UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH

Cuantización Geométrica del Monopolo Magnético

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

JOSÉ LEONARDO PÉREZ TARACHE

Director: Dr. Elmar Wagner

MORELIA, MICHOACÁN - AGOSTO DE 2014.

Índice general

Resumen

Dada una variedad simpléctica M, la cuantización geométrica asigna a funciones reales $f \in C^\infty(M)$ operadores autoadjuntos $\widehat{f}$ sobre un espacio de Hilbert tal que el corchete de Poisson definido por la forma simpléctica se convierte en el conmutador de estos operadores. Presentaremos en este trabajo dos pasos de la cuantización geométrica: la precuantización y la polarización. Para que éste operador cumpla con las condiciones de cuantización de Dirac, debe satisfacer la condición de integralidad, para por lo menos garantizar la existencia de una haz de linea compleja Hermitiano con conexión. Ya para cuantizar el monopolo magnético nos basamos sobre la variedad simpléctica $(\mathbb{S}^2, B)$, donde B es el campo magnético en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ considerado como una 2-forma simpléctica, el cual, no depende del radio, entonces lo podemos analizar en $\mathbb{S}^2$ donde este campo es una forma de volumen en dicha variedad, y se busca de tal forma que cumpla la condición de integralidad, esto garantiza que cumplimos con los siguientes axiomas de la cuantización geométrica: la existencia de un haz de linea compleja, una conexión sobre este haz y una 1-forma de conexión que son hallados convenientemente tomando unos abiertos adecuados en la esfera.

PALABRAS CLAVE. Variedades simpléticas, cuantización geométrica, monopolo magnético.

Abstract

Given a symplectic manifold M, the geometric quantization asigns to a real function $f \in C^{\infty}(M)$ a selfadjoint operator $\widehat{f}$ on a Hilbert space such that the Poisson Bracket defined by the symplectic form becomes the commutator of operators. We present in this thesis two steps of the quantization: the prequantization and the polarization. For this operator complies with the conditions of Dirac quantization must satisfy the condition of integrality for at least to guarantee the existence of a complex Hermitian line bundle with connection. Now, to quantize the magnetic monopole, we pass to the symplectic manifold $(\mathbb{S}^2, B)$, where B is the magnetic field in $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ considered as a symplectic 2-form, which depends not on the radio, then we can analyze in $\mathbb{S}^2$ where this field is a volume form on the manifold, and is found in such a way that it satisfies the integrality condition. This guarantees that we fulfill the following axioms of geometric quantization: the existence of a complex line bundle and a conection 1-form that are found conveniently taking adequate open in S^2.

KEYWORDS. simplectic manifold, geometric quantization, magnetic monopole.

Introducción

La cuantización geométrica es un procedimiento que tiene como entrada una variedad simpléctica (M, ω) (el espacio de fases de la física), y como salida un espacio de Hilbert, de manera que a cada observable cuantizable sobre la variedad (funciones reales de un subconjunto conveniente $Obs \subset C^\infty(M)$) se le asocia un observable cuántico (operador autoadjunto del espacio de Hilbert), de un modo compatible que precisaremos más adelante.

La tesis está organizada de la siguiente manera: En la primera parte, empezaremos hablando de nociones de geometría simpléctica; luego de las condiciones de cuantización expuestas por Dirac; a continuación, hablaremos de precuantización, en el cual expondremos que, para garantizar la existencia de un haz de linea compleja L y una conexión sobre L con curvatura ω, será necesario y suficiente que cumpla con la condición de integralidad; también de polarización, donde ya con esto la aplicación que asocia $f \longrightarrow \widehat{f_D}$ conocida como la "precuantización de Souriau-Kostant" cumplirá con las condiciones cuánticas de Dirac, además $\widehat{f_D}$ es un operador Hermitiano bajo ciertas circunstancias; y finalmente explicaremos este proceso en un ejemplo elemental como lo es para la variedad simpléctica $(T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}, \omega)$ con ω la forma simpléctica canónica.

El objetivo de la segunda parte es encontrar las condiciones necesarias para la cuantización del monopolo magnético que cumpla con las condiciones de cuantización de Dirac. Basados en la variedad $\mathbb{S}^2$ donde el campo magnético en coordenadas polares es

$$B = g \sin\theta \, d\theta \wedge d\phi, \qquad \theta \in (0, \pi), \ \phi \in (\phi_0, \phi_0 + 2\pi), \ \text{con } \phi_0 \in \mathbb{R}, g \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

considerado como 2-forma simpléctica, convierte a $\mathbb{S}^2$ en variedad simpléctica. Donde B cumple con la condición de integralidad y asegura la existencia de un haz de linea compleja con conexión, para encontrar dicha conexión es necesario buscar una 1-forma de conexión A tal que localmente $B = dA$ sobre este haz de linea compleja localmente trivial. Dicha 1-forma queda de la siguiente manera

$$A_N = g(1 - \cos\theta)d\phi \ \text{ en } \ U_N, \qquad A_S = -g(1 + \cos\theta)d\phi \ \text{ en } \ U_S,$$

para un atlas de $\mathbb{S}^2$ conveniente con dos abiertos U_N y U_S. Estas 1-formas locales A_N y A_S representan el potencial magnético del monopolo de Dirac, coincidiendo con el resultado de Wu-Yang [11].

Capítulo 1

Cuantización Geométrica

Un problema fundamental de la física teórica es el entendimiento completo del proceso de cuantización de un sistema físico, este es un proceso que, de una descripción clásica de la dinámica de un sistema, nos lleva a la descripción cuántica correspondiente de estas dinámicas. Matemáticamente este proceso representa la trayectoria de una descripción geométrica diferencial a un escenario diferente: un espacio de Hilbert.

Existen algunos esquemas estandares y fundamentales para la cuantización; cuantización canónica y funcional por ejemplo, pero ninguno de ellos da de una manera precisa y exacta la construcción del espacio de Hilbert necesario para la cuantización o representación del álgebra de observables físicos clásicos en el álgebra de operadores autoadjuntos sobre el espacio de Hilbert de la descripción clásica. La estructura de la cuantización geométrica intenta dar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una descripción cuántica de la dinámica de un sistema descrito clásicamente usando una variedad simpléctica, y describe de una manera precisa la construcción del espacio de Hilbert, la representación del operador autoadjunto sobre el espacio de Hilbert y de las álgebras de Lie asociadas con esta descripción, todo está a través de los métodos de geometría y topología diferencial. Los principales escenarios son los haces de linea compleja sobre variedades y los invariantes topológicos que le dan su clasificación.

Éste capítulo desarrolla los dos pasos básicos en la cuantización geométrica de un sistema clásico: precuantización, introducción de polarizaciones, y además contiene todo el material necesario para llevar a cabo el estudio del caso particular en el capítulo siguiente. Pero antes hablemos de los requisitos necesarios para cuantizar.

1. Preliminares

Antes de entrar en detalle con cada paso de la cuantización, introduciremos algunos preliminares necesarios. Empecemos recordando lo que es una k-forma diferencial. Sea M una variedad diferenciable. Una forma diferencial de grado k asigna de manera diferenciable a cada punto $p \in M$ una función k-multilineal alternante

$$\omega_p \, : \, T_pM \times \ldots \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}.$$

El espacio de formas diferenciales de grado k lo denotaremos por $\Omega^k(M)$. En coordenadas locales (U, ϕ) se puede escribir

$$\omega_p = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1,\dots,i_k}(p)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

donde $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ es la base dual de la base canonica $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ de T_pM, $f_{i_1,\dots,i_k} \in C^\infty(U)$ y los multi-índices de tamaño k de $\{1, \cdots, n\}$ ordenados en orden creciente. El producto exterior de dos formas diferenciales $\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1,\dots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $\tau = \sum_{j_1<\cdots<j_s} g_{j_1,\dots,j_s}\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s}$ de grados k y s respectivamente, es la forma diferencial de grapo $k + s$ siguiente

$$\omega \wedge \tau = \sum f_{i_1,\dots,i_k} g_{j_1,\dots,j_s}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s},$$

donde $\wedge$ cumple con $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, en particular $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ un atlas difenciable para M. Una k-forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ está completamente determinada por una colección $\{\omega_\alpha \in \Omega^k(\phi_\alpha(U_\alpha))\}_{\alpha\in I}$ satisfaciendo $\omega_\alpha = (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^*\omega_\beta$ en $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, donde $\left((\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^*\omega_\beta\right)(X_1, \dots, X_k) := \omega_\beta(D(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(X_1), \dots, D(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(X_k))$ para todos los campos vectoriales $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$.

El operador diferencial exterior $d : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)$ se calcula en coordenadas locales como

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} (df_{i_1,\dots,i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_j \sum_{i_1<\cdots<i_k} \frac{\partial f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

y se simplifica usando $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ y $dx_j \wedge dx_j = 0$. Una k-forma diferencial ω es cerrada si $d\omega = 0$. Y es exacta, si existe una $(k-1)$-forma diferencial θ tal que $\omega = d\theta$. Una identidad clave de la derivada exterior es

$$d(d\omega) = 0.$$

Si $\omega \in \Omega^1(U)$, es decir, es una 1-forma, se puede demostrar que

$$(d\omega)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \tag{1.1}$$

para cualesquiera campos vectoriales $X, Y \in \Gamma(M)$.

Observación 1.1. *$\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ y $\Omega^k(M) = \{0\}$ si $k > n$.*

Definición 1.1. *Sea M una variedad de dimensión n, una forma de volumen sobre M es una n-forma diferencial ω no degenerada, es decir, que no se anula en ningún punto.*

Observación 1.2. *Por Observacion 1.1, $d\omega = 0$ para toda forma de volumen ω sobre M.*

Con esto, ahora si definamos variedad simpléctica. Estas variedades se presentan naturalmente en la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica.

DEFINICIÓN 1.2 (Variedad simpléctica). *Una variedad simpléctica es un par* (M, ω) *donde* M *es una variedad diferenciable y* ω *es una 2-forma cerrada, no degenerada en* M*, llamada la forma simpléctica. Aquí, "no degenerada" significa que para cada vector distinto de cero* $u \in T_mM$*,* $m \in M$ *en el espacio tangente en un punto, existe un vector* $v \in T_mM$ *tal que* $\omega(u, v) \neq 0$*, y cerrada que* $d\omega = 0$*. La transformación diferenciable* $\varphi : M \longrightarrow M$ *se llama simpléctica si* $\varphi^*\omega = \omega$ *(donde "*" representa el pullback). El campo* $X \in \Gamma(TM)$ *es simpléctico si su flujo consiste de transformaciones simplécticas o equivalentemente* $\mathcal{L}_X\omega = 0$ *o lo que es lo mismo* $d(i(X)\omega) = 0$*, ya que* $0 = \mathcal{L}_X\omega = di(X)\omega + i(X)d\omega = d(i(X)\omega)$ *pues* ω *es cerrada, y donde*

$$i(X)\omega(Y) := \omega(X, Y), \tag{1.2}$$

para todo campo vectorial Y*.*

Sea ω una 2-forma no degenerada en la variedad M. Dada $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable hay un único $X_H \in \Gamma(TM)$ tal que para cada campo vectorial $Y \in \Gamma(TM)$ la identidad $(i(X_H)\omega)(Y) = \omega(X_H, Y) = dH(Y)$ se cumpla, y se conoce como el campo hamiltoniano correspondiente a H. Los campos Hamiltonianos son simplécticos, pues $d(i(X_H)\omega)(Y) = d\omega(X_H, Y) = 0$ porque ω es un 2-forma cerrada. Estos campos vectoriales hamiltonianos dan a las funciones diferenciables en M la estructura de un álgebra de Lie con el corchete de Poisson, es decir, que con el corchete de Poisson satisface bilinealidad, antisimetría y la identidad de Jacobi.

