



# Introducción a los Diagramas Conformes de Carter-Penrose.

**TESIS**

Que Presenta

**José Félix Salazar Rodríguez<sup>1</sup>**

Para obtener el Grado de

**Maestro en Ciencias en el Área de Física**

**Asesor: Dr. Thomas Zannias<sup>2</sup>**

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas (IFM)

Morelia, Michoacán

Agosto, 2017

---

<sup>1</sup>

<sup>2</sup>

La preocupación por el hombre y su destino siempre debe ser el interés primordial de todo esfuerzo técnico. Nunca olvides esto entre tus diagramas y ecuaciones.

Albert Einstein

# Agradecimientos

Agradezco a los miembros del grupo de Relatividad del Instituto de Física y Matemáticas (IFM) por todas las discusiones y sugerencias, en especial a Thomas Zannias. Así mismo agradezco a todos los compañeros y al personal del Instituto ya que contribuyeron en mi formación tanto académica como personal.

También agradezco a CONACyT por esta oportunidad tan importante en mi vida.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>iii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Construyendo los Diagramas Conformes de Carter-Penrose</b>	<b>5</b>
2.1. Espacios-Tiempos que se mapean a Diamantes Completos . . . . .	5
2.2. Espacios-Tiempos que se mapean a Mitad de Diamante . . . . .	17
2.3. Apéndice: Coordenada generalizada de Regge-Wheeler y Mapeos Conformes	24
<b>3. Extensión de Espacios-Tiempos</b>	<b>26</b>
3.1. Extensión de Espacios-Tiempos vía coordenadas de Eddington-Finkelstein .	26
3.2. Extensión Maximal de la solución de Schwarzschild . . . . .	35
3.3. Diagrama Conforme por Reissner-Nordström no Extremo . . . . .	37
3.4. Extensión vía coordenadas de Kruskal . . . . .	40
3.5. Diagrama Conforme por el Espacio-Tiempo de Sitter . . . . .	49
<b>4. La Métrica de Kerr-de Sitter</b>	<b>55</b>
4.1. La Métrica de Kerr-de Sitter . . . . .	55
4.2. Separabilidad de la Ecuación de Hamilton-Jacobi . . . . .	59
4.3. Sobre el eje de rotación . . . . .	62
<b>5. Conclusiones</b>	<b>64</b>

# Resumen

Esta tesis está dedicada a una introducción de los diagramas conformes de Carter-Penrose asociados con espacios-tiempos de 2 dimensiones  $(\mathbf{M}, g)$  que corresponden a subvariedades particulares de espacios-tiempos cuatri-dimensionales como los hoyos negros de Schwarzschild y Reissner-Nordström (RN) no extremo pero también a los espacios-tiempos cosmológicos como de-Sitter y Kerr-de Sitter (KdS).

Desarrollamos la teoría que relaciona conformalmente la métrica física  $g$  con la métrica de Minkowski  $\eta$  en regiones acotadas con la forma de un diamante ó mitad de diamante. Con la ayuda de estos diagramas construimos la extensión maximal sobre el eje de rotación por la métrica KdS y los diagramas conformes estándares por el hoyo negro de Schwarzschild, el hoyo negro no extremo de Reissner-Nordström y por el espacio-tiempo de-Sitter.

## Abstract

This thesis is dedicated to an introduction of conformal diagrams of Carter-Penrose associated with space times of 2 dimensions  $(\mathbf{M}, g)$  that correspond to particular submanifolds of four dimensional space times like the Schwarzschild and no extrem Reissner-Nordström black holes but also to cosmological space times like de-Sitter and Kerr-de Sitter (KdS).

We develop the theory that relates conformally the physical metric  $g$  with Minkowski metric  $\eta$  in bounded regions with the shape of a diamond or half diamond. With the help of this diagrams we built a maximal extension on the rotation axes for KdS metric and the standars conformally diagrams for the Schwarzschild black holes, Reissner-Nordström no extrem black hole and for the space times of Kerr-de Sitter and de-Sitter.

**Palabras Clave:** Diagramas Conformes, Mapeo, Diamante, Extensión, Geodésicas Nulas.

# 1 Introducción

Uno de los motivos que inspira este trabajo nace de la curiosidad por entender los diagramas conformes. Al estudiar Relatividad General uno descubre en los libros de texto estándares como en las ref. [1–3], estas figuras bonitas pero que carecen de una explicación y detalles finos. Sin embargo son relevantes en el sentido que muchos resultados se infieren de solo mirar estas figuras. Es aquí que surge la idea de adentrarme en la teoría de estos objetos e investigar que está pasando y porque son importantes i.e. ¿gano algo al entender estos diagramas? y ¿que conexión tienen estos diagramas con nuestro Universo?.

Esta curiosidad sobre los diagramas da nacimiento a esta tesis. La estructura de la tesis sigue la siguiente línea. En el capítulo 2 construimos la teoría de los diagramas conformes de Carter-Penrose por familias de espacios-tiempos de 2 dimensiones particulares<sup>1</sup>. Nuestra elección de estos espacio-tiempos proviene de sub variedades particulares de espacios-tiempos cuadri-dimensionales los cuales son físicamente importantes como el espacio-tiempo que representa el hoyo negro de Schwarzschild, el hoyo negro de Reissner-Nordström, Kerr-de Sitter y de Sitter. Como veremos en el capítulo próximo la métrica de estos espacio-tiempos bi-dimensionales depende de la estructura de una función  $f$  real valuada y aclaramos la estructura de esta función con las propiedades topológicas de los diagramas conformes. Como veremos en esta tesis la propiedad crucial que da a los diagramas conformes gran relevancia es que la métrica bi-dimensional esta conformante relacionada con la métrica plana de Minkowski. Como consecuencia de esta propiedad el cono de luz y la estructura causal de los espacios bi-dimensionales son obvios. La utilidad de estos diagramas conformes de Carter-Penrose es doble. Por un lado proporcionan información sobre la estructura causal del espacio-tiempo físico y por otro lado son de gran ayuda para extender los espacios-tiempos que son geodésicamente incompletos. La extensión de espacios-tiempos incompletos a través de los diagramas conformes lo discutimos en el capítulo 3. En este capítulo pegamos los diagramas conformes via coordenadas de Eddington-Finkelstein (EF) y coordenadas de Kruskal. Como consecuencia de este pegado hemos construido los diagramas conformes que representan la extensión maximal del hoyo negro de Schwarzschild, Reissner-Nordstrom no extremo, también sobre el eje de rotación del espacio-tiempo de Kerr-de Sitter y de-Sitter.

---

<sup>1</sup>Originalmente tales diagramas aparecen en los trabajos de Carter [4,5] siguiendo una idea de Penrose [6].

El capítulo 4 está dedicado a discutir algunas propiedades del espacio-tiempo de Kerr-de Sitter (KdS). Aquí el objetivo, es estudiar con más detalle el eje de rotación de este espacio-tiempo. Al respecto del sistema de coordenadas de Boyer-Lindquist la métrica es singular sobre el eje y removemos tal singularidad introduciendo un sistema de coordenadas locales en donde la métrica de Kerr-de Sitter es regular. Mostraremos que el eje de rotación es una sub variedad bi-dimensional Lorentziana a partir de esto tenemos una conexión con los contenidos de los capítulos 2 y 3. También en este capítulo estudiamos la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada con el movimiento geodésico y mostraremos que tal ecuación es separable. Escribimos un sistema de primer orden que describe las geodésicas causales en este espacio-tiempo. Estas ecuaciones combinadas con la extensión maximal del eje de rotación nos permite estudiar las propiedades de la curvatura de anillo que se encuentra en la métrica del espacio-tiempo de KdS y este trabajo queda para futuro.

# 2 Construyendo los Diagramas Conformes de Carter-Penrose

En este capítulo introducimos y estudiamos los diagramas conformes de Carter-Penrose. Como hemos mencionado en la introducción de esta tesis, la importancia de estos diagramas es que podemos mapear espacios-tiempos  $(\mathbf{M}, g)$  de 2 dimensiones (2 dim), mediante una transformación conforme al interior de un diamante ó a la mitad de un diamante. Por el término diamante ó mitad de diamante entendemos regiones acotadas y conexas del espacio-tiempo de 2 dim Minkowski y en la literatura se reporta como diamante por la forma geométrica que toman estas regiones (véase Fig.(2-4)). Debido que la métrica  $g$  esta conformalmente relacionada con la métrica de Minkowski  $\eta$  esto implica que podemos visualizar la estructura global del  $(\mathbf{M}, g)$ . El cono de luz asociado con la métrica de Minkowski es trivial y este nos proporciona información sobre la estructura causal de  $(\mathbf{M}, g)$ . Discutimos estas propiedades importantes en la secciones 2.1 y 2.2.

## 2.1. Espacios-Tiempos que se mapean a Diamantes Completos

Empezamos esta sección considerando un espacio-tiempo de 2 dim  $(\mathbf{M}, g)$  con la métrica<sup>1</sup>  $g$  dada por

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad r_1 < r < r_2. \quad (2-1)$$

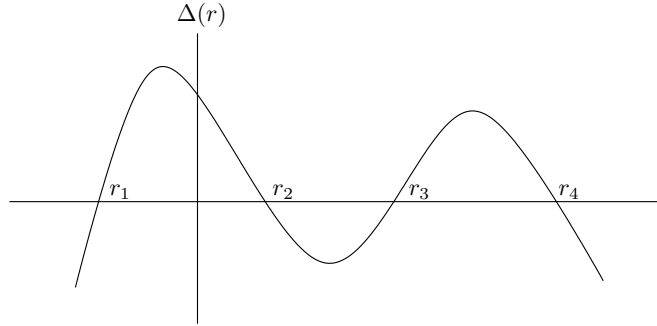
y con la función  $f$  suave<sup>2</sup> sujeta a las siguientes condiciones

$$f(r_1) = f(r_2) = 0, \quad f(r) > 0 \quad \forall \quad r \in (r_1, r_2). \quad (2-2)$$

---

<sup>1</sup>Una medida de la curvatura de las métricas escritas en (2-1) es a través de la curvatura Gaussiana  $G(r)$  dada por  $G(r) = \frac{1}{2}R(r) = -\frac{d^2f(r)}{dr^2}$  donde  $R(r)$  es el escalar de curvatura.

<sup>2</sup>En este trabajo,  $f$  es suave significa que es de clase  $C^k$  con  $k \geq 2$  en el dominio bajo consideración, aún las funciones que emplearemos son  $C^\infty$ .



**Figura 2-1:** Dibujo esquemático del comportamiento de la función  $\Delta(r)$ , bajo la asunción que  $\Delta(r) = 0$  admite cuatro raíces reales. La gráfica de la función  $f(r)$  en (2-3) tiene la mismas características que  $\Delta(r)$ .

Aunque la teoría que desarrollamos es independiente de la forma de la función  $f$  en  $[r_1, r_2]$  por razones que serán claras en el capítulo 4 empezamos con una  $f$  que tiene la forma

$$f(r) = \frac{\Delta(r)}{r^2 + a^2}, \quad \Delta(r) = -\frac{1}{3}\Lambda r^2(r^2 + a^2) + r^2 - 2Mr + a^2, \quad r \in R, \quad (2-3)$$

en donde ( $\Lambda > 0, M, a \neq 0$ ) son constantes reales. Como veremos en el último capítulo de esta tesis, la función  $f$  en (2-3) describe la geometría del eje de rotación por el espacio-tiempo de KdS. Elegimos los parámetros ( $\Lambda, M, a$ ) de tal manera que la Ec.  $\Delta(r) = 0$  admita cuatro raíces reales arregladas de manera  $r_1 < 0 < r_2 < r_3 < r_4$  (véase<sup>3</sup> Fig.(2-1)). Usando este  $f$  y restringiéndonos al intervalo  $r \in (r_1, r_2)$  tenemos un  $(\mathbf{M}, g)$  con  $g$  que tiene la forma (2-1) y  $f(r)$  satisface (2-2). La gráfica de  $f(r)$  (véase Fig.(2-1)), nos permite también a elegir el intervalo  $(r_2, r_3)$  en donde  $f(r) < 0$  y por tal elección (2-1) define una nueva métrica Lorentziana en  $(r_2, r_3)$  y más adelante estudiamos este  $(\mathbf{M}, g)$ . En total la Fig.(2-34carter) define cinco espacios-tiempos  $(\mathbf{M}, g)$  en donde  $g$  esta definida en los intervalos  $(-\infty, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), (r_3, r_4), (r_4, \infty)$ . Aunque cada uno de estos  $(\mathbf{M}, g)$  están bien definidos, tienen la propiedad patológica que las geodésicas corren a las “fronteras” de  $(\mathbf{M}, g)$  con parámetro afín finito y esta propiedad la mostraremos más adelante. El reto de este y el capítulo próximo es ver si es posible conectar estos  $(\mathbf{M}, g)$  de manera suave que elimine esta patología (tal conexión es factible si no hay singularidades de curvatura). Como veremos en esta tesis tal conexión es posible y aquí los diagramas de Carter-Penrose son de gran apoyo.

En el caso en que  $f(r)$  en (2-1) satisface Ec.(2-2), introducimos nuevas coordenadas  $(u, v)$  dadas por

<sup>3</sup>Notese que la forma de la gráfica de la función  $f$  en la Fig.(2-1) depende de la propiedad que  $\Lambda > 0$  y  $a^2 \neq 0$ .

$$u(t, r) = t - \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')}, \quad v(t, r) = t + \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')} \quad (2-4)$$

en donde  $r^*$  es un punto fijo en  $(r_1, r_2)$ . La Jacobiana de la transformación  $(t, r) \rightarrow (u, v)$  es

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{f} \\ 1 & -\frac{1}{f} \end{vmatrix} = -\frac{2}{f} \neq 0 \quad \forall \quad r \in (r_1, r_2), \quad (2-5)$$

entonces (2-4) definen una transformación de coordenadas regular. Las coordenadas  $(u, v)$  tienen la propiedad importante que a lo largo de las geodésicas nulas<sup>4</sup> se quedan constantes<sup>5</sup>. A mostrar esta propiedad, primero construimos las geodésicas nulas por la métrica en (2-1) con  $f$  sujeta a (2-2).

Para este análisis, usamos el hecho de que  $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$  es campo de Killing temporal por la métrica (2-1) y  $\mathbf{u} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dr}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial r}$  es el vector tangente (2-velocidad) a la curva geodésica  $(t(\lambda), r(\lambda))$  con  $\lambda$  el parámetro afín. Bajo estas condiciones,  $g(\xi, \mathbf{u})$  es constante a lo largo de las geodésicas lo cual implica que

$$-E = g(\mathbf{u}, \xi) = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \xi^\nu, \quad (2-6)$$

con  $E$  una constante de movimiento<sup>6</sup>. De Ec.(2-1) junto con la Ec.(2-6) se sigue que

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{f(r)}, \quad (2-7)$$

mientras de la condición de nulidad

$$0 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (2-8)$$

tenemos

$$0 = -f \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{f} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \quad (2-9)$$

$$0 = \frac{1}{f} \left( -E^2 + \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \right) \quad (2-10)$$

<sup>4</sup>Por espacios-tiempos de 2 dim podemos clasificar dos familias de geodésicas nulas, “entrantes” y “salientes”.

<sup>5</sup>Específicamente, por ejemplo  $u$  se queda constante a lo largo de una geodésica mientras  $v$  está cambiando a lo largo de esta geodésica y vice-versa.

<sup>6</sup>A lo largo de cada geodésica  $E$  es constante, es decir,  $\frac{dE}{d\lambda} = 0$ .

$$E^2 = \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \quad (2-11)$$

$$dr = \pm |E| d\lambda = \pm d\lambda \quad (2-12)$$

Absorbemos el factor  $|E|$  dentro de  $\lambda$  (y lo seguimos denotando igual), concluimos que la coordenada  $r$  en (2-1) actúa como parámetro afín<sup>7</sup>. De Ecs.(2-7) y (2-11) obtenemos

$$\frac{dt}{d\lambda} = \pm \frac{1}{f(r)}, \quad (2-13)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm 1. \quad (2-14)$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene que las geodésicas nulas satisfacen

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{f(r)} \quad \Rightarrow \quad t(r) = \pm \int^r \frac{dr}{f(r)} + cte, \quad (2-15)$$

en donde el signo  $\pm$  clasifica dos tipos de geodésicas nulas (siempre válido para espacios-tiempos de 2 dim). Analizamos enseguida las propiedades de (2-15) junto con  $f$  escrita en la forma  $f(r) = (r - r_1)h(r)$  con  $h(r_1) \neq 0$ ,  $f(r) = (r_2 - r)\hat{h}(r)$ ,  $\hat{h}(r_2) \neq 0$ , tenemos

$$\lim_{r \rightarrow r_1} t(r) = + \lim_{r \rightarrow r_1} \int^r \frac{dr'}{f(r')} = \lim_{r \rightarrow r_1} \int^r \frac{dr}{(r - r_1)h(r)} \rightarrow -\infty \quad (2-16)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_2} t(r) = + \lim_{r \rightarrow r_2} \int^r \frac{dr'}{f(r')} = \lim_{r \rightarrow r_2} \int^r \frac{dr}{(r_2 - r)\hat{h}(r)} \rightarrow \infty. \quad (2-17)$$

El mismo análisis<sup>8</sup> es válido por la elección del signo negativo en Ec.(2-15), simplemente se invierten los límites en las Ecs.(2-16) y (2-17). Esquemáticamente el comportamiento de las dos familias de geodésicas nulas es como se muestra en la Fig.(2-2).

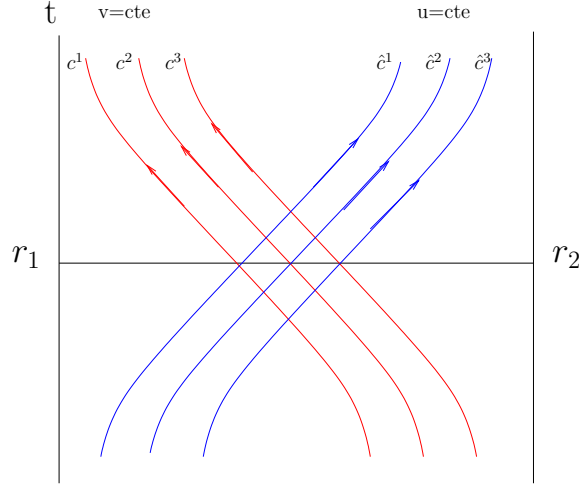
Enseguida relacionamos las coordenadas  $(u, v)$  con las geodésicas nulas que construimos. Por ello evaluamos

$$u(t(r), r) \equiv u(r) = t(r) - \int^r \frac{dr'}{f(r')} + cte \quad (2-18)$$

<sup>7</sup>Esta propiedad es importante y aquí se ve que las geodésicas nulas definidas por (2-1) son incompletas.

Por geodésicas temporales un análisis similar muestra que el tiempo propio requerido para llegar a las fronteras es finito. Recordemos que una geodésica nula ó temporal será completa si el valor del parámetro afín corre de  $\infty \leftrightarrow -\infty$ , de lo contrario es incompleta.

<sup>8</sup>En el caso en que  $f(r) = (r - r_1)^n h(r)$  con  $n = 2, 3..$  y  $h(r_1) \neq 0$  los límites en Ecs.(2-16) y (2-17) todavía divergen pero ahora como  $(r - r_1)^{-(n+1)}$ .



