



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

“PROPIEDADES DE TRANSPORTE EN
TÚNELES CON PAREDES ONDULADAS”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN EL AREA DE FÍSICA

PRESENTA:

IVAN FERNANDO HERRERA GONZÁLEZ

DIRECTOR:

DR. F.M. EDUARDO SALVADOR TUTUTI HERNÁNDEZ

MORELIA, MICHOACÁN, JULIO 2007



Propiedades de transporte en túneles con paredes onduladas

Ivan Fernando Herrera González

9 de julio de 2007

Índice general

1. Introducción	3
2. Sistemas Hamiltonianos	6
2.1. Ecuaciones de Hamilton Jacobi	7
2.1.1. Separación de variables	8
2.2. Variables de ángulo acción	9
2.2.1. Un grado de libertad	9
2.2.2. Sistemas completamente separables	10
2.3. Teoría canónica de perturbaciones	13
2.3.1. Sistemas integrables con un grado de libertad	13
2.3.2. Sistemas integrables con varios grados de libertad	16
2.4. Secciones de Poincaré	18
2.5. Teorema adiabático	18
2.5.1. Partícula rebotando en una cavidad 2D	19
2.6. Caos en sistemas Hamiltonianos	20
2.6.1. Teorema de Poincaré-Birkhoff	21
2.7. Teorema KAM	22
3. Propiedades balísticas de transporte en túneles con ondulaciones	24
3.1. Descripción del canal	25
3.2. Secciones de Poincaré	27
3.2.1. Secciones de Poincaré para el canal estrecho	28
3.2.2. Secciones de Poincaré para el canal amplio	36
3.3. Propiedades de transporte del canal	36
3.3.1. Representación en 3D del canal	36
3.3.2. Canal estrecho con amplitudes pequeñas	37
3.3.3. Canal amplio con pequeñas amplitudes	41

3.4. Resultados numéricos y posibles aplicaciones	42
4. Conclusiones	48

Capítulo 1

Introducción

Los avances realizados en el desarrollo de la nanotecnología, la física de películas delgadas junto con la teoría de sistemas dinámicos han llevado al estudio de la dinámica caótica en billares abiertos y su relación con las propiedades de transporte en tales sistemas. De hecho ya se han construido microestructuras balísticas en forma de un billar caótico y esférico en donde se miden las fluctuaciones en la conductancia como función de un campo magnético perpendicular [1]. Experimentos en microestructuras semiconductoras han mostrado la importancia de la forma geométrica de las microestructuras en las propiedades de transporte [2].

Recientemente se han elaborado guías de onda con secciones transversales deformadas, es decir de secciones transversales no circulares, con el propósito de incrementar la potencia de los láseres [3], también se han propuesto guías de onda caóticas para el diseño de aparatos separadores de haces de luz y microláseres [4].

Cabe destacar que, en principio, la teoría de sistemas dinámicos y caóticos [5] es una teoría clásica que estudian el comportamiento de sistemas deterministas. Los sistemas desarrollados con la nanotecnología, conocidos como quantum dots (puntos cuánticos) y quantum wires (alambres cuánticos) [6], son sistemas bidimensionales confinados que tienen un tamaño característico de $1\mu\text{m}$ y ancho característico de $0.1\mu\text{m}$ respectivamente, deben ser estudiados desde el punto de vista de la mecánica cuántica. Sin embargo a bajas temperaturas $\sim 20\text{mK}$ se obtiene que el camino libre medio de los electrones dentro de los alambres y puntos cuánticos es mucho mayor que el tamaño característico L de tales nanosistemas. Si además se tiene que la longitud de onda de los electrones es mucho menor que L , se obtiene el régimen balístico

[7]. El electrón se comportará como una bola de billar rebotando en las paredes del punto o del alambre cuántico y en este caso estos sistemas se pueden tratar como simples billares.

Existen principalmente dos tipos de billares: uno que tiene una dinámica regular como lo es el estadio circular y otro en el que se tiene una dinámica caótica como por ejemplo el estadio de Sinai [8]. Las propiedades de transporte en túneles con ondulaciones son completamente diferentes cuando la dinámica del sistema es regular o caótica, de hecho se han propuesto criterios para distinguir entre la dinámica caótica y regular midiendo la resistividad clásica [9].

Otra manera de tratar al problema es considerar rugosidades (paredes caracterizadas por promedios de variables aleatorias). Los efectos de difusión en procesos de transporte en paredes aleatorias son importantes en diversas situaciones [10] como la física de películas delgadas, ondas, medios porosos etc, pero nosotros nos concentraremos en estudiar las propiedades de transporte de electrones sin espín, moviéndose en túneles con paredes onduladas, en el régimen balístico y su relación con la dinámica del sistema.

A diferencia de lo que se ha estudiado en trabajos previos en donde se ha estudiado ampliamente el caso de un canal bidimensional con una pared plana y una con un perfil ondulado (canal semiplano) [9], en este trabajo estudiamos un canal bidimensional con dos paredes onduladas. Una de las cosas importantes de este trabajo consiste en que el sistema que estudiamos tiene como caso particular el caso del canal semiplano. En efecto, al tomar en cuenta uno de los parámetros de nuestro canal, que es la diferencia de fases entre la pared ondulada de arriba y la pared ondulada de abajo, encontramos que la cantidad de partículas atrapadas en el canal se puede incrementar considerablemente a tal grado que puede incrementarse hasta en un 60 % en relación con el canal semiplano. Lo cual podría ser de potencial utilidad en el diseño de cavidades de resonancia para láseres.

La presentación de esta tesis se resume a continuación. En el capítulo 2, damos un breve descripción de los sistemas Hamiltonianos, abarcando los temas de teoría canónica de perturbaciones y el teorema KAM. El capítulo 3 está dedicado al trabajo principal de la tesis. En este capítulo estudiamos el canal bidimensional con dos paredes onduladas. Obtenemos algunos mapas de Poincaré que nos dan una pista del comportamiento dinámico del canal amplio y el canal estrecho. Obtenemos resultados analíticos para el caso del canal estrecho cuando las amplitudes de ondulación son pequeñas; en particular obtenemos una expresión analítica para la reflexividad o equivalentemente

para la transmitividad y ésta es corroborada con los cálculos numéricos que realizamos. Para el caso del canal amplio observamos que la dinámica es caótica y nuestros resultados, para la reflexividad son meramente numéricos. Finalmente en el capítulo 4 damos un resumen del trabajo y nuestras conclusiones.

Capítulo 2

Sistemas Hamiltonianos

Puesto que uno de los principales objetivos de este trabajo es estudiar la dinámica de electrones sin espín viajando túneles con ondulaciones es importante analizar la transición que se da de una dinámica regular a una dinámica caótica, en nuestro caso particular, de un sistema integrable a un sistema caótico. Parte de estas respuestas están contenidas en el teorema KAM (Kolmogorov, Moser y Arnold) y el teorema de Poincaré-Birkhoff [11]. En esta sección desarrollaremos en forma breve las herramientas teóricas que se requieren para el entendimiento de tales teoremas.

Primero empezaremos definiendo lo que es un sistema dinámico. Un sistema dinámico es un conjunto de N ecuaciones diferenciales de primer orden con N variables $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{f} : R^{N+1} \rightarrow R^N$ es un campo vectorial dado. Se dice que el sistema es autónomo si el campo vectorial \mathbf{f} no depende explícitamente de t . La solución del sistema es la función vectorial $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ que satisface la ecuación (2.1) con la condición inicial

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.2)$$

El teorema de unicidad local nos asegura que esta solución existe y es única en una vecindad $V \subset R^N$ si \mathbf{f} satisface una condición de Lipschitz en V [12].

Se puede obtener información de la solución de (2.1) sin necesidad de resolver el sistema de forma exacta, para esto analizamos la solución cerca de los puntos fijos \mathbf{x}_f , los cuales son puntos que satisfacen $\mathbf{f}(\mathbf{x}_f, t) = 0$.

Consideremos un sistema autónomo. Podemos linealizar el sistema si hacemos un desarrollo en series de Taylor alrededor de uno de los puntos fijos \mathbf{x}_f . Trasladando el origen del sistema de coordenadas al punto fijo, obtenemos a primer orden el siguiente sistema de N ecuaciones diferenciales lineales:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (2.3)$$

donde $A = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{x}}$ es la matriz Jacobiana. La solución al sistema en la Ec.(2.3) es simplemente $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0 e^{At}$, la estabilidad y clasificación de los puntos fijos se obtienen a través de los valores propios de A [12].

Los sistemas Hamiltonianos están caracterizados por la función de Hamilton $H(\mathbf{x}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ con $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ los momentos canónicos conjugados, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ las coordenadas canónicas conjugadas, y $x_1 = q_1, \dots, x_n = q_n, x_{n+1} = p_1, \dots, x_{2n} = p_n$, siendo n el número de grados de libertad del sistema. El sistema dinámico está definido por el conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

la cuales son las Ecs. de Hamilton. La solución a estas ecuaciones con condiciones iniciales \mathbf{q}_0 y \mathbf{p}_0 definen curvas integrales en el espacio fase (espacio formado por (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ó simplemente en la notación que estaremos usando: (q, p)).

2.1. Ecuaciones de Hamilton Jacobi

En algunas situaciones se puede encontrar una transformación canónica (la importancia de estas transformaciones es de corte teórico y se verá en forma clara en las siguientes secciones) en el que se pueda resolver el problema mecánico de forma trivial. En el caso más simple se busca que el nuevo Hamiltoniano K sea idénticamente cero y entonces las ecuaciones de movimiento de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i &= 0 \\ -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{P}_i &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

se resuelven de manera trivial. De la teoría de transformaciones canónicas [13] el nuevo Hamiltoniano $K(Q, P)$ está relacionado con el viejo Hamiltoniano $H(q, p)$ a través de la siguiente ecuación.

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.6)$$

donde $F(q, P)$ es la función generatriz del tipo 2 de la transformación canónica. Teniendo en cuenta que $p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$ y que $K = 0$ obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (2.7)$$

Esta es una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden, en general, de $(n + 1)$ variables, $(q_1, \dots, q_n; t)$. El problema se reduce a encontrar la función principal de Hamilton $F(q, P, t)$, pero no sabemos como es la dependencia de F con respecto a P (el conjunto de los n nuevos momentos canónicos conjugados). Para tener una solución completa de (2.7) se requieren $(n + 1)$ constantes $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ independientes de integración, una de las cuales es solo una constante irrelevante aditiva a F y las otras n constantes las podemos escoger como los nuevos momentos P , los cuales están relacionados con los valores iniciales de q, p al tiempo t_0 .

La solución al problema se obtiene tomando en cuenta que [13]

$$p_i = \frac{\partial F(q, P)}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial F(q, P)}{\partial P_i}.$$

Las constantes P_i y Q_i se pueden ser obtener a partir de las condiciones iniciales y de ahí la solución, despejando $q_j = q_j(Q, P, t)$ de las ecuaciones anteriores.

2.1.1. Separación de variables

La ecuación diferencial parcial (2.7) es en general difícil de resolver, sin embargo existen casos en que se puede realizar separación de variables y reducir el problema a cuadraturas. Esto ocurre cuando la función principal de Hamilton se puede escribir como:

$$F = \sum_i F_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t),$$

donde las α_j son constantes de integración. Sustituyendo en la ecuación (2.7) obtenemos n ecuaciones de la forma:

$$H_i \left(q_j; \frac{\partial F_j}{\partial q_j}; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t \right) + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0.$$

Si el Hamiltoniano depende explícitamente del tiempo se puede realizar la transformación $F_i(q_j; \alpha_1 \dots \alpha_n; t) = W_i(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \alpha_i t$, obteniendo así n ecuaciones de la forma

$$H_i \left(q_i; \frac{\partial W_j}{\partial q_i}; \alpha_1, \dots, \alpha_n \right) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Cada una de las ecuaciones (2.8) solo contiene la coordenada q_i y la derivada parcial de W_i con respecto a q_i , estas son un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden no acopladas que se pueden reducir a cuadraturas, un sistema con estas características se dice que es completamente separable.

2.2. Variables de ángulo acción

2.2.1. Un grado de libertad

En diversas situaciones es de especial importancia en la física estudiar sistemas que son periódicos, existen dos tipos de movimientos periódicos en los cuales estamos interesados:

- El primer tipo de periodicidad es cuando el sistema mecánico forma una trayectoria cerrada en el espacio fase, a este tipo de periodicidad le llamaremos libración. Un ejemplo de ello son las trayectorias elípticas correspondientes a diferentes energías del oscilador armónico en el espacio fase.
- El segundo tipo de movimiento periódico es cuando p es función periódica de q con periodo q_0 , entonces llamaremos a este movimiento una rotación. El ejemplo clásico de este tipo de periodicidad es el de un cuerpo rígido rotando alrededor de un eje, siendo en este caso q el ángulo de rotación.

Existen sistemas físicos en donde se presentan los dos casos de periodicidad, por ejemplo el péndulo simple, en donde el movimiento de libración se

da cuando el péndulo oscila entre $-\theta$ y θ (siendo θ el ángulo formado por la masa pendida y la vertical) medido y el movimiento de rotación se da cuando el péndulo rota alrededor de su centro. Para este tipo de problemas es conveniente realizar una variación al procedimiento de solución mencionado de la sección anterior. La constante de integración α (en el caso de una solo grado de libertad) que aparece en la ecuación de Hamilton-Jacobi es remplazada por una nueva variable, J , llamada acción, definida como:

$$J = \oint pdq, \quad (2.9)$$

en donde la integral se realiza sobre un periodo de libración o rotación. Para un sistema conservativo $\alpha_1 \equiv H = H(J)$, la función característica de Hamilton se puede escribir como $W = W(q, J)$.

