



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas



Cotas Observacionales Sobre Modelos de Energía
Oscura Interactuantes con Materia Oscura

Tesis presentada al

Instituto de Física y Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestra en Ciencias en el Área de Física

por

Vanessa Stephanie Emilia Smer Barreto

asesorada por

Dr. Ulises Nucamendi Gomez
(IFM-UMSNH)

Morelia, Michoacan, Mexico
Agosto de 2012

Introducción

Antes de 1998 el modelo cosmológico más aceptado (el modelo del Big bang) estaba compuesto de materia oscura, materia bariónica y radiación. Además, se consideraba con curvatura espacial cero y en expansión desacelerada. Sin embargo, a través de las observaciones de la luminosidad de supernovas tipo Ia se descubrió que el Universo se expande recientemente de forma acelerada, lo que contradice al modelo del Big Bang.

Para explicar la causa de esta aceleración, los cosmólogos introdujeron una nueva componente de materia llamada energía oscura. De esta manera, el modelo del Big Bang fue sustituido por el modelo *Constante Cosmológica - Materia Oscura Fría* (Λ CDM, por sus siglas en inglés), el cuál considera que la *constante cosmológica* (que asume el rol de energía oscura) constituye el 70 % de la densidad de energía del Universo, la materia oscura el 23 %, los bariones el 4 % y la radiación 0.05 %.

La nueva teoría es capaz de predecir con gran precisión las observaciones cosmológicas. No obstante, este modelo tiene dos grandes problemas: el de la constante cosmológica y el de la coincidencia cósmica. El primero de ellos consiste en el hecho de que la densidad de constante cosmológica observada es 10^{117} veces más pequeña que la predicción teórica hecha por la teoría cuántica de campos. El segundo tiene que ver con la razón entre las densidades de materia oscura y de constante cosmológica, que casualmente son del mismo orden de magnitud en la actualidad, a pesar de que hasta hace 5000 millones de años en fueron bastante distintas.

A causa de estos problemas, los cosmólogos han propuesto modelos alternativos al modelo Λ CDM. Una de las propuestas son los modelos con interacción entre materia oscura y energía oscura, cuya propuesta es aminorar ó resolver el problema de la coincidencia cósmica sin dejar de ser consistentes con las observaciones. En la presente tesis, se analizan dos modelos de este tipo propuestos en el año 2007 por Guo et al[24] utilizando las muestras más recientes de la prueba de supernovas tipo Ia, BAO, CMB y datos observacionales del parámetro de Hubble, con el fin de poner restricciones mucho más precisas sobre los parámetros libres de cada modelo.

La organización del presente trabajo es la siguiente: el capítulo 1 describe algunos fundamentos de cosmología que serán empleados en las secciones posteriores. El capítulo 2 describe cuatro pruebas cosmológicas utilizadas para acotar parámetros libres de modelos cosmológicos. El capítulo 3 describe algunos elementos de estadística bayesiana que sirven para llevar a cabo el ajuste entre teorías y observaciones. A continuación, el capítulo 4 describe los aspectos fundamentales del modelo Λ CDM; ejemplificando las pruebas cosmológicas desarrolladas en la tesis en este modelo. El capítulo 5 presenta los dos modelos con interacción entre las componentes oscuras y los resultados de su análisis. Finalmente, en el capítulo 6 exponen las conclusiones de éste trabajo.

Índice general

Introducción	I
1. Cosmología	1
1.1. Principio cosmológico	1
1.2. La métrica de FRW	2
1.2.1. Vectores de Killing de la métrica FRW	3
1.3. Las componentes del Universo	4
1.4. Fluido perfecto y el tensor de energía-momento	4
1.4.1. Ecuación de conservación local de la materia	5
1.4.2. Ecuaciones de estado	5
1.5. Las ecuaciones de Friedmann	6
1.6. El parámetro de desaceleración	10
2. Pruebas cosmológicas	11
2.1. Prueba cosmológica utilizando supernovas tipo Ia	11
2.1.1. Supernovas tipo Ia: qué son y porqué sirven para medir distancias del orden de megaparsecs	11
2.1.2. Lo que mide la prueba	13
2.1.3. Relación entre el factor de escala y el redshift	13
2.1.4. Distancia de luminosidad	16
2.1.5. Luminosidad y flujo	19
2.1.6. La distancia modular.	20
2.2. Prueba de Oscilaciones acústicas bariónicas (BAO)	21
2.2.1. Qué mide la prueba	22
2.2.2. La época de arrastre de bariones	22
2.2.3. El tamaño del horizonte de sonido comóvil	22
2.2.4. La distancia de dilatación D_V	23
2.3. Prueba de CMB	24
2.3.1. La época de desacoplamiento de fotones	25
2.3.2. Las anisotropías de temperatura de CMB	25
2.3.3. Qué mide la prueba	25
2.3.4. La escala angular de z_*	25
2.4. Prueba cosmológica del parámetro de Hubble	27
2.4.1. Qué mide la prueba	27
3. Estadística bayesiana	29
3.1. Definiciones y conceptos básicos de estadística bayesiana	29
3.1.1. Teoremas de probabilidad	29
3.2. Prueba χ^2	31
3.3. χ^2 como medida de calidad de ajuste	33
3.3.1. χ^2 por grados de libertad	34
3.4. Tipos de marginalización para la FDP de la función χ^2	34
3.4.1. Función de probabilidad (FDP) previa constante e integración analítica para el caso de Universo plano usando los datos de SNeIA	35
3.4.2. FDP previa Gaussiana	36
3.4.3. FDP previa Delta de Dirac	37
3.5. Prueba χ^2 usando SNe, CMB y BAO	37

4. El modelo ΛCDM	39
4.1. Descubrimiento de la aceleración del Universo	39
4.1.1. Componentes del modelo Λ CDM	39
4.1.2. El parámetro de desaceleración	43
4.2. Problemas del modelo Λ CDM	44
4.2.1. El problema de la constante cosmológica	44
5. Modelos de energía oscura interactuantes con materia oscura	49
5.1. Interacción entre energía y materia oscura	49
5.1.1. A. Modelo con acoplamiento δ constante	50
5.1.2. B. Modelo con acoplamiento dependiente del tiempo	52
5.1.3. Discusión de resultados	54
6. Conclusiones	59
A. Elementos de la métrica de FRW	61

Capítulo 1

Cosmología

La cosmología es la ciencia que se encarga del estudio del Universo de manera global. Ésta ciencia utiliza elementos de la termodinámica, la física atómica y la gravitación y las aplica a gran escala [15].

De las cuatro interacciones hasta ahora conocidas, la gravedad es la que domina el comportamiento del Universo en mayor medida. A pesar de que la fuerza electromagnética, que le sigue en importancia, también es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia de separación entre partículas, no juega un papel importante a estas escalas ya que la materia tiende a neutralizarse. A causa de ello, la teoría de la relatividad general, la más exitosa para explicar la interacción gravitatoria, es utilizada para el análisis de los modelos cosmológicos.

Otra herramienta que hace más completa la modelación del cosmos en la actualidad es la ley de Hubble $v = H_0 D$, donde v es la velocidad de recesión, H_0 es el valor actual del parámetro de Hubble (ver sección 1.5) y D es la distancia propia del objeto medido al observador. Este es un resultado observacional que cuantifica el alejamiento entre galaxias, es decir, la expansión observada del Universo.

1.1. Principio cosmológico

Los esfuerzos actuales por modelar el cosmos se basan en el principio copernicano, el cuál dice que el Universo es prácticamente el mismo en todas partes. Ésta es la base para enunciar los fundamentos de la cosmología moderna mediante el principio cosmológico:

El Universo es espacialmente homogéneo e isotrópico a escalas cosmológicas.

Para precisar los conceptos expuestos en el principio mencionado con anterioridad se utiliza la Teoría General de la Relatividad de Einstein (GR). En ella, el Universo es representado por una variedad diferencial M sobre la cuál se define una métrica lorentziana g , denotada como (M, g) .

Para introducir los conceptos de homogeneidad e isotropía espacial del Universo, consideremos una familia de hipersuperficies tipo espacio Σ_η que llenan todo el espacio tiempo. Cada elemento de ésta familia es etiquetado a través de un parámetro continuo $\eta \in R$, de tal forma que para cada valor de η ,

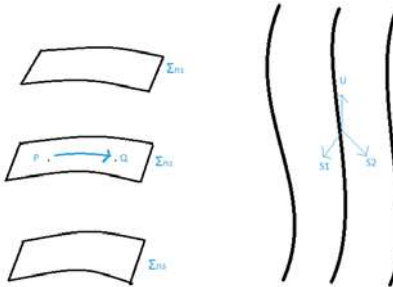


Figura 1.1: Hipersuperficies espaciales (*spacelike*) Σ_η que folian toda la variedad M (izquierda) y *congruencia* de curvas temporales (*timelike*) que llenan toda la variedad M (derecha).

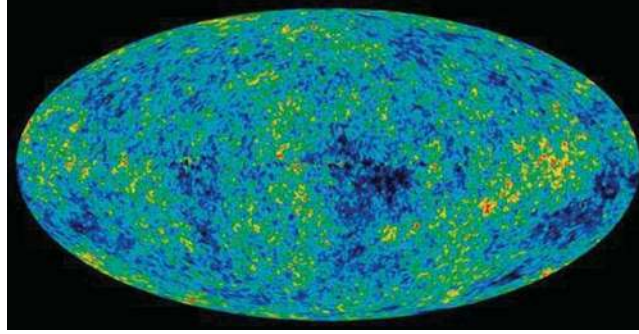


Figura 1.2: Radiación Cómica de Fondo: las fluctuaciones térmicas son de apenas 10^{-5} K

se está eligiendo una hipersuperficie Σ_η en particular (ver figura 1). Decimos entonces que un espacio-tiempo es espacialmente homogéneo si para cada η y para cualesquiera dos puntos $P, Q \in \Sigma_\eta$, existe una isometría de la métrica del espacio-tiempo, g , la cuál lleva P a Q [7].

Ahora pasamos al concepto de espacio-tiempo espacialmente isotrópico. Para introducirlo consideramos una congruencia de curvas tipo tiempo en M , es decir, una familia de curvas que llenan a toda la variedad M , y tales que a través de cada punto $P \in M$ pasa una curva de ésta familia. En cada punto P de estas curvas tipo tiempo se puede definir un vector tangente, que denotaremos como U . Además se puede definir también un conjunto $V_P(U)$ formado por vectores ortogonales a U en el punto P .

Entonces, un espacio-tiempo es espacialmente isotrópico en cada punto del mismo si es llenado por una congruencia de curvas tipo tiempo que satisfacen la propiedad de que dado cualquier punto P y dados cualesquiera dos vectores unitarios tangentes espaciales (ortogonales al vector U) $s_1, s_2 \in V_P(U)$, existe una isometría de g la cuál deja a P y al vector U fijos, pero rota s_1 hacia s_2 [3].

De manera más compacta, la *isotropía espacial* significa que el Universo tiene el mismo aspecto y propiedades en cualquier dirección espacial, visto por un observador comóvil situado en un punto P arbitrario en el Universo. *Homogeneidad espacial* se refiere a que el espacio tiene las mismas características, medidas por un observador comóvil, sin importar el lugar en el Universo en el que se encuentre.

Una prueba observacional de las características del Universo es la radiación de microondas cósmica de fondo (CMB, por sus siglas en inglés) muestran que su temperatura varía tan sólo 10^{-4} Kelvins [22].

Una variedad diferencial M (como la que describe a nuestro Universo) de dimensión N tiene como máximo $N(N + 1)/2$ isometrías. En el caso de la hipersuperficie espacial Σ del Universo $N = 3$, por lo tanto a Σ le corresponden tres isometrías por rotaciones espaciales (isotropía) y tres más por traslaciones espaciales (homogeneidad); lo anterior corresponde al número máximo de isometrías que puede tener nuestro Universo. Los espacios que tienen el máximo número de isometrías se llaman *maximalmente simétricos*.

1.2. La métrica de FRW

El carácter maximalmente simétrico de Σ nos dice la forma que debe tener su 3-métrica en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.1)$$

donde k es un factor proporcional a la tres-curvatura espacial del Universo.

A partir de (1.1) se obtiene la 4-métrica del espacio-tiempo:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.2)$$

La única métrica que es compatible con el principio cosmológico es la de Friedmann Robertson Walker (FRW), la cuál está dada por (2).

El modelo cosmológico permite tres casos para el valor de la curvatura espacial k , dependiendo de la cantidad de materia-energía presente en el Universo (ver cuadro 1). Sin embargo, la medición de las anisotropías del CMB realizadas por el satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe),

k	Densidad crítica	Curvatura espacial	Tipo de Universo
$k > 0$	$\rho > \rho_{\text{crit}}$	positiva	cerrado
$k < 0$	$\rho < \rho_{\text{crit}}$	negativa	abierto
$k = 0$	$\rho = \rho_{\text{crit}}$	nula	plano

Cuadro 1.1: Distintas geometrías espaciales del Universo dependiendo del valor del factor de curvatura espacial k , o de la densidad de masa-energía ρ total del Universo en comparación con el valor de la *densidad crítica*, que se define como $\rho_{\text{crit}} \equiv 3H^2/(8\pi G)$, concepto que se definirá más adelante.

muestran que el valor de k es prácticamente cero, lo que sugiere que nuestro Universo es espacialmente plano [22].

Para describir la evolución del tamaño de Universo se utiliza la función $a(t)$, llamada factor de escala. Ésta representa la distancia comóvil entre dos puntos de Universo, es decir, la distancia entre dos puntos comóviles arbitrarios que se alejan uno de otro. El valor de $a(t)$ depende de la época del Universo donde nos encontramos, por ejemplo, al inicio de la vida del mismo, $a = 0$. Actualmente y para fines prácticos se normaliza $a_0 = 1$.

Las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de la métrica de FRW en forma matricial son:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

1.2.1. Vectores de Killing de la métrica FRW

La *isotropía espacial* puede explicarse estableciendo la condición de que las ecuaciones de la teoría deben ser invariantes ante rotaciones espaciales, es decir, que si nos situamos en algún punto P en la hipersuperficie Σ en donde establecemos una carta coordenada (sistema de referencia), podemos rotar en cualquier dirección y no habrá ningún cambio en las ecuaciones.

En el caso de la *homogeneidad espacial* se establece como invariancia ante translaciones espaciales, es decir, que si consideramos las ecuaciones en dos puntos arbitrarios distintos P y Q de la hipersuperficie Σ , las ecuaciones no cambiarán su forma ni tendrán ninguna dependencia del punto en el que estemos situados a un tiempo fijo.

Para formalizar éstas ideas vamos a definir el concepto de campo vectorial de Killing: el espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) es invariante bajo un grupo uni-paramétrico de transformaciones si se satisface:

$$\mathcal{L}_\varepsilon g = 0, \quad (1.4)$$

es decir, la derivada de Lie de la métrica con respecto al campo vectorial ε es cero. Aquí el grupo uni-paramétrico es generado por el campo vectorial ε llamado campo vectorial de Killing de la métrica.

Invariancia bajo un grupo tres-paramétrico de rotaciones espaciales (isotropía) implica la existencia de un espacio vectorial de Killing de dimensión tres de la métrica de FRW expresada en (1.2), los cuales se escriben como:

$$\varepsilon_1 = \cos(\phi)\partial_\theta - \cot(\theta)\sin(\phi)\partial_\phi, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_2 = \sin(\phi)\partial_\theta + \cot(\theta)\cos(\phi)\partial_\phi, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_3 = \partial_\phi. \quad (1.7)$$

La invariancia bajo un grupo tres-paramétrico de translaciones espaciales (homogeneidad) implica la existencia de otro espacio vectorial de vectores de Killing de dimensión tres de la métrica de FRW, dada por la expresión (1.2), los cuales se escriben como:

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{f(r)} \left[\sin(\theta)\cos(\phi)\partial_r + \frac{\cos(\theta)\cos(\phi)}{r}\partial_\theta - \frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)}\partial_\phi \right], \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_5 = \frac{1}{f(r)} \left[\sin(\theta)\sin(\phi)\partial_r + \frac{\cos(\theta)\sin(\phi)}{r}\partial_\theta + \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)}\partial_\phi \right], \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{f(r)} \left[\cos(\theta)\partial_r - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_\theta \right], \quad (1.10)$$

donde la función $f(r)$ es:

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.11)$$

No existe ninguna otra métrica Lorentziana en 4-dimensiones distinta a la de FRW que posea estas simetrías [27].

1.3. Las componentes del Universo

Los tipos de materia más comúnmente considerados en los modelos cosmológicos son:

Materia bariónica Está formada por los fermiones del Modelo Estándar de Partículas Elementales. Su nombre se debe a que, a pesar de que el Universo se considera eléctricamente neutro, esto es, tiene la misma cantidad de protones y electrones, los primeros (que son bariones) tienen una masa de $1,672 \times 10^{-27}$ mientras que la masa de los segundos es de $9,11 \times 10^{-31}$, por lo que la masa de los bariones domina, incluídos los electrones. Éste tipo de materia emite radiación electromagnética y en la actualidad constituye tan sólo el 4.5% de los componentes del Universo [5].

Radiación electromagnética También llamada radiación cósmica de fondo (CMB), permea todo el Universo de forma altamente isotrópica. La distribución espectral de esta radiación corresponde, con una enorme precisión, a la de un cuerpo negro con temperatura de 2.725 K [22]. Se estima que su abundancia hoy en día es de apenas 0.005% de la densidad de la materia-energía presente en el Universo.

Materia oscura Es la materia que no emite radiación electromagnética. Se ha podido medir a través de sus efectos gravitacionales en los halos y cúmulos de galaxias, usando las curvas de rotación y las velocidades de las galaxias dentro de sus cúmulos. Del total de masa medida en una galaxia a través de efectos gravitacionales, el $\sim 90\%$ es materia oscura [22].

La partículas que la componen no forman parte del modelo estándar de partículas. Se estima que el 23% de la proporción materia-energía universal es materia oscura.

Energía oscura En 1998, Adam Riess et al. descubrieron que el Universo se expande en el presente de manera acelerada, contrario a lo estipulado por el modelo del Big Bang [18]. Al causante de éste fenómeno se le denominó energía oscura. Esta es la componente de la cuál se tiene menos información, hecho que ha propiciado la propuesta de varios candidatos. El modelo Λ CDM estima su abundancia en alrededor de 72% de la densidad total del Universo [22].

1.4. Fluido perfecto y el tensor de energía-momento

Las componentes del Universo pueden modelarse como fluidos caracterizados por cantidades macroscópicas. En particular, los fluidos perfectos son los más utilizados en cosmología. Estos fluidos se definen como aquellos en los cuáles un observador que se mueva con la misma velocidad del fluido en un punto determinado de éste, vea al fluido isotrópico. En ellos no hay fricción ni turbulencia.

El tensor de energía momento caracteriza las propiedades de cada fluido (componente) ya que contiene toda la información relativa a él:

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu), \quad (1.12)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y U^μ es la cuadrivelocidad de un observador comóvil que se define como

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (1.13)$$

donde τ es el tiempo propio del observador, La cantidad p es la presión en cualquier dirección en el fluido, en éste caso se trata de una presión isotrópica en el marco de referencia en reposo. Por ello los tres términos T^{ii} son iguales.

Normalizando las cuadrivelocidades comóviles, se tiene: $U^\nu U_\nu = -1$. De aquí que

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad U_\nu = (-1, 0, 0, 0), \quad (1.14)$$

en el sistema de referencia comóvil. La traza T de $T^{\mu\nu}$ es:

$$T = \text{Tr}(T^\mu{}_\mu) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 3p - \rho. \quad (1.15)$$

1.4.1. Ecuación de conservación local de la materia

A partir del tensor de energía-momento y usando la identidad de Bianchi es posible tener una ecuación llamada la ecuación de conservación local (sólo se expresa de esta forma en analogía con el caso plano, en realidad no se conserva nada como se mencionará más adelante) de masa-energía

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0, \quad (1.16)$$

cumplida de manera individual por cada una de las componentes de materia-energía presentes en el Universo, si se asume únicamente interacción gravitacional entre ellas.

Tomando la componente temporal t de la ecuación (1.16), es decir, $\nabla_{\mu} T^{\mu}_t = 0$. Expresamos explícitamente esta derivada covariante como:

$$\partial_{\mu} T^{\mu}_t + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} T^{\lambda}_t - \Gamma^{\lambda}_{\mu t} T^{\mu}_{\lambda} = 0, \quad (1.17)$$

donde $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ son los símbolos de Christoffel usuales.

Usando el hecho de que el tensor T^{μ}_{ν} de un fluido perfecto es diagonal en el sistema de referencia comóvil, los únicos términos diferentes de cero de T^{μ}_{ν} son los elementos de la diagonal. Con esto, la ecuación (1.17) se reescribe como

$$\partial_t T^t_t + \Gamma^{\mu}_{\mu t} T^t_t - \Gamma^r_{rt} T^r_r - \Gamma^{\theta}_{\theta t} T^{\theta}_{\theta} - \Gamma^{\phi}_{\phi t} T^{\phi}_{\phi} = 0. \quad (1.18)$$

A partir del tensor métrico de FRW (1.3) se pueden calcular las expresiones para los símbolos de Christoffel. En el apéndice A se muestran todos los elementos distintos de cero para ésta métrica. En éste caso los elementos que nos interesan son

$$\Gamma^r_{rt} = \Gamma^{\theta}_{\theta t} = \Gamma^{\phi}_{\phi t} = \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{y} \quad \Gamma^t_{tt} = 0, \quad (1.19)$$

Usando estos valores en la ecuación (1.18) y tomando los elementos de T^{μ}_{ν} a partir de la matriz del tensor $T_{\mu\nu}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} -\partial_t \rho + \Gamma^r_{rt} (3T^t_t - T^r_r - T^{\theta}_{\theta} - T^{\phi}_{\phi}) &= 0, \\ \Rightarrow -\dot{\rho} + \frac{\dot{a}}{a} (-3\rho - 3p) &= 0. \end{aligned}$$

De donde se llega a la ecuación de conservación local de materia-energía en el espacio-tiempo de FRW:

$$\boxed{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0}, \quad (1.20)$$

Como se mencionó al inicio de esta sección, la expresión (1.20) no es estrictamente hablando, una “ecuación de conservación” dado que la densidad de materia-energía no se conserva en general en un espacio-tiempo curvo.

1.4.2. Ecuaciones de estado

Observacional y experimentalmente se ha encontrado que cada uno de los fluidos relevantes en cosmología obedecen una ecuación de estado que relaciona a la presión del fluido con su densidad de forma lineal expresada como

$$p = w \rho, \quad (1.21)$$

donde el factor w es una constante de proporcionalidad adimensional.

Para el caso de las componentes de materia bariónica y oscura, se ha inferido que la presión de estas componentes es tan pequeña comparado con su densidad que puede considerarse cero (sin que esto implique que la densidad sea cero). Es común referirse como *polvo* a los fluidos con $p = 0$.

Para el caso de la energía oscura, si se asume que esta es la constante cosmológica, entonces se tiene que su ecuación de estado es $p = -\rho$ (es decir, $w = -1$).

