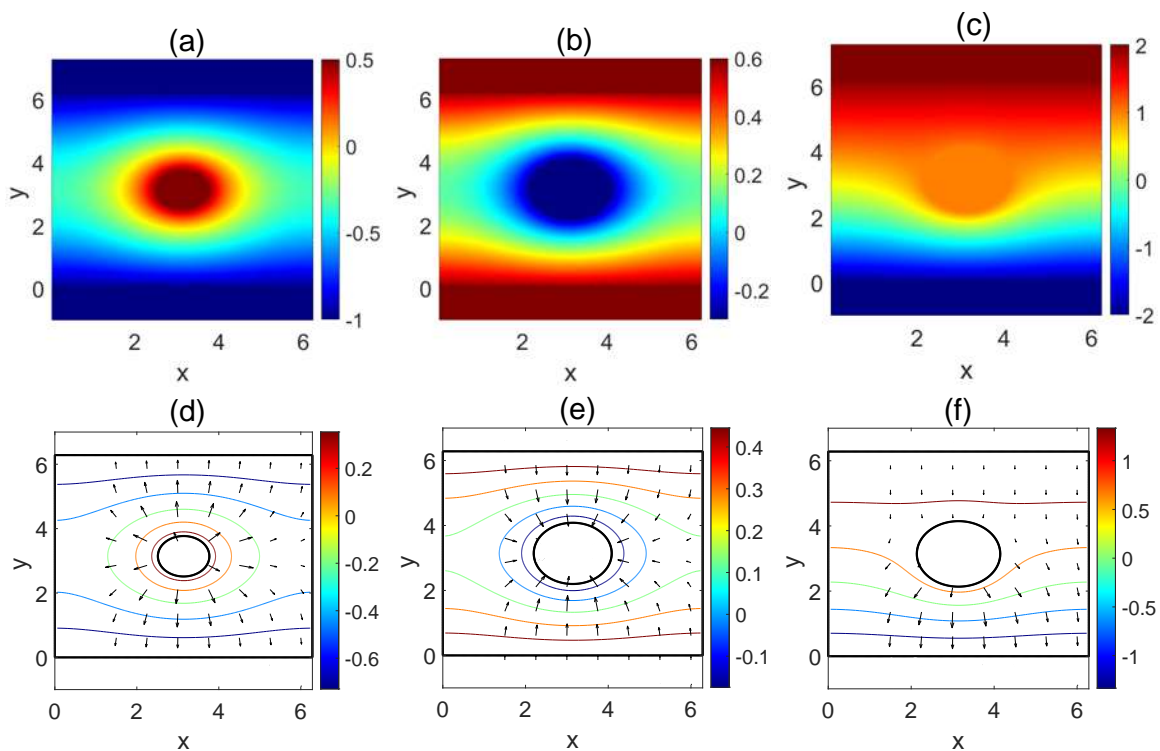


Figura 25. Potenciales eléctricos obtenidos con (a)  $U_1 = -1$ ,  $U_2 = -1$ ,  $U_3 = 0.5$  y  $a = 0.2\pi$ ; (b)  $U_1 = 0.6$ ,  $U_2 = 0.6$ ,  $U_3 = -0.3$  y  $a = 0.30\pi$ ; (c)  $U_1 = 2$ ,  $U_2 = -2$ ,  $U_3 = 1$  y  $a = 0.32\pi$ . (d), (e) y (f) Campos eléctricos correspondientes para cada caso.

#### IV.2.1. Trayectorias de partículas

Para ejemplificar la descripción teórica descrita anteriormente, modelamos la evolución de la trayectoria de una partícula a través de un condensador de placas plano paralelas y conductoras que contiene un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares.

Primero, consideramos el caso simple, un condensador sin potencial; es decir,  $U_1 = U_2 = U_3 = 0$  (Fig. 26 (a)). Los parámetros de las superficies del condensador son: longitud  $L = 2\pi$  (1 periodo), ancho  $b = 2\pi$  y radio de la inclusión circular  $a = 0.4\pi$ . La partícula inicia su movimiento en el punto  $(1.4, 0.0)$  con velocidad inicial  $v_x = 0.2$ ,  $v_y = 0.4$ . Después, procedemos a considerar la partícula en presencia de potencial ( $U_1 = 0.5$ ,  $U_2 = 0.7$  y  $U_3 = -0.8$ ) presentado en la Fig. 26 (b).

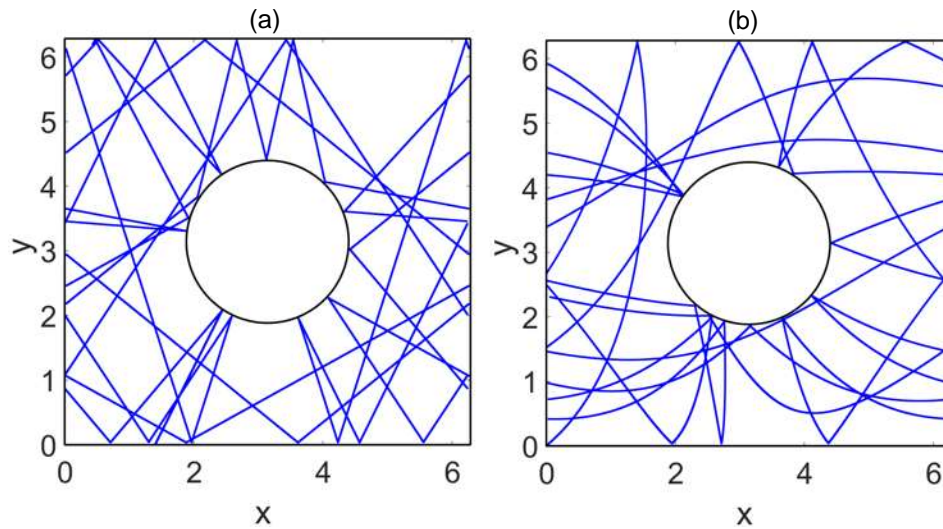


Figura 26. Trayectorias de una partícula en un condensador con los siguientes parámetros:  $L = 2\pi$ ,  $b = 2\pi$ ,  $a = 0.4\pi$ , (a)  $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ , (b)  $U_1 = 0.5$ ,  $U_2 = 0.7$  y  $U_3 = -0.8$ . Y valores iniciales para la partícula: (a)  $x_0 = 1.4$ ,  $y_0 = 0.0$ ,  $v_x = 0.2$ ,  $v_y = 0.4$  y (b)  $x_0 = 0.0$ ,  $y_0 = 0.0$ ,  $v_x = 0.4$ ,  $v_y = 0.7$ .

Con los mismos parámetros que se consideraron en el caso anterior para el condensador; pero en este caso la partícula inicia su movimiento en el punto  $(0.0, 0.0)$  con una velocidad inicial de  $v_x = 0.4$ ,  $v_y = 0.7$ .