De la teoría de transformaciones canónicas la correspondiente coordenada generalizada ω conocida como la variable de ángulo es definida por: $\omega = \frac{\partial W}{\partial J}$ y la correspondiente ecuación de movimiento es:

$$\dot{\omega} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \nu(J). \quad (2.10)$$

Pero ν es independiente del tiempo por lo que la solución inmediata es

$$w = \nu t + \beta. \quad (2.11)$$

La importancia de estas nuevas variables consiste en que ν es directamente la frecuencia asociada con el periodo de movimiento de q y no es necesario encontrar la solución completa del sistema para obtener información sobre el movimiento.

2.2.2. Sistemas completamente separables

Para sistemas completamente separables, las ecuaciones de la transformación canónica tienen la forma:

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1 \dots \alpha_n)}{\partial q_i},$$

por lo que $p_i = p_i(q_i; \alpha_1 \dots \alpha_n)$, donde las α_i son constantes de integración. Podemos definir variables de ángulo acción, cuando las proyecciones de las órbitas de movimiento en cada plano (q_i, p_i) (a tales curvas las denotaremos por C_i) describen movimientos de rotación o de libración.

En analogía con el caso unidimensional, definimos las acciones

$$J_i = \oint p_i dq_i = \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_i} dq_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

donde la integral se toma sobre un periodo en la proyección del plano (q_i, p_i) . Puesto que q_i es la variable de integración, J_i es una función de las n constantes de integración que aparecen en la ecuación de Hamilton-Jacobi. Debido a la independencia de los pares (q_i, p_i) se pueden poner las α_i en términos de las J_i , por lo que la función característica W se puede escribir en la forma:

$$W = W(q_1, \dots, q_n; J_1, \dots, J_n) = \sum_j W_j(q_j; J_1, \dots, J_n).$$

Si además el Hamiltoniano solo depende de las J_i (esto es a lo que se le denomina un sistema completamente integrable, es decir un sistema completamente separable y periódico en cada plano (q_i, p_i)), este sistema de n grados de libertad define n constantes de movimiento J_i .

Similarmente al caso unidimensional podemos definir mediante las ecuaciones de transformación la variable ángulo ω_i como:

$$\omega_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_j(q_j; J_1, \dots, J_n)}{\partial J_i}$$

Nótese que $\omega_i = \omega_i(q_1, \dots, q_n; J_1, \dots, J_n)$ y satisface la ecuación de movimiento:

$$\dot{\omega}_i = \frac{\partial H(J_1, \dots, J_n)}{\partial J_i} = \nu_i(J_1, \dots, J_n)$$

Debido a que las ν_i son constantes en el tiempo, la solución de la ecuación de movimiento anterior es:

$$\omega_i = \nu_i t + \beta_i. \quad (2.13)$$

Se puede demostrar que las ν_i corresponden a la frecuencias del movimiento en la proyección en el plano correspondiente a (q_i, p_i) . Para el caso del movimiento de libración, donde cada (q_i, p_i) regresan a su valor inicial, las coordenadas generalizadas q_k pueden ser representadas en series de Fourier múltiple en términos de las variables de ángulo ω_i :

$$q_k(t) = \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}}^{(k)} e^{2\pi i \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}} = \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}}^{(k)} e^{2\pi i \mathbf{m} \cdot (\mathbf{v}t + \mathbf{b})}, \quad (2.14)$$

donde \mathbf{w} representa un vector con componentes $\mathbf{w} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ y similarmente $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, con m_i enteros, $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ y $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Para el caso de rotación la variable q_k no regresa a su valor inicial, pero se puede hacer que regrese a su valor inicial restándole la cantidad que avanzó después de m periodos: $q_{mk}(t) = q_{ok}(\nu_k t + \beta_k)$, con q_{ok} siendo la cantidad que avanza en un solo periodo.

También se puede encontrar una expresión para las coordenadas en el caso rotacional haciendo también un desarrollo en series de Fourier y tratar este caso como una libración:

$$q_k(t) = q_{mk}(t) + \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}}^{(k)} e^{2\pi i \mathbf{m} \cdot (\mathbf{v}t + \mathbf{b})}. \quad (2.15)$$

Cabe destacar que el hecho de que aunque cada proyección del movimiento en el plano (q_k, p_k) sea periódico esto no necesariamente implica que $q_k(t)$ sea periódico en t , de hecho la ecuación (2.14) solo remarca el hecho de que q_k es cuasiperiódica. Aunque puede darse el caso en el que las diferentes frecuencias sean conmensurables es decir que cada una sea múltiplo racional de la otra, esto es:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.16)$$

Para esta situación, en el caso libracional se tienen trayectorias cerradas y $q_k(t)$ es periódico en el tiempo.

Algo bastante interesante de los sistemas integrables es que se puede encontrar una transformación canónica que lleve de las variables (q_i, p_i) a (q'_i, p'_i) en donde las nuevas trayectorias cerradas C'_i en los planos (q'_i, p'_i) son círculos, es decir cada trayectoria C_i es continuamente deformadas en círculos S_i . Las nuevas frecuencias ν'_i asociadas con los círculos permanecen invariantes ante tales transformaciones. Esto se debe a que J_i definida por la Ec. (2.12) es igual al área que sustenta la curva cerrada de integración (por el teorema rotacional de Stokes). Como el volumen es invariante ante transformaciones canónicas también lo son las J_i por lo que $\nu_i = \frac{\partial H(\text{bf}J)}{\partial J_i}$ también son invariantes ante tales transformaciones. Un ejemplo de ello es el oscilador armónico $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$. Si realizamos la transformación canónica $p' = \frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$, $q' = q\sqrt{\frac{m\omega}{2}}$, en vez de tener elipses correspondientes a diferentes energías obtenemos círculos de radio \sqrt{J} y las frecuencias ν permanecen invariantes. Bajo esta situación se tiene que el movimiento en el espacio fase toma lugar sobre la superficie de un toro n dimensional: $T^n = S_1 \times \dots \times S_n$, donde las cruces indican productos directos entre los toros de dimensión 1 (círculos), S_i .

2.3. Teoría canónica de perturbaciones

La gran mayoría de los problemas mecánicos en la práctica no se pueden resolver de manera exacta, de hecho son muy pocos los problemas que tienen solución exacta, por ejemplo el problema de dos cuerpos. Incluso para el problema de tres cuerpos ya no se tiene solución exacta y se tiene que trabajar en forma numérica o perturbativa (si alguna de las masas es pequeña en comparación con las otras dos o bajo alguna otra aproximación).

Bajo ciertas condiciones cuando el sistema se halla próximo a un caso integrable el problema consiste en encontrar solución aproximada a un sistema cuyo Hamiltoniano se puede expresar en la forma:

$$H(\xi, t) = H_0(\xi, t) + \epsilon H_1(\xi, t), \quad (2.17)$$

donde, $\xi = (q, p)$, es un punto en el espacio fase y H_0 es el Hamiltoniano no perturbado y del cual se conocen las soluciones $q = q(t)$ y $p = p(t)$, ϵ es el parámetro de perturbación. Para los fines de esta tesis solo consideraremos perturbaciones en sistemas integrables, si se requiere más información consultar [13].

2.3.1. Sistemas integrables con un grado de libertad

Supongamos que el sistema no perturbado es un sistema integrable, esto es, que admite una transformación canónica en variables de ángulo acción (ϕ_0, J_0) . El nuevo Hamiltoniano sin perturbar K_0 está dado por:

$$K_0(J_0) = H_0(\xi(\phi_0, J_0)). \quad (2.18)$$

A través de esta transformación canónica $\xi = \xi(\phi_0, J_0)$ y podemos reescribir H en términos de las nuevas variables (ϕ_0, J_0) :

$$K(\phi_0, J_0) = H(\xi(\phi_0, J_0)) = K_0(J_0) + \epsilon K_1(\phi_0, J_0), \quad (2.19)$$

donde $K_1(\phi_0, J_0) = H_1(\xi(\phi_0, J_0))$.

En principio, uno espera que si se perturba a un sistema integrable, el sistema que resulte será también integrable si ϵ es suficientemente pequeña, esto es debido a que se espera que, cuando la perturbación se enciende, los toros sobre los cuales se da el movimiento en el espacio fase solo se deforman un poco. En general esto no es cierto como se verá más adelante, pero

haremos la suposición de que el sistema perturbado (con Hamiltoniano H) es integrable. El sistema perturbado tiene sus propias variables de ángulo-acción (ϕ, J) y por tanto deben de existir transformaciones canónicas que nos lleven de (q, p) a (ϕ, J) ó a (ϕ_0, J_0) :

$$E(J) \equiv K(\phi_0(\phi, J), J_0(\phi, J)). \quad (2.20)$$

Sea $S(\phi_0, J)$ la función generadora del tipo 2 [13] de la transformación canónica $(\phi, J) = (\phi(\phi_0, J_0), J(\phi_0, J_0))$. Desarrollemos S en serie de potencias de ϵ :

$$S(\phi_0, J) = \phi_0 J + \epsilon S_1(\phi_0, J) + \epsilon^2 S_2(\phi_0, J) + \dots, \quad (2.21)$$

donde el término $\phi_0 J$ corresponde a la transformación canónica identidad y el problema consiste en encontrar S_k en términos de ϕ_0 y J . Para ello hagamos una expansión de ϕ_0 y J_0 en términos de potencias de ϵ :

$$\phi_0 = \phi + \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots, \quad (2.22)$$

$$J_0 = J + \epsilon J_1 + \epsilon^2 J_2 + \dots, \quad (2.23)$$

donde tanto ϕ_k como J_k son funciones de ϕ y de J . Utilizando el hecho de que:

$$\phi = \frac{\partial S}{\partial J}, \quad (2.24)$$

$$J_0 = \frac{\partial S}{\partial \phi_0}, \quad (2.25)$$

obtenemos que $\phi_k = -\frac{\partial S_k}{\partial J}$ y $J_k = \frac{\partial S_k}{\partial \phi_0}$. Insertando los resultados obtenidos en las ecuaciones (2.22) y (2.23) se tiene:

$$J_0 = J + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \phi_0} + \dots, \quad (2.26)$$

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial J} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial J} + \dots.$$

La ecuación (2.20) también puede ser desarrollada en serie de potencias para obtener aproximaciones sucesivas para $E(J)$:

$$\begin{aligned} E(J) &= E_0(J) + \epsilon E_1(J) + \epsilon^2 E_2(J) \\ &= K(\phi_0((\phi, J), J_0(\phi, J)) = K_0(J_0) + \epsilon K_1(\phi_0, J_0). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Se requiere tener cuidado con esta ecuación ya que existe una relación entre J y J_0 que también depende de potencias de ϵ . Expandiendo K en serie de Taylor en J_0 alrededor de J , obtenemos

$$K(\phi_0, J_0) = K(\phi_0, J) + \frac{\partial K}{\partial J}(J_0 - J) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial J^2}(J_0 - J)^2 + \dots \quad (2.28)$$

Utilizando las Ecs. en (2.26) obtenemos, después de agrupar términos,

$$K(\phi_0, J_0) = K_0(J) + \epsilon \left(K_1(\phi_0, J) + \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} \frac{\partial K_0}{\partial J} \right) + \dots \quad (2.29)$$

Los términos del desarrollo de $E(J)$ se pueden obtener sustituyendo (2.29) en (2.27) e igualando los coeficientes de la misma potencia en ϵ :

$$E_0(J) = K_0(J) \quad (2.30)$$

$$E_1(J) = K_1(\phi_0, J) + \frac{\partial K_0}{\partial J} \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} \equiv K_1(\phi_0, J) + \nu_0(J) \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0}, \quad (2.31)$$

donde se ha usado el hecho $\frac{\partial K_0}{\partial J} = \frac{\partial E_0}{\partial J} \equiv \nu_0(J)$ con $\nu_0(J_0)$ la frecuencia del sistema no perturbado.

Se puede demostrar que cada S_k es una función cuasiperiódica de ϕ_0

$$S_k(\phi_0, J) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_k(J; m) e^{im\phi_0}, \quad k \neq 0 \quad (2.32)$$

En la ecuación (2.29) tenemos dos funciones desconocidas $E_1(J)$ y S_1 . Para poder determinar alguna de las dos necesitamos otra ecuación; esta se puede obtener promediando la ecuación (2.29) alrededor de un ciclo y recurriendo al hecho de que S_k es cuasiperiódica:

$$\left\langle \frac{\partial S_k}{\partial \phi_0} \right\rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial S_k}{\partial \phi_0} d\phi_0 = 0, \quad (2.33)$$

por lo que:

$$E_1(J) = \langle K_1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_1(\phi_0, J) d\phi_0. \quad (2.34)$$

Insertando (2.34) en (2.29) obtenemos una ecuación para S_1 :

$$\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} = \frac{\langle K_1 \rangle - K_1}{\nu_0}. \quad (2.35)$$

Para nuestros fines es suficiente la aproximación a primer orden; para obtener los términos de orden superior se sigue el mismo procedimiento. Una vez obtenida $E_k(J)$ se puede obtener la frecuencia perturbada al mismo orden a través de $\nu_k = \frac{\partial E_k}{\partial J}$. En ocasiones esta información es suficiente pero podemos ir mas allá encontrando la solución en términos de las variables ξ a orden k , lo único que tenemos que hacer es lo siguiente: una vez obtenido $S(\phi_0, J)$ a orden k , se utiliza para encontrar $(\phi(\phi_0, J_0), J(\phi_0, J_0))$ y como conocemos $\xi(\phi_0, J_0)$ se puede utilizar para encontrar $\xi(\phi, J)$, todo a orden k ; ya que $\phi(t) = \nu t + \phi(0)$ y J es una constante de movimiento, podemos obtener $\xi = \xi(t)$ a orden k .

