



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

NÚMEROS DE RAMSEY DE
ULTRAFILTROS ASOCIADOS A ESPACIOS
TOPOLÓGICOS DE RAMSEY

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
LIC. SONIA NAVARRO FLORES

DIRECTORES DE TESIS:
DR. DAVID MEZA ALCÁNTARA
DRA. NATASHA DOBRINEN

MORELIA, MICHOACÁN, ENERO 2016.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis asesores, los doctores Natasha Dobrinen y David Meza por su valioso asesoramiento en el desarrollo de este trabajo y al doctor Fernando Hernández cuyas correcciones ayudaron a mejorar la calidad de éste. También quiero agradecer al CONACYT, sin cuya beca no me habría sido posible estudiar la maestría. Por último quiero agradecer a mi familia y amigos por el apoyo brindado durante el transcurso de la maestría.

RESUMEN

La teoría de espacios de Ramsey es una área de la teoría de Ramsey que se encarga de trabajar con coloraciones en sucesiones infinitas de objetos. El objetivo de esta teoría es transferir el principio de las casillas a dimensiones superiores para que se pueda usar en más contextos. El origen de esta tendencia en la teoría de Ramsey se remonta a la invención del teorema de Ramsey, el cual es una versión más compleja del principio que dice que cualquier coloración finita de un conjunto infinito admite un monocromático infinito. En el libro *Introduction to Ramsey spaces*, Todorcevic presenta la definición de espacio topológico de Ramsey en la cual captura las propiedades del espacio de Ellentuck que lo dotan de su teoría Ramsey topológica. El objetivo de este trabajo es estudiar algunos espacios topológicos de Ramsey desarrollados por Todorcevic, Dobrinen, Mijares y Trujillo con el abjetivo de calcular sus números de Ramsey y comparar algunos cardinales invariantes asociados a ellos.

PALABRAS CLAVE: Espacio de Ramsey, teorema de Ramsey, números de Ramsey, cardinales invariantes, coloraciones.

ABSTRACT

Ramsey spaces theory is an area of Ramsey theory that concerns with coloring infinite sequences of objects. Transferring basic pigeon hole principles to their higher dimensional versions to increase their applicability is thus the subject matter of this theory. This tendency in Ramsey theory could be traced back to the invention of the original Ramsey theorem, which is a higher dimensional version of the principle that says that a finite coloring of an infinite set must involve at least one infinite monochromatic subset. In the book *Introduction to Ramsey spaces*, Todorcevic present a general procedure to transfer any other Ramsey theoretic principles to higher and especially infinite dimensions trying to match the clarity of the Ellentuck result, but going beyond his topological Ramsey theory. The objective of this work is to study some topological Ramsey spaces developed by Todorcevic, Dobrinen, Mijares and Trujillo with the objective of find their Ramsey numbers and compare their associated invariant cardinals.

Introducción

La teoría de espacios de Ramsey es una área de la teoría de Ramsey que se encarga de trabajar con coloraciones en sucesiones infinitas de objetos. El objetivo de esta teoría es transferir el principio de las casillas a dimensiones superiores para que se pueda usar en más contextos. El origen de esta tendencia en la teoría de Ramsey se remonta a la invención del teorema de Ramsey, el cual es una versión más compleja del principio que dice que cualquier coloración finita de un conjunto infinito admite un monocromático infinito. El teorema de Ramsey finito surgió cuando Ramsey estaba trabajando en clasificar estructuras sobre el conjunto ω de números naturales que necesitaba para un procedimiento de decisión que probaría la validez de cierto tipo de enunciados lógicos. La extensión infinita de dicho teorema también surgió por razones prácticas. La primer noción fue dada por Nash-Williams en el curso del desarrollo de su teoría de conjuntos mejor-quasi-ordenados. El teorema de Ramsey infinito tal como lo conocemos fue posible sólo con el trabajo de Galvin, Prikry, Silver, Mathias, y especialmente Ellentuck, quien fue el primero en usar nociones topológicas para describir lo que hoy consideramos la forma óptima de este resultado. En el libro *Introduction to Ramsey spaces*, Todorcevic presenta la definición de espacio topológico de Ramsey en la cual captura las propiedades del espacio de Ellentuck que lo dotan de su teoría Ramsey topológica.

Los espacios topológicos de Ramsey en los cuales estamos interesados para este trabajo son los espacios construidos en [5], [6] y [7]. En [5] Dobrinen y Todorcevic motivados por un problema de clasificación en la estructura del orden de Tukey construyen el espacio topológico de Ramsey \mathcal{R}_1 . Este espacio es mínimo en complejidad entre los espacios de Ramsey con estructura más compleja que el espacio de Ellentuck. Mediante el espacio \mathcal{R}_1 se puede forzar un ultrafiltro que es equivalente al ultrafiltro \mathcal{U}_1 , el cual se fuerza con el forcing de Laflamme. El ultrafiltro \mathcal{U}_1 cumple que es débilmente Ramsey pero no Ramsey, en el sentido de ω . El espacio $\mathcal{P}(\omega \times \omega)/(Fin \otimes Fin)$ fuerza un ultrafiltro \mathcal{G}_2 . Con la finalidad de encontrar la posición de \mathcal{G}_2 en el orden de Tukey, en [6] Dobrinen construyó una clase de espacios de Ellentuck de dimensiones superiores. Cada uno de estos espacios \mathcal{E}_k , $k \geq 2$, es un subconjunto denso en $(Fin^{\otimes k})^+$ y fuerza el ultrafiltro \mathcal{G}_k , el cual es genérico

para $\mathcal{P}(\omega^k)/(Fin^{\otimes k})$. En [7] Dobrinen, Mijares y Trujillo presentan un método general para construir una clase de espacios topológicos de Ramsey. Estos espacios fueron construidos para que tuvieran asociados ultrafiltros cuyos segmentos iniciales en el orden Tukey no fueran órdenes lineales. En particular, para cada $n \in \omega$ construyeron el espacio \mathcal{H}^n con el cual se puede forzar un ultrafiltro al tomar el orden definido por Mijares en [11].

En el primer capítulo presentaremos definiciones y nociones básicas de teoría de conjuntos que permitirán al lector seguir el trabajo, así como los antecedentes de la teoría de espacios de Ramsey, para lo cual se tiene que presentar el espacio de Ellentuck. En el segundo capítulo introduciremos la definición de espacio topológico de Ramsey y algunos teoremas para estos espacios presentados en [13]. En este capítulo también introduciremos los espacios topológicos de Ramsey en los cuales estamos interesados en este trabajo con sus respectivos ultrafiltros. En el tercer capítulo definimos los números de Ramsey para un espacio topológico de Ramsey y su ultrafiltro asociado y calculamos algunos números de Ramsey para los espacios presentados en el capítulo dos. En este capítulo también se generaliza la definición del número de pseudointersección \mathfrak{p} dando lugar a un cardinal $\mathfrak{p}_{\mathcal{R}}$ para cada espacio topológico de Ramsey \mathcal{R} , y se comparan \mathfrak{p} y $\mathfrak{p}_{\mathcal{R}}$ para algunos espacios topológicos de Ramsey.

Índice general

Introducción...	i
1. Antecedentes...	1
1.1 Definiciones...	1
1.2 Teoría de Ramsey y el espacio de Ellentuck...	3
2. Teoría de espacios de Ramsey...	7
2.1 Espacios topológicos de Ramsey...	7
2.2 Algunos espacios topológicos de Ramsey y sus ultrafiltros asociados...	10
3. Números de Ramsey y números de pseudointersección...	23
3.1 Números de Ramsey para ultrafiltros asociados a espacios topológicos de Ramsey...	23
3.2 Números de pseudointersección para espacios topológicos de Ramsey...	34
Bibliografía...	41

Capítulo 1

Antecedentes

1.1 Definiciones

En esta sección presentaremos algunas definiciones y convenciones necesarias para desarrollar el tema.

Notación. Sean κ un cardinal y A un conjunto no vacío. Denotaremos por $[A]^\kappa$ al conjunto $\{X \subseteq A : |X| = \kappa\}$ y por $[A]^{<\kappa}$ al conjunto $\{X \subseteq A : |X| < \kappa\}$. A^κ denotará el conjunto $\{(a_i)_{i < \kappa} : a_i \in A\}$ y $A^{<\kappa}$ el conjunto $\bigcup_{\gamma < \kappa} \{(a_i)_{i < \gamma} : a_i \in A\}$.

Escribiremos ω para denotar al conjunto de los números naturales, y cada número natural n denotará el conjunto de sus predecesores $\{0, \dots, n - 1\}$.

Definición 1. Un *orden parcial* es un par $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ tal que $\mathbb{P} \neq \emptyset$ y \leq es una relación transitiva y reflexiva sobre \mathbb{P} . $p \leq q$ se leerá como p *extiende a* q . Los elementos de \mathbb{P} serán llamados *condiciones*.

Definición 2. Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial. Diremos que p y q son *compatibles* si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$; diremos que son *incompatibles* si no son compatibles. Una *anticadena* en \mathbb{P} es un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ que contiene condiciones incompatibles dos a dos.

Definición 3. Un orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ tiene la propiedad *c.c.c.* si cada anticadena en \mathbb{P} es a lo más numerable.

Definición 4. Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial. Diremos que un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* en \mathbb{P} si para cada $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.

Definición 5. Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial. Diremos que $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro sobre \mathbb{P} si satisface:

1. si $p \in \mathcal{G}$ y $q \in \mathbb{P}$ es tal que $p \leq q$, entonces $q \in \mathcal{G}$;
2. para cada $p, q \in \mathcal{G}$ existe $r \in \mathcal{G}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.

$U \subseteq \mathbb{P}$ es un *ultrafiltro* si es un filtro maximal.

Definición 6. El Axioma de Martin es el siguiente enunciado: Si $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ es un orden parcial c.c.c. no vacío y \mathcal{D} es una familia de subconjuntos densos de \mathbb{P} tal que $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$, entonces existe un filtro \mathcal{G} sobre \mathbb{P} tal que $\mathcal{D} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. En este caso diremos que el filtro \mathcal{G} es \mathcal{D} -genérico.

Definición 7. En un orden parcial, un subconjunto es llamado *centrado* si cada colección finita de elementos admite una cota inferior. Un orden parcial es llamado σ -centrado si se puede ver como la unión numerable de subconjuntos centrados.

Notación. Sean κ un cardinal y \mathcal{K} una clase de órdenes parciales. $M_\kappa(\mathcal{K})$ es el enunciado que dice que dado $\mathbb{P} \in \mathcal{K}$, si \mathcal{D} es una familia de κ subconjuntos densos de \mathbb{P} , entonces existe un filtro $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}$ que es \mathcal{D} -genérico.

Note que el Axioma de Martin es el enunciado: para cada $\kappa < \mathfrak{c}$, $M_\kappa(\text{c.c.c.})$.

Definición 8. Sea \mathcal{K} una clase de órdenes parciales. $\mathfrak{m}(\mathcal{K})$ es el menor cardinal κ para el cual $M_\kappa(\mathcal{K})$ es falso.

Note que el Axioma de Martin implica $\mathfrak{m}(\text{c.c.c.}) = \mathfrak{c}$. Como cada orden parcial σ -centrado es a c.c.c., $\mathfrak{m}(\text{c.c.c.}) \leq \mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado})$.

Definición 9. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que un conjunto $A \subseteq X$ es *nunca denso* si su cerradura tiene interior vacío. Un conjunto $A \subseteq X$ es *magro* si $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$, donde cada conjunto A_n es nunca denso.

Definición 10. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que un conjunto $A \subseteq X$ es un conjunto con la *propiedad de Baire* si existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $A \Delta U = (A \setminus U) \cup (U \setminus A)$ es un conjunto magro.

1.2 Teoría de Ramsey y el espacio de Ellentuck

En esta sección presentaremos los antecedentes de los espacios topológicos de Ramsey. El teorema de Ramsey es una versión más compleja del principio que dice que cualquier coloración finita sobre ω admite un monocromático finito. El teorema de Ramsey finito surgió cuando Ramsey quería clasificar estructuras de ω que necesitaba para obtener un procedimiento que validara cierto tipo de enunciados lógicos. Establecer el teorema de Ramsey infinito fue posible sólo con el trabajo de Galvin, Prikry, Silver, Mathias, y especialmente Ellentuck.

Teorema 11. (Ramsey) Para cada entero positivo k y cada coloración finita de $[\omega]^k$, existe un subconjunto infinito M de ω tal que $[M]^k$ es monocromático.

□

Definición 12. Dados dos conjuntos $X, Y \subseteq \omega$, diremos que X está *casi contenido* en Y si $X \setminus Y$ es finito y lo denotaremos como $X \subseteq^* Y$.

Definición 13. Sea $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$, diremos que \mathcal{F} tiene la *propiedad de la intersección finita fuerte* (PIFF) si para cada colección finita $\{X_0, \dots, X_n\} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap_{i \leq n} X_i$ es infinita.

Definición 14. Sea $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$, una *pseudointersection* de la familia \mathcal{F} es un conjunto $Y \in [\omega]^\omega$ tal que para cada $X \in \mathcal{F}$, $Y \subseteq^* X$.

Definición 15. El *número de pseudointersection* \mathfrak{p} es el mínimo tamaño de una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ que tiene la PIFF pero no pseudointersección.

La prueba del siguiente Teorema no se incluye porque es un resultado clásico de la teoría de conjuntos pero se puede encontrar en [8]

Teorema 16. El Axioma de Martin implica $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$

□

La prueba del siguiente teorema se puede encontrar en [2]

Teorema 17. $m(\sigma\text{-centrado}) = \mathfrak{p}$

□

Definición 18. Sea \mathcal{U} un ultrafiltro en ω . Diremos que:

1. \mathcal{U} es *Ramsey* si para cada coloración $c : [\omega]^2 \rightarrow 2$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que U es homogéneo, es decir, $|c[U]^2| = 1$.
2. \mathcal{U} es *débilmente Ramsey* si para cada coloración $c : [\omega]^2 \rightarrow 3$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $|c[U]^2| \leq 2$.
3. \mathcal{U} es *selectivo* si para cada sucesión decreciente $\langle U_i \rangle_{i \in \omega}$ de miembros de \mathcal{U} , existe $X \in \mathcal{U}$ tal que para cada $n < \omega$, $X \subseteq^* U_n$ y además $|X \cap (U_{n+1} \setminus U_n)| \leq 1$.

Cuando tengamos un ultrafiltro en un orden parcial $\langle [A]^\omega, \subseteq \rangle$ para algún conjunto $A \neq \emptyset$, diremos que el ultrafiltro es Ramsey, débilmente Ramsey o selectivo en el sentido de ω para referirnos a las definiciones anteriores.

La prueba del siguiente teorema se puede encontrar en [1].

Teorema 19. Sea \mathcal{U} un ultrafiltro en ω . las siguientes condiciones son equivalentes:

1. \mathcal{U} es Ramsey,
2. \mathcal{U} es selectivo,
3. para cada partición de ω , $\{Y_n : n \in \omega\}$, o bien $Y_n \in \omega$ para algún $n \in \omega$ o existe $X \in \mathcal{U}$ tal que $|X \cap Y_n| \leq 1$ para cada $n \in \omega$.

□

La prueba del siguiente resultado no se incluye porque es un resultado clásico de la teoría de conjuntos pero se puede revisar en [8]

Proposición 20. $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ implica que existe un ultrafiltro Ramsey.

□

Teorema 21. $\langle [\omega]^\omega, \subseteq^* \rangle$ fuerza que existe un ultrafiltro Ramsey.

Demostración. Sea \mathcal{G} un filtro $\langle [\omega]^\omega, \subseteq^* \rangle$ -genérico. Vamos a probar que \mathcal{G} es un ultrafiltro Ramsey. Para ver que \mathcal{G} es un ultrafiltro, sea $Y \subseteq \omega$ fijo. Definamos $\mathcal{A} = \{Y, \omega \setminus Y\}$. Probaremos que \mathcal{A} es una anticadena maximal. Sea $X \in [\omega]^\omega$, entonces o bien $|X \cap Y| = \aleph_0$ o $|X \cap (\omega \setminus Y)| = \aleph_0$. Entonces o bien X y Y son compatibles o X y $\omega \setminus Y$ son compatibles. De lo anterior se sigue que \mathcal{A} es una anticadena maximal. Como \mathcal{G} es genérico, o bien $Y \in \mathcal{G}$ o $\omega \setminus Y \in \mathcal{G}$. Ahora veamos que \mathcal{G} es Ramsey. Sea $\mathcal{P} = \{Y_n : n \in \omega\}$ una partición de ω en ω piezas. Definamos $\mathcal{D} = \{X \in [\omega]^\omega : \exists n \in \omega (X \subseteq^* Y_n) \text{ o } \forall n \in \omega (|X \cap Y_n| \leq 1)\}$, probaremos que \mathcal{D} es un subconjunto denso de $[\omega]^\omega$. Sea $Z \in [\omega]^\omega$ tal que no existe $n \in \omega$ tal que $Z \subseteq^* Y_n$, entonces $|\{n \in \omega : Z \cap Y_n \neq \emptyset\}| = \aleph_0$. Sea $X \subseteq Z$ tal que para cada $n \in \omega$ tal que $Z \cap Y_n \neq \emptyset$, $|X \cap Y_n| \leq 1$. Como \mathcal{G} es un filtro $\langle [\omega]^\omega, \subseteq^* \rangle$ -genérico, existe $X \in \mathcal{D} \cap \mathcal{G}$. Note que si Z es tal que existe $n \in \omega$ tal que $Z \subseteq^* Y_n$, como \mathcal{G} es un filtro, $Y_n \in \mathcal{G}$. Por lo tanto, \mathcal{G} es un ultrafiltro Ramsey. \square

Ahora introduciremos una topología sobre $[\omega]^\omega$ llamada la topología de Ellentuck. Sean $a \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$ tales que $\max(a) < \min(A)$, definamos el conjunto

$$[a, A] = \{B \in [\omega]^\omega : a \subseteq B \subseteq a \cup A\}.$$

La definición está motivada por el trabajo de Mathias. La *topología de Ellentuck* en $[\omega]^\omega$ es la que admite como base a todos los conjuntos de la forma $[a, A]$. El espacio $[\omega]^\omega$ dotado de la topología de Ellentuck es llamado el espacio de Ellentuck.