Para la componente de radiación, la ecuación de estado puede calcularse a partir del tensor de energía-momento del campo electromagnético, que se expresa como

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (1.22)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday o de intensidad del campo electromagnético¹. La traza de (1.22) es

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\mu} &= F_{\mu\alpha}F^{\mu\alpha} - F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \\ \Rightarrow T^{\mu}{}_{\mu} &= 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde se ha usado el hecho de que $g_{\mu}{}^{\mu} = 4$. Considerando las ecuaciones (A.6) y (1.23), obtenemos que $T^{\mu}{}_{\mu} = 0 = 3p_r - \rho_r$. De aquí que

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (1.24)$$

La siguiente tabla muestra los diferentes valores de w en los fluidos cosmológicos:

<i>tipo de materia</i>	w
Materia bariónica y oscura	0
Radiación	1/3
Constante cosmológica	-1

1.5. Las ecuaciones de Friedmann

A continuación se deducirán las dos ecuaciones de Friedmann, expresiones muy importantes en el estudio de la cosmología que permiten cuantificar la evolución, composición, geometría y dinámica del Universo. Partimos de las ecuaciones de Einstein,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (1.25)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, T es la traza de $T_{\mu\nu}$, G es la constante gravitacional de Newton y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento total del Universo, que resulta de la suma de todos los tensores de energía-momento individuales de cada una de las componentes de materia-energía que un modelo cosmológico considere presentes en el Universo, es decir,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^b + T_{\mu\nu}^{mo} + T_{\mu\nu}^r + T_{\mu\nu}^{\Lambda} + \dots, \quad (1.26)$$

donde los superíndices “b”, “mo”, “r”, “ Λ ” denotan “materia bariónica”, “materia oscura”, “radiación” y “energía oscura (como constante cosmológica)” respectivamente. Los puntos suspensivos indican cualquier otro tipo de materia o energía adicional que algún modelo cosmológico distinto a Λ CDM pudiera proponer.

Calculamos primero solo la componente temporal de la expresión (1.25). Para ello se usan , los elementos de la matriz $g_{\mu\nu}$, las componentes del tensor $T_{\mu\nu}$ y su traza. Sustituimos en la ecuación (1.25) y obtenemos:

$$R_{tt} = 8\pi G \left[\rho + \frac{1}{2}(3p - \rho) \right] = \frac{8\pi G}{2}(3p + \rho), \quad (1.27)$$

donde ρ y p denotan la densidad y presión *total* del conjunto de fluidos que conforman al Universo, esto es,

$$\rho = \rho_b + \rho_{mo} + \rho_r + \rho_{\Lambda} + \dots \quad (1.28)$$

$$p = p_b + p_{mo} + p_r + p_{\Lambda} + \dots \quad (1.29)$$

Por otra parte, es posible calcular las componentes de $R_{\mu\nu}$ a partir de la métrica de FRW. Se encuentra que $R_{tt} = -3(\ddot{a}/a)$ (ver apéndice A), los dos puntos sobre “ a ” significan segunda derivada temporal. Entonces

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho)}. \quad (1.30)$$

¹El tensor de intensidad del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ se define en términos del cuadripotencial A como $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ donde $A_{\mu} = (-\phi, \mathbf{A})$, ϕ y \mathbf{A} son los potenciales eléctrico y magnético respectivamente.

Que es la segunda ecuación de Friedmann.
Tomamos ahora la componente radial de la ecuación (1.25).

$$R_{rr} = 8\pi G \frac{a^2}{1 - kr^2} \left[p - \frac{1}{2}(3p - \rho) \right], \quad (1.31)$$

donde k el factor de la curvatura espacial. De calcular R_{rr} se encuentra (ver Apéndice A)

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (1.32)$$

igualando (1.31) y (1.32)

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (1.33)$$

Sustituyendo (1.30) en :

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} &= 4\pi G(\rho - p) + \frac{4\pi G}{3}(3p + \rho), \\ &= \frac{4\pi G}{3}(3\rho - 3p + \rho + 3p), \\ &= \frac{4\pi G}{3}4\rho, \\ \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Se define el parámetro de Hubble como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (1.35)$$

donde “ t ” es el tiempo cósmico. Reescribimos la ecuación (1.34)

$$\boxed{H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)}}. \quad (1.36)$$

Esta es la primera ecuación de Friedmann. Cabe recalcar que las expresiones (1.36), (1.30) y (1.20) no son independientes, a partir de dos de ellas se puede encontrar la faltante.

De las otras dos componentes del tensor de Ricci (es decir, $R_{\theta\theta}, R_{\phi\phi}$) se obtiene la misma expresión (1.33).

Una manera más eficiente de escribir las ecuaciones de Friedmann es a partir de los parámetros de densidad los cuáles se definen como

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}}, \quad (1.37)$$

donde ρ_i es la densidad de materia-energía de la i -ésima componente de materia del Universo y ρ_{crit} es la densidad crítica definida como

$$\rho_{\text{crit}}(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (1.38)$$

que proviene de asumir que la curvatura espacial del Universo es cero [$k = 0$ en la ecuación (1.36)]. Cuando la densidad total de materia-energía ρ en el Universo es igual al valor de la densidad crítica, el Universo es espacialmente plano. Si $\rho > \rho_{\text{crit}}$ el Universo es espacialmente cerrado, y si $\rho < \rho_{\text{crit}}$ es abierto (ver cuadro 1.1).

La densidad crítica depende del tiempo cósmico t . El tiempo cósmico presente del Universo, así como cualquier otra cantidad cosmológica evaluada en el presente, se denota por un subíndice o superíndice cero, por ejemplo t_0, H_0 . La representación del valor actual de la densidad crítica es

$$\rho_{\text{crit}}^0 \equiv \rho_{\text{crit}}(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1,16 \times 10^{-27} \text{kg/m}^3, \quad (1.39)$$

donde $H_0 \equiv H(t_0)$ es la constante de Hubble.

Dividiendo ambos lados de la igualdad (1.36) por H^2 e identificando el factor que corresponde a la densidad crítica,

$$1 = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} - \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.40)$$

Se define un parámetro Ω_k que corresponde a la curvatura espacial del Universo como

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.41)$$

Utilizando (1.41) y (1.38), la ecuación (1.40) es

$$\boxed{1 = \Omega_{\text{total}} + \Omega_k} \quad (1.42)$$

donde

$$\Omega_{\text{total}} \equiv \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} = \Omega_b + \Omega_{\text{mo}} + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \dots \quad (1.43)$$

Que es simplemente otra manera de expresar la ecuación de Friedmann. Esta igualdad debe satisfacerse para cualquier tiempo.

Otra alternativa de escribir la ecuación de Friedmann es utilizando las expresiones (1.36) y (1.42), con la ayuda de la ecuación de conservación de la materia (1.20) para cada una de las componentes del Universo. El primer paso es encontrar la dependencia de la densidad ρ_i con respecto al factor de escala para cada una de las componentes.

Para la componente de materia bariónica, la presión asociada a su fluido es cero, es decir, $p_b = 0$. Por tanto, la ecuación de conservación de materia (1.20) para ella es:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_b &= 0, & (1.44) \\ \Rightarrow \frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} &= -3\frac{\dot{a}}{a}, \\ \Rightarrow \frac{d \ln \rho_b}{dt} &= -3\frac{d \ln a}{dt}, \\ \Rightarrow \int_{\rho_{b0}}^{\rho_b} d \ln \rho_b &= -3 \int_{a_0}^a d \ln a, \end{aligned}$$

donde ρ_{b0} y a_0 representan el valor de la densidad de materia bariónica y del factor de escala actual. Integrando obtenemos

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\rho_b}{\rho_{b0}} \right) &= \ln \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \\ \Rightarrow \rho_b(a) &= \frac{\rho_{b0}^0}{a^3}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

donde se ha normalizado al factor de escala de tal forma que en el presente su valor es uno (esto es, $a_0 = 1$). Como puede verse de esta ecuación, la densidad de materia bariónica depende del factor de escala como a^{-3} .

Para el caso de la materia oscura, se tiene exactamente la misma expresión que para la bariónica dado que la presión de ambas componentes es la misma,

$$\rho_{\text{mo}}(a) = \frac{\rho_{\text{mo}}^0}{a^3}, \quad (1.46)$$

donde ρ_{mo}^0 es el valor presente de la densidad de la materia oscura. En ocasiones se suele agrupar ambas componentes, materia bariónica y oscura, en una misma expresión, y se suele referir a ella simplemente como “materia”, que denotaremos como $\rho_M(a)$. Esta se define de la siguiente forma

$$\rho_M(a) \equiv \rho_b(a) + \rho_{\text{mo}}(a), \quad \rho_M^0 \equiv \rho_b^0 + \rho_{\text{mo}}^0,$$

con lo que se llega a

$$\boxed{\rho_M(a) = \frac{\rho_M^0}{a^3}} \quad (1.47)$$

Sustituyendo (1.24) en la ecuación de conservación local (1.20) obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{d\rho_r}{dt} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0, \\ \Rightarrow & \frac{1}{\rho_r} \frac{d\rho_r}{dt} = -4\frac{\dot{a}}{a}, \\ \Rightarrow & \frac{d \ln \rho_r}{dt} = -4\frac{d \ln a}{dt}, \\ \Rightarrow & \int_{\rho_{r0}}^{\rho_r} d \ln \rho_r = -4 \int_1^a d \ln a, \\ \Rightarrow & \ln \left(\frac{\rho_r}{\rho_r^0} \right) = \ln \left(\frac{1}{a} \right)^4. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Por tanto,

$$\boxed{\rho_r(a) = \frac{\rho_r^0}{a^4}} \quad (1.49)$$

donde ρ_r^0 es el valor de la densidad de radiación en el presente.

Asumiendo que la componente de energía oscura es la constante cosmológica, se tiene una ecuación de estado de la forma $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de conservación (1.20) se obtiene

$$\frac{d\rho_\Lambda}{dt} = 0. \quad (1.50)$$

Lo que implica que la densidad de la constante cosmológica permanece constante a lo largo de la expansión del Universo,

$$\boxed{\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0 = \text{constante}} \quad (1.51)$$

Siguiendo esta misma estrategia se pueden ir agregando más tipos de componentes de materia-energía dado un modelo cosmológico en particular.

Sustituyendo las expresiones (1.45, 1.46, 1.49, 1.51) en la parte de la densidad de la ecuación de Friedmann (1.36) obtenemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_b^0}{a^3} + \frac{\rho_{mo}^0}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{a^4} + \rho_\Lambda^0 \right) - \frac{k}{a^2}. \quad (1.52)$$

Dividiendo (1.52) por H_0^2 e identificando la expresión de la densidad crítica actual, $\rho_{crit}^0 = 3H_0^2/8\pi G$, se obtiene

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \left(\frac{\rho_b^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_{mo}^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^4} + \frac{\rho_\Lambda^0}{\rho_{crit}^0} \right) - \frac{k}{a^2 H_0^2}. \quad (1.53)$$

Usando las definiciones del parámetro de densidad (1.37) evaluadas hoy (esto es; $\Omega_i^0 \equiv \rho_i^0/\rho_{crit}^0$), además la definición del parámetro de la curvatura espacial (1.41) en el presente, $\Omega_k^0 \equiv -k/H_0^2$ (recordando que el factor de escala “ a ” evaluado hoy es igual a 1), llegamos a

$$H(a) = H_0 \left(\frac{\Omega_b^0}{a^3} + \frac{\Omega_{mo}^0}{a^3} + \frac{\Omega_r^0}{a^4} + \Omega_\Lambda^0 + \frac{\Omega_k^0}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (1.54)$$

En astronomía comúnmente se estudian las distancias a escalas cosmológicas en términos del redshift o corrimiento hacia el rojo del espectro de luz emitido por un objeto debido a su velocidad de recesión con respecto a un observador que mide la luz emitida por dicho objeto. Dado que el Universo se está expandiendo, todas las estructuras que lo componen (galaxias, cúmulos de galaxias, etc.) se están alejando

entre si unas de otras lo que se traduce en un corrimiento al rojo de la luz que emiten y que es medida por algún observador.

Normalmente se denota el corrimiento al rojo con la letra “ z ” y se define como

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda}, \quad (1.55)$$

donde λ es la longitud de onda medida por un observador que se aleja o acerca de la fuente que emite la radiación y λ_o es la medida por un observador en reposo con la fuente.

Por otro lado, existe una relación entre z y el factor de escala, que aparece en la métrica de FRW, esta es, $a = 1/(1+z)$ [esto se explicará con más detalle en el siguiente capítulo]. Con esto, la expresión para el parámetro de Hubble (1.54) es

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_b^0 (1+z)^3 + \Omega_{mo}^0 (1+z)^3 + \Omega_r^0 (1+z)^4 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_k^0 (1+z)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.56)$$

Esta forma del parámetro de Hubble es muy útil para acotar los parámetros libres de un modelo cosmológico dado usando datos cosmológicos observacionales (como por ejemplo, datos de SNe Ia, anisotropías del CMB, etc.). Ésto es algo que también se explicará detalladamente en los siguientes capítulos.

Respecto al parámetro de curvatura, Ω_k^0 , para determinar cuál es el valor de k , o al menos si es positivo, negativo o cero, para el caso de un Universo constituido por materia bariónica, oscura, constante cosmológica y radiación, se puede utilizar la ecuación de Friedmann (1.42). Entonces, de acuerdo al valor de k y asumiendo el modelo Λ CDM se obtiene

$$\text{Cerrado } k > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_b^0 + \Omega_{mo}^0 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_r^0 > 1.$$

$$\text{Plano } k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_b^0 + \Omega_{mo}^0 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_r^0 = 1.$$

$$\text{Abierto } k < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_b^0 + \Omega_{mo}^0 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_r^0 < 1.$$

Por tanto, al conocer los valores de $(\Omega_{mo}^0, \Omega_b^0, \Omega_\Lambda^0, \Omega_r^0)$ queda determinada la geometría del Universo (de acuerdo a este modelo).

1.6. El parámetro de desaceleración

El parámetro de desaceleración de la expansión del Universo se define como

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (1.57)$$

En términos de $q(t)$ se tiene que

$$\ddot{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) < 0 \quad \text{Expansión } \textit{acelerada} \text{ del Universo.}$$

$$\ddot{a} < 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) > 0 \quad \text{Expansión } \textit{desacelerada} \text{ del Universo.}$$

De igual forma, de la definición del parámetro de Hubble $H(t) \equiv \dot{a}/a$ se tiene que

$$H(t) > 0 \Rightarrow \textit{Expansión} \text{ del Universo.}$$

$$H(t) < 0 \Rightarrow \textit{Contracción} \text{ del Universo.}$$

Capítulo 2

Pruebas cosmológicas

Gracias a los avances tecnológicos los astrónomos han extendido y mejorado ampliamente las mediciones del cosmos y los objetos celestes que lo habitan. La cosmología moderna se ha visto beneficiada de este hecho, ya que ha utilizado las observaciones astronómicas para verificar la viabilidad y congruencia de sus modelos.

A continuación se describirán cuatro pruebas cosmológicas para posteriormente ser empleadas en la verificación de modelos con energía oscura interactuantes con materia oscura. Para asegurar que las pruebas han sido aplicadas correctamente, en el capítulo 4 se utilizarán para analizar el modelo Λ CDM, el cuál ha sido ampliamente estudiado en la literatura, además de ser el más exitoso en la actualidad.

Las cuatro pruebas cosmológicas que se describirán son :

- La distancia modular de las supernovas tipo Ia.
- Oscilaciones acústicas bariónicas
- El parámetro de corrimiento de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo
- Estimaciones observacionales del parámetro de Hubble.

2.1. Prueba cosmológica utilizando supernovas tipo Ia

Una manera de reconstruir la historia de la expansión del Cosmos es mediante la medición de la posición y distancia de los objetos celestes que lo habitan respecto a nosotros, los observadores. La astronomía ha avanzado a tal grado que en la actualidad se dispone de variadas técnicas que permiten hacer estas mediciones con excelente precisión siempre y cuando los astros se encuentren alejadas a distancias del orden de parsecs. No obstante, cuando la separación entre fuente luminosa y observador alcanza órdenes de megaparsecs, las complicaciones crecen y se vuelve difícil utilizar métodos geométricos pues ya no son válidos. Por fortuna, existe una clase de objetos celestes llamadas *candelas estándar* cuyas características especiales permiten obviar este problema.

Las candelas estándar son objetos que tienen la misma luminosidad absoluta, es decir, son igualmente brillantes. Teniendo conocimiento de la luminosidad absoluta de una sola de ellas, por ejemplo, alguna que se ubique a unos cuantos parsecs de distancia de la Tierra, es posible medir la distancia a la que se encuentra cualquier otra candela calculado su luminosidad aparente. Esto se lleva a cabo midiendo el flujo observado de dicho objeto con respecto al observador, como se explicará en la sección 2.1.5.

Existen varios tipos de candelas estándar; sin embargo, las más útiles para medir enormes distancias son las *supernovas tipo Ia* (SNe Ia).

2.1.1. Supernovas tipo Ia: qué son y porqué sirven para medir distancias del orden de megaparsecs

Una supernova tipo Ia es la fase final de un sistema binario compuesto por una estrella enana blanca y una gigante roja que orbitan una alrededor de la otra. A causa de la rotación, la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la enana blanca sobre las capas exteriores de su compañera provoca que la primera tome masa de la segunda. A pesar de la adquisición de masa, el volumen de la estrella no aumenta, provocando que la presión de degeneración en el núcleo de la enana aumente [12]. No obstante, si la estrella



Figura 2.1: Candelas estándar: todas las del mismo tipo tienen la misma luminosidad absoluta L . Gracias a ello, conociendo la distancia a la cuál se encuentra una, se puede ubicar a otra candela midiendo su flujo observado f , también conocido como luminosidad aparente. El flujo de una fuente luminosa es $f = \frac{L}{4\pi r^2}$, así que conociendo L y f se puede calcular r [ver sección 2.1.5]. Créditos de la fotografía: NASA/JPL-Caltech.



Figura 2.2: Supernova 1994D (mancha brillante en la parte inferior izquierda de la imagen y señalado con una pequeña flecha) en la galaxia NGC 4526. Créditos de la fotografía: NASA, ESA, HST y High-Z Supernova Search Team.

llega a contener 1.4 masas solares (el límite de Chandrasekhar) las fuerzas internas y externas no pueden llegar a un estado de equilibrio, dando lugar al nacimiento de una supernova tipo Ia. El acontecimiento en todos los casos tiene prácticamente el mismo brillo intrínseco ya que el límite de Chandrasekhar permanece constante. Esto convierte a la supernova tipo Ia en una candela estándar.

Una de las ventajas de utilizar este tipo de objetos para mediciones astronómicas es que sus explosiones son enormemente brillantes, comparable con el de millones de estrellas juntas que conforman la galaxia donde habita [3]. Por ello, estas explosiones pueden ser vistas a distancias muy grandes de nosotros y arrojar resultados precisos al ser utilizadas para pruebas cosmológicas.

Una dificultad con el uso de supernovas tipo Ia como candelas estándar es que su formación es un evento raro. La muestra de SNe Ia del 2011 cuenta con 580 datos, un incremento con respecto al año anterior (557 datos), sin embargo éstas observaciones han tenido lugar por más de veinte años. La supernova más distante que se ha podido medir con confiabilidad se localiza a $z = 1,414$ que corresponde a medir la historia de la expansión del Universo hasta una época en la cuál éste tenía menos de la mitad del tamaño que tiene ahora.

La *magnitud absoluta* típica de una supernova Ia es de $M = -19,31 \pm 0,03 + 5 \log_{10} h_{70}$ [4], con pequeñas variaciones [2]; donde $h_{70} = 0,7$, que significa asumir un valor de la constante de Hubble $H_0 = 70$ (km/s)Mpc⁻¹ en la definición $H_0 = h \times 100$ (km/s)Mpc⁻¹.

La magnitud M de una SNe Ia es 5×10^9 veces más brillante que el Sol. La energía radiada es de aproximadamente $1 - 2 \times 10^{44}$ joules [13]. La duración de la explosión de una supernova es de 50 a 200 días [17]. Recientemente, mediante la medición de estos objetos se descubrió que el Universo se está expandiendo aceleradamente; los detalles de este descubrimiento se analizarán en el capítulo 4.

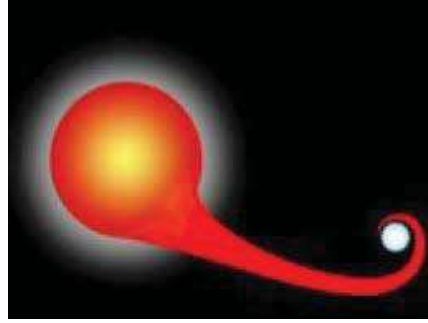


Figura 2.3: Diagrama de un sistema binario compuesto por una gigante roja y una enana blanca. La enana blanca consume masa de su compañera a pesar de que su volumen permanece constante

2.1.2. Lo que mide la prueba

La prueba mide la diferencia entre magnitud absoluta y aparente de luminosidad de diferentes SNe Ia

2.1.3. Relación entre el factor de escala y el redshift

A escala de distancias cosmológicas, la luz proveniente de una fuente luminosa en el Universo, por ejemplo una galaxia o una supernova, sufre un efecto de *corrimiento al rojo* o (“redshift”) al ir viajando a través del espacio debido a su velocidad recesional de esa fuente, por la expansión del Universo.

Por lo mismo, un observador en la Tierra que mida la luz que proviene de una lejana galaxia, notará que las líneas espectrales en conjunto del objeto estarán corridas al rojo, lo que significa que la frecuencia de la luz observada es menor que lo esperado si la galaxia estuviera en reposo con respecto a la Tierra (o a la Vía Láctea).

Este fenómeno del corrimiento al rojo de la luz es utilizado para trazar la historia de la expansión del Universo a través del valor medido de este corrimiento por los telescopios, y observando objetos ubicados a distintas distancias cosmológicas de nosotros. Como se mencionó anteriormente, hoy en día los objetos más confiables para describir esta expansión son las SNe Ia.

Conviene aclarar que el corrimiento al rojo ocurre no sólo debido a la expansión del Universo sino también debido al movimiento de rotación de la galaxia en la cual se encuentra, la rotación en el cúmulo de galaxias donde habita, etc., así como también para el observador, debido a la rotación de la Tierra en la Vía Láctea y en el cúmulo de Virgo, etc. Si el movimiento es en dirección a la Tierra el acercamiento induce un corrimiento al azul [3].

Para las supernovas, estos movimientos son llamados *movimientos intrínsecos* o *velocidades peculiares*, que inducen un corrimiento en uno u otro sentido pero que es muy pequeño¹ (despreciable) en comparación al corrimiento al rojo debido a la expansión del Universo.

Por ello, se suele llamar *“corrimiento al rojo cosmológico”*, al fenómeno debido únicamente a la expansión del Universo, para distinguirlo del corrimiento debido a otros movimientos relativos entre la fuente y el observador (los movimientos intrínsecos).

La relación entre el corrimiento al rojo y el factor de escala se calcula de la siguiente manera. Supongamos un Universo caracterizado por la métrica de FRW. También supongamos una fuente luminosa distante (por ejemplo, una supernova Ia o una galaxia) con coordenadas espaciales comóviles ($r = r^*$, $\theta = 0$, $\phi = 0$), y un observador ubicado en ($r = 0$, $\theta = 0$, $\phi = 0$) (ver figuras 4 y 5). Por simplicidad y sin pérdida de generalidad es que se ha elegido ($\theta = 0$, $\phi = 0$).

Consideremos que la fuente luminosa emite dos fotones de la misma frecuencia ω_e . Un fotón es emitido al tiempo t_e y el otro al tiempo $t_e + \delta t_e$. El subíndice “e” indica “emitido”. Por su parte, el observador recibe los dos fotones, el primer fotón emitido lo recibe al tiempo t_o y el segundo al tiempo $t_o + \delta t_o$, y les asigna una frecuencia ω_o . El subíndice “o” indica “observado”.