2.3.2. Sistemas integrables con varios grados de libertad

De forma similar al procedimiento seguido en la sección anterior, suponemos que el Hamiltoniano se puede escribir como $H(\boldsymbol{\xi}) = H_0(\boldsymbol{\xi}) + \epsilon H_1(\boldsymbol{\xi})$ con $\boldsymbol{\xi} = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, también suponemos que el sistema representado por H_0 (sistema no perturbado) es integrable por lo que acepta una representación en variables de ángulo acción $\boldsymbol{\phi}_0 \equiv (\phi_{01}, \phi_{02}, \dots, \phi_{0n})$ y $\mathbf{J}_0 \equiv (J_{01}, J_{02}, \dots, J_{0n})$. Suponemos además, como en el caso de un solo grado de libertad, que el sistema perturbado, H , es integrable y consecuentemente admite sus propias variables de ángulo acción $(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{J})$. El Hamiltoniano perturbado es escrito en la forma (2.27) y cálculos similares a los realizados en la sección anterior nos llevan a las ecuaciones análogas a (2.31) para el caso de varios grados de libertad:

$$\begin{aligned} E_0(\mathbf{J}) &= K_0(\mathbf{J}), \\ E_1(\mathbf{J}) &= K_1(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{J}) + \sum_i \nu_{0i}(\mathbf{J}) \frac{\partial S_1}{\partial \phi_{0i}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

El promedio de una función $f(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{J})$ tomado sobre las n variables ϕ_{0i} se define como

$$\langle f \rangle(\mathbf{J}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\phi_{01} \int_0^{2\pi} d\phi_{02} \cdots \int_0^{2\pi} d\phi_{0n} f(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{J}). \quad (2.37)$$

Similar al caso de un solo grado de libertad también se tiene que $\langle \frac{\partial S_1}{\partial \phi_{01}} \rangle = 0$. Al promediar la ecuación (2.36) se obtiene $E_1(\mathbf{J}) = \langle K_1 \rangle$ que al ser sustituido

en esta misma igualdad se tiene

$$\sum_i \nu_{0i} \frac{\partial S_1}{\partial \phi_{0i}} = \langle K_1 \rangle - K_1, \quad (2.38)$$

donde K y K_1 y sus promedios son funciones conocidas. El lado derecho de la ecuación (2.38) se puede desarrollar en series de Fourier:

$$\langle K_1 \rangle - K_1 = \sum_{\mathbf{m}} R_{\mathbf{m}}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\phi}_0}, \quad (2.39)$$

donde $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ siendo m_i enteros y $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\phi}_0 \equiv \sum_i m_i \phi_{0i}$. Los coeficientes $R_{\mathbf{m}}$ en principio pueden ser calculados y estan dados por

$$R_{\mathbf{m}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\phi_{01} \int_0^{2\pi} d\phi_{02} \cdots \int_0^{2\pi} d\phi_{0n} (\langle K_1 \rangle - K_1) e^{-i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\phi}_0}. \quad (2.40)$$

También S_1 se puede desarrollar en series de Fourier:

$$S_1 = \sum_{\mathbf{m}} G_1(\mathbf{J}; \mathbf{m}) e^{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\phi}_0}. \quad (2.41)$$

Sustituyendo las Ecs. en (2.39) y (2.41) en la Ec. (2.38) y utilizando la independencia lineal de el conjunto de funciones $e^{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\phi}_0}$ se obtiene

$$G_1(\mathbf{J}; \mathbf{m}) = \frac{R_{\mathbf{m}}(\mathbf{J})}{i(\boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{m})}, \quad (2.42)$$

donde $\boldsymbol{\nu}_0 = (\nu_{01}, \nu_{02}, \dots, \nu_{0n})$ es el conjunto de frecuencias del sistema no perturbado, las cuales están definidas por $\nu_{0i} = \frac{\partial E(\mathbf{J})}{\partial J_i}$.

La ecuación (2.42) es una expresión explícita para los coeficientes de Fourier de S_1 , con la característica de que tienen una singularidad, ya que para algún conjunto de enteros \mathbf{m} , el denominador se puede anular: $\boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{m} = 0$. En este caso la teoría de perturbaciones no se puede aplicar y por tanto el sistema no perturbado no puede ser descrito por variables de ángulo acción. Cuando las frecuencias ν_i son conmensurables, existe una \mathbf{m} tal que $\boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{m} = 0$, por lo que S_1 se vuelve infinito. Aún cuando las frecuencias no sean conmensurables, el denominador de la ecuación (2.42) puede ser pequeño por lo que S_1 se vuelve grande y la teoría de perturbaciones solo funcionará para valores de ϵ suficientemente pequeño. Sistemas con frecuencias conmensurables o resonancias se les denomina sistemas degenerados. Cuando la teoría de perturbaciones funciona los toros del sistema no perturbado solo son deformados ligeramente cuando la perturbación se enciende, pero si el sistema es degenerado los toros no solamente se distorsionan, sino que se pueden romper por completo, esto se discutirá mas adelante.

2.4. Secciones de Poincaré

Sea $\xi(t, \xi_0)$ la solución a las ecuaciones de Hamilton de un sistema integrable que definen curvas integrales sobre la superficie de un toro T^n en el espacio fase, con ξ_0 la condición inicial del sistema. La sección de Poincaré es un hiperplano P de dimensión $(n - 1)$ que intersecta transversalmente al toro en el punto $(t_0, \xi_0) \equiv p_1 \in P$.

Después de que la curva integral intersecta al plano P en el punto p_1 , esta recorre la superficie del toro y se vuelve a intersectar con el plano P en un punto p_2 y así sucesivamente formando un conjunto de puntos en P , en esta forma el sistema dinámico define un mapeo discreto $\phi : P \mapsto P$ que envía p_1 a p_2 y de forma general p_k a p_{k+1} :

$$p_{k+1} = \phi(p_k) \tag{2.43}$$

La imagen de un punto $p \in P$ bajo aplicaciones sucesivas de ϕ es análogo a las curvas integrales de un sistema dinámico continuo. Al conjunto de imágenes en P se le llama mapa de Poincaré. A pesar de que el mapa de Poincaré restringe la dinámica continua del sistema, provee información útil acerca del sistema dinámico y de su comportamiento, además de que se tiene la ventaja de trabajar en un espacio de $(n - 1)$ dimensiones en vez de uno de n .

Se pueden obtener mucha información de interés a partir del análisis del mapa de Poincaré. Por ejemplo, si $\phi(p_f) = p_f$ entonces tenemos que la curva integral es una trayectoria cerrada, al punto p_f que cumple esta condición se le denomina punto fijo del mapeo ϕ y se puede estudiar la estabilidad o inestabilidad de este punto [15].

2.5. Teorema adiabático

Supongamos que tenemos un sistema integrable en un grado de libertad, cuyo Hamiltoniano es:

$$H(q, p, \lambda), \tag{2.44}$$

donde λ es un parámetro constante, entonces las variables de ángulo acción dependen del valor de λ . Si λ es remplazado por una función dependiente del tiempo t , el sistema no será en general completamente integrable, pero si se usa el método usual para encontrar las variables de ángulo acción $(J(q, p, \lambda(t)), \phi(q, p, \lambda(t)))$ estas serán función del tiempo a través de λ

y por consiguiente J ya no será una constante de movimiento. Sin embargo si $\lambda = \epsilon t$ con $0 < \epsilon \ll 1$ varía muy lentamente en el tiempo J se mantiene casi constante por lo cual se a J se le llamara invariante adiabático. Más específicamente si λ cambia una cantidad $\Delta\lambda$ en un tiempo ΔT el cambio en J , ΔJ será aproximadamente proporcional a $\frac{\Delta\lambda}{\Delta T}$. La demostración del teorema adiabático puede encontrarse en [11]. A continuación aplicaremos este resultado a un caso particular, cuyo resultado será importante para el desarrollo de capítulos posteriores.

2.5.1. Partícula rebotando en una cavidad 2D

Consideremos una partícula que está rebotando dentro de una cavidad bidimensional con paredes curvas cuyas rectas tangentes en cada punto tienen pendientes pequeñas: $|m| \ll 1$, siendo m la pendiente de la recta tangente, T , (ver Fig. 2.1). Si lanzamos una partícula con un ángulo inicial θ_i que rebota especularmente con la pared (el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflejado, siendo el plano de incidencia la recta tangente). Tenemos que el ángulo reflejado es:

$$\theta_f = \pi + 2 \arctan(m) - \theta_i. \quad (2.45)$$

Definimos $\epsilon_1 \equiv \arctan(m) \ll 1$, ya que m es pequeña. Consideremos ahora

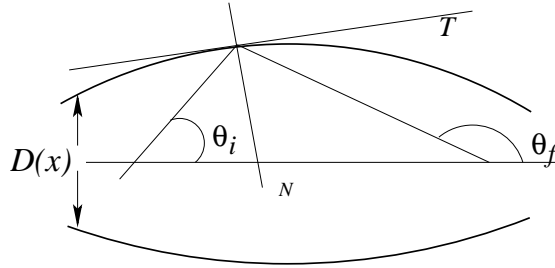


Figura 2.1: Figura que muestra los rebotes en una cavidad 2D.

el caso en el que $\theta_i = \frac{\pi}{2} - \epsilon_2$, con $\epsilon_2 \ll 1$, esto es es casi un ángulo recto. Entonces, debido a la Ec. en (2.45), θ_f también es cercano a $\frac{\pi}{2}$, esto es $\theta_f = \frac{\pi}{2} + \epsilon_3$ con $\epsilon_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2 \ll 1$.

Sea $\dot{y}_i = \sin \theta_i$ y $\dot{y}_f = \sin \theta_f$ las velocidades normalizadas en y antes y después del choque, entonces por las consideraciones anteriores:

$$\dot{y}_i = \cos \epsilon_2,$$

$$\dot{y}_f = \cos \epsilon_3. \quad (2.46)$$

Tenemos que el cambio en la acción J , antes y después del choque, normalizada por la velocidad, está dado por:

$$\Delta J = J_f - J_i = 2\dot{y}_f D(x + \Delta x) - 2\dot{y}_i D(x). \quad (2.47)$$

Con $\Delta x \ll 1$ y $D(x)$ es la distancia entre la pared superior e inferior en el punto x (ver Fig. 2.1). Desarrollando todos los términos que contienen variables pequeñas en potencias tenemos que:

$$\Delta J \approx 2 \left(1 - \frac{\epsilon_2^2}{2}\right) D(x) - 2 \left(1 - \frac{\epsilon_3^2}{2}\right) \left(D(x) + \frac{dD(x)}{dx} \Delta x\right). \quad (2.48)$$

Manteniendo términos hasta orden ϵ^2 ,

$$\Delta J \approx (\epsilon_3^2 - \epsilon_2^2) D(x). \quad (2.49)$$

Por lo, que para un rebote, la acción J , se convierte en un invariante adiabático siempre y cuando $D(x)$ sea lo suficientemente estrecho. Si se mantiene a lo largo de los rebotes que $\dot{y} \gg \dot{x}$, entonces J permanecerá casi constante para muchos rebotes o incluso para siempre, dependiendo de la geometría del canal.

2.6. Caos en sistemas Hamiltonianos

En general la palabra caos se asocia con el concepto de desorden. Dentro de la mecánica clásica, caos se refiere a sistemas deterministas que son altamente sensibles a las condiciones iniciales. La evolución en el espacio fase de las curvas integrales de un sistema dinámico correspondiente a condiciones iniciales arbitrariamente cercanas, terminan divergiendo exponencialmente en una vecindad que contenga a las condiciones iniciales, aún para tiempos pequeños. Debido a esta sensibilidad a las condiciones iniciales, se tiene una dinámica irregular en el espacio fase.

A los sistemas dinámicos que para pequeñas variaciones de las condiciones iniciales en el espacio fase solo generan pequeños cambios en el movimiento sobre escalas de tiempo pequeñas se les denomina sistemas regulares. Existen varios ejemplos de estos sistemas: el oscilador armónico, el péndulo etc.

Lo que a nosotros nos interesa es observar como surge la dinámica caótica, cuando a un sistema que es integrable se le agrega una pequeña perturbación no integrable.

2.6.1. Teorema de Poincaré-Birkhoff

En la Secc. 2.3.2 vimos que la teoría de perturbaciones falla cuando tenemos frecuencias conmensurables según la ecuación (2.42). Esto significa que el toro del sistema no perturbado sobre el cual se encuentran las curvas integrales en el espacio fase se romperá aún para valores muy pequeños del parámetro de perturbación ϵ . Queda la pregunta de que en que se romperá ese toro o a que dará lugar conforme la perturbación crece. La respuesta la establece el Teorema de Poincaré-Birkhoff. Primeramente definimos a los toros caracterizados por frecuencias conmensurables como toros racionales y los caracterizados por frecuencias no conmensurables como toros irracionales.

En la literatura dedicada a sistemas dinámicos y caos, para discutir el teorema de Poincaré-Birkhoff usualmente recurren como ejemplo al de un objeto físico, que está rotando alrededor de un eje fijo, al que se golpetea con una fuerza impulsiva periódica de magnitud y dirección fija, llamado el rotor golpeteado [11]. Este sistema da origen al mapeo estándar al cual denotamos como Z_ϵ , con ϵ el parámetro perturbativo y la perturbación proporcional a la fuerza aplicada: $Z_\epsilon : (\phi_n, J_n) \mapsto (\phi_{n+1}, J_{n+1})$, con

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= (\phi_n + J_n) \bmod 2\pi, \\ J_{n+1} &= \epsilon \sin \phi_n + J_n,\end{aligned}$$

donde, tanto como la variable ϕ como la acción J son periódicas con periodo 2π .

El teorema de Poincaré-Birkhoff establece que, una vez que se enciende la interacción perturbativa, los toros racionales del sistema integrable se empezarán a romper en trayectorias alrededor de una secuencia alterna de n puntos fijos elípticos y n puntos fijos hiperbólicos del mapeo. Alrededor de cada punto elíptico habrá un conjunto de órbitas elípticas y alrededor de cada punto hiperbólico habrá órbitas hiperbólicas, conectando las variedades estables e inestables de los puntos silla. Conforme la perturbación crece estas órbitas elípticas se romperán nuevamente en una secuencia alternada de órbitas elípticas e hiperbólicas y así sucesivamente.