En los resultados obtenidos en la Fig. 26 (a) podemos observar que entre colisiones la partícula se mueve de manera libre siguiendo una trayectoria rectilínea, como es característico en un sistema clásico. Mientras que en la Fig. 26 (b), se observan cambios notables en la trayectoria de la partícula. Se puede ver claramente que la presencia del campo eléctrico modifica la dinámica de la partícula, en comparación con el caso clásico. Estos resultados y el cumplimiento de las condiciones de frontera muestran que el IEM da resultados confiables para este sistema.

En las gráficas siguientes de la Fig. 27, se muestran los resultados al considerar la trayectoria de una partícula después de un número finito de iteraciones para diferentes condiciones iniciales.

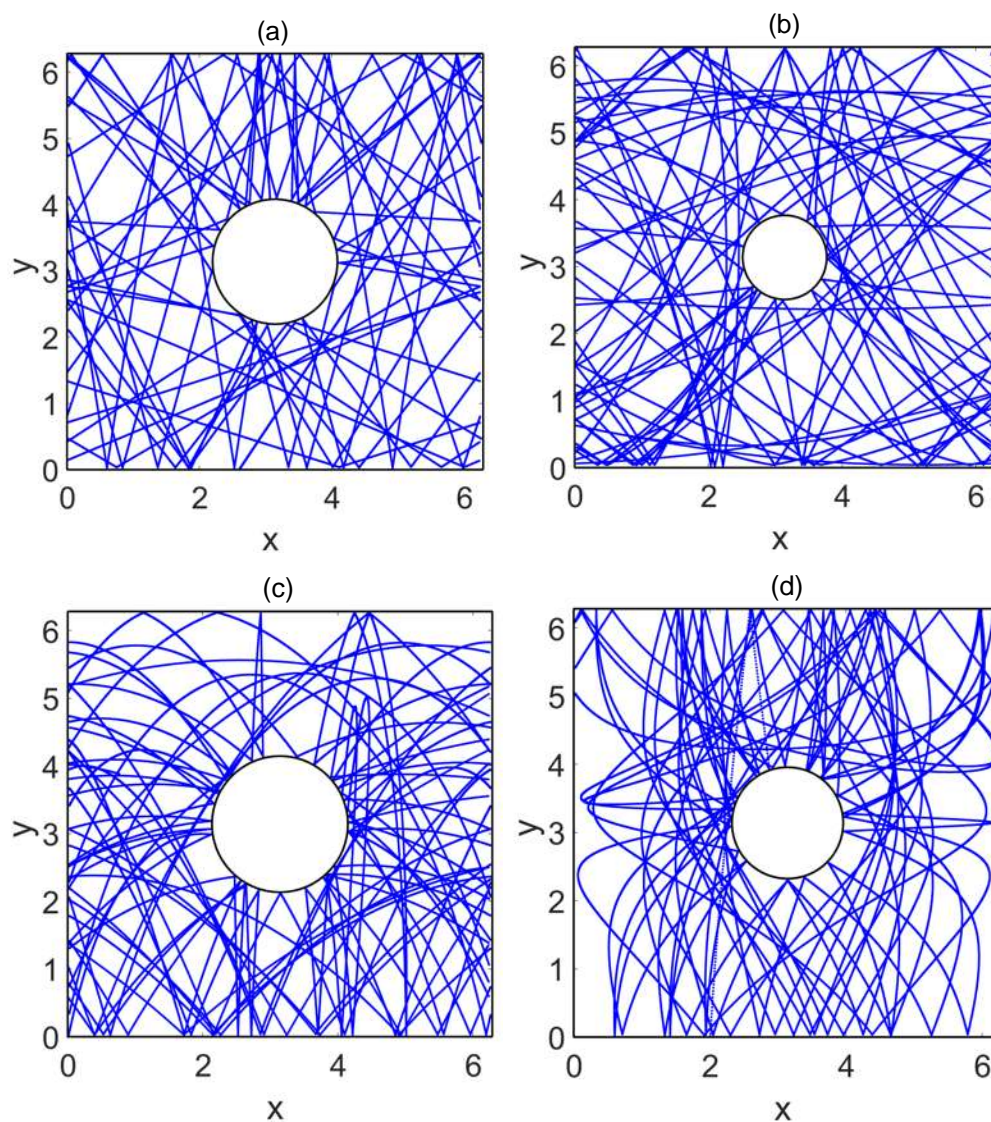


Figura 27. Evolución de las trayectorias de una partícula en un condensador con parámetros:  $b = 2\pi$ ,  $L = 2\pi$ , (a)  $a = 0.30\pi$ , (b)  $a = 0.2\pi$ , (c)  $a = 0.32\pi$  y (d)  $a = 0.26\pi$ . Además con un potencial (a)  $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ ; (b)  $U_1 = 0.5$ ,  $U_2 = 0.4$ ,  $U_3 = -0.8$ ; (c)  $U_1 = 0.7$ ,  $U_2 = -0.5$ ,  $U_3 = 0.4$  y (d)  $U_1 = -1.3$ ,  $U_2 = -1.3$ ,  $U_3 = 1.0$  y condiciones iniciales para la partícula: (a)  $x_0 = 2.6$ ,  $y_0 = 0.0$ ,  $v_x = 0.2$ ,  $v_y = 0.3$ ; (b)  $x_0 = 0.0$ ,  $y_0 = 3.2$ ,  $v_x = 0.4$ ,  $v_y = 0.5$ ; (c)  $x_0 = 0.0$ ,  $y_0 = 0.0$ ,  $v_x = 0.4$ ,  $v_y = 0.7$  y (d)  $x_0 = 2.0$ ,  $y_0 = 0.0$ ,  $v_x = 0.3$ ,  $v_y = 0.6$ .

Considerando nuevamente el caso de superficies sin potencial (Fig. 27 (a)), donde tomamos en cuenta las condiciones iniciales de posición y velocidad para la partícula de  $(2.6, 0.0)$  y  $v_x = 0.2$ ,  $v_y = 0.3$ , respectivamente. Seguido de esto, se procede a considerar

la evolución de la trayectoria al ir variando el valor del potencial. Comenzando con un potencial eléctrico con un valor de  $U_1 = 0.5$ ,  $U_2 = 0.4$  y  $U_3 = -0.8$  en la Fig. 27 (b); la partícula inició su movimiento con una velocidad de  $v_x = 0.4$ ,  $v_y = 0.5$  en la posición  $(0.0, 3.2)$ . En el caso de la Fig. 27 (c) consideramos un valor de  $U_1 = 0.7$ ,  $U_2 = -0.5$  y  $U_3 = 0.4$  para el potencial eléctrico, la partícula se lanzó con una velocidad de  $v_x = 0.4$ ,  $v_y = 0.7$  en la posición  $(0.0, 0.0)$ . Finalmente, en Fig. 27 (d) se presenta la evolución de la trayectoria, usando un potencial eléctrico de  $U_1 = -1.3$ ,  $U_2 = -1.3$  y  $U_3 = 1.0$  y las condiciones iniciales de velocidad  $v_x = 0.3$ ,  $v_y = 0.6$  y de posición  $(2.0, 0.0)$ . Los cálculos fueron realizados con los siguientes parámetros para la formación de la celda: longitud  $L = 2\pi$  (1 periodo), ancho  $b = 2\pi$ , la celda tiene una inclusión de radios  $a = 0.30\pi$  (Fig. 27 (a)),  $a = 0.2\pi$  (Fig. 27 (b)),  $a = 0.32\pi$  (Fig. 27 (c)) y  $a = 0.26\pi$  (Fig. 27 (d)).

