Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autonoma de México
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Instituto de Física y Matemáticas

Tesina:

INVARIANTES CARDINALES DE ALGEBRAS BOOLEANAS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Mario Jardón Santos

Asesor: Dr. MICHAEL HRUSAK.

Morelia, Michoacán - Octubre de 2020.

Contenido

Resumen

En este texto se responden varias preguntas planteadas en el libro Cardinal Invariants on Boolean Algebras por J. Donald Monk, todas relativas a la combinatoria de las álgebras booleanas infinitas.

combinatoria infinita - particiones - torres - familias centradas - irredundancia

Abstract

In this text an answer is given to several questions from the book Cardinal Invariants on Boolean Algebras by J. Donald Monk, all related to infinite boolean algebras combinatorics.

combinatoria infinita - particiones - torres - familias centradas - irredundancia

Introducción

Una manera de estudiar la estructura de las álgebras booleanas es mediante los llamados invariantes cardinales, que se pueden describir, grosso modo y sin ningún rigor, como los límites, inferiores o superiores, a los tamaños de cierto tipo especial de subestructura, algebraica, combinatoria, o topológica, dentro de un álgebra booleana. Principalmente son generalizaciones de los invariantes cardinales de los espacios topológicos, pues las álgebras booleanas siempre lo son, o de las carectrísticas del continuo, muchas veces definidas desde la estructura del álgebra booleana $P(\omega)/Fin$. De todas las posibilidades, en este texto nos concentraremos en media docena de subestructuras de álgebras booleanas infinitas y algunos de los invariantes cardinales derivados de ellas. Para información básica de álgebras booleanas ver [2], para información sobre sus invariantes cardinales se remite a [3].

combinatoria infinita - particiones - torres - familias centradas - irredundancia

combinatoria infinita - particiones - torres - familias centradas - irredundancia

Capítulo 1

Preliminares

Sea A un álgebra booleana infinita con operaciones $+$ y $\cdot$, con elemento máximo 1, mínimo 0 y $<$ su relación de orden. Una partición de A es un subconjunto no vacío $X \subseteq A$ tal que para todo $a, b \in X$ $a \cdot b \neq 0$ y para todo $c \in A$ existe $x \in X$ tal que $c \cdot x \neq 0$. Una familia centrada es un subconjunto no vacío $X \subseteq A$ tal que para todo $F \in [X]^{<\omega}$ su producto es distinto de 0. Si existe $a \in A \setminus \{0\}$ tal que para todo $x \in X$, $a \leq x$, se dice que a es una pseudointersección de X. Una torre (decreciente) es un subconjunto no vacío $X \subseteq A \setminus \{0\}$ que está bien ordenado de acuerdo con el orden $<^{-1}$, y que no tiene pseudointersección. Una familia splitting es un subconjunto no vacío $X \subseteq A$ tal que para todo $a \in A \setminus \{0\}$ existe $x \in X$ tal que $a \cdot x \neq 0 \neq a \cdot -x$.

De estas clases de subfamilias de un álgebra booleana infinita se pueden definir los siguientes invariantes cardinales:

$$\mathfrak{a}(A) := \text{mín}\{|X| \mid X \subseteq A \ es\ una\ particion\ infinita\}$$

$$\mathfrak{t}(A) := \text{mín}\{|X| \mid X \subseteq A \ es\ una\ torre\}$$

$$\mathfrak{p}(A) := \text{mín}\{|X| \mid X \subseteq A \ es\ una\ familia\ centrada\ sin\ pseudointerseccion\}$$

$$\mathfrak{s}(A) := \text{mín}\{|X| \mid X \subseteq A \ es\ una\ familia\ splitting\}.$$

Vale la pena remarcar que para las nociones de familia centrada y pseudointersección existen las nociones duales de familias con la propiedad de la unión finita, y pseudounión considerando la suma, 1 y cotas superiores en lugar del producto, 0 y cotas inferiores. Una $\mathfrak{p}$-familia de A es un subconjunto de A con la propiedad de la unión finita sin pseudounión.

combinatoria infinita - particiones - torres - familias centradas - irredundancia

Similarmente se pueden definir las torres crecientes. De este modo las definiciones de $\mathfrak{p}(\cdot)$ y $\mathfrak{t}(\cdot)$ se pueden reenunciar:

$$\mathfrak{t}(A) := \text{mín}\{|X| \mid X \subseteq A \textit{ es una torre creciente}\}$$

$$\mathfrak{p}(A) := \text{mín}\{|X| \mid X \subseteq A \textit{ es una } \mathfrak{p}\textit{familia}\}.$$