**Figura 2-2:** Las curvas dibujadas representan el comportamiento de las dos familias de geodésicas nulas en Ec.(2-15). Las curvas etiquetadas con  $c^1$ ,  $c^2$ , etc representan geodésicas nulas “entrantes”, mientras que  $\hat{c}^1$ ,  $\hat{c}^2$ , etc, representan geodésicas nulas “salientes”.

tomando  $t(r)$  en Ec.(2-15) con el signo positivo, vemos que  $\frac{du(r)}{dr} = 0$ , es decir, la coordenada  $u$  a lo largo de la familia de geodésicas nulas que satisfacen  $\frac{dt}{dr} = +\frac{1}{f(r)}$  es constante. El mismo argumento se aplica por la coordenada  $v$  (donde aquí tomamos el signo negativo). Entonces a lo largo de las geodésicas nulas, las coordenadas  $(u, v)$  son constantes.

Para el análisis que sigue es importante conocer el rango en que cambian  $u$  y  $v$ . Por eso con la ayuda de Fig.(2-2) evaluamos  $u(r)$  sobre el eje  $t = cte$  (por conveniencia elegimos  $t = 0$ ), tenemos que<sup>9</sup>

$$\lim_{r \rightarrow r_1} u(r) = - \lim_{r \rightarrow r_1} \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')} = - \lim_{r \rightarrow r_1} \int_{r_*}^r \frac{dr}{(r - r_1)h(r)} \rightarrow \infty \quad (2-19)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_2} u(r) = - \lim_{r \rightarrow r_2} \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')} = - \lim_{r \rightarrow r_2} \int_{r_*}^r \frac{dr}{(r_2 - r)\hat{h}(r)} \rightarrow -\infty. \quad (2-20)$$

Haciendo el mismo análisis por la coordenada  $v$  encontramos que

$$u \rightarrow \infty \quad r \rightarrow r_1, \quad u \rightarrow -\infty \quad r \rightarrow r_2, \quad (2-21)$$

$$v \rightarrow -\infty \quad r \rightarrow r_1, \quad v \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow r_2, \quad (2-22)$$

estos limites implican que  $(u, v)$  corren como;

<sup>9</sup>Tomamos ventaja del hecho que cualquier geodésica nula corta al eje  $t = 0$  en un solo punto, esta propiedad es consecuencia de que  $\frac{dt(r)}{dr}$  no cambia de signo en  $(r_1, r_2)$  y la Fig.(2-2) exhibe esta propiedad.

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty. \quad (2-23)$$

Transformamos la métrica (2-1) a las nuevas coordenadas  $u$  y  $v$  mediante

$$du = dt - \frac{dr}{f(r)}, \quad dv = dt + \frac{dr}{f(r)}, \quad dudv = dt^2 - \frac{dr^2}{f^2(r)} \quad (2-24)$$

tenemos

$$g = -f(r)dudv, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty, \quad (2-25)$$

en donde aquí  $r$  depende explícitamente de  $u$  y  $v$ . A través de  $d(v-u) = \frac{2dr}{f(r)}$  y por el hecho que  $f(r) \neq 0$  en  $(r_1, r_2)$  se sigue que  $r = r(v-u)$ . Ahora introducimos nuevas coordenadas  $(U, V)$  definidas<sup>10</sup> como

$$u = \tan U, \quad v = \tan V, \quad (2-26)$$

y debido a (2-23) tomamos los intervalos

$$-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}, \quad (2-27)$$

donde la función tan es univaluada. La transformación (2-26) mapea el plano  $(u, v)$  al interior de un cuadrado<sup>11</sup>, (véase Fig.(2-3))

y debido que

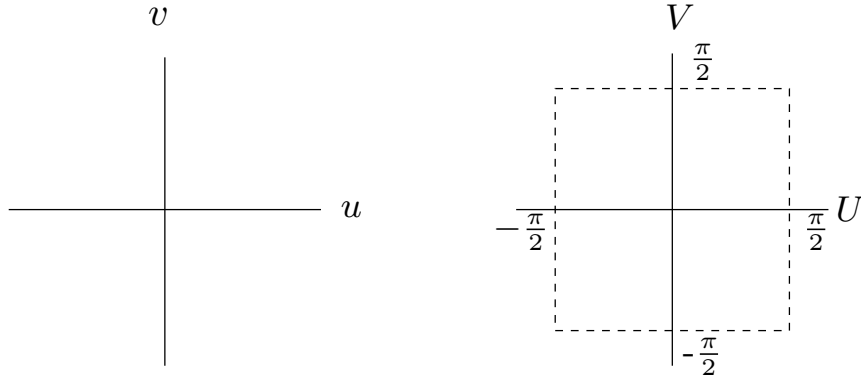
$$du = \frac{1}{\cos^2 U} dU, \quad dv = \frac{1}{\cos^2 V} dV \quad dudv = \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} dU dV, \quad (2-28)$$

$g$  en las coordenadas  $U$  y  $V$  toma la forma

$$g = -\frac{f(r)}{\cos^2 U \cos^2 V} dU dV, \quad -\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}. \quad (2-29)$$

<sup>10</sup>Por conveniencia aquí usamos  $\tan u$ ,  $\tan v$  como funciones que mapean la línea recta al intervalo abierto  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  con frontera no vacía. En principio podemos usar otros difeomorfismos de la línea recta a intervalos abiertos con frontera distinta del vacío.

<sup>11</sup>Hasta este punto cambiamos las coordenadas en  $(\mathbf{M}, g)$  de  $(t, r)$  a  $(u, v)$  a  $(U, V)$ . La estructura de (2-26) tiene la propiedad de llevar los “infinitos” de  $(\mathbf{M}, g)$  a “distancia” finita. Esta es la interpretación común de la transformación (2-26). Nótese que alternativamente podemos ver a (2-26) como una mapa del  $(\mathbf{M}, g)$  a una región del espacio-tiempo de Minkowski  $(R^2, \eta)$ . De esta manera la imagen de  $(\mathbf{M}, g)$  bajo (2-26) es un conjunto abierto y conexo del espacio-tiempo de Minkowski con frontera no vacía y esta interpretación alternativa de la transformación (2-26) tiene ventajas, ofrece pistas por una extensión de la teoría de dimensión más grande de dos (véase por ejemplo [1-3] y [6]).



**Figura 2-3:** La figura del lado izquierdo es el plano  $(u, v)$ , con  $-\infty < u < \infty$ ,  $-\infty < v < \infty$ , mientras que la figura del lado derecho muestra la región acotada  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  del espacio-tiempo de Minkowski. La transformación en (2-26) mapea el plano  $(u, v)$  al interior de un cuadrado en el plano  $(U, V)$ .

Mediante una nueva transformación dada por<sup>12</sup>

$$U = T - X, \quad V = T + X, \quad (2-30)$$

rotamos el cuadrado en Fig.(2-3) y toma la forma como en Fig.(2-4).

Debido a que

$$dU = dT - dX, \quad dV = dT + dX, \quad dUdV = dT^2 - dX^2, \quad (2-31)$$

entonces (2-29) toma la forma equivalente

$$g = \frac{f(r)}{\cos^2(T - X) \cos^2(T + X)} (-dT^2 + dX^2), \quad -\frac{\pi}{2} < T - X < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < T + X < \frac{\pi}{2}, \quad (2-32)$$

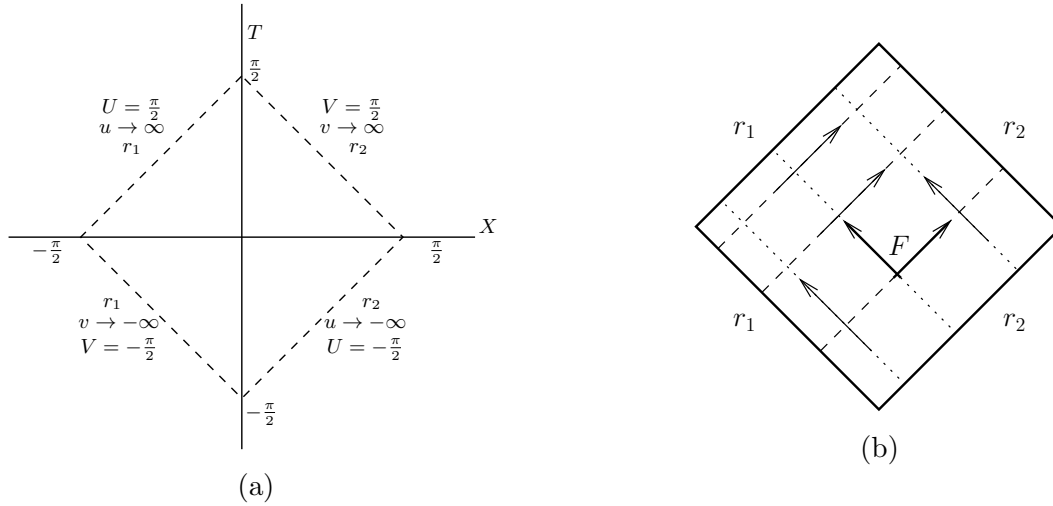
ó de forma compacta

$$g = \Omega^2 \eta, \quad \Omega^2 = \frac{f(r)}{\cos^2(T - X) \cos^2(T + X)}, \quad \eta = -dT^2 + dX^2, \quad (2-33)$$

es decir,  $g$  es conformalmente plana<sup>13</sup> al interior del diamante de la Fig.(2-4).

<sup>12</sup>De (2-27) y (2-30) concluimos que las Ecs.  $T - X = \frac{\pi}{2}$ ,  $T - X = -\frac{\pi}{2}$  etc, definen las fronteras del dibujo en Fig.(2-4).

<sup>13</sup>Dadas dos métricas Lorentzianas  $g$  y  $g'$  sobre una variedad  $M$  decimos que están conformalmente relacionadas si existe una función real valuada  $\Omega(q) \neq 0 \forall q$  en  $M$ , tal que  $g = \Omega^2 g'$ . En el caso en que  $g' = \eta$



**Figura 2-4:** El espacio-tiempo definido por (2-1) está conformalmente mapeado a una región acotada que se encuentra al interior de este diamante. En la figura del lado izquierdo escribimos las fronteras de este diamante con un número de maneras equivalentes. Del lado derecho dibujamos la parte futuro del cono de luz indicado por  $F$  y también dibujamos algunas geodésicas nulas “salientes” y “entrantes” dirigidas a futuro. La orientación en el tiempo está definida por el campo temporal de Killing  $\xi_t = \frac{\partial}{\partial t}$ , el cual lo consideramos dirigido hacia futuro.

La propiedad de que la métrica física  $g$  está conformalmente relacionada con la métrica  $\eta$  al interior del diamante de la Fig.(2-4) hace los diagramas conformes de gran relevancia. Primero  $g = \Omega^2\eta$  implica que si  $X \in T_p(M)$  entonces  $g(X, X) = \Omega^2\eta(X, X)$  implica que si  $X$  es temporal, nulo ó espacial al respecto de  $g$  es también temporal, nulo ó espacial al respecto de  $\eta$  y vice-versa. Esto nos dice que las curvas que son nulas al respecto de  $g$  también son nulas al respecto de  $\eta$  y vice-versa. Mucho más importante  $g$  y  $\eta$  tienen las mismas geodésicas nulas. Como consecuencia de esta propiedad el cono de luz por un evento  $p \in (M, g)$  es idéntico al cono de luz definido por  $\eta$ . Debido de esto las relaciones de causalidad entre eventos en  $(M, g)$  es trivial. Dados dos eventos  $A$  y  $B$  en  $(M, g)$  es fácil ver la relación causal entre estos. Dibujando los conos de luz asociados a la métrica  $\eta$  a través de  $A$  y  $B$  podemos inferir sus relaciones causales entre ellos. También mirando la estructura del diagrama (b) en Fig.(2-4) inferimos que las geodésicas nulas son incompletas y corren a las fronteras marcadas por  $r_1$  respectivamente  $r_2$ .

---

con  $\eta$  la métrica de Minkowski decimos que  $g$  es conformalmente plana en  $M$ . Para una introducción a las métricas conformalmente planas y sus propiedades (véase apéndice D en ref [3]).

El diagrama (b) en la Fig.(2-4) es el primer diagrama de Carter-Penrose que hemos construido en esta tesis y estamos interesados en ver como cambia la topología de los diagramas conformes bajo la asunción que tomamos distinto  $(\mathbf{M}, g)$ . Por eso a continuación y motivados por la Fig.(2-1), consideramos otro  $(\mathbf{M}, g)$  con  $g$  dado por

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad r \in (r_2, r_3), \quad (2-34)$$

pero ahora consideramos el tramo de  $f$  en Fig.(2-1) que satisface

$$f(r_2) = f(r_3) = 0, \quad f(r) < 0 \quad r \in (r_2, r_3). \quad (2-35)$$

Por tal  $f$  re-escribimos  $g$  en (2-34) en forma equivalente

$$g = |f(r)|dt^2 - \frac{1}{|f(r)|}dr^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad r \in (r_2, r_3), \quad (2-36)$$

y notamos que

$$X = \frac{\partial}{\partial r}, \quad (2-37)$$

es campo tipo tiempo, mientras que el campo de Killing  $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$  en  $(r_2, r_3)$  es ahora tipo espacio. La geometría escrita por (2-36) es dinámica ya que las componentes de  $g$  dependen de  $r$  que ahora es coordenada temporal. A construir el diagrama conforme por este  $(\mathbf{M}, g)$  seguimos los pasos del ejemplo anterior salvo algunas variaciones. En lugar de la definición Ec.(2-4), ahora introducimos  $(u, v)$  como

$$u(t, r) = \int_{r^*}^r \frac{dr'}{|f(r')|} - t, \quad v(t, r) = \int_{r^*}^r \frac{dr'}{|f(r')|} + t, \quad (2-38)$$

con  $r^*$  un punto fijo dentro del intervalo  $(r_2, r_3)$ . Como en la Ec.(2-5) tenemos que

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{f} \\ 1 & -\frac{1}{f} \end{vmatrix} = \frac{2}{f} \neq 0 \quad \forall \quad r \in (r_2, r_3)$$

implicando que Ec.(2-38) es una transformación regular. Por el mismo análisis del caso anterior las Ecs. geodésicas nulas satisfacen

$$\frac{dt(r)}{dr} = \pm \frac{1}{|f(r)|} \Rightarrow t(r) = \pm \int_{r^*}^r \frac{dr}{|f(r)|} + cte, \quad (2-39)$$

y tienen el mismo comportamiento como el mostrado en la Fig.(2-2). Usando

$$u(r) = \int \frac{dr'}{|f(r')|} - t(r) + cte, \quad v(r) = \int \frac{dr'}{|f(r')|} + t(r) + cte, \quad (2-40)$$

y tomamos los límites de la Ec.(2-40) mientras  $r \rightarrow r_2$ ,  $r \rightarrow r_3$  obtenemos

$$u \rightarrow -\infty \quad r \rightarrow r_2, \quad u \rightarrow \infty \quad r \rightarrow r_3, \quad (2-41)$$

$$v \rightarrow -\infty \quad r \rightarrow r_2, \quad v \rightarrow \infty \quad r \rightarrow r_3, \quad (2-42)$$

y por tanto  $u \in (-\infty, \infty)$ ,  $v \in (-\infty, \infty)$  (compare los límites (2-41),(2-42) con (2-21), (2-22)).

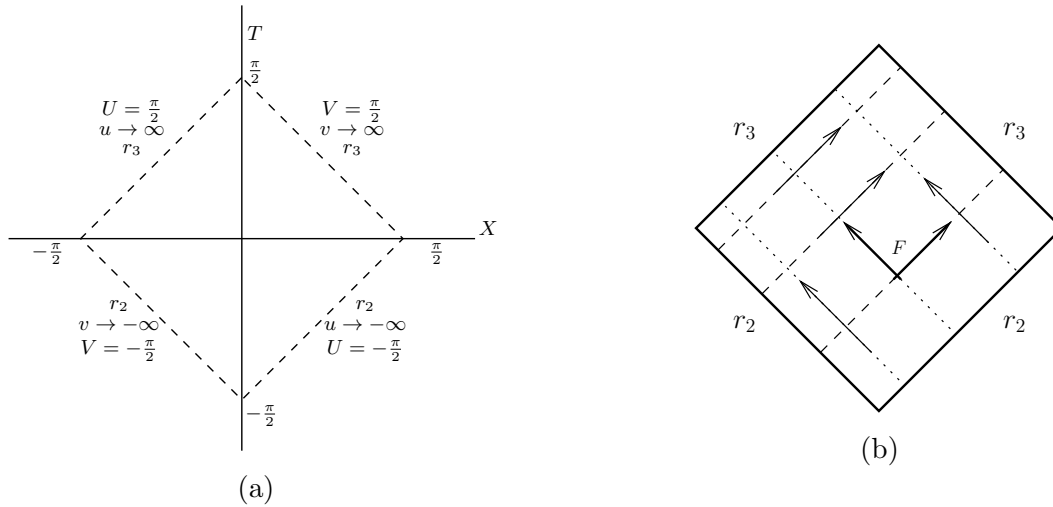
Claramente de Ec.(2-38) tenemos

$$du = \frac{dr}{|f(r)|} - dt, \quad dv = \frac{dr}{|f(r)|} + dt, \quad dudv = \frac{dr^2}{|f^2(r)|} - dt^2, \quad (2-43)$$

de donde vemos que  $g$  en (2-34) toma la forma

$$g = -|f(r)|dudv, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty. \quad (2-44)$$

Nuevamente definimos coordenadas  $(U, V)$  como en Ec.(2-26), es decir,  $u = \tan U$ ,  $v = \tan V$  que mapean el plano  $(u, v)$  al interior de un cuadrado como se ve en Fig.(2-5).



**Figura 2-5:** Los diagramas de estas figuras corresponden al  $(M, g)$  escrito en (2-36). La orientación en el tiempo en la figura (b) está elegida por el campo tipo tiempo  $X = \frac{\partial}{\partial r}$  y las flechas indican la dirección de las geodésicas nulas dirigidas hacia futuro (el vector tangente de las geodésicas nulas está en la parte futura del cono de luz). Nótese que en el caso en que  $X = -\frac{\partial}{\partial r}$  define la orientación en el tiempo el diagrama figura (b) se queda igual pero la parte futura de cono de luz (indicado por  $F$ ) y las flechas de las geodésicas se invierten.

Se sigue que  $g$  toma la forma

$$g = -\frac{|f(r)|}{\cos^2 U \cos^2 V} dU dV, \quad -\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}, \quad (2-45)$$

y a través de  $U = T - X$ ,  $V = T + X$ , llegamos a

$$g = \frac{|f|}{\cos^2(T - X) \cos^2(T + X)} (-dT^2 + dX^2), \quad -\frac{\pi}{2} < T - X < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < T + X < \frac{\pi}{2}. \quad (2-46)$$

Entonces por  $(\mathbf{M}, g)$  definido por (2-36) tenemos que  $g = \Omega^2 \eta$  (compare con (2-33)) i.e.  $g$  en (2-36) es conformalmente plana al interior de un diamante como se ve en Fig.(2-5).

Del análisis de los espacios-tiempos  $(\mathbf{M}, g)$  escritos por (2-1) y (2-36) vemos de las Figs.(2-4) y (2-5) que los diagramas conformes tienen la misma topología. Sería natural considerar la métrica<sup>14</sup>  $g$  como en (2-1) pero tomando  $f$  en el intervalo  $(r_3, r_4)$ . En tal intervalo  $f(r) > 0$  (véase Fig.(2-1)) y la construcción del diagrama conforme sigue los pasos anteriores. Concluimos que el diagrama por tal espacio-tiempo es un diamante completo como muestra la Fig.(2-4) con la única diferencia que reemplazamos  $(r_1, r_2)$  por  $(r_3, r_4)$  según  $r_1 \rightarrow r_3$  y  $r_2 \rightarrow r_4$  y tomamos  $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$  el campo de Killing que define la orientación en el tiempo. Debido de estas similitudes no consideramos los detalles de esta construcción.