Definición 22. Un conjunto $X \subseteq [\omega]^\omega$ es llamado *Ramsey* si para cada básico no vacío $[a, A]$ existe $B \in [A]^\omega$ tal que $[a, B] \subseteq X$ o $[a, B] \cap X = \emptyset$.

El siguiente teorema se puede encontrar en [9] como el Teorema 19.14.

Teorema 23. (*Ellentuck*) Sea $X \subseteq [\omega]^\omega$. Entonces X es Ramsey si y sólo si X tiene la propiedad de Baire en la topología de Ellentuck.

\square

El espacio de Ellentuck es el ejemplo clásico de los espacios topológicos de Ramsey, noción que introduciremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Teoría de espacios de Ramsey

2.1 Espacios topológicos de Ramsey

Ahora introduciremos la definición de los espacios en los cuales estamos interesados. Esta definición fue tomada de [13]. Los axiomas **A,1-A,4** son definidos para tripletas (\mathcal{R}, \leq, r) de objetos con las siguientes propiedades. \mathcal{R} es un conjunto no vacío, \leq es un quasi-orden sobre \mathcal{R} , y $r : \mathcal{R} \times \omega \rightarrow \mathcal{AR}$ es una función que genera una sucesión de funciones de aproximación ($r_n(\cdot) = r(\cdot, n)$), donde \mathcal{AR} es la colección de todas las aproximaciones finitas de los elementos de \mathcal{R} . Para cada $a \in \mathcal{AR}$ y $A, B \in \mathcal{R}$, definamos $[a, B] = \{A \in \mathcal{R} : A \leq B \text{ y } \exists n \in \omega (r_n(A) = a)\}$.

Sea $a \in \mathcal{AR}$, denotaremos por $|a|$ al natural k para el cual $a = r_k(a)$. Dados $a, b \in \mathcal{AR}$ y $B \in \mathcal{R}$ tales que $b = r_l(B)$, escribiremos $a \sqsubseteq b$ si $a = r_m(b)$ para algún $m \leq l$. Para cada $n < \omega$, $\mathcal{AR}_n = \{r_n(A) : A \in \mathcal{R}\}$.

- A,1**
- a) $r_0(A) = \emptyset$ para cada $A \in \mathcal{R}$.
 - b) $A \neq B$ implica que $r_n(A) \neq r_n(B)$ para algún n .
 - c) $r_n(A) = r_m(B)$ implica que $n = m$ y $r_k(A) = r_k(B)$ para cada $k < n$.

A,2 Existe un quasi-orden \leq_{fin} sobre \mathcal{AR} tal que

- a) $\{a \in \mathcal{AR} : a \leq_{fin} b\}$ es finito para cada $b \in \mathcal{AR}$,
- b) $A \leq B$ si y sólo si para cada $n \in \omega$ existe $m \in \omega$ tal que $r_n(A) \leq_{fin} r_m(B)$,

- c) para cada $a, b, c \in \mathcal{AR}$, si $a \sqsubset b$ y $b \leq_{fin} c$ entonces existe $d \in \mathcal{AR}$ tal que $d \sqsubset c$ y $a \leq_{fin} d$.

Dados $a \in \mathcal{AR}$ y $B \in \mathcal{R}$, denotaremos por $\text{depth}_B(a)$ al mínimo natural n , si existe, tal que $a \leq_{fin} r_n(B)$. Si tal n no existe, entonces escribiremos $\text{depth}_B(a) = \infty$. Si $\text{depth}_B(a) = n < \infty$, entonces $[\text{depth}_B(a), B]$ denotará el conjunto $[r_n(B), B]$.

- A,3** a) Si $\text{depth}_B(a) < \infty$ entonces $[a, A] \neq \emptyset$ para cada $A \in [\text{depth}_B(a), B]$.
 b) $A \leq B$ y $[a, A] \neq \emptyset$ implican que existe $A' \in [\text{depth}_B(a), B]$ tal que $\emptyset \neq [a, A'] \subseteq [a, A]$.

Si $n > |a|$, $r_n[a, A]$ denotará a la colección de todos los $r_n(B)$ tales que $B \in [a, A]$.

- A,4** Si $\text{depth}_B(a) < \infty$ y $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{AR}_{|a|+1}$, entonces existe $A \in [\text{depth}_B(a), B]$ tal que $r_{|a|+1}[a, A] \subseteq \mathcal{O}$ o $r_{|a|+1}[a, A] \subseteq \mathcal{O}^c$.

La topología sobre \mathcal{R} está dada por los abiertos básicos $[a, B]$. Esta topología es llamada la *topología de Ellentuck* sobre \mathcal{R} . Observamos que si dotamos a \mathcal{AR} de la topología discreta, el producto topológico \mathcal{AR}^ω es un espacio metrizable. Además cada $B \in \mathcal{R}$ se puede identificar de manera única con la sucesión $\langle r_n(B) \rangle_{n \in \omega} \in \mathcal{AR}^\omega$, de forma que también se puede pensar a \mathcal{R} como subespacio de \mathcal{AR}^ω . Note que la topología de Ellentuck es más fina que la topología metrizable que \mathcal{R} hereda de \mathcal{AR}^ω al ser visto como subespacio.

Definición 24. Un subconjunto \mathcal{X} de \mathcal{R} es *Ramsey* si para cada $\emptyset \neq [a, A]$, existe $B \in [a, A]$ tal que $[a, B] \subseteq \mathcal{X}$ o $[a, B] \cap \mathcal{X} = \emptyset$. $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{R}$ es *Ramsey nulo* si para cada $\emptyset \neq [a, A]$, existe $B \in [a, A]$ tal que $[a, B] \cap \mathcal{X} = \emptyset$.

Definición 25. Una tripleta (\mathcal{R}, \leq, r) es un *espacio topológico de Ramsey* si cada subconjunto de \mathcal{R} con la propiedad de Baire es Ramsey y cada subconjunto magro de \mathcal{R} es Ramsey nulo.

El siguiente resultado se encuentra en [13] como el Teorema 5.4.

Teorema 26 (Abstract Ellentuck Theorem). *Si (\mathcal{R}, \leq, r) es cerrado (como subespacio de \mathcal{AR}^ω) y satisface los axiomas **A,1**, **A,2**, **A,3** y **A,4**, entonces cada subconjunto de \mathcal{R} con la propiedad de Baire es Ramsey y cada subconjunto magro es Ramsey nulo; en otras palabras, la tripleta (\mathcal{R}, \leq, r) forma un espacio topológico de Ramsey.*

□

Sean $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{AR}$ y $X \in \mathcal{R}$, $\mathcal{F} \upharpoonright X$ denotará al conjunto $\{s \in \mathcal{F} : s = r_n(Y) \text{ para algunos } n \in \omega \text{ y } Y \leq X\}$.

Definición 27. Diremos que una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{AR}$ de aproximaciones finitas es

1. *Nash-Williams* si para cada $a, b \in \mathcal{F}$, $a \sqsubseteq b$ implica que $a = b$;
2. *Sperner* si $a \not\leq_{fin} b$ para cada $a \neq b \in \mathcal{F}$;
3. *Ramsey* si para cada partición $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ y cada $X \in \mathcal{R}$, existen $Y \leq X$ e $i \in \{0, 1\}$ tales que $\mathcal{F}_i \upharpoonright Y = \emptyset$.

El siguiente teorema aparece en [13] como el teorema 5.17.

Teorema 28 (Abstract Nash-Williams Theorem). *Suponga que (\mathcal{R}, \leq, r) es una tripleta cerrada que satisface **A,1** – **A,4**. Entonces cada familia de aproximaciones finitas Nash-Williams es Ramsey.*

□

En [11] el autor introduce la siguiente definición como una generalización de la relación de casi contención en $[\omega]^\omega$.

Definición 29. Dados $X, Y \in \mathcal{R}$, escribiremos $X \leq^* Y$ si existe $p \in \mathcal{AR} \upharpoonright X$ tal que $[p, X] \subseteq [p, Y]$. En este caso diremos que X es una *casi reducción* de Y .

Note que para cada $p \in \mathcal{AR} \upharpoonright X$, existen $Z \in \mathcal{R}$ y $n \in \omega$ tales que $p = r_n(Z)$ y $Z \leq X$, entonces $\emptyset \neq [p, X] \subseteq [p, Y]$.

El siguiente teorema es probado en [11].

Teorema 30. $\langle \mathcal{R}, \leq^* \rangle$ es un pre-orden σ -cerrado.

□

Notación. Dados un espacio topológico de Ramsey (\mathcal{R}, \leq, r) , $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}$ y $X \in \mathcal{R}$, sea $\mathcal{H} \upharpoonright X = \{Y \in \mathcal{H} : Y \leq X\}$.

Definición 31. Un filtro \mathcal{G} en un espacio topológico de Ramsey \mathcal{R} es Ramsey si para cada $n < \omega$ y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{AR}_n$, existe $X \in \mathcal{G}$ tal que o bien $\mathcal{AR}_n \upharpoonright X \subseteq \mathcal{H}$ o $\mathcal{AR}_n \upharpoonright X \cap \mathcal{H} = \emptyset$.

En [11], Mijares también generalizó la noción de ultrafiltro selectivo a los ultrafiltros sobre espacios de Ramsey, y en [12], Trujillo probó que las nociones de ultrafiltro Ramsey y ultrafiltro selectivo no son equivalentes en general para espacios topológicos de Ramsey. Trujillo probó que existe una infinidad de ultrafiltros asociados a una clase de espacios topológicos de Ramsey que son selectivos pero no Ramsey.

El siguiente Lema es una consecuencia del Lema 6.3 en [4]

Lema 32. *Sea \mathcal{R} un espacio topológico Ramsey. Forzar con $\langle \mathcal{R}, \leq^* \rangle$ no agrega nuevos elementos en \mathcal{AR}^ω (en particular, no agrega nuevos elementos a \mathcal{R}). Si \mathcal{U} es un filtro $\langle \mathcal{R}, \leq^* \rangle$ -genérico sobre algún modelo base V , entonces \mathcal{U} es un ultrafiltro Ramsey en $V[\mathcal{U}]$.*

□

Fact 33. *Sean \mathcal{R} un espacio topológico de Ramsey y $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ el filtro genérico forzado por $\langle \mathcal{R}, \leq^* \rangle$. Sea $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ el ultrafiltro sobre el conjunto base \mathcal{AR}_1 generado por la colección $\{\mathcal{AR}_1 \upharpoonright X : X \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}}\}$. Entonces $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ es un ultrafiltro sobre \mathcal{AR}_1 .*

Demostración. Denotaremos por \mathcal{U} a la colección de $H \subseteq \mathcal{AR}_1$ tales que $H \supseteq \mathcal{AR}_1 \upharpoonright X$ para algún $X \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$. Como $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ es un filtro, \mathcal{U} es un filtro. Para ver que \mathcal{U} es un ultrafiltro, fije $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{AR}_1$. Como $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ es un ultrafiltro Ramsey, existe $X \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ tal que o bien $\mathcal{AR}_1 \upharpoonright X \subseteq \mathcal{H}$ o $\mathcal{AR}_1 \upharpoonright X \cap \mathcal{H} = \emptyset$. En el primer caso, $\mathcal{H} \in \mathcal{U}$; en el segundo caso, $\mathcal{AR}_1 \setminus \mathcal{H} \in \mathcal{U}$. □

2.2 Algunos espacios topológicos de Ramsey y sus ultrafiltros asociados

Ahora vamos a presentar el espacio topológico de Ramsey $(\mathcal{R}_1, \leq_1, r)$. Tomaremos la definición y algunos resultados sobre \mathcal{R}_1 de [5]. El ultrafiltro asociado a \mathcal{R}_1 es isomorfo al ultrafiltro con el mismo nombre \mathcal{U}_1 forzado por Laflamme. El espacio \mathcal{R}_1 tiene la mínima complejidad entre todos los espacios de Ramsey distintos del espacio de Ellentuck.

Definición 34. Denotaremos por \mathbb{T} al siguiente árbol infinito.

$$\mathbb{T} = \{\langle \rangle\} \cup \{\langle n \rangle : n < \omega\} \cup \bigcup_{n < \omega} \{\langle n, i \rangle : i \leq n\}.$$

\mathbb{T} es pensado como una sucesión infinita de árboles finitos, donde el n -ésimo subárbol de \mathbb{T} es

$$\mathbb{T}(n) = \{\langle \rangle, \langle n \rangle, \langle n, i \rangle : i \leq n\}.$$

Los miembros X de \mathcal{R}_1 son subárboles de infinitos de \mathbb{T} que tienen la misma estructura que \mathbb{T} . Esto es, un árbol $X \subseteq \mathbb{T}$ pertenece a \mathcal{R}_1 si y sólo si existe una sucesión estrictamente creciente $(k_n)_{n < \omega}$ tal que

1. $X \cap \mathbb{T}(k_n) \cong \mathbb{T}(n)$ para cada $n < \omega$; y
2. si $X \cap \mathbb{T}(j) \neq \emptyset$, entonces $j = k_n$ para algún $n < \omega$.

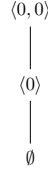
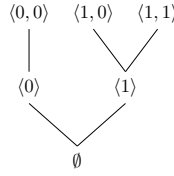
Denotaremos por $X(n)$ al subárbol $X \cap \mathbb{T}(k_n)$ y lo llamaremos el n -ésimo árbol de X . Para cada $n < \omega$, $r_n(X)$ denotará $\bigcup_{i < n} X(i)$. $\mathcal{AR}_n = \{r_n(X) : X \in \mathcal{R}_1\}$, y $\mathcal{AR} = \bigcup_{n < \omega} \mathcal{AR}_n$.

Para cada $X, Y \in \mathcal{R}_1$, escribiremos $Y \leq_1 X$ si y sólo si existe una sucesión estrictamente creciente $(k_n)_{n < \omega}$ tal que para cada n , $Y(n)$ es un subárbol de $X(k_n)$. Sean $a, b \in \mathcal{AR}$ y $A, B \in \mathcal{R}_1$. El quasi-orden \leq_{fin} sobre \mathcal{AR} se define como sigue: $b \leq_{fin} a$ si y sólo si existen $m, n \in \omega$ tales que $a \in \mathcal{AR}_m$, $b \in \mathcal{AR}_n$ y una sucesión estrictamente creciente $(k_i)_{i < n}$ con $k_{n-1} < m$ tal que para cada $i < n$, $b(i)$ es un subárbol de $a(k_i)$. Escribiremos $a \leq_{fin} B$ si y sólo si existe n tal que $a \leq_{fin} r_n(B)$. Los abiertos básicos para la topología sobre \mathcal{R}_1 están definidos de la siguiente manera: $[a, B] = \{X \in \mathcal{R}_1 : a \sqsubseteq X \text{ y } X \leq_1 B\}$.

Note que por la estructura de \mathbb{T} y la definición de \mathcal{R}_1 , se tiene que para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{R}_1$, $Y \leq_1 X$ si y sólo si $Y \subseteq X$. De la misma forma, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{AR}$, $a \leq_{fin} b$ si y sólo si $a \subseteq b$.

Teorema 35. $(\mathcal{R}_1, \leq_1, r)$ es un espacio topológico de Ramsey.

□

Figure 2.1: $r_1(\mathbb{T})$ Figure 2.2: $r_2(\mathbb{T})$

Para cada $X \in \mathcal{R}_1$, denotaremos por $[X]$ al conjunto de todos los nodos terminales de X . Sea $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_1}$ un filtro $\langle \mathcal{R}_1, \leq_1^* \rangle$ -genérico. Note que por el Lema 32, $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_1}$ es un ultrafiltro. Denotaremos por \mathcal{U}_1 el filtro sobre $[\mathbb{T}]$ generado por la colección $\{[X] : X \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}_1}\}$. Note que podemos identificar a X con $[X]$, pues X y $[X]$ contienen la misma información. Además, note que podemos identificar $[\mathbb{T}]$ con \mathcal{AR}_1 y \mathcal{U}_1 con el ultrafiltro $\mathcal{U}_{\mathcal{R}_1}$ sobre \mathcal{AR}_1 generado por la colección $\{\mathcal{AR}_1 \upharpoonright X : X \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}_1}\}$. Como $\mathcal{U}_{\mathcal{R}_1}$ es un ultrafiltro, \mathcal{U}_1 es un ultrafiltro. Por lo anterior, nos referiremos a \mathcal{U}_1 como un ultrafiltro sobre \mathcal{R}_1 .

Ahora introduciremos el espacio topológico de Ramsey \mathcal{H}^2 . El espacio \mathcal{H}^2 es un caso particular de una clase de espacios topológico de Ramsey construidos usando productos finitos de estructuras de clases de Fräissé con la propiedad de Ramsey. El lector puede encontrar la construcción de esta clase general de espacios en [7]. El espacio \mathcal{H}^2 fue construido con la finalidad de forzar un p-punto cuyo segmento inicial en la estructura de Tukey sea exactamente el álgebra booleana $\mathcal{P}(2)$.