Como cada partición infinita es una $\mathfrak{p}$-familia, y cada torre decreciente una familia centrada sin pseudointersección, se sigue inmediatamente que $\mathfrak{p}(A) \leq \mathfrak{a}(A), \mathfrak{t}(A)$. También es fácil verificar que cada subfamilia centrada maximal de una familia splitting es una familia centrada sin pseudointersección. Entonces, $\mathfrak{p}(A) \leq \mathfrak{s}(A)$.

Estos pequeños invariantes cardinales son generalizaciones de bien conocidas características cardinales del continuo, cuando en lugar de A tenemos $P(\omega)/Fin$.

Otros cardinales invariantes más grandes derivan de los siguientes conceptos. Un subconjunto $X \subseteq A^+$ es denso si para todo $a \in A^+$ existe $x \in X$ tal que $x \leq a$. Un subconjunto $X \subseteq A$ es irredundante si para cada $x \in X$, x no es generado por $X \setminus \{x\}$. Se puede definir

$$\pi(A) := \text{mín}\{|X| \mid X \subseteq A \textit{ es denso en } A\}$$

$$Irr(A) := \sup\{|X| \mid X \subseteq A \textit{ es irredundante}\}$$

De estos conceptos se sabe que:

Proposición 1.0.1 (McKenzie, [2], proposition 4.23). Cada familia irredundante maximal de un álgebra booleana genera una subálgebra densa.

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que $\pi(A) \leq Irr(A)$.

En [3] aparecen muchos detalles sobre todas las funciones cardinales previamantes definidas, tanto concernientes a su relación con otras funciones, como a su comportamiento con diversas clases de álgebras booleanas (aunque cabe notar que en ese texto por $\mathfrak{t}$ se escribe tow, y por $\mathfrak{s}$, *spl*). En el mismo libro se plantean varias preguntas sobre las mismas funciones cardinales. A varias de estas, de diversos grados de complejidad, en este texto se dará, total o parcialmente, una respuesta.

Capítulo 2

Extensiones simples y minimales

Si $A \subseteq B$ son dos álgebras booleanas con el mismo elemento mínimo, con en el mismo elemento máximo, y donde las operaciones de B restringidas a A coinciden con las operaciones de A, (o, en su defecto, si A es isomorfa a una subestructura tal de B), se dice que A es una subálgebra de B, o que B es una extensión de A. Este hecho se denota generalmente $A \leq B$.

Si $A \leq B$, se dice que B es una extensión simple de A si existe x en B tal que $B = A(x)$, lo que significa que B es el álgebra generada por x y los elementos de A. Este hecho será denotado por $A \leq_s B$. Se dice que B es una extensiÃ^{3}nmínimadeAsicualquierÃlgebraCtalqueA$\leq$ $C \leq B$ es igual a A o igual a B. Este hecho se denota $A \leq_m B$. Si $A \leq_m B$, fácilmente se sigue que $A \leq_s B$.

Esta sección trata de los cambios, o la ausencia de, que puede haber en las funciones cardinales definidas en la primera sección cuando pasan de un álgebra booleana a sus extensiones simples y mínimas.

2.1. $\mathfrak{p}$-familias, particiones infinitas y torres

Considerando los invariantes cardinales definidos en la sección anterior y las extensiones mínimas tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1. Si $A \leq_m B$, entonces $\mathfrak{p}(B) \leq \mathfrak{p}(A)$, $\mathfrak{t}(B) \leq \mathfrak{t}(A)$ y $\mathfrak{a}(B) \leq \mathfrak{a}(A)$

Este hecho puede encontrarse en [3], (propositions 3.34, 4.36, 4.54). En ese libro el autor pregunta si este resultado puede extenderse al caso en que B es una extensión simple de A y también si las desigualdades pueden ser estrictas en el caso de que B sea una extensión mínima de A (Problems 7, 37, 38, 45). Para todas estas preguntas en esta sección se da una respuesta afirmativa.