DEFINICIÓN 1.3. *Para* $f, g \in C^\infty(M)$ *definimos el corchete de Poisson*

$$\{f, g\} := \omega\left(X_g, X_f\right) = dg(X_f) = X_f(g). \tag{1.3}$$

PROPOSICION 1.1. *Si* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *son simplécticos entonces* $[X, Y]$ *es el campo hamiltoniano correspondiente a* $\omega(Y, X)$*. En particular si* $X = X_f$ *y* $Y = X_g$ *entonces*

$$X_{\{f,g\}} = \left[X_f, X_g\right]. \tag{1.4}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ y X, Y son simplécticos,

$$\begin{aligned}
X(i(Y)\omega(Z)) &= \mathcal{L}_X(i(Y)\omega)(Z) + i(Y)\omega(\mathcal{L}_XZ) \\
&= d(\omega(Y, X))(Z) + i(X)d(i(Y)\omega)(Z) + \omega(Y, \mathcal{L}_XZ) \\
&= d(\omega(Y, X))(Z) + \omega(Y, \mathcal{L}_XZ), \\
X(\omega(Y, Z)) &= \mathcal{L}_X\omega(Y, Z) + \omega(\mathcal{L}_XY, Z) + \omega(Y, \mathcal{L}_XZ) \\
&= \omega([X, Y], Z) + \omega(Y, \mathcal{L}_XZ).
\end{aligned}$$

Entonces por ecuación (1.2) tenemos $d(\omega(Y, X))(Z) = \omega([X, Y], Z)$. En particular para $X = X_f$ y $Y = X_g$ tenemos $\omega\left(\left[X_f, X_g\right], Z\right) = d\left(\omega(X_g, X_f)\right)(Z) = d(\{f, g\})(Z) = \omega\left(X_{\{f,g\}}, Z\right)$. ❑

Ejemplo 1.1. *El haz cotangente de una variedad es el conjunto*

$$T^*M = \bigcup_{q\in M} T_qM^* = \{(q,p) : q \in M, p \in T_qM^*\}$$

con la proyección $\pi : T^*M \longrightarrow M$, $\pi(q,p) = q$. *Dada* $\varphi : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi = (x^1,\ldots,x^n)$ *una carta de coordenadas, para cada* $q \in U$, $\{dx^1,\ldots,dx^n\}$ *es una base de* T_qM^*, *así cualquier* $p \in T_qM^*$ *se escribe como* $p = \sum_{i=1}^n y_i\, dx^i$ *y entonces* $T^*U \ni p \mapsto (x^1,\ldots,x^n,y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ *define una carta de coordenadas para* T^*M. *La 1-forma natural* $\theta : T^*M \longrightarrow T^*(T^*M)$ *se define por* $\theta_{(q,p)} = (p \circ D(\pi))_{(q,p)}$. *Definimos la 2-forma* $\omega = -d\theta$.

Escribiendo $Z \in T_{(q,p)}(T^*M)$ *en coordenadas locales* $Z = \sum_{i=1}^n Z_{x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(q,p)} + Z_{y_i}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{(q,p)}$, *entonces* $D(\pi)(Z(p,q)) = \sum_{i=1}^n Z_{x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q$ *con esto tenemos que*

$$\begin{aligned}\theta_{(q,p)}(Z) &= \sum_{i=1}^n y_i Z_{x^i} = \left(\sum_{i=1}^n y_i dx^i_{(q,p)}\right)(Z)\\ \Longrightarrow\ \theta &= \sum_{i=1}^n y_i dx^i, \qquad \omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy_i.\end{aligned}$$

También cumple que para cada vector no nulo $Z \in T_{(q,p)}(T^*M)$, *existe un* $W \in T_{(q,p)}(T^*M)$ *tal que*

$$\omega(Z,W) = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy_i\,(Z,W) = \sum_{i=1}^n \left(Z_{x^i}W_{y_i} - Z_{y_i}W_{x^i}\right) \neq 0.$$

Por lo tanto ω *es simpléctica y* (T^*M,ω) *una variedad simpléctica. Además para* $H,K \in C^\infty(T^*M)$, *sea* $dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial H}{\partial y_i}dy_i$ *y* $X_H = \sum_{i=1}^n X_{x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + X_{y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}$, *entonces*

$$\begin{aligned}dH(Z) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x^i}Z_{x^i} + \frac{\partial H}{\partial y_i}Z_{y_i},\\ \omega(X_H,Z) &= \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy_i\,(X_H,Z) = \sum_{i=1}^n \left(X_{x^i}Z_{y_i} - X_{y_i}Z_{x^i}\right).\end{aligned}$$

Ahora $dH(Z) = \omega(X_H,Z)$ *implica*

$$X_H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y_i} \tag{1.5}$$

y la ecuación (1.3) *implica*

$$\{H,K\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial K}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial K}{\partial y_i}. \tag{1.6}$$

Con esto entonces tenemos

$$\{y_i, x^j\} = \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial y_k}\frac{\partial x^j}{\partial x^k} - \frac{\partial y_i}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial y_k} = \delta_{ij}, \tag{1.7}$$

$$\{y_i, y_j\} = \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_j}{\partial x^k} - \frac{\partial y_i}{\partial x^k}\frac{\partial y_j}{\partial y_k} = 0, \tag{1.8}$$

$$\{x^i, x^j\} = \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y_k}\frac{\partial x^j}{\partial x^k} - \frac{\partial x^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial y_k} = 0. \tag{1.9}$$

En particular si $M = \mathbb{R}^n$, $T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ *es una variedad simpléctica con coordenadas (locales)* $(q, p) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, *y con potencial simpléctico* $\theta \in \Omega^1(T^*\mathbb{R}^n)$, $\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$ *tal que* $\omega = -d\theta = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$.

El siguiente teorema nos dice que para una variedad simpléctica arbitraria, es posible encontrar un sistema de coordenadas tal que la 2-forma simpléctica localmente sea la canónica.

TEOREMA 1.1 (Teorema de Darboux). *Sea* (M, ω) *variedad simpléctica 2n-dimensional. Entonces para cada punto* $p \in M$ *existe una vecindad coordenada (carta local)* (U, ϕ) *con coordenadas locales* $\phi(q) := (x_1(q), \ldots, x_n(q), y_1(q), \ldots, y_n(q))$, $q \in U$, *tal que*

$$\omega\,|_U = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i\,.$$

La carta local (U, ϕ) se llama **carta local de Darboux** alrededor de p. La variedad simpléctica (M, ω) puede ser cubierta mediante un recubrimiento formado por cartas de Darboux.

Es sabido que si una k-forma diferencial es exacta, entonces es cerrada, pero lo contrario no necesariamente es cierto. Las condiciones sobre las cuales se cumple es la siguiente [1]:

LEMA 1.1 (Poincaré). *Si* M *es variedad diferenciable contraible (existe una homotopía* $H : M \times [0, 1] \longrightarrow M$ *diferenciable tal que* $H(p, 1) = p$, $H(p, 0) = p_0$, $p_0 \in M$ *fijo) y* ω *una k-forma diferencial cerrada en* M, *entonces* ω *es exacta, es decir existe una* $(k-1)$*-forma diferencial* θ *en* M *tal que* $\omega = d\theta$.

Es necesario introducir el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2 (Teorema de Liouville). *El flujo de campos vectoriales Hamiltonianos dejan la forma de volumen 2n-dimensional* $\epsilon = c dp_1 \wedge dp_2 \wedge \ldots \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge dq_2 \wedge \ldots \wedge dq_n$ *invariante. Es decir, si un conjunto* E *esta contenido en el dominio de* Φ_t *(es igual a la solución en tiempo t de* *las ecuaciones de Hamilton) para algún $t \in \mathbb{R}$, entonces el volumen de $\Phi_t(E)$ es igual al volumen de E.*

DEMOSTRACIÓN. Las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_n} \\
\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\
&\vdots \\
\frac{dp_n}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_n}.
\end{aligned}$$

Esto significa que las ecuaciones de Hamilton describen el flujo del campo vectorial en $\mathbb{R}^{2n}$ que aparece en la parte derecha de la ecuaciones anteriores. Este flujo dejará preservado el volumen si la divergencia del campo vectorial es cero. Calculamos ésta divergencia para $V = \left(\frac{dx_1}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}, \frac{dp_1}{dt}, \cdots, \frac{dp_n}{dt}\right)$ como

$$div(V) = \nabla \cdot V = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} - \cdots - \frac{\partial}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial x_n}.$$

Ya que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_j p_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_j x_j}, \quad \text{para } j = 1, \cdots, n,$$

la divergencia es cero. ❑

1.1. Haces de Linea Compleja y Conexiones. Ahora introducimos la noción de haz de linea compleja sobre una variedad y las secciones de las mismas, que se ven a nivel local como funciones de valores complejos. Luego la noción de derivadas covariantes de las secciones de un haz de linea, donde localmente estas derivadas covariantes toman la forma $\nabla_X = X - \mathrm{i}\theta(X) = (d - \mathrm{i}\theta)(X)$ para una cierta 1-forma diferencial θ. Primero hablemos de los **haces vectoriales diferenciables localmente triviales**

DEFINICIÓN 1.4. *Si M es una variedad diferenciable, un **haz vectorial diferenciable complejo** sobre M es una variedad diferenciable L junto con las siguientes estructuras adicionales. Primero, tenemos una aplicación C^∞ suprayectiva $\pi : L \longrightarrow M$. Segundo, para cada $q \in M$, el conjunto $\pi^{-1}(\{q\})$ esta equipado con la estructura de un espacio vectorial complejo de dimensión m, y es* *llamada la fibra de L sobre M. Estas estructuras son asumidas a satisfacer la propiedad de trivialidad local, donde para cada $q \in M$ existe una vecindad U_i tal que existe un difeomorfismo $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^m$ con las siguientes propiedades. Primero,*

$$\pi(p) = \pi_1(\psi_i(p)),$$

donde $\pi_1 : U_i \times \mathbb{C}^m \longrightarrow U_i$ es la proyección sobre el primer factor. Segundo, para cada $q \in U_i$, la aplicación $\psi_i \mid_{\pi^{-1}(\{q\})}: \pi^{-1}(\{q\}) \longrightarrow \{q\} \times \mathbb{C}^m \approx \mathbb{C}^m$ es un isomorfismo del espacio vectorial $\pi^{-1}(\{q\})$ con $\mathbb{C}^m$, donde $\{q\} \times \mathbb{C}^m \approx \mathbb{C}^m$ por $(q, v) \mapsto v$.

Una sección de un haz vectorial diferenciable complejo L sobre M es una aplicación diferenciable $s : M \longrightarrow L$ tal que $\pi(s(q)) = q$ para todo $q \in M$.

Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, definimos las funciónes de transición $t_{ij}(q) := \psi_j \mid_{\pi^{-1}(q)} \circ \left(\psi_i \mid_{\pi^{-1}(q)}\right)^{-1} \in GL(m, \mathbb{C})$ para cada $q \in U_i \cap U_j$. Las funciónes de transición están determinadas por

$$\psi_i \mid_{\pi^{-1}(q)} \circ \left(\psi_j \mid_{\pi^{-1}(q)}\right)^{-1} (q, v) = (q, t_{ij}(q)v), \qquad v \in \mathbb{C}^m.$$

Un grupo de Lie $G \subset GL(m, \mathbb{C})$ es llamado grupo de estructura si $t_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$. Las funciónes de transición satisfacen

1) $t_{ii} = Id$
2) $t_{ij} = t_{ji}^{-1}$
3) $t_{ij} t_{jk} t_{ki} = Id$ siempre que $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

Como en [6, Theorem 1.5.1], se tiene:

TEOREMA 1.3.

$$L \cong \bigsqcup_{i \in I} (U_i \times \mathbb{C}^m) / \sim \quad \textit{con} \quad \pi([(p_i, v_i)]) = p_i,$$

donde $U_i \times \mathbb{C}^m \ni (p_i, v_i) \sim (p_j, v_j) \in U_j \times \mathbb{C}^m \iff p_i = p_j,\ v_i = t_{ij} v_j$.