Definición 36. Para cada $k < \omega$ y $j \in 2$, sea $\mathbf{A}_{k,j}$ un conjunto linealmente ordenado de tamaño $k+1$. Denotaremos por \mathbf{A}_k el producto $\mathbf{A}_{k,0} \times \mathbf{A}_{k,1}$. Sea $\mathbb{A} = \langle \langle k, \mathbf{A}_k \rangle : k < \omega \rangle$. \mathbb{A} será el miembro máximo de \mathcal{H}^2 . B será un miembro de \mathcal{H}^2 si y sólo si $B = \langle \langle n_k, \mathbf{B}_k \rangle : k < \omega \rangle$, donde

1. $(n_k)_{k < \omega}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales;
- y

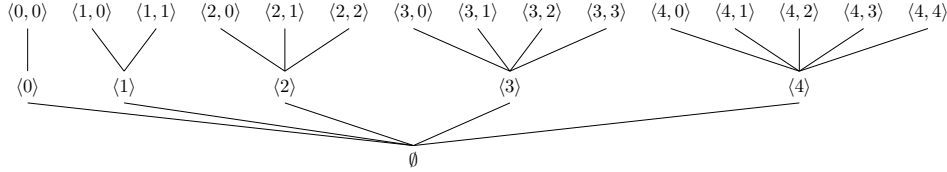


Figure 2.3: $r_5(\mathbb{T})$

- para cada $k < \omega$, \mathbf{B}_k es un producto de la forma $\mathbf{B}_{k,0} \times \mathbf{B}_{k,1}$, donde para cada $j \in 2$, $\mathbf{B}_{k,j} \subseteq \mathbf{A}_{n_k,j}$ es un conjunto linealmente ordenado de tamaño $k + 1$.

Escribiremos $B(k)$ para denotar $\langle n_k, \mathbf{B}_k \rangle$, el k -ésimo bloque de B . La n -ésima aproximación de B es $r_n(B) = \langle B(0), \dots, B(n-1) \rangle$. En particular, $r_0(B) = \emptyset$. Definamos $\mathcal{AH}_n^2 = \{r_n(B) : B \in \mathcal{H}^2\}$, la colección de todas las aproximaciones n -ésimas de los elementos de \mathcal{H}^2 . Sea $\mathcal{AR} = \mathcal{AH}^2 = \bigcup_{n < \omega} \mathcal{AH}_n^2$, la colección de todas las aproximaciones finitas de los elementos de \mathcal{H}^2 .

Definamos el orden parcial \leq sobre \mathcal{H}^2 como sigue. Dados $B = \langle \langle m_k, \mathbf{B}_k \rangle : k < \omega \rangle$ y $C = \langle \langle n_k, \mathbf{C}_k \rangle : k < \omega \rangle$, escribiremos $C \leq B$ si y sólo si para cada k existe l_k tal que $n_k = m_{l_k}$ y para todo $j \in 2$, $\mathbf{C}_{k,j} \subseteq \mathbf{B}_{l_k,j}$.

Definamos el orden parcial \leq_{fin} on \mathcal{AH}^2 como sigue: Dados $b = \langle \langle m_k, \mathbf{B}_k \rangle : k < p \rangle$ y $c = \langle \langle n_k, \mathbf{C}_k \rangle : k < q \rangle$, escribiremos $c \leq_{fin} b$ si y sólo si existe $C \leq B$ tal que $c = r_q(C)$, $b = r_p(B)$, y para cada $k < q$, $n_k = m_{l_k}$ para algún $l_k < p$.

No incluiremos la construcción general para espacios topológicos de Ramsey construidos con clases de Fräissé con la propiedad de Ramsey pero daremos una idea de la construcción. Para el caso general, los autores de [7] fijan una sucesión infinita $\langle \mathbf{A}_k : k < \omega \rangle$ donde para cada $k < \omega$, \mathbf{A}_k es un producto $(\mathbf{A}_{k,j})_{j \in J_k}$ de estructuras con algunas propiedades de partición. Esta sucesión genera un espacio topológico de Ramsey $\mathcal{R}(\langle \mathbf{A}_k : k < \omega \rangle)$ tal que $\mathbb{A} = \langle \langle k, \mathbf{A}_k \rangle : k < \omega \rangle$ es el elemento maximal de $\mathcal{R}(\langle \mathbf{A}_k : k < \omega \rangle)$. Los elementos de $\mathcal{R}(\langle \mathbf{A}_k : k < \omega \rangle)$ son sucesiones infinitas B isomorfas al elemento maximal \mathbb{A} .

Los siguientes resultados son probados en general para espacios topológicos de Ramsey construidos con clases de Fräissé con la propiedad de Ramsey en [7], sólo incluiremos las versiones para \mathcal{H}^2 .

Teorema 37. \mathcal{H}^2 es un espacio topológico de Ramsey.

□

Sea $\mathcal{G}_{\mathcal{H}^2}$ el filtro $\langle \mathcal{H}^2, \leq^* \rangle$ -genérico. Del Lema 32, sabemos que $\mathcal{G}_{\mathcal{H}^2}$ es un ultrafiltro Ramsey. Para cada $D \in \mathcal{H}^2$, denotaremos por $[D]$ el conjunto de todos los nodos terminales de D en $\bigcup \mathbf{A}_k$. Sea \mathcal{U} el ultrafiltro sobre $[\mathbb{A}]$ generado por la colección $\{[D] : D \in \mathcal{G}_{\mathcal{H}^2}\}$. Note que podemos identificar D con $[D]$ pues D y $[D]$ contienen la misma información. Además, note que podemos identificar \mathcal{AR}_1 con $[\mathbb{A}]$. Entonces podemos identificar \mathcal{U} con $\mathcal{U}_{\mathcal{H}^2}$, el ultrafiltro sobre \mathcal{AR}_1 generado por la colección $\{\mathcal{AR}_1 \upharpoonright X : X \in \mathcal{G}_{\mathcal{H}^2}\}$. Nos referiremos a $\mathcal{U}_{\mathcal{H}^2}$ como un ultrafiltro sobre \mathcal{H}^2 .

Los espacios topológicos de Ramsey que vamos a presentar a continuación son los espacios de Ellentuck de dimensiones mayores. La construcción y resultados presentados sobre estos espacios se han tomado de [6]. \mathcal{E}_1 denotará al espacio de Ellentuck. El primer espacio nuevo, \mathcal{E}_2 fue motivado por el problema de encontrar la estructura de los ultrafiltros que son Tukey irreducibles al ultrafiltro genérico forzado por $\mathcal{P}(\omega^2)/Fin^{\otimes 2}$, denotado por \mathcal{G}_2 . La construcción de \mathcal{E}_2 se generalizó para encontrar espacios topológicos de Ramsey forcing equivalentes con $\mathcal{P}(\omega^k)/Fin^{\otimes k}$, para cada $k > 2$.

Definición 38. (El conjunto bien ordenado $\langle \omega^{\leq k}, \prec \rangle$) Sea $k \geq 2$, denotaremos por $\omega^{\leq k}$ a la colección de todas las sucesiones no decrecientes de miembros de ω de longitud menor o igual a k . Denotaremos por $<_{lex}$ el orden lexicográfico en $\omega^{\leq k}$, donde también consideramos cualquier segmento inicial de una sucesión como menor que tal sucesión. Definimos el buen orden \prec sobre $\omega^{\leq k}$ como sigue. Primero, la sucesión vacía $()$ es el \prec -mínimo elemento; es decir, para cada sucesión \vec{j} en $\omega^{\leq k}$, $() \prec \vec{j}$. En general, dados (j_0, \dots, j_{p-1}) y (l_0, \dots, l_{q-1}) en $\omega^{\leq k}$ con $p, q \geq 1$, definimos $(j_0, \dots, j_{p-1}) \prec (l_0, \dots, l_{q-1})$ si y sólo si

1. o bien $j_{p-1} < l_{q-1}$,
2. o $j_{p-1} = l_{q-1}$ y $(j_0, \dots, j_{p-1}) <_{lex} (l_0, \dots, l_{q-1})$.

Como \prec es un buen orden, $\omega^{\leq k}$ tiene tipo de orden ω , denotaremos por \vec{j}_m al m -ésimo miembro de $\langle \omega^{\leq k}, \prec \rangle$. Sea $\vec{l} \in \omega^{\leq k}$, denotaremos por $m_{\vec{l}} \in \omega$ el número natural m tal que $\vec{l} = \vec{j}_m$. En particular, $\vec{j}_0 = ()$ y $m_{()} = 0$.

Denotaremos por ω^k a la colección de todas las sucesiones no decrecientes de elementos de ω con longitud k . Note que \prec también bien ordena a ω^k con tipo de orden ω . Denotaremos por \vec{i}_n al n -ésimo elemento de $\langle \omega^k, \prec \rangle$.

Ahora definiremos al elemento máximo \mathbb{W}_k del espacio \mathcal{E}_k . Este conjunto \mathbb{W}_k es el prototipo de todos los elementos de \mathcal{E}_k en el sentido de que cada miembro de \mathcal{E}_k será un subconjunto de \mathbb{W}_k el cual tiene la misma estructura que \mathbb{W}_k , definido a continuación.

Definición 39. (El elemento máximo \mathbb{W}_k de \mathcal{E}_k) Fijamos $k \geq 2$. Para cada $\vec{i} = (i_0, \dots, i_{k-1}) \in \omega^{\ll k}$ definimos

$$\mathbb{W}_k(\vec{i}) = \{m_{\vec{i} \upharpoonright p} : 1 \leq p \leq k\}.$$

Entonces, cada $\mathbb{W}_k(\vec{i})$ es un miembro de $[\omega]^k$. Definimos

$$\mathbb{W}_k = \{\mathbb{W}_k(\vec{i}) : \vec{i} \in \omega^{\ll k}\}.$$

Note que \mathbb{W}_k es un subconjunto de $[\omega]^k$ con tipo de orden ω^k , bajo el orden lexicográfico.

Para cada $i \leq p \leq k$, denotaremos por $\mathbb{W}_k(\vec{i} \upharpoonright p)$ al conjunto $\{m_{\vec{i} \upharpoonright q} : 1 \leq q \leq p\}$, y sea $\mathbb{W}_k(()) = \emptyset$, observamos que \mathbb{W}_k induce un árbol $\hat{\mathbb{W}}_k = \{\mathbb{W}_k(\vec{j}) : \vec{j} \in \omega^{\ll \leq k}\} \subseteq [\omega]^{\leq k}$ que se obtiene tomando todos los segmentos iniciales de los miembros de \mathbb{W}_k . Las características importantes de la estructura de $\hat{\mathbb{W}}_k$ son las siguientes; tales características serán importantes en la siguiente definición:

1. Para cada $m \geq 1$, $\text{máx}(\mathbb{W}_k(\vec{j}_m)) < \text{máx}(\mathbb{W}_k(\vec{j}_{m+1}))$.
2. Para cada $\vec{j}, \vec{l} \in \omega^{\ll \leq k}$, $\mathbb{W}_k(\vec{j})$ es un segmento inicial de $\mathbb{W}_k(\vec{l})$ si y sólo si \vec{j} es un segmento inicial de \vec{l} .

Todos los miembros de \mathcal{E}_k tendrán la misma estructura.

Definición 40. (Los espacios (\mathcal{E}_k, \leq, r) , $k \geq 2$) Para cada $\vec{j}_m \in \omega^{\ll \leq k}$, denotaremos por $|\vec{j}|$ la longitud de la sucesión \vec{j} . Diremos que \hat{X} es un \mathcal{E}_k -árbol si \hat{X} es una función de $\omega^{\ll \leq k}$ en $\hat{\mathbb{W}}_k$ tal que

1. Para cada $m < \omega$, $\hat{X}(\vec{j}_m) \in [\omega]^{|\vec{j}_m|} \cap \hat{\mathbb{W}}_k$;
2. para cada $1 \leq m < \omega$, $\text{máx}(\hat{X}(\vec{j}_m)) < \text{máx}(\hat{X}(\vec{j}_{m+1}))$;
3. para cada $m, n < \omega$, $\hat{X}(\vec{j}_m) \sqsubset \hat{X}(\vec{j}_n)$ si y sólo si $\vec{j}_m \sqsubset \vec{j}_n$.

Sea \hat{X} un \mathcal{E}_k -árbol, denotaremos por $[\hat{X}]$ a la función $\hat{X} \cap (\omega^{\aleph_k} \times \mathbb{W}_k)$. Definimos el espacio \mathcal{E}_k como la colección de todos los conjuntos $[\hat{X}]$ tales que \hat{X} es un \mathcal{E}_k -árbol. Entonces, \mathcal{E}_k es el espacio de todas las funciones X de ω^{\aleph_k} en \mathbb{W}_k que inducen un \mathcal{E}_k -árbol.

Para cada $X, Y \in \mathcal{E}_k$, definimos $X \leq Y$ si y sólo si $\text{ran}(Y) \subseteq \text{ran}(X)$. Para cada $n < \omega$, definimos la n -ésima aproximación finita de X , $r_n(X)$ como $X \cap (\{\vec{i}_p : p < n\} \times \mathbb{W}_k)$. Como se ha hecho con los espacios anteriores, definimos $\mathcal{AR} = \mathcal{AE}_k$ como la colección $\{r_n(X) : X \in \mathcal{E}_k \text{ y } n < \omega\}$. Para cada $a, b \in \mathcal{AR}$ escribiremos $a \leq_{fin} b$ si y sólo si $\text{ran}(a) \subseteq \text{ran}(b)$.

Observación. Los elementos de \mathcal{E}_k son funciones de ω^{\aleph_k} en \mathbb{W}_k obtenidas restringiendo \mathcal{E}_k -árboles a sus nodos maximales. Cada elemento de \mathcal{E}_k determina completamente un \mathcal{E}_k -árbol y vice versa. Identificaremos a cada elemento X de \mathcal{E}_k con su imagen $\text{ran}(X) = \{X(\vec{i}_n) : n < \omega\} \subseteq \mathbb{W}_k$. Además pensaremos a $r_n(X)$ como $\{X(\vec{i}_p) : p < n\}$.

Ahora definiremos las funciones proyección π_l , $l \leq k$, como sigue. Para cada $\vec{j} \in \omega^{\aleph_{\leq \omega}}$, definamos $\pi_0(\{m_{\vec{j}|q} : 1 \leq q \leq |\vec{j}|\}) = \emptyset$. Para cada $1 \leq l \leq k$ y $\vec{j} \in \omega^{\aleph_{\leq \omega}}$ con $|\vec{j}| \geq 1$, definimos

$$\pi_l(\{m_{\vec{j}|q} : 1 \leq q \leq |\vec{j}|\}) = \{m_{\vec{j}|q} : 1 \leq q \leq l\}.$$

Entonces, π_l está definida sobre los miembros de $\hat{\mathbb{W}}_k$ con longitud al menos l , y los proyecta sobre su segmento inicial de longitud l .

Teorema 41. *Para cada $2 \leq k < \omega$, (\mathcal{E}_k, \leq, r) es un espacio topológico Ramsey.*

□

Ejemplo 42. (El espacio \mathcal{E}_2) Los miembros de \mathcal{E}_2 se ven como ω del espacio de Ellentuck. El buen orden $\langle \omega^{\aleph_{\leq 2}}, \prec \rangle$ inicia como sigue:

$$() \prec (0) \prec (0, 0) \prec (0, 1) \prec (1) \prec (1, 1) \prec (0, 2) \prec (1, 2) \prec (2) \prec (2, 2) \prec \dots$$

La estructura de árbol de $\omega^{\aleph_{\leq 2}}$, bajo el orden lexicográfico, se ve como ω copias de ω , y tiene el tipo de orden de ω^2 bajo el orden lexicográfico. La imagen muestra $\{\vec{j}_m : m < 22\}$, lo cual permite entender cómo está formado $\omega^{\aleph_{\leq 2}}$. Es lo mismo si tomamos todos los segmentos iniciales de las sucesiones del conjunto $\{\vec{i}_n : n < 15\}$.

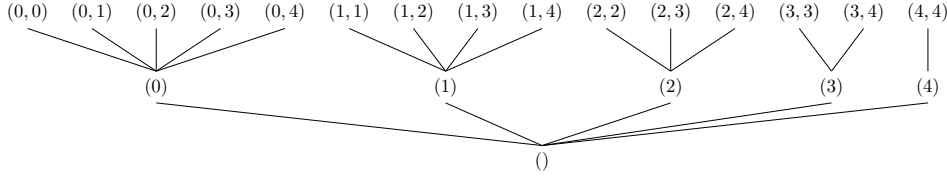


Figure 2.4: $\omega^{\leq 2}$

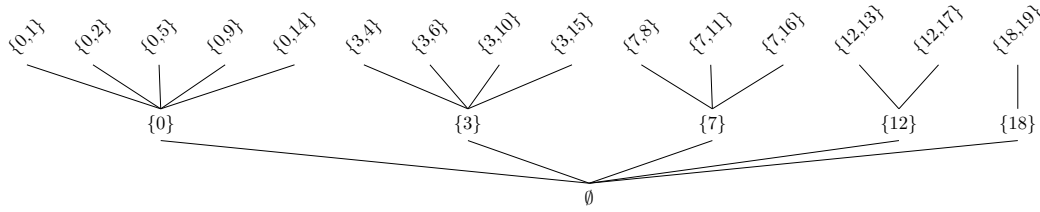


Figure 2.5: $r_{15}(\mathbb{W}_2)$

El orden \prec sobre $\omega^{\leq 2}$ determina los nodos en $\hat{\mathbb{W}}_2$. Los nodos maximales en la figura siguiente muestran $r_{15}(\mathbb{W}_2)$, lo cual indica cómo está formado el resto de \mathbb{W}_2 .

Denotaremos por ω^2 al conjunto $\omega \times \omega$ y $\text{Fin}^{\otimes 2}$ denotará al ideal $\text{Fin} \otimes \text{Fin}$, el cual es la colección de todos los subconjuntos A de $\omega \times \omega$ tales que para todos salvo una cantidad finita de $i \in \omega$, el conjunto $A(i) := \{j < \omega : (i, j) \in A\}$ es finito. Abusaremos de la notación y denotaremos por $\text{Fin}^{\otimes 2}$ al ideal sobre $[\omega]^2$ que consiste de los conjuntos $A \subseteq [\omega]^2$ tales que para todos salvo una cantidad finita de $i \in \omega$, el conjunto $\{j > i : \{i, j\} \in A\}$ es finito. Dados $X, Y \subseteq [\omega]^2$, escribiremos $X \subseteq^{\text{Fin}^{\otimes 2}} Y$ si y sólo si $X \setminus Y \in \text{Fin}^{\otimes 2}$.

