



Universidad Nacional
Autónoma de México y
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias
Matemáticas UMSNH-UNAM

El anillo de Witt y sus módulos

TESINA

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

Félix Alejandro Medina Lugo

Asesor:

Dr. Daniel Juan Pineda

Morelia, Michoacán, México
Marzo, 2021

A mis padres

Índice de contenido

1	Anillos binomiales	5
1.1	Anillos numéricos	5
1.2	Transferencia binomial	7
1.3	Anillos binomiales finitamente generados	8
2	Vectores de Witt	8
2.1	El anillo $\Lambda(R)$	8
2.2	Vectores de Witt	10
3	K-teoría	12
3.1	Construcción Q de Quillen para una categoría exacta.	12
3.2	Construcción QQ y el morfismo de Whitehead	14
4	El módulo $NK_*(A)$	16
4.1	$\text{End}_0(R)$	16
4.2	$\text{Nil}_0(R)$	18
4.3	$NK_*(A)$	18

Resumen

Nuestro objetivo es definir la estructura de los anillos de Witt y la de sus módulos $NK_*(A)$ provenientes de endomorfismos nilpotentes. Comenzaremos definiendo los anillos binomiales para poder entender un poco el comportamiento de algunos anillos de Witt, pasamos luego a definir los anillos de Witt generalizados como series de potencias y como vectores, además de la equivalencia de estas definiciones.

Para entender los módulos NK_* , debemos hablar primero de K -teoría algebraica, hablaremos de la construcción de Quillen de K -teoría superior para categorías y la estructura de módulo que surge a partir de un funtor biexacto. Por último, nos enfocamos especialmente en la categoría de endomorfismos de módulos proyectivos finitamente generados sobre un anillo R , su interacción con el anillo de Witt $W(R)$ y mostramos el teorema de los $NK_i(A)$ que nos dice: si el grupo abeliano $NK_i(A)$ es no cero, entonces es infinitamente generado.

Keywords— *Anillos, Witt, Módulos, K -teoría superior, Quillen*

Abstract

Our objective is to define the structure of Witt Rings and their modules $NK_*(A)$ defined from nilpotent endomorphisms. We will start by defining Binomial rings in order to understand a little of the behavior of some Witt rings, then we will define generalized Witt rings as power series and as vectors, in addition to the equivalence of these definitions.

To understand NK_* modules, we must first talk about K -algebraic theory, we will talk about Quillen's construction of higher K theory for categories and the module structure that arises from a biexact functor.

Lastly, we focus especially on the category of endomorphisms of finitely generated projective modules on a ring R , its interaction with the Witt ring $W(R)$ and we show the theorem of $NK_i(A)$ that says: if the abelian group $NK_i(A)$ is nonzero, then it is infinitely generated.

1 Anillos binomiales

Nuestro primer objetivo es el entender un poco sobre el tipo de anillos con el que trabajaremos más adelante. Las demostraciones y teoremas auxiliares de esta sección pueden encontrarse en [Xantcha, 2011, 12].

1.1 Anillos numéricos

1.1.1 Definición. Sea R un anillo conmutativo con unidad libre de \mathbb{Z} -torsión. Decimos que R es un anillo binomial si la operación

$$r \mapsto \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}$$

es cerrada para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.1.2 Definición. Sea R un anillo conmutativo y con unidad, decimos que R es un anillo numérico si este cuenta con una operación llamada coeficientes binomiales denotada por $r \mapsto \binom{r}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ y sujeta a los axiomas:

$$\text{I } \binom{a+b}{n} = \sum_{p+q=n} \binom{a}{p} \binom{b}{q}.$$

$$\text{II } \binom{ab}{n} = \sum_{m=0}^n \binom{a}{m} \left(\sum_{\substack{q_1+\cdots+q_m=n \\ q_i \geq 1}} \binom{b}{q_1} \cdots \binom{b}{q_m} \right).$$

$$\text{III } \binom{a}{m} \binom{a}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{m+k} \binom{m+k}{n} \binom{n}{k}.$$

$$\text{IV } \binom{1}{n} = 0 \text{ si } n \geq 2.$$

$$\text{V } \binom{a}{0} = 1 \text{ y } \binom{a}{1} = a.$$

1.1.3 Observación. Sea R un anillo numérico y sea $m \in R$ un múltiplo de la unidad. Entonces

$$\binom{m \cdot 1}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}.$$

Podemos observar ésto a partir de los axiomas I, IV, V y usando inducción.

Nuestro primer objetivo será el observar que los anillos numéricos y los anillos binomiales coinciden.

1.1.4 Ejemplo. Sea F una \mathbb{Q} -álgebra, definimos los coeficientes binomiales de la manera usual $\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}$.