Una variedad estable W^s de un punto hiperbólico fijo p_f consiste en el conjunto de puntos que están en la sección de Poincaré ($x \in P$) para los cuales $Z_\epsilon^k : x \rightarrow p_f$ en el límite cuando $k \rightarrow \infty$, de forma similar una variedad inestable W^i de p_f esta formada por el conjunto de puntos $x \in P$ para los cuales $Z_\epsilon^{-k} : x \rightarrow p_f$ en el mismo límite, donde k indica que el mapeo Z_ϵ se aplica k veces. Se puede demostrar, debido a que el mapeo Z_ϵ

es invertible, que W^s y W^i correspondientes al mismo punto fijo p_f no se pueden intersectar ellas mismas pero si se puede intersectar una con la otra. Mas aún, variedades estables no se pueden intersectar con variedades estables de otros puntos fijos y de forma similar para las inestables, pero W^s y W^i si se pueden intersectar independientemente de a que punto fijo pertenecen. Esto da lugar a las marañas homoclínicas y por último a la dinámica caótica. En el caso que estamos tratando de un grado de libertad las variedades W^s y W^i representan curvas en la sección de Poincaré bidimensional.

La dinámica caótica siempre empezará en una región localizada del espacio fase ya que debido a que (2.5) tiene solución única cuando se imponen condiciones iniciales. Las curvas integrales cercanas a las marañas homoclínicas no pueden cruzarse con las curvas integrales correspondientes a los toros irracionales que no han sido destruidos que forman una dinámica regular. Es claro que los toros irracionales que estén mas cercanos a tener una frecuencia racional serán destruidos más rápidamente que los toros que se encuentran mas lejos conforme la perturbación crece. Pero si queremos saber, aplicada una perturbación medida por el parámetro ϵ , que toros irracionales sobreviven, la respuesta la establece el teorema KAM.

2.7. Teorema KAM

Recordemos que estamos tomando en cuenta un Hamiltoniano de la forma $H(\boldsymbol{\xi}) = H_0(\boldsymbol{\xi}) + \epsilon H_1(\boldsymbol{\xi})$, con H_0 integrable. A diferencia del Teorema de Poincaré-Birkoff, el teorema de KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) puede extenderse a varios grados de libertad y uno de sus grandes logros es mostrar que para una ϵ suficientemente pequeña y bajo ciertas condiciones la teoría de perturbaciones converge a todos los ordenes.

Primero supongamos que $\det \left| \frac{\partial \nu_{0i}}{\partial J_{0j}} \right| \neq 0$ es decir $\boldsymbol{\nu}_0(J)$ es invertible al menos localmente; esta condición implica que cada ν_{0i} define un único toro. Segundo, sean $\boldsymbol{\nu}_0$ frecuencias incommensurables, esto es $|\boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{m}| > 0$ para un vector \mathbf{m} con componentes enteras diferentes de cero; $|\boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{m}|$ puede ser arbitrariamente pequeña causando problemas para la convergencia de la teoría de perturbaciones. Una forma de lidiar con esto es imponiendo la condición diofantina débil (CD) definida por:

$$|\boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{m}| \geq \gamma(\epsilon) |\mathbf{m}|^{-k}, \quad (2.50)$$

donde γ y $k > n$ son constantes positivas, por lo que el teorema KAM no trata

todas las frecuencias inconmensurables solo aquellas que satisfacen la CD. Lo que muestra el teorema de KAM es que para ϵ suficientemente pequeña y para frecuencias ν_0 que satisfagan la CD, la ecuación (2.27) converge a un Hamiltoniano integrable al igual que todas las cantidades desarrolladas en series de ϵ de la sección (2.3), esto significa que los toros caracterizados por esta frecuencias ν_0 solo serán deformados ligeramente por la perturbación ϵH_1 .

Cabe mencionar que el teorema KAM no menciona para que valor máximo de ϵ funciona ni tampoco da $\gamma(\epsilon)$, lo único que se sabe es que conforme ϵ crece γ disminuye y viceversa.

Capítulo 3

Propiedades balísticas de transporte en túneles con ondulaciones

Como se mencionó en la introducción, el régimen balístico juega un papel fundamental a bajas temperaturas. Aunque existen diversos trabajos que estudian las propiedades de transporte en este régimen, solo tratan con canales con una pared plana y una ondulada [9, 16, 17], pero en ninguno de estos trabajos se estudia las propiedades de transporte con dos paredes onduladas. Cuando se estudian propiedades de transporte desde el punto de vista cuántico, la mayoría de los artículos tratan con dos paredes rugosas, en donde los efectos dispersivos de las fronteras forman un papel importante en los procesos de transporte [18, 10].

Nuestro propósito es estudiar las propiedades de transporte en el régimen balístico de electrones viajando en un túnel bidimensional con la pared superior e inferior caracterizadas por funciones sinusoidales. Estas propiedades estarán definidas por la separación promedio entre las paredes, la diferencia de fase entre ellas y la amplitud de la onda. También analizaremos el papel que juega la dinámica caótica y regular en dichas propiedades de transporte.

El caso de un túnel definido por una pared seno y una plana (canal semiplano) es estudiado en [9] en donde también se analizan las propiedades de transporte clásicas y se propone un criterio para distinguir entre la dinámica caótica de la dinámica regular midiendo la resistencia clásica. Además, usando el prototipo de este canal como una guía de onda semiconductor, se ha propuesto una forma de construir microlaseres con alta emisión direccional

[23] y recientemente se han construido tales microlaseres obteniéndose algunos resultados experimentales preliminares [4], un análisis cuántico de tal sistema se encuentra en [19] en donde se discute la correspondencia clásica y cuántica con la ayuda de las secciones de Poincaré cuánticas para altas energías.

En vez de trabajar en un canal con una pared plana y una sinusoidal, trabajaremos con dos paredes sinusoidales ya que estamos principalmente interesados en observar como afecta el cambio de fase a la dinámica del sistema y que nuevas aportaciones se pueden dar con este nuevo sistema con respecto a lo que ya se ha anteriormente estudiado, a parte de los resultados teóricos, uno de los objetivos principales es ver si se puede incrementar la potencia de los microlaseres contruidos con el canal semiplano.

Un aspecto importante es que el canal semiplano es equivalente a nuestro canal para cuando las paredes estan desfasadas por π radianes, esto es, se puede demostrar con argumentos meramente geométricos. Para ello consideremos una partícula que rebota entre la pared de arriba y la de abajo. Definamos una secuencia de choques, para el canal semiplano, con la pared de arriba $p'_n = (x'_n, y'_n)$, $n = 1, 2, \dots$ (siendo estos los puntos de contacto entre la partícula y la pared) y una partícula rebotando en nuestro canal que define una secuencia de choques con la pared de arriba $p_n = (x_n, y_n)$. Es fácil de observar que se cumple la siguiente relación:

$$p'_{2n} = p_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Los puntos para n impar coinciden con los choques de la pared sinusoidal de abajo, pero estos puntos son precisamente los puntos simétricos, respecto del eje x de los puntos de la pared de arriba del caso semiplano. Consecuentemente nuestro sistema es una generalización del canal semiplano, ya que contiene a este como caso particular.

3.1. Descripción del canal

Consideremos un canal ondulado con paredes superior e inferior determinadas respectivamente por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_1 &= b + a \sin 2\pi x \\ y_2 &= -b + a \sin 2\pi (x + r), \end{aligned} \quad (3.2)$$

en donde en vez de utilizar las variables reales del canal (ver fig 3.1), utilizamos variables adimensionales $x = \frac{X}{l}$, $y = \frac{Y}{l}$, $b = \frac{B}{l}$, $a = \frac{A}{l}$, $L = \frac{L'}{l}$, donde l es la longitud de un periodo, L' el largo del canal, B la mitad de la anchura promedio del canal, y A la amplitud de las oscilaciones. Cabe mencionar que tanto la pared inferior, como la superior tienen la misma amplitud A y longitud l y lo único que difieren es en la fase relativa r que se tomará como uno de los parámetros a variar. Como primer paso en nuestro

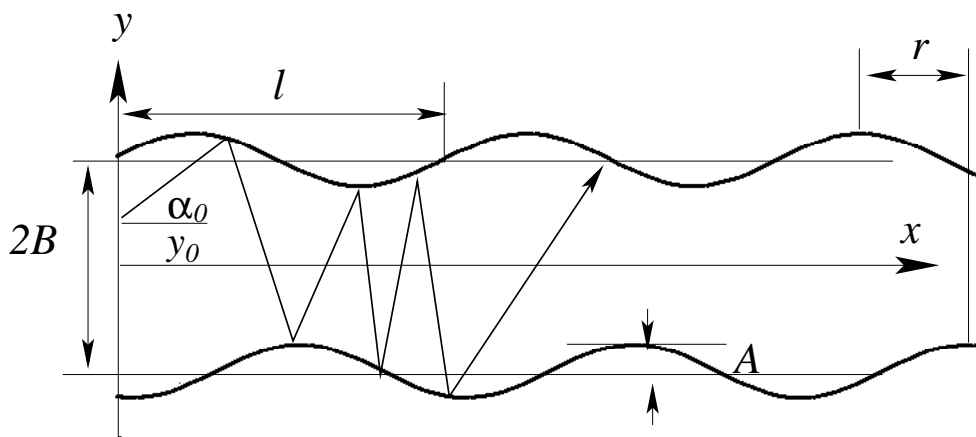


Figura 3.1: canal ondulado

análisis, nos interesa observar la evolución de la trayectoria de una partícula que es lanzada con condiciones iniciales (x_0, y_0, α_0) conforme esta va chocando elásticamente con las paredes y la partícula rebota de forma especular (el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflejado con respecto a la normal del plano de incidencia, que en este caso corresponde a la recta tangente al punto donde choca la partícula). Es importante mencionar que no existen fuerzas externas a este sistema por lo que la partícula se comporta como partícula libre, excepto en los puntos de colisión.

Para nuestro análisis, es suficiente conocer el conjunto discreto de puntos (x_n, α_n) , donde x_n es la posición en x de la partícula en el n -ésimo choque

con la pared superior y α_n es el ángulo medido desde la horizontal con el que sale la partícula justo después del n -ésimo choque con la pared superior. Este conjunto de puntos forman un mapeo discreto que solamente se puede analizar en forma numérica.

Tomando en cuenta que los choques de la partícula con las paredes son especulares, el mapeo es el siguiente

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= 2R_{n+1} - 2S_n + \alpha_n, \\ 2b + a\text{sen}(2\pi x_{n+1}) &= (x_{n+1} - x_n^*) \tan \gamma_n + a \text{sen}(2\pi(x_n^* + r)),\end{aligned}\quad (3.3)$$

donde γ_n es el ángulo medido respecto a la horizontal con el que sale la partícula después del n -ésimo choque con la pared inferior, x_n^* es la posición en la dirección x de la partícula en el n -ésimo choque con la pared inferior, $\tan R_n$ ($\tan S_n$) es la pendiente de la recta tangente a y_1 (y_2) en el punto x_n (x_n^*). Estas variables están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \pi - \alpha_n + 2S_n, \\ R_n &= \tan^{-1}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)\Big|_{x_n}, \\ S_n &= \tan^{-1}\left(\frac{dy_2}{dx}\right)\Big|_{x_n^*}, \\ -2b + a\text{sen}(2\pi(x_n^* + r)) &= (x_n^* - x_n) \tan \alpha_n - a \text{sen} 2\pi x_n.\end{aligned}$$

Cabe mencionar que el mapeo en (3.3) no toma en cuenta la posibilidad de rebotes múltiples en las paredes. Estamos interesados en el análisis de dos tipos de canales: un canal amplio caracterizado por $b > 1$ y un canal estrecho caracterizado por $b < 1$. Para los cálculos numéricos utilizaremos un canal amplio con $b = 2.5$ y un canal estrecho con $b = 0.1$, en los cuales los parámetros a variar serán dos: la fase r y la amplitud a . Se lanzarán desde $x = 0$, 10^5 partículas viajando hacia la derecha con una distribución inicial que se definirá en secciones posteriores cuando entremos en el estudio de las propiedades de transporte.

3.2. Secciones de Poincaré

En vez de trabajar directamente con el mapeo (x_n, α_n) , trabajaremos por conveniencia con su equivalente: el par conjugado (x_n, p_n) , donde $p_n = \cos \alpha_n$ es la componente en la dirección x del momento justo después de la n -ésima

colisión con la pared superior dividido por su magnitud. Esto nos simplificará el trabajo ya que en vez de estudiar el movimiento en un espacio fase de 4 dimensiones, trabajaremos con solo un conjunto de puntos correspondientes al plano (x, p_x) , los cuales corresponden al mapa de Poincaré. Por lo tanto, cada vez que se lancen partículas en el canal con condiciones iniciales diferentes estas trazarán un conjunto puntos (x_n, p_n) diferentes e irán llenando la sección de Poincaré mostrándonos la dinámica del sistema. Tomaremos cuatro canales representativos con diferentes fases ($r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{4}$, $r = 0$) y veremos como evolucionan las secciones de Poincaré a medida que se aumenta la amplitud a .

Queremos también encontrar los puntos fijos del mapeo (x_n, p_n) . Físicamente estos se traducen en partículas que rebotan con la pared de arriba y abajo en los mismos puntos x_f y x_f^* respectivamente. La condición geométrica necesaria y suficiente para que existan puntos fijos, es que exista una recta Y^* que intersecta a la pared de arriba en x_f y a la pared de abajo en x_f^* , en donde la pendiente de recta tangente a $Y_1|_{x_f}$ sea igual a la pendiente de la recta tangente a $Y_2|_{x_f^*}$, además Y^* debe de ser perpendicular a tales rectas. Consideremos el caso $r = 0$ donde las paredes están en fase. Primero buscamos los puntos x_f , x_f^* para los cuales

$$\left. \frac{dY_1}{dx} \right|_{x_f} = \left. \frac{dY_2}{dx} \right|_{x_f^*} \rightarrow \cos(2\pi x_f) = \cos(2\pi x_f^*), \quad (3.4)$$

donde $x_f^* = x_f + h$. Posteriormente queremos encontrar que desplazamiento r se requiere para que Y^* satisfaga las condiciones de punto fijo. Realizando algunos cálculos basados en la geometría del problema se llega a

$$r = h - 4\pi ba \cos(2\pi x_f) + 2\pi a^2 \cos 2\pi x_f (\sin 2\pi(x_f + h) - \sin 2\pi x_f). \quad (3.5)$$

Existen 3 diferentes soluciones para h que satisfacen la igualdad en (3.4) entre $[0, 1]$; estas son $h = 0$, $h = h_d$, $h = 1$. Se puede ver gráficamente que h_d es mucho mayor que el segundo término de la parte derecha de la Ec. (3.5) para pequeñas amplitudes a por lo que en este caso $r \approx h$ y r queda definida en forma aproximada por la Ec. (3.4), regresaremos más tarde a este punto cuando tratemos el problema en la aproximación adiabática.