Los fotones siguen una curva nula caracterizada por

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} \right), \quad (2.1)$$

¹Las velocidades peculiares v típicas de una supernova son $200 \text{ km/s} \leq v \leq 500 \text{ km/s}$ [17], algunos autores asumen en sus cálculos el valor de 300 km/s principalmente [4].

por lo cual

$$dt = \pm a(t) \left(\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \right). \quad (2.2)$$

El signo “+” indica que el fotón se mueve al futuro y “-” al pasado. Respecto al primer fotón emitido, entre el tiempo t_e y t_o éste viajó la distancia χ^* , que se puede calcular integrando a partir de la ecuación (2.2) como

$$\chi^* = \int_{r^*}^0 \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.3)$$

Nótese que la magnitud de χ^* se fijó desde el inicio, al momento de establecer las posiciones de la fuente con respecto al observador. Además, su magnitud no cambia en el tiempo ya que es una coordenada comóvil, por lo tanto es una constante².

Del mismo modo para el segundo fotón emitido, la distancia que recorre es igual χ^* :

$$\chi^* = \int_{r^*}^0 \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.4)$$

Igualando estas dos expresiones obtenemos

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.5)$$

desarrollamos la integral del lado derecho de la igualdad como

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.6)$$

Substituyendo en la ecuación (2.5) vemos que se elimina el término del lado izquierdo de la igualdad con uno de los que se obtienen de la expresión (2.6), por lo que la expresión (2.5) resulta

$$\int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.7)$$

Ahora, asumimos que los incrementos δt_e y δt_o son muy pequeños, esto es, que el intervalo de tiempo transcurrido entre t_e y $t_e + \delta t_e$ es infinitesimal, lo mismo que para t_o y $t_o + \delta t_o$, comparados con las escalas de tiempo cosmológicas. De esto, se puede suponer que el factor de escala es aproximadamente constante o no cambia durante los intervalos de tiempo $[t_e, t_e + \delta t_e]$ y $[t_o, t_o + \delta t_o]$, es decir, $a(t_e) \approx a(t_e + \delta t_e)$ y $a(t_o) \approx a(t_o + \delta t_o)$. Con este argumento, podemos sacar de la integral a $a(t)$ en la expresión (2.7), obteniendo

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} dt = \frac{1}{a(t_o)} \int_{t_o}^{t_o+\delta t_o} dt, \quad (2.8)$$

integrando (8)

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_o}{a(t_o)}. \quad (2.9)$$

En la realidad la fuente luminosa no sólo emite dos fotones sino todo un conjunto de ellos, que son emitidos con un periodo igual a δt_e , y observados con un periodo δt_o . De aquí que la frecuencia angular ω de estos fotones es

$$\omega_e = \frac{2\pi}{\delta t_e} \quad \text{y} \quad \omega_o = \frac{2\pi}{\delta t_o}, \quad (2.10)$$

sustituyendo estas expresiones en (2.9) se obtiene

²Como se comentó anteriormente, a pesar de que la fuente luminosa (o el observador) tenga movimientos intrínsecos, el redshift que inducen es despreciable en comparación con el corrimiento al rojo cosmológico. Debido a ello, se puede considerar con buena aproximación que la fuente está “fija” en sus coordenadas comóviles.

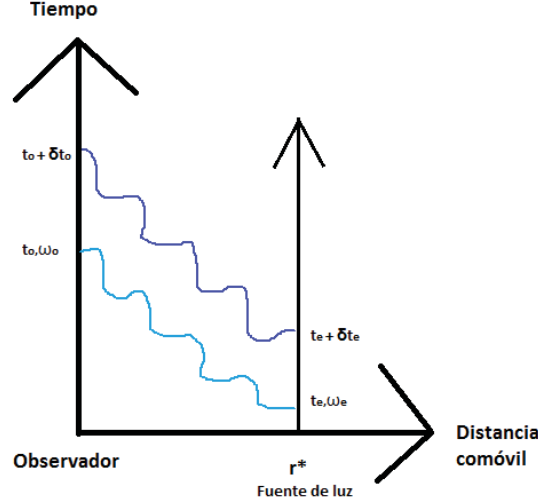


Figura 2.4: Gráfica que muestra las líneas temporales y las coordenadas comóviles de una fuente luminosa y un observador en un Universo en expansión. La fuente, que se encuentra a una distancia comóvil r^* alejada del observador, emite dos fotones con frecuencia ω_e , uno al tiempo t_e y el segundo al tiempo $t_e + \delta t_e$. El observador detecta los dos fotones con una frecuencia ω_o al tiempo t_o y $t_o + \delta t_o$ respectivamente. La frecuencia de los fotones sufre un *corrimiento al rojo cosmológico* debido a la expansión del Universo. En este tipo de gráfica, las dos líneas temporales, la del observador y la fuente, son paralelas debido a que su distancia r^* es comóvil, y las trayectorias de ambos fotones se curvan al viajar de la fuente al observador debido a la expansión.

$$\frac{a(t_o)}{a(t_e)} = \frac{\omega_e}{\omega_o}, \quad (2.11)$$

usando el hecho de que el corrimiento al rojo z se define en término de la frecuencia angular como

$$z \equiv \frac{\omega_e - \omega_o}{\omega_o}, \quad (2.12)$$

podemos escribir la expresión (2.11) como

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (2.13)$$

Regularmente en la literatura se suele expresar esta relación de manera más compacta como

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)}, \quad (2.14)$$

de donde se entiende que a_0 es el valor que tiene el factor de escala hoy en día y $a(t)$ el valor que tuvo o tendrá en algún otro momento. La teoría no dice cual debe ser el valor de a_0 , así que normalmente y por simplicidad se elige que $a_0 = 1$, por lo que se tiene

$$1 + z = \frac{1}{a(t)} \quad (2.15)$$

Entonces, con la expresión (2.15), una vez que se mide el corrimiento z de una fuente lejana se puede determinar a qué época de la evolución corresponde esa fuente a través de $a(t)$.

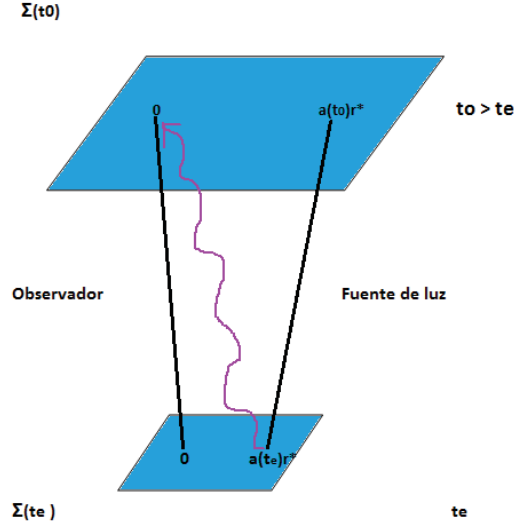


Figura 2.5: Gráfica equivalente a la figura 4 pero ahora en coordenadas espaciales que no son comóviles. En este caso la distancia inicial entre el observador y la fuente al tiempo t_e cuando es emitido el primer fotón es $a(t_e)r^*$. Y la distancia final cuando el fotón llega al observador es $a(t_o)r^*$. En este caso las líneas temporales de la fuente y el observador no son paralelas, sino que se van separando conforme el tiempo avanza debido a la expansión del Universo.

2.1.4. Distancia de luminosidad

Consideremos de nuevo las líneas de mundo de un observador ubicado en las coordenadas comóviles ($r = 0, \theta = 0, \phi = 0$) y una explosión de supernova (o alguna otra fuente luminosa) ubicada en ($r = r^*, \theta = 0, \phi = 0$) la cual emite fotones que llegan hasta el observador (ver figuras 4 y 5). El cálculo teórico de la distancia de luminosidad se realiza a través de calcular primero la distancia comóvil r^* .

A partir de la métrica de FRW, la trayectoria nula que siguen los fotones entre la fuente y el observador esta dada por las expresiones (2.1), (2.2), de aquí se obtiene la igualdad (2.3), es decir,

$$\int_0^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.16)$$

Note que se han invertido los límites de integración de la expresión (2.3). Esto es posible debido a que lo que importa es la magnitud de r^* , que es lo que se desea calcular. En el lado izquierdo de la integral existen tres casos dependiendo del valor de la curvatura k :

- $k > 0$: Usando una integración trigonométrica

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - kr^2} \quad (2.17)$$

$$\sin(\theta) = \sqrt{k}r \quad (2.18)$$

$$dr = \frac{\cos(\theta)d\theta}{\sqrt{k}} \quad (2.19)$$

Entonces

$$\int_0^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sin^{-1}(\sqrt{|k|r^*}), \quad (2.20)$$

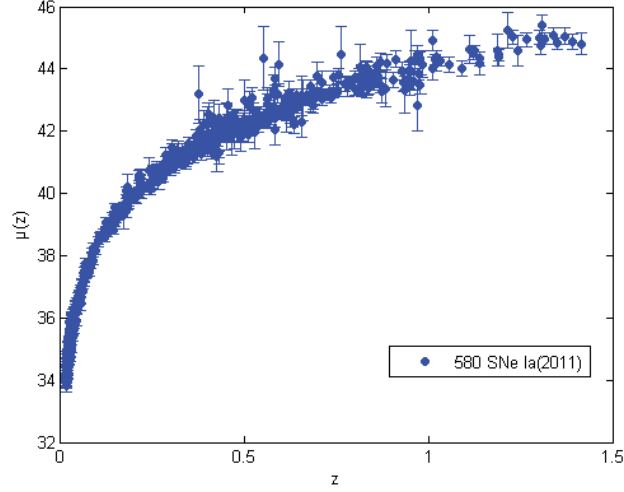


Figura 2.6: Datos de la distancia modular $\mu(z)$ de supernovas tipo Ia [ver definición (2.44) y sección 2.1.6] de la muestra “Union2.1” del *Supernova Cosmology Project* (SCP) [20] que es la muestra más grande con la que se cuenta actualmente. Está compuesta por 580 datos de SNe Ia. El eje horizontal corresponde a corrimiento al rojo z y el vertical a la distancia modular $\mu(z)$.

- $k < 0$: Tomando en cuenta la identidad

$$\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1 \quad (2.21)$$

Sea

$$\cosh^2(\theta) = 1 + \sinh^2(kr^2) \quad (2.22)$$

donde

$$\sinh(\theta) = \sqrt{k}r \quad (2.23)$$

$$dr = \frac{\cosh(\theta)dr}{\sqrt{k}} \quad (2.24)$$

Entonces

$$\int_0^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sinh^{-1}(\sqrt{|k|}r^*), \quad (2.25)$$

- $k = 0$

$$\int_0^{r^*} dr = r^* \quad (2.26)$$

Para resumir los resultados anteriores se define la función “sinn”

$$\text{sinn}(x) \equiv \begin{cases} \sin(x) & \text{si } k > 0 \text{ (i.e., Universo espacialmente } \textit{cerrado}, \Omega_k < 0), \\ x & \text{si } k = 0 \text{ (i.e., Universo espacialmente } \textit{plano}, \Omega_k = 0), \\ \sinh(x) & \text{si } k < 0 \text{ (i.e., Universo espacialmente } \textit{abierto}, \Omega_k > 0). \end{cases} \quad (2.27)$$

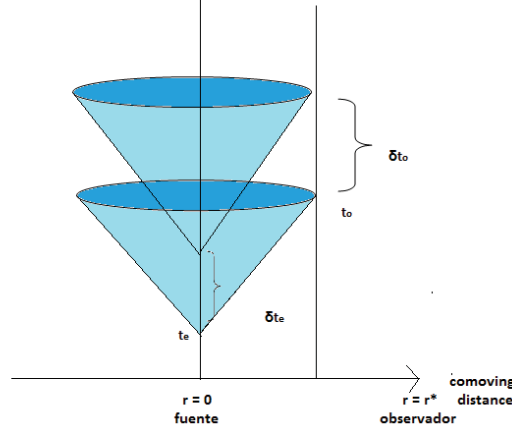


Figura 2.7: Una fuente luminosa localizada en $r = 0$ emite luz en todas direcciones durante un lapso de tiempo δt_e . Al cabo de un cierto tiempo, un observador situado a una distancia comóvil r^* mide un flujo de luz proveniente de la fuente, durante un lapso de tiempo δt_o .

Por otro lado, la integral del lado derecho de la igualdad de la expresión (2.16) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{a(t_e)}^{a(t_o)} \frac{da}{a(t)(da/dt)}, \\ &= \int_{a(t_e)}^{a(t_o)} \frac{da}{a^2 (\dot{a}/a)}, \\ &= \int_{a_e}^{a_o} \frac{da}{a^2 H}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde se ha utilizado la definición del parámetro de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$. Luego, utilizando la relación (2.15) entre el factor de escala y el corrimiento al rojo, $a = 1/(1+z)$, implica que $da = -dz/(1+z)^2$, donde $a_e \rightarrow z$ y $a_o \rightarrow z = 0$. Haciendo el cambio de variable $a \rightarrow z$, la expresión (2.28) puede escribirse como

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = - \int_z^0 \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.29)$$

Utilizando las expresiones (2.27) y (2.29), la igualdad (2.24) puede expresarse como

$$\frac{1}{\sqrt{|k|}} \text{sinn}^{-1}(\sqrt{|k|}r^*) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.30)$$

De esta expresión, resolvemos para r^* para obtener

$$r^*(z) = \frac{c}{\sqrt{|k|}} \text{sinn} \left[\sqrt{|k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (2.31)$$

donde hemos puesto explícitamente el factor de la velocidad de la luz, $c = 3 \times 10^5$ km/s, para tener la expresión de la distancia comóvil, $r^*(z)$, con sus unidades reales. Las unidades de los demás factores son: $[k] = 1/(\text{distancia})^2$, $[H] = (1/\text{tiempo})$, el redshift z es adimensional.

Por otro lado, la *distancia efectiva* d_{eff} entre el observador y la fuente está dada por $d_{\text{eff}} = a_0 r^*(z)$. Luego, en astronomía resulta útil definir la llamada *distancia de luminosidad*, que en términos de la distancia efectiva se expresa como

$$d_L(z) \equiv d_{\text{eff}}(1+z). \quad (2.32)$$

Entonces, sustituyendo la expresión (2.31) para r^* en la distancia efectiva, y ésta a su vez en la definición de la distancia de luminosidad (2.32) obtenemos [17]:

$$d_L(z) = c \frac{(1+z)}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn} \left[\sqrt{|k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right]. \quad (2.33)$$

La expresión para $H(z)$ estará dada por el modelo cosmológico en particular, es decir, es en $H(z)$ donde se incluye a la *teoría* cosmológica.

2.1.5. Luminosidad y flujo

A continuación se definen algunas cantidades usadas en astrofísica y astronomía que serán de utilidad:

Luminosidad L . Cantidad de energía radiada por una fuente, por unidad de tiempo.

Flujo f . Cantidad de energía radiada por una fuente, por unidad de tiempo, por unidad de área, en todas direcciones de forma isotrópica.

De estas definiciones es claro que L y f se relacionan de la siguiente manera

$$L = \int_{S^2} f dA = 4\pi r^2 f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (2.34)$$

Consideremos una fuente luminosa en el Universo (por ejemplo, una galaxia o una supernova) cuya luminosidad *emitida* deseamos calcular, a una frecuencia particular ω_e de los fotones. El subíndice “ e ” indica “emitidos” por la fuente luminosa. Sea entonces

- n_e = número de fotones emitidos por unidad de tiempo.
- N_e = número total de fotones emitidos. Lo cual significa que $n_e = N_e/\delta t_e$, donde δt_e es el lapso de tiempo infinitesimal durante el cual la fuente luminosa emite fotones.
- E_e = energía de un fotón con frecuencia ω_e , es decir, $E_e = \hbar\omega_e$.

La luminosidad emitida se expresa como

$$L_e = E_e \frac{N_e}{\delta t_e} = E_e n_e = \hbar\omega_e n_e. \quad (2.35)$$

Supongamos que la fuente se encuentra ubicada en las coordenadas espaciales comóviles ($r = 0, \theta = 0, \phi = 0$). Y que además hay un observador ubicado en ($r = r^*, \theta = 0, \phi = 0$) que mide desde su ubicación la luminosidad de la fuente (ver figura). De manera análoga a la expresión (2.35), la luminosidad observada de la fuente se expresa como

$$L_o = E_o \frac{N_o}{\delta t_o} = E_o n_o = \hbar\omega_o n_o, \quad (2.36)$$

donde el subíndice “ o ” indica “observada”. Asumiendo que todos los fotones emitidos por la fuente en $r = 0$ llegan a una esfera de radio $r = r^*$, al cabo de un cierto tiempo se tiene que

$$N_e = N_o, \quad (2.37)$$

lo cual significa que ningún fotón ha sido absorbido por algún tipo de materia durante su recorrido hasta el observador ³.

Usando la relación $1 + z = \delta t_o/\delta t_e = \omega_e/\omega_o$ [ver expresiones (2.10,2.12)], se puede deducir de la expresión (2.37) que

$$\begin{aligned} N_e = N_o \quad \Rightarrow \quad n_e \delta t_e = n_o \delta t_o \quad \Rightarrow \quad n_o = n_e \frac{\delta t_e}{\delta t_o} \quad \Rightarrow \\ n_o = \frac{n_e}{1+z}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Y de la expresión (2.36) se deduce que

³En realidad, algunos fotones son absorbidos durante su trayecto, sin embargo en esta tesis utilizamos una primera aproximación despreciando este hecho.

$$L_o = \hbar \omega_o n_o = \hbar \left(\frac{\omega_e}{1+z} \right) \left(\frac{n_e}{1+z} \right) \Rightarrow$$

$$L_o = \frac{L_e}{(1+z)^2}. \quad (2.39)$$

Por otra parte, consideremos el flujo de energía “ f_o ” [ver definición (2.34)] que el observador mide de la fuente, desde su ubicación. La distancia efectiva d_{eff} entre el observador y la fuente esta dada por $d_{\text{eff}} = a(t)r^*$. Con esto, el flujo *observado* puede expresarse como

$$f_o = \frac{L_o}{4\pi d_{\text{eff}}^2}, \quad (2.40)$$

usando la expresión (2.39) tenemos

$$f_o = \frac{L_e}{4\pi d_{\text{eff}}^2 (1+z)^2}. \quad (2.41)$$

2.1.6. La distancia modular.

Como se mencionó al principio de este capítulo, en años recientes los astrónomos han descubierto que las supernovas tipo Ia se comportan como candelas estándar, es decir, que la luminosidad absoluta de cualquier explosión de SNe Ia es prácticamente la misma, sin importar la parte del Universo donde sucedan. Este hecho ha sido aprovechado por los astrónomos para medir distancias cosmológicas de las galaxias y cúmulos de galaxias que las hospedan y con ello ir trazando la historia de la expansión del Universo.

La otra ventaja de las SNe Ia es que la explosión es enormemente brillante, lo que les permite ser vistas a grandes distancias, y con ello hacer mediciones muy grandes y con mayor precisión que utilizando otras técnicas u objetos. La observaciones de objetos lejanos permite recrear la historia de la expansión a tiempos más tempranos del Universo.

En una combinación de observaciones y modelos físicos, los astrónomos han determinado la expresión y sus coeficientes para la *magnitud absoluta* de la luminosidad de una supernova tipo Ia, que se expresa como

$$M \equiv -2,5 \log_{10} \left(\frac{L_e}{L_{\text{sun}}} \right) + 4,74, \quad (2.42)$$

donde el subíndice “sun” indica la luminosidad total del Sol, y que se usa como medida de referencia y calibración en la expresión (2.42). La magnitud de esta luminosidad es: $L_{\text{sun}} = 3,85 \times 10^{33}$ erg/seg. Observacionalmente los astrónomos han determinado un valor de $M = -19,31 \pm 0,03 + 5 \log_{10} h_{70}$ [4] para las supernovas, donde $h_{70} = 0,7$.

Por otra parte, la *magnitud aparente* u observada de la luminosidad se define como

$$m \equiv -2,5 \log_{10} \left(\frac{f_o}{f_{\text{sun}, 10\text{pc}}} \right) + 4,74, \quad (2.43)$$

donde el subíndice “sun, 10pc” indica que es el flujo del Sol medido a una distancia de 10 parsecs. La magnitud de este flujo es: $f_{\text{sun}, 10\text{pc}} = 3,21 \times 10^{-7}$ erg/(cm²·seg). Con estas dos magnitudes, se define la *distancia modular* como

$$\mu \equiv m - M. \quad (2.44)$$

Utilizando las expresiones (2.42–2.43), se puede expresar la distancia modular como

$$\begin{aligned} \mu &= 2,5 \left[\log_{10} \left(\frac{L_e}{L_{\text{sun}}} \right) - \log_{10} \left(\frac{f_o}{f_{\text{sun}, 10\text{pc}}} \right) \right] \\ &= 2,5 \left[\log_{10} \left(\frac{L_e \cdot f_{\text{sun}, 10\text{pc}}}{L_{\text{sun}} \cdot f_o} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

sustituyendo la expresión (2.41) para f_o se obtiene

$$\mu = 2,5 \log_{10} \left(\frac{f_{\text{sun}, 10\text{pc}}}{L_{\text{sun}}} \cdot 4\pi d_{\text{eff}}^2 (1+z)^2 \right). \quad (2.46)$$

Por otra parte, usando de nuevo la expresión (2.41), se puede escribir el término del flujo para el Sol como

$$f_{\text{sun}, 10\text{pc}} = \frac{L_{\text{sun}}}{4\pi d_{\text{eff}, \text{sun}}^2 (1+z_{\text{sun}})^2}. \quad (2.47)$$

Sin embargo, el corrimiento al rojo cosmológico para el Sol, z_{sun} , es prácticamente cero, lo cual es muy razonable ya que la distancia entre la Tierra y el Sol es en esencia nula en comparación a las escalas cosmológicas. De aquí que la ecuación (2.47) se pueda expresar como

$$f_{\text{sun}, 10\text{pc}} = \frac{L_{\text{sun}}}{4\pi (10\text{pc})^2}, \quad (2.48)$$

sustituyendo en (2.46) tenemos

$$\begin{aligned} \mu &= 2,5 \log_{10} \left(\frac{d_{\text{eff}}^2 (1+z)^2}{(10\text{pc})^2} \right), \\ &= 5 \log_{10} \left(\frac{d_{\text{eff}} (1+z)}{10\text{pc}} \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Normalmente, en lugar de la distancia efectiva d_{eff} , los astrónomos suelen usar la distancia de luminosidad $d_L(z) \equiv d_{\text{eff}}(1+z)$ [ver expresión 2.33] en la distancia modular (2.49). Por otra parte, para medir distancias cosmológicas es más conveniente usar unidades de megaparsecs (Mpc) en lugar de parsecs. Así que utilizando el hecho de que $10 \text{ pc} = 1 \text{ Mpc}/10^5$ podemos expresar la ecuación (2.49) como

$$\begin{aligned} \mu &= 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}} \cdot 10^5 \right), \\ &= 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}} \right) + 5 \log_{10}(10^5), \end{aligned} \quad (2.50)$$

con lo cual se llega a

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25, \quad (2.51)$$

donde $d_L(z)$ está dado por la expresión (2.33). Esta expresión de la distancia modular corresponde al cálculo teórico de su magnitud, es decir, a partir de una teoría o modelo cosmológico, se puede determinar cual es la magnitud que predice el modelo para la distancia modular $\mu(z)$ de un objeto luminoso ubicado a una distancia z de nosotros. En contraparte, los astrónomos miden esta magnitud para diversos objetos brillantes en el Universo, en particular, para las supernovas Ia.