Aún será natural examinar un espacio-tiempo con  $g$  como en (2-1) en donde  $f$  está definido en el intervalo  $(r_4, \infty)$  ó en  $(-\infty, r_1)$  (véase Fig.(2-1)), sin embargo aquí hacemos una desviación<sup>15</sup>. Consideramos espacios-tiempos con  $g$  todavía escrita como (2-1), pero elegimos diferente función  $f$ . La nueva  $f$  es suave, definida en  $(r_1, \infty)$  con  $r_1 > 0$  y asintóticamente satisface

$$f > 0 \quad \forall \quad r \in (r_1, \infty) \quad (2-47)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_1} f(r) \rightarrow 0 \quad \text{pero} \quad \lim_{r \rightarrow r_1} \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')} \rightarrow -\infty \quad (2-48)$$

<sup>14</sup>La manera completa sería decir que consideramos un  $(\mathbf{M}, g)$  con  $g$  dado por Ec.(2-1) y  $f(r) > 0$  sobre  $(r_3, r_4)$ , pero evitamos ser tan repetitivos y de aquí en adelante solo escribiremos la métrica  $g$ , con el entendimiento que  $M$  puede deducirse de la forma de  $g$ .

<sup>15</sup>La razón por esta desviación se debe al comportamiento asintótico de  $f$  en (2-3) en el límite  $r \rightarrow \pm\infty$ . Como veremos en la sección próxima el comportamiento de  $f(r) \rightarrow 0$  implica que la topología del diagrama conforme es diferente al de un diamante completo. Aquí preferimos discutir espacios-tiempos cuyos diagramas conformes son diamantes completos.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) \rightarrow cte \neq 0 \quad \text{pero} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')} \rightarrow \infty. \quad (2-49)$$

Aunque existen infinitas funciones que satisfacen estas condiciones, nosotros elegimos  $f$  motivados por la geometría de los hoyos negros de Schwarzschild y de Reissner-Nordström.

Recordamos que al respecto de un sistema de coordenadas  $(t, r, \vartheta, \varphi)$  apropiado la métrica  $g$  cuadri-dimensional que describe estos hoyos negros tiene la forma [1-3]

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (2-50)$$

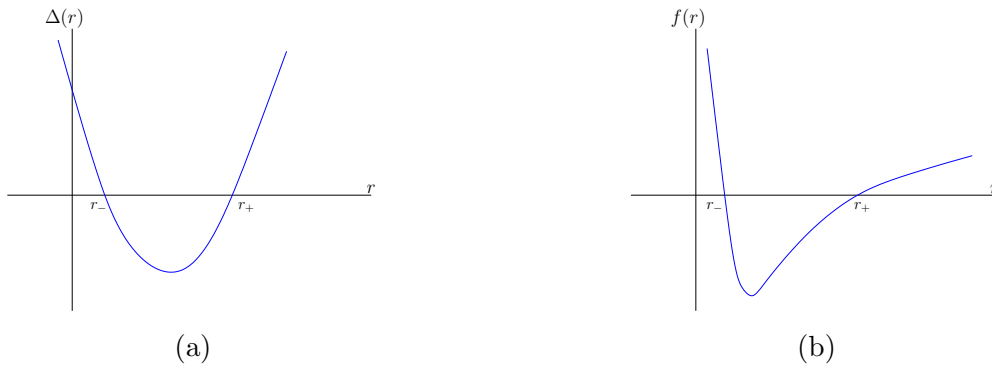
en donde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad M > 0, \quad r \in (r_1 = 2M, \infty). \quad (2-51)$$

corresponde al hoyo negro de Schwarzschild, mientras por el hoyo negro de Reissner-Nordström no extremo,  $f(r)$  tiene la forma

$$f(r) = \frac{\Delta(r)}{r^2}, \quad \Delta(r) = r^2 - 2Mr + Q^2, \quad M^2 > Q^2, \quad r \in (0, \infty). \quad (2-52)$$

en donde aquí  $Q$  es una constante que tiene la interpretación de carga eléctrica. Bajo la condición  $M^2 > Q^2$ ,  $\Delta(r)$  se comporta como en la Fig.(2-6a) mientras que  $f(r)$  se comporta como en la Fig.(2-6b).



**Figura 2-6:** La figura (a) muestra el comportamiento de  $\Delta(r)$  por  $M^2 > Q^2$  mientras que (b) muestra el comportamiento de la función  $f(r)$ . Observamos de (b) que existen 3 regiones  $0 < r < r_-$ ,  $r_- < r < r_+$  y  $r_+ < r < \infty$  en donde  $f(r)$  define 3 espacios-tiempos distintos y desconectados.

Debido a la simetría esférica, la parte importante de la geometría en (2-50) corresponde a espacios bi-dimensionales que tienen  $\vartheta = cte, \varphi = cte$  y estos espacios tienen métrica inducida de la forma

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}, \quad (2-53)$$

y esta forma de la métrica nos da otra motivación para estudiar diagramas conformes de espacios  $(\mathbf{M}, g)$  que hemos especificado al principio de esta sección.

Motivados por la forma de (2-51) por el caso del hoyo negro de Schwarzschild llegamos a 2 espacios-tiempos escritos por

$$g_1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad r > 2M \quad (2-54)$$

$$g_2 = \left(\frac{2M}{r} - 1\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(\frac{2M}{r} - 1\right)}, \quad r < 2M \quad (2-55)$$

mientras que por el caso de Reissner-Nordström obtenemos 3 espacios-tiempos en donde  $g$  tiene la forma (2-53) con  $f > 0$  en  $(0, r_-)$ ,  $f < 0$  en  $(r_-, r_+)$  y  $f > 0$  en  $(r_+, \infty)$ . Nuestra tarea en el resto de esta sección es construir los diagramas conformes por el espacio-tiempo<sup>16</sup> en (2-54) y por los casos de Reissner-Nordström con  $f(r) > 0$  en  $r_+ < r < \infty$  y  $f(r) < 0$  en  $r_- < r < r_+$ .

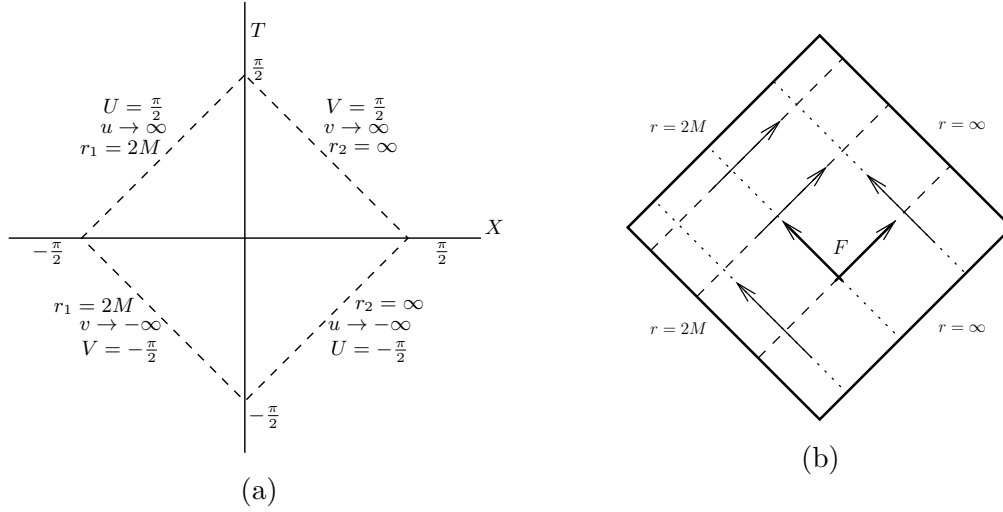
Por el caso de (2-54), un análisis similar a los casos anteriores muestra que la geometría exterior de Schwarzschild la mapeamos a un diamante completo Fig.(2-7a).

Por el caso de Reissner-Nordström por  $f(r) > 0$  en  $(r_+, \infty)$  el diagrama conforme corresponde con la Fig.(2-8a) y por el caso en que  $f(r) < 0$  en  $(r_-, r_+)$  el diagrama conforme se ilustra en la Fig.(2-8b).

## 2.2. Espacios-Tiempos que se mapean a Mitad de Diamante

En esta sección consideramos espacios-tiempos  $(\mathbf{M}, g)$  cuyo diagrama conforme tiene topología distinta de un diamante completo. Aún empezamos con  $g$  que tiene la forma

<sup>16</sup>Aun el hoyo negro de Schwarzschild define 2 espacios-tiempos desconectados escritos por (2-54) y (2-55) en esta sección solo consideramos al  $(\mathbf{M}, g)$  definido por (2-54).



**Figura 2-7:** Diagrama conforme que corresponde a la geometría exterior de Schwarzschild con masa positiva. En la Figura (b) vemos la parte futura del cono de luz y algunas geodésicas nulas salientes y entrantes dirigidas hacia el futuro. La orientación en el tiempo está determinada por  $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ . Debido a las regiones asintóticas  $r \rightarrow \infty$  hay sentido geométrico a dividir las geodésicas dirigidas a futuro como entrantes y salientes.

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}dr^2 \quad (2-56)$$

en esta sección  $f(r)$  satisface

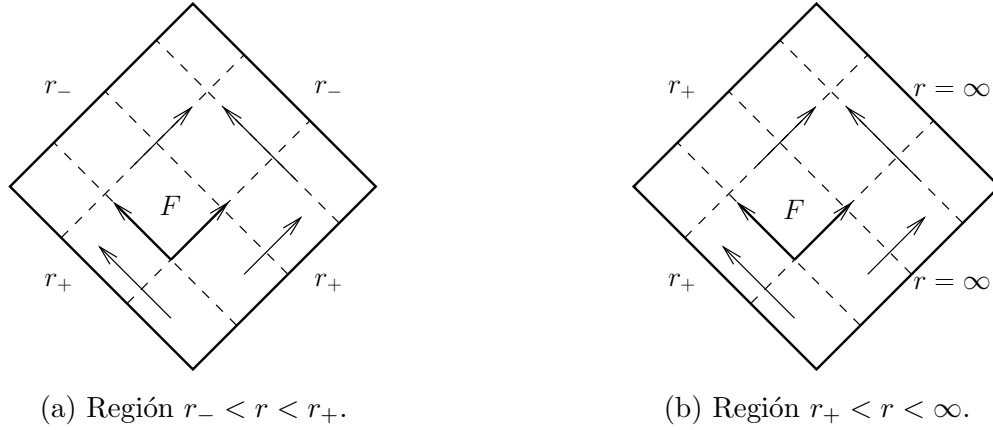
$$f > 0 \quad \forall \quad r \in (r_1, r_2) \quad (2-57)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_1} f(r) \rightarrow \infty \quad \text{pero} \quad \lim_{r \rightarrow r_1} \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')} < \infty, \quad (2-58)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_2} f(r) \rightarrow 0 \quad \text{pero} \quad \lim_{r \rightarrow r_2} \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')} \rightarrow \infty, \quad (2-59)$$

aquí dejamos la posibilidad que  $r_1$  ó  $r_2$  son  $-\infty$  y  $\infty$  respectivamente. Como veremos este comportamiento asintótico de  $f$  es el responsable que los  $(\mathbf{M}, g)$  esten mapeados al interior de la mitad de diamante y esta propiedad la mostramos a través de la elección de una  $f$  particular.

Nuestro primer ejemplo consiste a tomar en (2-56) con



**Figura 2-8:** Diagramas Conformes por el hoyo negro no extremo de Reissner-Nordstrom por la regiones  $r_- < r < r_+$  y  $r_+ < r < \infty$ . Notése que en (a) hemos elegido el campo temporal  $X = -\frac{\partial}{\partial r}$  que define la orientación hacia el futuro mientras que en (b)  $X = \frac{\partial}{\partial t}$  define la orientación dirigida hacia el futuro.

$$f(r) = \frac{2M}{r} - 1, \quad 0 < r < 2M, \quad (2-60)$$

que corresponde a la métrica de Schwarzschild con masa  $M$  positiva (véase (2-55)). Aquí hacemos uso de la coordenada generalizada de Regge-Wheeler  $x$  (véase apéndice de este capítulo para su definición.)

$$dx(r) = \frac{dr}{f(r)}, \quad \Rightarrow \quad x(r) = \int_0^r \frac{dr'}{f(r')}, \quad (2-61)$$

de donde concluimos

$$\lim_{r \rightarrow 2M} x(r) = \lim_{r \rightarrow 2M} \int_0^r \frac{r'}{(2M - r')} dr' \rightarrow \infty \quad (2-62)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} x(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^r \frac{r'}{(2M - r')} dr' \rightarrow 0 \quad (2-63)$$

es decir  $f$  satisface las condiciones Ecs.(2-58) y Ec.(2-59) en  $(0, 2M)$ . De Ec.(2-61) se sigue

$$g = f(r)dt^2 - f(r)dx^2 = f(r)(dt^2 - dx^2), \quad -\infty < t < \infty, \quad 0 < x < \infty, \quad (2-64)$$

y a través de

$$u = x - t, \quad v = x + t, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty. \quad (2-65)$$

$$du = dx - dt, \quad dv = dx + dt, \quad -dudv = -dx + dt^2. \quad (2-66)$$

La métrica  $g$  en (2-64) al respecto de las coordenadas  $(u, v)$  es

$$g = -f(r)dudv, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty, \quad (2-67)$$

y a través de la transformación

$$u = \tan U, \quad v = \tan V, \quad U = T - X, \quad V = T + X, \quad (2-68)$$

obtenemos

$$g = \frac{f(r)}{\cos^2(T - X) \cos^2(T + X)} [-dT^2 + dX^2] = \Omega^2 \eta, \quad -\frac{\pi}{2} < T - X < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < T + X < \frac{\pi}{2}, \quad (2-69)$$

es decir, al igual que en los casos vistos, recuperamos la métrica de Minkowski multiplicada por un factor conforme. De esta conclusión parece que el diagrama conforme por la geometría interior de Schwarzschild será un diamante completo que no es el caso. La razón aquí es que debemos de tomar en cuenta la desigualdad

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad u + v \geq 0 \rightarrow \tan U + \tan V \geq 0 \quad \rightarrow \quad U \geq -V, \quad (2-70)$$

y la última desigualdad implica

$$T - X \geq -T - X \quad \rightarrow \quad T \geq 0. \quad (2-71)$$

Obtenemos así las siguientes relaciones

$$-\frac{\pi}{2} < T - X < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < T + X < \frac{\pi}{2}, \quad T \geq 0. \quad (2-72)$$

Pero estas desigualdades implican que el diagrama conforme que corresponde a  $(\mathbf{M}, g)$  con  $g$  dado en (2-55) tiene topología como la mitad de diamante como muestra la Fig.(2-9).

A continuación consideramos el diagrama conforme asociado a

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad 0 < r < r_-. \quad (2-73)$$

en donde  $f(r)$  representa al hoyo negro de Reissner-Nordström (véase (2-52)). Por tal  $f$  tenemos



**Figura 2-9:** Esta figura representa el diagrama conforme por el  $(\mathbf{M}, g)$  interior por el hoyo negro de Schwarzschild (véase (2-55)). En la Fig.(a) hemos elegido el campo temporal  $X = \frac{\partial}{\partial t}$  como el campo que define la orientación del tiempo, dibujamos el futuro del cono de luz representado por la letra  $F$ , hemos también dibujado la dirección de las geodésicas nulas “entrantes” y “salientes” hacia futuro. La Fig.(b) representa la “misma” situación que (a), la diferencia se debe a la orientabilidad en el tiempo que esta definida por el campo tipo tiempo  $X = -\frac{\partial}{\partial t}$ .

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) \rightarrow \infty \quad \text{pero} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')} < \infty \quad (2-74)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_-} f(r) \rightarrow 0 \quad \text{pero} \quad \lim_{r \rightarrow r_-} \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')} \rightarrow \infty. \quad (2-75)$$

Como en el ejemplo anterior aquí también empleamos la coordenada  $x$  de Regge-Wheeler

$$dx(r) = \frac{dr}{f(r)}, \quad \Rightarrow \quad x(r) = \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')}, \quad r \in (0, r_-), \quad (2-76)$$

de la cual obtenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} x(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^r \frac{dr'}{f(r')} \rightarrow 0 \quad (2-77)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_-} x(r) = \lim_{r \rightarrow r_-} \int_0^{r_-} \frac{dr'}{f(r')} = \lim_{r \rightarrow r_-} \int_0^{r_-} \frac{r'^2}{(r_- - r')g(r')} dr' \rightarrow \infty, \quad (2-78)$$

entonces  $x \in (0, \infty)$ . De (2-76) se sigue

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} = f(r)[-dt^2 + dx^2], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad x \in (0, \infty), \quad (2-79)$$

y siguiendo los mismos pasos como en el caso anterior introducimos

$$u = t - x, \quad v = t + x, \quad (2-80)$$

$$du = dt - dx, \quad dv = dt + dx \quad dudv = dt^2 - dx^2, \quad (2-81)$$

implicando que  $g$  en (2-79) toma la forma

$$g = -f(r)dudv, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty. \quad (2-82)$$

Aquí notamos una diferencia crucial en comparación del ejemplo anterior. Como consecuencia de (2-80) tenemos ahora

$$x = \frac{1}{2}(v - u) \geq 0 \quad \rightarrow \quad v - u \geq 0 \quad \rightarrow \quad v \geq u. \quad (2-83)$$

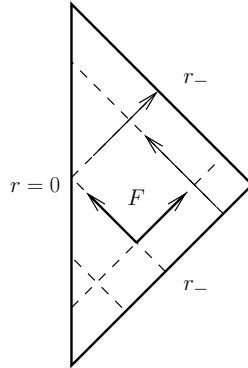
A través de  $u = \tan U$  y  $v = \tan V$  la desigualdad  $v \geq u$  implica

$$\tan V \geq \tan U \quad \rightarrow \quad V \geq U, \quad (2-84)$$

y mediante nuevas coordenadas  $(T, X)$  via  $U = T - X$ ,  $V = T + X$  obtenemos  $g = \Omega^2 \eta$  en la región

$$-\frac{\pi}{2} < T + X < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < T - X < \frac{\pi}{2}, \quad X \geq 0, \quad (2-85)$$

en donde  $X \geq 0$  es consecuencia de (2-83). Pero ahora (2-85) implica que el diagrama conforme por  $(\mathbf{M}, g)$  en (2-73) tiene la forma como la mitad de un diamante (véase Fig.(2-10)).



**Figura 2-10:** Diagrama Conforme por el espacio-tiempo de Reissner-Nordström en la región  $0 < r < r_-$ . Aquí usamos  $X = \frac{\partial}{\partial t}$  el campo de Killing temporal que orienta el espacio-tiempo. La figura ilustra el futuro del cono de luz denotado por la letra  $F$  y las flechas apuntan en la dirección de las geodésicas nulas entrantes y salientes dirigidas a futuro.

Finalmente regresamos a la  $f(r)$  de la sección 2.1 y consideramos  $(\mathbf{M}, g)$  con  $g$  dada por

$$g = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad -\infty < r < r_1 \quad (2-86)$$

Por tal  $f$  tenemos

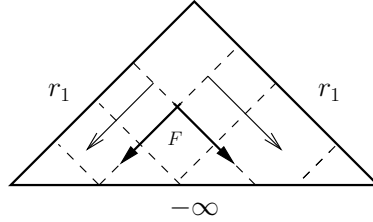
$$\lim_{r \rightarrow -\infty} f(r) \rightarrow -\infty \quad \text{pero} \quad \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')} \rightarrow 0 \quad (2-87)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_1} f(r) \rightarrow 0 \quad \text{pero} \quad \lim_{r \rightarrow r_1} \int_{r_*}^r \frac{dr'}{f(r')} \rightarrow \infty. \quad (2-88)$$

Siguiendo los ejemplos anteriores, de (2-76), la métrica  $g$  toma la forma

$$g = -f(r)(dt^2 - dx^2), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad x \in (0, \infty). \quad (2-89)$$

Y el diagrama conforme por este espacio-tiempo corresponde a la mitad de diamante, como se ilustra en la Fig.(2-11).