En particular los **Haces de Linea Compleja** L sobre una variedad M son cuando $m = 1$, además pedimos que $G = U(1) \subset GL(1, \mathbb{C})$ sea el grupo de estructura. Para eligir una base en $\pi^{-1}(p),\ p \in U_i$, se usa las secciones locales

$$s_i(p) := [(p, 1)] \tag{1.10}$$

que se transforman por $s_i(p) = t_{ij}(p) s_j(p),\ p \in U_i \cap U_j$. Denotamos el espacio de secciones (globales) por $\Gamma(L)$ y definimos

$$\Omega^k(L) := \Gamma(L) \otimes \Omega^k(M). \tag{1.11}$$

Para cualquier variedad M, podemos formar un haz de linea complejo trivial $M \times \mathbb{C}$ donde $\pi(x,z) := x$ y la estructura de espacio vectorial sobre $\{x\} \times \mathbb{C}$ es la estructura de espacio vectorial usual sobre $\mathbb{C}$.

Definición 1.5. *Una conexión ∇ sobre un haz vectorial diferenciable complejo L sobre M es una aplicación asociando a cada campo vectorial X sobre M y una sección $s \in \Gamma(L)$ otra sección $\nabla_X(s) \in \Gamma(L)$ satisfaciendo para cada función $f \in C^\infty(M)$ las siguientes propiedades:*

1) ∇ es tensorial en X,

$$\nabla_{fX}(s) = f\nabla_X(s), \qquad \nabla_{X+Y}(s) = \nabla_X(s) + \nabla_Y(s),$$

para todo campo vectorial X, Y y sección s.

2) Tenemos la regla del producto y de la suma

$$\nabla_X(fs) = (X(f))s + f\nabla_X(s), \qquad \nabla_X(s+t) = \nabla_X(s) + \nabla_X(t),$$

para todo campo vectorial X y secciones s y t.

Dada una conexión ∇ y un campo vectorial X, el operador ∇_X es llamada la derivada covariante en la dirección de X. En una manera mas abstracta, $\nabla : \Omega^0(L) \longrightarrow \Omega^1(L)$. Con respeto a la definición (1.11), podemos extender la derivada covariante a

$$\nabla : \Omega^k(L) \longrightarrow \Omega^{k+1}(L), \quad \nabla(s\omega) := \nabla(s) \wedge \omega + s\, d\omega,$$

donde $s \in \Gamma(L)$, $\omega \in \Omega^k(M)$ y $s\omega := s \otimes \omega \in \Omega^k(L)$.

Usando la base local $s_i(p) = [(p,1)]$, podemos escribir $\nabla(fs_i) = \big(d(f)(X) + fA(X)\big)s_i$, donde $f : U_i \to \mathbb{C}$ es diferenciable y $df = d(\mathrm{Re}(f)) + \mathrm{i}\, d(\mathrm{Im}(f))$. Por 1) de la definición 1.5, concluimos que $X \mapsto A(X) \in \mathbb{C}$ es lineal, entonces $A \in \Gamma(\mathbb{C} \otimes T^*M\,|_{U_i})$. En simbolos escribimos sobre U_i

$$\nabla = d + A. \tag{1.12}$$

Ahora queremos estudiar el comportamiento de la transformación de A. Sea $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ un atlas de M con funciones de transición $t_{ij} : U_i \cap U_j \to U(1)$. Escribimos $\nabla = d + A_i$ sobre U_i. Sea s_i la base canónica sobre U_i. Por lo tanto

$$s_j = t_{ji}s_i \quad \text{sobre } U_i \cap U_j.$$

Pero entonces también tenemos

$$t_{ji}(d + A_i)s_i = (d + A_j)s_j \quad \text{sobre } U_i \cap U_j;$$

en el lado izquierdo hemos calculado primero ∇s en la trivialización definida por U_i y luego transformado el resultado a la trivialización definida por U_j, mientras que en el lado derecho, hemos expresado directamente ∇s en esta última trivialización. Luego

$$(d + A_i)s_i = t_{ji}^{-1}(d + A_j)t_{ji}s_i,$$

entonces

$$A_i = t_{ji}^{-1}dt_{ji} + t_{ji}^{-1}A_jt_{ji}. \tag{1.13}$$

Esta fórmula da el comportamiento de la transformación deseada. Para haces de linea, $t_{ji}^{-1}, A_j, t_{ji} \in \mathbb{C}$ conmutan, por lo tanto

$$A_i = t_{ji}^{-1}dt_{ji} + A_j. \tag{1.14}$$

DEFINICIÓN 1.6. *La curvatura de una conexión* ∇ *es el operador*

$$F := \nabla \circ \nabla : \Omega^0(L) \longrightarrow \Omega^2(L).$$

Calculamos F para $s \in \Gamma(L)$.

$$\begin{aligned} F(s) &= (d + A) \circ (d + A)s \\ &= (dA)s - A\,ds + A\,ds + A \wedge As \end{aligned}$$

(el signo menos se produce, ya que A es una 1-forma). Así

$$F = dA + A \wedge A. \tag{1.15}$$

satisface $\nabla F = 0$. Ahora es necesario añadir una estructura Hermitiana al haz de linea L, con la siguiente

DEFINICIÓN 1.7. *Una estructura Hermitiana sobre un haz de linea L sobre M es una elección de un producto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *sobre cada fibra* $\pi^{-1}(\{q\})$ *de L tal que para cada sección diferenciable s de L,* $\langle s, s \rangle \in C^\infty(M)$. *Un haz de linea L junto con una estructura Hermitiana sobre L será llamado un haz de linea Hermitiano. Una conexión* ∇ *sobre un haz de linea Hermitiano L es Hermitiana si para cada campo vectorial X, tenemos*

$$X\langle s_1, s_2\rangle = \langle \nabla_X(s_1), s_2\rangle + \langle s_1, \nabla_X(s_2)\rangle$$

para toda sección diferenciable s_1 *y* s_2 *de L.*

Dado un haz de linea compleja L con grupo de estructura $U(1)$, podemos definir en coordenadas locales $\langle f_1 s_j, f_2 s_j\rangle := \bar{f}_1 f_2$, donde s_j denota la base local (1.10). Está bien definido porque

$$\langle f_1 s_i, f_2 s_i\rangle = \langle f_1 t_{ij} s_j, f_2 t_{ij} s_j\rangle = \bar{t}_{ij} t_{ij} \bar{f}_1 f_2 = \bar{f}_1 f_2,$$

ya que $|t_{ij}| = 1$. Como $\langle s_j, s_j\rangle \equiv 1$, llamamos a s_j una trivialización local isométrica de L.

Sea ∇ una conexión Hermitiana. La 1-forma de conexión A_j en esta trivialización está dada por

$$0 = X\langle s_j, s_j\rangle = \langle A_j(X)s_j, s_j\rangle + \langle s_j, A_j(X)s_j\rangle = \bar{A}_j(X) + A_j(X),$$

entonces $\theta_j := \mathrm{i}A_j$ toma valores reales. Por lo tanto,

$$\nabla_X s_j = -\mathrm{i}\,\theta_j(X)\,s_j \quad \text{con} \quad \theta_j \in \Omega^1(U_j).$$

Ahora, escribiendo cualquier sección s de L sobre U_j como $s = \phi s_j$, donde ϕ es una función difererenciable de valor compleja, dado un campo vectorial X y usando la regla del producto para derivadas covariantes tenemos

$$\nabla_X(\phi s_j) = \Big(d\phi(X) - \mathrm{i}\theta_j(X)\phi\Big)\,s_j. \tag{1.16}$$

Con abuso de notación, omitimos el indice j y escribimos $\nabla = d - \mathrm{i}\theta$.

Por (1.15), $F = dA_j + A_j \wedge A_j$ en coordenadas locales asociadas a una carta (U_j, ϕ_j). Como $A_j(X), A_j(Y) \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{C}$ es conmutativa, tenemos para todo campo vectorial X, Y

$$(A \wedge A)(X,Y) = A(X)A(Y) - A(Y)A(X) = 0 \tag{1.17}$$

por lo tanto $F = dA$. Definiendo $\theta := -\mathrm{i}A$, se obtiene $F = -\mathrm{i}d\theta$, donde $d\theta \in \Omega^2(M)$.

La curvatura F de un haz de linea transforma como

$$F_i = dA_i = d(t_{ji}^{-1}dt_{ji} + A_j) = -t_{ji}^{-2}dt_{ji} \wedge dt_{ji} + dA_j = dA_j = F_j,$$

donde usamos (1.14), la relación $0 = d(Id) = d(t_{ji}^{-1}\,t_{ji}) = dt_{ji}^{-1}\,t_{ji} + t_{ji}^{-1}dt_{ji} = t_{ji}\,dt_{ji}^{-1} + t_{ji}^{-1}dt_{ji}$ y $dt_{ji} \wedge dt_{ji} = 0$ por la conmutatividad de $\mathbb{C}$ (ver (1.17)). Entonces la curvatura F no depende de coordenadas locales y se puede presentar de una forma abstracta como un elemento de $\Omega^2(End(L))$, denotamos al operador curvatura por R:

$$\begin{aligned} F : \Omega^0(L) &\longrightarrow \Omega^2(L) \\ \mu &\longmapsto R(\cdot,\cdot)\mu, \end{aligned}$$

Definición 1.8. *Para cualquier haz de linea hermitiano L con conexión ∇, definamos el tensor de curvatura R de ∇ por*

$$R(X,Y)s = \mathrm{i}\,(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\,(s)$$

para todo campo vectorial X, Y sobre M y toda sección $s \in \Gamma(L)$.

Con respeto a la base conónica s_j sobre U_j y para toda función compleja diferenciable f,

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)fs_j &= \mathrm{i}\left[\nabla_X\left(\nabla_Y fs_j\right) - \nabla_Y\left(\nabla_X fs_j\right) - \nabla_{[X,Y]}fs_j\right]\\
&= \mathrm{i}\left[\nabla_X\left(Y(f)s_j - \mathrm{i}\theta(Y)fs_j\right) - \nabla_Y\left(X(f)s_j - \mathrm{i}\theta(X)fs_j\right) - \left([X,Y](f)s_j - \mathrm{i}\theta([X,Y])fs_j\right)\right]\\
&= \mathrm{i}\Big[X(Y(f))s_j - \mathrm{i}\theta(X)Y(f)s_j - \mathrm{i}\left(X(\theta(Y))fs_j + \theta(Y)X(f)s_j - \mathrm{i}\theta(Y)\theta(X)s_j\right) - Y(X(f))s_j\\
&\quad +\mathrm{i}\theta(Y)X(f)s_j + \mathrm{i}\left(Y(\theta(X))fs_j + \theta(X)Y(f)s_j - \mathrm{i}\theta(X)\theta(Y)s_j\right) - [X,Y](f)s_j + \mathrm{i}\theta([X,Y])fs_j\Big]\\
&= \mathrm{i}\left[-\mathrm{i}X(\theta(Y)) + \mathrm{i}Y(\theta(X)) + \mathrm{i}\theta([X,Y])\right]fs_j\\
&= \left[X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X,Y])\right]fs_j\\
&= d\theta(X,Y)fs_j \qquad \text{(por ecuación (1.1))}.
\end{aligned}
$$

Con esto tenemos que

$$
R(X,Y) = d\theta(X,Y). \tag{1.18}
$$

Así ésta se mantiene para cualquier sección s ya que la 2-forma de curvatura es independiente de la trivialización local.