1.1.5 Ejemplo. Sea $m \in \mathbb{Z}$, entonces el localizado $\mathbb{Z}[m^{-1}]$ es numérico. Este anillo hereda sus coeficientes binomiales de \mathbb{Q} , falta verificar la cerradura. Tenemos que

$$\binom{\frac{a}{k}}{n} = \frac{\frac{a}{k}(\frac{a}{k}-1)\cdots(\frac{a}{k}-n+1)}{n!} = \frac{a(a-k)\cdots(a-(n-1)k)}{n!k^n}$$

por lo que basta probar que si $p^i \mid n!$ y $p \nmid k$ entonces

$$p^i \mid (a+k)(a+2k)\cdots(a+nk).$$

Como $p \nmid k$, se tiene que $\text{mcd}(p^i, k) = 1$, o bien que x es un generador de \mathbb{Z}_{p^i} con $k \equiv x \pmod{p^i}$. Como x es un generador de \mathbb{Z}_{p^i} , existe $0 \leq d < p^i - 1$ tal que $dx \equiv p^i - a \pmod{p^i}$, entonces $p^i \mid a + dk$.

1.1.6 Teorema. *Las siguientes ecuaciones son válidas en los anillos numéricos:*

1. $\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}$ si $r \in \mathbb{Z}$.
2. $n! \binom{r}{n} = r(r-1)\cdots(r-n+1)$.
3. $n \binom{r}{n} = (r-n+1) \binom{r}{n-1}$.

1.1.7 Teorema. *Si R es un anillo numérico, entonces R es libre de \mathbb{Z} -torsión.*

1.1.8 Teorema. *Los anillos binomiales y anillos numéricos coinciden.*

Demostración. Sea R un anillo binomial, definiendo los coeficientes binomiales mediante la operación particular de los anillos binomiales, se verifica fácilmente que cumple con los axiomas de anillo numérico.

Sea S un anillo numérico, entonces S es libre de \mathbb{Z} -torsión y sus coeficientes binomiales cumplen que

$$n! \binom{r}{n} = r(r-1)\cdots(r-n+1)$$

y por lo tanto $\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}$.

■

En \mathbb{Z} existe una fórmula para coeficientes binomiales iterados

$$\binom{\binom{r}{m}}{n} = \sum_{k=1}^{mn} g_k \binom{r}{k} \quad (1)$$

donde g_k son enteros únicos tales que la fórmula es válida para todo $r \in \mathbb{Z}$, aunque no se han encontrado aun formulas reducidas para el caso más general.

Notemos que (1) es una identidad polinomial con coeficientes racionales, por lo que se cumple en cualquier \mathbb{Q} -algebra y por lo tanto en cualquier anillo binomial.

Utilizando el hecho de que $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ podemos definir polinomios binomiales

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

donde el grado del polinomio es n y sus coeficientes son racionales y así podemos darle significado al simbolo $\binom{n}{k}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De esta forma, podemos pasar del teorema del binomio usual al teorema del binomio de newton generalizado, por ejemplo

$$(1+x)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1}x + \binom{-1}{2}x^2 + \cdots = 1 - x + x^2 - \cdots$$

1.2 Transferencia binomial

1.2.1 Definición. Sea X un conjunto, definimos el anillo $\mathbb{Z}\left(\begin{smallmatrix} X \\ - \end{smallmatrix}\right)$ como el algebra libre basada en X con los axiomas de anillo conmutativo con unidad y los de anillos numéricos.

1.2.2 Teorema. *Existe un isomorfismo*

$$\mathbb{Z}\left(\begin{smallmatrix} X \\ - \end{smallmatrix}\right) \cong \{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f(\mathbb{Z}^{\mathbb{X}}) \subseteq \mathbb{Z}\}$$

para el anillo binomial libre con base en X .

1.2.3 Teorema. *Cualquier identidad binomial polinomial universalmente válida en \mathbb{Z} es válida en cualquier anillo binomial.*

1.3 Anillos binomiales finitamente generados

1.3.1 Teorema. (Teorema de estructura)

Sea R un anillo binomial finitamente generado, existen enteros únicos libres de cuadrados m_1, \dots, m_k tales que

$$R \cong \mathbb{Z}[m_1^{-1}] \times \cdots \times \mathbb{Z}[m_k^{-1}].$$

1.3.2 Teorema. Sea M un módulo sobre un anillo binomial, supongamos que M es libre de \mathbb{Z} -torsión y finitamente generado sobre $\mathbb{Z}[n^{-1}]$ con $n \in \mathbb{Z}$. Entonces existen enteros positivos m_j, r_j tales que

$$M \cong \mathbb{Z}[m_1^{-1}]^{r_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[m_k^{-1}]^{r_k}$$

como $\mathbb{Z}[m_1^{-1}] \times \cdots \times \mathbb{Z}[m_k^{-1}]$ -módulo.

2 Vectores de Witt

Nos basamos en las definiciones y construcciones realizadas en [Hazewinkel, 2008] y [Weibel, 1981] para entender un poco la estructura de los anillos de Witt.

2.1 El anillo $\Lambda(R)$

2.1.1 Definición. Sea R un anillo conmutativo con unidad, definimos

$$\Lambda(R) = 1 + tR[[t]] = \{1 + a_1t + a_2t^2 + \cdots \mid a_i \in R\}$$

y notemos que $\Lambda(R)$ tiene estructura de grupo abeliano bajo el producto de series. Sea $\alpha : R \rightarrow S$ morfismo de anillos, definimos entonces $\Lambda(\alpha)$ mediante

$$\Lambda(\alpha)(1 + a_1t + a_2t^2 + \cdots) = 1 + \alpha(a_1)t + \alpha(a_2)t^2 + \cdots$$

de manera que tenemos un funtor Λ entre las categorías de anillos conmutativos con unidad y la categoría de grupos abelianos.