**Figura 2-11:** Diagrama Conforme por el  $(M, g)$  escrito en (2-86) con  $f$  como en (2-3) definida en  $-\infty < r < r_1$ . En la figura la orientación en el tiempo esta definida por  $X = -\frac{\partial}{\partial r}$  y las geodésicas nulas dirigidas a futuro estan indicadas por las flechas, es decir, ambas geodésicas empiezan en  $r_1$  y se dirigen a  $-\infty$ , sin embargo existe la otra posibilidad donde podemos tomar la otra región del cono de luz como futuro donde las geodésicas también invierten el sentido.

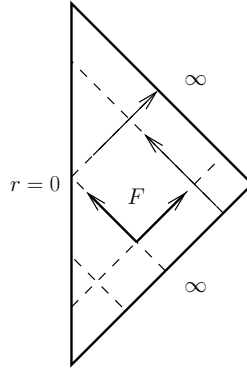
Por completez consideramos el caso de la geometría de Schwarzschild con masa negativa. Aquí la métrica bidimensional es tal que  $\vartheta = \varphi = cte$  tiene la forma

$$g = - \left( 1 + \frac{2|M|}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{\left( 1 + \frac{2|M|}{r} \right)} dr^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad 0 < r < \infty. \quad (2-90)$$

Aquí seguimos los pasos del ejemplo anterior y definimos  $(u, v)$  como en (2-80) con  $x \in (0, \infty)$ . Tenemos entonces las siguientes relaciones

$$x = \frac{1}{2}(v - u) > 0 \quad \rightarrow \quad v > u \quad \rightarrow \quad T + X > T - X \quad \rightarrow \quad X > 0. \quad (2-91)$$

lo cual implica la condición de mitad de diamante, la Fig.2-12 ilustra el mapeo por esta geometría.



**Figura 2-12:** Mapeo del espacio-tiempo de Schwarzschild por  $M < 0$ , aquí a diferencia de los casos anteriores solo existe un solo espacio-tiempo ( $f$  no tiene raíces, un caso similar ocurre por Reissner-Nordström con  $M^2 < Q^2$ ).

### 2.3. Apéndice: Coordenada generalizada de Regge-Wheeler y Mapeos Conformes

Hasta este punto hemos construido los diagramas conformes basándonos en la estructura de las coordenadas nulas  $(u, v)$  asociadas con la métrica  $g$  de la forma

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}. \quad (2-92)$$

En este apéndice, discutimos otra manera equivalente pero más rápida para construir los diagramas conformes. Esta nueva manera está basada en la coordenada generalizada de Regge-Wheeler [1-3] denotada aquí por  $x$ . Dada una métrica  $g$  como en (2-92) con  $f(r) > 0$  en  $(r_i, r_{i+1})$  la coordenada generalizada de Regge-Wheeler  $x$  está definida por

$$dx(r) = \frac{dr}{f(r)} \quad \Rightarrow \quad x(r) = \int_{r^*}^r \frac{dr}{f(r)} \quad (2-93)$$

con  $r^* \in (r_i, r_{i+1})$ . De esta definición vemos que (2-92) toma la forma

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} = f(r)[-dt^2 + dx^2], \quad t, x \in (-\infty, \infty), \quad (2-94)$$

en donde hemos asumido por simplicidad<sup>17</sup> que  $f(r) > 0$  en  $(r_i, r_{i+1})$  y  $r_i, r_{i+1}$  son raíces de  $f(r) = 0$ . Vemos que a través de la coordenada  $x$  de Regge-Wheeler llegamos inmediato a la conclusión que en el espacio  $(t, x)$ ,  $g$  es conformalmente plana. A través de nuevas coordenadas  $u = t - x$ ,  $v = t + x$ , vemos que  $g$  toma la forma

$$g = -f(r)dudv, \quad (2-95)$$

y la transformación  $u = \tan U$ ,  $v = \tan V$  implica

$$g = -\frac{f(r)}{\cos^2 U \cos^2 V} dU dV. \quad (2-96)$$

Finalmente a través de  $U = T - X$ ,  $V = T + X$  la métrica  $g$  en (2-96) toma la forma  $g = \Omega^2 \eta$  i.e.  $g$  es conformalmente plana en una región  $(T, X)$  apropiada. Entonces concluimos que a través de la coordenada de Regge-Wheeler llegamos de manera rápida a que la métrica  $g$  en (2-92) es conformalmente plana.

---

<sup>17</sup>Claramente  $x$  también está bien definido por el caso en que  $f(r) < 0$  en  $(r_i, r_{i+1})$ .

# 3 Extensión de Espacios-Tiempos

En el capítulo anterior introducimos los diagramas conformes de Carter-Penrose por una familia de espacios-tiempos bidimensionales  $(\mathbf{M}, g)$  con  $g$  escrita como en (2-1) y construimos una colección de diagramas conformes para la región correspondiente entre dos ceros consecutivos no-degenerados ó entre un cero no degenerado y región asintótica de la función  $f$ .

Como hemos mencionado en la sección (2,1), los espacios-tiempos  $(\mathbf{M}, g)$  que estudiamos tienen la propiedad patológica que son geodésicamente incompletos<sup>1</sup> i.e. las geodésicas corren a la frontera de  $(\mathbf{M}, g)$  en una cantidad finita del parámetro afín. En esta sección corregimos esta patología<sup>2</sup>. Este capítulo tiene como objetivo pegar varios de estos espacios-tiempos de 2 dimensiones de manera que el espacio tiempo resultante tenga completez geodésica (excepto las geodésicas que corren a singularidad, ver pie de nota 2). En este proceso la estructura de los diagramas conformes será de importancia. Nuestra extensión será a través de dos maneras distintas, la primera es mediante las coordenadas de Eddington-Finkelstein (EF) y la segunda a través de las coordendas de Kruskal. Como veremos la extensión a través de EF aunque matemáticamente simple el espacio-tiempo resultante tiene deficiencias y para remover estas deficiencias apelamos a la extensión usando coordenadas de Kruskal.

## 3.1. Extensión de Espacios-Tiempos vía coordenadas de Eddington-Finkelstein

Empezamos con el espacio-tiempo  $(\mathbf{M}, g_1)$  definido por

$$g_1 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad r_3 < r < r_4 \quad (3-1)$$

---

<sup>1</sup>En algunos casos la geometría  $(\mathbf{M}, g)$  es singular como Schwarzschild interior ó Reissner-Nordström en  $r = 0$ .

<sup>2</sup>Por el caso de espacios-tiempos que exhiben singularidades en la curvatura no podemos extenderlos “a través” de la singularidad.

$$f > 0 \quad \forall \quad r \in (r_3, r_4), \quad f(r_3) = f(r_4) = 0, \quad (3-2)$$

con  $f$  como en (2-3) (véase Fig.(2-1)). Como hemos visto en el capítulo anterior el diagrama conforme por tal  $(\mathbf{M}, g_1)$  corresponde a un diamante completo (véase Fig.(3-1a)). Por las necesidades de esta sección introducimos nuevas coordenadas  $(v, r')$  referidas como coordenadas “entrantes” de Eddington-Finkelstein [1-3] dadas por

$$v = t + \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')}, \quad \Rightarrow \quad dv = dt + \frac{dr}{f(r)}, \quad r' = r, \quad \Rightarrow \quad dr' = dr \quad (3-3)$$

donde  $r^* \in (r_3, r_4)$ . Debido que

$$dt = dv - \frac{dr}{f(r)}, \quad dt^2 = dv^2 + \frac{dr^2}{f^2(r)} - \frac{2}{f(r)}dvdr \quad (3-4)$$

$$-f(r)dt^2 = -f(r)dv^2 - \frac{dr^2}{f(r)} + 2dvdr, \quad (3-5)$$

la métrica (3-1) en términos de las coordenadas “entrantes”  $(v, r)$  de EF toma la forma

$$g_1 = -f(r)dv^2 + 2drdv, \quad -\infty < v < \infty, \quad r_3 < r < r_4. \quad (3-6)$$

y este<sup>3</sup>  $g$  ahora es regular en  $[r_3, r_4]$  i.e incluso en  $r_3$  y  $r_4$ . Una repetición del cálculo en la sección (2,1,1) muestra que las geodésicas nulas al respecto de (3-6) satisfacen

$$\frac{dv}{d\lambda} = 0, \quad \frac{dr}{d\lambda} = -E \quad (3-7)$$

ó

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{2E}{f(r)}, \quad \frac{dr}{d\lambda} = E, \quad (3-8)$$

en donde  $E$  es constante y  $\lambda$  es el parámetro afín. Tomando sin pérdida de generalidad  $E = 1$ , la solución de (3-7) es  $v = cte$  y  $r(\lambda) = -\lambda$ , con  $\hat{u} = -\frac{\partial}{\partial r}$  el vector tangente de estas geodésicas entrantes. Parametrizando estas geodésicas entrantes de manera que  $-\infty < v < \infty$  y tomando  $-r$  como el parámetro afín, se ve que se extienden hasta que se cruzan  $r = r_3$  y esta propiedad es útil porque extendemos el espacio-tiempo. Las soluciones de (3-8) que describen geodésicas salientes no tienen un comportamiento simple, pero aquí no vamos a ocuparnos.

Extendemos  $M$  en (3-6) tomando  $-\infty < v < \infty$ ,  $r_2 < r \leq r_4$  y denotamos la variedad resultante todavía con  $M$ . Apelando a la gráfica de la función  $f$  en la Fig.(2-1) y en particular

---

<sup>3</sup>Por conveniencia en (3-6) escribimos  $dr$  en lugar de  $dr'$  y esta convención la usaremos en otras ocasiones.

usando la forma de  $f$  en el intervalo  $[r_2, r_3]$ , introducimos a la variedad extendida la métrica como<sup>4</sup>

$$g_1 = -f(r)dv^2 + 2drdv, \quad -\infty < v < \infty, \quad r_3 \leq r < r_4. \quad (3-9)$$

$$g_1 = |f(r)|dv^2 + 2drdv, \quad -\infty < v < \infty, \quad r_2 < r \leq r_3. \quad (3-10)$$

El espacio-tiempo  $(\mathbf{M}, g_1)$  con  $g_1$  como en (3-9) y (3-10) es una extensión suave del  $(\mathbf{M}, g_1)$  en (3-6).

Ahora consideramos el espacio-tiempo  $(\mathbf{M}, g_2)$  escrito por

$$g_2 = |f(r)|dt^2 - \frac{dr^2}{|f(r)|}, \quad -\infty < t < \infty, \quad r_2 < r < r_3 \quad (3-11)$$

$$f(r) < 0 \quad \forall \quad r \in (r_2, r_3), \quad f(r_2) = f(r_3) = 0, \quad (3-12)$$

i.e.  $f(r)$  es el tramo de la función  $f$  en la Fig.(**2-1**) definida en  $(r_2, r_3)$ . Mostramos<sup>5</sup> que  $g_2$  esta relacionado con  $g_1$  en (3-10) a través de un cambio de coordenadas. Para esto definimos las coordenadas de EF  $(\hat{v}, \hat{r})$  asociadas a (3-11) como

$$\hat{v} = \int_{r^*}^r \frac{dr'}{|f(r')|} + t, \quad d\hat{v} = \frac{dr}{|f(r)|} + dt, \quad \hat{r} = r, \quad d\hat{r} = dr, \quad (3-13)$$

$$dt = d\hat{v} - \frac{dr}{|f(r)|}, \quad dt^2 = d\hat{v}^2 + \frac{dr^2}{|f^2(r)|} - \frac{2}{|f(r)|}d\hat{v}dr \quad (3-14)$$

$$|f(r)|dt^2 = |f(r)|d\hat{v}^2 + \frac{dr^2}{|f(r)|} - 2d\hat{v}dr \quad (3-15)$$

y por tales  $(\hat{v}, r)$ ,  $g_2$  toma la forma

$$g_2 = |f(r)|d\hat{v}^2 - 2d\hat{v}dr, \quad -\infty < \hat{v} < \infty, \quad r_2 < r < r_3. \quad (3-16)$$

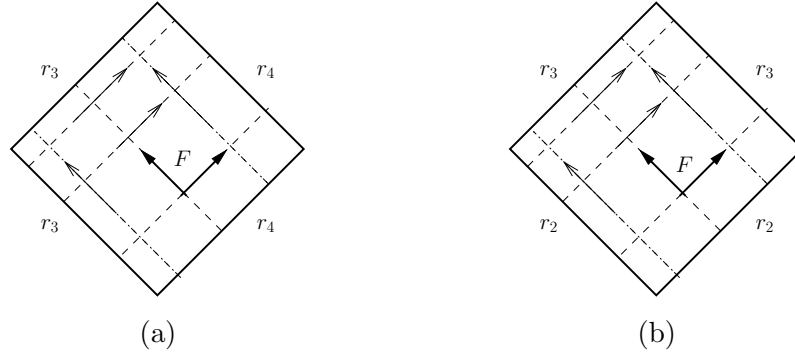
Claramente  $g_2$  es regular incluso sobre las fronteras  $r_2, r_3$ . Por esta métrica las Ecs. geodésicas nulas satisfacen

$$\frac{d\hat{v}}{d\lambda} = 0, \quad \frac{dr}{d\lambda} = -E \quad (3-17)$$

---

<sup>4</sup>Nótese que la función  $g(r) = \begin{cases} |f(r)|, & r_2 < r \leq r_3 \\ -f(r), & r_3 \leq r < r_4 \end{cases}$  es suave en  $r = r_3$ , de hecho es analítica si  $f(r)$  es analítica en  $r = r_3$ .

<sup>5</sup>En una descripción más rigurosa encajamos el espacio-tiempo  $(\mathbf{M}, g_2)$  en (3-11) al interior del  $(\mathbf{M}, g)$  definido por (3-9) y (3-10).



**Figura 3-1:** La figura (a) corresponde al diagrama asociado a la geometría  $g_1$  en (3-1) mientras que la figura (b) muestra el diagrama del espacio-tiempo  $g_2$  en (3-9). Antes del pegamiento del diagrama (b) al tope de (a) cambiamos la orientación del tiempo, implicando que las flechas en (b) se inviertan.

$$\frac{d\hat{v}}{d\lambda} = \frac{2E}{|f(r)|}, \quad \frac{dr}{d\lambda} = E. \quad (3-18)$$

Las ecs.(3-17) tiene como soluciones  $\hat{v} = cte$ ,  $r(\lambda) = -\lambda$  mientras que (3-18) describe el comportamiento por las geodésicas salientes. La familia  $\hat{v} = cte$ ,  $r(\lambda) = -\lambda$ , con  $-\infty < \hat{v} < \infty$  y  $-r$  el parámetro afín se extiende hasta  $r = r_3$  y esta propiedad de las geodésicas entrantes es importante. Nos dice que estas geodésicas pueden considerarse como la continuación de las geodésicas entrantes definidas por (3-7). Para ver esto consideramos un cambio de coordenadas dado por  $\hat{v} \rightarrow -v$  en (3-16),  $g_2$  toma la forma

$$g_2 = |f(r)|dv^2 + 2dvdr, \quad -\infty < v < \infty, \quad r_2 < r \leq r_3, \quad (3-19)$$

entonces  $(M, g_2)$  es una variedad abierta del  $(M, g_1)$  definido por (3-9) y (3-10). Esto implica que los espacios-tiempos  $(M_1, g_1)$  y  $(M_2, g_2)$  definidas por (3-1) y (3-11) inicialmente desconectados entre sí ya no lo son, i.e. mediante las coordenadas de EF los hemos pegado a lo largo de  $r = r_3$ .

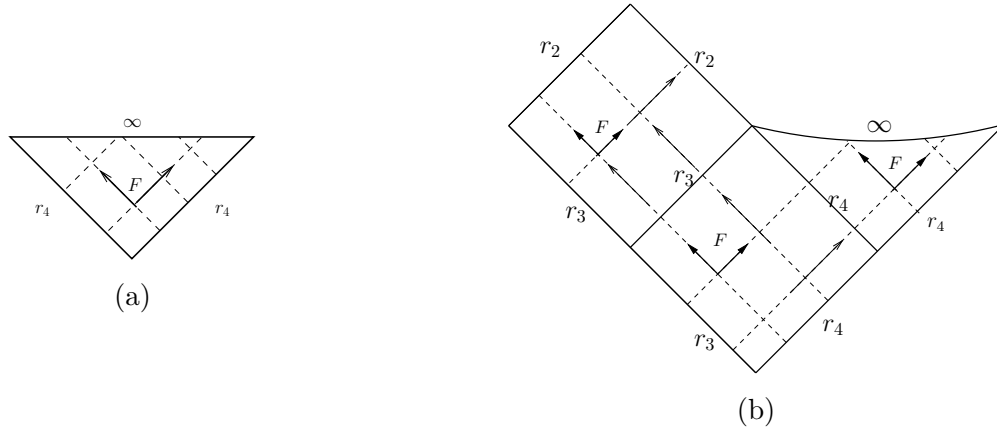
Aun el análisis anterior muestra que los espacios-tiempos definidos por (3-1) y (3-11) se pegan a través de las coordenadas  $(v, r)$  a lo largo de  $r = r_3$  de manera que la métrica  $g$  por el espacio-tiempo resultante esta escrita por (3-9) y (3-10), desde el punto de vista de los diagrams conformes el pegamiento tiene deficiencias<sup>6</sup>. Mostraremos en la sección próxima

<sup>6</sup>Vemos las coordenadas de EF  $(v, r)$   $-\infty < v < \infty$ ,  $r \in (r_3, r_4)$  definidas en el diagrama (a) de la Fig.(3-1) y las coordenadas  $(v, r)$ ,  $-\infty < v < \infty$ ,  $r \in (r_2, r_3)$  definidas en el diagrama (b) de la Fig.(3-1) hemos pegado los diagramas como en Fig.(3-2). Las geodésicas nulas entrantes dirigidas hacia el futuro estan bien definidas y son suaves a través de  $r = r_3$ . Pero debemos de estar enterados que la variedad resultante tiene un hoyo denotado por  $A$  en la Fig.(3-2) que representa el “punto” en que las tres curvas nulas  $r = r_3$



$$f(r) < 0, \quad r \in (r_4, \infty), \quad f(r_4) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')} < \infty. \quad (3-23)$$

(Véase Fig.(2-1)) y el diagrama por tal espacio-tiempo es la mitad de diamante como se muestra en la Fig.(3-3a). Aquí introducimos coordenadas de EF salientes por la métrica en (3-22) y la pegamos con (3-21) a lo largo de  $r = r_4$  de la misma manera como el caso anterior. Usando esta mitad de diamante y apelando a Fig.(3-2) pegamos los dos diagramas a lo largo de  $r = r_4$  y tal unión da como resultado el diagrama Fig.(3-3b). De este diagrama vemos que las geodésicas nulas salientes que empiezan en  $r_3$  son completas a futuro, es decir, el parámetro afín corre en el intervalo  $(r_3, \infty)$ .



**Figura 3-3:** la Fig.(a) representa el diagrama conforme  $(\mathbf{M}, g)$  con  $g$  dado como en Ec.(3-22). La Fig.(b) muestra el pegado de este diagrama con el diagrama en Fig.(3-2) a lo largo de  $r_4$ . Por razones de representación las fronteras  $r \rightarrow \infty$  las representamos con una línea curva.