En este ámbito es necesario también definir distribución y polarización real dada a continuación.

DEFINICIÓN 1.9. *Dada una variedad arbitraria M decimos que una aplicación suave (C^∞) D es una distribución si a cada punto $m \in M$ asocia un subespacio lineal D_m de T_mM, de tal manera que:*

a) *$k = dim(D_m)$ es constante (independiente de m).*
b) *$\forall m_0 \in M$, $\exists U_{m_0} \subset M$ abierto que contiene m_0, y campos vectoriales $X_1, \ldots, X_k$ definidos en este abierto y tal que $D_m = \langle X_1, \ldots, X_k\rangle$, $\forall m \in U_{m_0}$.*

Definimos

$$
V(M,D) := \{Z \in \Gamma(TM) : Z(m) \in D_m, \forall m \in M\}. \tag{1.19}
$$

La distribución es llamada integrable si para cada punto m_0 en M existe una subvariedad N de M y tal que $dim(N) = k$ y si $m \in M \Rightarrow T_mN = D_m$. Por el conocido Teorema de Frobenius, esta definición es equivalente a decir que si $X, Y \in V(M,D)$ entonces $[X,Y] \in V(M,D)$.

DEFINICIÓN 1.10. *Sea (M,ω) variedad simpléctica 2n-dimensional, una* ***Polarización Real*** *sobre M es una distribución integrable D sobre M tal que $\omega(m)(D_m, D_m) = 0$ $\forall m \in M$ y ningún otro subespacio de T_mM que contiene a D_m tiene esta propiedad. En este caso $dim(D_m) = n$.*

EJEMPLO 1.2. *Para $M = \mathbb{R}^{2n}$ y $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$, podemos hablar de los mas simples que son las llamadas polarizaciones verticales (D_v) y horizontales (D_h), definido por las distribuciones que a cada punto $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ asocia los espacios vectoriales del haz tangente a M*

$$D_v(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_n} \right\rangle \quad y \quad D_h(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q_n} \right\rangle \tag{1.20}$$

respectivamente, entonces dim(D_v) = dim(D_h) = n, además que $\omega(D_v, D_v) = 0$ y $\omega(D_h, D_h) = 0$ sigue de la estructura canónica de ω.

Ahora definiremos la complexificación del haz tangente.

DEFINICIÓN 1.11. *Sea M una variedad diferenciable y $q \in M$, definimos la complexificación del haz tangente como*

$$T_qM^{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_qM$$

y extendemos

$$\omega_q : T_qM^{\mathbb{C}} \times T_qM^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

de manera $\mathbb{C}$-bilineal.

Esta complexificación del haz tangente será necesaria para la definición de polarización compleja en la sección 4.

2. Las Condiciones de Cuantización

El primer problema de la cuantización se refiere a la relación cinemática entre los dominios clásicos y cuánticos. A nivel cuántico, los estados de un sistema físico están representados por rayos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y los observables por una colección con estructura de álgebra $\mathcal{O}$ de operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$, mientras que en la descripción clásica, el espacio de estados es una variedad simplética (M, ω) y los observables son las funciones suaves sobre M. El problema de la cuantización es: ¿dado M y ω, es posible reconstruir $\mathcal{H}$, $\mathcal{O}$ y su dinámica?

Dado un sistema físico cuya dinámica se puede describir clásicamente sobre una variedad simpléctica (M, ω), donde el conjunto de observables clásicos $C^\infty(M, \mathbb{R})$ tiene estructura de álgebra de Lie con la suma usual, producto por escalar y el corchete de Poisson. La meta de la cuantización geométrica consiste en asignar a cada una de estas variedades (M, ω) un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ en el cual la correspondiente descripción cuántica tiene lugar y una aplicación $\widehat{\ }: f \longmapsto \widehat{f}$ de un subespacio $Obs \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$ (tan grande como sea posible) en los operadores lineales autoadjuntos $\widehat{f}$ sobre $\mathcal{H}$ (observables cuánticos). El conjunto de estos observables cuánticos deberá tener una estructura de álgebra de Lie con el corchete de Lie $\left[\widehat{f},\widehat{g}\right] := \widehat{f}\widehat{g} - \widehat{g}\widehat{f}$ y debe verificar las siguientes **condiciones de Dirac**:

(Q1) La aplicación $f \longmapsto \widehat{f}$ es lineal (sobre $\mathbb{R}$).
(Q2) Si $f = c$ es constante, entonces $\widehat{f}$ es el correspondiente operador multiplicación $c\mathbf{1}$.
(Q3) Si $\{f_1, f_2\} = f_3$, entonces $\left[\widehat{f_1}, \widehat{f_2}\right] = \widehat{f_1}\widehat{f_2} - \widehat{f_2}\widehat{f_1} = -\mathrm{i}\hbar\widehat{f_3}$.

A grandes rasgos, se busca una representación del álgebra generada por los observables. En estos términos, el corchete de Poisson es el análogo clásico del conmutador cuántico.

Las condiciones cuánticas no determinan el sistema cuántico fundamental de forma única. Tampoco es cada representación de los observables clásicos una cuantización físicamente razonable. Primero (Q2) debe mantenerse. Esto asegura que un par de observables complementarios, tal como una coordenada posición y el momento conjugado, que tienen un corchete de Poisson constante al nivel clásico, tendremos el conmutador al nivel cuántico requerido por el principio de incertidumbre. En segundo lugar, se necesita algún tipo de condición de irreducibilidad para restringir el tamaño de $\mathcal{H}$. Esta debe ser tal que hay una correspondencia entre las nociones de un sistema elemental en los niveles clásicos y cuánticos.

Miráremos que no es posible tener una correspondencia 1-1 entre $\mathcal{O}$ y $C^\infty(M)$ sin hacer $\mathcal{H}$ demasiado grande. En todo esquema de cuantización, se necesita alguna estructura adicional en M para elegir un subálgebra de observables clásicas para los cuales las condiciones cuánticas se mantienen. Esto puede ser pensado como la sombra del sistema cuántico en el sistema clásico. En cuantización geométrica, la estructura es una polarización de M, y la libertad en su elección es otro detalle en el que nos encontramos con una ambigüedad en el paso del dominio clásico al cuántico.

Un problema difícil es la relación dinámica entre la mecánica clásica y cuántica. Aquí estamos interesados en el haz de linea Hermitiano (L, ∇) y la 1-forma de conexión θ sobre M de tal forma que (localmente) la 2-forma simpléctica sea $\omega = -d\theta$, para la cual las condiciones cuánticas de Dirac se mantienen. Al nivel formal, la dinámica está dada por correspondencia con las formulas clásicas.

Para empezar, miremos la precuantización. Se trata de una construcción muy general y elegante, y es el elemento básico de todas las cuantizaciones que veremos más adelante. Es el primer paso de un procedimiento de la segunda fase, en el cual primero introducimos funciones de onda sobre el espacio fase, y entonces seleccionamos el subespacio de funciones de onda física mediante la introducción de una polarización.

3. Precuantización

Una variedad simpléctica (M, ω) orientable, $dim(M) = 2n$ y tiene un elemento de volumen que denotamos por ϵ. Por Teorema 1.1 (de Darboux) tenemos $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$ en coordenadas locales, entonces

$$\epsilon := \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n \omega \wedge \ldots \wedge \omega = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n dp_1 \wedge dp_2 \wedge \ldots \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge dq_2 \wedge \ldots \wedge dq_n,$$

donde $c = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n$ es una normalización físicamente conveniente.

Así hay un espacio de Hilbert asociado con M: el espacio $L^2(M)$ de funciones complejas de cuadrado integrable sobre M, con el producto interno

$$\left\langle \psi, \psi' \right\rangle = \int_M \overline{\psi}\psi' \epsilon\,.$$

Cada observable clásica f actúa sobre $L^2(M)$ como un operador simétrico por (ver la demostración del teorema 1.5)

$$\psi \longmapsto -\mathrm{i}\hbar X_f \psi, \quad \psi \in dom(X_f) \subset L^2(M)\,. \tag{1.21}$$

Aunque esta correspondencia satisface (Q1) y (Q3), no satisface (Q2) porque las constantes en $C^\infty(M)$ son mapeados al operador cero, pues para $f = c \Rightarrow df = 0 \Rightarrow X_f = 0$. Por ejemplo, posición y momento conmutan. Se podría tratar de corregir esto mediante la sustitución de la ecuación (1.21) por $\psi \longmapsto -\mathrm{i}\hbar X_f(\psi) + f\psi$. Entonces las constantes actuarían por multiplicación, pero (Q3) ya no se mantiene ya que

$$\left[\widehat{f_1}, \widehat{f_2}\right] = \left[-\mathrm{i}\hbar X_{f_1} + f_1, -\mathrm{i}\hbar X_{f_2} + f_2\right] = -\mathrm{i}\hbar\left(-\mathrm{i}\hbar X_{f_3} + f_3\right) - \mathrm{i}\hbar f_3$$

donde usamos las ecuaciones (1.3) y (1.4), y definimos $f_3 := \{f_1, f_2\}$.

El término adicional no deseado $-\mathrm{i}\hbar f_3$ se elimina mediante la adición de otro término y aplicando $f \in C^\infty(M)$ al operador

$$\widehat{f}(\psi) = -\mathrm{i}\hbar\left[X_f(\psi) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\theta(X_f)\psi\right] + f\psi = -\mathrm{i}\hbar X_f(\psi) - \theta(X_f)\psi + f\psi \tag{1.22}$$

donde θ es un potencial simpléctico, es decir, una 1-forma (local) tal que

$$\omega = -d\theta.$$

A ésta fórmula de precuantización se le llama “precuantización de Souriau-Kostant” [2]. Las constantes actuan por multiplicación, pero ahora el conmutador