La prueba del siguiente resultado se encuentra en [6]

Proposición 43. $\langle \mathcal{E}_2, \subseteq^{\text{Fin}^{\otimes 2}} \rangle$ es forcing equivalente a $\mathcal{P}(\omega^2) / \text{Fin}^{\otimes 2}$.

□

Ejemplo 44. (El espacio \mathcal{E}_3) El buen orden $\langle \omega^{\leq 3}, \prec \rangle$ inicia como sigue:

- $\emptyset \prec (0) \prec (0, 0) \prec (0, 0, 0) \prec (0, 0, 1) \prec (0, 1) \prec (0, 1, 1) \prec (1)$
- $\prec (1, 1) \prec (1, 1, 1) \prec (0, 0, 2) \prec (0, 1, 2) \prec (0, 2) \prec (0, 2, 2)$
- $\prec (1, 1, 2) \prec (1, 2) \prec (1, 2, 2) \prec (2) \prec (2, 2) \prec (2, 2, 2) \prec (0, 0, 3) \prec \dots$

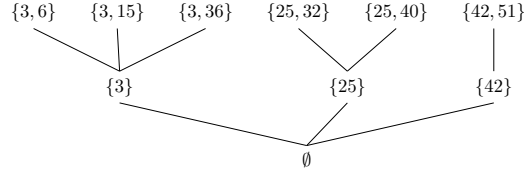


Figure 2.6: $r_6(X)$ para un $X \in \mathcal{E}_2$

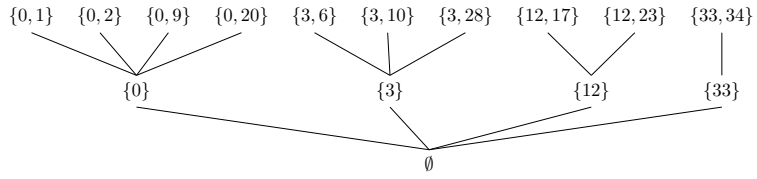


Figure 2.7: $r_{10}(X)$ para un $X \in \mathcal{E}_2$

El conjunto $\omega^{\swarrow \leq 3}$ es un árbol de altura 3 donde cada nodo no maximal se ramifica en ω nodos. Los nodos maximales de la siguiente figura son técnicamente el conjunto $\{\vec{i}_m : m < 20\}$, el cual nos da una idea de la estructura de \mathbb{W}_3 .

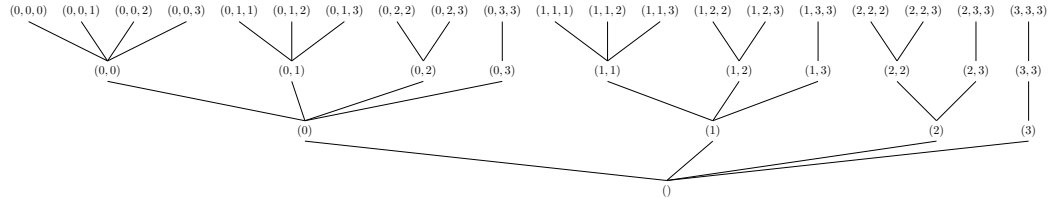


Figure 2.8: $\omega^{\swarrow \leq 3}$

Denotaremos por $\text{Fin}^{\otimes 3}$ a $\text{Fin} \otimes (\text{Fin}^{\otimes 2})$, que consiste de todos los subconjuntos $F \subseteq \omega^3$ tales que para todos salvo una cantidad finita de $i \in \omega$, $\{(j, k) : (i, j, k) \in F\}$ pertenece a $(\text{Fin}^{\otimes 2})^+$. Identificando a $[\omega]^3$ con $\{(i, j, k) \in \omega^3 : i < j < k\}$, abusaremos de la notación y denotaremos por $\text{Fin}^{\otimes 3}$ sobre $[\omega]^3$ a la colección de todos los subconjuntos $F \subseteq [\omega]^3$ tales que $\{(i, j, k) : \{i, j, k\} \in F\}$ pertenece a $\text{Fin}^{\otimes 3}$ definido en $[\omega]^3$.

Proposición 45. $\langle \mathcal{E}_3, \subseteq^{\text{Fin}^{\otimes 3}} \rangle$ es forcing equivalente a $\mathcal{P}(\omega^3) / \text{Fin}^{\otimes 3}$.

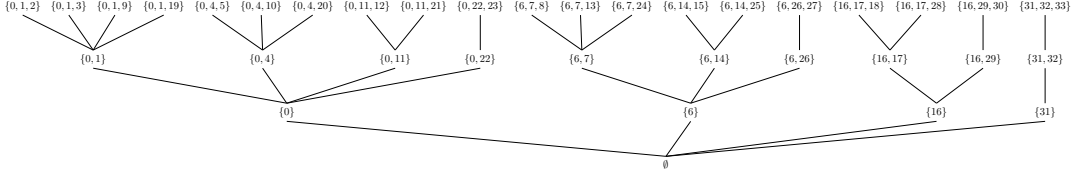


Figure 2.9: W_3

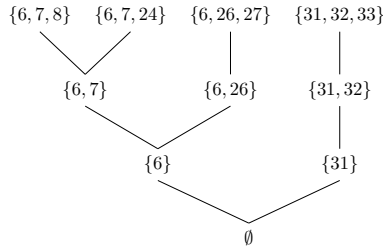


Figure 2.10: $r_4(X)$ para un $X \in \mathcal{E}_3$

□

Sea $k \geq 2$ fijo. Denotaremos por $\text{Fin}^{\otimes k}$ al conjunto $\text{Fin} \otimes \text{Fin}^{\otimes k-1}$, el cual consiste de todos los subconjuntos $F \subseteq \omega^k$ tales que para todos salvo una cantidad finita de $i \in \omega$, $\{(j_1, \dots, j_{k-1}) : (i, j_1, \dots, j_{k-1}) \in F\}$ pertenece a $(\text{Fin}^{\otimes k-1})^+$. Identificaremos a $[\omega]^k$ con $\{(j_1, \dots, j_k) \in \omega^k : j_i < j_{i+1}, i \in k+1\}$, abusaremos de la notación y denotaremos por $\text{Fin}^{\otimes k}$ sobre $[\omega]^k$ a la colección de todos los subconjuntos $F \subseteq [\omega]^k$ tales que $\{(j_1, \dots, j_k) : \{j_1, \dots, j_k\} \in F\}$ pertenece a $\text{Fin}^{\otimes k}$ como se definió sobre $[\omega]^k$.

Proposición 46. $\langle \mathcal{E}_k, \subseteq^{\text{Fin}^{\otimes k}} \rangle$ es forcing equivalente a $\mathcal{P}(\omega^k) / \text{Fin}^{\otimes k}$.

□

Sea \mathcal{G}_k un ultrafiltro genérico para el forcing $\mathcal{P}(\omega^k) / \text{Fin}^{\otimes k}$, como $\langle \mathcal{E}_k, \subseteq^{\text{Fin}^{\otimes k}} \rangle$ y $\mathcal{P}(\omega^k) / \text{Fin}^{\otimes k}$ son forcings equivalentes, el filtro genérico de $\langle \mathcal{E}_k, \subseteq^{\text{Fin}^{\otimes k}} \rangle$ también es un ultrafiltro. Abusaremos de la notación y llamaremos \mathcal{G}_k al ultrafiltro genérico para $\langle \mathcal{E}_k, \subseteq^{\text{Fin}^{\otimes k}} \rangle$.

La primera versión del teorema abstracto de Ellentuck apareció en un artículo de Carlson-Simpson, en este artículo los autores usaron una axiomatización diferente y también una prueba diferente. La teoría de Ramsey dual

fue desarrollada por T.J. Carlson y S.G. Simpson en [3]. En este artículo presentan un teorema combinatorio que en cierto sentido es dual al teorema de Ramsey. La teoría dual trabaja con coloraciones de particiones con piezas de k elementos de un conjunto infinito dado. Ahora introduciremos el espacio de Carlson-Simpson. Este espacio es llamado un espacio dual.

Sea \mathcal{E}_∞ la colección de todas las relaciones de equivalencia E sobre ω cuyos cocientes ω/E son infinitos. Cada clase $[x]_E$ de E tiene un representante mínimo. Sea $p(E)$ el conjunto de todos los representantes mínimos de las clases de E . Sea $\{p_n(E)\}_{n=0}^\infty$ la enumeración creciente de $p(E)$. Note que $0 \in p(E)$ para cada $E \in \mathcal{E}_\infty$, por lo tanto $p_0(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{E}_\infty$.

Para cada $E, F \in \mathcal{E}_\infty$, diremos que E es *más grueso* que F lo cual escribiremos como $E \leq F$ si cada clase de E puede ser representada como la unión de algunas clases de F . La n -ésima *aproximación* $r_n(E)$ de $E \in \mathcal{E}_\infty$ se define como sigue:

$$r_n(E) = E \upharpoonright p_n(E).$$

$r_n(E)$ es la restricción de la relación de equivalencia E al conjunto finito $\{0, 1, \dots, p_n(E) - 1\}$. Cada aproximación finita $a \in \mathcal{AE}_\infty$ tiene por *longitud* $|a|$, el entero n tal que $a = r_n(E)$ para algún $E \in \mathcal{E}_\infty$ (o equivalentemente, el número de clases de equivalencia de a) y su *dominio*, el entero $p_{|a|}(E) = \{0, 1, \dots, p_{|a|}(E) - 1\}$, donde E es algún miembro de \mathcal{E}_∞ tal que $a = r_{|a|}(E)$. La relación \leq sobre \mathcal{E}_∞ permite una *finitización* natural \leq_{fin} sobre \mathcal{AE}_∞ que satisface A,2 y A,3: $a \leq_{fin} b$ si $dom(a) = dom(b)$ y a es más grueso que b .

El siguiente resultado se puede encontrar con su prueba como el Teorema 5.70 en [13]

Teorema 47. (*Carlson-Simpson*) *El espacio $(\mathcal{E}_\infty, \leq, r)$ es un espacio topológico de Ramsey.*

□

Fije $E \in \mathcal{E}_\infty$. Definiremos por recursión una función $f_E : \omega \rightarrow \omega$. Definimos $f_E(0) = 0$. Ahora, fije $n \in \omega$ y supongamos que para cada $i \in n$ hemos definido $f_E(i)$, si existe $i \in n$ tal que n e i pertenecen a la misma clase de equivalencia, sea $f_E(n) = f_E(i)$, en otro caso definimos $f_E(n) = \max\{f_E(i) : i \in \omega\} + 1$. Note que podemos identificar a E con la función f_E . Sea $h : \omega \rightarrow \omega$ una función sobreyectiva tal que para cada $m \in \omega$, si i es el mínimo número natural tal que $h(i) = m$ y j es el mínimo número natural tal que

$h(j) = m + 1$, entonces $i < j$. Entonces los conjuntos $h_i^{-1}(i)$ forman una partición de ω en una cantidad infinita de piezas, denotaremos esta partición como $E_h \in \mathcal{E}_\infty$.

Sea \mathcal{E}' la colección de todas las funciones sobreyectivas $h : \omega \rightarrow \omega$ tales que para cada $m \in \omega$, si i es el mínimo número natural tal que $h(i) = m$ y j es el mínimo número natural tal que $h(j) = m + 1$, entonces $i < j$. Sean $g, h \in \mathcal{E}'$, note que $X_g \leq X_h$ si y sólo si existe $f \in \mathcal{E}'$ tal que $f \circ h = g$ si y sólo si para cada $n, m \in \omega$ tales que $h(n) = h(m)$, se cumple que $g(n) = g(m)$.

Afirmación 1. $\mathcal{U}_{\mathcal{E}_\infty}$, el ultrafiltro sobre \mathcal{AR}_1 generado por la colección $\{\mathcal{AR}_1 \upharpoonright X : X \in \mathcal{G}_{\mathcal{E}_\infty}\}$, es Ramsey en el sentido de ω .

Demostración. Sea $c : [\mathcal{AR}_1]^2 \rightarrow 2$ una coloración. Definimos $\mathcal{D} = \{F \in \mathcal{E}_\infty : |c[\mathcal{AR}_1 \upharpoonright F]^2| = 1\}$. Probaremos que \mathcal{D} es un subconjunto denso de \mathcal{E}_∞ . Sea $E \in \mathcal{E}_\infty$ fijo y definamos $X = \{p_n(E) : n \in \omega\}$. Sea $c' : [X]^2 \rightarrow 2$ una coloración tal que $c'(l, j) = c(\langle 0 \rangle_{i \leq l}, \langle 0 \rangle_{i \leq j})$. Por el teorema de Ramsey existe $M \in [X]^\omega$ tal que M es monocromático. Definamos por recursión $h : \omega \rightarrow \omega$ como sigue. Definimos $h(0) = f_E(0) = 0$. Ahora, fije $i \in \omega$ y supongamos que hemos definido $h(j)$ para cada $j < i$. Si existe $j < i$ tal que $f_E(i) = f_E(j)$, sea $h(j) = h(i)$. Si no, tenemos dos casos; si $i \in M$, sea $h(i) = \max\{h(j) : j < i\} + 1$, en otro caso sea $h(i) = h(j)$ donde j es el máximo elemento de M que es menor que i . Sea E_h la partición de ω generada por h . Note que $E_h \in \mathcal{E}_\infty$ y $\{p_n(E_h) : n \in \omega\} = M$. Como M es monocromático, $\mathcal{AR}_1 \upharpoonright E_h$ también es monocromático. Entonces $E_h \leq E$ and $E_h \in \mathcal{D}$. Por lo tanto \mathcal{D} es un subconjunto denso de $\langle \mathcal{E}_\infty, \leq^* \rangle$. Como $\mathcal{G}_{\mathcal{E}_\infty}$ es un filtro genérico, existe $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{E}_\infty}$. Entonces $\mathcal{AR}_1 \upharpoonright F \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}_\infty}$ y $\mathcal{AR}_1 \upharpoonright F$ is monocromático. \square

Capítulo 3

Números de Ramsey y números de pseudointersección

3.1 Números de Ramsey para ultrafiltros asociados a espacios topológicos de Ramsey

Definición 48. Sea $n \in \omega$, definimos el *número de Ramsey asociado a \mathcal{U}_1* como el mínimo número natural $t(\mathcal{R}_1, n)$ tal que para cada $m \in \omega$ y para cada coloración $c : [\mathbb{T}]^n \rightarrow m$ existe $Y \in \mathcal{U}_1$ tal que $c \upharpoonright [Y]^n$ toma a lo más $t(\mathcal{R}_1, n)$ valores.

El siguiente resultado es mencionado en un artículo de Laflamme publicado en 1989 pero aparece sin prueba. Para que la siguiente prueba sea más clara, note que si fijamos $n \in \omega$, cualesquiera dos miembros de \mathcal{AR}_n son isomorfos de acuerdo a la estructura de \mathbb{T} .

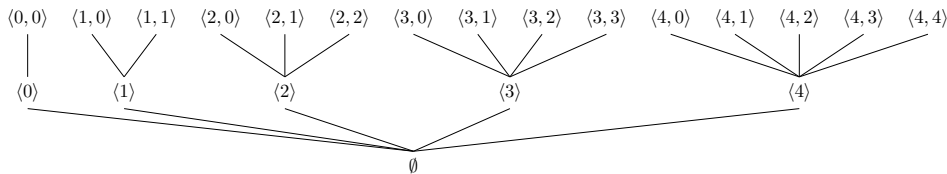
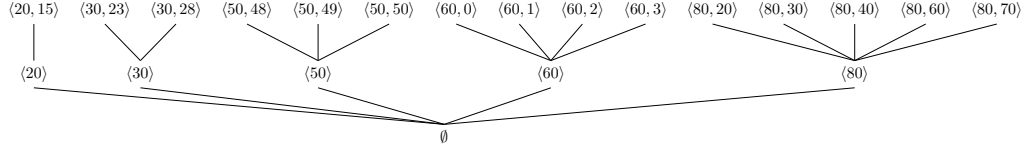


Figure 3.1: $r_5(\mathbb{T})$

Proposición 49. Para cada $n \in \omega$, $t(\mathcal{R}_1, n) = 2^{n-1}$.

Figure 3.2: Otro miembro de \mathcal{AR}_5

Demostración. Sean m un número natural y $c : [\mathbb{T}]^n \rightarrow m$ una coloración. Definimos $\mathcal{D} = \{Y \in \mathcal{R}_1 : |c[[Y]^n]| \leq 2^{n-1}\}$. Probaremos que \mathcal{D} es un conjunto denso en $\langle \mathcal{R}_1, \leq_1 \rangle$. Sea $X \in \mathcal{R}_1$ fijo. Note que el mínimo natural k tal que para cada $t \in [X]^n$ existe $s \in \mathcal{AR}_k$ tal que $t \subseteq s$ es $k = n$. Fije $s' \in \mathcal{AR}_n$. Sea $L = |[s']^n| = \binom{l}{n}$ donde $l = \frac{n(n+1)}{2}$ y enumeramos $[s']^n$ como $\{t_1^{s'}, \dots, t_L^{s'}\}$. Para cada $s \in \mathcal{AR}_n$ sea $\varphi : [s']^n \rightarrow [s]^n$ un isomorfismo que preserve la estructura de árbol. Para cada $i \in [1, L]$, sea $t_i^s = \varphi(t_i^{s'})$. Observamos que $[s]^n = \{t_1^s, \dots, t_L^s\}$. Para cada $i_1, \dots, i_L \in m$ definamos $\mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_L \rangle} = \{s \in \mathcal{AR}_n : c(t_1^s) = i_1, \dots, c(t_L^s) = i_L\}$. Como $\mathcal{AR}_n = \bigcup \{\mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_L \rangle} : \langle i_1 \dots i_L \rangle \in m^L\}$ y \mathcal{AR}_n es una familia Nash-Williams, el Teorema 28 garantiza la existencia de un $Z \leq_1 X$ y $i_{10}, \dots, i_{L0} \in m$ tales que $\mathcal{AR}_n \upharpoonright Z \subseteq \mathcal{F}_{\langle i_{10} \dots i_{L0} \rangle}$. Para cada $i \in \omega$ existe $l_i \in \omega$ tal que $Z(i) = \{\langle l_i, j_0 \rangle, \langle l_i, j_1 \rangle, \dots, \langle l_i, j_i \rangle\}$ tal que si $k < p$ entonces $j_k < j_p$. Definamos $Y \in \mathcal{R}_1$ de forma que para cada $i \in \omega$,

$$Y(i) = Z(n+i) \setminus \{\langle l_{n+i}, j_{i+1} \rangle, \langle l_{n+i}, j_{i+2} \rangle, \dots, \langle l_{n+i}, j_{n+i} \rangle\}.$$

Sea $t \in [Y]^n$, escribiremos a t como $\{\langle l_1, j_1 \rangle, \langle l_2, j_2 \rangle, \dots, \langle l_n, j_n \rangle\}$ donde $l_p \leq l_q$ si $p \leq q$ y $j_p < j_q$ si existe l tal que $\langle l, j_p \rangle, \langle l, j_q \rangle \in t$ y $p < q$.