2.1.2 Observación. Podemos identificar la serie $1 + a_1t + a_2t^2 + \cdots$ con el vector (a_1, a_2, \dots) y a su vez, podemos identificar este vector con un morfismo $\varphi_f : \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots] \rightarrow R$ con $\varphi_f(h_i) = a_i$, de manera que el funtor Λ es representable mediante $\mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$.

La suma en $\Lambda(R)$ define entonces un coproducto en $\mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$ mediante $h_n \mapsto$

$$\sum_{i+j=n} h_i \otimes h_j \text{ con la convención } h_0 = 1.$$

Para hablar de vectores de Witt es conveniente hablar de los componentes fantasmas

2.1.3 Definición. Definimos el mapeo fantasma $\text{gh} : \Lambda(R) \rightarrow \prod_1^\infty R$ como

$$\text{gh}(f) = \text{gh}(a_1, a_2, a_3, \dots) = \text{gh}_1 t + \text{gh}_2 t^2 + \text{gh}_3 t^3 + \dots = t \frac{d}{dt} \log(f(t)) = \frac{t f'(t)}{f(t)}.$$

2.1.4 Observación. Por las propiedades del logaritmo definido formalmente

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

son tales que $\log(fg) = \log(f) + \log(g)$, tenemos entonces que la suma en $\Lambda(R)$ corresponde con la suma coordenada a coordenada de los componentes fantasmas.

Pensemos ahora que los a_i son polinomios simétricos elementales en un conjunto de elementos $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$, es decir

$$a_i = h_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$$

donde $h_i(X)$ son los polinomios simétricos elementales en las variables conmutativas X_1, X_2, X_3, \dots , o bien

$$h_i(X) = \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_n} X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_n}.$$

De esta manera, podemos escribir las series de potencia como

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \xi_j t)} = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = f(t)$$

y así, escribimos los componentes fantasmas en terminos de ξ_j

$$\begin{aligned} \text{gh}_1 t + \text{gh}_2 t^2 + \text{gh}_3 t^3 &= t \frac{d}{dt} \log(f(t)) = t \frac{d}{dt} \sum_i \log((1 - \xi_i t)^{-1}) \\ &= -t \frac{d}{dt} \sum_i \left(-\xi_i t - \frac{\xi_i^2 t^2}{2} - \frac{\xi_i^3 t^3}{3} - \dots \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_1^j + \xi_2^j + \xi_3^j + \dots) t^j. \end{aligned}$$

Buscamos ahora dar una multiplicación para $\Lambda(R)$, consideremos los representantes de Teichmüller $1+xt+(xt)^2+\dots+(1-xt)^{-1}$ de $x \in R$, los cuales son multiplicativos. Así, la distributividad y functorialidad fuerzan a que la multiplicación en $\Lambda(R)$ de $f(t) = \prod_i(1 - \xi_i t)^{-1}$ y $g(t) = \prod_i(1 - \eta_i t)^{-1}$ sea

$$(f * g)(t) = \prod_{i,j} (1 - \xi_i \eta_j t)^{-1}.$$

Notemos que $\prod_{i,j} (1 - \xi_i \eta_j t)^{-1}$ es simétrica en ξ_i y en η_i lo que nos daría entonces una serie con coeficientes simétricos tanto en ξ_i como en η_i , es decir, son los polinomios universales en los coeficientes de f y g . El neutro multiplicativo sería entonces

$$1 + t + t^2 + \dots = (1 - t)^{-1}.$$

Veamos como funciona la multiplicación en los componentes fantasmas

$$t \frac{d}{dt} \log \left(\prod_{i,j} (1 - \xi_i \eta_j t)^{-1} \right) = \sum_{i,j} ((\xi_i \eta_j) t + (\xi_i \eta_j)^2 t^2 + (\xi_i \eta_j)^3 t^3 + \dots).$$

Vemos entonces que la multiplicación en $\Lambda(R)$ se traduce en multiplicación componente a componente para los componentes fantasmas. Luego, la asociatividad y distributividad de la multiplicación se siguen de functorialidad.

2.2 Vectores de Witt

2.2.1 Definición. Sea R un anillo conmutativo con unidad, definimos el conjunto

$$W(R) = R^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in R\}$$

y una biyección functorial $e_R : W(R) \rightarrow \Lambda(R)$ entre conjuntos

$$e_R(x_1, x_2, x_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x_n t^n)^{-1}$$

para transferir la estructura de anillo de $\Lambda(R)$ a $W(R)$. A este anillo lo llamamos el anillo de Witt.

2.2.2 Observación. Calculemos los componentes fantasmas de un vector de Witt $(x_1, x_2, \dots) \in W(R)$, es decir, calcular $\text{gh}_n(e_R(X))$.

$$\begin{aligned} t \frac{d}{dt} \log \left(\prod_d (1 - x_d t^d)^{-1} \right) &= t \frac{d}{dt} \sum_d \left(\sum_m m^{-1} (x_d t^d)^m \right) \\ &= \sum_{d,m} dx_d^m t^{dm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d|m} dx_d^{m/d} t^m. \end{aligned}$$

De esta forma, los componentes fantasmas del funtor W están dados por los polinomios generalizados $\text{gh}_n(e_R(X_1, X_2, \dots)) = \sum_{d|n} dX_d^{n/d}$.