(1.23)

$$\begin{aligned}
\left[\widehat{f_1},\widehat{f_2}\right] &= \left(-\mathrm{i}\hbar X_{f_1} - \theta(X_{f_1}) + f_1\right)\left(-\mathrm{i}\hbar X_{f_2} - \theta(X_{f_2}) + f_2\right) - \left(-\mathrm{i}\hbar X_{f_2} - \theta(X_{f_2}) + f_2\right)\left(-\mathrm{i}\hbar X_{f_1} - \theta(X_{f_1}) + f_1\right)\\
&= (-\mathrm{i}\hbar)^2\left(X_{f_1}\circ X_{f_2} - X_{f_2}\circ X_{f_1}\right) + \mathrm{i}\hbar\left(X_{f_1}(\theta(X_{f_2})) - X_{f_2}(\theta(X_{f_1}))\right) - \mathrm{i}\hbar\left(X_{f_1}(f_2) - X_{f_2}(f_1)\right)\\
&\quad + \mathrm{i}\hbar\left(\theta(X_{f_2})X_{f_1} - \theta(X_{f_1})X_{f_2}\right) - \mathrm{i}\hbar\left(f_2X_{f_1} - f_1X_{f_2}\right)\\
&\quad + \mathrm{i}\hbar\left(\theta(X_{f_1})X_{f_2} - \theta(X_{f_2})X_{f_1}\right) + \left(\theta(X_{f_1})\theta(X_{f_2}) - \theta(X_{f_2})\theta(X_{f_1})\right) - \left(\theta(X_{f_1})f_2 - \theta(X_{f_2})f_1\right)\\
&\quad - \mathrm{i}\hbar\left(f_1X_{f_2} - f_2X_{f_1}\right) - \left(f_1\theta(X_{f_2}) - f_2\theta(X_{f_1})\right) + (f_1f_2 - f_2f_1)\\
&= (-\mathrm{i}\hbar)^2\left(\left[X_{f_1},X_{f_2}\right]\right) + \mathrm{i}\hbar\left(X_{f_1}(\theta(X_{f_2})) - X_{f_2}(\theta(X_{f_1}))\right) - \mathrm{i}\hbar\left(\{f_1,f_2\} - \{f_2,f_1\}\right)
\end{aligned}$$

de las ecuaciones (1.1), (1.3) y (1.4), tomando $X = X_{f_1}$ y $Y = X_{f_2}$ y sabiendo que $\omega = d\theta$ tenemos

$$\begin{aligned}
& d\theta(X_{f_1},X_{f_2}) = X_{f_1}(\theta(X_{f_2})) - X_{f_2}(\theta(X_{f_1})) - \theta\left(\left[X_{f_1},X_{f_2}\right]\right)\\
\Rightarrow\quad & -\omega(X_{f_1},X_{f_2}) = X_{f_1}(\theta(X_{f_2})) - X_{f_2}(\theta(X_{f_1})) - \theta\left(X_{\{f_1,f_2\}}\right)\\
\Rightarrow\quad & \theta\left(X_{\{f_1,f_2\}}\right) + \{f_1,f_2\} = X_{f_1}(\theta(X_{f_2})) - X_{f_2}(\theta(X_{f_1}))
\end{aligned}$$

con lo anterior y ecuación (1.4), la ecuación (1.23) queda de la forma

$$\begin{aligned}
\left[\widehat{f_1},\widehat{f_2}\right] &= (-\mathrm{i}\hbar)^2\left(X_{\{f_1,f_2\}}\right) + \mathrm{i}\hbar\left(\theta\left(X_{\{f_1,f_2\}}\right) + \{f_1,f_2\}\right) - 2\mathrm{i}\hbar\{f_1,f_2\}\\
&= -\mathrm{i}\hbar\left(-\mathrm{i}\hbar X_{\{f_1,f_2\}} - \theta\left(X_{\{f_1,f_2\}}\right) + \{f_1,f_2\}\right)\\
&= -\mathrm{i}\hbar\widehat{\{f_1,f_2\}} = -\mathrm{i}\hbar\widehat{f_3}.
\end{aligned}$$

Así la ecuación (1.22) satisface también (Q3). La definición de $\widehat{f}$ depende de la elección de θ. Parece que la construcción sólo funciona si ω es exacta. Si consideramos ω como una 2-forma de curvatura de una conexión ∇ en un haz de linea complejo $L \longrightarrow M$, entonces podemos lograr $\omega\,|_U = d\theta\,|_U$ localmente, donde θ es una 1-forma de conexión (localmente), es decir

$$\nabla = d - \mathrm{i}\,\theta \quad \text{sobre } U \subset M.$$

3.1. La Condición de Integralidad. Ahora consideramos un haz de linea compleja $L \longrightarrow M$ y una conexión ∇ sobre L con 1-formas locales de conexión $\hbar^{-1}\theta$, tal que la curvatura es $\hbar^{-1}\omega$. Veremos que, para que L y ∇ existan, es necesario que ω satisfaga una condición de integralidad.

Suponga que γ es una curva cerrada que puede ser expandida por una superficie Σ, y que Σ está contenida en el dominio local de θ. El transporte paralelo de la base canónica s a lo largo de γ se calcula por resolver la ecuación diferencial

$$0 = \nabla_{\dot\gamma}(\varphi\, s) = (\dot\varphi - \mathrm{i}\hbar^{-1}\theta(\dot\gamma)\varphi)s.$$

Entonces el transporte paralelo de s a lo largo de γ está dado por multiplicar s por

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{\gamma}\theta\right)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{\Sigma}\omega\right).$$

Mediante la división de Σ en pequeños pedazos y de aplicar el teorema de Stokes, es fácil ver que el factor todavía está dada por la expresión sobre la mano derecha, incluso cuando Σ y γ no están contenidas en el dominio de un solo potencial.

Debemos conseguir el mismo resultado cuando expandamos γ por una segunda 2-superficie $\Sigma^{'}$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la relación entre las orientaciones de γ, Σ y $\Sigma^{'}$, la integral de $\hbar^{-1}\omega$ sobre $\Sigma\cap\Sigma^{'}$ debe ser un múltiplo entero de 2π, ya que

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{\Sigma\cup\Sigma'}\omega\right)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\int_{\Sigma}\omega+\int_{\Sigma'}\omega\right)\right)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\int_{\gamma}\theta-\int_{\gamma}\theta\right)\right)=1,$$

$$\Rightarrow\qquad\int_{\Sigma\cup\Sigma'}\omega\in 2\pi\hbar\mathbb{Z}.$$

Así que si $\hbar^{-1}\omega$ es la curvatura de una conexión, entonces ω debe satisfacer la siguiente forma de la condición de integralidad de Dirac:

(CI_1) La integral de ω sobre cualquier 2-superficie orientada cerrada en M es un múltiplo entero de $2\pi\hbar$.

Esto es necesario para la existencia de L y ∇. Además, se puede demostrar que

TEOREMA 1.4. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica, entonces existe un haz de linea compleja hermitiano $\pi : L\longrightarrow M$ sobre esta variedad y una conexión ∇ sobre L con curvatura $\hbar^{-1}\omega$ si y solo si la clase de $(2\pi\hbar)^{-1}\,\omega$ en $H^2(M,\mathbb{R})$ está en la imagen de $H^2(M,\mathbb{Z})$, donde $H^2(M,\mathbb{R})$ denota la cohomología de Čech. Cuando $\left[(2\pi\hbar)^{-1}\,\omega\right]\in H^2(M,\mathbb{R})$ está en $H^2(M,\mathbb{Z})$, la elecciones inequivalentes de L y ∇ son parametrizadas por $H^1(M,U(1))$, donde $U(1)\subset\mathbb{C}$ es el grupo circular.*

Para analizar su demostración puede ver por ejemplo [10].

NOTA 1.1. *Cuando M es simplemente conexa, $H^1(M,U(1))=0$, y L y ∇ son únicos salvo equivalencias.*

3.2. La Precuantización. Supongamos que la condición de integralidad es verificada sobre la variedad simpléctica correspondiente a la descripción clásica, entonces existe un haz de linea hermitiano $\pi : L\longrightarrow M$ con las propiedades del Teorema 1.4. Definimos el espacio de Hilbert de precuantización $\mathcal{H}(M,L)$ como la completación del espacio formado por las secciones cuadrado integrables $s : M \longrightarrow L$ con el producto interno en cada fibra $\pi^{-1}(m) \cong \mathbb{C}$ y la integración con respeto al elemento del volumen ϵ de manera que

$$\left\langle s, s' \right\rangle := \int_M \langle s(m)\, , s'(m) \rangle\, \epsilon_m = \int_M \overline{s(m)}\, s'(m)\, \epsilon_m$$

define el producto interno sobre $\mathcal{H}(M, L)$.

A cada observable f le asociamos un operador Hermitiano, el operador $\widehat{f}$ correspondiente a $f \in C^\infty(M)$ es

$$\widehat{f}s = fs - \mathrm{i}\hbar \nabla_{X_f} s\,,$$

donde X_f denota el campo vectorial hamiltoniano generado por f. El $\hbar$ es una constante de normalización por el cual $\nabla = d - \mathrm{i}\tilde{\theta}$ con $\tilde{\theta} := \hbar^{-1}\,\theta$, donde θ denota el potencial simplectica en coordenadas locales, es decir $\omega = -d\theta$. Por lo tanto, la curvatura está dada por $R = d\tilde{\theta} = -\hbar^{-1}\omega$. En términos de esta 1-forma, (1.22) se escribe

$$\widehat{f} = f - \mathrm{i}\hbar(d - \mathrm{i}\hbar^{-1}\theta)(X_f) = f - \mathrm{i}\hbar(d - \mathrm{i}\tilde{\theta})(X_f).$$

TEOREMA 1.5. *La aplicación $f \longmapsto \widehat{f}$ satisface las condiciones de cuantización (Q1), (Q2) y (Q3). Si f es una función real, entonces $\widehat{f}$ es simétrico sobre $\Gamma_c^\infty(L)$ que es el espacio de secciones C^∞ con soporte compaco de L.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\overline{s},\ s' \in \Gamma_c^\infty(L)$, por la regla de Leibniz, la conmutatividad de $\mathbb{C}$ y $\tilde{\theta}(X_f) \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{s}\left(\mathrm{i}\nabla_{X_f} s'\right) &= \mathrm{i}\overline{s}\, ds'(X_f) + \overline{s}\,\tilde{\theta}(X_f)s' \\
&= \mathrm{i}\left(d(\overline{s}s')(X_f) - d\overline{s}(X_f)s'\right) + \tilde{\theta}(X_f)\overline{s}s' \\
&= \mathrm{i}\, d(\overline{s}s')(X_f) + \left(\overline{\mathrm{i}\left(ds(X_f) - \mathrm{i}\,\tilde{\theta}(X_f)\, s\right)}\right)s' \\
&= \mathrm{i}\, d(\overline{s}s')(X_f) + \left(\overline{\mathrm{i}\,\nabla_{X_f} s}\right)s' \\
&= \mathrm{i}\left(X_f \cdot \overline{s}s'\right) + \overline{\mathrm{i}\,\nabla_{X_f} s}\, s'\,.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Sea ahora Φ_t el flujo asociado al campo hamiltoniano X_f. Como $X_f \cdot (\overline{s}s') = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, (\overline{s}s' \circ \Phi_t)$, tenemos por Teorema de Liouville

$$\int_M X_f \cdot (\overline{s}s')\,\epsilon = \frac{d}{dt}\,|_{t=0} \int_M \overline{s}s' \circ \Phi_t\,\epsilon = \frac{d}{dt}\,|_{t=0} \int_M \overline{s}s'\epsilon = 0. \tag{1.25}$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle s, \mathrm{i}\nabla_{X_f} s' \right\rangle &= \int_M \bar{s}\,(\mathrm{i}\nabla_{X_f} s')\,\epsilon \\
&= \int_M X_f \cdot (\bar{s}s')\,\epsilon + \int_M (\overline{\mathrm{i}\nabla_{X_f} s})s'\epsilon \quad \text{(por ecuación (1.24))} \\
&= \int_M (\overline{\mathrm{i}\nabla_{X_f} s})s'\epsilon \quad \text{(por ecuación (1.25))} \\
&= \left\langle \mathrm{i}\nabla_{X_f} s, s' \right\rangle.
\end{aligned}$$

❑

4. Polarizaciones

Como veremos en la ecuaciones (1.28)–(1.30), la representación de los operadores sobre el espacio de Hilbert no siempre corresponde con el resultado clásico de mecánica cuántica. Así como en los operadores, debemos elegir funciones de onda (secciones en el haz de linea de la precuantización) correspondientes para cada estado del sistema que no dependen simultáneamente de las coordenadas de unos y otros observables físicos, esto significa requerir que estén constantes a lo largo de ciertas fibras de la variedad simpléctica. Para corregir este defecto en el proceso de precuantización introducimos una nueva estructura llamada *Polarización* en la variedad simpléctica correspondiente. En el caso de un espacio fase (un haz cotangente), una polarización corresponde a las llamadas **representaciones** de observables sobre el espacio de funciones de onda en la descripción clásica de mecánica cuántica.