Construiremos $s \in \mathcal{AR} \upharpoonright Y$ tal que $t \in [s]^n$. Denotaremos por $t(l)$ al conjunto $\{\langle l', j' \rangle \in t : l' = l\}$.

Para cada $i \in [1, n]$, definamos $k(l_i) = |t(l_i)|$. Sea $l'_1 = l_n$. Existe $p_1 \in \omega$ tal que $t(l'_1) \subseteq Y(p_1)$. Sea $A \subseteq Z(p_1+n) \setminus Y(p_1)$ tal que $|A| = n - k(l'_1)$, entonces definimos $s(n-1) = t(l'_1) \cup A$. Ahora supongamos que hemos definido $s(n-i)$ y l'_i . Si $l'_i = l_1$, sea $s(j) = Y(j)$ para cada $j < n-i$. En otro caso, sea l'_{i+1} el mínimo miembro de $\{l_i : i \in [1, n]\}$ tal que $l'_{i+1} < l'_i$. Existe $p_i \in \omega$ tal que $t(l'_i) \subseteq Y(p_i)$. Sea $A \subseteq Z(p_i+n) \setminus Y(p_i)$ tal que $|A| = i - k(l'_i)$, entonces definimos $s(i-1) = t(l'_i) \cup A$. Entonces, existe $q \in [1, L]$ tal que $t = t_q^s$. Note que si t, u pertenecen a $[Y]^n$ y ambos tienen la misma configuración, entonces existen $s, s_1 \in \mathcal{AR}_n$ y $q \in [1, L]$ tales que $t = t_q^s$ y $t_1 = t_q^{s_1}$, por lo tanto $c(t) = i_{q0} = c(u)$. Entonces $|c[[Y]^n]| \leq |\bigcup_{p \leq n} \{\langle x_i : 1 \leq i \leq p \rangle : \forall i \in [1, p], x_i \in [1, n] \text{ y } \sum_{i=1}^p x_i = n\}| = \sum_{p=1}^n |\{\langle x_i : 1 \leq i \leq p \rangle : \forall i \in [1, p], x_i \in$

$[1, n]$ y $\sum_{i=1}^p x_i = n$ } el número de todas las diferentes configuraciones de elementos de $[Y]^n$.

Ahora probaremos que para cada $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|\{\langle x_i : 1 \leq i \leq p \rangle : \forall i \in [1, p], x_i \in [1, n] \text{ y } \sum_{i=1}^p x_i = n\}| = \binom{n-1}{p-1}$. Sea $\mathcal{A} = \{A \cup \{n\} : A \subseteq [1, n-1] \text{ y } |A| = p-1\}$ y $\mathcal{B} = \{\langle x_i : 1 \leq i \leq p \rangle : \forall i \in [1, p], x_i \in [1, n] \text{ y } \sum_{i=1}^p x_i = n\}$. Note que $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{p-1}$. Sea $A \in \mathcal{A}$, escribiremos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p\}$ con $a_1 < a_2 < \dots < a_{p-1} < a_p = n$, definamos $x_1^A = a_1$ y para cada $1 < i \leq p$, $x_i^A = a_i - a_{i-1}$, entonces $\langle x_i^A : 1 \leq i \leq p \rangle \in \mathcal{B}$. Sean $A, A' \in \mathcal{A}$ tales que $A \neq A'$, podemos suponer que el mínimo elemento de $A \Delta A'$ pertenece a A y $a = a_i$ para algún $i \in [1, p-1]$, entonces $x_i^A \neq x_i^{A'}$ y por tanto $\langle x_i^A : 1 \leq i \leq p \rangle \neq \langle x_i^{A'} : 1 \leq i \leq p \rangle$, entonces $\binom{n-1}{p-1} \leq |\mathcal{B}|$. Ahora, sea $x = \langle x_i : 1 \leq i \leq p \rangle \in \mathcal{B}$, entonces $A_x = \{x_1, \dots, x_1 + \dots + x_p\} \in \mathcal{A}$. Sean $x, x' \in \mathcal{B}$ tales que $x \neq x'$ y sea i el mínimo natural tal que $x_i \neq x'_i$, entonces $x_1 + \dots + x_i \neq x'_1 + \dots + x'_i$ y por lo tanto $A_x \neq A_{x'}$, entonces $|\mathcal{B}| = \binom{n-1}{p-1}$. De lo anterior se sigue que $|c[[Y]^n]| \leq \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} = 2^{n-1}$.

Entonces \mathcal{D} es un subconjunto denso de $\langle \mathcal{R}_1, \leq_1^* \rangle$. Como es un filtro \mathcal{U}_1 $\langle \mathcal{R}_1, \leq_1^* \rangle$ -genérico, existe $Y \in \mathcal{U}_1$ tal que $|c[[Y]^n]| \leq 2^{n-1}$.

Sea $c : [\mathbb{T}]^n \rightarrow 2^{n-1}$ una coloración tal que si t, t' tienen diferente configuración entonces $c(t) \neq c(t')$. Note que para cada $Y \in \mathcal{R}_1$, $|c[[Y]^n]| = 2^{n-1}$. Entonces $t(\mathcal{R}_1, n) = 2^{n-1}$. □

Como $t(\mathcal{R}_1, 2) = 2$, para cada coloración $c : [\mathbb{T}]^2 \rightarrow 3$ existe $X \in \mathcal{U}_1$ tal que $|c \upharpoonright [X]^2| \leq 2$. Entonces \mathcal{U}_1 es un ultrafiltro débilmente Ramsey en el sentido de ω . De la prueba anterior se sigue que existe una coloración $c : [\mathbb{T}]^2 \rightarrow 2$ tal que para cada $X \in \mathcal{R}_1$, $|c \upharpoonright [X]^2| = 2$. Entonces \mathcal{U}_1 no es un ultrafiltro Ramsey, en el sentido de ω .

Definición 50. Sean $n \in \omega$ y \mathcal{U} un ultrafiltro (\mathcal{H}^2, \leq^*) -genérico. Definimos el *número de Ramsey asociado a \mathcal{U}* como el mínimo número natural $t(\mathcal{H}^2, n)$ tal que para cada número natural m y para cada coloración $c : [\mathbb{A}]^n \rightarrow m$ existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $c \upharpoonright [Y]^n$ toma a lo más $t(\mathcal{H}^2, n)$ valores.

Afirmación 2. $t(\mathcal{H}^2, 2) = 5$.

Demostración. Sean m un entero positivo y $c : [\mathbb{A}]^2 \rightarrow m$ una coloración. Definimos $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{H}^2 : |c[[B]^2]| \leq 5\}$. Vamos a probar que \mathcal{D} es un conjunto denso. Sea $D \in \mathcal{H}^2$ fijo, note que el mínimo k tal que para cada $s \in [D]^2$ existe $t \in \mathcal{A}\mathcal{H}_k^2$ tal que $s \subseteq t$, es $k = 2$.

Note que si $s \in \mathcal{AH}_2^2$, s se puede escribir como

$$\langle n_0, \{x_0\} \times \{x_1\} \rangle, \langle n_1, \{y_0, y_1\} \times \{z_0, z_1\} \rangle$$

donde $n_0, n_1 \in \omega$ y $\{x_0\}, \{x_1\}, \{y_0, y_1\}, \{z_0, z_1\}$ son conjuntos linealmente ordenados. Fijamos $s' \in \mathcal{AH}_2^2$ y escribimos a s' como

$$\langle m_0, \{x'_0\} \times \{x'_1\} \rangle, \langle m_1, \{y'_0, y'_1\} \times \{z'_0, z'_1\} \rangle$$

. Note que $|[s']^2| = \binom{5}{2} = 10$, enumeramos a $[s']^2$ de la siguiente manera $\{t'_1, \dots, t'_{10}\}$. Para cada $s \in \mathcal{AH}_2^2$, sea $\varphi : s' \rightarrow s$ un isomorfismo tal que $\Psi(\langle m_0, x'_i \rangle) = \langle n_0, x_i \rangle$ y $\Psi(\langle m_1, \langle y'_i, z'_i \rangle \rangle) = \langle n_1, \langle y_i, z_i \rangle \rangle$ para cada $i \in 2$. Ahora, para cada $i \in [1, 10]$, sea $t_i^s = \varphi[t'_i]$. Observe que $[s]^2 = \{t_1^s, \dots, t_{10}^s\}$. Para cada $i_1, \dots, i_{10} \in m$, definimos $\mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_{10} \rangle} = \{s \in \mathcal{AH}_2^2 : c(t_1^s) = i_1, \dots, c(t_{10}^s) = i_{10}\}$. Como $\mathcal{AH}_2^2 = \bigcup \{\mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_{10} \rangle} : \langle i_1 \dots i_{10} \rangle \in m^{10}\}$ y \mathcal{AH}_2^2 es una familia Nash-Williams, por el Teorema 28 existen $C \leq D$ y $i_{10}, \dots, i_{100} \in m$ tales que $\mathcal{AH}_2^2 \upharpoonright C \subseteq \mathcal{F}_{\langle i_{10} \dots i_{100} \rangle}$. Escribiremos a C como $\langle \langle m_k, \mathbf{C}_k \rangle : k < \omega \rangle$. Para cada $k \in \omega$ y $j \in 2$, sea $\mathbf{B}_{k,j}$ el conjunto de los primeros $k+1$ elementos de $\mathbf{C}_{k+4,j}$ y sea $\mathbf{B}_k = (\mathbf{B}_{k,j})_{j \in 2}$. Note que $B = \langle \langle m_{k+4}, \mathbf{B}_k \rangle : k < \omega \rangle \in \mathcal{H}^2$.

Fijamos $t \in [B]^2$. Sea $\{l_1, l_2\} \subseteq \{m_{k+4} : k \in \omega\}$ el conjunto de todos los números naturales tales que $B(l_j) \cap t \neq \emptyset$. Sea $s_t \in \mathcal{AH}_2^2 \upharpoonright C$ tal que para cada $j \in [1, q]$, $\pi_{\mathbf{B}_{l_j,0}}(s_t) = \pi_{\mathbf{B}_{l_j,0}}(t)$ y $\pi_{\mathbf{B}_{l_j,1}}(s_t) = \pi_{\mathbf{B}_{l_j,1}}(t)$. Como $t \in [s_t]^2$, existe $p \in [1, 10]$ tal que $t = t_p^{s_t}$ y por tanto $c(t) = i_{p_0}$. Note que si $t, t' \in [B]^n$ son tal que existe $p \in [1, 10]$ tal que $t = t_p^{s_t}$ y $t' = t_p^{s_{t'}}$ entonces $c(t) = i_{p_0} = c(t')$, en este caso diremos que t y t' son isomorfos.

Sea $X \subseteq [B]^2$ tal que si $t, t' \in X$, entonces t y t' no son isomorfos y para cada $t \in [B]^2$ existe $t' \in X$ tal que t y t' son isomorfos. Note que $|c[[B]^2]| \leq |X|$. Ahora calcularemos la cardinalidad de X . Sea $t \in [B]^2$. Si $|\{k \in \omega : B(l_k) \cap t \neq \emptyset\}| = 2$, note que t es isomorfo a cualquier t' tal que $|\{k \in \omega : B(l_k) \cap t' \neq \emptyset\}| = 2$. Si existe $l \in \omega$ tal que $t \subseteq B(l)$, entonces $t \subseteq \mathbf{B}_{l,0} \times \mathbf{B}_{l,1}$. Sean $e_0 = |\pi_{\mathbf{B}_{l,0}}(t)|$ y $e_1 = |\pi_{\mathbf{B}_{l,1}}(t)|$. Si $e_0 = 1$, note que t es isomorfo a cada $t' \in [B]^2$ tal que existe $l' \in \omega$ tal que $t' \subseteq B(l')$, $|\pi_{\mathbf{B}_{l',0}}(t')| = 1$; si $e_1 = 1$ se sigue la misma conclusión. Ahora, si $e_0 = e_1 = 2$, tenemos dos posibilidades no isomorfas (t puede ser alguna de las dos diagonales del producto $\pi_{\mathbf{B}_{l,0}}(t) \times \pi_{\mathbf{B}_{l,1}}(t)$) y note que si t' es tal que si existe $l' \in \omega$ tal que $t' \subseteq B(l')$ y $|\pi_{\mathbf{B}_{l',0}}(t')| = 2 = |\pi_{\mathbf{B}_{l',1}}(t')|$, entonces t y t' son isomorfos. por lo tanto, $|c[[B]^2]| \leq |X| = 5$.

Como \mathcal{D} es un subconjunto denso de $\langle \mathcal{H}^2, \leq \rangle$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{H}^2}$ es un filtro $\langle \mathcal{H}^2, \text{leq} \rangle$ -genérico, existe $B \in \mathcal{G}_{\mathcal{H}^2}$ tal que $|c[[B]^2]| \leq 5$.

Sea $c : [\mathbb{A}]^2 \rightarrow 5$ una coloración tal que si t, t' no son isomorfos entonces $c(t) \neq c(t')$. Note que para cada $B \in \mathcal{H}^2$, $|c[[B]^n]| = 5$. Por lo tanto $t(\mathcal{H}^2, 2) = 5$.

□

Introduciremos la siguiente notación para calcular los números de Ramsey de \mathcal{H}^2 . Fijamos $n \geq 2$ y sea $q \in \omega$ tal que $1 \leq q \leq n$. Sean $l_1, \dots, l_q \in \omega$ tales que para cada $i \in [1, q]$, $l_i > 0$ y $\sum_{1 \leq i \leq q} l_i = n$. Denotaremos por c_n a

$$\sum_{1 \leq q \leq n} \sum_{l_1 + \dots + l_q = n} \sum_{1 \leq i \leq q} \sum_{l_i \leq k_0 k_1 \leq l_i^2} |\{Y \subseteq k_0 \times k_1 : \pi_{k_0}(Y) = k_0, \pi_{k_1}(Y) = k_1\}|.$$

Proposición 51. *Para cada $n \in \omega$ tal que $2 \leq n$, $t(\mathcal{H}^2, n) = c_n$.*

Demostración. Sean $m \in \omega$ un número natural y $c : [\mathbb{A}]^n \rightarrow m$ una coloración. Definimos $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{H}^2 : |c[[B]^n]| \leq c_n\}$. probaremos que \mathcal{D} es un conjunto denso. Sea $D \in \mathcal{H}^2$. Note que el mínimo k tal que para cada $s \in [D]^n$ existe $t \in \mathcal{A}\mathcal{H}_k^2$ tal que $s \subseteq t$ es $k = n$. Fijamos $s' \in \mathcal{A}\mathcal{H}_n^2$. Sea $L = |[s']^n| = \binom{q}{n}$ donde $q = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y enumeramos $[s']^n$ como $\{t_1^{s'}, \dots, t_L^{s'}\}$. Para cada $s \in \mathcal{A}\mathcal{H}_r^2$ sea $\varphi : s' \rightarrow s$ un isomorfismo tal que para cada $\{x, y\}, \{x', y'\} \in s$, $\varphi(x), \varphi(y)$ satisfacen la misma relación de orden que x, y y $\varphi(x'), \varphi(y')$ satisfacen la misma relación de orden que x', y' . Para cada $i \in [1, L]$ sea $t_i^s = \varphi[t_i^{s'}]$. Observamos que $[s]^n = \{t_1^s, \dots, t_L^s\}$. Para cada $i_1, \dots, i_L \in m$ definimos $\mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_L \rangle} = \{s \in \mathcal{A}\mathcal{H}_n^2 : c(t_1^s) = i_1, \dots, c(t_L^s) = i_L\}$. Como $\mathcal{A}\mathcal{H}_n^2 = \bigcup \{\mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_L \rangle} : \langle i_1 \dots i_L \rangle \in m^L\}$ y $\mathcal{A}\mathcal{H}_n^2$ es una familia Nash-Williams, por el Teorema 28 existen $C \leq D$ y $i_{1_0}, \dots, i_{L_0} \in m$ tales que $\mathcal{A}\mathcal{H}_n^2 \upharpoonright C \subseteq \mathcal{F}_{\langle i_{1_0} \dots i_{L_0} \rangle}$, escribiremos a C como $\langle \langle m_k, \mathbf{C}_k \rangle : k < \omega \rangle$. Para cada $k \in \omega$ y $j \in 2$, sea $\mathbf{B}_{k,j}$ el conjunto de los primeros $k+1$ elementos de $\mathbf{C}_{k+2n,j}$. Sea $\mathbf{B}_k = (\mathbf{B}_{k,j})_{j \in 2}$ y note que $B = \langle \langle m_{k+2n}, \mathbf{B}_k \rangle : k < \omega \rangle \in \mathcal{H}^2$.