Veamos el producto en unas series particulares, sea $d = \text{mcd}(m, n)$, entonces

$$(1 - xt^m) - (1 - yt^n) = (1 - x^{n/d}y^{m/d}t^{mn/d})^d.$$

2.2.3 Observación. Notemos también que gh visto como un morfismo de $W(R)$ a $\prod_1^\infty R$, con la identificación $\sum a_n t^n \leftrightarrow (a_1, a_2, \dots)$ es un morfismo de anillos, por ejemplo $\text{gh}(1 - t)^n = (n, n, n, \dots)$. Además, si R es libre de Z -torsión, gh es inyectivo, más aún, si $\mathbb{Q} \subsetneq R$ tenemos que gh es de hecho un isomorfismo.

2.2.4 Proposición. *Sea R un anillo binomial, entonces el morfismo $\lambda_t : R \rightarrow W(R)$ definido por*

$$\lambda_t(r) = (1 - t)^r = 1 - rt + \binom{r}{2}t^2 - \binom{r}{3}t^3 + \dots$$

es un morfismo de anillos inyectivo.

Demostración. Consideremos $\text{gh}(\lambda_t(r)) = (r, r, \dots)$, como R es binomial es libre de Z -torsión y $\binom{r}{N} \in R$. Como $\text{gh}(\lambda_t(r))$ es inyectivo, λ_t resulta inyectivo. ■

2.2.5 Definición. Para realizar cálculos más específico, nos conviene introducir algunos endomorfismos en $W(R)$:

1. La homotecia $[r] : W(R) \rightarrow W(R)$ definida por $[r](\alpha(t)) = \alpha(rt)$.
2. El morfismo de Verschiebung V_m definido por $V_m(\alpha(t)) = \alpha(t^m)$.
3. El morfismo de Frobenius F_m que se define como

$$F_m(\alpha(t)) = \sum_{\zeta^m=1} \alpha(\zeta t^{1/m}).$$

Notemos que $F_m(\lambda_t(r)) = \lambda_t(r)$, pues la suma en $W(R)$ es el producto usual de series de potencias.

Para cada $\alpha(t) \in W(R)$, tenemos que se escribe de manera única como el producto $\prod (1 - r_m t^m)$, así, podemos ver la multiplicación por $\alpha(t)$ como el endomorfismo $\sum V_m[r_m]F_m$.

2.2.6 Definición. Los subgrupos $I_N = 1 + t^N R[[T]]$ de $W(R)$ son de hecho ideales. Con esto podemos darle una topología a $W(R)$ mediante la completación I -ádica, llamamos a esta topología la topología t -ádica y llamamos vectores de Witt truncados a los anillos cocientes $W_N(R) = W(R)/I_{N+1}$.

Se recomienda consultar [Atiyah and MacDonald, 1994] para detalles sobre el concepto de completación I -ádica.

3 K-teoría

Definiremos algunos conceptos de K -teoría superior y una construcción para los K grupos en general.

3.1 Construcción Q de Quillen para una categoría exacta.

Para detalles sobre esta construcción, consultar [Weibel, 2013].

3.1.1 Definición. Sea \mathcal{A} una categoría, definimos la categoría $Q\mathcal{A}$ cuyos objetos son los mismos de \mathcal{A} y un morfismo $A \rightarrow B$ es una clase de equivalencia de diagramas

$$A \xleftarrow{j} B_1 \xrightarrow{i} B \tag{2}$$

donde j es un epimorfismo admisible e i es un monomorfismo admisible, es decir, existe j' tal que j es cokernel de j' y j' es kernel de j y existe i' tal que i' es cokernel de i e i es kernel de i' .

Diremos que dos diagramas de esta forma son equivalentes si existe un isomorfismo entre ellos que es la identidad en A y en B .

Para la composición del morfismo anterior con $B \leftarrow C_2 \rightarrow C$ consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \rightarrow & C_2 & \rightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \leftarrow & B_1 & \rightarrow & B \end{array}$$

donde $C_1 = B_1 \times_B C_2$ es el pullback. Tenemos dos morfismos distinguidos en $Q\mathcal{A}$, los monomorfismos $A \rightarrow B$ (con $B_1 = A$) y los epimorfismos $A \leftarrow B$ (con $B_1 = B$). Luego, la composición en $Q\mathcal{A}$ de los morfismos $A \leftarrow B_1$ y $B_1 \rightarrow B$ es precisamente (2) y cada morfismo en $Q\mathcal{A}$ puede factorizarse de esta forma de manera única hasta isomorfismo.

Consideramos ahora el espacio clasificante BQA como un espacio topológico cuyo punto base es el vértice correspondiente al objeto 0. De hecho, BQA es un complejo CW conexo pues el morfismo $0 \twoheadrightarrow A$ en QA nos da caminos en BQA desde el punto base 0 a todo vértice A . El morfismo $0 \leftarrow A$ también funciona.