En muchos casos a veces no sirve trabajar con polarización real definida en las preliminares, por esto es mejor con una distribución compleja, buscando que corresponda con el resultado deseado. Como consideramos un haz de linea compleja sobre M, así que vamos a definir la correspondiente estructura sobre la complexificación del haz tangente a M (Definición 1.11).

DEFINICIÓN 1.12. *Para cualquier $m \in M$, un subespacio P de T_mM es llamado Lagrangiano si $dimP = n$ y $\omega(X, Y) = 0$ para todo $X, Y \in P$.*

DEFINICIÓN 1.13. *Sea (M, ω) variedad simpléctica 2n-dimensional, una **Polarización Compleja** P sobre M es una distribución compleja tal que, es una elección en cada punto $m \in M$ de un subespacio Lagrangiano $P_m \subset T_mM^{\mathbb{C}}$, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

a) Si dos campos vectoriales complejos $X, Y \in P_m$ en cada punto de m, entonces $[X, Y] \in P_m$.
b) $D_m = P_m \cap \overline{P}_m$ tiene dimensión constante k para todo $m \in M$.
c) P y $P + \overline{P}$ son integrables.

Aquí $\overline{P}$ denota el complejo conjugado de P. Si $-\mathrm{i}\,\omega(X,\overline{X}) \geq 0$ para todo $X \in V(M,P)$ (ver equación (1.19)), la polarización P es llamada positiva; y si $P \cap \overline{P} = \{0\}$, P es la polarización holomorfa ó de Kähler de M. En este caso $T_mM^{\mathbb{C}} = P_m \oplus \overline{P}_m$ para todo $m \in M$.

DEFINICIÓN 1.14. *Un nivel de una foliación D es una subvariedad integral conexa máxima de M, es decir, una subvariedad N de M tal que $T_mN = D_m$ $\forall m \in M$. El espacio M/D es definido como el espacio de todos los niveles de D, y si existe una estructura diferenciable sobre M/D tal que la proyección canónica $\pi : M \longrightarrow M/D$ es una submersión suave, entonces la foliación D es llamada reducible.*

DEFINICIÓN 1.15. *Si (M,ω) es una variedad simpléctica precuantizable y L es su haz de linea de la precuantización, dada una polarización compleja reducible P sobre M, decimos que una sección $s \in \Gamma(L)$ es constante sobre las fibras de M ó cuantizable si y solo si $\forall X \in V(M,P)$, $\nabla_X s = 0$, y al espacio definido por estas secciones denotaremos como $\Gamma_P(L)$.*

OBSERVACIÓN 1.3. *La función compleja C^∞*

$$\begin{array}{rccl} \langle s, s'\rangle : & M & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & m & \longmapsto & \langle s(m), s'(m)\rangle_m \end{array}$$

donde $s, s' \in \Gamma_P(L)$, para una polarización compleja reducible P dada, puede ser vista como una función sobre M/P, es decir, $\langle s, s'\rangle$ es constante sobre los niveles de P.

DEMOSTRACIÓN. Primero demostramos que

$$m \longmapsto \overline{s}(m)\, s'(m) \in \Gamma(M\times\mathbb{C}) \cong C(M,\mathbb{C}) \tag{1.26}$$

para toda $s,\ s' \in \Gamma_p(L)$, es decir, la función definida en (1.26) es invariante bajo cambio de coordenadas. Sean $s_i,\ s_i'$ secciones locales sobre U_i y $s_j,\ s_j'$ secciones locales sobre U_j. Para $m \in U_i \cap U_j$ tenemos

$$\begin{aligned} \overline{s_j(m)}\, s_j'(m) &= \overline{t_{ji}(m)\, s_i(m)}\, t_{ji}(m)\, s_i'(m) \\ &= \overline{t_{ji}(m)}\, t_{ji}(m) \overline{s_i(m)}\, s_i'(m) \\ &= \overline{s_i(m)}\, s_i'(m) \qquad\qquad \text{por} \quad \overline{t_{ji}(m)}\, t_{ji}(m) = |t_{ji}(m)|^2 = 1, \end{aligned}$$

entonces $\overline{s}s'$ es una sección del haz de linea compleja trivial, es decir, $\overline{s}s' \in \Gamma(M\times\mathbb{C}) \cong C(M,\mathbb{C})$. Además,

$$X\cdot(\overline{s}s') = \langle \nabla_X \overline{s}, s'\rangle + \langle \overline{s}, \nabla_X s'\rangle = 0,$$

así demostramos que $\overline{s}s'$ es constante en la dirección de $X \in V(M,P)$. ❑

Desafortunadamente tenemos que reducir el conjunto de observables físicamente admisibles para la cuantización, entonces ahora no vamos a asociar un operador hermitiano a cada elemento de $C^\infty(M,\mathbb{R})$, solamente a elementos de una subálgebra adecuada del mismo.

DEFINICIÓN 1.16. *Dada una distribución D sobre M, el espacio de funciones cuantizables sobre M es el subespacio de $C^\infty(M,\mathbb{R})$ definido por*

$$C^\infty(M_D,\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) : \left[X_f, X\right] \in V(M,D),\ \ \forall X \in V(M,D)\right\}.$$

La idea ahora es definir un espacio de Hilbert modificado de acuerdo con la distribución que estamos trabajando y una asociación adecuada de los observables clásicos cuantizables como operadores sobre el espacio de Hilbert. Supongamos que el espacio de todos los niveles de D es una variedad diferenciable con forma de volumen ϵ_D. Por lo tanto, dadas secciones $s, s^{'} \in \Gamma_D(L)$, la integral $\int_{M/D}\langle s, s^{'}\rangle\, \epsilon_D$ está bien definida, entonces podemos definir el producto interno:

$$(s, s^{'}) := \int_{M/D} \langle s, s^{'}\rangle\, \epsilon_D.$$

Ahora el espacio de Hilbert de representación $\mathcal{H}_D$ está definido como la completitud del conjunto $\{s \in \Gamma_D(L) : \int_{M/D}\langle s, s^{'}\rangle\, \epsilon_D < \infty\}$. Finalmente, podemos dar la siguiente representación de observables clásicos sobre un álgebra de operadores simétricos (hermitianos) $\tilde{O}_D$ en ese espacio de Hilbert modificado:

$$\begin{array}{rrcl} \widehat{\ }_D : & C^\infty(M_D,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \tilde{O}_D\,, \\ & f & \longmapsto & \widehat{f_D} : \mathcal{H}_D \to \mathcal{H}_D, \quad \widehat{f_D} := f - \mathrm{i}\hbar\nabla_{X_f}. \end{array} \tag{1.27}$$

TEOREMA 1.6. *Con éstas definiciones anteriores sigue que: la aplicación $f \longmapsto \widehat{f_D}$ es lineal, si f es constante entonces $\widehat{f_D}$ es el operador multiplicación por f y si $\{f,g\} = h$, entonces $\left[\widehat{f_D}, \widehat{g_D}\right] = -\mathrm{i}\hbar\widehat{h_D}$, donde $f,g,h \in C^\infty(M_D,\mathbb{R})$. Más aún si el observable f es tal que su campo vectorial hamiltoniano X_f es completo, entonces (la clausura del) operador $\widehat{f_D}$ es hermitiano.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [8]. ❑

Esto es lo que necesitamos para construir una teoría cuántica físicamente admisible, aunque muchas veces no es toda la historia.

5. Ejemplo: $M = T^*\mathbb{R}^n$

DEFINICIÓN 1.17 (L. Van Hove). *Una precuantización del haz cotangente $(T^*\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i)$ es una aplicación que a cada función $f \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ asocia un operador hermitiano $\widehat{f}$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que las condiciones de Dirac son satisfechas.*

De hecho, Van Hove también muestra que dado $(\mathcal{H}, \mathcal{O})$, donde $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $\mathcal{O}$ es el conjunto de operadores hermitianos sobre $\mathcal{H}$, la aplicación

$$\begin{array}{rrcl} \frown \ : & C^\infty(T^*\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{O}\,, \\ & f & \longmapsto & \widehat{f} = f - \mathrm{i}\hbar X_f - \theta(X_f), \end{array}$$

donde X_f es el campo vectorial hamiltoniano definido por f y $\theta := p_i dq_i$ es el potencial simpléctico, es una precuantización para $(T^*\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i)$. El problema de encontrar las condiciones para la existencia de una representación de este tipo y describir tal cuantización, en el caso de una variedad simpléctica arbitraria es uno de los temas de la cuántización geométrica, y comienza eligiendo el espacio de Hilbert para ser utilizado y la representación de los observables.

Vamos a explicar mas detalladamente paso a paso este resultado para esta variedad simplética $M = T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ con $\omega = -\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ (por simplicidad escribiremos $dp_i \wedge dq_i$ en vez de $\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$). Primero calculamos los operadores correspondientes a posición q_i y el momento p_i en el espacio fase, modelado como un fibrado cotangente con 2-forma simpléctica canónica ω. De la ecuación (1.5) tenemos

$$X_{p_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial p_i}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial q_i}, \qquad X_{q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial q_i}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j} = -\frac{\partial}{\partial p_i}\,.$$

Sea θ cualquier potencial simpléctico para ω, esto es, cualquier 1-forma con $d\theta = -\omega$, así que podemos tomar $\theta = p_i dq_i$. En este caso el correspondiente haz de linea asociado es trivial, es decir $L = (M \times \mathbb{C}, \pi_1, M)$, en particular $\Gamma(L) \simeq C^\infty(M, \mathbb{C})$ y la representación a los observables es como la ecuación (1.22):

$$\widehat{f} = f - \mathrm{i}\hbar X_f - (p_i dq_i)(X_f)\,.$$

Entonces por definición,

$$\begin{aligned} \widehat{p_i} &= p_i - \mathrm{i}\hbar X_{p_i} - (p_j dq_j)(X_{p_i}) \\ &= p_i - \mathrm{i}\hbar\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right) - (p_j dq_j)\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right) \\ &= p_i - \mathrm{i}\hbar\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right) - p_i = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}\,, \end{aligned} \tag{1.28}$$

y en el mismo caso para la posición,

$$\begin{aligned} \widehat{q_i} &= q_i - \mathrm{i}\hbar X_{q_i} - (p_j dq_j)(X_{q_i}) \\ &= q_i - \mathrm{i}\hbar\left(-\frac{\partial}{\partial p_i}\right) - (p_j dq_j)\left(-\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = q_i + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p_i}\,. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Este resultado no está en acuerdo con la mecánica cuántica (versión de Schrödinger):

$$\widehat{p_i} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}, \qquad \widehat{q_i} = q_i, \tag{1.30}$$

lo que ilustra la necesidad de una corrección que será llevado a cabo en la introducción de una polarización sobre haces de precuantización.