Primero la proposición 2.1.1 se generalizará a extensiones simples. Un importante hecho sobre esta clase de extensiones es el siguiente:

combinatoria infinita - particiones - torres - familias centradas - irredundancia

Lema 2.1.2. Sea A un álgebra booleana y supongamos que $A(x)$ es una extensión simple tal que $I_0 := A \upharpoonright x$ y $I_1 := A \upharpoonright -x$. Entonces $A(x) \cong (A/I_0) \times (A/I_1)$.

Entonces, si se está trabajando con extensiones simples de álgebras booleanas y sus invariantes cardinales sería útil conocer el funionamiento de estos en productos simples. Afortunadamente tenemos el siguiente:

Lema 2.1.3. Sean A y B dos álgebras booleanas infinitas. Entonces

$$\mathfrak{p}(A \times B) = \min\{\mathfrak{p}(A), \mathfrak{p}(B)\},$$

$$\mathfrak{t}(A \times B) = \min\{\mathfrak{t}(A), \mathfrak{t}(B)\}$$

y

$$\mathfrak{a}(A \times B) = \min\{\mathfrak{a}(A), \mathfrak{a}(B)\}.$$

Pruebas de ambos lemas se pueden encontrar en [3], propositions 2.28 3.36, 4.37, 4.55. Ahora se procederá a dar respuesta a las preguntas.

Lema 2.1.4. Sea A un álgebra booleana infinita y sea I un ideal propio de A. Supongamos que A/I es infinito y que $\mathfrak{p}(A) < \mathfrak{p}(A/I)$ (resp. $\mathfrak{a}(A) < \mathfrak{a}(A/I)$, resp. $\mathfrak{t}(A) < \mathfrak{t}(A/I)$). Si $\{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ es una $\mathfrak{p}$-familia (resp. partición infinita, resp. torre) de tamaño mínimo, entonces existen $b \in A$ y $E \in [\kappa]^\kappa$ tales que $\{a_\alpha \cdot b \mid \alpha \in E\}$ es una $\mathfrak{p}$-familia (resp. partición infinita, resp. torre) bajo b que consiste de elementos de I.

Demostración. Caso 1. Supongamos que $\sum_{\alpha<\kappa} [a_\alpha]_I = 1$.

Como A/I no tiene $\mathfrak{p}$-familias de tamaño κ, se sigue que existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\bigvee_{\alpha \in F} [a_\alpha]_I = 1$. Entonces $b := -\sum_{\alpha \in F} a_\alpha$ es un elemento de I. Es fácil ahora ver que para todo $\alpha < \kappa$, $a_\alpha \cdot b$ es un elemento de I. Sea E el conjunto de todos los $\alpha < \kappa$ tales que $a_\alpha \cdot b \neq 0$. Si E' fuese un subconjunto finito de E tal que $b = \sum_{\alpha \in E'} a_\alpha \cdot b$, se concluiría que $1 = \sum_{\alpha \in E' \cup F} a_\alpha$, lo que es una contradicción. Como $b = \sum_{\alpha \in E} a_\alpha \cdot b$, se sigue que $\{a_\alpha \cdot b \mid \alpha \in E\}$ es una $\mathfrak{p}$-familia bajo b de tamaño κ. (Al tratarse de particiones infinitas la prueba es análoga, posiblemente incluso más simple. Si $\{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ es una torre, existe $\alpha < \kappa$ tal que si $\alpha \leq \beta < \kappa$, entonces $[a_\beta]_I = 1$. En este caso $b := -a_\alpha$ y $E := \kappa \setminus \alpha$.)

Caso 2. Supongamos que $\sum_{\alpha<\kappa} [a_\alpha]_I \neq 1$.

Existe $b \in I^+$ tal que para todo $\alpha < \kappa$, $[b]_I \cdot [a_\alpha]_I = 0$, i.e., $b \cdot a_\alpha \in I$. Consideremos $E := \{\alpha < \kappa \mid a_\alpha \cdot b \neq 0\}$. Si E' fuese un subconjunto finito de E tal que $b = \sum_{\alpha \in E'} b \cdot a_\alpha$, se concluiría que $b \in I$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, el tamaño de E es κ y $\{a_\alpha \cdot b \mid \alpha \in E\}$ es una $\mathfrak{p}$-familia (resp. partición infinita, resp. contiene una torre) bajo b. $\square$