En la Fig. 27 (a) la partícula experimentó 72 colisiones para las cuales se consideró 25,020 puntos. Por su parte, en la Fig. 27 (b) se presentaron 55 colisiones con 28,250 puntos. En el caso de la Fig. 27 (c) ésta muestra 71 colisiones utilizando 28,400 puntos y finalmente, en la Fig. 27 (d) se puede observar que la partícula colisionó 84 veces con 28,250 puntos. En la Fig. 27 podemos notar que a medida que el número de puntos se incrementa, poco a poco se empieza a cubrir todo el espacio disponible en la celda del condensador. También, es interesante notar el contraste que existe entre la evolución de la trayectoria en presencia de potencial en comparación del caso clásico (Fig. 27 (a)) que no está influenciado por un campo eléctrico.

## IV.2.2. Mapas de Poincaré

Ahora se presentan los resultados numéricos obtenidos para la evolución de la trayectoria de  $n$  partículas lanzadas de manera simultánea en el condensador. Es preciso men-

cionar que los mapas de Poincaré se construyeron mediante un razonamiento análogo al descrito para el sistema anterior. En la Fig. 28 se ilustra la distribución angular con la que son lanzadas las partículas para este sistema.

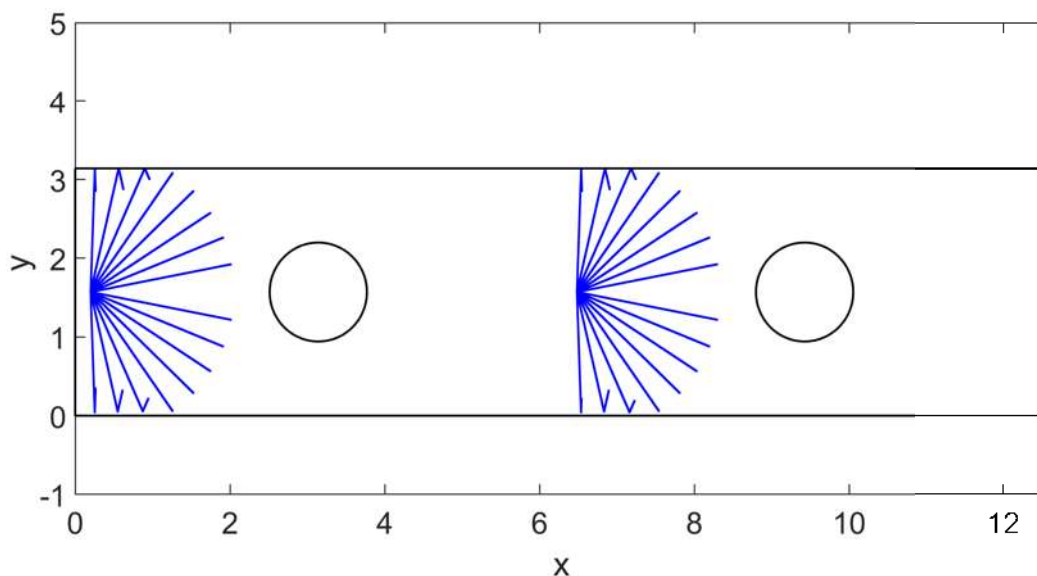


Figura 28. Distribuciones angulares de dos fuentes con 16 partículas cada una en un condensador con parámetros:  $b = \pi$ ,  $L = 4\pi$  y  $a = 0.1\pi$ .

### Condensador con ancho $b = 0.5\pi$

Las primeras pruebas numéricas se realizaron tomando un ancho fijo en el condensador con un valor de  $b = 0.5\pi$ . Se realizó primero el caso simple, un condensador con ausencia de inclusiones, como se muestra en la Fig. 29 (a). Los parámetros considerados para realizar el cálculo fueron: periodo  $P = 2\pi$ , longitud  $L = 4\pi$  (2 periodos) y potencial  $U_1 = 0.1$ ,  $U_2 = -0.1$ . Para dos fuentes con 16 partículas lanzadas en las posiciones  $y = 0.5b$ . Bajo las mismas condiciones del caso anterior, se muestra el resultado obtenido al considerar la presencia de inclusiones en el condensador, con un radio de  $a = 0.06\pi$  (ver Fig. 29 (b)). Para un potencial electrostático de  $U_1 = 0.1$ ,  $U_2 = 0.1$  y  $U_3 = -0.1$ .

En la Fig. 29 (a) las partículas presentan una dinámica regular donde no existe un comportamiento caótico. Las líneas rectas corresponden a partículas no atrapadas viajando hacia adelante o hacia atrás sin retorno. Por su parte, en la Fig. 29 (b) se puede ver que la presencia de las inclusiones modifica la dinámica de las partículas a diferencia del caso clásico. En el subespacio fase comienzan a formarse ciclos límite.

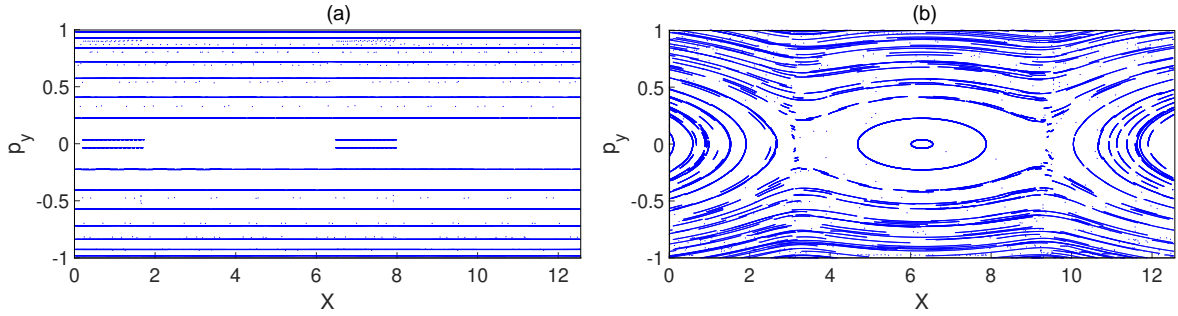


Figura 29. Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en (a) un condensador plano sin inclusiones y (b) un condensador plano con inclusiones. Para los parámetros:  $L = 4\pi$ ,  $b = 0.5\pi$ , (a)  $U_1 = 0.1$ ,  $U_2 = -0.1$  y (b)  $a = 0.06\pi$ ,  $U_1 = 0.1$ ,  $U_2 = 0.1$  y  $U_3 = -0.1$ .