Por tanto, empleando la expresión (2.51) es posible confrontar las predicciones de un modelo teórico, contra el conjunto de datos observacionales de supernovas Ia (u objetos luminosos) y estudiar qué tanto el modelo es capaz de reproducirlos a través de $\mu(z)$. En la figura 2.6 se muestran los datos observacionales más recientes de la distancia modular de supernovas Ia de la muestra Union2.1 (2011) del “Supernova Cosmology Project” (SCP) compuesta de 580 datos de SNe Ia [20].

La confrontación entre “teoría *vs* datos” y toda la información que se obtiene de hacer este análisis se describirá con detalle en el capítulo tres.

2.2. Prueba de Oscilaciones acústicas bariónicas (BAO)

En la sección anterior se expusieron las razones que convierten a las candelas estándar en objetos idóneos para su utilización en pruebas cosmológicas. Existen también otra clase de objetos llamados *reglas estadísticas estándar* (SSR, por sus siglas en inglés) que sirven para el mismo fin.

Los SSR pueden referirse a dos cosas: objetos de tamaño conocido a un redshift dado o una población de objetos a diferentes redshifts cuyo tamaño cambia de manera conocida [6]. Las galaxias utilizadas para las mediciones de BAO son SSR.

Las oscilaciones acústicas bariónicas son fluctuaciones periódicas en la densidad de la materia bariónica del Universo, causado por ondas acústicas que existieron el Cosmos temprano.

z	$\frac{r_s(z_d)}{D_V(z)}$
0.2	0.1905 ± 0.0061
0.35	0.1097 ± 0.0036

Cuadro 2.1: Datos observacionales utilizados en la prueba BAO [14].

2.2.1. Qué mide la prueba

La prueba mide la relación distancia-corrimiento al rojo en dos puntos de la muestras de galaxias del *Sloan Digital Sky Survey (SDSS)* y del *Two Degree Field Galaxy Redshift Survey (2dFGRS)* [21]. La galaxia más lejana está ubicada en $z = 0,47$, sin embargo, para asegurar que el estudio se hace en el grueso de la muestra y no en sus orillas generalmente se trabaja en dos puntos: $z = 0,2$ y $z = 0,35$ [3].

Las posiciones más altas de la relación distancia-corrimiento al rojo dependen de la razón entre el tamaño del horizonte de sonido comóvil $r_s(z_d)$ evaluada en la época de arrastre de bariones y la distancia de dilatación $D_v(z)$ [23].

2.2.2. La época de arrastre de bariones

En las primeras etapas de vida del Universo, la componente dominante no era la energía oscura sino un fluido compuesto por bariones, electrones y fotones interactuando a través del efecto Compton y la fuerza de Coulomb [10]. No obstante, al llegar al proceso de recombinación, la dispersión causada por el efecto Compton entre electrones y fotones se debilitó, provocando que los bariones atraídos por los electrones fueron liberados. El momento en el que ocurrió el fenómeno de liberación de bariones se denomina *época de arrastre de bariones* z_d . El cálculo de z_d fue realizado en la referencia [9] y esta dado por:

$$z_d = 1291 \left[1 + b_1(\Omega_b h^2)^{b_2} \right] \left[\frac{(\Omega_0 h^2)^{0,251}}{1 + 0,659(\Omega_0 h^2)^{0,828}} \right], \quad (2.52)$$

donde

$$b_1 = 0,313[\Omega_0 h^2]^{-0,419} [1 + 0,607(\Omega_0 h^2)^{0,674}], \quad (2.53)$$

$$b_2 = 0,238[\Omega_0 h^2]^{0,223}. \quad (2.54)$$

El parámetro adimensional $h = \frac{H}{100}$, es simplemente otra manera de expresar el valor del parámetro de Hubble.

2.2.3. El tamaño del horizonte de sonido comóvil

En esta sección se explicará el significado físico de $r_s(z)$. Generalmente se utiliza una analogía con la velocidad del sonido pero entendiendo *sonido* como las ondas mecánicas que se propagan en un fluido:

$$\frac{C_s}{c^2} = \frac{\partial P}{\partial \rho}, \quad (2.55)$$

donde P es la presión y ρ la densidad. En la época anterior al arrastre, el fluido presente en el Universo estaba compuesto de fotones y bariones.

$$P = P_\gamma + P_b = \frac{c^2}{3} \rho_\gamma, \quad (2.56)$$

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_b, \quad (2.57)$$

Entonces

$$\frac{C_s}{c^2} = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\frac{\partial P}{\partial a}}{\frac{\partial \rho}{\partial a}} = \frac{\frac{c^2}{3} \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial a}}{\frac{\partial}{\partial a} (\rho_\gamma + \rho_b)}, \quad (2.58)$$

Utilizando las densidades de los fluidos del Universo encontradas en el capítulo 1,

$$c_s^2 = \frac{\frac{4}{3}c^3\rho_\gamma^0}{4\rho_\gamma^0 + 3a\rho_b^0}, \quad (2.59)$$

Multiplicando y dividiendo (2.59) por la densidad crítica,

$$c_s^2 = \frac{\frac{4}{3}c^3\Omega_\gamma^0}{4\Omega_\gamma^0 + 3a\Omega_b^0} = \frac{\frac{4}{3}c^3\Omega_\gamma^0}{3\left(\frac{4}{3}\Omega_\gamma^0 + a\Omega_b^0\right)} = \frac{1}{\frac{3}{c^3}\left(1 + \frac{3a}{4}\frac{\Omega_b^0}{\Omega_\gamma^0}\right)}. \quad (2.60)$$

A la distancia que recorre el sonido en un fluido a partir del Big Bang hasta un redshift dado se le llama el tamaño del horizonte de sonido comóvil y se define como

$$r_s(z) = c \int_0^t \frac{c_s dt}{a}, \quad (2.61)$$

Multiplicamos y dividimos (2.61) por da

$$r_s(z) = c \int_0^{\tilde{a}} \frac{c_s da}{a \frac{da}{dt}} = c \int_0^{\tilde{a}} \frac{c_s da}{a \dot{a} \frac{a}{a}} = c \int_0^{\tilde{a}} \frac{c_s da}{a^2 H}. \quad (2.62)$$

Del capítulo 1 recordamos el factor de escala en función del redshift

$$a = \frac{1}{1+z}, \quad (2.63)$$

Utilizamos (2.63) y su derivada con respecto a z en (2.62)

$$r_s = c \int_z^\infty \frac{c_s dz}{H}, \quad (2.64)$$

cambiando a la variable a

$$r_s = c \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{c_s(1+z)^2 da}{H}, \quad (2.65)$$

Sustituyendo (2.60) en (2.65)

$$r_s(z_d) = \frac{c}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{1+z_d}} \frac{da}{a^2 H(a) \sqrt{1 + a \left(\frac{3\Omega_b}{4\Omega_\gamma}\right)}} \quad (2.66)$$

2.2.4. La distancia de dilatación D_V

La otra cantidad involucrada en el cociente medido observacionalmente en BAO es la distancia de dilatación D_V . Considere un observador ubicado en el punto 0 (ver figura 8). Un objeto luminoso, cuyas dimensiones están dadas por los puntos ABCD subtiende un ángulo $\Delta\theta$.

La distancia CD es

$$CD = x\Delta\Theta, \quad (2.67)$$

La distancia comóvil AB no subtiende ningún ángulo

$$AB = \Delta X, \quad (2.68)$$

Encontradas CD y AB, definimos un volumen cúbico entre observador y objeto observado

$$D_V^3(z) \equiv X^2 \Delta X, \quad (2.69)$$

De esta manera asociamos D_V con la raíz cúbica del producto de la dilatación radial por el cuadrado de la dilatación transversal. Otra manera de expresar esta cantidad es [10].

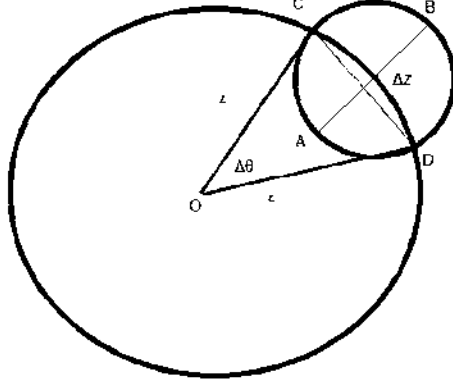


Figura 2.8: Un objeto de dimensiones ABCD subtende un ángulo $\Delta\Theta$. Calculando las distancias comóviles AB y CD es posible definir la distancia de dilatación. Créditos de la imagen original: Nesseris et al. [16].

$l_A(z_*)$	$R(z_*)$	z_*
302.09	1.725	1091.3

Cuadro 2.2: Datos observacionales utilizados en la prueba CMB [14].

$$D_V(z) = \left[(1+z)^2 D_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (2.70)$$

donde

$$D_A(z) = \frac{d_L(z)}{(1+z)^2}. \quad (2.71)$$

es la distancia diametral angular comóvil.

2.3. Prueba de CMB

Esta prueba es la más precisa de todas. Las anisotropías de la radiación cósmica de fondo son además la observación más fehaciente de que el Universo es homogéneo e isotrópico a gran escala.

Este test toma como conocidos los parámetros de densidad de fotones y materia bariónica [25]

$$\Omega_\gamma = (2,469 \times 10^{-5})h^{-2} \quad (2.72)$$

$$\Omega_b = (0,02246)h^{-2} \quad (2.73)$$

Para el cálculo del parámetro de radiación utiliza el número efectivo de especies de neutrinos tomando el valor estándar $N_{eff} = 3,04$ [25]

$$\Omega_r = \Omega_\gamma(1 + 0,2271N_{eff}). \quad (2.74)$$

2.3.1. La época de desacoplamiento de fotones

Antes de que los bariones fueran arrastrados (ver sección 2.2.2), la expansión del Universo provocó que la dispersión del efecto Compton se redujera, de manera que los fotones dejaron de interactuar con los electrones y se desacoplaron, siguiendo su propio curso en la historia del Cosmos y viajando hasta el tiempo actual. A esta periodo se le conoce como la época de desacoplamiento de fotones y está dado por el valor z_* el cuál fue calculado en la referencia [9]:

$$z_* = 1048 [1 + 0,00124(\Omega_b h^2)^{-0,738}] [1 + g_1(\Omega_m h^2)^{g_2}], \quad (2.75)$$

donde

$$g_1 = \frac{0,0783(\Omega_b h^2)^{-0,238}}{1 + 39,5(\Omega_b h^2)^{0,763}}, \quad (2.76)$$

y

$$g_2 = \frac{0,560}{1 + 21,1(\Omega_b h^2)^{1,81}}. \quad (2.77)$$

2.3.2. Las anisotropías de temperatura de CMB

Las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo pueden expresarse con la ayuda de los armónicos esféricos

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.78)$$

donde los coeficientes son

$$C_l = |a_{lm}|^2. \quad (2.79)$$

Si se asume un modelo cosmológico de referencia donde $\Omega_M = 1$, el primer pico de las anisotropías de temperatura de CMB se encuentra en $l_1^{TT} = 246$. Para el modelo Λ CDM, el pico se encuentra en $l_1^{TT} = 220$ (ver figura 9).

2.3.3. Qué mide la prueba

El parámetro de corrimiento R mide la razón entre l_1^{TT} y l_1^{TT} . Para saber hasta que punto el modelo a probar concuerda o no con las observaciones se compara esta cantidad con el valor teórico de R

$$R(z_*) = \sqrt{\Omega_{M0} H_0^2} \int_0^{z_*} \frac{dz}{H(z)}, \quad (2.80)$$

donde es evidente la dependencia de $R(z_*)$ con el parámetro de densidad de materia Ω_{M0} y la distancia comóvil.

2.3.4. La escala angular de z_*

Para terminar, el último dato de esta prueba se define como la escala angular del horizonte de sonido en la época de desacoplamiento.

$$l_A \equiv \frac{(1 + z_*)\pi D_A(z_*)}{r_s(z_*)}. \quad (2.81)$$

$$X_i = (l_A, R, z_*) \quad (2.82)$$

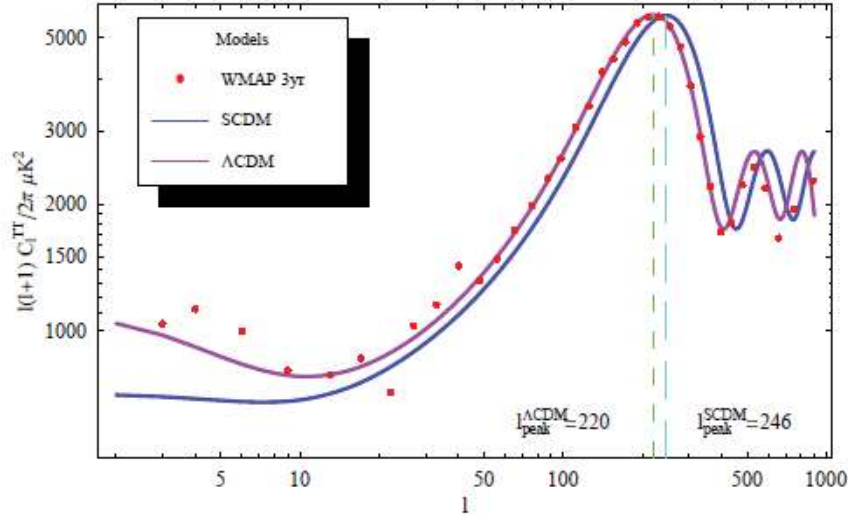


Figura 2.9: *Ubicación del primer pico l_1^{TT}* : Espectro de potencias de las anisotropías de temperatura de la radiación cósmica de fondo (CMB). La gráfica muestra los datos observacionales (puntos) medidos por WMAP durante sus tres primeros años. De acuerdo a los datos, la ubicación del primer pico l_1^{TT} (el más alto en la gráfica) se localiza en $l_1^{TT} = 220$, tal como lo marca la línea vertical de punteo corto. La línea continua que ajusta a los datos corresponde al modelo “ Λ CDM”, que asume los valores: ($w_m = 0,14, w_b = 0,022, h = 0,72$), donde $w_m \equiv \Omega_{M0}h^2$, $w_b \equiv \Omega_{b0}h^2$ y $H_0 = h \times 100$ (km/s)Mpc $^{-1}$. El modelo Λ CDM predice teóricamente que la ubicación de l_1^{TT} es también en 220 (que se denota como $l_{\text{peak}}^{\Lambda\text{CDM}} = 220$). La línea punteada corresponde a un modelo de referencia, denotado como “SCDM”, que asume un valor de $\Omega_{M0} = 1$, de aquí que sus valores sean ($w_m = 0,14, w_b = 0,022, h = 0,37$). SCDM predice teóricamente la ubicación de l_1^{TT} en 246 (que se denota como $l_{\text{peak}}^{\text{SCDM}} = 246$) y que se indica con la línea vertical de punteo largo. El parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB se define como $\mathcal{R} \equiv l_{\text{peak}}^{\text{SCDM}}/l_{\text{peak}}^{\Lambda\text{CDM}}$. Créditos de la imagen original: Nesseris et al. [16].

z	0	0.1	0.17	0.27	0.4	0.48	0.88	0.90	1.30	1.43	1.53	1.73	.24	.34	.43
$H(z) \left[\frac{Kms^{-1}}{Mpc} \right]$	74.2	69	83	77	95	97	90	117	168	177	140	202	79.69	83.80	86.45
1σ	3.6	12	8	14	17	60	40	23	17	18	14	40	2.32	2.96	3.27

Cuadro 2.3: Datos observacionales utilizados en la prueba del parámetro de Hubble [8]

2.4. Prueba cosmológica del parámetro de Hubble

2.4.1. Qué mide la prueba

El cambio del corrimiento al rojo con respecto al tiempo de un conjunto determinado de galaxias luminosas que han evolucionado de manera pasiva [8]. El parámetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$ puede reescribirse como

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{1+z} \right] = \left[\frac{-1}{1+z} \right] \frac{dz}{dt} \quad (2.83)$$

De aquí que conociendo $\frac{dz}{dt}$ se puede conocer $H(z)$. Para hacerlo es posible utilizar edades absolutas de galaxias que evolucionan pasivamente con el tiempo, por ejemplo los datos espectrales de galaxias del Gemini Deep Deep Survey [1].

En este trabajo se utilizan los quince datos del cuadro 2.3.

Capítulo 3

Estadística bayesiana

La cosmología utiliza las observaciones astronómicas para probar los modelos teóricos que pretenden explicar el comportamiento y composición del Universo. Además, los datos obtenidos sirven para poner cotas a los parámetros de las teorías. La prueba de supernovas tipo IA, BAO y CMB descritas en el capítulo anterior sirven para este efecto.

Este proceso se realiza mediante un análisis estadístico bayesiano, que, como su nombre lo indica, parte de resultados basados en el teorema de Bayes. A continuación se ilustrarán los conceptos básicos de esta técnica.

3.1. Definiciones y conceptos básicos de estadística bayesiana

Definición. Sean X y Y dos proposiciones, las cuales pueden tomar por ahora solamente dos valores cada una de ellas: que sea falsa o verdadera. Además, sea I una suposición. Entonces la notación:

$$\text{Prob}(X, Y | I)$$

indica la probabilidad de que X y Y sean verdaderas, asumiendo a I como verdadera.

Esta definición se extiende a cualquier número n de proposiciones X_1, X_2, \dots , y de suposiciones I_1, I_2, \dots , o bien, la proposición sola X puede representar todo un conjunto de proposiciones o parámetros. Lo mismo ocurre para I .

En el contexto que nos atañe, X_1, X_2, \dots , serán los parámetros a inferir (e.g., los valores de los parámetros Ω_m^0, H_0 , etc.) a partir de los datos observacionales. I_1, I_2, \dots , será la información con la que ya contamos respecto al Universo y que asumimos como cierta (e.g., los datos observacionales de las supernovas tipo IA, la teoría de la Relatividad, el valor actual de la constante de Hubble, etc.).

La idea básica del estudio estadístico es buscar los valores de los parámetros que mejor se ajusten a los datos, esto es equivalente a buscar los valores de los parámetros inferidos que maximicen la probabilidad de que sean ciertos.

3.1.1. Teoremas de probabilidad

Los dos axiomas de probabilidad que serán de utilidad en lo siguiente son:

Axioma. Suma de probabilidades:

$$\text{Prob}(X | I) + \text{Prob}(\bar{X} | I) = 1, \quad (3.1)$$

Axioma. Producto de probabilidades:

$$\text{Prob}(X, Y | I) = \text{Prob}(Y, X | I) = \text{Prob}(X | Y, I) \cdot \text{Prob}(Y | I) = \text{Prob}(Y | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I). \quad (3.2)$$

donde:

\bar{X} = negación de la proposición X , el símbolo $|$ significa *dado*, es decir, que todos los términos a la derecha de éste símbolo se toman como ciertos y la coma se lee como la conjunción *y*. Éstas dos reglas forman el álgebra básica de la teoría de la probabilidad [19].

Muchos resultados importantes se derivan de estas leyes: si tomamos la ecuación (3.2) pero reemplazamos X en el lugar de Y ,

$$\text{Prob}(Y, X | I) = \text{Prob}(Y | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I). \quad (3.3)$$

Igualando (3.2) con (3.3) y despejando para $\text{Prob}(X | Y, I)$ obtenemos

$$\boxed{\text{Prob}(X | Y, I) = \frac{\text{Prob}(Y | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I)}{\text{Prob}(Y | I)}}. \quad (3.4)$$

Este resultado es el teorema de Bayes [19]. Los nombres de sus factores son:

- $\text{Prob}(X | Y, I)$ = Probabilidad posterior.
- $\text{Prob}(Y | X, I)$ = Función de probabilidad.
- $\text{Prob}(X | I)$ = Probabilidad previa.

Calcular la probabilidad posterior $\text{Prob}(X | Y, I)$ es equivalente a encontrar la probabilidad de que los valores asumidos por la proposición o variable X sean ciertos, asumiendo cierta proposición Y como verdadera, además de información de fondo I . Por ejemplo, para analizar un modelo cosmológico se puede escoger $X = \Omega_m^0$, Y = datos observacionales de supernovas tipo IA e I = asumir como cierta la teoría de RG.

El procedimiento consiste en calcular la probabilidad posterior para cada uno de los posibles valores de X buscando el valor que maximice la probabilidad de que sea certero. A dicho valor se le denomina X_0 y se denomina "la mejor estimación de X ".

Para el caso donde X y Y pueden tomar más de dos valores, sea un conjunto discreto de ellos o uno continuo, el teorema de Bayes es

$$\mathbf{fdp}(X|Y, I) = \frac{\mathbf{fdp}(Y|X, I) \cdot \mathbf{fdp}(X|I)}{\mathbf{fdp}(X, Y|I)}, \quad (3.5)$$

donde las expresiones " \mathbf{fdp} " se denominan como funciones de densidad de probabilidad (FDP) para X y Y .

Ahora encontraremos un resultado llamado marginalización que será de mucha utilidad en lo siguiente. Escribimos la expresión (3.2) sustituyendo Y por \bar{Y} :

$$\text{Prob}(X, \bar{Y} | I) = \text{Prob}(\bar{Y} | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I). \quad (3.6)$$

Sumando (3.2) y (3.6)

$$\text{Prob}(X, Y | I) + \text{Prob}(X, \bar{Y} | I) = [\text{Prob}(Y | X, I) + \text{Prob}(\bar{Y}, | X, I)] \cdot \text{Prob}(X | I). \quad (3.7)$$

Por la ecuación (3.1) vemos que la expresión dentro del paréntesis es 1. Entonces

$$\text{Prob}(X, Y | I) + \text{Prob}(X, \bar{Y} | I) = \text{Prob}(X | I). \quad (3.8)$$

Si, en vez de considerar que la proposición Y tiene sólo dos posibilidades (falso y verdadero), ésta puede tomar un número discreto de valores la expresión (3.8) se generaliza con los siguientes cambios

$$\text{Prob}(X | I) = \sum_{k=1}^n \text{Prob}(X, Y_k | I) \quad (3.9)$$

En el caso continuo,

$$P(X | I) = \int P(X, Y | I) dY \quad (3.10)$$

La expresión (3.10) es la ecuación de marginalización [19]. Se utiliza cuando en un modelo teórico con varios parámetros libres, es necesario reducir el número de éstos o eliminar estadísticamente la dependencia del modelo con respecto a algunas variables en particular para después calcular los valores más probables de los parámetros libres restantes.

3.2. Prueba χ^2

A continuación se describe la técnica estadística de estimación de parámetros llamada prueba χ^2 .

Sean:

$X \equiv$ Vector cuyas componentes son el conjunto de los parámetros a estimar su valor [por ejemplo, $X = (\zeta, H_0, \Omega_m)$].

$D \equiv$ Vector cuyas componentes son el conjunto de datos observacionales [por ejemplo, los datos de supernovas, $D = (x_1, x_2, \dots, x_n)$].

$I \equiv$ Información de fondo que se asume como verdadera (por ejemplo, que la Teoría General de la Relatividad es correcta).