3.2.1. Secciones de Poincaré para el canal estrecho

Tenemos que para pequeñas amplitudes (por ejemplo $a \approx 0.001$), sin importar cual es la fase relativa r entre las paredes, las secciones de Poincaré mues-

tran una dinámica regular tipo péndulo, con trayectorias elípticas y sinusoidales en el espacio fase (ver Figs. de 3.2a a 3.2d). Las trayectorias elípticas corresponden a partículas atrapadas, moviéndose hacia adelante y hacia atrás en el canal alrededor de un punto fijo estable (punto fijo elíptico), y las trayectorias sinusoidales corresponden a partículas no atrapadas viajando indefinidamente hacia adelante ($p_n > 0$) o indefinidamente hacia atrás ($p_n < 0$). Nótese que no se requiere mostrar toda la dinámica en todo el espacio (x, p_x) , ya que ésta es periódica. Observemos también que el tamaño de la región de las elipses varía conforme r cambia, mientras más cercano se este a $r = 0$ (paredes no desfasadas), la región de elipses tiende a hacerse mas pequeña hasta que en $r = 0$ (Fig. 3.2d) prácticamente no hay partículas atrapadas y el comportamiento del sistema es similar al de simplemente dos paredes planas en donde se tienen líneas horizontales rectas en (x, p_x) . Cabe destacar que la posición de los puntos fijos elípticos (x_f^e) e hiperbólicos (x_f^h) dependen principalmente del desfase r ya que como a es pequeña $r \approx h$ y x_f queda determinado por (3.4).

A medida que incrementamos la amplitud desde $a = 0$ hasta una amplitud diferente de cero, la fase se hace patente (ej. $r = \frac{1}{2}$, $a = 0.006$), la dinámica sigue siendo regular pero la región de elipses se vuelve cada vez más grande incrementando así el número de partículas atrapadas en el canal. Para el caso de $r = 0$ vemos que cuando se aumenta la amplitud hasta $a = 0.01$ se observa ya de forma clara la región de elipses pero estas siguen siendo pequeñas en comparación con las otras fases (ver Fig 3.3). Si incrementamos mas la amplitud las elipses comienzan a deformarse y a ocupar una región aún mas grande, pero ahora el rompimiento de algunas curvas KAM ya es evidente y da lugar al comportamiento caótico de la separatriz (la curva que divide los dos tipos de movimiento libracional y rotacional) ver Figs. 3.4a a 3.4c. Nótese que ya se puede apreciar claramente que se empiezan a formar pequeñas islas alrededor de las elipses que no se han roto.

Las regiones caóticas no pueden extenderse debido a que existen otras curvas KAM que no se han roto y que las limitan, por lo que no puede haber reflexión de partículas fuera de la región de elipses. Si se sigue incrementando a se llega a una amplitud crítica a_c que depende de la fase en donde ya no hay curvas KAM que prohíben la conexión entre las diferentes regiones caóticas y lo que tenemos finalmente es una zona central de islas rodeada por un mar caótico (ver Figs. 3.5a a 3.5d). También se puede ver regiones de islas secundarias rodeando a las primarias en este momento ya puede haber partículas reflejadas fuera de la región de islas centrales. Se puede

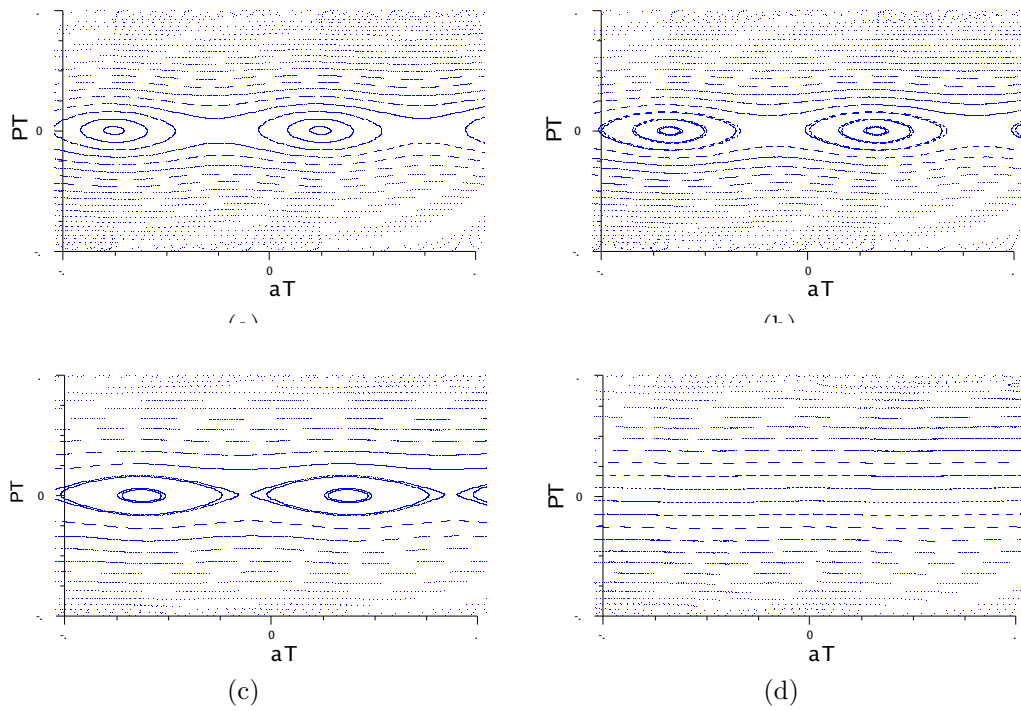


Figura 3.2: Secciones de Poincaré para canal estrecho: (a) $a = 0.001$, $r = \frac{1}{2}$; (b) $a = 0.001$, $r = \frac{1}{3}$; (c) $a = 0.001$, $r = \frac{1}{4}$; (d) $a = 0.001$, $r = 0$.

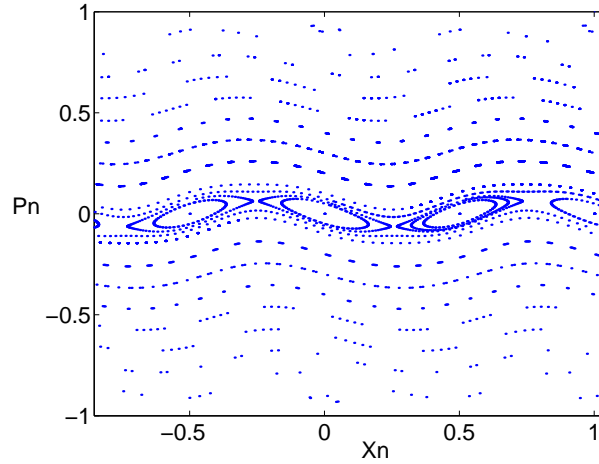


Figura 3.3: Sección de Poincaré para $b = 0.1$, $a = 0.01$ y $r = 0$.

observar además, regiones de islas secundarias rodeando a las primarias; estas representan también partículas atrapadas en el canal con órbitas cerradas de periodo k en el espacio fase, el centro de estas islas representa puntos fijos de periodo k (un punto fijo de periodo k es un punto fijo del mapeo en (3.3) que en este caso representa a una partícula que después de k rebotes regresa a su posición inicial en el espacio fase) donde el periodo está dado por el número de islas alrededor de la isla central; pocas condiciones iniciales tienen acceso a estas islas.

Si se sigue incrementando la amplitud, la zona de islas centrales comienza a destruirse al igual que las islas secundarias, hasta que llega el momento en el cual prácticamente se tiene un régimen caótico global excepto en el caso $r = \frac{1}{2}$ en donde se tienen todavía islas centrales de tamaño considerable aún para cuando se cierra prácticamente el canal. Cabe destacar que conforme se va incrementando la amplitud a , mientras más cerca se este de $r \approx 0.3$ las curvas KAM tienden a romperse de forma más rápida, esto quiere decir que se llega de forma más rápida a tener una región regular de curvas rodeada por un mar caótico, por el contrario mientras más se este cerca de $r = 0$ este proceso se vuelve más lento.

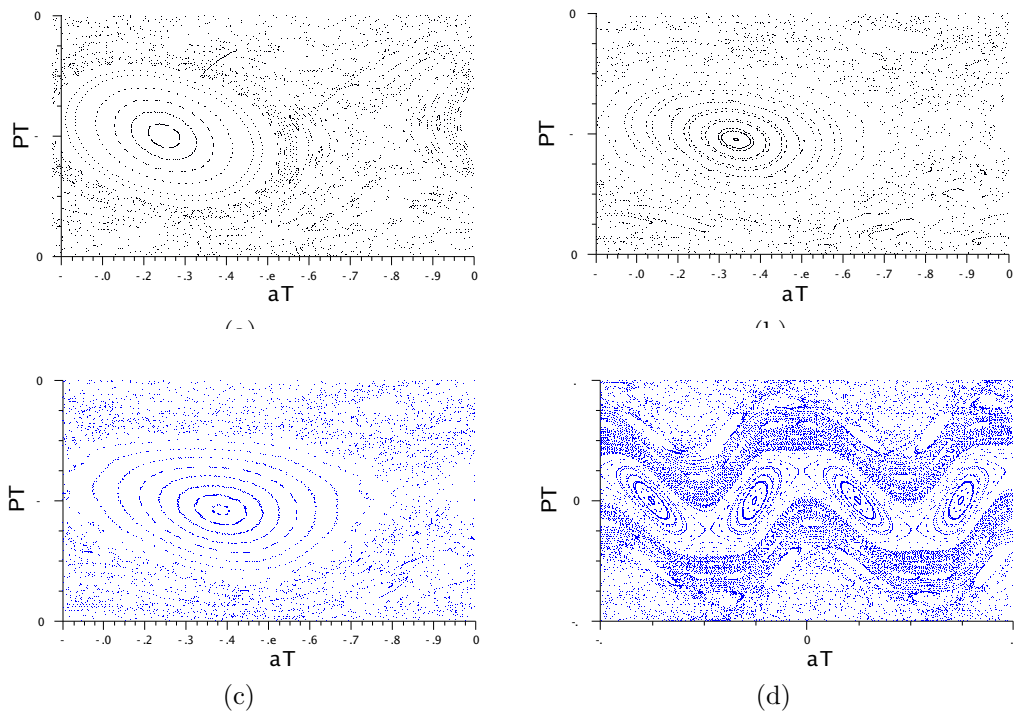


Figura 3.4: Secciones de Poincaré para el canal estrecho: (a) $a = 0.02$, $r = \frac{1}{2}$; (b) $a = 0.015$, $r = \frac{1}{3}$; (c) $a = 0.017$, $r = \frac{1}{4}$; (d) $a = 0.04$, $r = 0$.

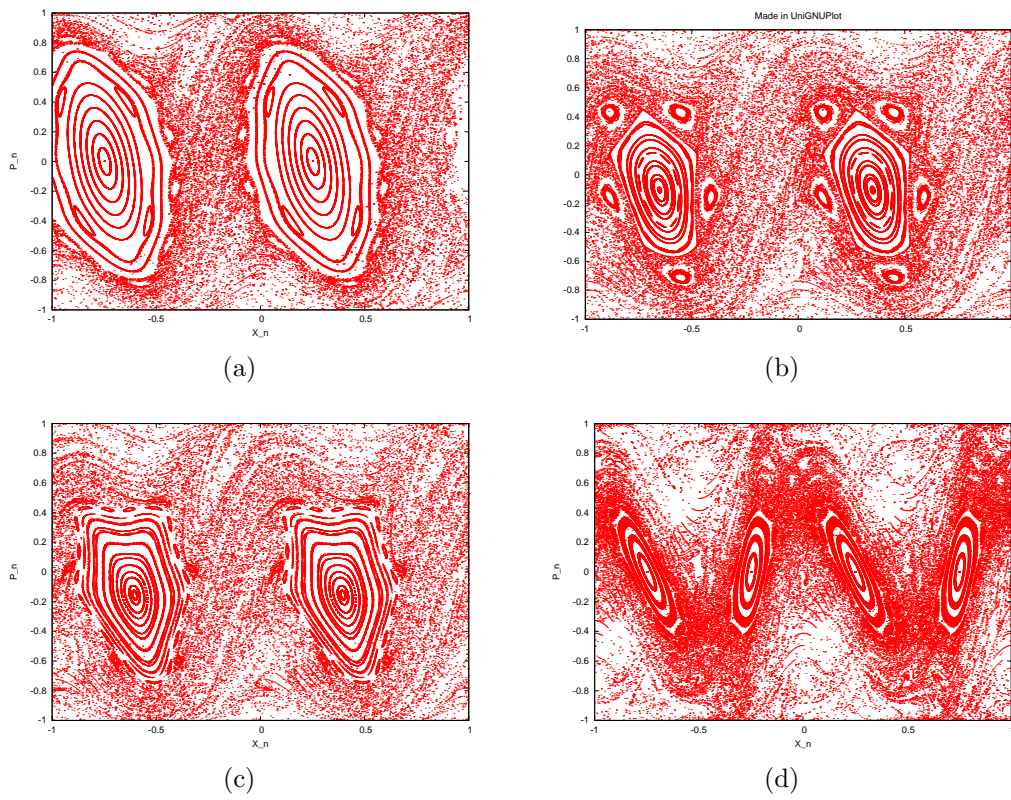


Figura 3.5: Secciones de Poincaré para el canal estrecho: (a) $a = 0.035, r = \frac{1}{2}$; (b) $a = 0.03, r = \frac{1}{3}$; (c) $a = 0.032, r = \frac{1}{4}$; (d) $a = 0.065, r = 0$.