En la Fig. 30 se muestran los resultados obtenidos al variar el campo eléctrico en el condensador con los valores del potencial: (a) y (b)  $U_1 = -0.2$ ,  $U_2 = -0.2$ ,  $U_3 = 0.5$ , (c)  $U_1 = 0.7$ ,  $U_2 = -0.5$ ,  $U_3 = 0.9$ , (d)  $U_1 = -0.1$ ,  $U_2 = -0.1$ ,  $U_3 = 0.3$ , (e)  $U_1 = 1.0$ ,  $U_2 = 1.0$ ,  $U_3 = -0.6$  y (f)  $U_1 = 0.1$ ,  $U_2 = 0.4$ ,  $U_3 = -0.2$ . Los parámetros usados para modelar el condensador son: periodo  $P = 2\pi$ , longitud (a)  $L = 2\pi$  (1 periodos), (b), (c) y (e)  $L = 4\pi$  (2 periodos), (d) y (f)  $L = 10\pi$  (5 periodos). Los radios de las inclusiones son de (a)  $a = 0.10\pi$ , (b)  $a = 0.06\pi$ , (c)  $a = 0.08\pi$ , (d)  $a = 0.10\pi$ , (e)  $a = 0.10\pi$  y (f)  $a = 0.08\pi$ . En todos los casos se utilizaron 14 partículas lanzadas en las posiciones  $y = 0.5b$ .

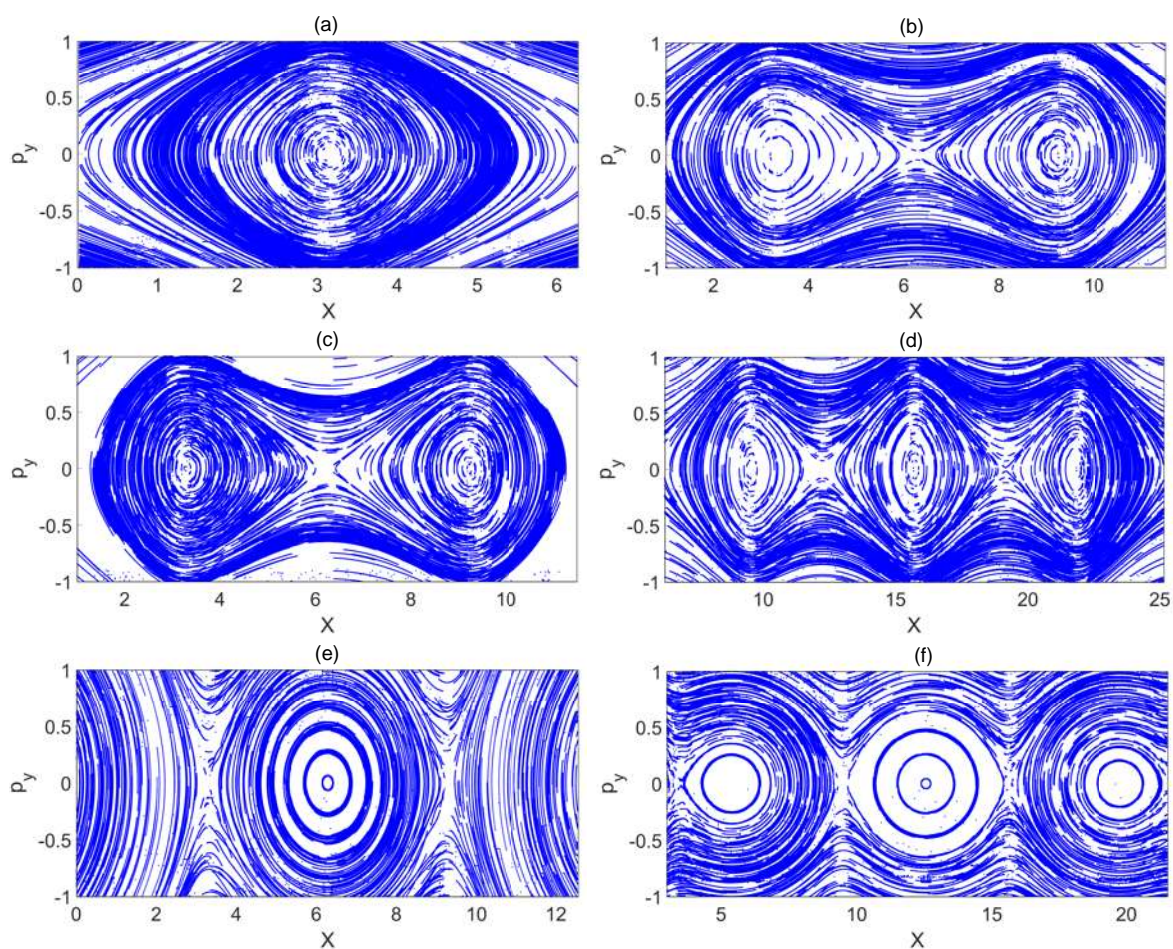


Figura 30. Mapas de Poincaré para un condensador plano con ancho  $b = 0.5\pi$  y potenciales eléctricos (a) y (b)  $U_1 = -0.2$ ,  $U_2 = -0.2$ ,  $U_3 = 0.5$ ; (c)  $U_1 = 0.7$ ,  $U_2 = -0.5$ ,  $U_3 = 0.9$ ; (d)  $U_1 = -0.1$ ,  $U_2 = -0.1$ ,  $U_3 = 0.3$ ; (e)  $U_1 = 1.0$ ,  $U_2 = 1.0$ ,  $U_3 = -0.6$  y (f)  $U_1 = 0.1$ ,  $U_2 = 0.4$ ,  $U_3 = -0.2$ .

En la Fig. 30 se puede observar que el comportamiento de las trayectorias sigue una tendencia hacia la formación de ciclos límite debido a la presencia del campo eléctrico. También, nótese que entre más grande es el radio de la inclusión, se forman órbitas elípticas y las islas se vuelven más notorias a medida que el valor del potencial es aumentado.

### Condensador con ancho $b = 0.2\pi$

Ahora vamos a hacer un análisis similar que el anterior, para un ancho  $b = 0.2\pi$  y variando el valor del potencial eléctrico y los demás parámetros. Consideremos ahora los siguientes parámetros:  $U_1 = -0.5$ ,  $U_2 = -0.5$ ,  $U_3 = 0.2$  (Fig. 31 (a));  $U_1 = 0.7$ ,  $U_2 = -0.5$ ,  $U_3 = 0.4$  (Fig. 31 (b));  $U_1 = 0.6$ ,  $U_2 = 0.5$ ,  $U_3 = -0.3$  (Fig. 31 (c));  $U_1 = 2.0$ ,  $U_2 = 2.0$ ,  $U_3 = -2.0$  (Fig. 31 (d)). Para estos casos (Fig. 31) se usó un condensador con periodo  $P = 2\pi$  y se utilizó una longitud (a)  $L = 4\pi$  (2 periodos) y 2 fuentes con 12 partículas, (b)  $L = 10\pi$  (5 periodos) y 5 fuentes con 14 partículas, (c)  $L = 8\pi$  (4 periodos) y 4 fuentes con 14 partículas y (d) 5 fuentes con 12 partículas lanzadas en un condensador con  $L = 10\pi$  (5 periodos). Para las inclusiones se consideraron los valores de (a)  $a = 0.02\pi$ , (b)  $a = 0.04\pi$ , (c)  $a = 0.018\pi$  y (d)  $a = 0.04\pi$ .