Entonces, el teorema de Bayes se escribe como:

$$\text{Prob}(X | D, I) \propto \text{Prob}(D | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I). \quad (3.11)$$

Se ha omitido el denominador que aparecía en la expresión (3.4), debido a que no es un factor relevante¹, lo importante son los otros dos factores: la función de probabilidad $\text{Prob}(D | X, I)$, y la probabilidad previa $\text{Prob}(X | I)$. En lugar del símbolo de igualdad aparece el símbolo de proporcionalidad debido a que se ha omitido el factor $\text{Prob}(D | I)$

El cálculo de la densidad de probabilidad posterior esta basado en tres suposiciones:

1. *Se asume una densidad de probabilidad previa, que en este momento la tomaremos como un valor constante pero que puede tomar otras posibilidades tal como lo veremos en la sección 4 (ver figura 1). Entonces, tenemos*

$$\text{Prob}(X | I) = \text{cte}. \quad (3.12)$$

donde

$$a < \text{cte} < b, a, b \in R \quad (3.13)$$

Esta expresión indica que todos los valores posibles para la proposición X son igualmente probables a priori, lo cual hace que su probabilidad previa sea una constante. $\text{Prob}(X | I)$ es la probabilidad de que los parámetros X tengan cierto valor, asumiendo a la teoría e información de fondo como verdaderas. Pero de la pura teoría e información de fondo, los parámetros X no logran preferir algún valor en particular a priori, sino que son los datos D quienes permiten escoger cuáles valores de X dan la mayor probabilidad de ser los verdaderos. Por tanto, la suposición $\text{Prob}(X | I) = \text{cte}$ indica que *a priori* no se está asignando alguna probabilidad mayor para algún valor particular de X sino que se les está asignando la misma probabilidad de ser, a cada uno de ellos.

Dado que la probabilidad previa es una constante, todo el peso de calcular la probabilidad posterior recae sobre la función de probabilidad, esto es:

$$\text{Prob}(X | D, I) \propto \text{Prob}(D | X, I). \quad (3.14)$$

Ahora, tomemos dos datos cualesquiera x_k y x_l del conjunto de datos D . Del axioma (3.2) tenemos que:

$$\text{Prob}(x_k, x_l | X, I) = \text{Prob}(x_k | x_l, X, I) \cdot \text{Prob}(x_l | X, I). \quad (3.15)$$

2. *La medición observacional de cada dato x_k es independiente de la medición de cualquier otro dato x_l .*

Esta suposición es muy razonable, ya que por ejemplo, medir la distancia modular $\mu(z)$ de una

¹El factor que iría como denominador sería: $\text{Prob}(D|I) =$ probabilidad de que los datos sean ciertos asumiendo que la teoría es válida. Este término no depende de X y se utiliza principalmente solo para normalizar el valor de la probabilidad posterior

supernova, no influye en la medición que se obtiene al medir la distancia modular de alguna otra. Utilizando esta suposición, obtenemos:

$$\text{Prob}(x_k|x_l, X, I) = \text{Prob}(x_k|X, I),$$

de aquí que:

$$\text{Prob}(x_k, x_l|X, I) = \text{Prob}(x_k|X, I) \cdot \text{Prob}(x_l|X, I). \quad (3.16)$$

Aplicando la propiedad (3.16) a todos los datos, la función de probabilidad se escribe como:

$$\text{Prob}(D|X, I) = \prod_{k=1}^n \text{Prob}(x_k|X, I). \quad (3.17)$$

3. *La distribución de probabilidad de cada dato x_k , generada a partir de su medición observacional, es en una buena aproximación, una distribución Gaussiana.*

Esta suposición se basa sobre el hecho experimental de que en la naturaleza al tomar l -mediciones de un mismo fenómeno bajo las mismas condiciones (en este caso por ejemplo, la observación de la luminosidad relativa de una supernova), la distribución histográfica de estas mediciones es Gaussiana.

Considerando esto, la distribución de probabilidad del dato x_k , tiene la forma:

$$\text{Prob}(x_k|X, I) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(m_k - x_k)^2}{2\sigma_k^2} \right], \quad (3.18)$$

donde:

m_k = es la media de la distribución gaussiana, es decir, m_k es el valor promedio de x_k .

σ_k = es la desviación estándar que se obtiene de las múltiples observaciones del dato x_k .

En términos cosmológicos y para el caso de la prueba de supernovas, el dato x_k corresponde a la medición observacional de la distancia modular " μ_k " de la k -ésima supernova del conjunto de datos de SNe. La distribución de probabilidad para μ_k surge de todas las mediciones realizadas a ésta magnitud, y que de acuerdo con la tercera suposición tiene la forma de una distribución Gaussiana o normal, centrada en el valor m_k .

Respecto a la magnitud de m_k , en el caso de la prueba de supernovas va a corresponder al valor que teóricamente se predice para el dato μ_k de la supernova. Para ir relacionando la teoría estadística aquí presentada con las pruebas cosmológicas, en lo siguiente cambiaré la notación como $x_k \rightarrow \mu_k^o$, donde el superíndice "o" en μ_k^o indica que es el k -ésimo dato medido observacionalmente. Y $m_k \rightarrow \mu_k^t(z)$, donde el superíndice "t" en $\mu_k^t(z)$ indica que es el k -ésimo dato predicho teóricamente por el modelo cosmológico en estudio. Nótese que solo $\mu_k^t(z)$ depende del redshift z , el otro término, μ_k^o , no porque es un dato observacional, que sí tiene asociado un valor específico de z , que fue medido y fijado también observacionalmente.

Combinando (3.17) y (3.18), la función de probabilidad toma la forma:

$$\text{Prob}(D|X, I) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\mu_k^t(z, X) - \mu_k^o)^2}{2\sigma_k^2} \right]. \quad (3.19)$$

Observe como $\mu_k^t(z, X)$ depende de X . La parte de los datos observacionales D corresponden a μ_k^o . El término σ_k es la desviación estándar que se obtiene de las múltiples observaciones del dato μ_k^o , su valor se obtiene también de las observaciones.

Definiendo la constante A como

$$A \equiv \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}}, \quad (3.20)$$

y a la función χ^2 como

$$\chi^2 \equiv \sum_{k=1}^n \frac{(\mu_k^t(z) - \mu_k^o)^2}{\sigma_k^2}. \quad (3.21)$$

obtenemos que la función de probabilidad (3.19) adquiere la forma:

$$\text{Prob}(D|X, I) = A \exp \left[-\frac{\chi^2}{2} \right]. \quad (3.22)$$

Por tanto, de acuerdo a la igualdad (3.14), hemos hallado la expresión para la probabilidad posterior:

$$\text{Prob}(X|D, I) = B \exp \left[-\frac{\chi^2}{2} \right], \quad (3.23)$$

donde B es una constante de proporcionalidad (y normalización), en ella ya va incluida la constante A . Observe que la función χ^2 no depende de z , solo depende del conjunto de parámetros X .

Para el caso continuo, la expresión de la función de probabilidad (3.22) puede expresarse en términos de una función de densidad de probabilidad como

$$\text{fdp}(D|X, I) = cte \cdot e^{-\chi^2/2}, \quad (3.24)$$

donde “cte” es una constante de normalización. Con esta expresión, y para el caso más general en el cual no se asume necesariamente que la probabilidad previa sea una constante [ver expresión (3.12)], el teorema de Bayes toma la forma [ver (3.11) y (3.5)]

$$\text{fdp}(X|D, I) = cte \cdot e^{-\chi^2/2} \cdot \text{fdp}(X|I). \quad (3.25)$$

Con esta expresión general (3.25) para la FDP posterior, es posible redefinir una nueva función χ^2 como

$$\text{fdp}(X|D, I) \equiv cte \cdot e^{-\chi_n^2/2}, \quad (3.26)$$

donde χ_n^2 es la nueva función χ^2 , el subíndice “n” indica que es la nueva función. Resolviendo para χ_n^2 obtenemos

$$\chi_n^2(X) = -2 \ln \left(\frac{\text{fdp}(X|D, I)}{cte} \right). \quad (3.27)$$

Calcular las mejores estimaciones de cierto conjunto de parámetros, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, significa encontrar el valor x_i^0 para cada uno de los parámetros x_i que en conjunto formarán un vector $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ con la característica de que maximiza la probabilidad posterior $\text{fdp}(X|D, I)$ [ver ecuación (3.25)], es decir, que tienen el máximo de probabilidad de ser ciertos. A partir de la ecuación (3.26) puede verse que encontrar los valores x_i que maximizan a $\text{fdp}(X|D, I)$ es equivalente a que minimicen la función $\chi_n^2(X)$.

Regularmente se trabaja sobre la función $\chi_n^2(X)$ en lugar de la FDP posterior. Calcular el vector X^0 es esencialmente un trabajo de calcular el *mínimo* de una función $\chi_n^2(X)$ de varias variables.

3.3. χ^2 como medida de calidad de ajuste

Ya que se cuenta con un modelo teórico que contiene parámetros libres X que se desean estimar a través de parámetros observacionales, el siguiente paso es buscar el mínimo de la función $\chi_n^2(X)$ y los parámetros que la minimizan. Con ello se obtienen dos cosas:

Estimación de parámetros. La prueba da como resultado la mejor estimación de los valores de los parámetros libres, X_0 , del modelo teórico, en relación al conjunto de datos observacionales utilizados.

Calidad de ajuste. La misma prueba determina qué tan bueno es el ajuste del modelo teórico a los datos. Mientras más pequeño sea el valor de χ_n^2 , mejor ha sido el ajuste de la teoría a los datos.

Una manera burda de estimar si un modelo ajusta razonablemente a los datos es que el valor obtenido para $\chi_n^2(X)$ sea del mismo orden que el número de datos utilizados para la prueba [3].

3.3.1. χ^2 por grados de libertad

El mínimo de la función χ^2 por grados de libertad se denota como $\chi_{d.o.f.}^2$ y su definición es

$$\chi_{d.o.f.}^2 \equiv \frac{\chi_{\min}^2}{n-p} \quad (3.28)$$

donde χ_{\min}^2 es el valor mínimo de la función χ_n^2 , n corresponde al número de datos observacionales utilizados para acotar y calcular los p parámetros libres de la teoría.

Por ejemplo, la muestra de supernovas “Union2.1” está compuesta de, 580 datos si con esta muestra de SNe estamos interesados en acotar y calcular dos parámetros libres de un modelo cosmológico, por ejemplo, la densidad de materia Ω_{M0} y la constante de Hubble H_0 , entonces $n = 580$ y $p = 2$. Supongamos que el valor mínimo que se obtiene de la función χ_n^2 al estimar los valores de (Ω_{M0}, H_0) es $\chi_{\min}^2 = 562$, entonces, $\chi_{d.o.f.}^2 = 0.9723$.

La ventaja y utilidad de calcular el valor de $\chi_{d.o.f.}^2$ consiste en que su magnitud es más independiente del número de datos observacionales utilizados para estimar valores de parámetros libres de un modelo, en comparación al valor de χ_{\min}^2 . Tener un valor del mínimo de χ_n^2 independiente del número de datos utilizados resulta útil porque esto permite comparar entre diferentes mínimos de χ_n^2 , obtenidos a partir de distintas muestras de datos observacionales con variables cantidades de datos n , permitiendo analizar la calidad de ajuste del modelo.

Siguiendo con el ejemplo, si ahora se utiliza la muestra de supernovas “Union2” que está compuesta de 557 datos, para estimar los valores de (Ω_{M0}, H_0) , y se obtiene un valor de $\chi_{\min}^2 = 570$, se tiene un valor mucho menor de χ_{\min}^2 que cuando se utiliza la muestra “Union2.1” ($\chi_{\min}^2 = 570$); sin embargo esto no significa que la calidad de ajuste sea mejor [3]. Si ahora comparamos los valores de $\chi_{d.o.f.}^2$ notamos que en realidad el mejor ajuste se logró utilizando la muestra de “Union2.1” ($\chi_{d.o.f.}^2 = 0.9723$), ya que usando “Union2” se tiene que $\chi_{d.o.f.}^2 = 1.027$. Mientras más pequeño sea el valor de $\chi_{d.o.f.}^2$, mejor será la calidad de ajuste del modelo a los datos [3].

3.4. Tipos de marginalización para la FDP de la función χ^2

Utilizando la expresión (3.10) para marginalizar la probabilidad posterior $\mathbf{fdp}(X, Y|D, I)$:

$$\mathbf{fdp}(X|D, I) = \int \mathbf{fdp}(X, Y|D, I) dY. \quad (3.29)$$

Usando la ecuación (3.29) obtenemos

$$\mathbf{fdp}(X|D, I) = cte \cdot \int e^{-\chi^2(X, Y)/2} \cdot \mathbf{fdp}(Y|I) dY, \quad (3.30)$$

donde la función χ^2 depende de las variables (X, Y) y $\mathbf{fdp}(Y|I)$ es la función de densidad de probabilidad previa para la variable Y . Note cómo la nueva FDP posterior $\mathbf{fdp}(X|D, I)$ ya no depende de Y . Una vez que se tiene $\mathbf{fdp}(X|D, I)$, se puede redefinir una nueva función χ^2 como

$$\mathbf{fdp}(X|D, I) \equiv cte \cdot e^{-\chi_m^2/2}, \quad (3.31)$$

donde χ_m^2 es la nueva función χ^2 , el subíndice m corresponde al caso cuando se ha marginalizado. Resolviendo para χ_m^2 obtenemos

$$\chi_m^2(X) = -2 \ln \left(\frac{\mathbf{fdp}(X|D, I)}{cte} \right). \quad (3.32)$$

La función $\chi_m^2(X)$ depende ahora ya solo de la variable X .

Existen varias opciones para la FDP previa, en el presente trabajo empleamos tres que son las más importantes y utilizadas (ver figura 3.1):

1. Marginalización asumiendo una FDP previa “ $\mathbf{fdp}(Y|I)$ ” *constante*.
2. Marginalización asumiendo una FDP previa “ $\mathbf{fdp}(Y|I)$ ” *Gaussiana*.
3. Marginalización asumiendo una FDP previa “ $\mathbf{fdp}(Y|I)$ ” con la forma de una *delta de Dirac*.

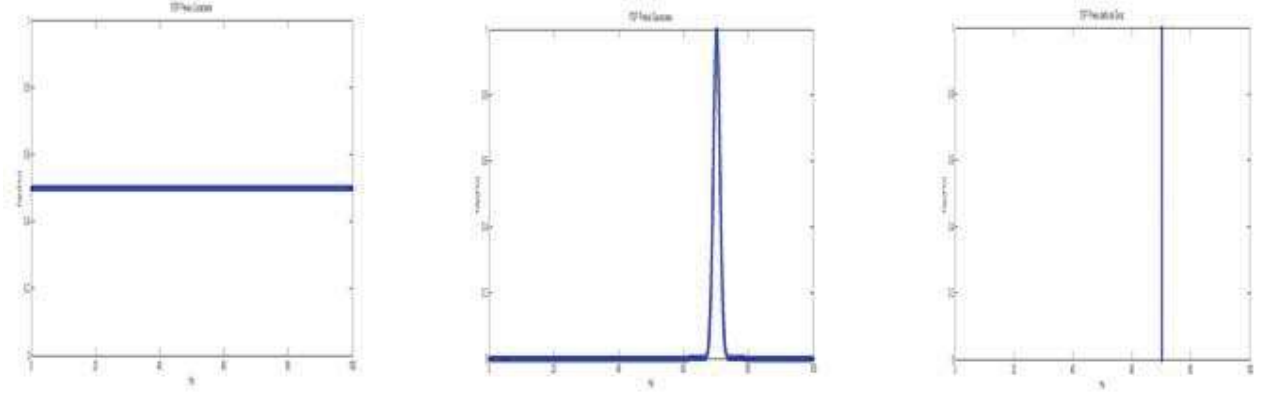


Figura 3.1: Los tres tipos principales de funciones de densidad de probabilidad (FDP) previas. En este caso se ilustran como ejemplo para la variable H_0 en el intervalo $[0,100]$. En el caso gaussiano y de delta de Dirac, las gráficas están centradas en $H_0 = 70,2$.

En cada una de ellas, el parámetro libre a marginalizar será la constante de Hubble H_0 . Las tres formas de marginalización se ilustrarán para el caso de la prueba de supernovas y asumiendo que se tienen tres parámetros libres, Ω_Λ , Ω_M y H_0 .

La ecuación de marginalización (3.30) para este caso adquiere la forma

$$\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) = cte \cdot \int_0^\infty e^{-\chi^2(\Omega_\Lambda, \Omega_M, H_0)/2} \cdot \mathbf{fdp}(H_0) dH_0 \quad (3.33)$$

En general, la integración (3.33) debe hacerse sobre todo el rango de posibles valores del parámetro a ser marginalizado. En este caso, el rango de posibles valores para H_0 tomando en cuenta solamente la expansión del Universo es $(0, \infty)$.

A continuación se describen las tres técnicas de la figura 3.1.

3.4.1. Función de probabilidad (FDP) previa constante e integración analítica para el caso de Universo plano usando los datos de SNeIA

Asumir una FDP previa constante para marginalizar H_0 significa que todos los valores posibles para H_0 son igualmente probables. Al utilizar ésta técnica en el caso de supernovas asumiendo un Universo plano, es posible resolver analíticamente la integral (3.33) que permite al final obtener una expresión de la función χ^2 que ya no dependerá de H_0 . No obstante, para Universos con curvatura la expresión (3.33) debe resolverse numéricamente.

Consideremos la expresión para la distancia de luminosidad para el caso plano ($\sqrt{k} = 0$ y $\text{senn } x = x$). Multiplicamos y dividimos por la constante de Hubble H_0 para obtener

$$d_L(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z, H_0) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z', H_0)}. \quad (3.34)$$

Ahora, definimos una nueva *distancia de luminosidad adimensional* como $D_L(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z) \equiv H_0 \cdot d_L(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z, H_0)/c$. Entonces

$$D_L(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z')}, \quad (3.35)$$

donde $D_L(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z)$ ya no depende de H_0 , y $E(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z) \equiv H(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z, H_0)/H_0$. Con esto, la distancia modular teórica se vuelve

$$\mu^\dagger(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z, H_0) = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z) \cdot c}{H_0 \cdot \text{Mpc}} \right) + 25 \equiv 5 \log_{10} \left(\frac{D_L(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z)}{\tilde{H}_0} \right) + 25, \quad (3.36)$$

donde hemos definido un *parámetro de Hubble adimensional* $\tilde{H}_0 \equiv H_0 \cdot \text{Mpc}/c$. Ahora, definimos una nueva distancia modular teórica que ya no dependa de H_0 , como

$$\tilde{\mu}^t(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z) \equiv 5 \log_{10}[D_L(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z)] + 25. \quad (3.37)$$

Entonces, la expresión (3.36) para la distancia modular es

$$\mu^t(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z, H_0) = \tilde{\mu}^t(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z) - 5 \log_{10}[\tilde{H}_0]. \quad (3.38)$$

De esto, construimos la función χ^2 (3.21) con estas nuevas definiciones como

$$\chi^2(\Omega_\Lambda, \Omega_M, H_0) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{\mu}^t(\Omega_\Lambda, \Omega_M, z_i) - \mu_i^{\text{obs}} - 5 \log_{10} \tilde{H}_0}{\sigma_i} \right)^2, \quad (3.39)$$

donde μ_i^{obs} es el valor observacional de la distancia modular y σ_i la desviación estándar de la observación. Reescribimos la expresión (3.39) como

$$\begin{aligned} \chi^2(\Omega_\Lambda, \Omega_M, H_0) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{\mu}_i^t - \mu_i^{\text{obs}}}{\sigma_i} \right)^2 - 2 \left(5 \log_{10} \tilde{H}_0 \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{\mu}_i^t - \mu_i^{\text{obs}}}{\sigma_i^2} \right) + \\ + \left(5 \log_{10} \tilde{H}_0 \right)^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Si definimos²

$$A \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{\mu}_i^t - \mu_i^{\text{obs}}}{\sigma_i} \right)^2, \quad B \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\mu}_i^t - \mu_i^{\text{obs}}}{\sigma_i^2}, \quad C \equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (3.41)$$

entonces podemos expresar a (3.40) como

$$\chi^2(\Omega_\Lambda, \Omega_M, H_0) = A - 2Bx + Cx^2, \quad (3.42)$$

donde

$$x \equiv 5 \log_{10}(\tilde{H}_0). \quad (3.43)$$

Observe que toda la dependencia de la función χ^2 con respecto a H_0 está ahora contenida en la variable x . La ecuación de marginalización para \tilde{H}_0 en este caso es

$$\mathbf{fdp}(\Omega) = cte \cdot \int_0^\infty e^{-\chi^2(\Omega_\Lambda, \Omega_M, \tilde{H}_0)/2} \mathbf{fdp}(\tilde{H}_0) d\tilde{H}_0, \quad (3.44)$$

donde $\mathbf{fdp}(\tilde{H}_0)$ es la FDP previa para \tilde{H}_0 . Es en este punto donde asumimos que la FDP previa para \tilde{H}_0 es constante. Tomando en cuenta ésta suposición de FDP tenemos

$$\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) = cte \cdot \int_0^\infty e^{-\chi^2/2} d\tilde{H}_0. \quad (3.45)$$

3.4.2. FDP previa Gaussiana

Este caso asume una distribución de probabilidad para H_0 con la forma de una Gaussiana, la cuál estará centrada en un valor que indicaremos con H_0^* y con un ancho o desviación estándar σ^* (ver figura 3.1). A diferencia del caso de la FDP previa constante, en ésta ocasión sí se está prefiriendo un valor para H_0 (sugerido por alguna otra observación cosmológica, por ejemplo, el experimento WMAP), que es el punto central de la Gaussiana H_0^* , pero asumiendo que existen también otros valores de H_0 que tienen cierta probabilidad (menor a la de H_0^*) de ser ciertos.

Entonces, una FDP previa para H_0 con la forma de una Gaussiana se expresa como

$$\mathbf{fdp}(H_0) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H_0 - H_0^*}{\sigma^*} \right)^2 \right]. \quad (3.46)$$

²Note que estas expresiones ya no dependen de H_0 .

Con esto, la ecuación de marginalización (3.33) se vuelve

$$\mathbf{fdp}(\Omega_\Lambda, \Omega_M) = cte \cdot \int_0^\infty e^{-\chi^2/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H_0 - H_0^*}{\sigma^*} \right)^2 \right] dH_0. \quad (3.47)$$

En el presente trabajo, el valor central H_0^* utilizado es el de $H_0^* = 70,2$ (km/s)Mpc $^{-1}$ con una desviación estandar de $\sigma^* = 8$ (km/s)Mpc $^{-1}$ como es reportado en las observaciones del telescopio espacial Hubble (HST) [11].

En este caso ya no es posible realizar un procedimiento parecido al descrito en la sección (3.4.1) para resolver analíticamente la integral (3.33), por lo cual ésta debe resolverse numéricamente.

Una vez que se tiene la expresión numérica de $\mathbf{fdp}(\Omega_\Lambda, \Omega_M)$, se construye una nueva función χ^2 definida como

$$\mathbf{fdp}(\Omega_\Lambda, \Omega_M) \equiv cte \cdot e^{-\chi_g^2/2}, \quad (3.48)$$

donde χ_g^2 es la nueva función χ^2 , el subíndice “g” indica “marginalización Gaussiana”. Resolviendo para χ_g^2 obtenemos

$$\chi_g^2(\Omega_\Lambda, \Omega_M) = -2 \ln \left(\frac{\mathbf{fdp}(\Omega_\Lambda, \Omega_M)}{cte} \right). \quad (3.49)$$

Esta nueva χ_g^2 ya no depende de H_0 . A partir de ella se puede proceder a calcular la mejor estimación para Ω_Λ y Ω_M .