3.1.2 Definición. Sea \mathcal{A} una categoría pequeña exacta. Denotamos por $K\mathcal{A}$ al espacio de lazos ΩBQA y definimos los grupos abelianos para $n \geq 0$

$$K_n(\mathcal{A}) = \pi_n(K\mathcal{A}) = \pi_{n+1}(BQA).$$

Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es un funtor exacto, éste induce un funtor $QA \rightarrow QB$ que a su vez induce morfismos $BQA \rightarrow BQB$ y $K_n(\mathcal{A}) \rightarrow K_n(\mathcal{B})$, por lo que los espacios $K\mathcal{A}$ y los grupos K_n son funtores de categorías exactas y funtores exactos a espacios topológicos y grupos abelianos.

Además, funtores isomorfos inducen el mismo morfismo en K -grupos pues inducen funtores isomorfos $QA \rightarrow QA'$.

3.1.3 Observación. Si la categoría exacta \mathcal{A} no es pequeña pero tiene un conjunto de clases de isomorfismos, definimos $K_n\mathcal{A}$ como $K_n\mathcal{A}'$ donde \mathcal{A}' es una subcategoría pequeña equivalente a \mathcal{A} .

Los grupos $K_n(\mathcal{A})$ son independientes de la elección de \mathcal{A}' , se puede demostrar que si \mathcal{A} y \mathcal{B} son categorías equivalentes, entonces QA y QB son equivalentes, si nuestras categorías iniciales son pequeñas, entonces los K -grupos son isomorfos para todo n .

3.1.4 Definición. Sea R un anillo con unidad y $\mathbf{P}(R)$ la categoría de R -módulos proyectivos finitamente generados, entonces definimos

$$K_n(R) = K_n(\mathbf{P}(R)).$$

Sea \mathcal{A} una categoría exacta pequeña, usualmente se define $K_0(\mathcal{A})$ como el grupo abeliano con generadores $[A]$ para cada objeto $A \in \mathcal{A}$ y relaciones $[A] = [B] + [C]$ para cada sucesión exacta corta $0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$ en \mathcal{A} .

3.1.5 Teorema. *Consideremos la definición usual de $K_0(\mathcal{A})$, tenemos que el espacio BQA es un complejo CW conexo con $\pi_1(BQA) \cong K_0(\mathcal{A})$. El elemento $[A] \in K_0(\mathcal{A})$ es representado en $\pi_1(BQA)$ por el lazo asociado a*

$$0 \twoheadrightarrow A \twoheadrightarrow 0.$$

Demostración. Sea T la familia de morfismos $0 \twoheadrightarrow A$ en QA . Cada vértice no cero solo aparece una vez, por lo que T es un árbol maximal y así $\pi_1(BQA)$ tiene la siguiente presentación [Weibel, 2013, Cap 4, 3.4]: generado por los morfismos

en $Q\mathcal{A}$ con relaciones $[0 \rightrightarrows A] = 1$ y $[f][g] = [f \circ g]$ siempre que f y g puedan componerse en $Q\mathcal{A}$. Además, un morfismo de A a B se representa en $\pi_1(BQ\mathcal{A})$ con el lazo

$$0 \rightrightarrows A \rightrightarrows B \leftarrow 0.$$

La composición $0 \rightrightarrows B_1 \rightrightarrows B$ está en T por lo que $[B_1 \rightrightarrows B] = 1$ en $\pi_1(BQ\mathcal{A})$, entonces $[A \leftarrow B_1 \rightrightarrows B] = [A \leftarrow B_1]$. Luego, de la composición $0 \leftarrow A \leftarrow B_1$ obtenemos que $[A \leftarrow B_1][0 \leftarrow A] = [0 \leftarrow B_1]$. Como los morfismos en $Q\mathcal{A}$ se factorizan en los morfismos distinguidos, tenemos que $\pi_1(BQ\mathcal{A})$ es generado por los morfismos $[0 \leftarrow A]$.

Sea $A \rightrightarrows B \rightrightarrows C$ una sucesión exacta en \mathcal{A} , la composición $0 \rightrightarrows C \leftarrow B$ en $Q\mathcal{A}$ es $0 \leftarrow A \rightrightarrows B$, por lo que tenemos la relación aditiva

$$[0 \leftarrow B] = [C \leftarrow B][0 \leftarrow C] = [0 \leftarrow A][0 \leftarrow C] \quad (3)$$

en $\pi_1(BQ\mathcal{A})$ representada en $BQ\mathcal{A}$ por:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightrightarrows & A & \rightrightarrows & B \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \searrow \\ & & 0 & \rightrightarrows & C & \rightrightarrows & 0 \end{array}$$

Como la relación $[f][g] = [f \circ g]$ puede reescribirse en términos de nuestra nueva relación aditiva, $\pi_1(BQ\mathcal{A})$ es generado por $[0 \leftarrow A]$ con (3) como la única relación, por lo que $K_0(\mathcal{A}) \cong \pi_1(BQ\mathcal{A})$. ■