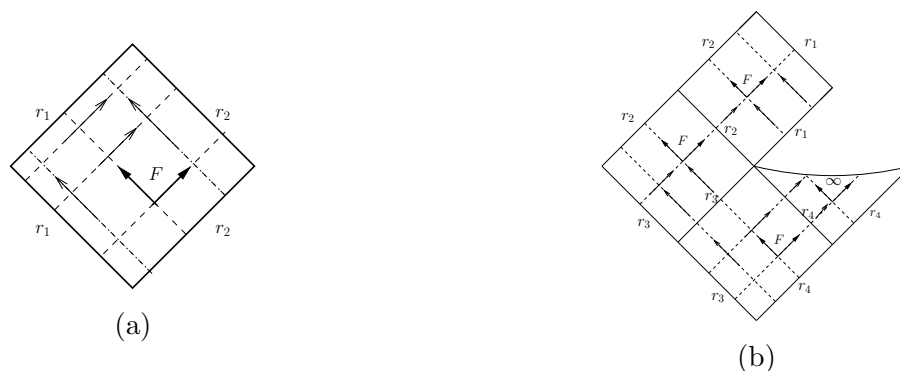
La estructura del diagrama en Fig.(3-3b) sugiere pegar a lo largo de  $r_2$  el diagrama por el espacio-tiempo

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad r_1 < r < r_2, \quad (3-24)$$

cuyo diagrama es un diamante completo como muestra la Fig.(3-4a). El pegamiento de este diamante con el tope de la Fig.(3-3b) resulta en la Fig.(3-4b).

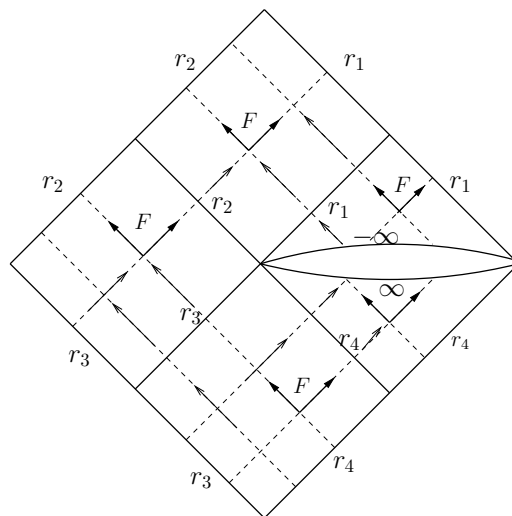
En la Fig. (3-4b) ahora pegamos a lo largo de  $r_1$  el diagrama que corresponde a

$$g = |f(r)|dt^2 - \frac{dr^2}{|f(r)|}, \quad -\infty < t < \infty, \quad -\infty < r < r_1 \quad (3-25)$$



**Figura 3-4:** La Fig.(a) muestra el mapeo del espacio-tiempo  $(\mathbf{M}, g)$  con  $g$  dado en (3-24). La Fig.(b) muestra el pegado de 4 diagramas conformes a través de las coordenadas EF entrantes y salientes por la función  $f$  como en Ec.(2-3).

y tal pegamiento nos lleva al diagrama de la Fig.(3-5).



**Figura 3-5**

Claramente continuamos este proceso y llegamos al diagrama de la Fig.(3-6).

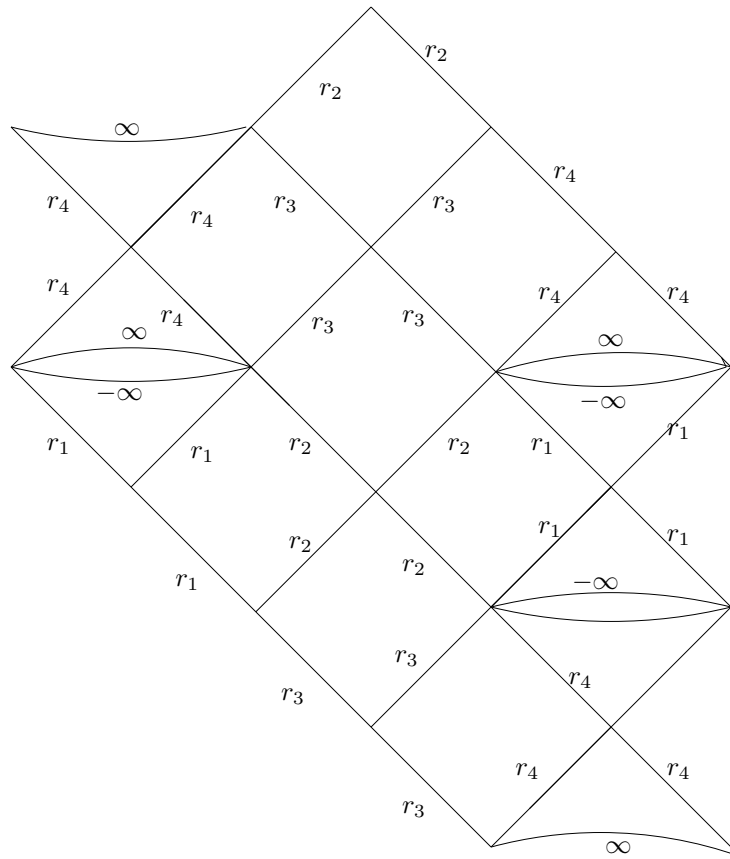


Figura 3-6

Hay un numero de comentarios al respecto de la estructura de este diagrama.

Se representa la extención maximal del eje de rotación por la familia de espacios-tiempos de KdS.

Exhibe infinitas regiones asintóticas indicadas por  $r \rightarrow \pm\infty$ .

El diagrama se extiende a todos lados: arriba, abajo, izquierda, derecha.

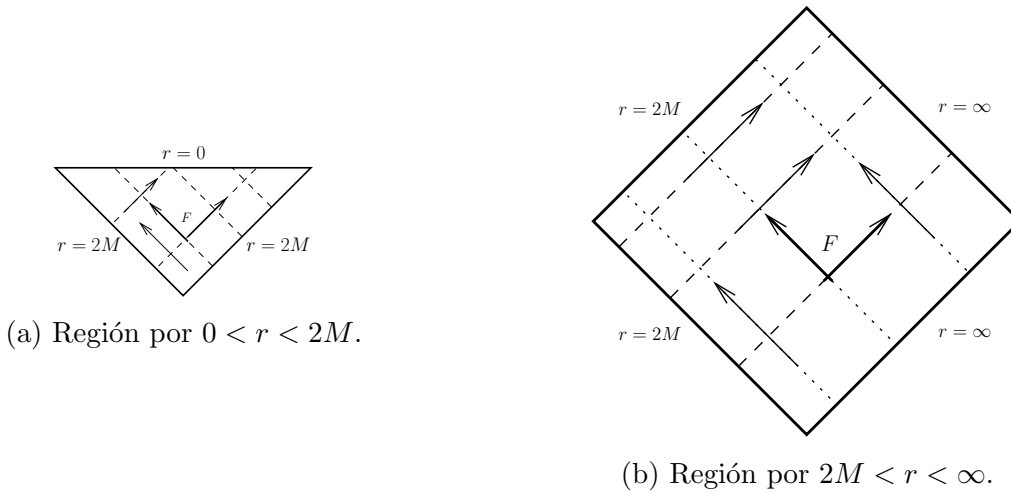
Para su construcción hemos usado los 5 espacios-tiempos  $(\mathbf{M}, g)$  definidos por  $f$  en (2-3) Fig.(2-1).

Ofrece un laboratorio teórico para estudiar propiedades de la singularidad del anillo del espacio-tiempo de KdS.

## 3.2. Extensión Maximal de la solución de Schwarzschild

El diagrama que obtuvimos en la Fig.(3-5) fue basado en la función  $f$  definida en Ec.(2-3) con gráfica Fig.(2-1). Pero en realidad el procedimiento de pegamiento se aplica también por las otras funciones  $f$  definidas en el capítulo anterior. En esta sección discutimos brevemente la extensión de la geometría exterior de Schwarzschild de masa  $M$  positiva y también la geometría de Schwarzschild por  $M < 0$ .

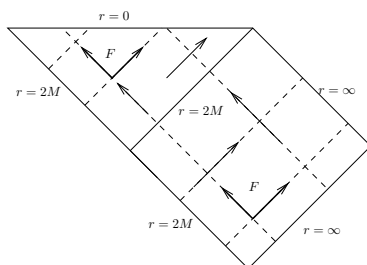
Por la primera construcción empezamos con los espacios-tiempos en (2-54) y (2-55), cuyos diagramas conformes son los diamantes en las Figs.(3-7a) y (3-7b). A través de las coordenadas de Eddington-Finkelstein pegamos estas dos geometrías sobre  $r = 2M$  como lo hicimos en la sección anterior y no vamos a repetir este análisis aquí.



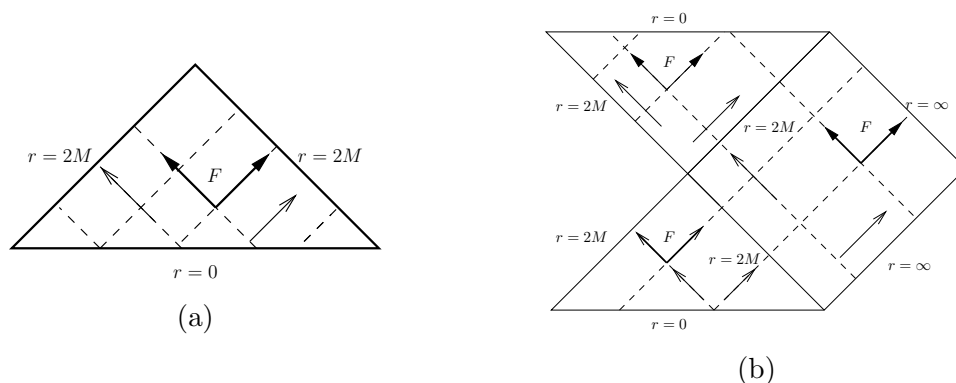
**Figura 3-7:** Compactificación del espacio-tiempo de Schwarzschild. La figura (a) mapea la región interior mientras que la figura (b) mapea la región exterior.

El pegamiento de estos diamantes nos da la Fig.(3-8). En seguida pegamos el diamante de la Fig.(3-9a) con la parte inferior de Fig.(3-8) a través de  $r = 2M$  obtenemos el diagrama en Fig.(3-9b).

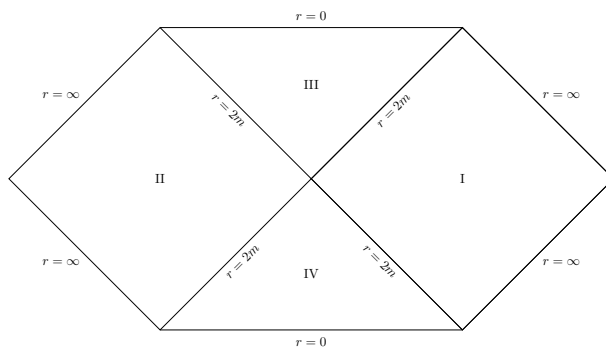
En el último paso tomamos el diamante en la Fig.(3-7b) y hacemos una rotación a través del eje vertical, el diagrama resultante lo pegamos a la Fig.(3-9b) obteniendo el diagrama indicado en Fig.(3-10). Este diagrama representa la extensión maximal del hoyo negro de Schwarzschild. Vemos que en comparación del diagrama que representa la extensión maximal del eje de rotación de KdS, la estructura del diagrama (3-10) es mucho más simple. Hay dos regiones ( $I, II$ ) referidas como asintóticamente planas hay una región que representa el interior del hoyo negro y una región que representa el hoyo blanco.



**Figura 3-8:** Espacio-Tiempo de Schwarzschild extendido en la dirección de las geodésicas nulas entrantes hasta la singularidad de curvatura en  $r = 0$ . La líneas punteadas representan geodésicas nulas.



**Figura 3-9:** Mapeo del espacio-tiempo de Schwarzschild interior, aquí vemos una diferencia con la Fig.(3-7a) donde como mencionamos anteriormente a través de rotaciones o reflexiones podemos cambiar el diamante o mitad de diamante, esta elección se hace debido a la orientabilidad del espacio-tiempo. Pegado de los diagramas Figs.(3-8) y (3-9a) a través de las coordenadas de Eddington-Finkelstein a lo largo de  $r = 2M$ .



**Figura 3-10:** Espacio-Tiempo de Schwarzschild maximalmente extendido.

### 3.3. Diagrama Conforme por Reissner-Nordström no Extremo

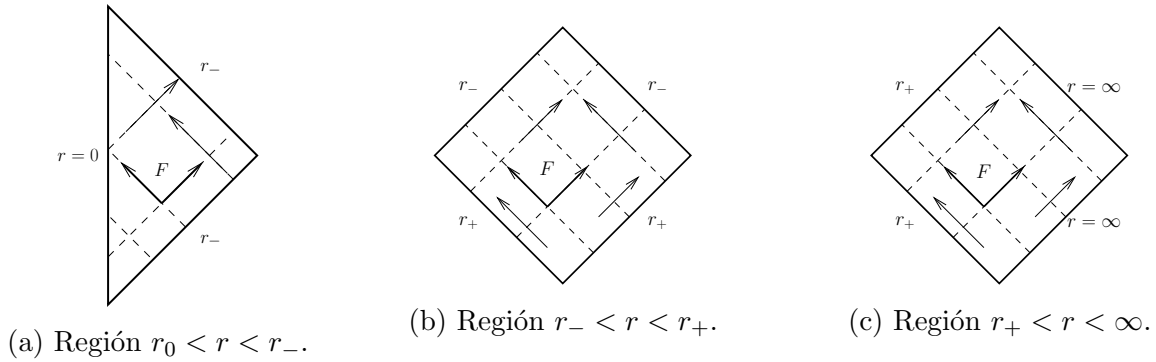
Otra extensión maximal que consideramos corresponde al hoyo negro no extremo de Reissner-Nordström. Como hemos discutido en la sección 2.1 la geometría tiene la forma

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} \quad (3-26)$$

con

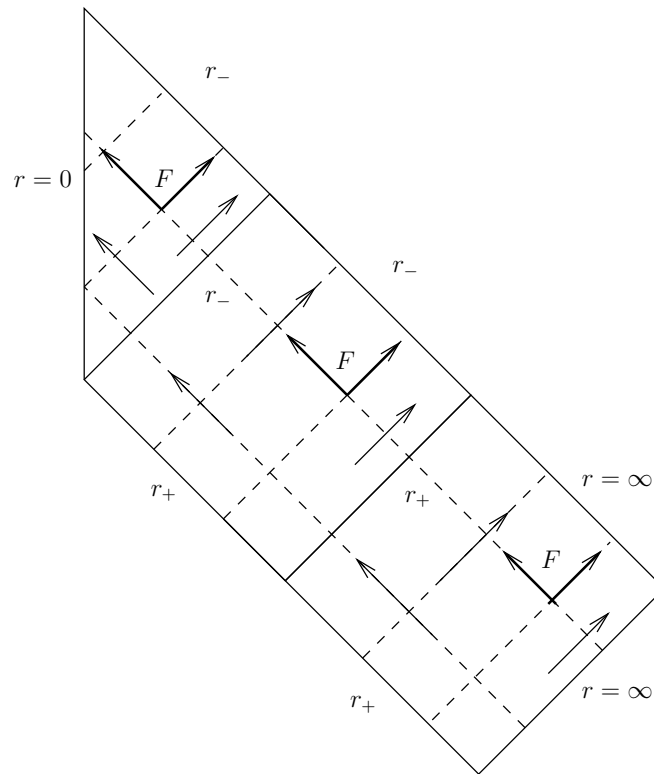
$$f(r) = \frac{\Delta(r)}{r^2}, \quad \Delta(r) = r^2 - 2Mr + Q^2, \quad M^2 > Q^2, \quad (3-27)$$

(véase Fig.(2-6b)). Como hemos visto existen tres diagramas distintos como en la Fig.(3-11).

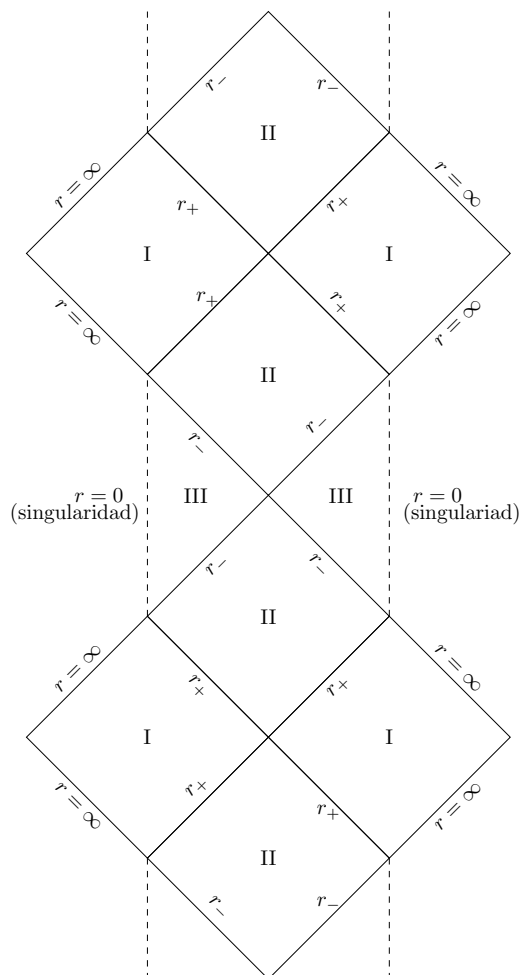


**Figura 3-11:** Las figuras muestran los diagramas conformes por la geometría de Reissner-Nordström con  $M^2 > Q^2$ . La figura (2-6) ilustra las tres regiones.

Pegamos estos diamantes de manera que genere Fig.(3-12) y el próximo paso es pegar otro diamante de la manera que hemos discutido anteriormente llegando eventualmente al diagrama Fig.(3-13).



**Figura 3-12:** Este Diagrama representa la unión de los tres espacios-tiempos inicialmente desconectados de Reissner-Nordström. Las líneas punteadas representan geodésicas nulas “entrantes” que vienen de la region asintótica  $r = \infty$  y llegan hasta la singularidad  $r = 0$ . Esta extensión solo es en una dirección, por tal motivo no es maximal, falta ver el comportamiento de geodésicas nulas “entrantes” que no hemos dibujado.



**Figura 3-13:** Diagrama de Carter-Penrose maximalmente extendido para el espacio-tiempo de Reissner-Nordström ( $M^2 > Q^2$ ).

Este diagrama parece mas complejo que el diagrama por Schwarzschild, pero no tan complejo como el diagrama sobre el eje de rotación por KdS. El diagrama se extiende arriba y abajo pero no a la izquierda o derecha. Existen infinitas regiones asintóticas indicadas por  $r = \infty$ .

### 3.4. Extensión vía coordenadas de Kruskal

En esta sección introducimos nuevas coordenadas referidas como coordenadas nulas de Kruskal que hacen este pegamiento mas completo en comparación con el pegamiento en coordenadas de EF. Nuestro tratamiento sigue las ideas de las ref. [10, 11].