De la ecuación (1.20) del ejemplo 1.2 tomaremos para nuestro caso la distribución vertical D_v, esta polarización es reducible, $\mathbb{R}^{2n}/D_v = \mathbb{R}^n$, y

$$V(M, D_v) = \left\{ a_1\frac{\partial}{\partial p_1} + \cdots + a_n\frac{\partial}{\partial p_n} \;:\; a_1, \ldots, a_n \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \right\}.$$

En lo siguiente demostramos que si $s \in \Gamma_{D_v}(L)$, es decir, $\nabla_X s = 0$ para todo $X \in V(M, D_v)$, entonces $s = s(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ es constante a lo largo de $p_1, \ldots, p_n$, lo que es equivalente a $\frac{\partial s}{\partial p_j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Ahora,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}} s = (d - \mathrm{i}\hbar^{-1}\theta)\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) s = \frac{\partial s}{\partial p_i} - \mathrm{i}\hbar^{-1}\sum_{k=1}^{n} p_k dq_k \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) s = \frac{\partial s}{\partial p_i},$$

entonces

$$s \in \Gamma_{D_v}(L) \iff \nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}} s = \frac{\partial s}{\partial p_i} = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n \iff s = s(q_1, \ldots, q_n). \tag{1.31}$$

Así podemos identificar $\mathcal{H}_{D_v} \simeq L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, donde la forma de volumen ϵ_{D_v} es la forma de volumen canónica de $\mathbb{R}^n$ y las funciones $\psi \in \mathcal{H}_{D_v}$ no dependen de $p_1, \ldots, p_n$.

A continuación determinamos el espacio de funciones cuantizables de la definición 1.16. Si tomamos un observable clásico $f \in C^\infty(M_{D_v}, \mathbb{R})$, entonces como $X_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$, tenemos para todo $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}\left[X_f, \frac{\partial}{\partial p_j}\right] &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\,,\end{aligned}$$

entonces

$$\left[X_f, \frac{\partial}{\partial p_j}\right] \in V(M, D_v) \iff \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} = 0, \ \ \forall j, i = 1, \ldots, n\,,$$

y por el Teorema de Taylor,

$$f = f_0\,(q_1, \ldots, q_n) + p_1 f_1\,(q_1, \ldots, q_n) + \cdots + p_n f_n\,(q_1, \ldots, q_n)\ , \tag{1.32}$$

donde este tipo de funciones forman una subálgebra de $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Con este resultado es fácil calcular la forma del operador hermitiano asociado,

$$\widehat{f_D} s = f s - \mathrm{i}\hbar \nabla_{X_f} s \,, \tag{1.33}$$

porque si $f \in C^\infty(M_{D_v}, \mathbb{R})$, las ecuaciónes (1.5) y (1.32) implican $X_f = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}$, entonces

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_f} s &= \left(d - \mathrm{i}\hbar^{-1}\theta\right)\left(X_f\right) s \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial s}{\partial q_i} dq_i\right)\left(\sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) - \mathrm{i}\hbar^{-1}\sum_{i=1}^n p_i dq_i \left(\sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) s \\
&= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial q_i} f_i - \mathrm{i}\hbar^{-1}\sum_{i=1}^n p_i f_i \, s \,.
\end{aligned}$$

Por las relaciones (1.31) tenemos $\frac{\partial s}{\partial p_i} = 0$ para todo $s \in \Gamma_{D_v}(L)$ y $i = 1, \ldots, n$, y así

$$\nabla_{X_f} s = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial s}{\partial q_i} - \mathrm{i}\hbar^{-1}\sum_{i=1}^n p_i f_i \, s \,.$$

y reemplazando en ecuación (1.33) obtenemos

$$\widehat{f_D} = f - \mathrm{i}\hbar \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n p_i f_i \,.$$

En particular, para $f := q_j$ se tiene $f_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, y para $f := p_j$ se tiene $f_j = 1$ y $f_i = 0$ para $i \neq j$ por la ecuación (1.32). De esta forma se recuperan las reglas de cuantización usuales de la mecánica cuántica:

$$\widehat{p_j}_D = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \,, \qquad \widehat{q_j}_D = q_j \,.$$

Finalmente verificamos las condiciones de Dirac (Q1)–(Q3). Nótese que $(\alpha f + g)_i = \alpha f_i + g_i$ en ecuación (1.32) para todo $f, g \in C^\infty(M_{D_v}, \mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(\widehat{\alpha f + g})_D &= (\alpha f + g) - \mathrm{i}\hbar \sum_{i=1}^n (\alpha f + g)_i \frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n p_i (\alpha f + g)_i \\
&= \alpha f - \mathrm{i}\hbar\alpha \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial q_i} - \alpha \sum_{i=1}^n p_i f_i + g - \mathrm{i}\hbar \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n p_i g_i \\
&= \alpha \widehat{f_D} + \widehat{g_D}
\end{aligned}$$

Además, cuando $f = c$ es constante, tenemos $f_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, y así $\widehat{f_D}(s) = f s = cs$. Con lo anterior se cumplen las condiciones (Q1) y (Q2).

Para funciones f y g de (1.32), el corchete de Poisson (1.6) se escribe

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i\frac{\partial g}{\partial q_i} - g_i\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i\frac{\partial g_0}{\partial q_i} - g_i\frac{\partial f_0}{\partial q_i}\right) + \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{n}\left(f_i\frac{\partial g_j}{\partial q_i} - g_i\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right),$$

en particular

$$\{f,g\}_j = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i\frac{\partial g_j}{\partial q_i} - g_i\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right).$$

Ahora, para toda sección $s \in \Gamma_{D_v}(L)$,

$$\begin{aligned}
[\widehat{f_D}, \widehat{g_D}]s =& \left(f - \mathrm{i}\hbar\sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i f_i\right)\left(g - \mathrm{i}\hbar\sum_{j=1}^{n} g_j\frac{\partial}{\partial q_j} - \sum_{j=1}^{n} p_j g_j\right)s \\
&- \left(g - \mathrm{i}\hbar\sum_{i=1}^{n} g_i\frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i g_i\right)\left(f - \mathrm{i}\hbar\sum_{j=1}^{n} f_j\frac{\partial}{\partial q_j} - \sum_{j=1}^{n} p_j f_j\right)s \\
=& - \mathrm{i}\hbar\sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial g}{\partial q_i}s - \hbar^2\sum_{i=1}^{n} f_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial q_i}\frac{\partial s}{\partial q_j} + \mathrm{i}\hbar\sum_{i=1}^{n} f_i\sum_{j=1}^{n} p_j\frac{\partial g_j}{\partial q_i}s \\
&+ \mathrm{i}\hbar\sum_{i=1}^{n} g_i\frac{\partial f}{\partial q_i}s + \hbar^2\sum_{i=1}^{n} g_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\frac{\partial s}{\partial q_j} - \mathrm{i}\hbar\sum_{i=1}^{n} g_i\sum_{j=1}^{n} p_j\frac{\partial f_j}{\partial q_i}s \\
=& -\mathrm{i}\hbar\,\{f,g\}s - (-\mathrm{i}\hbar)^2\sum_{j=1}^{n}\{f,g\}_j\frac{\partial s}{\partial q_j} + \mathrm{i}\hbar\sum_{j=1}^{n} p_j\,\{f,g\}_j\,s \\
=& -\mathrm{i}\hbar\,\widehat{\{f,g\}}_D\,s\,.
\end{aligned}$$

Con esto se cumple la condición (Q3). En especial, con las ecuaciones anteriores y de las ecuaciones (1.7), (1.8) y (1.9),

$$\left[\widehat{p}_{iD}, \widehat{q}_{jD}\right] = -\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}, \quad \left[\widehat{p}_{iD}, \widehat{p}_{jD}\right] = \left[\widehat{q}_{iD}, \widehat{q}_{jD}\right] = 0.$$

Estas ecuaciones son conocidas como las relaciones de conmutación canónicas.

Capítulo 2

Cuantización Geométrica del Monopolo Magnético

En este capítulo nos dedicaremos a la descripción de un monopolo magnético que está relacionado con la condición de Dirac de la cuantización de carga: la integralidad de la carga eléctrica puede ser deducida de la existencia de una carga magnética elemental. Veremos que la descripción clásica del monopolo magnético está dada por una 2-forma cerrada no degenerada sobre la 2-esfera que convierte $\mathbb{S}^2$ en una variedad simpléctica con una conexión tal que su curvatura es la 2-forma del monopolo magnético. Este sistema se puede cuantizar con la teoría del Capitulo 1.

1. Condición de Cuantización

Consideramos el campo magnético como una 2-forma sobre el espacio de configuración $\dot{\mathbb{R}}^3 := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, entonces

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \tag{2.1}$$

Ahora para una superficie cerrada S en el dominio de B, la integral $\int_S B$ representa el flujo del campo vectorial $\vec{B} = \left(B_x, B_y, B_z\right)$ por la superficie.

Decimos **monopolo magnético** a una 2-forma (2.1) en $\dot{\mathbb{R}}^3$ tal que

$$\int_{\partial X} B = 0 \quad \text{si } \ 0 \notin \overline{X} \qquad \text{y} \qquad \int_{\partial X} B = 4\pi g \quad \text{si } \ 0 \in X,$$

donde $X \subset \mathbb{R}^3$ abierto tal que ∂X es superficie regular compacta, no necesariamente conexa, sin frontera, y $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La interpretación es que en $0 \in \mathbb{R}^3$ hay una única fuente de un campo magnético que produce un flujo de magnitud $4\pi g$ a través de toda superficie que contiene al 0.

La solución que proponemos es

$$B := \frac{g}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy\right), \tag{2.2}$$

que corresponde al campo vectorial

$$\vec{B} = \frac{g}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Observamos que

$$
\begin{aligned}
dB &= g\left[\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}+\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]dx\wedge dy\wedge dz\\
&= g\left[\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]dx\wedge dy\wedge dz\\
&= 0. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

En consecuencia, si $X\subset\mathbb{R}^3$ abierto y $0\notin\overline{X}$, entonces por el Teorema de Stokes tenemos que

$$\int_{\partial X}B=\int_X dB=0.$$

Para calcular el flujo a través de una 2-esfera con radio $r\in(0,\infty)$ y centro $0\in\mathbb{R}^3$ usaremos **Coordenadas Polares:**

$$(x,y,z):=(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\,,\qquad \theta\in(0,\pi),\quad \phi\in(\phi_0,\phi_0+2\pi),$$

con $\phi_0\in\mathbb{R}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
B(r,\theta,\phi) &= \frac{g}{r^3}\left[r\sin\theta\cos\phi\, d(r\sin\theta\sin\phi)\wedge d(r\cos\theta)+r\sin\theta\sin\phi\, d(r\cos\theta)\wedge d(r\sin\theta\cos\phi)\right.\\
&\quad\left.+r\cos\theta\, d(r\sin\theta\cos\phi)\wedge d(r\sin\theta\sin\phi)\right]\\
&= \frac{g}{r^3}\left[-r^2\sin^3\theta\sin\phi\cos\phi\, dr\wedge d\theta-r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi\, dr\wedge d\theta\right.\\
&\quad -r^2\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\phi\, dr\wedge d\phi+r^3\sin^3\theta\cos^2\phi\, d\theta\wedge d\phi\\
&\quad +r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi\, dr\wedge d\theta-r^2\sin^2\theta\cos\theta\sin^2\phi\, dr\wedge d\phi\\
&\quad +r^2\sin^3\theta\sin\phi\cos\phi\, dr\wedge d\theta+r^3\sin^3\theta\sin^2\phi\, d\theta\wedge d\phi\\
&\quad +r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi\, dr\wedge d\theta+r^2\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\phi\, dr\wedge d\phi\\
&\quad -r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi\, dr\wedge d\theta+r^3\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi\, d\theta\wedge d\phi\\
&\quad \left.+r^2\sin^2\theta\cos\theta\sin^2\phi\, dr\wedge d\phi+r^3\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi\, d\theta\wedge d\phi\right]\\
&= g\left[\sin^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta\right]\, d\theta\wedge d\phi\\
&= g\sin\theta\, d\theta\wedge d\phi\,,
\end{aligned}
$$

donde $\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$ es la forma de volumen de $\mathbb{S}^2$. Además podemos observar que $B(r,\theta,\phi) = B(\theta,\phi)$, es decir, B no depende de r. Con lo cual concluimos que basta considerar $\mathbb{S}^2$ con la 2-forma

$$B = B(\theta,\phi) = g \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi. \tag{2.4}$$

Luego

$$\int_{\partial B_r(0)} B \;=\; g \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\phi \;=\; g\,\mathrm{vol}(\mathbb{S}^2) \;=\; 4\pi g, \qquad \forall r > 0. \tag{2.5}$$

Ahora si $X \subset \mathbb{R}^3$ tal que $0 \in X$ entonces elegimos un $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta $B_\varepsilon(0)$ está contenido en X. Tomando en cuenta la orientación de las superficies obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial X} B &= \int_{\partial X} B - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} B + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} B, \\
&= \int_{\partial(X - B_\varepsilon(0))} B + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} B \\
&= \int_{X - B_\varepsilon(0)} dB + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} B && \text{(por Teorema de Stokes)} \\
&= \int_{\partial B_\varepsilon(0)} B && \text{(por ecuación (2.3))} \\
&= 4\pi g && \text{(por ecuación (2.5)).} \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Observación: Como $\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$ es la forma de volumen sobre $\mathbb{S}^2$, entonces B define una forma simpléctica sobre $\mathbb{S}^2$. Así entonces un sistema hamiltoniano que se puede cuantizar.