3.4.3. FDP previa Delta de Dirac

Esta marginalización consiste en asumir que H_0 tiene un valor específico H_0^* . En este caso sí se está prefiriendo totalmente un valor específico para H_0 en donde se atribuye el 100 % de la probabilidad de que sea cierto, cualquier otro valor para H_0 tiene una probabilidad nula. Esto significa que la distribución de la probabilidad para H_0 tiene la forma de una delta de Dirac centrada en el valor H_0^* y que la desviación estándar σ^* es cero. Es como asumir que el valor de H_0 ha sido medido con infinita precisión tal que su $\mathbf{fdp}(H_0)$ tiene la forma de la distribución delta de Dirac.

Claramente, esta suposición es solo una idealización para simplificar el trabajo ya que un valor medido con infinita precisión no corresponde a la realidad. Sin embargo, en varios casos esta suposición es una buena aproximación. Esta FDP previa tiene la ventaja de que simplifica enormemente la manera de resolver la integral de la ecuación de marginalización (3.33) usando las propiedades matemáticas de la delta de Dirac:

$$\mathbf{fdp}(H_0) = \delta(H_0 - H_0^*), \quad (3.50)$$

con lo cual la expresión (3.33) resulta

$$\mathbf{fdp}(\Omega_\Lambda, \Omega_M) = cte \cdot e^{-\chi^2(\Omega_\Lambda, \Omega_M, H_0^*)/2}. \quad (3.51)$$

El valor de H_0^* se toma de alguna otra observación cosmológica independiente. En particular elegimos $H_0^* = 70,2$ (km/s)Mpc $^{-1}$, como lo indican las observaciones de [14].

En la práctica, marginalizar H_0 usando una FDP previa de delta de Dirac consiste simplemente en fijar el valor de $H_0 = H_0^*$ en todas las expresiones donde aparezca la constante de Hubble, con esto entonces H_0 deja de ser un parámetro libre.

3.5. Prueba χ^2 usando SNe, CMB y BAO

En el caso de las supernovas Ia (SNe) la magnitud observacional que se utiliza para confrontar la teoría *vs* observaciones es la distancia modular, que es la cantidad utilizada para la construcción de la función χ^2 , que como ya se había indicado anteriormente se define como

$$\chi_{\text{SNe}}^2 = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\mu(z_k) - \mu_k}{\sigma_k} \right]^2, \quad (3.52)$$

donde μ_k es el valor medido observacionalmente de una supernova Ia situada a una distancia z_k del observador, $\mu(z_k)$ es la predicción teórica de la distancia modular dada por la expresión para esa supernova

y σ_k corresponde a la desviación estándar en la medición de μ_k .

Para las variaciones acústicas bariónicas (BAO), la distancia radial d_z evaluada en $z = 0,2$ y $z = 0,35$ se utiliza como parámetro observacional. Con los valores obtenidos se forma un vector que se usa para encontrar la función χ^2 :

$$\chi_{BAO}^2 = (d_i^{th} - d_i^{obs})C_{BAO}^{-1}(d_j^{th} - d_j^{obs}). \quad (3.53)$$

En lo concerniente a las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) los elementos observacionales son la escala acústica l_A , el parámetro de corrimiento R y el corrimiento al rojo de la época de desacoplamiento de fotones z_* . De manera análoga a la prueba BAO, se construye un vector cuyas componentes son los valores de l_A , z_* y R y se calcula la χ^2 correspondiente:

$$\chi_{CMB}^2 = (X_i^{th} - X_i^{obs})C_{CMB}^{-1}(X_j^{th} - X_j^{obs}) \quad (3.54)$$

Es posible también definir una función χ^2 que tome en cuenta todas las pruebas cosmológicas descritas arriba. Esto se hace sumando cada una de las funciones χ^2 , obteniendo

$$\boxed{\chi_{total}^2 = \chi_{SNe}^2 + \chi_{CMB}^2 + \chi_{BAO}^2 + \chi_H^2}, \quad (3.55)$$

o bien, se puede considerar solo ciertas pruebas que se deseen, o incluir más [3].

Capítulo 4

El modelo Λ CDM

Antes del año 1997 la teoría más exitosa para explicar el Universo era el modelo del Big Bang; el cuál consideraba que el Universo era plano y estaba compuesto de bariones, radiación y materia oscura. Sin embargo, poco tiempo después un descubrimiento provocó que se modificara esta idea.

4.1. Descubrimiento de la aceleración del Universo

En 1998 un grupo de astrónomos encabezados por Adam G. Riess de la Universidad de California en Berkeley, publicaron un artículo titulado “*Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant*” [18] en el que indicaban evidencia de que el Universo se está expandiendo **aceleradamente** en la actualidad.

Los científicos llegaron a esta conclusión después de analizar una muestra de 50 supernovas tipo Ia (en aquel momento la más numerosa y de mayor corrimiento al rojo) cuyos z se encontraban entre $0 \lesssim z \leq 0,62$.

Del estudio descubrieron que las supernovas Ia parecían tener una luminosidad aparente menor de la que predecía el modelo del Big Bang: $\Omega_{M0} = 1$ (con $\Omega_{r0} = 0,00005$ y $\Omega_{\Lambda0} = \Omega_{k0} = 0$). Revisaron las posibles razones de la atenuación de su luminosidad, tales como errores sistemáticos en las mediciones, polvo interestelar o intergaláctico, etc. pero a pesar de tomar en cuenta estos fenómenos, la luminosidad era notablemente menor a la esperada.

A causa de ello se concluyó que el atenuamiento se debía a que las supernovas se encontraban a una distancia mayor de la esperada, es decir, que las supernovas a alto corrimiento al rojo estaban en promedio 10%–15% más distantes que lo estimado por el modelo cosmológico más aceptado en aquel tiempo, que predice un Universo en expansión *desacelerada*. Al realizar un análisis estadístico con las supernovas para determinar y acotar los valores de Ω_{M0} y $\Omega_{\Lambda0}$ encontraron que el modelo cosmológico favorecido (i.e., que mejor ajustaba a los datos de supernovas) era el de una constante cosmológica positiva, $\Omega_{\Lambda0} > 0$, con un 99.97% de nivel de confianza (5.0σ) y un Universo en expansión **acelerada**, con confiabilidad de 99.97%; asumiendo solamente que Ω_{M0} fuera positiva [18] (ver figura 4.1).

La explicación dada al aparente atenuamiento de las supernovas fue la presencia de una constante cosmológica positiva ($\Omega_{\Lambda0} \approx 0,7$, asumiendo $\Omega_k = 0$) y con un Universo en una etapa de expansión acelerada en la época actual [18].

4.1.1. Componentes del modelo Λ CDM

El nombre “ Λ CDM” viene de “ Λ Cold Dark Matter”, lo cual quiere decir: “*Modelo cosmológico que propone un Universo constituido por materia oscura fría y energía oscura con el comportamiento de una constante cosmológica Λ* ”.

Este modelo considera que el Universo está constituido por:

Constante cosmológica. El modelo asume que existe la energía oscura y que ésta tiene exactamente el comportamiento de una *constante cosmológica*, con una ecuación de estado: $p = -\rho$. Además predice que el porcentaje de densidad de energía con que contribuye la constante cosmológica en el Universo es de $\sim 73\%$. La constante cosmológica normalmente se representa por la letra griega “ Λ ”.

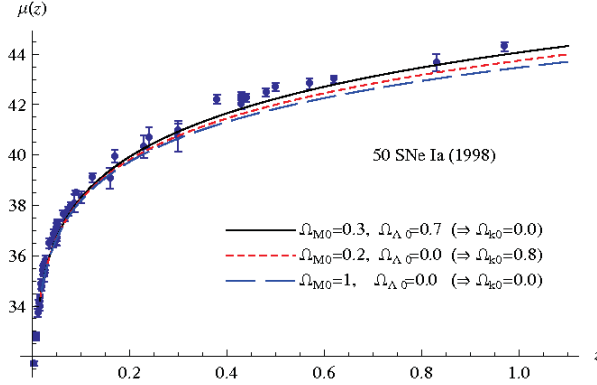


Figura 4.1: Gráfica de los 50 datos de supernovas tipo Ia utilizados por Riess et al. [18], con las que llegaron a la conclusión de la aceleración presente del Universo y la posible existencia de una constante cosmológica no nula. La figura muestra los datos observacionales con sus barras de error así como las líneas generadas por tres modelos cosmológicos diferentes. El modelo $\Omega_{M0} = 1$, con $\Omega_{\Lambda 0}$ y $\Omega_{k0} = 0$ era el de mayor aceptación entre la comunidad de cosmólogos antes del descubrimiento del grupo de Riess. Para la construcción de estas gráficas se asumió un valor de $\Omega_{r0} = 0$ y $H_0 = 71$ (km/s)Mpc $^{-1}$.

Materia oscura fría. El modelo toma en cuenta la existencia de la materia oscura y asume que está compuesta por partículas *no relativistas* (de aquí el nombre de “fría”) y que a nivel de fluido cosmológico la materia oscura se comporta como *polvo* ($P_{DM} \sim 0$). En combinación con DIFERENTES observaciones, el modelo Λ CDM predice una contribución de la materia oscura del $\sim 23\%$ de la densidad de materia-energía total del Universo.

Materia bariónica. El modelo toma en cuenta la evidente presencia de la materia bariónica, de la cual asume que tiene un comportamiento de polvo. De observaciones independientes al modelo Λ CDM (específicamente del proceso de nucleosíntesis) se estima que el porcentaje de esta componente es de $\sim 4\%$ del total del Universo.

Radiación. También toma en cuenta la existencia de la radiación en el Universo, principalmente manifestada a través de la radiación cósmica de fondo. Se calcula para la radiación de fotones un porcentaje de $\sim 0,005\%$ del total del Universo.

Para esta teoría, la expresión del parámetro de Hubble tiene la forma dada por la expresión:

$$H(z) = H_0 [\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2]^{1/2}. \quad (4.1)$$

La componente de curvatura Ω_{k0} puede escribirse en términos de los otros parámetros de densidad usando la primera ecuación de Friedmann, obteniendo $\Omega_{k0} = 1 - (\Omega_{M0} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{r0})$. No obstante las observaciones más recientes del experimento WMAP indican que el Universo es espacialmente plano [22], por lo cual actualmente la mayoría de los cosmólogos asumen en sus modelos el valor $\Omega_{k0} = 0$.

Por otra parte, hoy en día la componente de radiación es muy pequeña, por lo que su contribución o efectos en la época actual del Universo es despreciable. Debido a ésto, también una buena parte de cosmólogos que hacen estudios del Universo para *tiempos recientes* suelen despreciar el valor de Ω_{r0} .

La distancia de luminosidad para el análisis de supernovas, en el caso del modelo Λ CDM y tomando en cuenta la curvatura espacial, tiene la forma

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0|1 - \Omega_{M0} - \Omega_{\Lambda 0}|^{1/2}} \text{sinn} \left(|1 - \Omega_{M0} - \Omega_{\Lambda 0}|^{1/2} \int_0^z \frac{H_0 dz}{H(z)} \right), \quad (4.2)$$

donde la función “sinn” depende a la geometría del Universo que estemos tratando. Con esta expresión se construye la distancia modular $\mu(z)$ para Λ CDM con la que se forma la función χ^2 para probar el modelo.

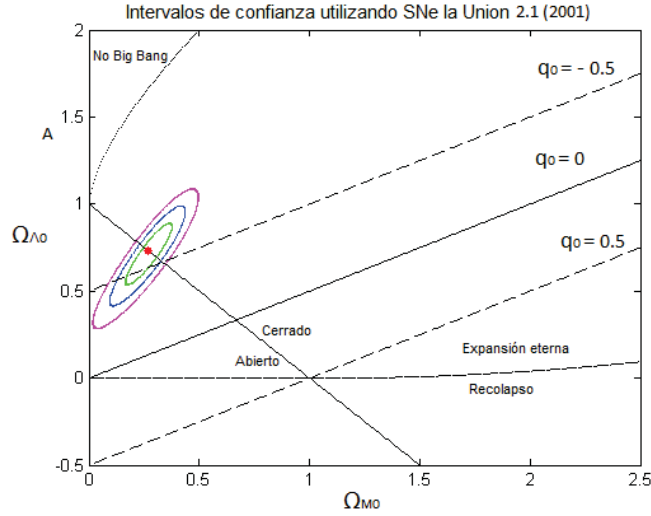


Figura 4.2: Intervalos de confianza conjuntos para los parámetros $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$, usando el modelo cosmológico “ Λ CDM” [ver la expresión (4.1)] y la muestra de supernovas Ia “*Union 2.1*” del *Supernova Cosmology Project* (SCP) [20] que es la muestra más reciente, grande y robusta con la que se cuenta hoy en día y que consta de 580 SNe Ia. Los valores estimados para $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ usando estos datos y asumiendo la curvatura espacial son: $\Omega_{M0} = 0,32$ y $\Omega_{\Lambda0} = 0,77$, con un valor del mínimo de la función χ^2 de $\chi^2_{\min} = 562.3634$ (ver tabla 4.1). Y asumiendo un Universo espacialmente plano: $\Omega_{M0} = 0,27$ y $\Omega_{\Lambda0} = 0,73$ (el modelo de concordancia, indicado con el punto rojo), con $\chi^2_{\min} = 562.422$. Los intervalos de confianza corresponden a 68.3%, 95.4% y 99.73% de probabilidad. La región definida como “*No Big-Bang*” corresponden a valores de $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ que satisfacen la relación (4.7). La línea diagonal entre “*Abierto*” y “*Cerrado*” muestra el caso de un Universo *plano* ($\Omega_{M0} + \Omega_{\Lambda0} = 1$). Las líneas diagonales con pendiente positiva corresponden a distintos valores del parámetro de desaceleración q_0 [ver expresión (4.14)]. En particular, destaca la región con $q_0 < 0$ que indica los valores de $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ para los cuales el Universo se está expandiendo *aceleradamente* hoy en día. Observe que los tres intervalos de confianza caen dentro de la región $q_0 < 0$ holgadamente, lo cual indica que usando los datos de supernovas “*Union2.1*” y el modelo Λ CDM se puede afirmar que el Universo se está expandiendo *aceleradamente* hoy en día con *al menos* un 99.73% de certeza. La línea vertical situada en el valor $\Omega_{\Lambda} = 0$ marca la división entre la región para la cual el Universo se expandirá *eternamente* en el futuro (arriba de la línea) y cuando el Universo se recolapsará [abajo de la línea. Ver expresión (4.6)]. Observe cómo los datos indican con 99.73% de certeza que el Universo se va a expandir eternamente, usando el modelo Λ CDM.

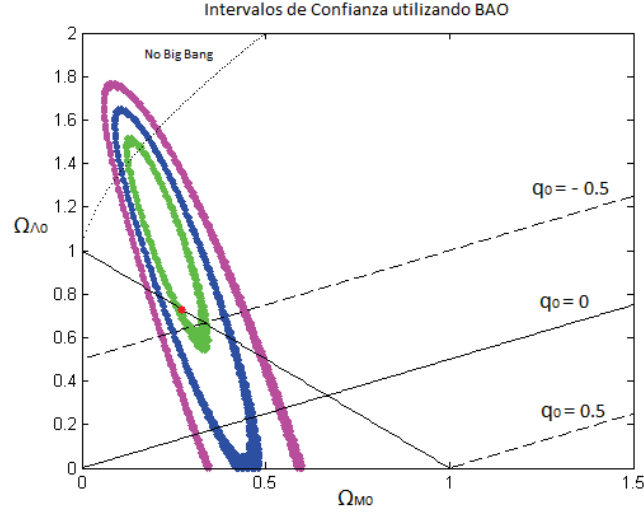


Figura 4.3: Intervalos de confianza conjuntos para los parámetros $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$, usando el modelo cosmológico “ Λ CDM” [ver la expresión (4.1)] y la prueba BAO con los datos del Cuadro 3.1 ([10]). Los valores estimados para $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ usando estos datos y asumiendo la curvatura espacial son: $\Omega_{M0} = 0,2733$ y $\Omega_{\Lambda0} = 1,18$, con un valor del mínimo de la función χ^2 de $\chi^2_{\min} = 0,0062$ (ver tabla 4.1). El significado de las líneas y puntos de la figura tienen la misma explicación que en la gráfica 4.2. Los intervalos de confianza corresponden a 68.3 %, 95.4 % y 99.73 % de probabilidad.

Al probar el modelo Λ CDM usando las tres pruebas cosmológicas, SNe+CMB+BAO, se encuentra que los valores actuales de los parámetros de densidad para la constante cosmológica, $\Omega_{\Lambda0}$, y para la materia oscura y bariónica juntas, Ω_{M0} son

$$\Omega_{\Lambda0} = 0,73, \quad \Omega_{M0} = 0,27, \quad (4.3)$$

y con la componente de radiación $\Omega_{r0} = 0,00005$. A estos valores calculados *usando* el modelo Λ CDM se les conoce como el *modelo de concordancia*.

La figura 4.5 presenta el diagrama de Hubble en el cual se muestran los datos observacionales de supernovas y el ajuste hecho con diferentes valores de $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ usando el modelo Λ CDM. La tabla 4.1 muestra los valores de las mejores estimaciones para $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0}, \Omega_{k0})$ usando datos de supernovas, y las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 muestran los intervalos de confianza para cada una de las pruebas.

Por otra parte, dado el valor de Ω_{M0} , se puede calcular el valor de $\Omega_{\Lambda0}$ para el cual el Universo se expandirá por siempre o sufrirá un eventual recolapso. Para ello, note que un colapso requiere que el parámetro de Hubble pase a través de cero cuando cambia su valor positivo a negativo. El factor de escala a_* en el cuál esto ocurre puede encontrarse imponiendo el valor $H = 0$ en la primera ecuación de Friedmann

$$H^2 = 0 = \frac{8\pi G}{3} [\rho_{M0} a_*^3 + \rho_{\Lambda} + \rho_{K0} a_*^2], \quad (4.4)$$

Dividimos (4.4) entre H_0^2 , usando $\Omega_{K0} = 1 - \Omega_{M0} - \Omega_{\Lambda0}$ y obtenemos

$$\Omega_{\Lambda} a_*^3 + (1 - \Omega_{M0} - \Omega_{\Lambda0}) a_* + \Omega_{M0} = 0 \quad (4.5)$$

Esta es una ecuación cúbica para a_* . Resolviendo (4.5), encontramos que el valor de Ω_{Λ} para el cuál el Universo se expandirá por siempre está dado por

$$\Omega_{\Lambda0} \geq \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq \Omega_{M0} \leq 1, \\ 4\Omega_{M0} \cos^3 \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_{M0}}{\Omega_{M0}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] & \text{para } \Omega_{M0} > 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Y la expresión que define la región para la cual *no* hubo Big-Bang en el pasado del Universo está dada por

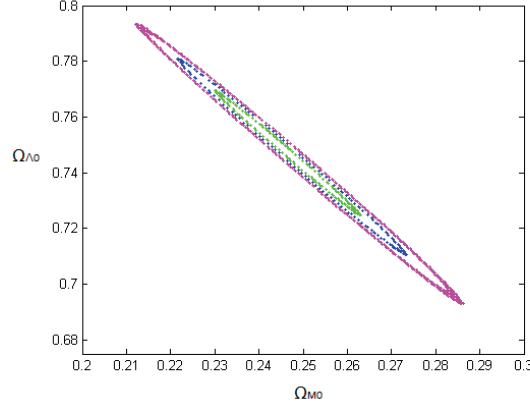


Figura 4.4: Intervalos de confianza conjuntos para los parámetros $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$, usando el modelo cosmológico “ Λ CDM” [ver la expresión (4.1)] y la prueba CMB con los datos del Cuadro 3.2 ([10]). Es notoria la precisión de esta prueba, ya que para observar las elipses es necesario recortar los ejes mucho más que en las gráficas anteriores. Los valores estimados para $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ usando estos datos y asumiendo la curvatura espacial son: $\Omega_{M0} = 0,2436$ y $\Omega_{\Lambda0} = 0,75$, con un valor del mínimo de la función χ^2 de $\chi^2_{\min} = 0.167601$ (ver tabla 4.1). Los intervalos de confianza corresponden a 68.3 %, 95.4 % y 99.73 % de probabilidad.

$$\Omega_{\Lambda0} \geq 4\Omega_{M0}\text{coss}^3 \left[\frac{1}{3} \text{coss}^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_{M0}}{\Omega_{M0}} \right) \right], \quad (4.7)$$

donde la función “coss” significa “cosh” cuando $\Omega_{M0} < 1/2$, y “cos” cuando $\Omega_{M0} > 1/2$. La curva que define la igualdad en (4.7) se muestra en la figura 2.

4.1.2. El parámetro de desaceleración

Para un modelo cosmológico se define el parámetro de desaceleración,

$$q(t) \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (4.8)$$

Reescribimos la ecuación (4.8) en términos del parámetro de Hubble

$$q(t) = -\frac{\frac{\ddot{a}}{a}}{\left[\frac{\dot{a}}{a}\right]^2} = -\frac{\frac{\ddot{a}}{a}}{H(z)^2}, \quad (4.9)$$

y calculamos

$$\frac{dH^{-1}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{\dot{a}} \right) = \frac{\dot{a}^2 - a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = 1 - \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (4.10)$$

Utilizando (4.10) en (4.9)

$$q(z) = \frac{dH^{-1}}{dt} - 1, \quad (4.11)$$

Reescribiendo (4.11)

$$q(z) = -\frac{1}{H^2} \frac{dH}{dz} \frac{dz}{dt} - 1, \quad (4.12)$$

Utilizando el parámetro de Hubble (4.1) para el modelo Λ CDM, su derivada y la expresión $a = \frac{1}{1+z}$ del capítulo 1 obtenemos

$$q = \left[\frac{H_0}{H} \right] \frac{1}{2} (1+z) [3\Omega_M^0 (1+z)^2 + 2\Omega_k^0 (1+z) - 1], \quad (4.13)$$

Geometría	Mejor estimación			χ^2
Plano	$\Omega_{M0} = 0,270$	$\Omega_{\Lambda0} = 0,73$	$\Omega_{k0} = 0$	562.422
Cerrado	$\Omega_{M0} = 0,32$	$\Omega_{\Lambda0} = 0,77$	$\Omega_{k0} = -0,09$	562.3634
Abierto	$\Omega_{M0} = 0,26$	$\Omega_{\Lambda0} = 0,72$	$\Omega_{k0} = 0,02$	562.45

Cuadro 4.1: Valores calculados para las mejores estimaciones de los parámetros ($\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0}, \Omega_{k0}$) usando el modelo cosmológico Λ CDM y la prueba de supernovas Ia con el conjunto de datos “Union2.1” (2011) compuesto por 580 SNe Ia [20]. Observe como asumiendo un Universo plano se encuentra que los datos favorecen a un modelo con ($\Omega_{M0} = 0,27$ y $\Omega_{\Lambda0} \simeq 0,73$). Los intervalos de confianza de estos tres modelos se muestran en la figura 4.2.

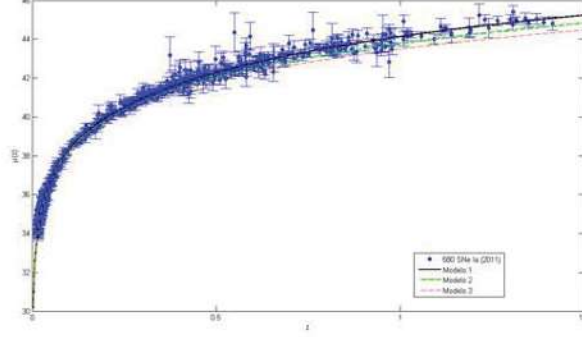


Figura 4.5: Gráfica del conjunto de datos de supernovas tipo Ia llamada “Union2.1” del SCP [20], consta de 580 supernovas. La figura muestra los datos con sus barras de error así como las líneas generadas por tres modelos cosmológicos diferentes. El modelo $\Omega_{M0} = 1$, con $\Omega_{\Lambda0}, \Omega_{k0} = 0$ era el de mayor aceptación entre la comunidad de cosmólogos antes del descubrimiento del grupo de Riess. En la construcción de las gráficas se asumió un valor de $\Omega_{r0} = 0$ y $H_0 = 65$ (km/s)Mpc $^{-1}$.