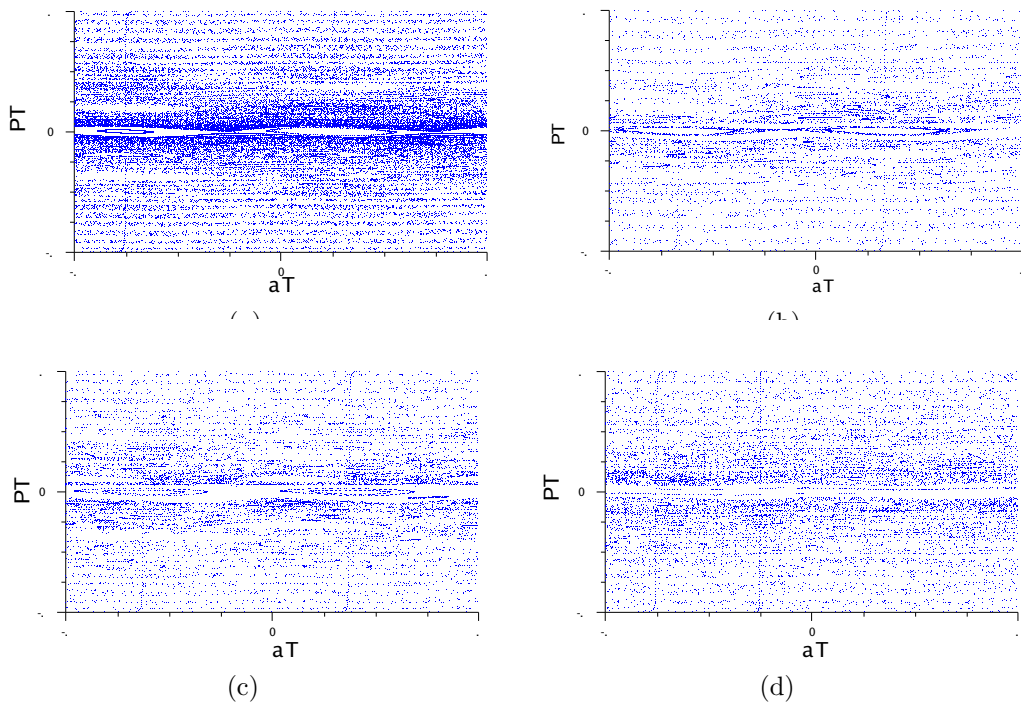


Figura 3.6: Secciones de Poincaré para el canal amplio: (a) $a = 0.001$, $r = \frac{1}{2}$; (b) $a = 0.001$, $r = \frac{1}{3}$; (c) $a = 0.001$, $r = \frac{1}{4}$; (d) $a = 0.001$, $r = 0$.

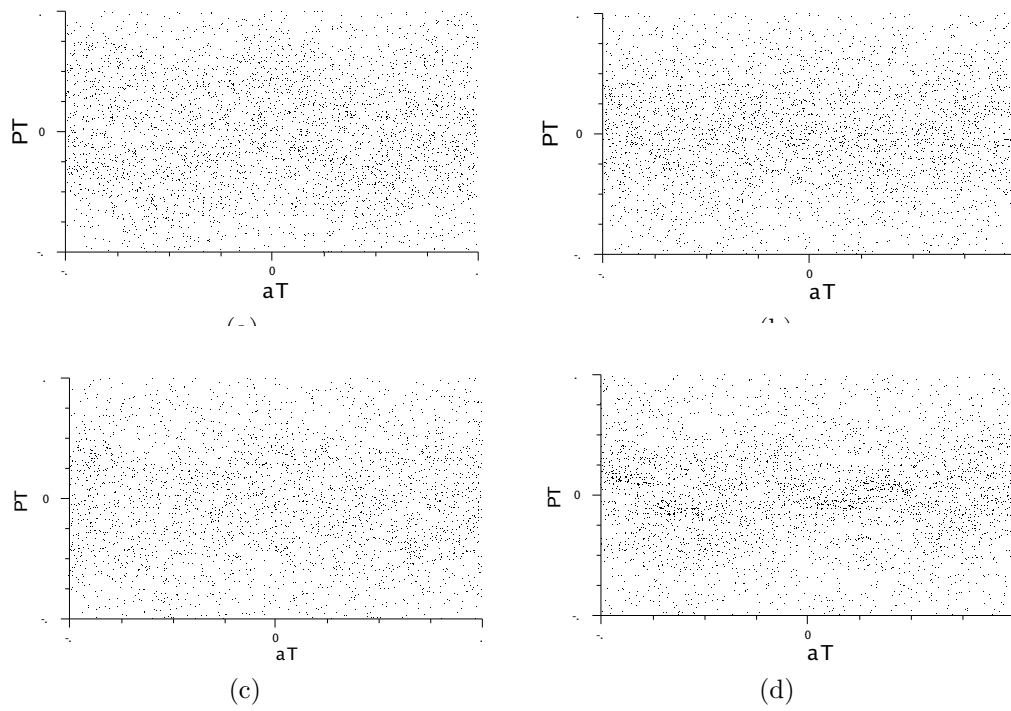


Figura 3.7: Secciones de Poincaré para el canal amplio: (a) $a = 0.012$, $r = \frac{1}{2}$; (b) $a = 0.0048$, $r = \frac{1}{3}$; (c) $a = 0.005$, $r = \frac{1}{4}$, (d) $a = 0.006$, $r = 0$.

3.2.2. Secciones de Poincaré para el canal amplio

Para el canal amplio tenemos que el régimen caótico se presenta para muy pequeñas amplitudes (Ej. $a \approx 0.001$, ver Figs. 3.6a a 3.6d) fuera de las regiones de elipses que en este caso son más pequeñas que en el caso del canal estrecho (Figs. 3.2a a 3.2d) en el cual se presentó una dinámica regular. Para el caso $r = 0$ (Fig. 3.6d) la región de elipses prácticamente no es visible al igual que en el caso estrecho. Si se sigue incrementando la amplitud se llega a un valor a'_c en donde prácticamente todas las curvas KAM se rompen y dan lugar a un comportamiento caótico global (ver Figs. 3.7a a 3.7d), en donde se llega primero a este régimen si se trabaja con $r \approx 0.33$, y se llega en forma más lenta a este régimen cuando $r \approx \frac{1}{2}$.

3.3. Propiedades de transporte del canal

3.3.1. Representación en 3D del canal

Una de las propiedades de transporte de mayor interés es la transmitividad que es definida como el flujo de partículas transmitidas entre el flujo total inicial inyectado en el canal. Cabe destacar que este problema que estamos tratando puede verse como la simplificación de una guía de onda en 3 dimensiones con ondulaciones. La Fig. 3.1 representa un corte longitudinal del túnel (corte con un plano $x = \text{cte}$) y la pared superior e inferior del canal están representado por las Ecs. en (3.2) pero ahora en un espacio de 3 dimensiones, las paredes laterales son simplemente paredes planas.

Trataremos el caso de una densidad inicial de partículas constante ρ_0 , pero con una distribución inicial angular dada por (3.6) [9, 17], esto se puede ver en forma discreta, como un conjunto de partículas con densidad constante viajando a una velocidad v y lanzadas con un ángulo α_1 , otro conjunto de partículas con densidad constante lanzadas a un ángulo α_2 con la misma velocidad v y así sucesivamente .

$$\rho(\alpha_0) = \rho_0 \cos \alpha_0 \quad (3.6)$$

Consideremos ahora el flujo de partículas lanzadas a un ángulo α_i que pasan a través de una placa rectangular de área A :

$$\Phi = \int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad (3.7)$$

$$= \rho v A \cos \alpha_i \quad (3.8)$$

Ahora consideremos todos los conjuntos de partículas lanzadas a todos los diferentes ángulos posibles, entonces el flujo total Φ_t es simplemente

$$\Phi_t = \sum_{i=1}^n \rho v A \cos \alpha_i$$

Donde n es el número de diferentes ángulos α_i . Si en vez de considerar un conjunto discreto de partículas lanzadas a diferentes ángulos consideramos una densidad angular de partículas dada por 3.6. Entonces en el continuo tenemos que el flujo total es:

$$\phi_t = vA \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho(\alpha) \cos \alpha d\alpha \quad (3.9)$$

$$= \frac{n_0}{V} vA \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha \quad (3.10)$$

donde $\rho_0 = \frac{n_0}{V}$ es el número de electrones inyectados a la derecha del canal que usualmente es del orden de 10^5 electrones y V es el volumen en el cual se encuentran las n_0 partículas.

Observemos que como la velocidad de las partículas solo tienen componentes en x y en z y no tiene componentes en y , las partículas que entren en el plano $x = \text{cte.}$ seguirán su movimiento en ese plano conforme rebotan en el túnel, además todos los planos $x = \text{cte.}$ son equivalentes, por lo tanto el problema se reduce a un problema de partículas que rebotan en un canal sinusoidal bidimensional (ver fig. 3.1).

Numéricamente esto se simulará distribuyendo 100 cañones uniformemente a lo largo del eje y en $x = 0$ cada uno de los cuales lanzará 1000 partículas con la distribución angular (3.6), y además trabajaremos con una longitud de canal $l = 2$ medido a partir de $x = 0$ que será nuestra posición inicial de cañones.

3.3.2. Canal estrecho con amplitudes pequeñas

Se puede observar a partir de las Figs. 3.2a a la 3.2d que para amplitudes pequeñas, las partículas que se encuentran atrapadas dentro del canal (la región de elipses es la única que contribuye a la reflexividad) efectúan colisiones casi perpendiculares con las paredes, es decir la velocidad en y después de cada rebote es mucho mayor que la velocidad en x ($|v_y| \gg |v_x|$). Bajo

estas condiciones se puede hacer uso del teorema adiabático y concluir que existe una cantidad que permanece casi constante (condición de invariancia adiabática) a medida que la partícula rebota con las paredes. Esta cantidad es la acción definida para este caso como $C = D(x)|v_y|$ donde $D(x)$ es la separación entre las paredes al punto x . Tomando en cuenta la conservación de la energía en los rebotes y la condición de invariancia adiabática es posible ver que el movimiento en la dirección de x esta descrito por

$$(\dot{x}_n)^2 = \frac{2E}{m} - \left(\frac{C}{D(x_n)} \right)^2, \quad (3.11)$$

donde $E = \frac{1}{2}mv^2$ y $v_x = \dot{x}_n$, $v_y = \dot{y}_n$, el índice n se agregó para indicar la velocidad justo después del n -ésimo choque. El término $V(x) = \left(\frac{C}{D(x)} \right)^2$ puede ser interpretado como un potencial efectivo. En nuestro caso

$$D(x) = 2b + a \sin 2\pi x - a \sin(2\pi(x + r)).$$

Es importante observar que el potencial efectivo $V(x)$ reproduce las regiones de elipses que aparecen en las secciones de Poincaré (Figs. 3.2a a 3.2c) para el canal estrecho y pequeñas amplitudes. Un caso interesante es cuando $r = 0$, en donde $D(x) = 2b$, por lo cual $V(x)$ predice que no hay regiones de elipses, lo cual concuerda con los resultados numéricos mostrados en la Fig. 3.2d.

A partir de los máximos y mínimos de $V(x)$ se puede obtener la posición x_f de los puntos fijos tanto hiperbólicos como elípticos, con lo cual llegamos a que estos deben satisfacer

$$\cos 2\pi x_f = \cos 2\pi(x_f + r). \quad (3.12)$$

Es fácil ver que para $r = \frac{1}{2}$, los puntos fijos elípticos, x_f^e , e hiperbólicos, x_f^h , están localizados respectivamente en $x_f^e = \frac{1}{4} \pm n$ y $x_f^h = \frac{3}{4} \pm n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$, de hecho los puntos fijos hiperbólicos y elípticos siempre están separados por $\frac{1}{2}$. excepto para el caso $r = 0$ (esto se puede ver numéricamente).

Usando la condición de invariancia adiabática para dos choques distintos x_n y x_m tenemos que $D(x_n)\dot{y}_n = D(x_m)\dot{y}_m$, por lo cual

$$\begin{aligned} (2b + a \sin 2\pi x_n - a \sin 2\pi(x_n + r)) \cos \beta_n \\ = (2b + a \sin 2\pi x_m - a \sin 2\pi(x_m + r)) \cos \beta_m, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $\beta_n = \frac{\pi}{2} - \alpha_n$ es el ángulo formado entre la trayectoria de la partícula y la vertical justo después del n -ésimo choque, si consideramos las partículas con un movimiento libracional (elipses) β_n ($n = 1, 2, \dots$) decrece gradualmente conforme la partícula va rebotando hacia adelante hasta que es prácticamente es cero en x_N (ver Fig. 3.8), que es el punto donde la partícula comienza a regresarse. Entonces existen dos ángulos críticos iniciales de lanzamiento (β_{c_1} y β_{c_2}), que dependen de los parámetros geométricos del canal y de la posición de lanzamiento (X_0, Y_0), para el cual la partícula ya no se regresa si no se transmite indefinidamente. Para pequeñas amplitudes es posible ver numéricamente que los ángulos críticos casi no varían con Y_0 . Para obtenerlos escogeremos una posición representativa ($X_0, Y_0 = y_1(X_0)$), en este caso la condición inicial en el espacio fase ($X_0, \text{sen } \beta_c$) corresponde a la elipse de mayor semieje mayor alrededor de algún punto fijo elíptico $x_f^e = x_{f_0}^e$ que depende de la posición de lanzamiento (X_0, Y_0).