Fijamos $t \in [B]^n$, sea $\{l_1, l_2, \dots, l_q\} \subseteq \{m_{k+2n} : k \in \omega\}$ el conjunto de los números naturales tales que $B(l_j) \cap t \neq \emptyset$. Sea $s_t \in \mathcal{A}\mathcal{H}^2 \upharpoonright C$ tal que para cada $l \in \{l_1, \dots, l_q\}$, $\pi_{\mathbf{B}_{l_0}}(s_t) = \pi_{\mathbf{B}_{l_0}}(t)$ y $\pi_{\mathbf{B}_{l_1}}(s_t) = \pi_{\mathbf{B}_{l_1}}(t)$. Como $t \in [s_t]^n$, existe $p \in [1, L]$ tal que $t = t_p^{s_t}$ y por tanto $c(t) = i_{p_0}$. Note que si $t, t' \in [B]^n$ son tales que existe $p \in [1, L]$ tal que $t = t_p^{s_t}$ y $t' = t_p^{s_{t'}}$ entonces $c(t) = i_{p_0} = c(t')$, en este caso diremos que t y t' son isomorfos.

Sea $X \subseteq [B]^n$ tal que si $t, t' \in X$, entonces t y t' no son isomorfas y para cada $t \in [B]^n$ existe $t' \in X$ tal que t y t' son isomorfos. Note que $|c[[B]^2]| \leq |X|$. Ahora contaremos la cardinalidad de X . Fijamos $t \in [B]^n$. Sea $\{l_1, l_2, \dots, l_q\} \subseteq \{m_{k+2n} : k \in \omega\}$ el conjunto de los números naturales

tales que $B(l_j) \cap t \neq \emptyset$. Para cada $j \in [1, q]$, sea $k_j = |B(l_j) \cap t|$. Note que $n = \sum_{1 \leq j \leq q} k_j$. Fije $l \in \{l_1, \dots, l_q\}$ y sean $E_0 = \pi_{\mathbf{B}_{l,0}}(t)$ y $E_1 = \pi_{\mathbf{B}_{l,1}}(t)$, entonces $t \subseteq E_0 \times E_1$. Sean $e_0 = |E_0|$ y $e_1 = |E_1|$. Note que si fijamos e_0 y e_1 , t puede tener $|\{Y \subseteq e_0 \times e_1 : \pi_{e_0}(Y) = e_0 \text{ y } \pi_{e_1}(Y) = e_1\}|$ diferentes configuraciones. Entonces

$$|X| = \sum_{1 \leq q \leq n} \sum_{l_1 + \dots + l_q = n} \sum_{1 \leq i \leq q} \sum_{l_i \leq e_0 e_1 \leq l_i^2} |\{Y \subseteq e_0 \times e_1 : \pi_{e_0}(Y) = e_0, \pi_{e_1}(Y) = e_1\}|.$$

Por lo tanto,

$$|c[[B]^n]| \leq \sum_{1 \leq q \leq n} \sum_{l_1 + \dots + l_q = n} \sum_{1 \leq i \leq q} \sum_{l_i \leq e_0 e_1 \leq l_i^2} |\{Y \subseteq e_0 \times e_1 : \pi_{e_0}(Y) = e_0, \pi_{e_1}(Y) = e_1\}|.$$

Entonces \mathcal{D} es un subconjunto denso de $\langle \mathcal{H}^2, \leq \rangle$. Como $\mathcal{G}_{\mathcal{H}^2}$ es un filtro genérico para \mathcal{H}^2 , existe $B \in \mathcal{G}_{\mathcal{H}^2}$ tal que $|c[[B]^n]| \leq c_n$.

Sea $c : [\mathbb{A}]^n \rightarrow c_n$ tal que si t, t' no son isomorfos, entonces $c(t) \neq c(t')$. Note que para cada $B \in \mathcal{H}^2$,

$$|c[[B]^n]| = \sum_{1 \leq q \leq n} \sum_{l_1 + \dots + l_q = n} \sum_{1 \leq i \leq q} \sum_{l_i \leq e_0 e_1 \leq l_i^2} |\{Y \subseteq e_0 \times e_1 : \pi_{e_0}(Y) = e_0, \pi_{e_1}(Y) = e_1\}| = c_n.$$

Por lo tanto $t(\mathcal{H}^2, n) = c_n$. □

Notación. Sean $k, n \in \omega$ tales que $n \leq k$ y sea $t \in [\mathbb{W}_k]^2$, escribiremos $t = \{\{x_0, \dots, x_{k-1}\}, \{y_0, \dots, y_{k-1}\}\}$ para indicar que:

1. $t = \{\{x_0, \dots, x_{k-1}\}, \{y_0, \dots, y_{k-1}\}\}$,
2. $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}, \{y_0, \dots, y_{k-1}\} \in \mathbb{W}_k$ y
3. $\{x_0, \dots, x_{k-1}\} \leq_{lex} \{y_0, \dots, y_{k-1}\}$.

Diremos que t tiene la forma α_n^k siempre que $x_{k-1} < y_{k-1-n}$ y para cada $n < l \leq k-1$, $x_{k-1} > y_{k-1-l}$. Diremos que t tiene la forma β_n^k siempre que $y_{k-1} < x_{k-1-n}$ y para cada $n < l \leq k-1$, $y_{k-1} > x_{k-1-l}$.

Sean $t, t' \in [\mathbb{W}_k]^2$, escribimos a t como $\{\{x_0, \dots, x_{k-1}\}, \{y_0, \dots, y_{k-1}\}\}$ y a t' como $\{\{x'_0, \dots, x'_{k-1}\}, \{y'_0, \dots, y'_{k-1}\}\}$. Diremos que t y t' son isomorfos si cada par $(l, m) \in k \times k$, x_l, y_m satisface la misma relación que x'_l, y'_m .

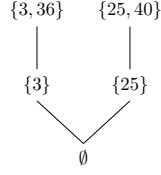


Figure 3.3: Los nodos maximales de la figura forman un par en \mathcal{E}_2 con la forma α_0^2 ($\{3, 36\} < \{25, 40\}$).

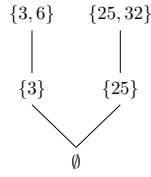


Figure 3.4: Los nodos maximales de la figura forman un par de E_2 con la forma α_1^2 ($\{3, 6\} < \{25\}$).

Definamos la función $\Psi : [\mathbb{W}_k]^2 \rightarrow [[\mathbb{W}_{k+1}]^2]^{<\omega}$ tal que para cada $t \in [\mathbb{W}_k]^2$, $\Psi(t) \subseteq [\mathbb{W}_{k+1}]^2$ es tal que:

1. para cada $s \in [\mathbb{W}_{k+1}]^2$, $s \in \Psi(t)$ si y sólo si $t = \pi_k(s)$,
2. si $s, s' \in \Psi(t)$ y $s \neq s'$ entonces s y s' no son isomorfos, y
3. para cada $s' \in [\mathbb{W}_{k+1}]^2$ tal que $t = \pi_k(s')$ existe $s \in \Psi(t)$ tal que s y s' son isomorfos.

Abusaremos de la notación y escribiremos $\Psi(\alpha_n^k) = \sum_{i \leq k+1} (l_i \alpha_i^{k+1} + j_i \beta_i^{k+1})$ para denotar que para cada $t \in [\mathbb{W}_k]^2$ con la configuración α_n^k , el conjunto $\Psi(t)$ contiene exactamente l_i conjuntos con la forma α_i^{k+1} y j_i conjuntos con la forma β_i^{k+1} , para cada $i \leq k+1$. Note que α_n^k y $\Psi(\alpha_n^k)$ no son números. Escribiremos $|\Psi(\alpha_n^k)|$ para denotar el número $\sum_{i \leq k+1} (l_i + j_i)$. La notación es similar para $\Psi(\beta_n^k) = \sum_{i \leq k+1} (l_i \alpha_i^{k+1} + j_i \beta_i^{k+1})$ y $|\Psi(\beta_n^k)|$.

Afirmación 3. Para cada $k, n \in \omega$ tales que $n \leq k$, $\Psi(\alpha_n^k) = \sum_{i \leq n+1} \alpha_i^{k+1} + \beta_0^{k+1}$ y $\Psi(\beta_n^k) = \sum_{i \leq n+1} \beta_i^{k+1} + \alpha_0^{k+1}$.

Demostración. Sea $t \in [\mathbb{W}_k]^2$ tal que $t = \{\{x_0, \dots, x_{k-1}\}, \{y_0, \dots, y_{k-1}\}\}$ tiene la forma α_n^k , entonces $x_{k-1} < y_{k-n-1}$. Sean $x_k, y_k \in \omega$ tales que $\{x_0, \dots, x_k\}, \{y_0, \dots, y_k\} \in [\mathbb{W}_{k+1}]$. Si $x_k < y_{k-n-1}$, tenemos uno y sólo un elemento de

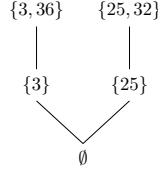


Figure 3.5: Los nodos maximales de la figura forman un par en \mathcal{E}_2 con la forma β_0^2 ($\{25, 32\} < \{3, 36\}$).

$\Psi(t)$ con la forma α_{n+1}^{k+1} , pero si $x_k > y_{k-n-1}$ tenemos dos opciones, $x_k < y_{k-n}$ o $x_k > y_{k-n}$. Si $x_k < y_{k-n}$ tenemos uno y sólo un miembro de $\Psi(t)$ con la forma α_n^{k+1} pero si $x_k > y_{k-n}$, tenemos dos opciones más, $x_k < y_{k-n+1}$ o $x_k > y_{k-n+1}$. Ahora, sea $i \in \omega$ tal que $2 < i < n$ y suponga que $x_k > y_{k-j}$ para cada $j \in (i, n]$, entonces tenemos dos opciones, $x_k < y_{k-i}$ o $x_k > y_{k-i}$. Si $x_k < y_{k-i}$, tenemos exactamente un miembro de $\Psi(t)$ con la forma α_i^{k+1} pero si $x_k > y_{k-i}$, tenemos dos opciones más, $x_k < y_{k-i+1}$ o $x_k > y_{k-i+1}$ y de esta manera podemos continuar el proceso. Note que en el i -ésimo paso obtenemos un miembro de $\Psi(t)$ con la forma α_{n+2-i}^{k+1} y en el último paso obtenemos un elemento con la forma α_0^{k+1} y otro miembro con la forma β_0^{k+1} . Entonces, $\Psi(\alpha_n^k) = \sum_{i \leq n+1} \alpha_i^{k+1} + \beta_0^{k+1}$. El mismo argumento funciona para probar que $\Psi(\beta_n^k) = \sum_{i \leq n+1} \beta_i^{k+1} + \alpha_0^{k+1}$. \square

Definición 52. Sean k, n números naturales y \mathcal{G}_k el ultrafiltro $(\mathcal{E}_k, \subseteq^{Fin^{\otimes k}})$ -genérico. Definimos el *número de Ramsey asociado a \mathcal{G}_k* como el mínimo número natural $t(\mathcal{E}_k, n)$ tal que para cada $m \in \omega$ y para cada coloración $c : [\mathbb{W}_k]^n \rightarrow m$ existe $Y \in \mathcal{E}_k$ tal que $c \upharpoonright [Y]^n$ toma a lo más $t(\mathcal{E}_k, n)$ valores.

Afirmación 4. $t(\mathcal{E}_2, 2) = 4$.

Demostración. Sean m un número natural y $c : [\mathbb{A}]^2 \rightarrow m$ una coloración. Definimos $\mathcal{D} = \{Y \in \mathcal{E}_k : |c[[Y]^2]| \leq 4\}$. Probaremos que \mathcal{D} es un conjunto denso. Sea $X \in \mathcal{E}_2$. Note que $k = 5$ es el mínimo número natural tal que para cada $t \in [X]^2$ existe $s \in \mathcal{AR}_5$ tal que $t \in [s]^2$.

Fije $s' \in \mathcal{AR}_5$. Sea $L = |[s']^2| = \binom{5}{2}$ y enumeremos $[s']^2$ como $\{t_1^{s'}, \dots, t_L^{s'}\}$. Para cada $s \in \mathcal{AR}_5$ sea $\varphi : [s']^2 \rightarrow [s]^2$ un isomorfismo que preserve la estructura de árbol. Para cada $i \in [1, L]$, sea $t_i^s = \varphi(t_i^{s'})$. Observe que $[s]^2 = \{t_1^s, \dots, t_L^s\}$ y para cada $i_1, \dots, i_L \in m$ definimos $\mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_L \rangle} = \{s \in \mathcal{AR}_5 : c(t_1^s) = i_1, \dots, c(t_L^s) = i_L\}$. Como $\mathcal{AR}_5 = \bigcup \{\mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_L \rangle} : \langle i_1 \dots i_L \rangle \in m^L\}$ y \mathcal{AR}_5 es una familia Nash-Williams, por el Teorema 28 existen $Y \leq X$ y $i_{1_0}, \dots, i_{L_0} \in m$

tales que $\mathcal{AR}_5 \upharpoonright Y \subseteq \mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_{L_0} \rangle}$. Sea $t = \{\{x_0, x_1\}, \{y_0, y_1\}\}$ un elemento de $[\mathbb{W}_k]^2$. Si $x_0 = y_0$, note que t tiene la forma α_0^2 . Sea $s_t \in \mathcal{AR}_5$ tal que $t \in [r_2(s_t)]^2$. Si $x_0 < y_0$ y $x_1 < y_0$, note que t tiene la forma α_1^2 . Sea $s_t \in \mathcal{AR}_5$ tal que $t \in [r_3(s_t)]^2$. Si $x_0 < y_0$, $x_1 > y_0$ y $x_1 < y_1$, note que t tiene la forma α_0^2 . Sea $s_t \in \mathcal{AR}_5$ tal que $t \in [s_t]^2$. Si $x_0 < y_0$, $x_1 > y_0$ y $x_1 > y_1$, note que t tiene la forma β_0^2 . Sea $s_t \in \mathcal{AR}_5$ tal que $t \in [r_4(s_t)]^2$. Note que t tiene una de 4 posibles configuraciones. Como $t \in [s_t]^2$, existe $i \in [1, L]$ tal que $t = t_i^{s_t}$. Note que si $t, t' \in [Y]^2$ son isomorfos, existe $i \in [1, L]$ tal que $t = t_i^{s_t}$ y $t' = t_i^{s'_t}$ y por tanto $c(t) = c(t')$. Entonces $|c[[Y]^n]|$ es menor o igual al número de todas las posibles configuraciones distintas de elementos de $[Y]^2$. Entonces \mathcal{D} es un subconjunto denso de \mathcal{E}_k . Como \mathcal{G}_2 es un filtro $\langle \mathcal{E}_2, \subseteq^{Fin \otimes 2} \rangle$ -genérico, existe $Y \in \mathcal{G}_2$ tal que $|c[[Y]^n]| = 4$.

Ahora, sea $c : [\mathbb{W}^2]^2 \rightarrow 4$ una coloración tal que si t, t' tienen diferentes configuraciones entonces $c(t) \neq c(t')$. Note que para cualquier $Y \in \mathcal{E}_2$, $|c[[Y]^n]| = 4$. Por lo tanto $t(\mathcal{E}_2, 2) = 4$. □

Note que $[\mathbb{W}_2]^2$ tiene un miembro $t = \{\{x_0, x_1\}, \{y_0, y_1\}\}$ tal que $x_0 = y_0$, un miembro $t = \{\{x_0, x_1\}, \{y_0, y_1\}\}$ tal que $x_0 < y_0$ y t tiene la forma α_1^2 , un miembro $t = \{\{x_0, x_1\}, \{y_0, y_1\}\}$ tal que $x_0 < y_0$ y t tiene la forma α_0^2 y un miembro $t = \{\{x_0, x_1\}, \{y_0, y_1\}\}$ tal que $x_0 < y_0$ y t tiene la forma β_0^2 y además cada miembro de $[\mathbb{W}_2]^2$ es isomorfo a alguno de los anteriores. Introduciremos la siguiente notación para extender la idea anterior y usarla en la prueba de la siguiente Proposición. $\Psi^0(\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \alpha_1^2)$ denotará $\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \alpha_1^2$. Ahora, sea $n \in \omega$ y suponga que $\Psi^n(\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \alpha_1^2) = \sum_{i \leq n+2} (l_i \alpha_i^{n+2} + j_i \beta_i^{n+2})$, entonces $\Psi^{n+1}(\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \alpha_1^2)$ denotará $\Psi(A)$ para algún conjunto $A \subseteq [\mathbb{W}_{n+2}]^2$ tal que A contiene exactamente l_i elementos no isomorfos con la forma α_i^{n+2} y j_i elementos no isomorfos con la forma β_i^{n+2} , para cada $i \leq n+2$.

Proposición 53. *Para cada $k \in \omega$ tal que $k > 2$,*

$$t(\mathcal{E}_k, 2) = 1 + \sum_{i \leq k-2} |\Psi^i(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)| = t(\mathcal{E}_{k-1}, 2) + |\Psi^{k-2}(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|.$$

Demostración. Sean m un número natural y $c : [\mathbb{W}_k]^2 \rightarrow m$ una coloración. Definamos $\mathcal{D} = \{Y \in \mathcal{E}_k : |c \upharpoonright [Y]^2| \leq 1 + \sum_{i \leq k-2} |\Psi^i(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|\}$. Probaremos que \mathcal{D} es un conjunto denso. Fijamos $X \in \mathcal{E}_k$. Sea p el mínimo natural tal que para cada $t \in [X]^2$ existe $s \in \mathcal{AR}_p$ tal que $t \in [s]^2$. Fijamos $s' \in \mathcal{AR}_p$. Sea $L = |[s']^2| = \binom{p}{2}$ y enumeramos $[s']^2$ como $\{t_1^{s'}, \dots, t_L^{s'}\}$. Para cada $s \in \mathcal{AR}_p$

sea $\varphi : [s']^2 \rightarrow [s]^2$ un isomorfismo que preserva la estructura de árbol. Para cada $i \in [1, L]$, sea $t_i^s = \varphi(t_i^{s'})$. Observe que $[s]^2 = \{t_1^s, \dots, t_L^s\}$. Para cada $i_1, \dots, i_L \in m$ definimos $\mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_L \rangle} = \{s \in \mathcal{AR}_p : c(t_1^s) = i_1, \dots, c(t_L^s) = i_L\}$. Como $\mathcal{AR}_p = \bigcup \{\mathcal{F}_{\langle i_1 \dots i_L \rangle} : \langle i_1 \dots i_L \rangle \in m^L\}$ y \mathcal{AR}_p es una familia Nash-Williams, por el Teorem 28 existen $Y \leq X$ y $i_{1_0}, \dots, i_{L_0} \in m$ tales que $\mathcal{AR}_p \upharpoonright Y \subseteq \mathcal{F}_{\langle i_{1_0} \dots i_{L_0} \rangle}$.