3.2 Construcción QQ y el morfismo de Whitehead

3.2.1 Definición. Una bicategoría \mathcal{B} consiste de:

- Una colección de objetos llamados 0-células.
- Para cada par de 0-células A, B tenemos una categoría $\mathcal{B}(A, B)$ cuyos objetos llamamos morfismos o 1-células y cuyos morfismos llamamos 2-morfismos o 2-células.
- Para cada 0-célula A tenemos la 1-célula $1_A \in \mathcal{B}(A, A)$ llamado el morfismo identidad o 1-célula identidad.
- Para una terna de 0-células A, B, C , tenemos el funtor

$$c_{ABC} : \mathcal{B}(B, C) \times \mathcal{B}(A, B) \rightarrow \mathcal{B}(A, C)$$

- Transformaciones naturales a_{ABCD} definidas por:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{B}(C, D) \times \mathcal{B}(B, C) \times \mathcal{B}(A, B) & \xrightarrow{1 \times c_{ABC}} & \mathcal{B}(C, D) \times \mathcal{B}(A, C) \\
\downarrow c_{BCD} \times 1 & & \downarrow c_{ACD} \\
\mathcal{B}(B, D) \times \mathcal{B}(A, B) & \xrightarrow{c_{ABD}} & \mathcal{B}(A, D)
\end{array}$$

- Para la 1-célula $f \in \mathcal{B}(A, B)$, se tiene que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{B}(A, B) & & \mathcal{B}(A, B) \\
\downarrow & \searrow \sim & \downarrow \\
\mathcal{B}(A, B) \times \mathcal{B}(A, A) & \longrightarrow & \mathcal{B}(A, B) & \quad & \mathcal{B}(A, B) \times \mathcal{B}(A, B) \longrightarrow \mathcal{B}(A, B)
\end{array}$$

o bien, $f \circ 1_A \sim f$ y $1_B \circ f \sim f$.

- Se cumplen la identidad del triángulo y del pentágono.

Para más información sobre bicategorías, consúltese [Leinster, 1998] y consúltese [Waldhausen, 1978] para detalles la construcción QQ .

3.2.2 Definición. Sea \mathcal{A} una categoría pequeña exacta, denotamos a $QQ\mathcal{A}$ la bicategoría cuyos 2-morfismos son clases de equivalencia de diagramas conmutativos en \mathcal{A} de la forma

$$\begin{array}{ccccc}
\cdot & \leftarrow & \cdot & \rightarrow & \cdot \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\cdot & \leftarrow & \cdot & \rightarrow & \cdot \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdot & \leftarrow & \cdot & \rightarrow & \cdot
\end{array}$$

donde los cuadrados pequeños pueden verse dentro de diagramas 3x3 con columnas y renglones exactos. Dos diagramas son equivalentes si existe un isomorfismo el cual se restringe a la identidad en cada objeto.

Waldhausen probó que el espacio de lazos $\Omega QQ\mathcal{A}$ es homotópico a $BQ\mathcal{A}$, por lo que $K_n(\mathcal{A}) \cong \pi_{n+2} BQQ\mathcal{A}$.

3.2.3 Definición. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ categorías exactas, un functor $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ es llamado biexacto si

1. Los funtores $\mathcal{A} \otimes - : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ y $- \otimes \mathcal{B} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ son exactos.
2. Para los objetos cero de \mathcal{A}, \mathcal{B} y \mathcal{C} , tenemos que $\mathcal{A} \otimes 0 = 0 \otimes \mathcal{B} = 0$.

Dado un funtor biexacto, obtenemos el funtor $Q\mathcal{A} \otimes Q\mathcal{B} \rightarrow QQC$ el cual manda un par de morfismos $A_0 \xleftarrow{j} A_1 \xrightarrow{i} A_2$, $B_0 \xleftarrow{j} B_1 \xrightarrow{i} B_2$ al 2-morfismo

$$\begin{array}{ccccc} A_0 \otimes B_0 & \leftarrow & A_1 \otimes B_0 & \rightarrow & A_2 \otimes B_0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A_0 \otimes B_1 & \leftarrow & A_1 \otimes B_1 & \rightarrow & A_2 \otimes B_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_0 \otimes B_2 & \leftarrow & A_1 \otimes B_2 & \rightarrow & A_2 \otimes B_2 \end{array}$$

Luego, la realización geométrica del funtor $\otimes : Q\mathcal{A} \otimes Q\mathcal{B} \rightarrow QQC$ es un mapeo $BQA \times BQB \rightarrow BQQC$ donde $BQA \times 0$ y $0 \times BQB$ son mandados al punto base y por lo tanto se factoriza a través de

$$BQA \wedge BQB \rightarrow BQQC.$$

El morfismo de Whitehead [Whitehead, 1978, 480] produce mapeos bilineales

$$\begin{aligned} K_i(\mathcal{A}) \otimes K_j(\mathcal{B}) &= \pi_{i+1}(BQA) \otimes \pi_{j+1}(BQB) \rightarrow \\ &\pi_{i+j+2}(BQA \wedge BQB) \rightarrow \pi_{i+j+2}(BQC) \cong K_{i+j}(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Decimos que \mathcal{A} actúa en \mathcal{B} si existe un funtor biexacto $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$.