Comenzamos otra vez con la geometría dada por

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad r_3 < r < r_4, \quad (3-28)$$

donde  $f(r) > 0 \quad \forall \quad r \in (r_3, r_4)$  y  $r_3, r_4$  son raíces simples<sup>7</sup> de  $f$  (véase (2-3) y Fig.(2-1)). También aquí introducimos las coordenadas  $(u, v)$  vía

$$u = t - \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')}, \quad v = t + \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')}, \quad (3-29)$$

implicando que

$$g = -f(r)dudv, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty. \quad (3-30)$$

A continuación introducimos las coordenadas nulas<sup>8</sup> de Kruskal  $(U, V)$  de la siguiente manera

$$U = -e^{-cu}, \quad V = e^{cv}, \quad (3-31)$$

con  $c$  una constante por definirse<sup>9</sup>. De esta definición se sigue

$$dU = ce^{-cu} du, \quad dV = ce^{cv} dv, \quad dUdV = c^2 e^{c(v-u)} dudv, \quad (3-32)$$

entonces  $g$  en (3-30) toma la forma

$$g = -\frac{f(r)}{c^2 e^{c(v-u)}} dUdV, \quad (3-33)$$

en donde el rango de  $(U, V)$  es por determinarse. Por otro lado apelando a (3-29) tenemos

<sup>7</sup>Enfatizamos que el análisis que sigue demanda que  $f$  tenga cero simple en  $r = r_3$  pero a partir de esta restricción el análisis es independiente de la forma de  $f$  (excepto que  $f$  es suficientemente suave).

<sup>8</sup>Notamos que hay una libertad multiplicativa en la definición de  $U$  y  $V$  y mas adelante discutiremos sobre esto.

<sup>9</sup>Es importante aquí aclarar el siguiente punto. El espacio-tiempo definido por (3-30) es el interior del diamante (a) en la Fig.(3-1). Las coordenadas de Kruskal  $(U, V)$  mapean el interior de este diamante a una región  $(-\infty, 0] \times [0, \infty)$  como mostraremos más adelante (véase ec.(3-43)). Pero las coordenadas  $(\hat{U}, \hat{V})$  definidas en (3-61) son las que en realidad llevan los infinitos del espacio en (3-30) a distancia finita. Es a través de las coordenadas  $(\hat{U}, \hat{V})$  en donde el diamante (a) de la Fig.(3-1) esta encajado en la región (I) de la Fig.(3-14). Como mostraremos más adelante pegaremos 4 diamantes completos a lo largo de la línea  $r = r_3$ .

$$v - u = 2 \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')}, \quad (3-34)$$

y la asunción que  $r_3$  es raíz simple nos permite escribir  $f(r) = (r - r_3)H(r) \quad \forall \quad r \in [r_3, r_4]$ , con  $H$  es una función regular en  $[r_3, r_4]$  la cual satisface  $\frac{df}{dr}|_{r_3} = H(r_3) > 0$ . Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(r)} &= \frac{1}{(r - r_3)H(r_3)} + \frac{1}{f(r)} - \frac{1}{(r - r_3)H(r_3)} \\ &= \frac{1}{(r - r_3)H(r_3)} + \frac{1}{(r - r_3)H(r)} - \frac{1}{(r - r_3)H(r_3)} \\ &= \frac{1}{(r - r_3)H(r_3)} + \frac{H(r_3) - H(r)}{(r - r_3)H(r)H(r_3)} \\ &= \frac{1}{(r - r_3)H(r_3)} + \frac{(r - r_3)G(r)}{(r - r_3)H(r)H(r_3)} \\ &= \frac{1}{(r - r_3)H(r_3)} + \frac{G(r)}{H(r)H(r_3)}, \end{aligned} \quad (3-35)$$

lo cual implica

$$\int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')} = \frac{\ln(r - r_3)}{H(r_3)} + F(r) \quad (3-36)$$

con

$$F(r) = -\frac{\ln(r^* - r_3)}{H(r_3)} + \int_{r^*}^r \frac{G(r)}{H(r)H(r_3)} dr' = \frac{1}{H(r_3)} \left[ -\ln(r^* - r_3) + \int_{r_3}^r \frac{G(r)}{H(r)} dr' + C \right] \quad (3-37)$$

$$F(r) = \frac{1}{H(r_3)} \int_{r_3}^r \frac{G(r) dr'}{H(r)}, \quad (3-38)$$

en donde al pasar de (3-38) usamos el hecho que  $r^*$  es arbitrario,  $G(r)$  es regular en  $r = r_3$  y hemos despreciado términos constantes. De esta manera tenemos

$$v - u = 2 \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')} = \frac{2}{H(r_3)} \left[ \ln(r - r_3) + \int_{r_3}^r \frac{G(r')}{H(r')} dr' \right]. \quad (3-39)$$

Fijando  $c$  como  $c = \frac{H(r_3)}{2} > 0$  y regresando a (3-33) tenemos

$$g = -\frac{(r - r_3)H(r)}{c^2 e^{\ln(r - r_3) + \int_{r_3}^r \frac{G(r')}{H(r')} dr'}} dU dV = -\frac{4H(r)}{[H(r_3)]^2} e^{-\int_{r_3}^r \frac{G(r')}{H(r')} dr'} dU dV \quad (3-40)$$

$$UV = -(r - r_3)e^{\int_{r_3}^r \frac{G(r')}{H(r')} dr'}, \quad r \geq r_3 \quad (3-41)$$

$$f(r) = (r - r_3)H(r), \quad H(r_3) = \left. \frac{df(r)}{dr} \right|_{r_3} > 0. \quad (3-42)$$

Debido que  $c = \frac{H(r_3)}{2} > 0$ , se sigue de (3-31) que los rangos de  $U, V$  son

$$-\infty < U \leq 0, \quad 0 \leq V < \infty. \quad (3-43)$$

De (3-40) y (3-41) concluimos que  $g$  puede extenderse hasta  $r = r_3$  como

$$g \Big|_{r_3} = -\frac{4}{H(r_3)} dU dV, \quad UV \Big|_{r_3} = 0, \quad (3-44)$$

y en general tenemos

$$g = -\frac{4H(r)}{[H(r_3)]^2} e^{-\int_{r_3}^r \frac{G(r')}{H(r')} dr'} dU dV, \quad r \in [r_3, r_4), \quad -\infty < U \leq 0, \quad 0 \leq V < \infty. \quad (3-45)$$

Este  $g$  describe la geometría al interior del diamante de la Fig.(**3-1**) pero también describe la geometría sobre la frontera  $r = r_3$ . En particular como (3-44) indica que  $g$  es regular en el punto  $A$  con  $U = V = 0$ . Aquí vemos como las coordenadas nulas definidas en (3-31) evitan el problema de la extensión a través de las coordenadas de EF.

Consideramos enseguida el espacio-tiempo con la métrica

$$g = |f(r)| dt^2 - \frac{dr^2}{|f(r)|}, \quad -\infty < t < \infty, \quad r_2 < r < r_3 \quad (3-46)$$

con  $f(r) < 0$  en  $(r_2, r_3)$ . Sea ahora, las coordenadas  $(u, v)$  como

$$u = \int_{r^*}^r \frac{dr'}{|f(r')|} - t, \quad v = \int_{r^*}^r \frac{dr'}{|f(r')|} + t \quad (3-47)$$

las cuales implican que (3-46) toma la forma:

$$g = -|f(r)| dudv, \quad -\infty < u, v < \infty. \quad (3-48)$$

Por esta métrica, definimos las coordenadas nulas de Kruskal de la siguiente manera

$$U = e^{-cu}, \quad V = e^{-cv}, \quad (3-49)$$

en donde  $c$  es una constante por determinarse. Al respecto de las nuevas coordenadas  $(U, V)$   $g$  toma la forma

$$g = -\frac{|f(r)|}{c^2 e^{-c(u+v)}} dU dV = -\frac{|f(r)|}{c^2} e^{c(u+v)} dU dV. \quad (3-50)$$

Por otro lado de la definición de  $(u, v)$  en (3-47) tenemos

$$u + v = 2 \int_{r^*}^r \frac{dr'}{|f(r')|} = 2 \int_{r^*}^r \frac{dr'}{(r_3 - r')H(r_3)} + 2 \int_{r^*}^r \frac{G(r')}{H(r')H(r_3)} = \quad (3-51)$$

$$= 2 \left[ -\frac{\ln(r_3 - r)}{H(r_3)} + \frac{\ln(r_3 - r^*)}{H(r_3)} + \int_{r^*}^r \frac{G(r')}{H(r')H(r_3)} \right], \quad (3-52)$$

en donde

$$|f(r)| = (r_3 - r)H(r), \quad H(r_3) - H(r) = (r_3 - r)G(r), \quad H(r_3) = -\left. \frac{d|f(r)|}{dr} \right|_{r_3} > 0, \quad r < r_3. \quad (3-53)$$

Fijando  $c = \frac{H(r_3)}{2} > 0$  y siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior re-escribimos (3-50) como

$$g = -\frac{4H(r)}{[H(r_3)]^2} e^{\int_{r_3}^r \frac{G(r')}{H(r')} dr'} dU dV, \quad r_2 < r \leq r_3, \quad (3-54)$$

en donde

$$UV = (r_3 - r) e^{-\int_{r_3}^r \frac{G(r')}{H(r')} dr'}, \quad r \leq r_3. \quad (3-55)$$

Por el hecho que  $c = \frac{H(r_3)}{2} > 0$ , se sigue de (3-49) que los rangos de  $(U, V)$  son

$$0 \leq U < \infty, \quad 0 \leq V < \infty, \quad (3-56)$$

en suma evaluando (3-54) en  $r_3$  tenemos

$$g \Big|_{r_3} = -\frac{4}{H(r_3)} dU dV, \quad UV \Big|_{r_3} = 0 \quad (3-57)$$

Una comparación entre (3-57) y (3-44) muestra que las métricas  $g$  coinciden sobre  $UV \Big|_{r_3} = 0$  y en análogo de (3-45) ahora tiene la forma

$$g = -\frac{4H(r)}{[H(r_3)]^2} e^{-\int_{r_3}^r \frac{G(r')}{H(r')} dr'} dU dV, \quad r \in (r_2, r_3], \quad 0 \leq U < \infty, \quad 0 \leq V < \infty. \quad (3-58)$$

Del lado derecho de (3-55) y (3-41) vemos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} (UV) \right|_{r_3} = -1, \quad (3-59)$$

y por el teorema de la función implícita que  $r = r(UV)$  al menos en una vecindad de  $r = r_3$ . Por otro lado bajo  $(U, V) \rightarrow (-U, -V)$ , la función  $r(UV)$  permanece invariante y esta mapa es una isometría. Esto implica que podemos extender el rango de  $U, V \in (0, \infty) \times (0, \infty)$  a  $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$  y escribimos la métrica  $g$  en la forma

$$g = g(r)dUdV, \quad r \in [r_2, r_3], \quad (U, V) \in (-\infty, \infty), \quad (3-60)$$

con  $g(r)$  una función la cual inferimos de (3-45) y (3-58) la cual es suave en  $r = r_3$ .

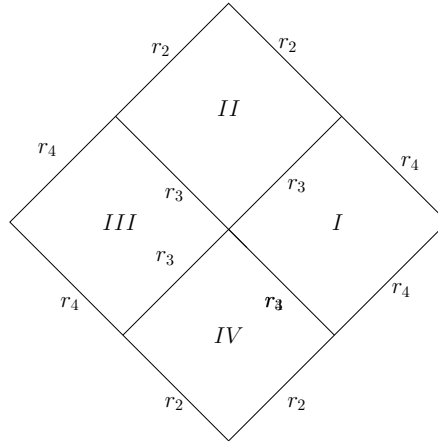
Introduciendo nuevas coordendas  $(\hat{U}, \hat{V})$  dadas por

$$U = \tan \hat{U}, \quad V = \tan \hat{V}, \quad (3-61)$$

tenemos de (3-60)

$$g = \frac{g(r)}{\cos^2 \hat{U} \cos^2 \hat{V}} d\hat{U}d\hat{V}, \quad (\hat{U}, \hat{V}) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3-62)$$

Regresandonos a la teoría del capítulo 2 concluimos que el diagrama conforme por este  $g$  tiene la forma de un diamante completo como se ve en la Fig.(3-14). Ahora consiste de 4 bloques cuya elección respeta la isometría  $(U, V) \rightarrow (-U, -V)$ .



**Figura 3-14:** En esta figura pegamos los diagramas en Fig.(3-1) a lo largo de  $r = r_3$ . La simetría  $(U, V) \rightarrow (-U, -V)$  implica la existencia de las regiones III y IV.

Para ganar mas experiencia con las coordenadas de Kruskal en esta sección construimos  $(U, V)$  por la geometría exterior de Schwarzschild con  $M > 0$ . Por esto, empezamos

$$g = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad 2M < r < \infty. \quad (3-63)$$

tenemos

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} = (r - 2M)\frac{1}{r} = (r - r_1)H(r), \quad H(r) = \frac{1}{r}, \quad r_1 = 2M, \quad (3-64)$$

y introducimos coordenadas  $(u, v)$  como en (3-29).

De (3-35) se sigue que  $H(r) - H(r_1) = (r - r_1)G(r)$  con  $G(r) = \frac{1}{2Mr}$  y de (3-39) nos da

$$v - u = 2 \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')} = \frac{2}{H(r_1)} \int_{r^*}^r \frac{dr'}{(r - r_1)} + 2 \int_{r^*}^r \frac{G(r)}{H(r_1)H(r)} = \quad (3-65)$$

$$= \frac{2}{H(r_1)} [\ln(r - r_1) - \ln(r^* - r_1)] + 2(r - r^*), \quad (3-66)$$

debido que

$$c = \frac{H(r_1)}{2} = \frac{1}{4M} \quad (3-67)$$

sustituimos las expresiones Ecs.(3-67) y (3-66) en (3-33) y obtenemos

$$g = -A \frac{(r - r_1)H(r)}{c^2 e^{\ln(r-r_1) + \frac{r}{2M}}} dU dV = -A \frac{16M^2}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV, \quad r \geq r_1, \quad -\infty < U < 0, \quad 0 < V < \infty. \quad (3-68)$$

donde A es un factor constante y

$$UV = -e^{c(v-u)} = -(r - r_1)e^{\frac{r}{2M}}, \quad r \geq r_1 = 2M. \quad (3-69)$$

Ahora hagamos el mismo análisis por Schwarzschild interior

$$g = \left( \frac{2M}{r} - 1 \right) - \frac{dr^2}{\left( \frac{2M}{r} - 1 \right)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad 0 < r < 2M \quad (3-70)$$

Por tal situación tenemos

$$f = \frac{2M}{r} - 1 = (2M - r)\frac{1}{r} = (r_1 - r)H(r), \quad H(r) = \frac{1}{r}, \quad r_1 = 2M. \quad (3-71)$$

Definimos las coordenadas  $(u, v)$  como en (3-47), donde  $g$  toma la forma

$$g = -f(r)dudv, \quad -\infty < u, v < \infty \quad (3-72)$$

Enseguida damos las coordenadas de Kruskal, definidas como en (3-49) y al respecto de estas coordenadas  $g$  es

$$g = -\frac{f(r)}{c^2} e^{c(u+v)} dU dV \quad (3-73)$$

Ahora busquemos el factor  $u + v$  que viene dado por

$$u + v = 2 \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')} = \frac{2}{H(r_1)} \int_{r^*}^r \frac{dr'}{(r_1 - r')} - 2 \int_{r^*}^r \frac{G(r)}{H(r)H(r_1)} = \quad (3-74)$$

$$= \left[ \frac{2}{H(r_1)} (-\ln(r_1 - r)) - 2r \right] \quad (3-75)$$

definimos  $c$  como en (3-67), por tal elección (3-73) la escribimos como

$$g = -\frac{(r_1 - r)H(r)}{c^2} e^{c(u+v)} dU dV = -A \frac{(r_1 - r)H(r)}{c^2} (r_1 - r)^{-1} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV \quad (3-76)$$

entonces

$$g = -A \frac{16M^2}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV, \quad 0 < r < 2M, \quad 0 < U, V < \infty. \quad (3-77)$$

con

$$UV = e^{-c(u+v)} = (r_1 - r) e^{\frac{r}{2M}}, \quad r \leq 2M. \quad (3-78)$$

Introducimos nuevas coordenadas  $(\bar{U}, \bar{V}) = \left( \frac{U}{\sqrt{r_1}}, \frac{V}{\sqrt{r_1}} \right)$ , de (3-68) y (3-78) tomando  $A = 1$  obtenemos

$$g = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV, \quad r \in (0, \infty) \quad -\infty < U, V < \infty. \quad (3-79)$$

$$UV = -\left( \frac{r}{2M} - 1 \right) e^{\frac{r}{2M}}, \quad r \in (0, \infty) \quad (3-80)$$

en donde por simplicidad escribimos  $(U, V)$  en lugar de  $(\bar{U}, \bar{V})$ . Las fórmulas (3-79) y (3-80) son las fórmulas estándares (véase [1-3]).

Ahora definimos nuevas coordenadas como

$$U = \tan \hat{U}, \quad V = \tan \hat{V}, \quad (3-81)$$

$$dU = \frac{1}{\cos^2 \hat{U}} d\hat{U}, \quad dV = \frac{1}{\cos^2 \hat{V}} d\hat{V}, \quad dU dV = \frac{1}{\cos^2 \hat{U} \cos^2 \hat{V}} d\hat{U} d\hat{V} \quad (3-82)$$

$$g = -\frac{32M^3}{r} \frac{e^{-\frac{r}{2M}}}{\cos^2 \hat{U} \cos^2 \hat{V}} d\hat{U} d\hat{V}, \quad (\hat{U}, \hat{V}) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad r \in (0, \infty) \quad (3-83)$$

definimos

$$\hat{U} = \hat{T} - \hat{X}, \quad \hat{V} = \hat{T} + \hat{X} \quad (3-84)$$

$$d\hat{U} = d\hat{T} - d\hat{X}, \quad d\hat{V} = d\hat{T} + d\hat{X}, \quad d\hat{U}d\hat{V} = d\hat{T}^2 - d\hat{X}^2 \quad (3-85)$$

la métrica es

$$g = \frac{32M^3 e^{-\frac{r}{2M}}}{r} \frac{(-d\hat{T}^2 + d\hat{X}^2)}{\cos^2(\hat{T} - \hat{X}) \cos^2(\hat{T} + \hat{X})}, \quad -\frac{\pi}{2} < \hat{T} < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \hat{X} < \frac{\pi}{2} \quad (3-86)$$

con estas propiedades parece que hemos mapeado a un diamante completo, sin embargo falta tomar en cuenta un detalle, la condición  $r > 0$ . Para esto sabemos que

$$UV = T^2 - X^2 = -\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}} \quad (3-87)$$

observamos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} UV \rightarrow 1, \quad \Rightarrow \quad \tan \hat{U} \tan \hat{V} \rightarrow 1 \quad (3-88)$$

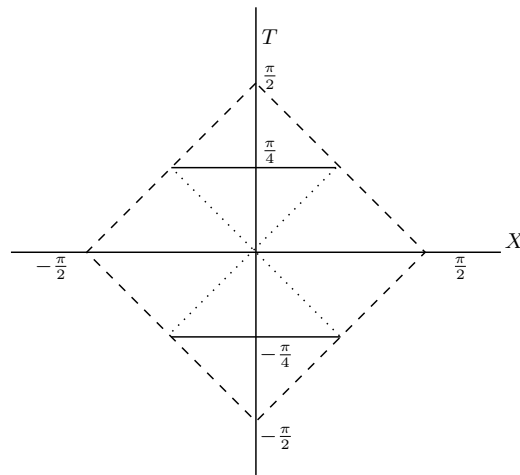
hacemos uso de la identidad

$$\tan(\hat{U} + \hat{V}) = \frac{\tan(\hat{U}) + \tan(\hat{V})}{1 - \tan(\hat{U})\tan(\hat{V})} \quad (3-89)$$

de (3-88) notamos que la identidad (3-89) se va  $\pm\infty$  implicando que  $\hat{U} + \hat{V} \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$ , entonces obtenemos las siguientes relaciones

$$\hat{T} - \hat{X} + \hat{T} + \hat{X} \rightarrow \pm\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{T} = \pm\frac{\pi}{4} \quad (3-90)$$

esta última condición en (3-90) corta al diamante en  $\hat{T} = \pm\frac{\pi}{4}$ , es decir, obtenemos el diamante como en Fig.(**3-15**).