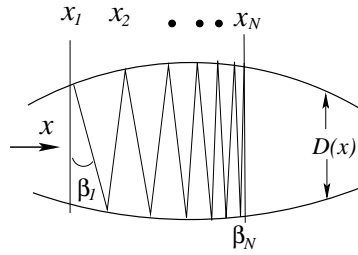


Figura 3.8: Figura que muestra la aproximación adiabática

Escogiendo $\beta_n = \beta_c$, $\beta_m = \beta_N \approx 0$ tenemos que $x_n = X_0$ y $x_m = X_N$, el cual está cerca del punto hiperbólico igual a $x_{f_0}^h = x_{f_0}^e + \frac{1}{2}$, por lo tanto $X_N \approx x_{f_0}^h$; la posición x_f^e está determinada por la elección de X_0 . Si sustituimos estos valores en la Ec. (3.13), y como β_c es pequeña al igual que el término $\frac{a}{b}$, mantenemos términos a segundo orden en β_c y a primer orden en $\frac{a}{b}$, lo cual nos lleva a

$$\begin{aligned}
 (\beta_c)^2 \approx & \frac{a}{b} \left[\text{sen}(2\pi(x_{f_0}^h + r)) + \text{sen}(2\pi X_0) \right. \\
 & \left. - \text{sen}(2\pi x_{f_0}^h) - \text{sen}(2\pi(X_0 + r)) \right]. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Si $r = \frac{1}{2}$ (que es equivalente al canal semiplano) y $X_0 = 0$, $\beta_c^2 \approx \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ que

corresponde exactamente al calculo realizado para encontrar el ángulo crítico para el canal semiplano [9]

Tomando en cuenta que esto se puede aplicar a cualquier β_c lanzada con la misma X_0 y que $v_x = v \cos \alpha_0 \approx v B_0$, la reflexividad R (flujo de partículas reflejadas entre el flujo total inyectado en el canal) se puede calcular como

$$\begin{aligned} T &= \frac{\int_{-\alpha_c}^{\alpha_c} \rho(\alpha_0) \cos \alpha_0 d\alpha_0}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho(\alpha_0) \cos \alpha_0 d\alpha_0} \\ &= 1 - \frac{2 \int_0^{\beta_c} \sin \beta_0 \rho(\frac{\pi}{2} - \beta_0) d\beta_0}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho(\alpha_0) \cos \alpha_0 d\alpha_0}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde $\alpha_c = \frac{\pi}{2} - \beta_c$, lo cual implica que $R = 1 - T$ es igual a

$$R = \frac{4}{\pi} \int_0^{\beta_c} \sin^2 \beta_0 d\beta_0 \approx \frac{4}{3\pi} \beta_c^3. \quad (3.16)$$

Usando la aproximación que se encontró para β_c (Ec. 3.14) tenemos

$$R = G(r) a^{\frac{3}{2}}, \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{4}{3\pi b^{3/2}} \left[\sin(2\pi(x_{f_0}^h + r)) + \sin(2\pi X_0) \right. \\ &\quad \left. - \sin(2\pi x_{f_0}^h) - \sin(2\pi(X_0 + r)) \right]^{3/2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Entonces, sin importar con que fase se este trabajando $R \propto a^{\frac{3}{2}}$. Este resultado es el mismo obtenido para el caso del canal simiplano [9], de hecho el caso del canal semiplano es un caso particular de (3.17) con $r = \frac{1}{2}$ pero con el ancho promedio del canal igual a b .

En la Fig. 3.9 se muestra la reflexividad teórica R dada en (3.17), como función de la fase para una amplitud fija pequeña de $a = 0.001$. Una posición inicial de cañones $X_0 = 0$ y $x_{f_0}^h$ se determina a partir de la Ec. (3.12). Se observa que R tiene un máximo alrededor de $r \approx 0.67$, esto era de esperarse ya que como se había discutido previamente, la resistencia en $r = 0$ es prácticamente nula comparado con las otras fases y como $r = 1$ representa la misma situación física que $r = 0$ y si este comportamiento cambia de manera continua, entonces la función debe tener un máximo. Es interesante observar

que, mediante un cambio de fase, para amplitudes pequeñas se puede elevar la reflexividad del canal semiplano ($r = \frac{1}{2}$) hasta en un 47%, como se verá en el siguiente capítulo. este hecho pero trabajado a amplitudes grandes puede tener pc

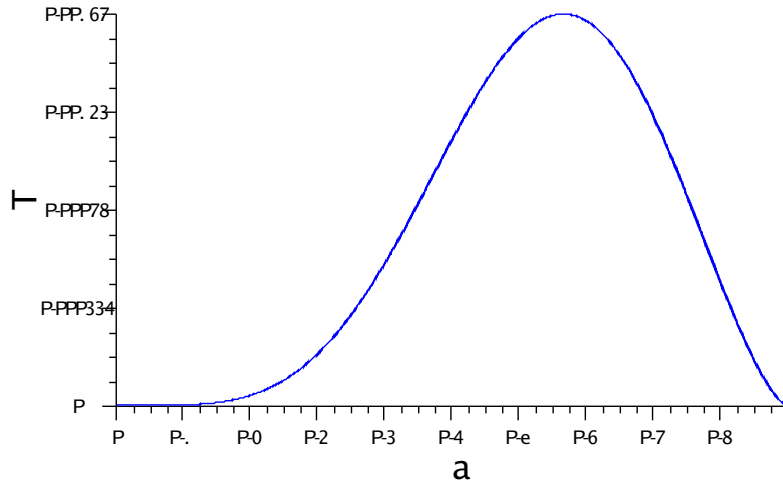


Figura 3.9: Reflexividad como función de la fase para $a=0.001$

Una cantidad medible en el laboratorio es la resistencia ϱ (corriente por unidad de voltaje) que esta relacionado con la reflexividad R a través de la fórmula de Landauer [20].

$$\varrho = \frac{2\pi\hbar R}{e^2 T}, \quad (3.19)$$

donde \hbar es la constante de Planck y e la carga del electrón, si bien es cierto esta fórmula es cuántica y T es el flujo de probabilidad de la onda que pasa a través de la cavidad dividido entre el flujo de probabilidad de la onda incidente, pero a altas energías obtenemos el régimen semiclásico y por lo que NT representaría el flujo de partículas transmitidas en nuestro caso. Como a es pequeña R es pequeña, por lo cual $T \rightarrow 1$ y la resistencia $\varrho(a) \propto G(r)a^{3/2}$, para el canal estrecho.

3.3.3. Canal amplio con pequeñas amplitudes

Es claro que para el canal amplio se tiene dinámica caótica aún para pequeñas amplitudes (ver Figs. 3.7a a 3.7d), mientras que para el caso estre-

cho para pequeñas amplitudes el espacio de fase está dominado por las curvas KAM. Podemos tomar ventaja de este comportamiento caótico y hacer una comparación con los resultados obtenidos para paredes aleatorias en donde se tiene una secuencia estadística $y(x_n)$ en los puntos de colisión, x_n . De hecho existe una correspondencia uno a uno entre el tipo de trayectorias observadas (caóticas o regulares) y esta secuencia estadística, entonces la dispersión caótica con paredes deterministas es indistinguible de la dispersión con paredes aleatorias [22].

Es conocido que la resistencia ϱ de un canal con paredes aleatorias se incrementa cuadráticamente con la raíz cuadrática media ξ , $\varrho \propto \frac{\xi^2}{b^2}$ [21]. Esta expresión solo es válida cuando $\xi \ll b$, donde b es la separación promedio entre las paredes. Recurriendo a la fórmula de Landauer en (3.19) y a que $T \rightarrow 1$ conforme $\xi \rightarrow 0$, tenemos que

$$T(\xi) = 1 - H\xi^2, \quad (3.20)$$

donde $H(r, l)$ es una constante de proporcionalidad que depende de b , de la fase r y de la longitud del canal l . Para nuestro caso, asumimos que ξ es proporcional a la amplitud de las oscilaciones a y con esto concluimos que para el canal amplio, la reflexividad $R \propto a^2$ y por tanto utilizando la fórmula de Landauer, para amplitudes pequeñas tenemos:

$$\varrho \propto H(r, l)a^2. \quad (3.21)$$

Debido al comportamiento diferente de electrones viajando en ambos tipos de canales para amplitudes pequeñas, se puede proponer un criterio para distinguir la dinámica caótica de la regular midiendo la resistencia clásica.

3.4. Resultados numéricos y posibles aplicaciones

En esta sección discutiremos los resultados numéricos para pequeñas y grandes amplitudes y los compararemos con los resultados teóricos obtenidos en la sección anterior. En las Figs. de la 3.10a a la 3.10c, se muestra la reflexividad como función de la amplitud para tres fases diferentes y amplitudes pequeñas en el canal estrecho. Observamos un comportamiento similar a lo predicho por la Ec. en (3.17); si hacemos las amplitudes más pequeñas el ajuste será más cercano a $R \sim a^{\frac{3}{2}}$. En las Figs. de la 3.11a a la 3.11d se

muestra la transmitividad como función de la amplitud. En estas figuras se observa un decaimiento monótono en T conforme a crece hasta amplitudes muy grandes en donde casi se cierra el canal. Cabe destacar el decaimiento lento de T para $r = 0$ (ver Fig. 3.11), en donde la amplitud es prácticamente 1 hasta $a \approx 0.005$ que es en donde empiezan a aparecer pequeñas elipses en las secciones de Poincaré, este canal nunca se cierra aunque $a \rightarrow \infty$.

En la Fig. 3.12 se muestra la reflexividad como función de la fase para $a = 0.03$ en el caso del canal estrecho. En este régimen se tiene una región de islas centrales rodeada por un mar caótico y también por islas secundarias. Observemos que el máximo se encuentra alrededor de $r \approx 0.67$ similar al caso de amplitudes pequeñas (discutido en la sección anterior), pero ahora la curva está deformada notoriamente. Es importante mencionar que el cambio en la reflexividad (conforme r varia y a se mantiene constante), proviene del hecho de que al modificar la fase se cambia la posición de los puntos fijos, permitiendo a más o a menos partículas acceder a la región de dinámica regular incrementando o decrementando la reflexividad. La reflexividad se puede aumentar en hasta un 43% con respecto al canal semiplano y la resistencia hasta un 60.4%, lo cual puede tener potenciales aplicaciones podría resultar con un incremento significativo, en la potencia de los microláseres construidos con el canal semiplano.

De hecho, en trabajos recientes se ha recurrido a la capacidad de atrapamiento de cavidades conectadas a guías de onda para elaborar micro-láseres de alta emisión direccional [3, 4, 16, 23], en donde se han utilizado parámetros de la cavidad que llevan a una dinámica caótica mixta similar a la sección de Poincaré mostrada en la Fig. 3.5b. Un estudio cuántico de tales sistemas ha mostrado resonancias en la conductancia como función de la energía. Se ha observado que las resonancias corresponden a energías de estados propios que viven en la región del espacio fase de islas estables, lo cual clásicamente implica una concentración de rayos dentro de la cavidad en una región pequeña o cuánticamente una densidad de probabilidad muy alta en esas regiones.

Como se ha visto en los resultados numéricos sustituyendo la pared plana por una ondulada y con un cambio de fase adecuado se puede incrementar la resistencia del sistema en un porcentaje apreciable. Esto implica más partículas atrapadas dentro del canal, lo cual se podría traducir en un incremento en la potencia del láser, para saber con certeza si este exceso de partículas se pueden focalizar y decir en cuanto se puede incrementar la potencia del microláser elaborado con el canal semiplano, se requiere resolver la ecuación de Schrödinger para este problema que esencialmente es una ecuación Helmholtz

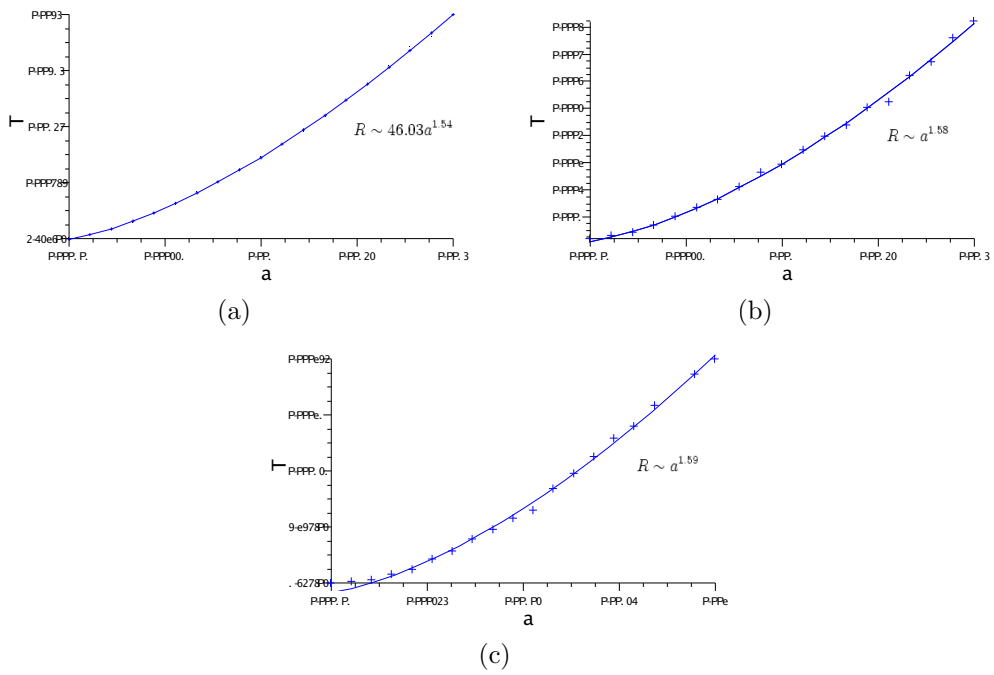


Figura 3.10: reflexividad para el canal estrecho como función de la amplitud para el canal estrecho y con fases fijas: (a) $r = \frac{1}{2}$; (b) $r = \frac{1}{3}$; (c) $r = \frac{1}{4}$.