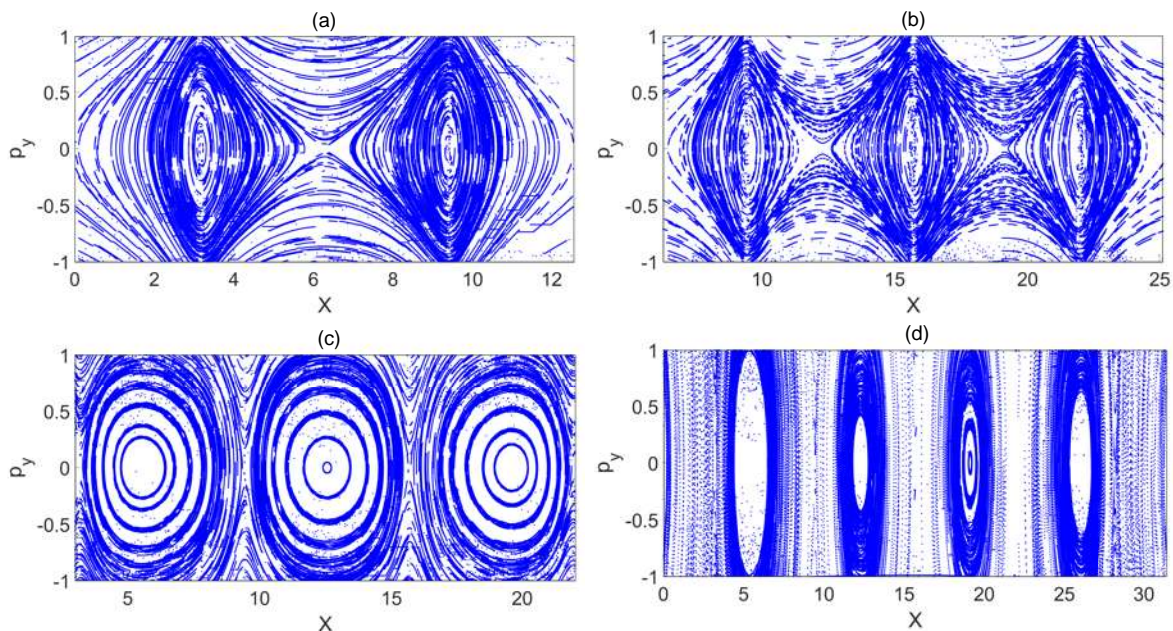


Figura 31. Mapas de Poincaré para un condensador plano con ancho  $b = 0.2\pi$  y potenciales eléctricos (a)  $U_1 = -0.5$ ,  $U_2 = -0.5$ ,  $U_3 = 0.2$ ; (b)  $U_1 = 0.7$ ,  $U_2 = -0.5$ ,  $U_3 = 0.4$ ; (c)  $U_1 = 0.6$ ,  $U_2 = 0.5$ ,  $U_3 = -0.3$  y (d)  $U_1 = 2.0$ ,  $U_2 = 2.0$ ,  $U_3 = -2.0$ .

Los resultados mostrados en la Fig. 31 nos dan a conocer que el ancho del conden-

sador y el campo eléctrico influyen mucho para la formación de órbitas elípticas (islas). A medida que se aumenta el valor del campo eléctrico los ciclos límite no se pierden solamente se hacen más grandes (ver Fig. 31 (d)) aumentando el número de partículas atrapadas en el condensador, moviéndose de un lado a otro alrededor de un punto fijo estable.

Hasta ahora, se ha hecho notorio que la variación del ancho y la variación del potencial en las superficies del condensador (ver Fig. 31) conduce a cambios notables en la dinámica de las partículas. Veamos si estos resultados se pueden mejorar disminuyendo aun más el ancho del condensador.

### **Condensador con ancho $b = 0.1\pi$**

Similarmente, vamos a presentar los resultados para la dinámica de las partículas considerando ahora un ancho más pequeño,  $b = 0.1\pi$ . En la Fig. 32 se muestran los resultados obtenidos de acuerdo a los siguientes parámetros: (a)  $U_1 = -0.3$ ,  $U_2 = -0.3$ ,  $U_3 = 0.1$  y (b)  $U_1 = -0.1$ ,  $U_2 = -0.1$ ,  $U_3 = 0.2$ . Para las inclusiones se consideraron los radios de (a)  $a = 0.014\pi$  y (b)  $a = 0.022\pi$ . En la celda del condensador se considera un periodo  $P = 2\pi$  con (a)  $L = 4\pi$  (2 periodos) donde se utilizaron 2 fuentes con 14 partículas. Mientras que en (b)  $L = 10\pi$  (5 periodos) con 5 fuentes de 12 partículas.

Por su parte, en la Fig. 33 los cálculos fueron realizados tomando en cuenta los siguientes valores para el potencial: (a)  $U_1 = 0.2$ ,  $U_2 = -0.6$ ,  $U_3 = 0.1$ , (b)  $U_1 = -0.3$ ,  $U_2 = -0.3$ ,  $U_3 = -0.1$  y (c)  $U_1 = 2.0$ ,  $U_2 = 2.0$ ,  $U_3 = -2.0$ . Las inclusiones tienen los radios de (a)  $a = 0.018\pi$ , (b)  $a = 0.02\pi$  y (c)  $a = 0.015\pi$ . Para construir las gráficas de la Fig. 33, se eligió un periodo de  $P = \pi$  para la celda del condensador. En (a) y (c) la longitud del condensador es  $L = 10\pi$  (10 periodos) donde se usaron 10 fuentes con 20 partículas, mientras que en (b)  $L = 20\pi$  (20 periodos) con 20 fuentes de 14 partículas.