Evaluando (4.13) en el presente y utilizando la ecuación de Friedmann expresada en términos de los parámetros de densidad:

$$q_0 = \frac{1}{2} (\Omega_{M0} - 2\Omega_{\Lambda0}). \quad (4.14)$$

En la gráfica 2 se muestran curvas con diferentes valores de q_0 constantes.

4.2. Problemas del modelo Λ CDM

En la actualidad, el modelo Λ CDM es el más exitoso para explicar la evolución de nuestro Universo. No obstante, este modelo presenta dos problemas de importancia: el de la constante cosmológica y el de la coincidencia cósmica, que serán descritos a continuación.

4.2.1. El problema de la constante cosmológica

Uno de las discrepancias más grandes entre teoría y experimento que presenta el modelo Λ CDM es el problema de la constante cosmológica. A continuación vamos a calcular el valor que la teoría cuántica de campos predice para ella.

La densidad del vacío cuántico

El estado de mínima energía en el Universo es la energía del vacío cuántico. Para dar una estimación de su valor se resuelve la ecuación de Klein-Gordon,

$$-g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \mu^2 \phi = 0, \quad (4.15)$$

aquí estamos asumiendo que todos los campos cuánticos están representados por un campo escalar de espín cero, ésta suposición es claramente no cierta ya que en la naturaleza existen campos cuánticos fermiónicos y bosónicos con diferentes valores de sus espines. Sin embargo, el cálculo hecho en esta tesis es una aproximación para el problema de la constante cosmológica. Para un cálculo más preciso y que no cambia las consecuencias del problema, consultar la referencia [26].

Se proponen las soluciones a la ecuación (4.15) de la forma

$$\phi = Ae^{\alpha k^\mu x_\mu}, \quad (4.16)$$

Sustituyendo (4.16) en (4.15)

$$\alpha^2(-k_\mu k^\mu)\phi + \mu^2\phi = 0, \quad (4.17)$$

donde

$$\mu^2 = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (4.18)$$

Dado que $m > 0$, las soluciones deben satisfacer $\alpha^2 = -1$, de manera que las soluciones posibles son de la forma

$$\phi^+(x^\alpha) = \sum_k A^+(k) e^{-ik^\mu x_\mu}, \quad (4.19)$$

y

$$\phi^-(x^\alpha) = \sum_k A^-(k) e^{ik^\mu x_\mu}, \quad (4.20)$$

Además,

$$\mu^2 = -k_\mu k^\mu \quad (4.21)$$

donde

$$k^\mu = (k^0, \vec{k}) \quad (4.22)$$

Entonces (4.21) es

$$\mu^2 = (k^0)^2 - \vec{k} \cdot \vec{k} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}, \quad (4.23)$$

Sustituyendo $p = \hbar k$ y multiplicando por $c^2 \hbar^{-2}$ en (4.23)

$$m^2 c^4 + c^2 P^2 = \hbar^2 c^2 k^{02}, \quad (4.24)$$

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 P^2, \quad (4.25)$$

Al comparar (4.25) con la expresión para la energía relativista

$$E = \hbar c k^0, \quad (4.26)$$

Ahora pedimos que las soluciones (4.19,4.20) satisfagan las condiciones de frontera

$$\phi(t, 0, y, z) = \phi(t, L, y, z), \quad (4.27)$$

$$\phi(t, x, 0, z) = \phi(t, x, L, z), \quad (4.28)$$

$$\phi(t, X, y, 0) = \phi(t, x, y, L), \quad (4.29)$$

restringiendo la solución a un cubo de lado L cuyas fronteras tienen el mismo comportamiento. Al aplicar las condiciones (4.27, 4.28, 4.29)

$$k_j = \frac{2\pi j}{L}, \quad (4.30)$$

donde $j = x, y, z$

La energía discretizada es

$$E = \sum_k E_k = \sum_k \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k^2}, \quad (4.31)$$

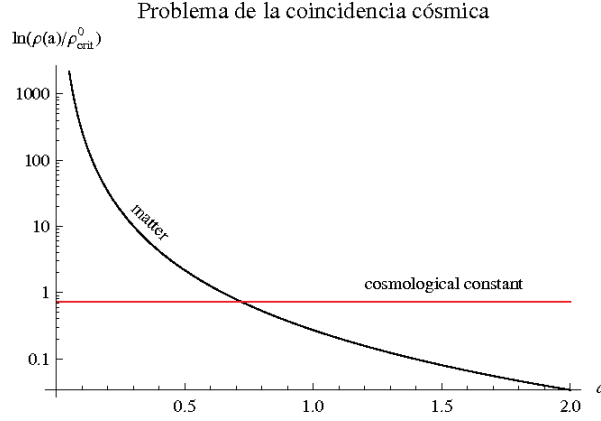


Figura 4.6: Gráficas del logaritmo de los parámetros de densidad de la componente de materia oscura + bariónica y la energía oscura como constante cosmológica. La evolución de la componente de materia con respecto al factor de escala viene dada como $\rho_M(a)/\rho_{\text{crit}}^0 = \Omega_{M0}/a^3$, y para la energía oscura como $\rho_\Lambda/\rho_{\text{crit}}^0 = \Omega_{\Lambda0} = \text{constante}$. Observe como para tiempos tempranos (“ a ” pequeñas) la diferencia entre las densidades era mucho mayor de lo que es en tiempos recientes, y para tiempos futuros la diferencia también será mayor de lo que es ahora. La *coincidencia* de que justamente en tiempos recientes las densidades parecen ser del mismo orden, es decir, que estamos viviendo una época privilegiada en la cual sucede esta semejanza de valores, y justo ahora que se ha detectado la energía oscura, levantan sospechas sobre la veracidad de las predicciones del modelo Λ CDM.

En el continuo, la expresión (4.31) es

$$E = \int \frac{1}{2\pi^3} \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k^2} d^3 x d^3 k, \quad (4.32)$$

Integrando sobre el volumen

$$V = L^3, \quad (4.33)$$

$$E = \frac{V}{2\pi^3} \int \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k^2} k^2 \sin^2 \theta dk d\theta d\phi, \quad (4.34)$$

A partir de (4.32) podemos encontrar la densidad

$$\rho = \frac{E}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^K \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k^2} k^2 dk \sim \frac{1}{2\pi^2} (c\hbar k)^2, \quad (4.35)$$

$$\rho = \frac{c\hbar}{2\pi^2} \frac{K^4}{4}, \quad (4.36)$$

Evalutando (4.36) en la energía de Planck,

$$\rho_v = \frac{c\hbar}{2\pi^2} \frac{E_{\text{Planck}}^4}{4c\hbar^4} \sim 2 \times 10^{71} \text{GeV}^4. \quad (4.37)$$

Valor observado de ρ_Λ

Las observaciones indican que el valor de la densidad de la constante cosmológica es $\rho_\Lambda^{\text{obs}} \sim 10^{-48}$ GeV. De (4.37) podemos observar que la razón entre la predicción y la observación para ρ_Λ es

$$\frac{\rho_v^0}{\rho_\Lambda^0} \sim 10^{117} \quad (4.38)$$

Los casi 120 órdenes de diferencia entre el valor de ρ_Λ de la teoría cuántica de campos y de las mediciones astronómicas constituyen el problema de la constante cosmológica.

El problema de la coincidencia cósmica

Este es el segundo problema que enfrenta el modelo Λ CDM, que ha despertado mucho interés entre la comunidad. El *problema de la coincidencia cósmica* consiste en el hecho de que, de acuerdo a las predicciones de Λ CDM, la densidad de energía oscura (con el comportamiento de una constante cosmológica) hoy en día es del mismo orden, y en realidad muy cercana, al valor de la densidad de materia oscura + bariónica hoy. Es decir, de toda la enorme variedad del continuo de posibles valores que estas densidades podría valer hoy en día, vivimos justamente en una época privilegiada en la cual ambas parecen tener casi el mismo valor, lo que despierta fuertes sospechas sobre la veracidad de las conclusiones del modelo Λ CDM.

Como se mencionó en la sección 1.1, usando datos observacionales en combinación con Λ CDM se encuentra que los valores de los parámetros de densidad de constante cosmológica y de materia oscura + bariónica, hoy en día son $\Omega_{\Lambda 0} \simeq 0,73$ y $\Omega_{M0} \simeq 0,27$.

La figura 4.6 muestra la evolución de los parámetros de densidad, en función del factor de escala, donde las relaciones son $\Omega_M(a) \equiv \rho_M(a)/\rho_{\text{crit}}^0 = \Omega_{M0}/a^3$ y $\Omega_\Lambda \equiv \rho_\Lambda/\rho_{\text{crit}}^0 = \Omega_{\Lambda 0} = \text{constante}$. Observe cómo cuando $a = 1$, los valores de Ω_Λ y Ω_M son muy cercanos en comparación a la diferencia de valores en tiempos pasados del Universo.

Capítulo 5

Modelos de energía oscura interactuantes con materia oscura

Para resolver el problema de la coincidencia cósmica, los cosmólogos han estudiado varias teorías alternativas al modelo Λ CDM. Una clase de modelos analizados para dicho fin son aquellos donde se considera que existe una interacción entre energía oscura y materia oscura. A continuación analizaremos dos de ellos, el primero con un parámetro de interacción constante y el segundo con interacción dependiente del tiempo. Ambos modelos fueron propuestos por Guo et al en el año 2007 en el artículo "*Probing the coupling between dark components of the universe*" [24]. En dicho trabajo, los autores utilizaron una muestra de 71 supernovas tipo Ia, además de las pruebas BAO y CMB para acotar los parámetros libres de cada modelo. En esta tesis el objetivo es acotar los parámetros aún más, dado que se utiliza la muestra reciente de supernovas Union2.1, que contiene 580 datos, además de las pruebas cosmológicas BAO, CMB más actuales y mediciones sobre el parámetro de Hubble.

5.1. Interacción entre energía y materia oscura

En el modelo Λ CDM, las ecuaciones de conservación local de materia-energía para la materia oscura y la energía oscura son

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = 0, \quad (5.1)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H\rho_{dm}(1 + \omega) = 0. \quad (5.2)$$

donde $\omega \equiv \frac{P_{de}}{\rho_{de}}$, en general podemos asumir una interacción entre energía y materia oscura de la forma

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = \Gamma\rho_{dm}, \quad (5.3)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H\rho_{dm}(1 + \omega) = -\Gamma\rho_{dm}. \quad (5.4)$$

donde tenemos,

$$\Gamma \equiv \delta H. \quad (5.5)$$

Para $\delta > 0$ tenemos una transferencia de energía oscura a materia oscura y para $\delta < 0$ tenemos el caso contrario.

Los signos en (5.3) y (5.4) se escogen de tal manera que la identidad de Bianchi sea válida (conservación local de energía del sistema).

A continuación analizaremos los casos cuando δ es una constante y cuando tiene una dependencia particular respecto al tiempo.

5.1.1. A. Modelo con acoplamiento δ constante

Integramos las ecuaciones (5.3) y (5.4) para δ constante. Reescribiendo (5.3) tenemos

$$\frac{d}{dt} [Ln(\rho_{dm})] = (\delta - 3) \frac{d}{dt} [Ln(a)], \quad (5.6)$$

Integrando (5.6)

$$\rho_{dm}(a) = Aa^{\delta-3}, \quad (5.7)$$

Evaluando (5.7) en el valor presente $a = a_0$ obtenemos

$$\rho_{dm}^0(a) = Aa_0^{\delta-3}, \quad (5.8)$$

donde

$$A = \frac{\rho_{dm}^0}{a_0^{\delta-3}} \quad (5.9)$$

Entonces

$$\rho_{dm}(a) = \rho_{dm}^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3-\delta}, \quad (5.10)$$

Reescribiendo (5.10) en términos de z

$$\rho_{dm}(a) = \rho_{dm}^0 (1+z)^{3-\delta}, \quad (5.11)$$

que es la solución a la ecuación local de conservación para la materia oscura.

Para la componente restante dividimos (5.4) entre H ,

$$\frac{\dot{\rho}_{de}}{H} + 3(1+\omega)\rho_{de} = \delta\rho_{dm}, \quad (5.12)$$

Desarrollando (5.12)

$$a \frac{d\rho_{de}}{da} + 3(1+\omega)\rho_{de} = -\delta\rho_{dm}, \quad (5.13)$$

La solución de la ecuación (5.13) es,

$$\rho_{de}(a) = \frac{-\delta}{f(a)} \int \frac{f(\tilde{a})\rho_{dm}(\tilde{a})}{\tilde{a}} d\tilde{a} + A, \quad (5.14)$$

donde la función $f(a)$ es el llamado factor integrante dado por

$$f(a) = a^{3(1+\omega)}, \quad (5.15)$$

Introduciendo (5.8) y (5.15) en (5.14) y expresando el resultado en términos del corrimiento al rojo obtenemos

$$\rho_{de}(z) = \rho_{dm}^0 \frac{\delta}{3\omega + \delta} \left[(1+z)^{3(1+\omega)} - (1+z)^{3-\delta} \right] + \rho_{de}^0 (1+z)^{3(1+\omega)}, \quad (5.16)$$

Utilizamos la ecuación de Friedmann expresada en términos de los parámetros de densidad para encontrar Ω_{dm}^0 dadas las demás componentes

$$\Omega_{dm}^0 = 1 - \Omega_{de}^0 - \Omega_b^0 - \Omega_r^0 \quad (5.17)$$

De esta manera, dados los valores conocidos de Ω_b^0 y Ω_r^0 , los parámetros libres del modelo son $(\delta, \omega, \Omega_{de}^0)$; sin embargo, hacemos una marginalización sobre Ω_{de}^0 para quedarnos únicamente con los primeros dos. A continuación, calculamos el mínimo de la función χ^2 para las pruebas SNe, SNe+ BAO y SNe + BAO + CMB al modelo en cuestión. Los intervalos de confianza se muestran en las gráficas 5.1, 5.2 y 5.3 respectivamente. Los cotas sobre los parámetros observacionales en el nivel 1σ se muestran en el cuadro 5.1 y los correspondientes al nivel 2σ en el cuadro 5.2. En la sección 5.1.3 se analizan los resultados y se lleva a cabo una comparación con las cotas encontradas por Guo et al [24].

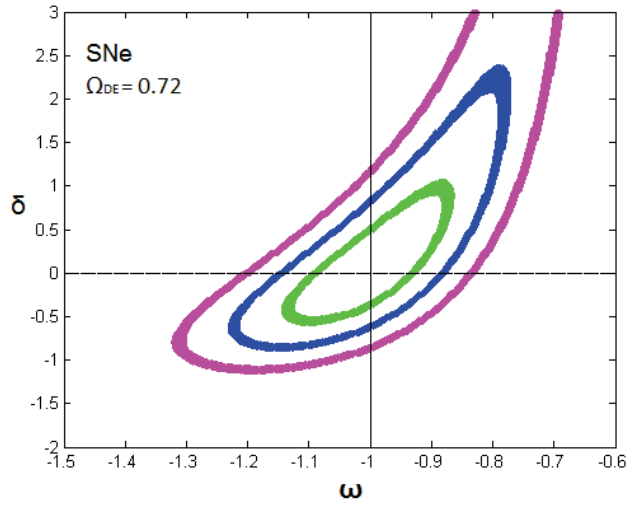


Figura 5.1: Contornos de probabilidad utilizando SNe Ia con intervalos de confianza del 68.3%, 95% y 99.7% en el plano (ω, δ) marginalizando sobre Ω_{DE} para δ constante. La línea vertical representa al modelo Λ CDM con acoplamiento y la horizontal representa a los modelos sin acoplamiento, el cruce de las mismas representa el modelo Λ CDM estándar. Encontramos que la mejor estimación es $\delta_b = 0.03$ y $\omega_b = -1.005$. Los cuadros 5.1 y 5.2 comparan los intervalos de confianza aquí encontrados con los de Guo et al [24].

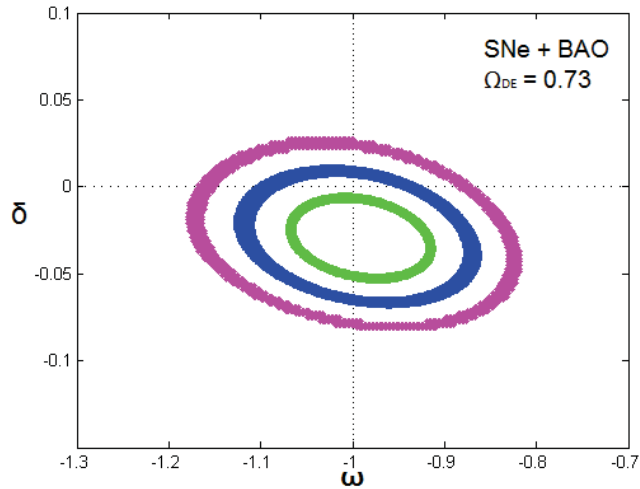


Figura 5.2: Misma explicación que la figura 5.1 pero utilizando las muestras SNe + BAO. La mejor estimación es $\delta_b = -0.0300601$ y $\omega_b = -0.99018$. Ver cuadros 5.1 y 5.2 para comparar estos resultados con los de Guo et al [24].

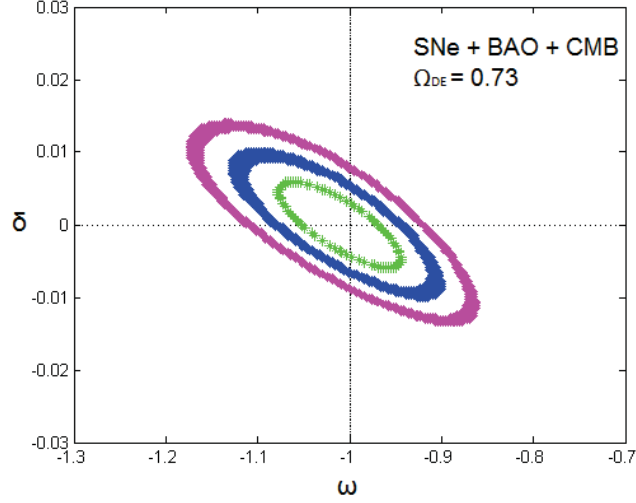


Figura 5.3: Utilizando las muestras SNe + BAO + CMB encontramos que la mejor estimación para los parámetros libres del modelo son $\delta_b = -0.0004008$ y $\omega_b = -1.00581$. Los cuadros 5.1 y 5.2 comparan los intervalos de confianza aquí encontrados con los de Guo et al[24]. Note que las cotas sobre δ y ω se han reducido significativamente. El origen representa el modelo Λ CDM.

5.1.2. B. Modelo con acoplamiento dependiente del tiempo

En esta sección, analizaremos un caso particular donde δ varía con el tiempo. A partir de la ecuación (5.3)

$$\frac{d}{dt} [\ln \rho_m] = \frac{d}{dt} (\ln a) [\delta(t) - 3], \quad (5.18)$$

Integrando (5.18)

$$\rho_m(a) = \rho_{m0} a^{-3} e^{\int \delta \cdot d[\ln \tilde{a}]}. \quad (5.19)$$

Es interesante observar el comportamiento del acoplamiento δ en este caso:

$$\delta(z) = -(\epsilon + 3\omega)\Omega_{de}, \quad (5.20)$$

cuando $\epsilon = -3\omega$ (nula interacción entre componentes oscuras), $\delta = 0$.

Ahora proponemos que la razón entre las densidades de energía y materia oscura cumplen la siguiente relación [24]:

$$\frac{\rho_{de}}{\rho_d m} \equiv \frac{\rho_{de}^0}{\rho_d^0 m^0} a^\epsilon \quad (5.21)$$

donde ϵ es una constante que cuantifica la severidad del problema de la coincidencia cósmica ([24]). El modelo Λ CDM es el caso donde $\epsilon = 3$ y $\omega = -1$ (cruce de líneas en figuras 5.4 y 5.5).

Para simplificar algunos cálculos posteriores definimos $\rho_t = \rho_{dm} + \rho_{de}$

Sumamos las relaciones (5.3) y (5.4)

$$\dot{\rho}_{dm} + \dot{\rho}_{de} + 3H [\rho_{dm} + \rho_{de} + \omega \rho_{de}] = 0, \quad (5.22)$$

Dividimos (5.22) entre $a\rho_t$ y lo reescribimos en términos del factor de escala

$$\frac{d}{da} (\ln \rho_t) + \frac{3}{a} \left[1 + \omega \left(\frac{\rho_{de}}{\rho_t} \right) \right] = 0, \quad (5.23)$$

Utilizando (5.21) en $\frac{\rho_{de}}{\rho_t}$ tenemos

$$\frac{\rho_{de}}{\rho_t} = \left[1 + \left(\frac{\rho_{dm}^0}{\rho_{de}^0} \right) a^{-\epsilon} \right]^{-1} \quad (5.24)$$

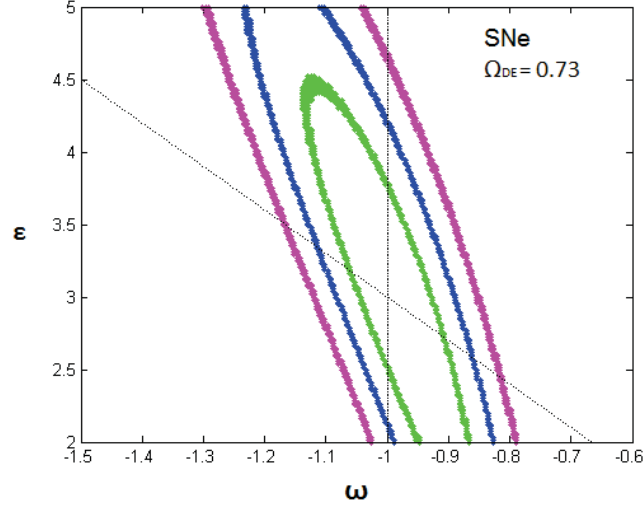


Figura 5.4: Contornos de probabilidad para el modelo con acoplamiento variable en el tiempo utilizando la muestra SNe Ia con intervalos de confianza del 68 %, 95 % y 99.7 %. La mejor estimación: $\omega_b = -1.05$ y $\epsilon_b = 3.5$. Los cuadros 5.3 y 5.4 comparan los intervalos de confianza aquí encontrados con los de Guo et al [24]. El origen en la figura representa al modelo Λ CDM. Hemos marginalizado con respecto a la variable $\Omega_{de} = 0,73$

Integramos (5.23)

$$\rho_t = \rho_{t0} a^{-3} \left[1 - \frac{\rho_{de}}{\rho_t} (1 - a^\epsilon) \right]. \quad (5.25)$$

Definimos $E(z)$

$$E^2(z) \equiv \frac{H^2(z)}{H^2} = \frac{\rho_t}{\rho_{crit}^0} \quad (5.26)$$

Utilizando la relación $\Omega_{de}^0 + \Omega_{dm}^0$ la relación (5.26)

$$E^2(z) = (1+z)^3 \left[1 + \Omega_{de}^0 \left((1+z)^{-\epsilon} - 1 \right) \right]^{\frac{-3\omega}{\epsilon}} \quad (5.27)$$

Utilizando (5.21)

$$\rho_{de} = \rho_t \frac{\Omega_{de0}}{\Omega_{de0} + (1 - \Omega_{de0})(1+z)^\epsilon}. \quad (5.28)$$

Con estos resultados encontramos el mínimo de la función χ^2 utilizando los datos de supernovas y del parámetro de Hubble. Los intervalos de confianza se muestran en las figuras 5.4 y 5.5. En la sección 5.1.3 se comparan los intervalos de confianza con los encontrados por Guo et al utilizando supernovas y datos observacionales del parámetro de Hubble.