3.2.4 Observación. Cuando tenemos un mapeo asociativo $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $K_*(\mathcal{A})$ se vuelve un anillo graduado con unidad $[A_0] \in K_0(\mathcal{A})$ si

$$A_0 \otimes - = - \otimes A_0 = id_{\mathcal{A}}.$$

Si \mathcal{A} actúa en \mathcal{B} y los funtores $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ coinciden hasta isomorfismo natural, $K_*(\mathcal{B})$ resulta un $K_*(\mathcal{A})$ -módulo izquierdo.

4 El módulo $NK_*(\mathcal{A})$

Buscamos ahora definir este interesante módulo y conocer su estructura sobre los anillos de Witt.

4.1 $\mathbf{End}_0(R)$

4.1.1 Definición. Sea R un anillo con unidad, denotamos por $\mathbf{End}(R)$ a la categoría exacta de endomorfismos de R -módulos proyectivos finitamente generados, los objetos son parejas (M, f) con $f \in \mathbf{End}(M)$ y los morfismos $(M, f) \rightarrow (N, g)$ son mapeos $\alpha : M \rightarrow N$ tales que $g\alpha = \alpha f$.

4.1.2 Observación. Sea R un anillo conmutativo, apartir del producto tensorial de módulos obtenemos un funtor exacto

$$\begin{aligned}\otimes_R : \mathbf{End}(R) \times \mathbf{End}(R) &\rightarrow \mathbf{End}(R), \\ ((P, \alpha), (Q, \beta)) &\mapsto (P \otimes_R Q, \alpha \otimes_R \beta).\end{aligned}$$

Como \otimes_R es asociativo y simétrico hasta isomorfismo, el producto inducido en $K_0(\mathbf{End}(R))$ nos da una estructura de anillo conmutativo con unidad $(R, 1)$.

4.1.3 Definición. Sea R un anillo conmutativo con unidad y sea $M \in \mathbf{P}(R)$, tenemos que la inclusión $M \mapsto (M, 0)$ de $\mathbf{P}(R)$ en $\mathbf{End}(R)$ es una retracción cuya sección es el funtor de olvido. Denotamos por $\mathbf{End}_0(R)$ el kernel de morfismo inducido $K_0(\mathbf{End}(R)) \rightarrow K_0(R)$.

Los detalles de la demostración del siguiente teorema puede encontrar en [Almkvist, 1974].

4.1.4 Teorema. *El morfismo χ definido por*

$$(P, \alpha) \mapsto \det(1 - \alpha t)$$

nos define un isomorfismo de $\mathbf{End}_0(R)$ al subgrupo multiplicativo de $W(R)$ que consiste de cocientes de polinomios $\frac{f(t)}{g(t)}$. Además, $W(R)$ es la completación t -ádica de $\mathbf{End}_0(R)$.

Demostración. Queremos una inversa para χ , entonces sea $r = 1 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in W(R)$ un polinomio, como la suma en $W(R)$ es el producto usual de series, la resta sería entonces la división, por lo que basta con definir σ en estos polinomios. Definimos entonces $\sigma(r)$ mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -a_n \\ 1 & 0 & & -a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

así, $\chi(\sigma(r)) = 1 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ en $W(R)$.

4.1.5 Observación. Si A es un R -álgebra, el morfismo

$$\otimes_R : \mathbf{End}(R) \times \mathbf{End}(A) \rightarrow \mathbf{End}(A)$$

nos permite darle a $\mathbf{End}_0(A)$ estructura de $\mathbf{End}_0(R)$ -módulo.

4.2 $\mathbf{Nil}_0(R)$

4.2.1 Definición. Sea R un anillo con unidad, consideremos la subcategoría de $\mathbf{End}(R)$ cuyos objetos son parejas (P, ν) donde ν es un endomorfismo en P nilpotente. Denotamos por $\mathbf{Nil}(R)$ a esta categoría.

4.2.2 Observación. La categoría $\mathbf{Nil}(R)$ es una subcategoría exacta de $\mathbf{End}(R)$.

De manera similar a $\mathbf{End}_0(R)$, tenemos que el funtor $\mathbf{Nil}(R) \rightarrow \mathbf{P}(R)$ que manda (P, ν) en P es exacto y se divide mediante el funtor $\mathbf{P}(R) \rightarrow \mathbf{Nil}(R)$ que manda P en $(P, 0)$. Así, $K_0(R) = K_0(\mathbf{P}(R))$ es un sumando directo de $K_0(\mathbf{Nil}(R))$ y denotamos por $\mathbf{Nil}_0(R)$ al kernel de $K_0(\mathbf{Nil}(R)) \rightarrow K_0(R)$, por lo que $K_0(\mathbf{Nil}(R)) = K_0(R) \oplus \mathbf{Nil}_0(R)$.

Además,

$$[P, \nu] = [P \oplus Q, \nu \oplus 0] - [Q, 0]$$

en $K_0(\mathbf{Nil}(R))$, vemos entonces que $\mathbf{Nil}_0(R)$ es generado por elementos de la forma $[R^n, \nu] - n[R, 0]$ para algún n y alguna matriz nilpotente ν .