Sean $t \in [Y]^2$ y $l \in \omega$ el mínimo número natural para el cual existe $s \in \mathcal{AR}_p$ tal que $t \in [r_l(s)]^2$. Sea $s_t \in \mathcal{AR}_p$ tal que $t \in [r_l(s_t)]^2$. Como $t \in [s_t]^2$, existe $i \in [1, L]$ tal que $t = t_i^{s_t}$. Note que si $t, t' \in [Y]^2$ tienen la misma configuración entonces existe $i \in [1, L]$ tal que $t = t_i^{s_t}$ y $t' = t_i^{s_{t'}}$, y por tanto $c(t) = c(t')$. Entonces, $|c[[Y]^n]|$ es menor o igual que el número de todas las diferentes configuraciones no isomorfas de miembros de $[Y]^2$.

Probaremos por inducción que si $t = \{\{x_0, \dots, x_{k-1}\}, \{y_0, \dots, y_{k-1}\}\}$ pertenece a $[\mathbb{W}_k]^2$, t puede tener una de $1 + \sum_{i \leq k-3} \Psi^i(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)$ configuraciones no isomorfas si $x_0 = y_0$ y $|\Psi^{k-2}(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|$ configuraciones no isomorfas si $x_0 < y_0$.

El caso $k = 2$ fue probado en 4. Ahora, sea $t = \{\{x_0, \dots, x_k\}, \{y_0, \dots, y_k\}\}$ elemento de $[\mathbb{W}_{k+1}]^2$ y supongamos que tenemos la conclusión para cada $t' \in [\mathbb{W}_k]^2$. Si $x_0 = y_0$, existe $t' \in \mathbb{W}_k$ tal que t' y $\{\{x_1, \dots, x_k\}, \{y_1, \dots, y_k\}\}$ son isomorfos, entonces t tiene una de $1 + |\sum_{i \leq k-2} \Psi^i(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|$ diferentes configuraciones. Ahora suponga que $x_0 < y_0$ y sea $t' = \pi_k(t) \in \mathbb{W}_k$. Como $x_0 < y_0$, por hipótesis de inducción t' tiene una de $|\Psi^{k-2}(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|$ diferentes configuraciones. Entonces t tiene una de $|\Psi(\Psi^{k-2}(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2))| = |\Psi^{k-1}(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|$ diferentes configuraciones. Por lo tanto t tiene una de $1 + |\sum_{i \leq k-1} \Psi^i(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|$ diferentes configuraciones.

Entonces, $|c[[Y]^2]| \leq 1 + |\sum_{i \leq k-2} \Psi^i(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|$. De lo anterior se sigue que \mathcal{D} es un subconjunto denso de $(\mathcal{E}_k, \subseteq^{Fin^{\otimes k}})$. Como \mathcal{G}_k es un filtro $(\mathcal{E}_k, \subseteq^{Fin^{\otimes k}})$ -genérico, existe $Y \in \mathcal{G}_k$ tal que $|c[[Y]^2]| \leq 1 + |\sum_{i \leq k-2} \Psi^i(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|$.

Ahora, sea $c : [\mathbb{W}_k]^2 \rightarrow 1 + |\sum_{i \leq k-2} \Psi^i(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|$ una coloración tal que si t, t' tienen diferentes configuraciones entonces $c(t) \neq c(t')$. Note que para cada $Y \in \mathcal{E}_k$, $|c[[Y]^2]| = 1 + |\sum_{i \leq k-2} \Psi^i(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|$. Por lo tanto $t(\mathcal{E}_k, 2) = 1 + |\sum_{i \leq k-2} \Psi^i(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)|$.

□

Ejemplos 54. • $t(\mathcal{E}_3, 2) = 14$.

$$\begin{aligned}
 t(\mathcal{E}_3, 2) &= t(\mathcal{E}_2, 2) + |\Psi(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)| \\
 &= 4 + |\Psi(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)| \\
 &= 4 + |\Psi(\alpha_1^2) + \Psi(\alpha_0^2) + \Psi(\beta_0^2)| \\
 &= 4 + |\alpha_2^3 + \alpha_1^3 + \alpha_0^3 + \beta_0^3 + \alpha_1^3 + \alpha_0^3 + \beta_0^3 + \alpha_0^3 + \beta_0^3 + \beta_1^3| \\
 &= 4 + 4 + 3 + 3 \\
 &= 14.
 \end{aligned}$$

• $t(\mathcal{E}_4, 2) = 49$.

$$\begin{aligned}
 t(\mathcal{E}_4, 2) &= t(\mathcal{E}_3, 2) + |\Psi^2(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)| \\
 &= 14 + |\Psi(\Psi(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2))| \\
 &= 14 + |\Psi((\alpha_2^3 + \alpha_1^3 + \alpha_0^3 + \beta_0^3) + (\alpha_1^3 + \alpha_0^3 + \beta_0^3) + (\alpha_0^3 + \beta_0^3 + \beta_1^3))| \\
 &= 14 + |\Psi(\alpha_2^3 + 2\alpha_1^3 + 3\alpha_0^3 + 3\beta_0^3 + \beta_1^3)| \\
 &= 14 + |\Psi(\alpha_2^3) + 2\Psi(\alpha_1^3) + 3\Psi(\alpha_0^3) + 3\Psi(\beta_0^3) + \Psi(\beta_1^3)| \\
 &= 14 + |\alpha_3^4 + 3\alpha_2^4 + 6\alpha_1^4 + 10\alpha_0^4 + \beta_2^4 + 4\beta_1^4 + 10\beta_0^4| \\
 &= 49.
 \end{aligned}$$

• $t(\mathcal{E}_5, 2) = 175$.

$$\begin{aligned}
 t(\mathcal{E}_5, 2) &= t(\mathcal{E}_4, 2) + |\Psi^3(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)| \\
 &= 49 + |\Psi(\Psi^2(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2))| \\
 &= 49 + |\Psi(\alpha_3^4 + 3\alpha_2^4 + 6\alpha_1^4 + 10\alpha_0^4 + \beta_2^4 + 4\beta_1^4 + 10\beta_0^4)| \\
 &= 49 + |\Psi(\alpha_3^4) + 3\Psi(\alpha_2^4) + 6\Psi(\alpha_1^4) + 10\Psi(\alpha_0^4) + \Psi(\beta_2^4) + 4\Psi(\beta_1^4) \\
 &\quad + 10\Psi(\beta_0^4)| \\
 &= 49 + |\alpha_4^5 + 4\alpha_3^5 + 10\alpha_2^5 + 20\alpha_1^5 + 35\alpha_0^5 + \beta_3^5 + 5\beta_2^5 + 15\beta_1^5 + 35\beta_0^5| \\
 &= 175.
 \end{aligned}$$

- $t(\mathcal{E}_6, 2) = 642$.

$$\begin{aligned}
t(\mathcal{E}_6, 2) &= t(\mathcal{E}_5, 2) + |\Psi^4(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)| \\
&= 175 + |\Psi(\Psi^3(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2))| \\
&= 175 + \Psi(\alpha_4^5 + 4\alpha_3^5 + 10\alpha_2^5 + 20\alpha_1^5 + 35\alpha_0^5 + \beta_3^5 + 5\beta_2^5 + 15\beta_1^5 + 35\beta_0^5) \\
&= 175 + \Psi(\alpha_4^5) + 4\Psi(\alpha_3^5) + 10\Psi(\alpha_2^5) + 20\Psi(\alpha_1^5) + 35\Psi(\alpha_0^5) + \Psi(\beta_3^5) \\
&\quad + 5\Psi(\beta_2^5) + 15\Psi(\beta_1^5) + 35\Psi(\beta_0^5) \\
&= 175 + |\alpha_5^6 + 5\alpha_4^6 + 15\alpha_3^6 + 35\alpha_2^6 + 75\alpha_1^6 + 126\alpha_0^6 + \beta_4^6 + 6\beta_3^6 + 21\beta_2^6 \\
&\quad + 56\beta_1^6 + 126\beta_0^6| \\
&= 642.
\end{aligned}$$

- $t(\mathcal{E}_7, 2) = 2378$.

$$\begin{aligned}
t(\mathcal{E}_7, 2) &= t(\mathcal{E}_6, 2) + |\Psi^5(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2)| \\
&= 642 + |\Psi(\Psi^4(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2))| \\
&= 642 + \Psi(\alpha_5^6 + 5\alpha_4^6 + 15\alpha_3^6 + 35\alpha_2^6 + 75\alpha_1^6 + 126\alpha_0^6 + \beta_4^6 + 6\beta_3^6 \\
&\quad + 21\beta_2^6 + 56\beta_1^6 + 126\beta_0^6) \\
&= 642 + \Psi(\alpha_5^6) + 5\Psi(\alpha_4^6) + 15\Psi(\alpha_3^6) + 35\Psi(\alpha_2^6) + 75\Psi(\alpha_1^6) \\
&\quad + 126\Psi(\alpha_0^6) + \Psi(\beta_4^6) + 6\Psi(\beta_3^6) + 21\Psi(\beta_2^6) + 56\Psi(\beta_1^6) + 126\Psi(\beta_0^6) \\
&= 642 + |\alpha_6^7 + 6\alpha_5^7 + 21\alpha_4^7 + 56\alpha_3^7 + 131\alpha_2^7 + 257\alpha_1^7 + 467\alpha_0^7 + \beta_5^7 \\
&\quad + 7\beta_4^7 + 28\beta_3^7 + 84\beta_2^7 + 210\beta_1^7 + 467\beta_0^7| \\
&= 2378.
\end{aligned}$$

3.2 Números de pseudointersección para espacios topológicos de Ramsey

Definición 55. Sea \mathcal{R} un espacio topológico de Ramsey. Diremos que una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$ tiene la *propiedad de la intersección finita fuerte* (PIFF) si para cada subfamilia $\{X_1, \dots, X_n\} \subseteq \mathcal{F}$, existe $Y \in \mathcal{R}$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $Y \leq X_i$.

Definición 56. Dada una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$, una *pseudointersección* de la familia \mathcal{F} es un elemento $Y \in \mathcal{R}$ tal que para cada $X \in \mathcal{F}$, $Y \leq^* X$.

Definición 57. Dado un espacio topológico de Ramsey \mathcal{R} , el número de pseudointersección asociado a \mathcal{R} , $\mathfrak{p}_{\mathcal{R}}$ es la mínima cardinalidad de una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$ que tiene la PIFF pero no admite una pseudointersección.

Afirmación 5. $\mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado}) \leq \mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1}$.

Demostración. Sean $\kappa < \mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado})$ un cardinal infinito y $\mathcal{F} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{R}_1$ una familia con la propiedad de la intersección finita fuerte. Sea \mathbb{P} el conjunto de todos los pares $\langle s, E \rangle$ tales que $s \in \mathcal{AR}$ y $E \in [\kappa]^{<\omega}$. Dados $\langle s, E \rangle, \langle t, F \rangle \in \mathbb{P}$, definimos $\langle s, E \rangle \leq \langle t, F \rangle$ si y sólo si $t \sqsubseteq s$, $F \subseteq E$ existe $X \in \mathcal{R}_1$ tal que para cada $\alpha \in F$, $X \leq X_\alpha$ y $s \setminus t \subseteq X$.

Vamos a probar que (\mathbb{P}, \leq) es un orden parcial σ -centrado. Para cada $s \in \mathcal{AR}$, definamos $\mathbb{P}_s = \{\langle s, E \rangle : E \in [\kappa]^{<\omega}\}$. Note que para cada $s \in \mathcal{AR}$, \mathbb{P}_s es un conjunto centrado. Sean $E, F \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces $\langle s, E \cup F \rangle \in \mathbb{P}_s$ y $\langle s, E \cup F \rangle \leq \langle s, E \rangle, \langle s, F \rangle$. Como $\mathbb{P} = \bigcup_{s \in \mathcal{AR}} \mathbb{P}_s$ y $|\mathcal{AR}| = \aleph_0$, \mathcal{P} es un orden parcial σ -centrado.

Para cada $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega$, definimos $D_{\alpha, n} = \{\langle s, E \rangle : \alpha \in E \text{ y } |s| > n\}$. Probaremos que $D_{\alpha, n}$ es un conjunto denso en \mathbb{P} . Fijamos $\langle t, F \rangle \in \mathbb{P}$, existe $X \in \mathcal{R}_1$ tal que para cada $\beta \in F$, $X \leq X_\beta$. Sea l el mínimo número natural para el cual existe $k_l \in \omega$ tal que $X(l) \subseteq \mathbb{T}(k_l)$ y $t \subseteq \mathbb{T}(k_l)$. Para cada $i \in (l, n+1]$, sea $a_i \subseteq X(i)$ tal que $|a_i| = |s| + (i-l)$. Sea $\langle s, E \rangle$ tal que $E = F \cup \{\alpha\}$ y $s = t \cup \bigcup_{l < i \leq n+1} a_i$. Entonces $\langle s, E \rangle \in D_{\alpha, n}$ y $\langle s, E \rangle \leq \langle t, F \rangle$. Por lo tanto $D_{\alpha, n}$ es un conjunto denso. Definimos $\mathcal{D} = \{D_{\alpha, n} : \alpha \in \kappa \text{ y } n \in \omega\}$. \mathcal{D} es una familia de κ conjuntos densos. Como $\kappa < \mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado})$, existe G filtro \mathcal{D} -genérico. Sea $X_G = \bigcup \{s : \exists E \in [\kappa]^{<\omega} (\langle s, E \rangle \in G)\}$. Note que $X_G \in \mathcal{R}_1$.

Ahora probaremos que para cada $\alpha \in \kappa$, $X_G \leq^* X_\alpha$. Fijemos $\alpha \in \kappa$, entonces existe una condición $\langle s, E \rangle \in G$ tal que $\alpha \in E$. Veremos que $X_G \setminus s \subseteq X_\alpha$. Sea $a \in X_G \setminus s$, existe $\langle s', E' \rangle \in G$ tal que $a \in s'$ y $\langle s', E' \rangle \leq \langle s, E \rangle$. Entonces existe $X \in \mathcal{R}_1$ tal que para cada $\beta \in F$, $X \leq X_\beta$ y $s' \setminus s \subseteq X$. Entonces $a \in s' \setminus s \subseteq X \subseteq X_\alpha$. Sea $p \in \mathcal{AR}$ tal que $p \subseteq X_G \setminus s$, entonces $[p, X_G] \subseteq X_\alpha$.

□

Afirmación 6. $\mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1} = \mathfrak{p}$

Demostración. Primero probaremos que $\mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1} \leq \mathfrak{p}$. Sea $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia con la PIFF tal que $|\mathcal{F}| < \mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1}$. Sea A un subconjunto infinito de ω , escribiremos a A como $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ con $a_i < a_{i+1}$ para cada $i \in \omega$. Definimos

$X_A = \{\langle \rangle\} \cup \{\langle a_i \rangle : i \in \omega\} \cup \bigcup_{i \in \omega} \{\langle a_i, a_j \rangle : j \leq i\}$. Note que $X_A \in \mathcal{R}_1$ y para cada $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \neq B$, $X_A \neq X_B$. Sea $\mathcal{F}' = \{X_A : A \in \mathcal{F}\}$. Tomamos $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{F}'$, de la definición de \mathcal{F}' se sigue que existen $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ tales que para cada $i \leq n$ $X_i = X_{A_i}$. Como \mathcal{F} es una familia con la PIFF, existe $B \in [\omega]^\omega$ tal que para cada $i \leq n$, $B \subseteq A_i$. Entonces para cada $i \leq n$, $X_B \leq X_{A_i}$. De lo anterior se sigue que \mathcal{F}' es una familia con la PIFF tal que $|\mathcal{F}'| < \mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1}$, entonces existe $Y \in \mathcal{R}_1$ tal que Y es una pseudointersección para \mathcal{F}' . Probaremos que $\pi_1(Y)$ es una pseudointersección para \mathcal{F} . Sea $A \in \mathcal{F}$. Como Y es una pseudointersección para \mathcal{F}' , $Y \leq^* X_A$. Por lo tanto existe $p \in \mathcal{AR} \upharpoonright Y$ tal que $[p, Y] \subseteq [p, X_A]$. Como $p \in \mathcal{AR} \upharpoonright Y$, $\text{depth}_Y(p) = l < \omega$. Sea n el mínimo número natural tal que $X(n) \cap r_l(X) = \emptyset$. Para cada $i \geq n$, sea $t_i \subseteq X(i)$ con cardinalidad $|p| + i - n$. Definamos $Z = p \cup \bigcup_{i \geq n} t_i$, por su construcción $Z \in \mathcal{R}_1$ y $Z \in [p, Y] \subseteq [p, X_A]$. Por lo tanto $\pi_1(Z) \subseteq \pi_1(X_A) = A$ y $|\pi_1(Y) \setminus \pi_1(Z)| < |r_l(X)| \in \omega$, entonces $|\pi_1(Y) \setminus (A)| < |r_l(X)| \in \omega$ y por lo tanto $\pi_1(Y) \subseteq^* A$. Entonces $\pi_1(Y)$ es una pseudointersección para \mathcal{F} . Por lo tanto $\mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1} \leq \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado})$ y $\mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado}) \leq \mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1}$, $\mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1} = \mathfrak{p}$. \square

Afirmación 7. *El Axioma de Martin implica $\mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1} = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Como $\mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado}) \leq \mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1}$ y además se cumplen $\mathfrak{m}(\text{c.c.c.}) \leq \mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado})$ y $\mathfrak{m}(\text{c.c.c.}) \leq \mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1}$. Del Axioma de Martin se sigue que $\mathfrak{m}(\text{c.c.c.}) = \mathfrak{c}$, entonces $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1}$. Como $|\mathcal{R}_1| = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}_{\mathcal{R}_1} = \mathfrak{c}$. \square

Afirmación 8. $\mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado}) \leq \mathfrak{p}_{\mathcal{H}^2}$.