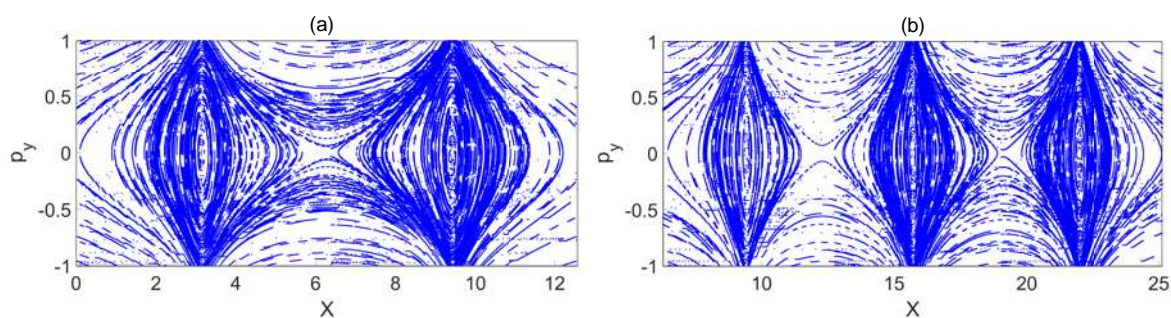


Figura 32. Mapas de Poincaré para un condensador plano con ancho  $b = 0.1\pi$  y potenciales eléctricos (a)  $U_1 = -0.3$ ,  $U_2 = -0.3$ ,  $U_3 = 0.1$  y (b)  $U_1 = -0.1$ ,  $U_2 = -0.1$ ,  $U_3 = 0.2$ .

Podemos ver de la Fig. 33, que si incrementamos el número de periodos (lo cual significa que tendremos un mayor número de colisiones) las elipses comienzan a deformarse, cubriendo una mayor región y en este caso se observan menos trayectorias cerradas.

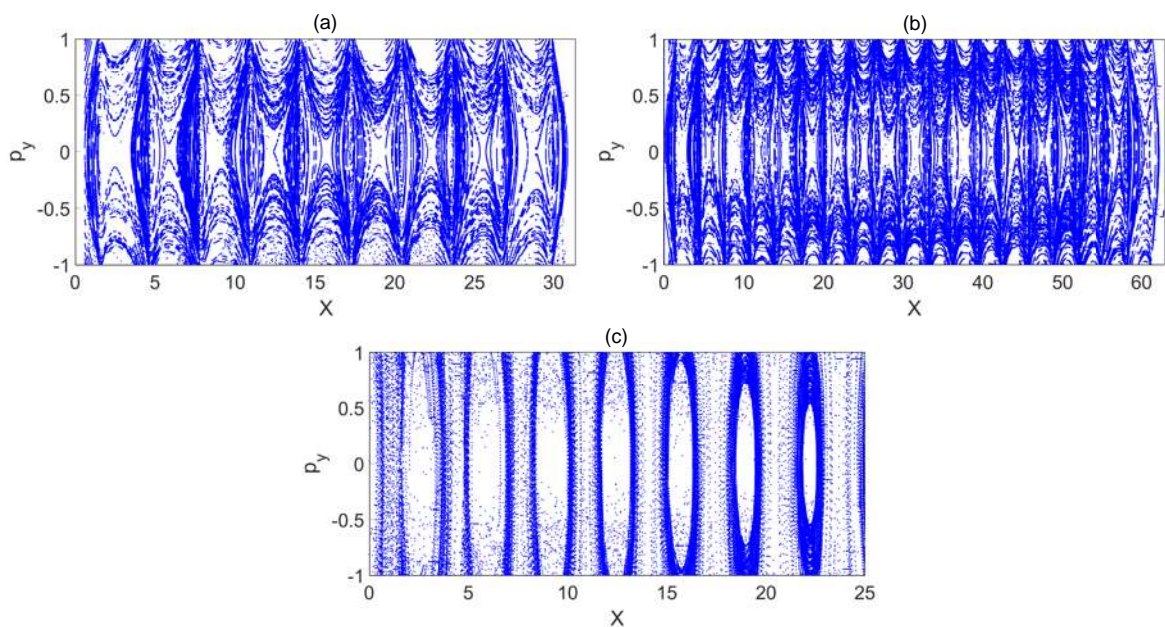


Figura 33. Mapas de Poincaré para un condensador plano con ancho  $b = 0.1\pi$  y potenciales eléctricos (a)  $U_1 = 0.2$ ,  $U_2 = -0.6$ ,  $U_3 = 0.1$ ; (b)  $U_1 = -0.3$ ,  $U_2 = -0.3$ ,  $U_3 = -0.1$  y (c)  $U_1 = 2.0$ ,  $U_2 = 2.0$ ,  $U_3 = -2.0$ .

## Capítulo V

---

### CONCLUSIONES

---

En el presente trabajo se ha mostrado un estudio numérico sobre la dinámica de las trayectorias de partículas cargadas en un condensador eléctrico, donde está establecido un campo de potencial inhomogéneo. Se analizaron los casos de superficies onduladas y periódicas y de superficies plano paralelas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares conductoras. A continuación enunciamos las conclusiones en base a los resultados obtenidos, comenzando con un breve resumen sobre las ideas principales de esta tesis.

Hemos aplicado dos métodos numéricos para determinar el comportamiento de las partículas en el condensador. Primero se implementó el IEM para calcular el potencial eléctrico presente en el condensador. Dicha técnica tiene como punto de partida el segundo teorema integral de Green, permitiendo obtener un par de ecuaciones integrales que involucran, como incógnitas la función del potencial eléctrico y su derivada normal evaluados en los elementos que definen los perfiles considerados. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial inhomogénea cuya solución determina las funciones fuente, con las que se pueden calcular el campo eléctrico. En seguida, se aplicó el FDM para determinar la trayectoria de la partícula influenciada por el campo eléctrico.

Así, una vez que se conoce el campo eléctrico, podemos conocer la trayectoria de la partícula partiendo de la segunda ley de Newton. El FDM permite poder discretizar la ecuación diferencial obtenida usando ecuaciones en diferencias finitas para aproximar las derivadas y así poder calcular de manera numérica su solución.

De acuerdo a los resultados presentados, podemos concluir lo siguiente:

- A modo de conclusión general, se puede decir que los métodos numéricos empleados permitieron realizar el análisis de los sistemas considerados.
- Los resultados obtenidos para el primer sistema permiten concluir que la dinámica de las partículas en el condensador depende de varios factores como lo son: la amplitud de la ondulación de las placas, la diferencia de fase entre éstas, el ancho del canal y la presencia del campo eléctrico. Sin embargo, encontramos que la amplitud de la ondulación en las placas, así como la diferencia de fase entre éstas son los parámetros que propician la aparición del fenómeno de caos en este sistema.
- Se observó, mediante los mapas de Poincaré que la presencia del campo eléctrico juega un papel muy importante en el comportamiento de las partículas. Gracias a la presencia de éste y su inhomogeneidad, las trayectorias tienden más a ciclos límite u órbitas elípticas. Además, encontramos que conforme la amplitud de la ondulación crece hace que el proceso de formación de órbitas elípticas para la trayectoria de las partículas sea más rápido. Similar a lo que ocurre en el sistema clásico análogo a este sistema, donde es conocido que hay una transición de una dinámica regular a una caótica conforme la amplitud de la ondulación del canal crece.
- De igual manera, los resultados preliminares encontrados para el segundo sistema

muestran que el comportamiento de las trayectorias de las partículas está asociado a la variación de parámetros tales como el ancho de canal, el tamaño de las inclusiones y por supuesto, a la presencia del campo eléctrico. Encontramos que, para anchos más pequeños los ciclos límite cambian formando órbitas elípticas más definidas. También, se encontró que a medida que el potencial eléctrico se aumenta, los ciclos límite no se pierden sino solamente se hacen más grandes.