4.2.3 Observación. Si A es un R -álgebra, el producto tensorial en $\mathbf{End}(R)$ se restringe a un bifunctor exacto $\mathbf{End}(R) \times \mathbf{Nil}(A) \rightarrow \mathbf{Nil}(A)$.

Podemos también definir $\mathbf{End}_n(R)$ y $\mathbf{Nil}_n(R)$ mediante las divisiones

$$\begin{aligned} K_n(\mathbf{End}(R)) &= K_n(R) \oplus \mathbf{End}_n(R) \\ K_n(\mathbf{Nil}(R)) &= K_n(R) \oplus \mathbf{Nil}_n(R). \end{aligned}$$

Para nuestra siguiente proposición, vease [Waldhausen, 1978]

4.2.4 Proposición. Sea A un R -álgebra con unidad, $\mathbf{End}_*(A)$ y $\mathbf{Nil}_*(R)$ son módulos graduados sobre el anillo $\mathbf{End}_0(R)$.

4.3 $NK_*(A)$

4.3.1 Definición. Sea R un anillo conmutativo con unidad y A un R -álgebra con unidad, definimos $NK_n(A)$ como el kernel del morfismo evaluación

$$x = 0 : K_n(A[x]) \rightarrow K_n(A).$$

Una prueba para el siguiente teorema puede encontrarse en [Grayson, 1976].

4.3.2 Teorema. Sea A un R -álgebra, tenemos que $NK_n(A)$ es isomorfo a \mathbf{Nil}_{n-1} mediante la composición

$$NK_*(A) \subset K_n(A[x]) \subset K_n(A[x, y]/(xy = 1)) \xrightarrow{\partial} K_{n-1}(\mathbf{Nil}(A))$$

4.3.3 Teorema. ([Stienstra, 1984])

Sea $\gamma \in \text{Nil}_*(A)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que γ se anula en el ideal

$$I_N = \{f \mid \chi(f) \equiv 1 \pmod{t^N}\}$$

de $\text{End}_0(R)$. Consecuentemente, $NK_*(A)$ es un módulo sobre la completación t -ádica $W(R)$ de $\text{End}_0(R)$.

De manera que obtenemos una estructura de $W(R)$ -módulo en $NK_*(A)$.

La siguiente proposición nos ayuda a entender un poco el tamaño que realmente tienen los $NK_*(A)$.

4.3.4 Teorema. Si el grupo abeliano $NK_i(A)$ es no cero, entonces es infinitamente generado.

Demostación. Procedemos por contradicción, supongamos que $NK_i(A)$ es finitamente generado y no cero. En [Bloch, 1978] se muestra que el morfismo de Frobenius F_m mencionado anteriormente, corresponde al funtor que manda (P, ν) a (P, ν^m) , así que para cada $\gamma \in NK_*(A)$ tenemos que $F_m(\gamma) = 0$ para m suficiente grande.

Además, muestra que el morfismo de Verschiebung V_m es tal que $V_m(P, \nu) = (P[t]/t^m - \nu, t)$, de manera que la composición $F_m V_m$ corresponde con multiplicar por m .

Si $NK_i(A)$ es finitamente generado, existe M tal que F_m anula a $NK_i(A)$ para todo $m > M$. Sea $\beta \in NK_i(A)$ con $\beta \neq 0$ y sea $m > M$ tal que $m\beta \neq 0$, pero entonces $F_m(V_m(\beta)) = m\beta$, lo que es una contradicción.

■

Bibliografia

- [Almkvist, 1974] Almkvist, G. (1974). The Grothendieck ring of the category of endomorphisms. *Journal of Algebra*, 28(3):375–388.
- [Atiyah and MacDonald, 1994] Atiyah, M. and MacDonald, I. (1994). *Introduction To Commutative Algebra*. Addison-Wesley series in mathematics. Avalon Publishing.
- [Bloch, 1978] Bloch, S. (1978). Some formulas pertaining to the K-theory of commutative groupschemes. *Journal of Algebra*, 53(2):304 – 326.
- [Grayson, 1976] Grayson, D. (1976). Higher algebraic K-theory: II. pages 217–240.
- [Hazewinkel, 2008] Hazewinkel, M. (2008). Witt vectors. part 1. *arXiv preprint arXiv:0804.3888*.
- [Leinster, 1998] Leinster, T. (1998). Basic bicategories. *arXiv preprint math/9810017*.
- [Stienstra, 1984] Stienstra, J. (1984). Cartier-Dieudonné theory for Chow groups. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 355:1–66.
- [Waldhausen, 1978] Waldhausen, F. (1978). Algebraic K-theory of generalized free products, Part 1. *Annals of Mathematics*, 108(2):135–204.
- [Weibel, 2013] Weibel, C. (2013). *The K-book: An Introduction to Algebraic K-theory*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.
- [Weibel, 1981] Weibel, C. A. (1981). Mayer Vietoris sequences and module structures on NK . pages 466–493.
- [Whitehead, 1978] Whitehead, G. W. (1978). *Elements of Homotopy Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.
- [Xantcha, 2011] Xantcha, Q. R. (2011). Binomial rings: Axiomatisation, transfer and classification. *arXiv preprint arXiv:1104.1931*.