**Figura 3-15:** Diagrama conforme por el hoyo negro de Schwarzschild a través de las coordenadas de Kruskal. Los cortes horizontales nacen de la condición que  $r > 0$  y este diagrama es idéntico con la estructura del diagrama en la Fig.(3-10).

### 3.5. Diagrama Conforme por el Espacio-Tiempo de Sitter

El último diagrama conforme que construimos en esta tesis corresponde al espacio-tiempo de-Sitter. Aún tal espacio-tiempo admite un número de cartas locales (por tal discusión véase [1]), por las necesidades de esta sección consideramos coordenadas locales  $(t, r, \vartheta, \varphi)$  en donde la métrica tiene la forma

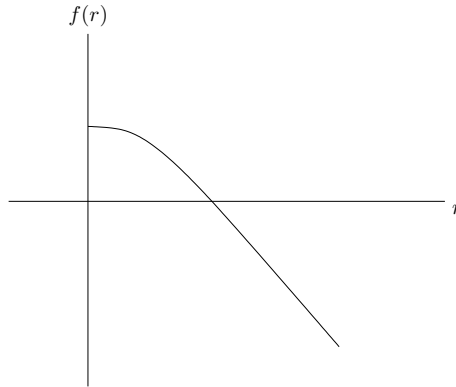
$$g = - \left( 1 - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3-91)$$

donde  $\Lambda > 0$  es la constante cosmológica<sup>10</sup>. Aquí como en los casos anteriores nos concentramos en la 2-métrica del  $(t - r)$  espacio que tiene la forma

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} = - \left( 1 - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)} dr^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad r > 0. \quad (3-92)$$

$$f(r) = 1 - \frac{\Lambda r^2}{3}. \quad (3-93)$$

De la forma de  $f(r)$  tenemos que  $f(r) = 0$  tiene dos raíces en  $r_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$  y debido que  $r > 0$  consideramos solo la raíz  $r_1 = +\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ . Esta raíz define dos espacios-tiempos distintos i.e. uno en la región  $0 < r < r_1$  y el otro en  $r_1 < r < \infty$ .



**Figura 3-16:** Comportamiento de la función  $f$  por el espacio-tiempo de-Sitter. Por tal  $f$  vemos que existen dos regiones desconectadas del espacio-tiempo en las regiones  $0 < r < r_1$  y  $r_1 < r < \infty$ .

Primeramente nos enfocamos en la región  $0 < r < r_1$ , aquí  $f > 0$  y tenemos

<sup>10</sup>Esta métrica es solución de las ecuaciones de Einstein en vacío con constante cosmológica .

$$f(r) = 1 - \frac{\Lambda r^2}{3} = -\frac{\Lambda}{3} \left( r^2 - \frac{3}{\Lambda} \right) = -\frac{\Lambda}{3} \left( r + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right) \left( r - \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right) = \quad (3-94)$$

$$= \frac{\Lambda}{3} \left( \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} - r \right) \left( r + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right) \quad (3-95)$$

$$f(r) = (r_1 - r)H(r), \quad H(r) = \frac{\Lambda}{3} \left( r + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right), \quad r < r_1 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \quad (3-96)$$

de lo cuál se sigue que:

$$\left. \frac{df}{dr} \right|_{r_1} = -H(r_1), \quad H(r_1) = 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (3-97)$$

Haciendo uso de las coordenadas  $(u, v)$  definidas en (3-29) tenemos

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} = -f(r)dudv, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty, \quad 0 < r < r_1 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}. \quad (3-98)$$

Aplicando la teoría del capítulo 2, el diagrama conforme que corresponde a (3-98) llegamos al diagrama  $I$  en la Fig.(3-17). Introducimos las coordenadas nulas de Kruskal  $(U, V)$  como

$$U = -e^{-cu}, \quad V = e^{cv}, \quad (3-99)$$

con  $c$  una constante por definirse, de donde se sigue que  $g$  en (3-98) toma la forma

$$g = -\frac{f(r)}{c^2 e^{c(v-u)}} dU dV. \quad (3-100)$$

Apelando a

$$v - u = 2 \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')}, \quad (3-101)$$

y usando la identidad

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(r)} &= \frac{1}{(r_1 - r)H(r_1)} + \frac{1}{(r_1 - r)H(r)} - \frac{1}{(r_1 - r)H(r_1)} \\ &= \frac{1}{(r_1 - r)H(r_1)} + \frac{(r_1 - r)H(r_1) - (r_1 - r)H(r)}{(r_1 - r)^2 H(r_1)H(r)} \\ \frac{1}{f(r)} &= \frac{1}{H(r_1)} \left[ \frac{1}{(r_1 - r)} + \frac{H(r_1) - H(r)}{(r_1 - r)H(r)} \right], \end{aligned} \quad (3-102)$$

combinado con

$$H(r_1) - H(r) = 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\Lambda}{3}r - \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \frac{\Lambda}{3} \left( \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} - r \right) = \frac{\Lambda}{3}(r_1 - r) \quad (3-103)$$

$$\frac{H(r_1) - H(r)}{(r_1 - r)H(r)} = \frac{\frac{\Lambda}{3}(r_1 - r)}{\frac{\Lambda}{3}(r_1 - r)(r + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}})} = \frac{1}{r + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}} \quad (3-104)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')} &= \frac{1}{H(r_1)} \left[ \int_{r^*}^r \frac{1}{(r_1 - r')} dr' + \int_{r^*}^r \frac{1}{(r' + r_1)} dr' \right] \\ &= \frac{1}{H(r_1)} [-\ln(r_1 - r) + \ln(r + r_1)] \end{aligned} \quad (3-105)$$

donde hemos despreciado términos constantes. Entonces llegamos de (3-98)

$$v - u = \frac{2}{H(r_1)} [-\ln(r_1 - r) + \ln(r + r_1)]. \quad (3-106)$$

Elegimos  $c = -\frac{1}{2}H(r_1) = -\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ , entonces

$$e^{c(v-u)} = e^{\left[-\frac{1}{2}H(r_1)\left(\frac{2}{H(r_1)}[-\ln(r_1-r)+\ln(r+r_1)]\right)\right]} = e^{[\ln(r_1-r)-\ln(r+r_1)]} = (r_1 - r)(r + r_1)^{-1} \quad (3-107)$$

con esta ecuación (3-100) implica

$$-\frac{f(r)}{c^2 e^{c(v-u)}} = -\frac{(r_1 - r)H(r)}{c^2 e^{c(v-u)}} = -\frac{(r_1 - r)H(r)}{c^2 (r_1 - r)(r + r_1)^{-1}} = -(r + r_1)^2 \quad (3-108)$$

entonces  $g$  en (3-100) toma la forma

$$g = -\left(r + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\right)^2 dUdV, \quad 0 < r \leq r_1, \quad -\infty < U < 0, \quad 0 < V < \infty \quad (3-109)$$

$$UV = -e^{c(v-u)} = -(r_1 - r)(r + r_1)^{-1}, \quad 0 < r \leq r_1, \quad (3-110)$$

aquí vemos claramente de (3-109) que en  $r = r_1$   $g$  es regular.

Resolvemos de (3-110) por  $r$

$$r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \frac{(UV + 1)}{(1 - UV)}, \quad r < \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \quad (3-111)$$

sustituimos este valor de  $r$  en (3-109) y obtenemos (véase [13])

$$g = -\frac{12}{\Lambda} \frac{dUdV}{(UV-1)^2}, \quad 0 < r < r_1, \quad -\infty < U \leq 0, \quad 0 \leq V < \infty. \quad (3-112)$$

Consideramos en seguida la región exterior, es decir,  $r_1 < r < \infty$ , por este caso  $g$  toma la forma

$$g = \left( \frac{\Lambda r^2}{3} - 1 \right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left( \frac{\Lambda r^2}{3} - 1 \right)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad r_1 < r < \infty, \quad (3-113)$$

y notamos

$$f(r) = \frac{\Lambda r^2}{3} - 1 = \frac{\Lambda}{3} \left( r^2 - \frac{3}{\Lambda} \right) = \frac{\Lambda}{3} \left( r + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right) \left( r - \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right) = \quad (3-114)$$

$$f(r) = (r - r_1)H(r), \quad H(r) = \frac{\Lambda}{3} \left( r + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right), \quad r > r_1 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \quad (3-115)$$

con

$$H(r_1) = 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (3-116)$$

En este punto introducimos coordenadas  $(u, v)$  como en (3-47) entonces

$$g = -f(r)dudv, \quad -\infty < u, v < \infty, \quad r > r_1 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}. \quad (3-117)$$

El diagrama conforme por (3-117) corresponde al diagrama *II* en la Fig.(3-17).

Definimos nuevamente las coordenadas nulas de Kruskal como

$$U = e^{-cu}, \quad V = e^{-cv}, \quad (3-118)$$

en estas coordenadas  $(U, V)$ ,  $g$  toma la forma

$$g = -\frac{f(r)}{c^2} e^{c(u+v)} dUdV, \quad (3-119)$$

Apelando a

$$\frac{1}{f(r)} = \frac{1}{H(r_1)} \left[ \frac{1}{(r - r_1)} + \frac{H(r_1) - H(r)}{(r - r_1)H(r)} \right], \quad (3-120)$$

de donde  $H(r_1) - H(r) = -\frac{\Lambda}{3}(r - r_1)$ , tenemos así que

$$\int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')} = \frac{1}{H(r_1)} \left[ \int_{r^*}^r \frac{dr'}{(r' - r_1)} - \frac{\Lambda}{3} \int_{r^*}^r \frac{(r' - r_1) dr'}{(r' - r_1)^{\frac{\Lambda}{3}} (r' + r_1)} \right] = \quad (3-121)$$

$$= \frac{1}{H(r_1)} [\ln(r - r_1) - \ln(r + r_1)], \quad (3-122)$$

entonces

$$u + v = 2 \int_{r^*}^r \frac{dr'}{f(r')} = \frac{2}{H(r_1)} [\ln(r - r_1) - \ln(r + r_1)], \quad (3-123)$$

donde hemos despreciado los términos constantes. La métrica la escribimos ahora  $g$  como

$$g = -\frac{f(r)}{c^2} e^{c(u+v)} dU dV = -\frac{(r - r_1)H(r)}{c^2} e^{c(u+v)} dU dV, \quad (3-124)$$

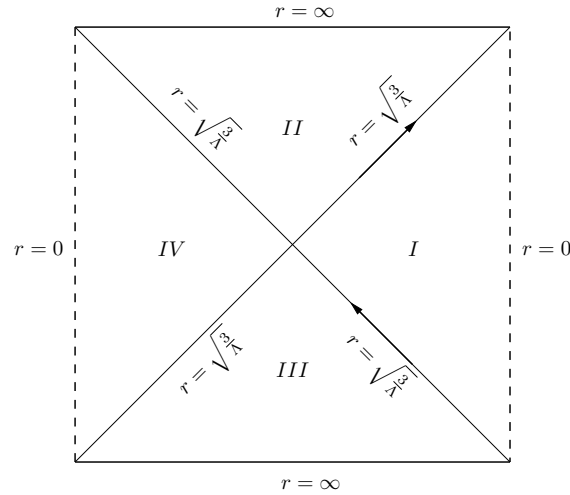
definimos  $c = -\frac{H(r_1)}{2}$ , por esta elección  $g$  es

$$g = -\frac{3}{\Lambda} (r - r_1) H(r) (r - r_1)^{-1} (r + r_1) dU dV = -\left( r + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right)^2 dU dV, \quad r > r_1, \quad 0 < U, V < \infty \quad (3-125)$$

$$UV = e^{-c(u+v)} = e^{\ln(r - r_1) - \ln(r + r_1)} = \frac{r - r_1}{r + r_1}, \quad r > r_1 \quad (3-126)$$

de la cual obtenemos

$$r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left( \frac{UV + 1}{1 - UV} \right), \quad r \geq \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \quad (3-127)$$



**Figura 3-17:** Diagrama de Carter-Penrose para el espacio-tiempo de Sitter. Aquí hemos hecho uso de la simetría  $(U, V) \rightarrow (-U, -V)$  y la restricción  $0 < r < \infty$ .

De (3-125) y (3-112) escribimos

$$g = \frac{12}{\Lambda} \frac{dU dV}{(UV - 1)^2}, \quad -\infty < U, V < \infty \quad (3-128)$$

$$UV = -\frac{r_1 - r}{r + r_1}, \quad 0 < r < \infty. \quad (3-129)$$

Como en el caso de la métrica de Schwarzschild, introducimos coordenadas  $(\hat{U}, \hat{V})$  con

$$\hat{U} = \tan U, \quad \hat{V} = \tan V, \quad \hat{U} = T - X, \quad \hat{V} = T + X \quad (3-130)$$

la cual mapea (3-128) a un diamante completo. Pero las restricciones  $UV \rightarrow 1$ ,  $UV \rightarrow -1$  que corresponden a  $r \rightarrow \infty$  y  $r \rightarrow 0$ , implican que solo la parte del diamante interior con  $-\frac{\pi}{2} < T < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}$  es relevante en el diagrama conforme de la Fig.(3-17 (véase también el diagrama en ref [13]).

# 4 La Métrica de Kerr-de Sitter

En este capítulo discutimos una solución particular a las Ecs. de Einstein en la presencia de constante cosmológica  $\Lambda > 0$ , es decir, una solución del sistema  $G + \Lambda g = 0$ <sup>1</sup>. Tal solución es la solución de Kerr-de Sitter (KdS) y ha sido descubierta por Carter en los años 60's. [7,8] Un análisis detallado de las propiedades de la solución KdS queda fuera del alcance de esta tesis. Nosotros nos concentramos en algunas propiedades de la métrica de KdS y a través de estas propiedades será claro la razón por la que elegimos la función  $f$  definida en (2-3) del capítulo dos. Como veremos en este capítulo tal  $f$  describe la geometría sobre el eje de rotación por la métrica KdS. Otra propiedad en la que nos concentramos en este capítulo es la ec. de Hamilton-Jacobi por el movimiento geodésico en el fondo KdS. Mostramos la separabilidad de esta ecuación en el fondo KdS y escribimos las ecs. a primer orden que describen geodésicas causales en KdS. Restringiendo tales ecuaciones sobre el eje de rotación combinadas con los diagramas conformes que construimos en el capítulo 3 nos da la oportunidad de estudiar las propiedades de la curvatura de anillo que caracteriza el espacio-tiempo de KdS.

## 4.1. La Métrica de Kerr-de Sitter

La métrica de KdS en las coordenadas  $(t, r, \vartheta, \varphi)$  conocidas como coordenadas de Boyer-Lindquist, tiene la forma [7,8]

$$g = -\frac{\Delta(r)}{I^2 \rho^2} [dt - a \sin^2(\vartheta) d\varphi]^2 + \frac{\hat{\Delta}(\vartheta) \sin^2(\vartheta)}{I^2 \rho^2} [adt - (r^2 + a^2) d\varphi]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta(r)} dr^2 + \frac{\rho^2}{\hat{\Delta}(\vartheta)} d\vartheta^2, \quad (4-1)$$

donde usamos las abreviaciones:

$$\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2(\vartheta), \quad \Delta(r) := -\frac{1}{3} \Lambda r^2 (r^2 + a^2) + r^2 - 2Mr + a^2,$$

$$\hat{\Delta}(\vartheta) := 1 + \frac{1}{3} \Lambda a^2 \cos^2(\vartheta) \quad I := 1 + \frac{1}{3} \Lambda a^2.$$

---

<sup>1</sup>Una de las motivaciones para estudiar este tipo de soluciones a las ecuaciones de Einstein, proviene de hechos observacionales recientes, que nos sugieren que nuestro Universo es uno que contiene constante cosmológica  $\Lambda$  positiva.

Las coordenadas en (4-1) toman valores en los rangos

$$-\infty < t < \infty, \quad r_i < r < r_{i+1}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

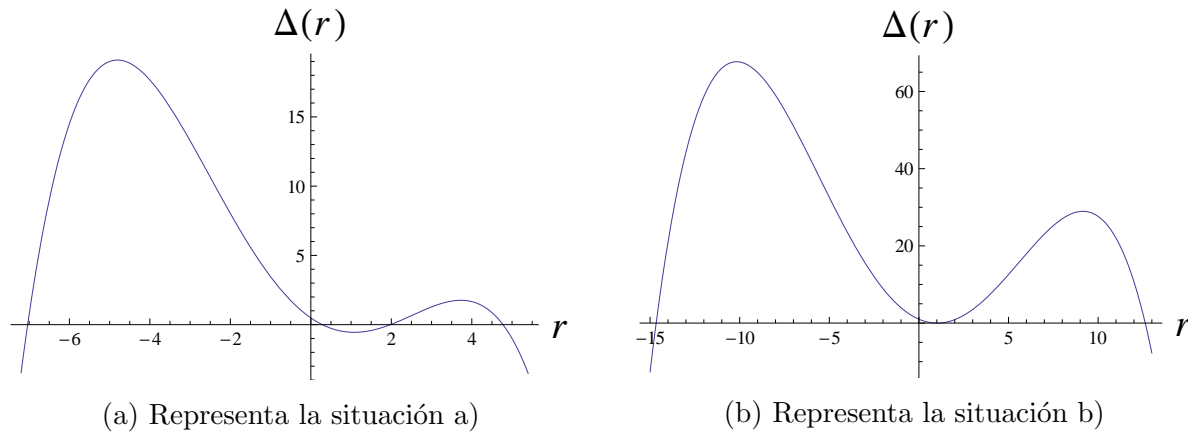
donde  $r_i$  y  $r_{i+1}$  representan las raíces reales consecutivas de la ecuación cuartica  $\Delta(r) = 0$ .

Mirando a (4-1) se ve que las componentes de  $g$  tienen singularidades en  $\sin \vartheta = 0$  (que le llamamos el eje rotación), en las raíces de  $\Delta(r) = 0$  y cuando  $\rho = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta = 0 \Leftrightarrow (r = 0, \vartheta = \frac{\pi}{2})$ , que representa una singularidad de curvatura.

De la forma de  $\Delta(r)$  notamos que los parámetros  $(\Lambda, M, a)$  juegan un rol importante. La ecuación  $\Delta(r) = -\frac{1}{3}\Lambda r^2(r^2 + a^2) + r^2 - 2Mr + a^2 = 0$ , puede tener

- a) Cuatro raíces reales distintas dadas como  $r_1 < 0 < r_2 < r_3 < r_4$ ,
- b) Todas las raíces reales pero  $r_2$  doblemente degenerada,  $r_1 < 0 < r_2 = r_3 < r_4$ ,
- c) Todas las raíces reales pero  $r_4$  doblemente degenerada,  $r_1 < 0 < r_2 < r_3 = r_4$ ,
- d) Las tres raíces reales positivas coinciden,  $r_1 < 0 < r_2 = r_3 = r_4$ ,
- e)  $\Delta(r) = 0$ , admite un par de raíces complejas conjugadas y un par de raíces reales  $r_1 < 0 < r_2$ ,

y estos resultados los hemos verificado a través del análisis numerico. Las gráficas en las Figs.(4-1) y (4-2) indican el comportamiento de  $\Delta(r)$  por diferentes valores de  $(\Lambda, M, a)$ .