Como trabajo futuro se espera considerar una distribución de partículas mayor en los condensadores eléctricos considerados para lograr el fenómeno de caos total. Así como tomar en cuenta la influencia de un campo magnético externo para tener un análisis más completo del fenómeno de caos electromagnético.

## Apéndice A

---

# ELEMENTOS DE MATRIZ

---

En este apéndice se obtienen las expresiones para los elementos de matriz  $L_{ij}$  y  $N_{ij}$  del IEM.

Los elementos de matriz están definidos de la forma

$$L_{ij} = \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') ds, \quad (78)$$

$$N_{ij} = \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \frac{\partial G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}')}{\partial n} ds. \quad (79)$$

Dado que  $\Delta s$  es muy pequeño, podemos sustituir la Ec. (47) en las Ecs. (78) y (79); lo cual nos permite reescribir:

$$L_{ij} \approx \left( -\frac{\Delta s}{2\pi} \right) \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j|, \quad (80)$$

$$N_{ij} \approx \left( -\frac{\Delta s}{2\pi} \right) \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \nabla \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j|. \quad (81)$$

En la Ec. (81) la normal al contorno  $\Gamma$  en el punto de integración  $\mathbf{r}'_j$  es  $\hat{\mathbf{n}}_j = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}}$ . Denotando  $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j$  y  $u_j = R_{ij} = \sqrt{(x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_j)^2}$  y expresando  $\nabla \ln(u_j)$  obtenemos a partir de la Ec. (81), las siguientes relaciones:

$$\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \nabla \ln(u_j) = \left[ n_x \frac{\partial(u_j)}{\partial x'_j} + n_y \frac{\partial(u_j)}{\partial y'_j} \right] \frac{\partial \ln(u_j)}{\partial u_j}, \quad (82)$$

$$\frac{\partial \ln(u_j)}{\partial u_j} = \frac{1}{u_j}; \quad \frac{\partial(u_j)}{\partial x'_j} = -\frac{x_i - x'_j}{R_{ij}}; \quad \frac{\partial(u_j)}{\partial y'_j} = -\frac{y_i - y'_j}{R_{ij}}. \quad (83)$$

Sustituyendo el valor de  $u_j$  y las derivadas anteriores en la Ec. (82), podemos expresar:

$$\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \nabla \ln(R_{ij}) = -\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \frac{\mathbf{R}_{ij}}{(R_{ij})^2}. \quad (84)$$

Entonces, las Ecs. (80) y (81) se transforman en:

$$L_{ij} \approx \left(-\frac{\Delta s}{2\pi}\right) \ln(R_{ij}), \quad (85)$$

$$N_{ij} \approx \left(\frac{\Delta s}{2\pi}\right) \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \frac{\mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^2}. \quad (86)$$

Como la función de Green posee una singularidad removible en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , esto nos permite que las integrales dadas por las Ecs. (78) y (79) pueden determinarse mediante un proceso límite:

$$L_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} G(\mathbf{r}_i + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{r}') ds, \quad (87)$$

$$N_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \frac{\partial G(\mathbf{r}_i + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{r}')}{\partial n} ds. \quad (88)$$

## A.1. Elementos no diagonales

En el caso de elementos fuera de la diagonal ( $i \neq j$ ), los integrandos no poseen singularidades dentro del rango de integración. Para estos elementos pueden intercambiarse indistintamente de orden entre la aplicación del límite y la evaluación de la integral. Por ende, puede tomarse directamente el límite correspondiente dentro de la integral. Entonces, se toma en cuenta que el intervalo de integración es suficientemente pequeño y por lo tanto, podemos representar la integral por una simple aproximación rectangular. Por lo tanto:

$$L_{ij} = \left(-\frac{\Delta s}{2\pi}\right) \ln(R_{ij}), \quad (89)$$

$$N_{ij} = \left(\frac{\Delta s}{2\pi}\right) \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \frac{\mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^2}. \quad (90)$$

## A.2. Elementos diagonales

Para los elementos matriciales  $L_{ij}$  y  $N_{ij}$  que conforman la diagonal principal ( $i = j$ ), se requiere un tratamiento especial ya que el integrando posee una singularidad en el punto medio del intervalo de integración. Sobre las Ecs. (87) y (88) se efectúa el cambio de variable,  $u = s - s_j$ , cuyo diferencial es  $du = ds$ . Obtenemos que,

$$L_{jj} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} \left( -\frac{1}{2\pi} \right) \ln |\mathbf{r}_j + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}_j - \mathbf{r}'(u + s_j)| du, \quad (91)$$

$$N_{jj} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} \left( -\frac{1}{2\pi} \right) \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \nabla \ln |\mathbf{r}_j + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}_j - \mathbf{r}'(u + s_j)| du. \quad (92)$$

Dentro de la pequeña vecindad  $\Delta s$ ; el elemento  $\mathbf{r}'(u + s_j)$  varía alrededor del punto  $s_j$ . Utilizando el desarrollo en expansión de la serie de Taylor para dicho elemento:

$$\mathbf{r}'(u + s_j) = \mathbf{r}_j + \left. \frac{d\mathbf{r}'}{ds} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_j} u + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{r}'}{ds^2} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_j} u^2 + \dots \quad (93)$$

Expresando el vector unitario  $\hat{\mathbf{t}}_j$  tangente al contorno en el punto  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_j$ , así como su primera derivada,  $\hat{\mathbf{t}}'_j$ , en la forma:

$$\hat{\mathbf{t}}_j = \left. \frac{d\mathbf{r}'}{ds} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_j}, \quad (94)$$

$$\hat{\mathbf{t}}'_j = \left. \frac{d^2\mathbf{r}'}{ds^2} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_j}. \quad (95)$$

De esta forma se puede reescribir el vector de integración  $\mathbf{r}'(u + s_j)$  en términos de las Ecs. (94) y (95) como:

$$\mathbf{r}'(u + s_j) = \mathbf{r}_j + \hat{\mathbf{t}}_j u + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{t}}'_j u^2 + \dots \quad (96)$$

Sustituyendo términos hasta de primer orden de la Ec. (96) en la Ec. (91), tenemos:

$$L_{jj} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} \left( -\frac{1}{2\pi} \right) \ln |\varepsilon \hat{\mathbf{n}}_j - \hat{\mathbf{t}}_j u| du. \quad (97)$$

Además, dado que

$$|\varepsilon \hat{\mathbf{n}}_j - \hat{\mathbf{t}}_j u| = \sqrt{(\varepsilon \hat{\mathbf{n}}_j - \hat{\mathbf{t}}_j u) \cdot (\varepsilon \hat{\mathbf{n}}_j - \hat{\mathbf{t}}_j u)}, \quad (98)$$

podemos evaluar el límite de la Ec. (97), para pequeños argumentos de la función de Green, de donde obtenemos:

$$L_{jj} = \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} \left( -\frac{1}{2\pi} \right) \ln |u| du = -\frac{\Delta s}{2\pi} \ln \left( \frac{\Delta s}{2e} \right). \quad (99)$$