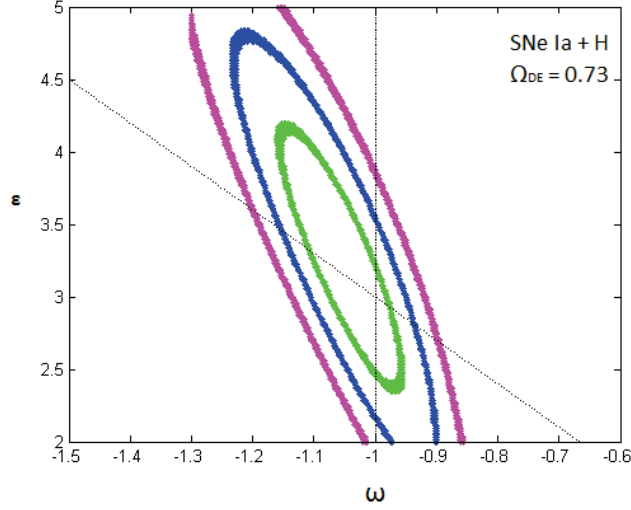


Figura 5.5: Contornos de probabilidad para el modelo con acoplamiento variable en el tiempo utilizando las muestras de SNe Ia + H. La mejor estimación fue la misma que en el caso de la figura 5.4 ($\omega_b = -1.05$, $\epsilon_b = 3.5$) pero los intervalos de confianza se han reducido ligeramente. Ver cuadros 5.3 y 5.4 para la comparación de resultados con aquellos de Guo et al [24]. Misma explicación que la figura 5.4

Prueba	Union 2.1 (580 SNe Ia)	Guo et al.
SNe Ia	$-0,5 < \delta < 0,9$ $-1,12 < \omega < -0,88$	$-1,43 < \delta < 3$ $-1,35 < \omega < -0,8$
Sne Ia + BAO	$-0,05 < \delta < -0,01$ $-1,07 < \omega < -0,92$	$-1,6 < \delta < 3$ $-1,275 < \omega < -0,8$
SNe Ia + BAO + CMB	$-0,005 < \delta < 0,005$ $-1,07 < \omega < -0,95$	$-0,07 < \delta < 0,02$ $-1,1 < \omega < -0,91$

Cuadro 5.1: Comparación entre las cotas de los parámetros δ y ω (modelo con interacción constante) para el intervalo de confianza de 68 % encontradas en la publicación de Guo et al [24] y las calculadas en el presente trabajo. La mejor estimación para δ y ω_b son $\delta_b = 0.03$ y $\omega_b = -1.005$. Note que las cotas sobre los parámetros ω y δ se han reducido significativamente para las pruebas conjuntas SNe Ia + BAO + CMB.

5.1.3. Discusión de resultados

En esta sección, presentamos una discusión de los principales resultados obtenidos del ajuste de los modelos con energía oscura interactuante estudiados en esta tesis usando datos de la muestra Union 2.1 de supernovas, datos que provienen de las oscilaciones acústicas bariónicas (BAO), datos de las anisotropías de la temperatura de la radiación cósmica del fondo de microondas (CMB) y datos observacionales del parámetro de Hubble ($H[z]$).

Para el modelo con función de acoplamiento $Q = \delta H \rho_{dm}$ y δ constante, la muestra de supernovas impone las restricciones observacionales sobre el parámetro δ que se muestran en los cuadros 6.1 y 6.2 que corresponden a los intervalos de confianza del 68.3 % y 95 %, respectivamente. Comparando los resultados obtenidos en esta tesis (segunda columna) con los obtenidos por Guo et al (tercera columna) se observa que las cotas sobre δ se reducen entre el 30 % y 50 % para la primera prueba pero el valor absoluto de δ sigue siendo de orden unidad. La prueba conjunta SNe Ia + BAO + CMB logra reducir el parámetro de interacción δ al orden de centésimas y el parámetro ω muy cercano al valor que corresponde a la constante cosmológica.

Para el modelo con δ variable en el tiempo observamos que las cotas sobre los parámetros utilizando la prueba conjunta SNe + $H(z)$ difieren muy poco de la prueba realizada por Guo et al usando las pruebas conjuntas SNe + BAO + CMB [ver cuadros 5.3 y 5.4]. Esto se debe a que en nuestro análisis no hemos

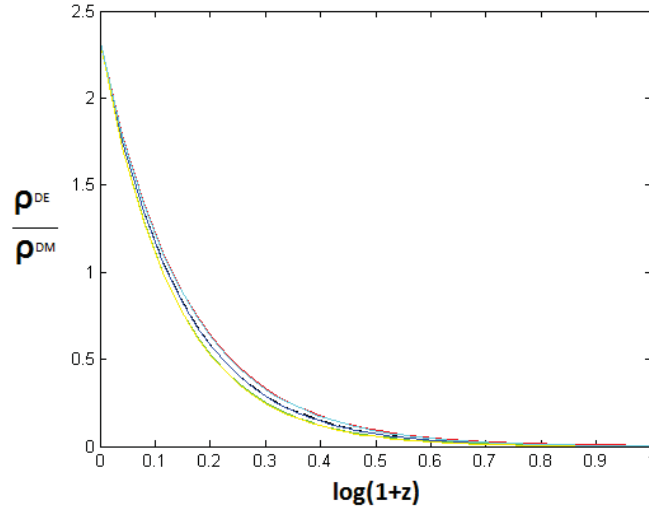


Figura 5.6: Comparación entre razones de densidades de energía oscura y materia oscura para Λ CDM (línea negra) y el modelo con interacción constante de la sección 5.1.1. La mejor estimación de este modelo (línea azul) y sus cotas de error (líneas roja, verde, amarilla y celeste) tienen un comportamiento casi idéntico al modelo Λ CDM estándar. Este resultado se obtuvo utilizando las tres pruebas conjuntas SNe Ia + BAO + CMB.

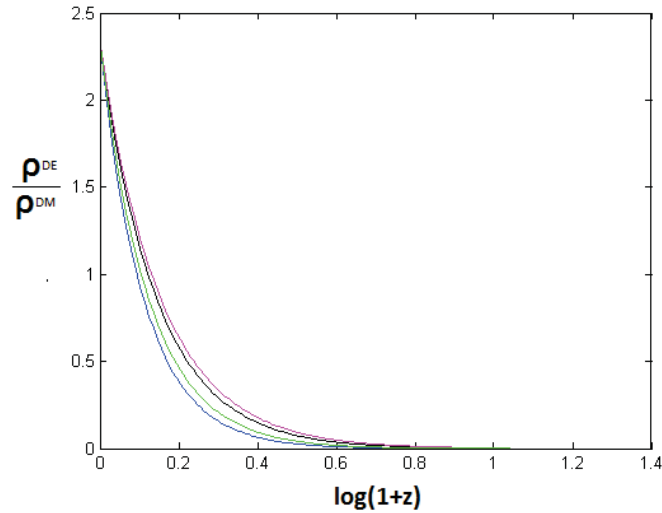


Figura 5.7: Comparación entre $\frac{\rho^{de}}{\rho^{dm}}$ para Λ CDM estándar (línea negra) y el modelo de interacción dependiente en el tiempo de la sección 5.1.2. La mejor estimación de este modelo (línea verde) y sus cotas de error (líneas roja y azul) tienen un comportamiento casi idéntico al modelo Λ CDM estándar.

Prueba	Union 2.1 (580 SNe Ia)	Guo et al
SNe Ia	$-0,75 < \delta < 2,1$ $-1,21 < \omega < -0,8$	$-1,78 < \delta < 3$ $-1,55 < \omega < -0,7$
Sne Ia + BAO	$-0,06 < \delta < 0,005$ $-1,1 < \omega < -0,89$	$-1,73 < \delta < 3$ $-1,4 < \omega < -0,75$
SNe Ia + BAO + CMB	$-0,01 < \delta < 0,009$ $-1,12 < \omega < -0,92$	$-0,09 < \delta < 0,04$ $-1,2 < \omega < -0,87$

Cuadro 5.2: Comparación entre las cotas de los parámetros δ y Ω (modelo con interacción constante) para el intervalo de confianza de 95 % encontradas en la publicación de Guo et al [24] y las calculadas en el presente trabajo.

Prueba	Union 2.1 (580 SNe Ia)	Guo et al
SNe Ia	$2 < \epsilon < 4,45$ $-1,11 < \omega < -0,86$	
Sne Ia + H(z)	$2,49 < \epsilon < 4,1$ $-1,15 < \omega < -0,95$	
SNe Ia + BAO + CMB		$2,8 < \epsilon < 3,9$ $-1,13 < \omega < -0,9$

Cuadro 5.3: Comparación entre las cotas de los parámetros ϵ y ω (modelo con interacción variable en el tiempo) para el intervalo de confianza de 68 % encontradas en la publicación de Guo et al [24] y las calculadas en el presente trabajo. La mejor estimación es $\omega_b = -1.05$, $\epsilon_b = 3.5$. Note que las cotas sobre los parámetros ϵ y ω se han reducido aunque no de manera significativa. Esto se debe a que en esta comparación no hemos utilizado en nuestro análisis la prueba de CMB.

Prueba	Union 2.1 (580 SNe Ia)	Guo et al
SNe Ia	$2 < \epsilon < 5$ $-1,22 < \omega < -0,82$	
Sne Ia + H(z)	$2 < \epsilon < 4,75$ $-1,21 < \omega < -0,9$	
SNe Ia + BAO + CMB		$2,66 < \epsilon < 4,05$ $-1,21 < \omega < -0,87$

Cuadro 5.4: Comparación entre las cotas de los parámetros ϵ y ω (modelo con interacción variable en el tiempo) para el intervalo de confianza de 95 % encontradas en la publicación de Guo et al y las calculadas en el presente trabajo [24]. Mejor estimación: $\omega_b = -1.05$, $\epsilon_b = 3.5$.

usado la prueba de CMB. Se espera que, al usarla, las cotas observacionales sobre ambos parámetros se reduzcan significativamente con respecto a las cotas encontradas por Guo et al [24].

Cabe mencionar que la razón de densidades de energía y materia oscura en función del corrimiento al rojo (ver figuras 5.6 y 5.7) para el modelo Λ CDM estándar no difiere significativamente de la misma razón calculada para ninguno de los dos modelos interactuantes puestos a prueba en esta tesis, por lo que el problema de la coincidencia cósmica prevalece, contrario a lo que ha sido propuesto en la literatura [24].

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis, hemos estudiado dos modelos de energía oscura interactuando con materia oscura, con el fin de probar si son o no buenos candidatos para resolver el problema de la coincidencia cósmica, una de las inquietudes más grandes que enfrenta el modelo Λ CDM.

Los modelos analizados contienen una función de interacción $Q = \delta H \rho_{dm}$. El primero de ellos tiene un parámetro δ constante y el segundo es parametrizado con un δ dependiente del corrimiento al rojo que es determinado por la suposición de que $\frac{\rho_{DE}}{\rho_{DM}} \propto a^\epsilon$, donde ϵ es una constante que cuantifica la severidad del problema de coincidencia. Ambos casos toman en cuenta al modelo Λ CDM dados ciertos valores para los parámetros observacionales de cada uno.

Para los parámetros libres de ambos modelos, (δ, ω) y (ϵ, ω) se obtuvieron restricciones observacionales usando las muestras Union 2.1 de 580 supernovas; la más reciente y de mayor corrimiento al rojo hasta el momento, la prueba de oscilaciones acústicas bariónicas (BAO), el parámetro de corrimiento de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) y quince datos observacionales del parámetro de Hubble (H). Tal como se muestra en los cuadros 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4, las restricciones obtenidas se han reducido significativamente en comparación con las obtenidas por Guo et al [24], a tal grado que $\delta \approx 10^{-2}$, en el caso del primer modelo. Las cotas obtenidas para el segundo modelo son consistentes con lo encontrado por el autor original y se han reducido ligeramente.

Estos resultados implican que, como puede apreciarse en las figuras 5.6 y 5.7, la razón entre las densidades oscuras no difiere significativamente de la cantidad similar en el modelo Λ CDM dentro del intervalo de confianza del 68.3% de probabilidad.

Como comentario final, podemos concluir que, al contrario de lo que se ha sugerido en la literatura, en estos dos modelos la interacción entre ambas componentes oscuras no aminora ni resuelve el problema de la coincidencia cósmica.

Los resultados de este trabajo no son alentadores para la búsqueda de modelos con interacción como explicación al fenómeno que ocasiona que las densidades actuales de materia oscura y energía oscura sean del mismo orden de magnitud o al menos no los aquí mencionados ya que las cotas observacionales restringen severamente los parámetros libres de cada modelo.

Cabe la posibilidad de explorar modelos interactuantes donde no se adjudique una forma específica a la interacción sino encontrándola y analizar sus consecuencias para ver si modelos de esa naturaleza son mejores candidatos para resolver el problema de la coincidencia cósmica que los aquí presentados.

Apéndice A

Elementos de la métrica de FRW

En esta sección presentamos algunos resultados que son útiles para la realización de esta tesis. El elemento de línea ds^2 de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) en coordenadas esféricas, se puede expresar como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (\text{A.1})$$

La métrica de FRW en forma matricial tiene la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

La matriz inversa $g^{\mu\nu}$ es

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - kr^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(a^2 r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(a^2 r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

El determinante de $g_{\mu\nu}$ esta dado por:

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} = -\frac{a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}. \quad (\text{A.4})$$

Las componentes del tensor $T_{\mu\nu}$ en el sistema comóvil pueden escribirse en forma matricial como:

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

La traza T de este tensor es:

$$T = \text{Tr}(T^\mu{}_\mu) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 3p - \rho. \quad (\text{A.6})$$

Los símbolos de Christoffel se definen como

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (\text{A.7})$$

Los símbolos de Christoffel distintos de cero para la métrica de FRW son los siguientes trece términos:

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2 \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a} \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - kr^2) \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \quad (\text{A.11})$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \quad (\text{A.12})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta. \quad (\text{A.13})$$

El tensor de Riemann $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ de manera general se define como

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (\text{A.14})$$

Los términos distintos de cero para el caso de la métrica de FRW, son

$$R^t{}_{rtr} = \frac{a\ddot{a}}{1 - kr^2} \quad (\text{A.15})$$

$$R^t{}_{\theta t\theta} = a\ddot{a}r^2 \quad (\text{A.16})$$

$$R^t{}_{\phi t\phi} = a\ddot{a}r^2 \sin^2(\theta) \quad (\text{A.17})$$

$$R^r{}_{ttr} = R^\theta{}_{t\theta t} = R^\phi{}_{t\phi t} = \frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{A.18})$$

$$R^r{}_{\theta r\theta} = -R^\phi{}_{\theta\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k) \quad (\text{A.19})$$

$$R^r{}_{\phi r\phi} = R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k) \sin^2(\theta) \quad (\text{A.20})$$

$$R^\theta{}_{rr\theta} = R^\phi{}_{rr\phi} = -\frac{\dot{a}^2 + k}{1 - kr^2} \quad (\text{A.21})$$

Las componentes distintas de cero del tensor de Riemann en su forma totalmente *covariante* $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ son

$$R_{trtr} = -\frac{a\ddot{a}}{1 - kr^2} \quad (\text{A.22})$$

$$R_{t\theta t\theta} = -a\ddot{a}r^2 \quad (\text{A.23})$$

$$R_{t\phi t\phi} = -a\ddot{a}r^2 \sin^2(\theta) \quad (\text{A.24})$$

$$R_{r\theta r\theta} = \frac{a^2 r^2 (\dot{a}^2 + k)}{1 - kr^2} \quad (\text{A.25})$$

$$R_{r\phi r\phi} = \frac{a^2 r^2 \sin^2(\theta) (\dot{a}^2 + k)}{1 - kr^2} \quad (\text{A.26})$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = a^2 r^4 \sin^2(\theta) (\dot{a}^2 + k) \quad (\text{A.27})$$

Y las componentes distintas de cero del tensor de Riemann en su forma totalmente *contravariante* $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ son

$$R^{trtr} = -\frac{\ddot{a}(1 - kr^2)}{a^3} \quad (\text{A.28})$$

$$R^{t\theta t\theta} = -\frac{\ddot{a}}{a^3 r^2} \quad (\text{A.29})$$

$$R^{t\phi t\phi} = -\frac{\ddot{a}}{a^3 r^2 \sin^2(\theta)} \quad (\text{A.30})$$

$$R^{r\theta r\theta} = \frac{(1 - kr^2)(\dot{a}^2 + k)}{a^6 r^2} \quad (\text{A.31})$$

$$R^{r\phi r\phi} = \frac{(1 - kr^2)(\dot{a}^2 + k)}{a^6 r^2 \sin^2(\theta)} \quad (\text{A.32})$$

$$R^{\theta\phi\theta\phi} = \frac{\dot{a}^2 + k}{a^6 r^4 \sin^2(\theta)} \quad (\text{A.33})$$

$$(\text{A.34})$$

Los términos *covariantes* distintos de cero del tensor de Ricci $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$ son los elementos de la diagonal, esto es,

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{A.35})$$

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}$$

$$R_{\theta\theta} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)$$

$$R_{\phi\phi} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta$$

Los términos *contravariantes* distintos de cero del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ son

$$R^{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{A.36})$$

$$R^{rr} = \left(\frac{1 - kr^2}{a^4}\right) (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (\text{A.37})$$

$$R^{\theta\theta} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^4 r^2} \quad (\text{A.38})$$

$$R^{\phi\phi} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^4 r^2 \sin^2(\theta)} \quad (\text{A.39})$$

$$(\text{A.40})$$

Expresadas de la forma “contravariante-covariante”, las componentes del tensor de Ricci $R^\mu{}_\nu$ distintas de cero son

$$R^t{}_t = 3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{A.41})$$

$$R^r{}_r = R^\theta{}_\theta = R^\phi{}_\phi = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2} \quad (\text{A.42})$$

La contracción del tensor de Ricci consigo mismo es

$$R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 12 \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a^3}(\dot{a}^2 + k) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 + 2k \left(\frac{\dot{a}}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{a^2}\right)^2 \right] \quad (\text{A.43})$$

El escalar de curvatura $R \equiv R^\alpha{}_\alpha = R_{\beta\alpha}g^{\beta\alpha}$ se expresa como:

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$$

Del tensor de Einstein $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, los únicos términos distintos de cero son los de la diagonal, es decir:

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) \\ G_{rr} &= \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{-1 + kr^2} \\ G_{\theta\theta} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \\ G_{\phi\phi} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)\sin^2\theta \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Bibliografía

- [1] R. G. Abraham et al., *The Gemini Deep Survey. 1. Introduction to the survey, catalogs and composite spectra*. *Astron. J.* **127** (2004) 2455 [astro-ph/0402436] [SPIRES].
- [2] R. Amanullah et al., *Spectra and Light Curves of Six Type Ia Supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 Compilation*. Accepted to be published in *Astrophys. J.* (2010) [arXiv:1004.1711].
- [3] Arturo Avelino Huerta, *Modelos cosmológicos dominados por materia con viscosidad volumétrica para explicar la expansión acelerada del Universo*, Tesis Doctoral, IFM-UMSNH, 2010.
- [4] Astier P., et al, 2006, *The Supernova Legacy Survey: measurement of Ω_M, Ω_Λ and w from the first year data set*, *Astron. & Astrophys.* **447** 31–48.
- [5] Matthias Bartelmann, 2010, *The dark Universe*, *Rev. Mod. Phys.*, **82**, 331–382.
- [6] B. A. Bassett, R. Hlozek et al, 2009, *Baryon Acoustic Oscillations*, *Astroph. J.* **116**, 1009. [astro-ph/9805201].
- [7] Sean Carroll, “*Space and Geometry. An introduction to General Relativity*”, Addison Wesley, 2004, ISBN 0-8053-8732-3.
- [8] Cueva, Freddy et al, 2006, *Reconstruction of the interaction term between dark matter and dark energy using SNe Ia, BAO, CMB, $H(z)$ and X-ray gas mass fraction*, *Astron. & Astrophys.* **447** 31–48.
- [9] D. J. Eisenstein et al, 1998, *Baryon Features in the Matter Transfer Function*, *Astroph. J.* **116**, 1009. [astro-ph/9805201].
- [10] D. J. Eisenstein et al, 1998, *Baryon Features in the Matter Transfer Function*, *Astroph. J.* **116**, 1009. [astro-ph/9805201].
- [11] Freedman W L et al, 2001 *Astrophys. J.* **553**, 47.
- [12] David J. Griffiths “*Introduction to Quantum Mechanics*”, Prentice Hall, 1994, ISBN 0131244051.
- [13] Khokhlov, A.; Mueller, E.; Hoeflich, P., 1993, *Light curves of Type Ia supernova models with different explosion mechanisms*, *Astron. & Astrophys.*, **270** (1–2): 223–248.
- [14] E. Komatsu et al, 2011, *Seven - Years Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP*) Observations: Cosmological Interpretation*, *Astroph. J.* **116**, 1009. [astro-ph/9805201].
- [15] Andrew Liddle, “*An Introduction to Modern Cosmology*”, Editorial Wiley, 2003, ISBN 10: 0470848359.
- [16] S. Nesseris and Leandros Perivolaropoulos, 2007, *Crossing the Phantom Divide: Theoretical Implications and Observational Status*, *J. Cosmo. Astrop. Phys.*, 0701:018. [astro-ph/0610092].
- [17] Riess A. G. et al., 2004, *Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble space telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution*, *Astroph. J.*, **607**, 665–687.
- [18] Supernova Search Team collaboration, A. G. Riess et al., 1998, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron. J.* **116**, 1009. [astro-ph/9805201].
- [19] D. S. Sivia, “*Data Analysis. A Bayesian Tutorial*”, Oxford Science Publications, 2006, ISBN 0 19 856831 2.

- [20] Suzuki et al., *The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above $z \gtrsim 1$ and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample*, ApJ, 27, (2011), [1105.3470v1[astro-ph.CO]]
- [21] L. Xu, Jianbo Lu, 2010, *Cosmological constraints on generalized Chaplygin gas model: Markov Chain Monte Carlo approach*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **116**, 1009. [astro-ph/9805201].
- [22] WMAP Collaboration, N. Jarosik et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results*. Submitted to *Astrophysical Journal Supplement Series* (2010). [arXiv:1001.4744v1].
- [23] L. Xu, Jianbo Lu, 2010, *Cosmological constraints on generalized Chaplygin gas model: Markov Chain Monte Carlo approach*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **116**, 1009. [astro-ph/9805201].
- [24] Zong-Kuan Guo, *Probing the coupling between dark components of the universe*, Physical Review D 76, 023508 (2007).
- [25] Yun-He Li et al., *Running coupling: Does the coupling between dark energy and dark matter change sign during the cosmological evolution?*. Astron. J. 8 (2011) [1205.3365v1[astro-ph.CO]].
- [26] J. Martin., *Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask)*. Astron. J. 8 (2012) [1103.3185v3[astro-ph.CO]].
- [27] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series in Physics, Second Edition, 596 pages