Demostración. Sean $\kappa < \mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado})$ un cardinal infinito y $\mathcal{F} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{H}^2$ una familia con la propiedad de la intersección finita fuerte. Sea \mathbb{P} el conjunto de todos los pares $\langle s, E \rangle$ tales que $s \in \mathcal{AR}$ y $E \in [\kappa]^{<\omega}$. Dados $\langle s, E \rangle, \langle t, F \rangle \in \mathbb{P}$, definimos $\langle s, E \rangle \leq \langle t, F \rangle$ si y sólo si $t \subseteq s$, $F \subseteq E$ y existe $X \in \mathcal{H}^2$ tal que para cada $\alpha \in F$, $X \leq X_\alpha$ y $s \setminus t \subseteq X$.

Probaremos que (\mathbb{P}, \leq) es un orden parcial σ -centrado. Para cada $s \in \mathcal{AR}$, definimos $\mathbb{P}_s = \{\langle s, E \rangle : E \in [\kappa]^{<\omega}\}$. Note que para cada $s \in \mathcal{AR}$, \mathbb{P}_s es centrado. Sean $E, F \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces $\langle s, E \cup F \rangle \in \mathbb{P}_s$ y $\langle s, E \cup F \rangle \leq \langle s, E \rangle, \langle s, F \rangle$. Como $\mathbb{P} = \bigcup_{s \in \mathcal{AR}} \mathbb{P}_s$ y $|\mathcal{AR}| = \aleph_0$, \mathbb{P} es un orden parcial σ -centrado.

Para cada $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega$, definimos $D_{\alpha, n} = \{\langle s, E \rangle : \alpha \in E \text{ y } |s| > n\}$. Probaremos que $D_{\alpha, n}$ es un subconjunto denso de \mathbb{P} . Sea $\langle t, F \rangle \in \mathbb{P}$, existe $C \in \mathcal{H}^2$ tal que para cada $\beta \in F$, $C \leq X_\beta$. Escribiremos $C = \langle \langle n_k, \mathbf{C}_k \rangle \rangle$:

$k < \omega$). Sea l el mínimo número natural para el cual existe $k_l \in \omega$ tal que $C(l) \subseteq \mathbb{A}(k_l)$ y $t \subseteq \mathbb{A}(k_l)$. Fijamos $k \in (l, n+1]$, sea \mathbf{B}_k una sucesión $(\mathbf{B}_{k,j})_{j \in 2}$ tal que para cada $j \in 2$, $\mathbf{B}_{k,j} \subseteq \mathbf{C}_{l+k,j}$. Sea $\langle s, E \rangle$ tal que $E = F \cup \{\alpha\}$ y $s = t \cup \bigcup_{l < k \leq n+1} \langle \mathbf{B}_k \rangle$, entonces $\langle s, E \rangle \in D_{\alpha,n}$ y $\langle s, E \rangle \leq \langle t, F \rangle$. Entonces $D_{\alpha,n}$ es un denso. Sea $\mathcal{D} = \{D_{\alpha,n} : \alpha \in K \text{ y } n \in \omega\}$. \mathcal{D} es una familia que consiste de κ conjuntos densos. Como $\kappa < \mathfrak{m}(\sigma\text{-centrado})$ existe un filtro G que es \mathcal{D} -genérico. Sea $X_G = \bigcup \{s : \exists E \in [\kappa]^{<\omega} (\langle s, E \rangle \in G)\}$. Note que $X_G \in \mathcal{H}^2$.

Ahora probaremos que para cada $\alpha \in \kappa$, $X_G \leq^* X_\alpha$. Fijemos $\alpha \in \kappa$, entonces existe una condición $\langle s, E \rangle \in G$ tal que $\alpha \in E$. Veamos que $X_G \setminus s \subseteq X_\alpha$. Sea $a \in X_G \setminus s$, existe $\langle s', E' \rangle \in G$ tal que $a \in s'$ y $\langle s', E' \rangle \leq \langle s, E \rangle$. Entonces existe $C \in \mathcal{H}^2$ tal que para cada $\beta \in F$, $X \leq X_\beta$ y $s' \setminus s \subseteq C$. Entonces $a \in s' \setminus s \subseteq C \subseteq X_\alpha$. Sea $p \in \mathcal{AR}$ tal que $p \subseteq X_G \setminus s$, entonces $[p, X_G] \subseteq X_\alpha$. □

Afirmación 9. $\mathfrak{p}_{\mathcal{E}_2} \leq \mathfrak{p}$

Demostración. Sea $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia con la PIFF tal que $|\mathcal{F}| < \mathfrak{p}_{\mathcal{E}_2}$. Sea $A \in \omega^\omega$, escribamos $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ conde $a_i < a_{i+1}$ para cada $i \in \omega$. Definimos $f : \omega \rightarrow A$ tal que $f(n) = a_n$ para cada $n \in \omega$. Note que f es una función biyectiva. Definamos $A^{\aleph \leq 2} = \omega^{\aleph \leq 2} \upharpoonright A = \{\vec{j} \in \omega^{\aleph \leq 2} : \vec{j} \subseteq A\}$ y $A^{\aleph^2} = \omega^{\aleph^2} \upharpoonright A = \{\vec{i} \in \omega^{\aleph^2} : \vec{i} \subseteq A\}$. Para cada $\vec{i} \in A^{\aleph^2}$, definimos $X_A(\vec{i}) = m_{f(\vec{i}) \upharpoonright p} : 1 \leq p \leq 2$. Note que X_A es una función de ω^{\aleph^2} en \mathcal{W}_2 y $X_A \in \mathcal{E}_2$. Sea $\mathcal{F}' = \{X_A : A \in \mathcal{F}\}$, probaremos que \mathcal{F}' tiene la PIFF. Sean $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{F}'$, existen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ tales que para cada $i \in [1, n]$, $X_i = X_{A_i}$. Como \mathcal{F} es una familia con la PIFF, $|\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i| = \aleph_0$. Definamos $B = \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in [\omega]^\omega$, note que $X_B \leq X_i$ para cada $i \in [1, n]$. Entonces \mathcal{F}' es una familia con la PIFF y como $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}| < \mathfrak{p}_{\mathcal{E}_2}$, existe $Y \in \mathcal{E}_2$ tal que Y es una pseudointersección para \mathcal{F}' . Como Y es una pseudointersección para \mathcal{F}' , para cada $A \in \mathcal{F}$, $Y \leq^* X_A$. Entonces existe $p \in \mathcal{AR}$ tal que $\emptyset \neq [p, Y] \subseteq [p, X_A]$. Sea $n = \text{depth}_Y(p)$ y definamos $C_A = \bigcup \{f(\vec{j}) \in A : X_A(\vec{i}) \in \text{ran}(Y \setminus r_n(Y))\}$. Note que $C_A \subseteq A \cap Y$. Sea $C = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} C_A$. Por la definición de C y como $\emptyset \neq [p, Y] \subseteq [p, X_A]$, para cada $A \in \mathcal{F}$ se cumple que $|C \setminus A| < n$. Por lo tanto C es una pseudointersección para \mathcal{F} . □

Afirmación 10. $\mathfrak{p}_{\mathcal{E}_\infty} \leq \mathfrak{p}$

Demostración. Sea $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia con la PIFF tal que $|\mathcal{F}| < \mathfrak{p}_{\mathcal{E}_\infty}$. Sea A un subconjunto infinito de ω , escribiremos $A \cup \{0\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ con

$a_i < a_{i+1}$ para cada $i \in \omega$. Para cada $n \in \omega$, existe $i_n \in \omega$ tal que $a_{i_n} \leq n < a_{i_n+1}$. Definimos $f_A : \omega \rightarrow \omega$ tal que para cada $n \in \omega$, $f_A(n) = i_n$. Note que f_A es una función sobreyectiva y para cada $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \neq B$, $f_A \neq f_B$. Además note que para cada $A \in \mathcal{F}$, $\{p_n(X_{f_A})\}_{n \in \omega} = \{a_n\}_{n \in \omega}$. Sea $\mathcal{F}' = \{X_{f_A} : A \in \mathcal{F}\}$. Tomamos $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{F}'$, entonces existen $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ tales que para cada $i \leq n$, $X_i = X_{f_{A_i}}$. Como \mathcal{F} es una familia con la PIFF, existe $B \in [\omega]^\omega$ tal que para cada $i \leq n$, $B \subseteq A_i$. Sean $A \in \{A_1, \dots, A_n\}$ y $m \in \omega$, entonces $f_A^{-1}(m) = [a_m, a_{m+1})$. Como $B \subseteq A$ existe $l_m \in \omega$ tal que $b_{l_m} \leq a_m$ y $a_{m+1} \leq b_{l_m+1}$. Definamos $g : \omega \rightarrow \omega$ tal que para cada $m \in \omega$, $g(m) = l_m$. Note que por la construcción de g , $f_B = g \circ f_A$. Por lo tanto para cada $A \in \{A_1, \dots, A_n\}$, $X_{f_B} \leq X_{f_A}$. De lo anterior se sigue que \mathcal{F}' es una familia con la PIFF tal que $|\mathcal{F}'| < \mathfrak{p}_{\mathcal{E}_\infty}$, entonces existe $Y \in \mathcal{E}_\infty$ tal que Y es una pseudointersección de \mathcal{F}' . Sea $A \in \mathcal{F}$ fijo, entonces $Y \leq^* X_{f_A}$ y por lo tanto existe $s \in \mathcal{AE}_\infty \upharpoonright Y$ tal que $[s, Y] \subseteq [s, X_{f_A}]$. Como $s \in \mathcal{AE}_\infty \upharpoonright Y$, existe $l \in \omega$ tal que $s \leq_{fin} r_l(Y)$. Sea $n \in \omega$ y definamos $h : \omega \rightarrow \omega$ de la siguiente forma: si existe $m \in \text{dom}(s)$ tal que $f_X(n) = f_X(m)$, $h(n) = f_s(m)$; en otro caso $h(n) = f_X(n) - (l - |s|)$. Note que $s \subseteq X_h$, $X_h \leq Y$ y $\{p_n(Y) : n \in \omega\} \setminus \{p_n(X_h) : n \in \omega\} \subseteq \text{dom}(s)$. Como $X_h \in [s, Y] \subseteq [s, X_{f_A}]$, $X_h \leq X_{f_A}$ y por tanto $\{p_n(X_h) : n \in \omega\} \subseteq \{p_n(X_A) : n \in \omega\} = A$. Entonces, $\{p_n(Y) : n \in \omega\} \setminus A \subseteq \{p_n(Y) : n \in \omega\} \setminus \{p_n(X_h) : n \in \omega\} \subseteq \text{dom}(s)$. De lo anterior se sigue que $\{p_n(Y) : n \in \omega\}$ es una pseudointersección of \mathcal{F} . \square

Proposición 58. *Sea $1 \leq J \leq \omega$ y $\mathcal{K}_j, j \in J$, una colección de clases de Fräissé de estructuras con la propiedad de Ramsey y sea $\langle \mathbf{A}_k : k < \omega \rangle$ una sucesión generadora. Sea \mathcal{R} el espacio topológico de Ramsey ($\mathcal{R}(\langle \mathbf{A}_k : k < \omega \rangle)$) tal que $|\mathcal{AR}| \leq \aleph_0$. Entonces el Axioma de Martin implica que $\mathfrak{p}_{\mathcal{R}} = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Sean $\kappa < \mathfrak{c}$ un cardinal infinito y $\mathcal{F} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia con la PIFF. Definamos a \mathbb{P} como el conjunto de todos los pares ordenados $\langle s, E \rangle$ tales que $s \in \mathcal{AR}$ y $E \in [\kappa]^{<\omega}$. Dados $\langle s, E \rangle, \langle t, F \rangle \in \mathbb{P}$, definimos $\langle s, E \rangle \leq \langle t, F \rangle$ si y sólo si $t \sqsubseteq s$, $F \subseteq E$ y existe $X \in \mathcal{R}$ tal que para cada $\alpha \in F$, $X \leq X_\alpha$ y $s \setminus t \subseteq X$.

Probaremos que (\mathbb{P}, \leq) es un orden parcial c.c.c.. Sean $\gamma > \omega$ un número cardinal y $\mathcal{A} = \{\langle s_\xi, E_\xi \rangle : \xi \in \gamma\} \subseteq \mathbb{P}$. Como $|\mathcal{AR}| = \aleph_0$, existe $s \in \mathcal{AR}$ tal que $|\{\langle s_\xi, E_\xi \rangle \in \mathbb{P} : s_\xi = s\}| = \gamma$. Sean $\langle s, E \rangle, \langle s, E' \rangle \in \mathcal{A}$, como $\langle s, E \cup E' \rangle \leq \langle s, E \rangle, \langle s, E' \rangle$, $\langle s, E \rangle$ y $\langle s, E' \rangle$ son condiciones compatibles y por lo tanto \mathcal{A} no puede ser una anticadena.

Para cada $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega$, definamos $D_{\alpha,n} = \{\langle s, E \rangle : \alpha \in E \text{ y } |s| > n\}$. Probaremos que $D_{\alpha,n}$ es un subconjunto denso de \mathbb{P} . Sea $\langle t, F \rangle \in P$, existe $C \in \mathcal{R}$ tal que para cada $\beta \in F$, $C \leq X_\beta$, escribimos $C = \langle \langle n_k, \mathbf{C}_k \rangle : k < \omega \rangle$. Sea l el mínimo natural para el cual existe $k_l \in \omega$ tal que $C(l) \subseteq \mathbb{A}(k_l)$ y $t \subseteq \mathbb{A}(k_l)$. Fijamos $k \in (l, n+1]$, sea \mathbf{B}_k una sucesión $(\mathbf{B}_{k,j})_{j \in J_k}$ tal que para cada $j \in J_k$, $\mathbf{B}_{k,j}$ es una subestructura de $\mathbf{C}_{l+k,j}$ isomorfa a $\mathbf{A}_{k,j}$. Sea $\langle s, E \rangle$ tal que $E = F \cup \{\alpha\}$ y $s = t \cup \bigcup_{l < k \leq n+1} \langle \mathbf{B}_k \rangle$, entonces $\langle s, E \rangle \in D_{\alpha,n}$ y $\langle s, E \rangle \leq \langle t, F \rangle$. Por lo tanto $D_{\alpha,n}$ es un conjunto denso. Sea $\mathcal{D} = \{D_{\alpha,n} : \alpha \in K \text{ y } n \in \omega\}$, \mathcal{D} es una familia de κ densos. Entonces por el Axioma de Martin existe un filtro G , el cual es \mathcal{D} -genérico. Definamos $X_G = \bigcup \{s : \exists E \in [\kappa]^{<\omega} (\langle s, E \rangle \in G)\}$. Note que $X_G \in \mathcal{R}$.

Ahora probaremos que para cada $\alpha \in \kappa$, $X_G \leq^* X_\alpha$. Sea $\alpha \in \kappa$ fijo, existe una condición $\langle s, E \rangle \in G$ tal que $\alpha \in E$. probaremos que $X_G \setminus s \subseteq X_\alpha$. Sea $a \in X_G \setminus s$, existe $\langle s', E' \rangle \in G$ tal que $a \in s'$ y $\langle s', E' \rangle \leq \langle s, E \rangle$. Entonces existe $C \in \mathcal{R}$ tal que para cada $\beta \in F$, $X \leq X_\beta$ y $s' \setminus s \subseteq C$. Entonces $a \in s' \setminus s \subseteq C \subseteq X_\alpha$, sea $p \in \mathcal{AR}$ tal que $p \subseteq X_G \setminus s$, entonces $[p, X_G] \subseteq X_\alpha$. \square

Bibliografía

- [1] Bartoszynski, Tomek; Judah, Haim *Set Theory. On the Structure of the Real Line*. A K Peters, Wellesley, MA. 1995
- [2] Blass, Andreas *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum*. Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3, 395-489, Springer, Dordrecht, 2010.
- [3] Carlson, Timothy J.; Simpson, Stephen G. *A dual form of Ramsey's theorem*. Advances in Mathematics 53 (1984), no.3. 265-290
- [4] Di Prisco, Carlos; Mijares, José G.; Nieto, Jesus *Local Ramsey theory. An abstract approach*. Preprint.
- [5] Dobrinen, Natasha; Todorćević, Stevo. *A new class of Ramsey-classification theorems and its application in the Tukey theory of ultrafilters, Part 1*, Transactions of the American Mathematical Society 366 (2014), no.3, 1659-1684.
- [6] Dobrinen, Natasha *High dimensional Ellentuck spaces and initial chains in the Tukey structure of non- p -points*. Aceptado en Journal of Symbolic Logic. 27pp.
- [7] Dobrinen, Natasha; Mijares, José G.; Trujillo, Thimoty. *Topological Ramsey spaces from Fréchet classes, Ramsey classification theorems, and initial structures in the Tukey types of p -points*. Aceptado en Archive for Mathematical Logic. 35pp.
- [8] Halbeisen, Lorenz J. *Combinatorial set theory. With a gentle introduction to forcing*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, London, 2012.

- [9] Kechris, Alexander S. *Classical descriptive set theory*. Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [10] Kenneth, Kunen; *Set theory. Studies in Logic*. College Publications, London, 2011.
- [11] Mijares, José G. *A notion of selective ultrafilter corresponding to topological Ramsey spaces*. Mathematical Logic Quarterly 53 (2007), no.3 255-267.
- [12] Timothy Trujillo, *Selective but not Ramsey*. Preprint.
- [13] Todorcevic, Stevo *Introduction to Ramsey spaces*. Annals of Mathematics Studies, 174. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010.