Mediante un razonamiento análogo, es posible calcular los elementos de matriz  $N_{jj}$  a partir de la Ec. (84) considerando el formalismo de la Ec. (93) hasta términos de primer orden,

$$\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \nabla \ln |\mathbf{r}_j + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}_j - \mathbf{r}'(u + s_j)| = \frac{\varepsilon - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{t}}'_j u^2}{|\varepsilon^2 + u^2|^2}. \quad (100)$$

Tomando el resultado de la Ec. (100) y aplicándolo en la Ec. (92), obtenemos:

$$\begin{aligned} N_{jj} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} \left( -\frac{1}{2\pi} \right) \frac{\varepsilon - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{t}}'_j u^2}{|\varepsilon^2 + u^2|^2} du \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\Delta s}{2}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + u^2} du + \frac{1}{2\pi} (\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{t}}'_j) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\Delta s}{2}} \frac{u^2}{\varepsilon^2 + u^2} du \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arctan \left( \frac{\Delta s}{2\varepsilon} \right) + \frac{1}{2\pi} (\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{t}}'_j) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta s}{2} - \varepsilon \arctan \left( \frac{\Delta s}{2\varepsilon} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} (\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{t}}'_j). \end{aligned} \quad (102)$$

De manera explícita, recurriendo a las Ecs. (89), (90), (99) y (102) podemos reescribir nuevamente los elementos  $L_{ij}$  y  $N_{ij}$ ; en función de la delta de Kronecker  $\delta_{ij}$ :

$$L_{ij} = \left( -\frac{\Delta s}{2\pi} \right) \ln(R_{ij})(1 - \delta_{ij}) - \frac{\Delta s}{2\pi} \ln \left( \frac{\Delta s}{2e} \right) \delta_{ij}, \quad (103)$$

$$N_{ij} = \left( \frac{\Delta s}{2\pi} \right) \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \frac{\mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^2} (1 - \delta_{ij}) + \left( \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} (\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{t}}'_j) \right) \delta_{ij}, \quad (104)$$

donde

$$R_{ij} = \sqrt{(x_i - y_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (105)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \mathbf{R}_{ij} = -y'(s)(x_i - y_j) + x'(s)(y_i - y_j), \quad (106)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{t}}'_j = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s). \quad (107)$$

Asimismo, en las Ecs. (106) y (107) hemos definido  $x'_j(s) = x'(s)|_{s=s_j}$ ,  $x''_j(s) = x''(s)|_{s=s_j}$ , y así sucesivamente.

## Referencias

- Arfken, G. B., Weber, H. J., and Harris, F. E. (2012). *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, USA, seventh edition. 461-463.
- Broer, H. and Takens, F. (2009). *Dynamical Systems and Chaos*, Vol. 172. Springer-Verlag, New York Inc. 52-53 pp.
- Chen, G. and Ueta, T. (2002). Chaos in circuits and systems. *World Scientific Publishing.*, **11**: 656.
- Diggins, J., Ralph, J. F., Spiller, T. P., Clark, T. D., Prance, H., and Prance, R. J. (1994). Chaotic dynamics in the rf superconducting quantum-interference-device magnetometer: a coupled quantum-classical system. *Physical Review E*, **49**(3): 1854–1859.
- Doya, V., Legrand, O., and Mortessagne, F. (2002). Light scarring in an optical fiber. *Physical Review Letters*, **88**: 14102–14105.
- Elliott, E. and Kiel, L. D. (1996). *Chaos Theory in the Social Sciences: Foundations and Applications*. University of Michigan Press, USA, first edition.
- Gleick, J. (1987). *Chaos: Making a New Science*. Viking, New York, first edition. 360 pp.
- Grassi, G. (2021). Chaos in the real world: Recent applications to communications, computing, distributed sensing, robotic motion, bio-impedance modelling and encryption systems. *Symmetry*, **13**: 2151.
- Herrera-González, I. F., Arroyo-Correa, G., Suarez, A., and Tututi, E. (2011). Study of the resistivity in a channel with dephased ripples. *International Journal of Modern Physics B*, **25**(5): 683–698.
- Hilborn, R. C. (2004). *Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, USA, second edition.
- Kathleen, T. A., Tim, D. S., and James, A. Y. (1997). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York Inc, first edition.
- Kyrtsou, C. and Vorlow, C. (2005). Complex dynamics in macroeconomics: A novel approach. in: *New trends in macroeconomics*. *Springer Verlag, Berlin*.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, **20**(2): 130–141.

- Luna-Acosta, G. A., Krokhn, A. A., Rodriguez-Meza, M. A., and Hernández-Tejeda, P. H. (1996). Classical chaos and ballistic transport in a mesoscopic channel. *Physical review B*, **54**(16): 11410–11416.
- Maruskin, J. M. (2018). *Dynamical Systems and Geometric Mechanics: An Introduction*. De Gruyter, MZ Inc., USA, second edition. 113 pp.
- May, R. and Mclean, A. (2007). *Theoretical Ecology: Principles and Applications*. Oxford University Press, New York, third edition.
- Mendoza-Suárez, A. and Villa-Villa, F. (2010). Integral method for a capacitance microscope that is based on cylindrical metallic surfaces. *Progress In Electromagnetics Research B*, **21**: 203–218.
- Mendoza-Suárez, A., Pérez-Aguilar, H., and Villa-Villa, F. (2011). Optical response of a perfect conductor waveguide that behaves as a photonic crystal. *Progress In Electromagnetics Research*, **121**: 433–452.
- Moysis, L., Butusov, D. N., Tutueva, A., Ostrovskii, V., Kafetzis, I., and Volos, C. (2022). Introducing chaos and chaos based encryption applications to university students-case report of a seminar. *In Proceedings of the 2022 11th International Conference on Modern Circuits and Systems Technologies (MOCASST)*. pages 1-6.
- Núñez, R. (2006). Comunicador experimental privado basado en encriptamiento caótico. *Revista mexicana de física*, **52**(3): 285–294.
- Park, H., Park, J., Lim, A., Anderson, E., Alivisatos, A., and McEuen, P. (2000). Nanomechanical oscillations in a single-c60 transistor. *Nature*, **407**: 57–60.
- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E., and Herrera-González, I. F. (2013a). Chaotic behavior of a quantum waveguide. *Physica B: Condensed Matter*, **411**: 93–98.
- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E., and Herrera-González, I. F. (2013b). Disordered field patterns in a waveguide with periodic surfaces. *Progress In Electromagnetics Research B*, **48**: 329–346.
- Rojas-Sánchez, A. (2015). *Comportamiento caótico de partículas cargadas en un condensador de placas onduladas*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH.
- Strogatz, S. H. (2001). *Non linear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Press, USA, first edition. 505 pp.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, second edition. 123-124 pp.