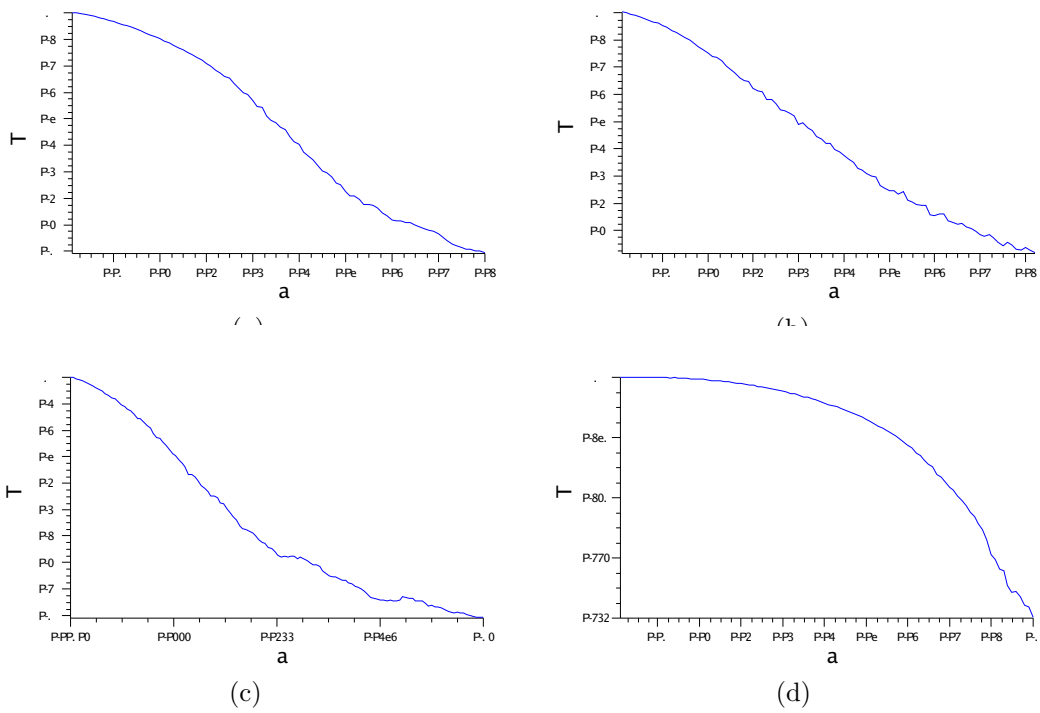


Figura 3.11: Transmitividades para el canal estrecho como función de la amplitud: (a) $r = \frac{1}{2}$; (b) $r = \frac{1}{3}$; (c) $r = \frac{1}{4}$; (d) $r = 0$.

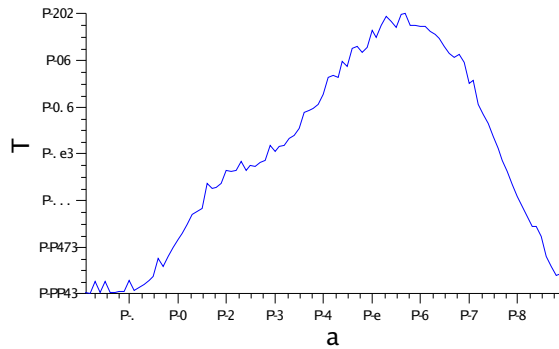


Figura 3.12: Se muestra la reflexividad como función de la fase, para $a = 0.03$ en el canal estrecho

con condiciones de frontera de Dirichlet, ya que la función de onda se debe anular sobre las paredes. Este es un problema interesante pero que queda fuera del objetivo de esta tesis.

Las Figs. de la 3.13a a la 3.13b muestran la resistencia del canal amplio contra la amplitud para amplitudes pequeñas y cuatro fases diferentes. Notemos que el ajuste de la curva no es tan cercano a la predicción teórica de $R \sim a^2$. Esta diferencia es atribuible principalmente a dos causas: primero, el error numérico que proviene de transformar la distribución en (3.8) a una distribución discreta y segundo, la resistencia a amplitudes pequeñas es pequeña por lo que el error afecta un poco en este caso.

En las Figs. 3.14a y 3.14 se muestra dos gráficas de la reflexividad como función de la fase r para amplitudes fijas de $a = 0.001$ y $a = 0.017$, respectivamente. En la primera de estas figuras se observa un máximo alrededor de $r = 0.62$. Cabe destacar que en este régimen si bien es cierto que existe una dinámica caótica, también existe una dinámica regular que contribuye a la reflexividad. Sin embargo, para el caso de la amplitud $a = 0.017$ simplemente se tiene una dinámica caótica global para todas las fases y la reflexividad oscila conforme r varía, mostrando un comportamiento cualitativamente diferente al de pequeñas amplitudes (cuando la amplitud es $a = 0.001$).

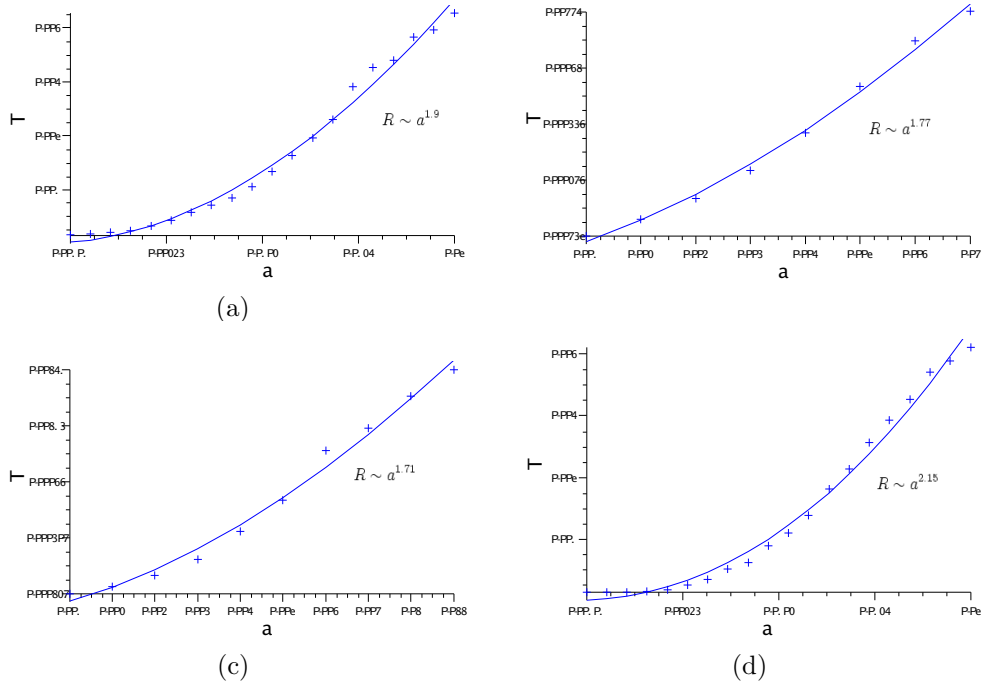


Figura 3.13: Resistencias a amplitudes pequeñas para el canal amplio contra la amplitud: (a) $r = \frac{1}{2}$; (b) $r = \frac{1}{3}$; (c) $r = \frac{1}{4}$; (d) $r = 0$.

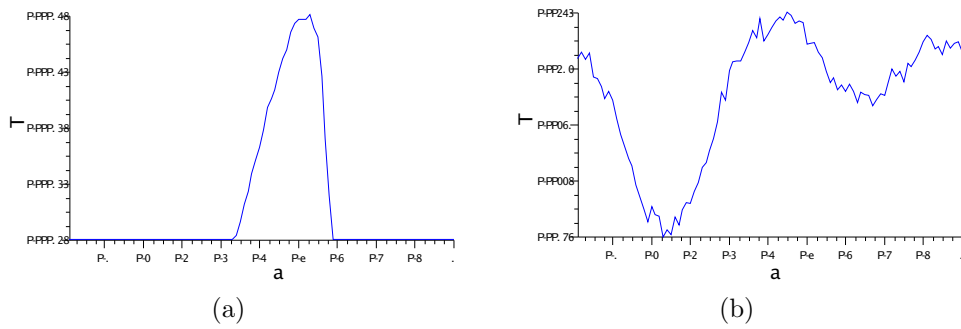


Figura 3.14: Resistencias para el canal amplio contra la fase: (a) $a = 0.001$; (b) $a = 0.017$.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la dinámica de partículas viajando en un túnel bidimensional con paredes sinusoidales, en donde se han analizado de forma extensa dos tipos de geometría: un canal ancho y uno estrecho. Se observó, mediante las secciones de Poincaré, que hay una transición de una dinámica regular a una dinámica caótica mixta conforme la amplitud crece para el canal estrecho, de hecho la fase solo hace que este proceso de rompimiento de curvas KAM ocurra mas rápido o lento mientras la amplitud crece, mientras que para el canal amplio se tiene una dinámica caótica aún para pequeñas amplitudes y para amplitudes mayores se tiene caos global. Basado en estos hechos y corroborado por los cálculos numéricos encontramos que la resistencia para pequeñas amplitudes viene dada para el canal estrecho por $\varrho \propto G(r)a^{\frac{3}{2}}$ y para el canal amplio por $\varrho \propto H(r)a^2$, en donde $G(r)$ es obtenido analíticamente para el primer caso pero para el segundo $H(r)$ quedó indeterminado. Con esta diferencia de comportamiento para a pequeña se propuso un criterio para distinguir la dinámica regular de la caótica midiendo la resistividad clásica.

Como ya hemos mencionado anteriormente, el caso del canal semiplano es un caso particular de nuestro sistema, ya que cuando la diferencia de fase entre las paredes es $r = \frac{1}{2}$, obtenemos la misma física. Cabe aclarar que para el canal semiplano se obtiene básicamente el mismo resultado en la resistencia para ambos tipos de canales en las leyes de potencia en la amplitud, pero la diferencia importante que se ve reflejada en la resistencia del canal con dos paredes onduladas, debido a los factores de proporcionalidad $G(r)$ y $H(r)$ que, dependiendo de la fase pueden ser significativos para fines de determinar la resistencia.

Hemos discutido también una posible forma de mejorar la construcción de guías caóticas para la emisión de microláseres aprovechando el incremento en la resistencia para el canal estrecho a través del factor $G(r)$. El estudio cuántico de este sistema es de gran importancia ya que con ello se puede cuantificar las mejoras en tales guías de onda. Al respecto de esto ya se dio un primer paso con el análisis aquí presentado. Resta por resolver el problema de la evolución de la función de onda (solución de la Ec. de Schrödinger), que con una aproximación semiclásica sería suficiente. Esto podría ser de gran utilidad para obtener información cuantitativa del incremento de la potencia del microláser.

Con este trabajo se han abierto diferentes direcciones de investigación a futuro, tanto teóricas como prácticas. Una posibilidad es estudiar la versión cuántica del sistema estudiado, con algunas de las posibles implicaciones ya discutidas, tales como los puntos y los alambres cuánticos. Otra posibilidad de estudio es la semejanza en las trayectorias que siguen las partículas, cuando la fase entre las paredes es de $r = 1/2$ con la que siguen las partículas cargadas en un plasma confinado por campos magnéticos; las llamadas botellas magnéticas. Una de las cosas que se pretende con estas botellas es tener el mayor número posible de partículas confinadas.

Bibliografía

- [1] C. M. Marcus, A. J. Rimberg, R. M. Westervelt, P. Hopkins, and A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 506 (1992).
- [2] M. L. Roukes *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 3011 (1987).
- [3] C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nockel, A. D. Stone, J. Faist, D. L. Sivco and A. Y., *Science* **280**, 1556 (1998).
- [4] J. A. Méndez-Bermudez, G. A. Luna Acosta, U. Kuhl, *Microelectron. J.* **36**, 285 (2005).
- [5] A. M. Ozorio de Almeida, *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization*, Cambridge University Press 1992.
- [6] K. Nakamura and T. Harayama, *Quantum Chaos and Quantum Dots* Ed., Oxford University Press 2004.
- [7] C. W. Beenaker and H. van Houten, *in Solid State Physics: Advances in Research and Application*, edited by H. Ehrenreich and D Turnbull (Academic, New York, 1991), Vol. 44, pp. 1-228.
- [8] S. W. McDonald and A. N. Kaufman, *Phys. Rev.* **A37**, 3067, (1988).
- [9] G. A. Luna-Acosta, A. Krokhin, M. A. Rodriguez, and P. H. Hernández-Tejeda, *Phys. Rev.* **B54**, 11410 (1996).
- [10] A. E. Meyerovich and S. Stefanians, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 316 (1994).
- [11] J. V. José, E. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge University Press 2002.
- [12] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations* Ed. MIT Press (1973).

- [13] H. Goldstein, C. Poole y J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd Ed., Addison Wesley, 2002.
- [14] L. A. Bunimovich, *Funct. Anal. Appl.* **8**, 254, (1974).
- [15] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, 2nd Ed., OXFORD University Press 2000.
- [16] J. A. Méndez-Bermúdez, G. A. Luna Acosta, P. Seba, and K. N. Pichugin, *Phys. Rev.* **E66**, 046207-1 (2002).
- [17] B. Weingartner, S. Rotter, and J. Burgdöfer, *Phys. Rev.* **B72**, 115342 (2005).
- [18] A. E. Meyerovich and S. Stefanians, *Phys. Rev.* **B51**, 17116 (1995).
- [19] G. A. Luna-Acosta, K. Na, L. E. Reichl, and A. Krokhnin, *Phys. Rev.* **E53**, 3271 (1996).
- [20] L. Landauer, *IBM J. Res. Dev.* **1**, 233 (1957).
- [21] N. Trivedi and N. W. Ashcroft *Phys. Rev.* **E38**, 12298 (1998).
- [22] G.A Luna Acosta, A. A. Krokhnin, M. A. Rodriguez and P.H Hernández-Tejeda(unpnblished)
- [23] J. A. Méndez-Bermúdez, G. A. Luna Acosta, P. Seba, and K. N. Pichugin *Phys. Rev.* **E67**, 161104(R) (2003).