Objetivo: Buscar una 1-forma de conexión A sobre un haz de linea compleja tal que $B = dA$ localmente. Tomamos por simplicidad $\boldsymbol{\hbar := 1}$.

Por la condición de integralidad (CI_1), necesitamos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} B \;\in\; 2\pi\,\mathbb{Z}$$

y por la ecuación (2.6) tenemos

$$g \;\in\; \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\,.$$

Observación: 1) $\forall g \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $B = g\sin(\theta)\, d\theta \wedge d\phi$ define una forma simpléctica que cumple con (CI_1).

Observación: 2) Si $g \neq 0$, A no puede ser globalmente definido, porque en este caso por Teorema de Stokes tenemos

$$0 \;\neq\; 4\pi g \;=\; \int_{\mathbb{S}^2} B \;=\; \int_{\mathbb{S}^2} dA \;=\; \int_{\partial\mathbb{S}^2} A \;=\; 0\,,$$

esto da una contradicción.

Coordenadas Locales: Sea $\varepsilon \in (0,1)$, tomamos la cubierta abierta de $\mathbb{S}^2$ dada por

$$U_N := \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z \in (-\varepsilon, 1]\},$$

$$U_S := \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z \in [-1, \varepsilon)\},$$

como U_N y U_S son simplemente conexos y $dB = 0$ sobre U_N y U_S, por Teorema de Poincaré, existe A_N y A_S tal que $B|_{U_N} = dA_N$, $B|_{U_S} = dA_S$.

Usaremos las coordenadas polares para $U_N \setminus \{(0,0,1)\}$ y $U_S \setminus \{(0,0,-1)\}$ tal que

$$(x,y,z) = \varphi_N^{-1}(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

donde $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi \in (\phi_0, \phi_0 + 2\pi)$ y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2} + \delta)$ con $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Análogamente

$$(x,y,z) = \varphi_S^{-1}(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

donde $\phi \in (\phi_0, \phi_0 + 2\pi)$ y $\theta \in (\frac{\pi}{2} - \delta, \pi)$. En ambas coordenadas locales el campo B se da como en la ecuación (2.4) de la forma

$$B(\theta,\phi) = g\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi\,.$$

Para encontrar A, proponemos la siguiente solución estimada: $A(\theta,\phi) = f(\theta)\, d\phi$. Entonces $g\sin(\theta)\, d\theta \wedge d\phi = B = dA = f'(\theta)\, d\theta \wedge d\phi$, es decir, $f'(\theta) = g\sin(\theta)$. Como $\int \sin\theta\, d\theta = -\cos\theta + C$, $C \in \mathbb{R}$ constante, tenemos

$$A_N(\theta,\phi) = g(C_N - \cos\theta)\, d\phi,$$

$$A_S(\theta,\phi) = g(C_S - \cos\theta)\, d\phi.$$

Necesitamos que A_N esté bien definida y diferenciable en U_N. Nótense que $(0,0,1) \in U_N$ y $(0,0,1) = \text{lím}_{\theta\to 0}\varphi_N^{-1}(\theta,\phi)$ es independiente de ϕ. Entonces

$$\begin{aligned} A_N(0,\phi) &= \lim_{\theta\to 0} g(C_N - \cos\theta)\, d\phi \\ &= g(C_N - 1)\, d\phi \end{aligned}$$

tiene que ser diferenciable e independiente de ϕ para $\theta = 0$. Definimos $C_N = 1$ tal que $A_N(0,\phi) = 0$ esta bien definida, independiente de ϕ y diferenciable. Análogamente

$$\begin{aligned} A_S(\pi,\phi) &= \lim_{\theta\to \pi} g(C_S - \cos\theta)\, d\phi \\ &= g(C_S + 1)\, d\phi \end{aligned}$$

por lo tanto $C_S = -1$. Con esto nos da como resultado:

$$A_N(\theta,\phi) = g(1 - \cos\theta)\, d\phi\,, \tag{2.7}$$

$$A_S(\theta,\phi) = -g(1 + \cos\theta)\, d\phi\,. \tag{2.8}$$

Al comparar los resultados para las conexiones con aquellas del fibrado en [9],

$$\mathcal{A}_N = \frac{n}{2}(1-\cos\theta)\,d\phi, \qquad \mathcal{A}_S = -\frac{n}{2}(1+\cos\theta)\,d\phi,$$

evidentemente representa al monopolo de Dirac-Wu-Yang [11].

Ahora la pregunta es ¿Existen haces de linea compleja tal que A_N y A_S definen una 1-forma de conexión? Ello es el tema de la siguiente sección.

2. Funciones de Transición de Haces Lineales Complejos

Consideremos como grupo de estructura $U(1) = \{e^{i\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Observemos que el haz de linea compleja que buscamos esta únicamente definida por la función de transición $\varphi_{SN} : U_N \cap U_S \to U(1)$. Además

$$\begin{aligned} U_N \cap U_S &= \left\{(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \;:\; \phi \in \mathbb{R},\;\; \theta \in \left(\tfrac{\pi}{2}-\delta\,, \tfrac{\pi}{2}+\delta\right)\right\} \\ &\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \{(\cos\phi, \sin\phi, 0) : \phi \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{S}^1 \;\subset\; \mathbb{S}^2. \end{aligned}$$

Por continuidad las funciones de transición están caracterizadas por una función

$$\begin{aligned} \varphi_{SN} \;:\; \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2 &\longrightarrow U(1)\,, \\ (\cos\phi, \sin\phi, 0) &\longmapsto \varphi_{SN}(\cos\phi, \sin\phi, 0) = e^{\mathrm{i}\alpha_{SN}(\phi)}, \end{aligned}$$

donde $\alpha_{SN}(\phi) \in \mathbb{R}$ y $\alpha_{SN}(\phi) = \alpha_{SN}(\phi + 2\pi)$, ver [7].

Las 1-formas de conexión se transforma por (ver ecuación (1.14) de las preliminares)

$$\mathrm{i}\,A_N = \varphi_{NS}\,d\varphi_{SN} + \mathrm{i}\,A_S\,. \tag{2.9}$$

Además,

$$\begin{aligned} \varphi_{NS}\,d\varphi_{SN} &= e^{-\mathrm{i}\alpha_{NS}(\phi)}\,de^{\mathrm{i}\alpha_{SN}(\phi)} \\ &= e^{-\mathrm{i}\alpha_{NS}(\phi)}\,e^{\mathrm{i}\alpha_{SN}(\phi)}\,\mathrm{i}\,\alpha'_{SN}(\phi)\,d\phi \\ &= \mathrm{i}\,\alpha'_{SN}(\phi)\,d\phi\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

entonces al reemplazar (2.7), (2.8) y (2.10) en la ecuación (2.9) obtenemos:

$$\mathrm{i}\,g(1-\cos\theta)\,d\phi = \mathrm{i}\,A_N = \varphi_{NS}\,d\varphi_{SN} + \mathrm{i}\,A_S = \mathrm{i}\left(\alpha'_{SN}(\phi) - g(1+\cos\theta)\right)d\phi,$$

así tenemos que

$$\mathrm{i}\,(\alpha'_{SN}(\phi) - 2g)\,d\phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha'_{SN}(\phi) = 2g\,,$$

con esto nos da que

$$\alpha_{SN}(\phi) = 2g\phi + \phi_0 \,. \tag{2.11}$$

Sin perdida de generalidad (por un cambio de base $s_N \longmapsto e^{-\mathrm{i}\phi_0}\, s_N$ en ecuación (1.10)) podemos tomar $\phi_0 = 0$. Además, como $g \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, entonces

$$\varphi_{SN}(\cos\phi, \sin\phi, 0) = e^{\mathrm{i}m\phi}, \quad m := 2g \in \mathbb{Z}, \tag{2.12}$$

donde m denota el número de giros de $\varphi_{SN} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ según la clasificación que da Milnor (ver [5]), quien clasifica todos los haces fibrados no equivalentes con espacio base $\mathbb{S}^n$ y grupo estructural G en términos de $\prod_{n-1}(G)$. De hecho, Milnor muestra una correspondencia uno a uno entre los haces equivalentes sobre tal variedad con grupo G y $\prod_{n-1}(G)$. En este caso del monopolo magnético esos haces principales tienen como grupo estructural $\mathbb{U}(1) \simeq \mathbb{S}^1$, $\prod_1\left(\mathbb{S}^1\right) \simeq \mathbb{Z}$, y $[\varphi_{SN}] \in \prod_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ está determinado por el número de giros $m \in \mathbb{Z}$.

Con esto hemos cumplido con el teorema 1.4, entonces hemos obtenido un sistema que se puede aplicar la cuantización geométrica:

TEOREMA 2.1. *La variedad diferenciable $\mathbb{S}^2$ con la forma simpléctica $B = g\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$, donde $g \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, y la 1-forma de conexíon A definido en ecuaciones* (2.7) *y* (2.8) *sobre el haz de linea compleja L definido por las funciones de transición* (2.12) *cumplen con la estructura y las condiciones necesarias para la cuantización geométrica del monopolo magnético.*

Bibliografía

[1] Abraham R.; Marsden, J.: *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, Redwood City, 1980.

[2] Kirillov A. A.; *Geometric quantization*, Dynamical systems – 4, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 4, VINITI, Moscow, 1985.

[3] Cardona, Alexander: *Geometric Quantization: The Magnetic Monopole Case and Quantum Hall Effect*. Master thesis, Universidad de Los Andes, 1998. http://pentagono.uniandes.edu.co/ acardona/GQMMQHE.pdf

[4] Hall, Brian C. *Quantum theory for mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics, 267. Springer, New York, 2013.

[5] Husemoller, D. *Fibre Bundles*. Springer, 1966.

[6] Jost, Jürgen: *Riemannian geometry and geometric analysis*. Fourth edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[7] Milnor, John: *Introduction to algebraic K-theory*. Annals of Mathematics Studies, No. 72. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971.

[8] Puta, M.: *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[9] Shnir, Yakov M.: *Magnetic monopoles*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[10] Woodhouse, N. *Geometric Quantization*. Oxford, 1992.

[11] Wu, Tai Tsun; Yang, Chen Ning: *Dirac monopole without strings: monopole harmonics*. Nuclear Phys. B 107 (1976), no. 3, 365–380, and Phys. Rev. D14, 437, 1976.