**Figura 4-1**

De la forma en (4-1) vemos que admite dos campos de Killing dados por

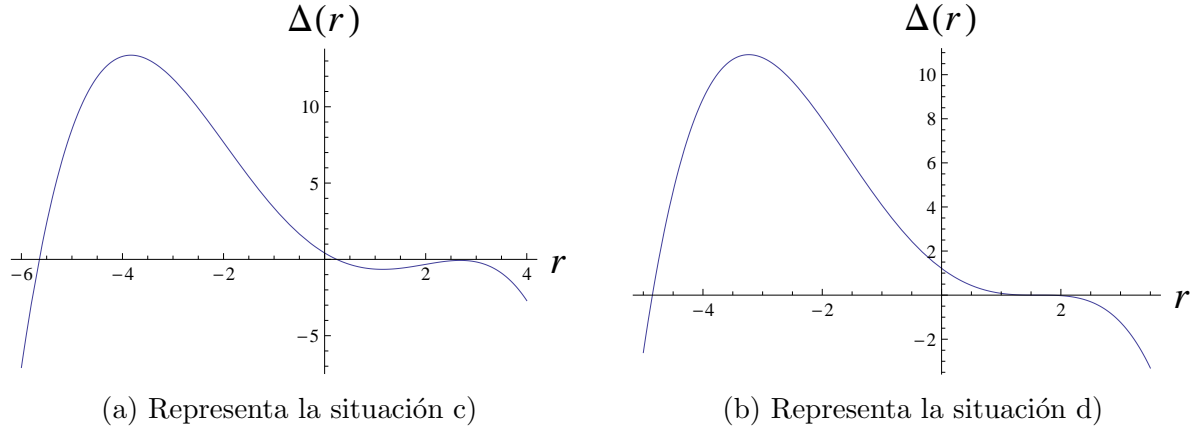


Figura 4-2

$$\xi_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad \xi_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

como veremos más adelante, estas simetrías son muy importantes en el análisis de las ecuaciones geodésicas.

Por el siguiente análisis escribimos (4-1) en la forma

$$g = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\vartheta\vartheta}d\vartheta^2, \quad (4-2)$$

en donde

$$g_{tt} = -\frac{\Delta(r) - \hat{\Delta}(\vartheta)a^2\sin^2\vartheta}{I^2\rho^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = \frac{\hat{\Delta}(\vartheta)(r^2 + a^2)^2 - \Delta(r)a^2\sin^2\vartheta}{I^2\rho^2}\sin^2\vartheta \quad (4-3)$$

$$g_{t\varphi} = \frac{\Delta(r) - \hat{\Delta}(\vartheta)(r^2 + a^2)}{I^2\rho^2}a\sin^2\vartheta, \quad g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta(r)}, \quad g_{\vartheta\vartheta} = \frac{\rho^2}{\hat{\Delta}(\vartheta)}. \quad (4-4)$$

Para desarrollar la ec. de Hamilton - Jacobi por geodésicas causales necesitamos las componentes de la métrica inversa por este caso solo invertimos una matriz  $2 \times 2$  dada por

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\varphi} \\ g_{t\varphi} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

$$\hat{g} = \det g = g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (g_{t\varphi})^2 = -\frac{\sin^2(\vartheta)\Delta(r)\hat{\Delta}(\vartheta)}{I^4}$$

$$g^{-1} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{tt} & g^{t\varphi} \\ g^{t\varphi} & g^{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\hat{g}} \begin{pmatrix} g_{\varphi\varphi} & -g_{t\varphi} \\ -g_{t\varphi} & g_{tt} \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

las componentes inversas estan dados por

$$g^{tt} = \frac{g_{\varphi\varphi}}{\det g} = -\frac{I^2[\hat{\Delta}(\vartheta)(r^2 + a^2)^2 - \Delta(r)a^2 \sin^2(\vartheta)]}{\rho^2 \hat{\Delta}(\vartheta)\Delta(r)}, \quad (4-7)$$

$$g^{t\varphi} = -\frac{g_{t\varphi}}{\det g} = \frac{I^2 a[\Delta(r) - \hat{\Delta}(\vartheta)(r^2 + a^2)]}{\rho^2 \hat{\Delta}(\vartheta)\Delta(r)}, \quad (4-8)$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{g_{tt}}{\det g} = \frac{I^2[\Delta(r) - \hat{\Delta}(\vartheta)a^2 \sin^2(\vartheta)]}{\rho^2 \sin^2(\vartheta)\Delta(\vartheta)\Delta(r)}, \quad g^{rr} = \frac{\Delta(r)}{\rho^2}, \quad g^{\vartheta\vartheta} = \frac{\hat{\Delta}(\vartheta)}{\rho^2}. \quad (4-9)$$

Antes de proceder a derivar las ecs. de Hamilton-Jacobi discutimos brevemente los límites de KdS. Por ejemplo tomamos el limite cuando  $\Lambda \rightarrow 0$  y vemos que

$$g = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho}\right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \vartheta}{\rho} dt d\varphi + \frac{\rho}{\Delta(r)} dr^2 + \rho d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \vartheta}{\rho}\right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \quad (4-10)$$

con

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2,$$

que representa la métrica de Kerr. Como es bien conocido (4-10) depende del valor de los parámetros  $(M, a)$ , por  $M^2 > a^2$  describe el hoyo negro de Kerr, por  $M^2 = a^2$  corresponde el hoyo negro de Kerr extremo y singularidad desnuda por  $M^2 < a^2$  (véase [1-3]).

Otro límite de (4-1) corresponde a  $a = 0$  y  $\Lambda > 0$ . En este caso se reduce a Schwarzschild (anti) de Sitter (SdS) con métrica  $g$  dada por

$$g = -\frac{\Delta(r)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta(r)} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \quad (4-11)$$

por este espacio-tiempo  $\Delta(r)$  es

$$\Delta(r) = -\frac{1}{3}\Lambda r^4 + r^2 - 2Mr, \quad (4-12)$$

donde la métrica ahora es

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 =$$

$$= -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2, \quad (4-13)$$

en donde  $\Lambda > 0$  corresponde a Schwarzschild de-Sitter y  $\Lambda < 0$  a Schwarzschild anti-de Sitter.

## 4.2. Separabilidad de la Ecuación de Hamilton-Jacobi

En esta sección consideramos la Lagrangiana por el movimiento geodésico

$$\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} = \{t, r, \vartheta, \varphi\} \quad (4-14)$$

donde  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  con  $\lambda$  el parámetro afín. Definimos la Hamiltoniana  $\mathcal{H}(x^\mu, p_\mu)$  a través de

$$\mathcal{H}(x^\mu, p_\mu) = p_\mu\dot{x}^\mu - \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu), \quad (4-15)$$

con  $p_\mu$  dado por

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} \left( \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \right) = g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu. \quad (4-16)$$

Invertimos Ec.(4-16)

$$\dot{x}^\mu = g^{\mu\alpha}p_\alpha. \quad (4-17)$$

Eliminando  $\dot{x}^\mu$  en favor de los  $p_\mu$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x^\mu, p_\mu) &= p_\mu\dot{x}^\mu - \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) \\ &= p_\mu\dot{x}^\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\ &= p_\mu g^{\mu\alpha}p_\alpha - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}p_\alpha g^{\nu\rho}p_\rho \\ &= p_\mu p^\mu - \frac{1}{2}p^\mu p^\nu \\ &= p_\mu p^\mu - \frac{1}{2}p_\nu p^\nu \\ &= \frac{1}{2}p_\mu p^\mu \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu. \end{aligned} \quad (4-18)$$

Entonces la Hamiltoniana tiene la forma:

$$\mathcal{H}(x^\mu, p_\mu) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu. \quad (4-19)$$

Debido que  $\mathcal{H}$  es una constante de movimiento la normalizamos según  $H(x^\mu, p_\mu) = -m^2$  con  $m$  la masa en reposo de la partícula.

La ecuación de Hamilton-Jacobi (véase por ejemplo [9]) toma la forma

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = -m^2, \quad p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}, \quad (4-20)$$

y de esta ecuación tenemos

$$\frac{1}{2} \left[ g^{tt} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + 2g^{t\varphi} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) + g^{\varphi\varphi} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + g^{rr} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + g^{\vartheta\vartheta} \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] = -m^2. \quad (4-21)$$

Motivado por las simetrías de la métrica  $g$ , proponemo el ansatz:

$$S(x^\mu, p_\mu) = -Et + l_z \varphi + \hat{S}(r, \vartheta) \quad (4-22)$$

debido de (4-22) junto con (4-21) llegamos a

$$\frac{1}{2} \left[ g^{tt} E^2 - 2g^{t\varphi} (El_z) + g^{\varphi\varphi} l_z^2 + g^{rr} \left( \frac{\partial \hat{S}}{\partial r} \right)^2 + g^{\vartheta\vartheta} \left( \frac{\partial \hat{S}}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] = -m^2, \quad (4-23)$$

la cual puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \frac{I^2}{2\rho^2} \left[ -\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta(r)} + \frac{a^2 \sin^2 \vartheta}{\hat{\Delta}(\vartheta)} \right] E^2 - \frac{I^2 a}{\rho^2} \left[ \frac{1}{\hat{\Delta}(\vartheta)} - \frac{r^2 + a^2}{\Delta(r)} \right] El_z + \\ & + \frac{I^2}{2\rho^2} \left[ \frac{1}{\hat{\Delta}(\vartheta) \sin^2 \vartheta} - \frac{a^2}{\Delta(r)} \right] l_z^2 + \frac{\Delta(r)}{2\rho^2} \left( \frac{\partial \hat{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{\hat{\Delta}(\vartheta)}{2\rho^2} \left( \frac{\partial \hat{S}}{\partial \vartheta} \right)^2 = -m^2. \end{aligned} \quad (4-24)$$

Multiplicando esta ecuación por  $\rho^2$ , separando  $\hat{S}(r, \vartheta) = \hat{S}_r(r) + \hat{S}_\vartheta(\vartheta)$  y recordando que  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\vartheta)$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta(r)}{2} \left( \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial r} \right)^2 - \frac{I^2}{2\Delta(r)} [(r^2 + a^2)E - al_z]^2 + m^2 r^2 = \\ & = -\frac{\hat{\Delta}(\vartheta)}{2} \left( \frac{\partial \hat{S}_\vartheta}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{I^2}{2\hat{\Delta}(\vartheta)} \left[ \frac{l_z}{\sin(\vartheta)} - a \sin(\vartheta) E \right]^2 - m^2 a^2 \cos^2(\vartheta). \end{aligned} \quad (4-25)$$

Para que esta igualdad se satisfaga, ambas deben ser iguales a una constante  $-l^2$ , llamada constante de Carter. De (4-25) obtenemos

$$\Delta^2(r) \left( \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial r} \right)^2 - I^2 [(r^2 + a^2)E - al_z]^2 + \Delta(r)(\tilde{m}^2 r^2 + \tilde{l}^2) = 0, \quad (4-26)$$

$$- \hat{\Delta}(\vartheta) \left( \frac{\partial \hat{S}_\vartheta}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{I^2}{\hat{\Delta}(\vartheta)} \left[ \frac{l_z}{\sin(\vartheta)} - a \sin(\vartheta)E \right]^2 - \tilde{m}^2 a^2 \cos^2(\vartheta) + \tilde{l}^2 = 0. \quad (4-27)$$

Introducimos nuevas funciones  $\Theta(\vartheta)$ ,  $R(r)$  via

$$\left( \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial r} \right)^2 = \frac{R(r)}{\Delta^2(r)}, \quad \left( \frac{\partial \hat{S}_\vartheta}{\partial \vartheta} \right)^2 = \frac{\Theta(\vartheta)}{\hat{\Delta}^2(\vartheta)}, \quad (4-28)$$

$$R(r) = I^2[(r^2 + a^2)E - al_z]^2 - \Delta(r)(m^2 r^2 + l^2), \quad (4-29)$$

$$\Theta(\vartheta) = \hat{\Delta}(\vartheta)l^2 - I^2 \left[ \frac{l_z}{\sin(\vartheta)} - a \sin(\vartheta)E \right]^2 - \hat{\Delta}(\vartheta)m^2 a^2 \cos^2(\vartheta), \quad (4-30)$$

y regresando a

$$p^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu, \quad (4-31)$$

y escogiendo el parámetro afín como  $\lambda = \frac{\tau}{m}$  en combinación con  $p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}$  obtenemos

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = \frac{I^2(r^2 + a^2)}{\Delta(r)} [(r^2 + a^2)E - al_z] + \frac{I^2 a}{\hat{\Delta}(\vartheta)} [l_z - aE \sin^2(\vartheta)] \quad (4-32)$$

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{I^2 a}{\Delta(r)} [(r^2 + a^2)E - al_z] - \frac{I^2 a}{\hat{\Delta}(\vartheta)} \left[ E - \frac{l_z}{\sin^2(\vartheta)} \right] \quad (4-33)$$

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \pm R(r)^{\frac{1}{2}} \quad (4-34)$$

$$\rho^2 \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \pm \Theta(\vartheta)^{\frac{1}{2}}. \quad (4-35)$$

Este sistema describe el comportamiento de geodésicas temporales o nulas en el espacio-tiempo KdS. El análisis de este sistema de ecs. es un problema interesante y complicado y algunos aspectos de este sistema los hemos discutido en [12].

### 4.3. Sobre el eje de rotación

Como mencionamos al inicio de este capítulo la métrica KdS es singular en  $\sin \vartheta = 0$ . En esta sección removemos la singularidad introduciendo nuevas coordenadas definidas como

$$x = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \sin \vartheta \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \sin^2 \vartheta. \quad (4-36)$$

Esta transformación es regular afuera del eje y el Jacobiano es

$$J \left( \frac{x, y}{\vartheta, \varphi} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \end{pmatrix} = \cos \vartheta \sin \vartheta. \quad (4-37)$$

De las relaciones en (4-36) tenemos que  $x = x(\vartheta, \varphi)$ ,  $y = y(\vartheta, \varphi)$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \quad (4-38)$$

$$dx = \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi \quad (4-39)$$

y de estas relaciones tenemos

$$d\varphi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \quad d\vartheta = \frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}(1 - (x^2 + y^2))^{\frac{1}{2}}}. \quad (4-40)$$

Por otro lado escribimos

$$g_{\vartheta\vartheta}d\vartheta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 = ds^2 + \left[ \frac{\hat{\Delta}(\vartheta)(r^2 + a^2)^2}{I^2\rho^2} \sin^2 \vartheta - \frac{\Delta(r)a^2 \sin^4 \vartheta}{I^2\rho^2} - \frac{\rho^2}{\hat{\Delta}(\vartheta)} \sin^2 \vartheta \right] d\varphi^2 \quad (4-41)$$

con

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{\hat{\Delta}(\vartheta)} [d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2] \quad (4-42)$$

De una computación vemos que  $ds^2$  en (4-42) escrito en las coordenadas  $(x, y)$  tiene la forma

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{\hat{\Delta}(\vartheta)} \left( \frac{1}{1 - (x^2 + y^2)} \right) [dx^2 + dy^2 - (xdy - ydx)^2] \quad (4-43)$$

que es regular sobre el eje de rotación, es decir, en  $x = y = 0$ . El término entre paréntesis en (4-41) parece tener problemas debido a  $d\varphi^2$  i.e. a primera vista parece que los términos divergen en el eje de rotación. El segundo término en el parentesis cuadrado es inocente ya que el término  $\sin^4 \vartheta$  cancela la divergencia, veamos que sucede con en el primer y tercer término, tenemos así que

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\hat{\Delta}(\vartheta)(r^2 + a^2)^2}{I^2 \rho^2} \sin^2 \vartheta - \frac{\rho^2}{\hat{\Delta}(\vartheta)} \sin^2 \vartheta \right] &= \sin^2 \vartheta \left[ \frac{\hat{\Delta}^2(\vartheta)(r^2 + a^2)^2 - I^2 \rho^4}{I^2 \rho^2 \hat{\Delta}(\vartheta)} \right] = \\
&= \sin^2 \vartheta \left[ \frac{[\hat{\Delta}(\vartheta)(r^2 + a^2) - I \rho^2][\hat{\Delta}(\vartheta)(r^2 + a^2) + I \rho^2]}{I^2 \rho^2 \hat{\Delta}(\vartheta)} \right] \quad (4-44)
\end{aligned}$$

donde el factor  $[\hat{\Delta}(\vartheta)(r^2 + a^2) - I \rho^2] \approx \sin^2 \vartheta$ , por medio de esta proporcionalidad el denominador en  $d\varphi^2$  se anula y desaparecen las divergencias. Por el término  $g_{t\varphi}$  ocurre la misma cancelación que es directa. Entonces la métrica  $g$  escrita en las coordenadas  $(t, r, x, y)$  es regular en el eje de rotación, evitaremos dar la forma explícita de  $g$  debido de la forma larga que toma

La métrica  $g$  en  $x = y = 0$  es

$$g = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 = \frac{\Delta(r)}{\rho^2} dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta(r)} dr^2 \quad (4-45)$$

donde hemos absorbido el factor  $I^2$  en el denominador de  $g_{tt}$  dentro de  $t$  (y la seguimos denotando igual). Con

$$f(r) = \frac{\Delta(r)}{\rho^2} = \frac{\Delta(r)}{r^2 + a^2}, \quad (4-46)$$

esta función (4-46) corresponde precisamente con la propuesta en (2-3).

## 5 Conclusiones

En esta tesis hemos desarrollado la teoría de los diagramas conformes de Carter-Penrose por una familia de espacio-tiempos de 2 dimensiones. Como está claro en este trabajo, estos diagramas nacen a través de una cadena de cambio de coordenadas que tienen la finalidad que la métrica bi-dimensional está conformalmente relacionada con la métrica bi-dimensional de Minkowski. Hemos construido tal cadena de cambio de coordenadas por la sección  $t - r$  del hoyo negro de Schwarzschild, el hoyo negro de Reissner-Nordström y en el eje de rotación por Kerr-de Sitter y de-Sitter.

A través de estos diagramas construimos la extensión maximal por el plano  $t - r$  de Schwarzschild, Reissner-Nordström y en el eje de rotación por KdS y de-Sitter. Por el caso de espacios-tiempos cuadri-dimensionales estas extensiones corresponden también a la extensión maximal del 4-espacio-tiempo físico. La extensión analítica maximal de KdS es aún un problema abierto. Existen algunos trabajos en esta dirección, véase [12].

La motivación de la tesis surge de querer entender los diagramas que aparecen en los libros [1–3] referidos como diagramas conformes. Con el desarrollo de este trabajo ahora es clara la idea, la métrica “física” esta conformalmente relacionada con la métrica plana, una consecuencia importante es que ahora la estructura causal del espacio-tiempo es obvia en el sentido en que podemos ver claramente si dos eventos estan o no relacionados.

# Bibliografía

- [1] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis The Large Scale Structure of Space Time. Cambridge University Press, Cambridge, (1973).
- [2] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler. Gravitation. W.H. Freeman, (1973).
- [3] R.M. Wald, General Relativity, Chicago Univ, Press, (1984).
- [4] B. Carter, Phys. Letters, 21, 423, (1966).
- [5] B. Carter, Phys. Rev. D, 141, 1243, (1966).
- [6] R. Penrose, in Relativity, Groups and Topology Gordon and Breach, Scien. Puh, New York,(1964).
- [7] B. Carter, Commun. Math.Phys. 17,233. (1970)
- [8] B. Carter, in Black Holes, Gordon and Breach, New York, (1973).
- [9] H. Goldstein , C. Poole and J. Safko, Classical Mechanics, 3rd Edition, Addison Wesley, (2002).
- [10] K. Lake, Phys. Rev. D19, 421, (1979).
- [11] P.T. Chrusciel, C.R. Olz and S.J. Szybka, "Space-Time diagrammatics", Phys. Rev. D 86, 124041 (2012).
- [12] J. F. Salazar and T. Zannias, Phys. Rev. D 96, 024061 (2017).
- [13] G.W.Gibbons and S.W.Hawking, "Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation". Phys. Rev. D15, 2738, (1997).