Como conclusión de este lema se puede pensar que un ideal que haga “crecer", al hacer el cociente, estas funciones ha de ser un ideal “grande", con bastante estructura, al pues tiene que “comerse"porciones considerables de todas las $\mathfrak{p}$-familias (familias ajenas y torres) de tamaño mínimo. Por otro lado el lema 2.1.2 nos habla de dos ideales que son a fines prácticos ajenos, lo cual podría posiblemente impedir que ambos puedan tener tan rica estructura simultáneamente. Estas son, muy informalmente, las razones por las que se pudo probar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.5. Sean A y B álgebras booleanas infinitas. Si $A \leq_s B$, entonces $\mathfrak{p}(B) \leq \mathfrak{p}(A)$, $\mathfrak{a}(B) \leq \mathfrak{a}(A)$ y $\mathfrak{t}(B) \leq \mathfrak{t}(A)$.

Demostración. Se sabe del lema 2.1.2 que existen I_0 e I_1 ideales de A, tales que $I_0 \cap I_1 = \{0\}$ y que $B \cong (A/I_0) \times (A/I_1)$. Tenemos dos casos.

Caso 1 La cardinalidad de A/I_0 es finita. En este caso $\mathfrak{p}(B) = \mathfrak{p}(A/I_1)$ (resp. con las otras funciones). Supongamos que $\kappa = \mathfrak{p}(A) < \mathfrak{p}(A/I_1)$. Sea $\{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ una $\mathfrak{p}$-familia, y sean b y E como en el lema anterior usando $I = I_1$. Existen $\alpha < \beta$ elementos de E tales que $b \cdot a_\alpha$ es igual a $b \wedge a_\beta$ módulo I_0, aunque sean distintos. Así, $b \wedge a_\alpha \bigtriangleup b \wedge a_\beta$ es distinto de 0 y elemento a la vez de I_0 e I_1, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathfrak{p}(A) \geq \mathfrak{p}(A/I_1)$. Análogos son los casos con las otras dos funciones.

Caso 2 Tanto la cardinalidad de A/I_0 como la de A/I_1 son infinitas. En este caso $\mathfrak{p}(B) = \text{mín}\{\mathfrak{p}(A/I_0), \mathfrak{p}(A/I_1)\}$, (resp. con las otras funciones). Supongamos que $\mathfrak{p}(A) < \mathfrak{p}(A/I_0), \mathfrak{p}(A/I_1)$. Sea $\{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ una $\mathfrak{p}$-familia (resp. partición infinita, resp. torre). Usando el lema anterior con I_0, se puede conseguir $\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ una $\mathfrak{p}$-familia (resp. partición) cuyos elementos, salvo quizás uno, pertenecen a I_0. Aplicando el lema anterior a esta nueva $\mathfrak{p}$-familia (partición) y al ideal I_1, se obtiene que $I_0 \cap I_1 \neq \{0\}$. Una contradicción. En el caso de que el conjunto $\{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ sea una torre, tomamos b y E correspondientes a I_0 y resultan dos casos:

1. $\sum_{\alpha \in E} [b \cdot a_\alpha]_{I_1} = [b]_{I_1}$ o
2. $\sum_{\alpha \in E} [b \cdot a_\alpha]_{I_1} \neq [b]_{I_1}$.

Repitiendo la demostarción del lema anterior, se llega a una similar contradicción.

□

Ahora se dará un ejemplo en el que estas desigualdades son estrictas. El siguiente lema nos dice cuando una extensión simple es mínima.

Lema 2.1.6. Sea $B := A(x)$ una extensión simple de un álgebra A. Entonces B es una extensión mínima de A sii Smp_x^A, el ideal generado por $A \restriction x$ y $A \restriction -x$, es o igual a A o un ideal máximo de A.

Para una prueba, ver [3] proposition 2.32.

Teorema 2.1.7. Existen A y B álgebras booleanas infinitas tales que $A \leq_m B$ y $\mathfrak{t}(B) < \mathfrak{t}(A)$.

Demostración. Para cada $n < \omega$ sean X_n una copia de $\beta\omega \setminus \omega$ y p un elemento de X_0. Definamos $X := \bigcup_{n<\omega} X_n$,

$$U := \{a \in P(X) \mid (\forall n < \omega)(a \cap X_n \in clop(X_n)) \wedge$$

$$(\exists n < \omega)(\forall m \geq n)(a \cap X_n = X_n) \wedge p \in a \cap X_0\}$$

y

$$I := \{a \in P(X) \mid (\forall n < \omega)(a \cap X_n \in clop(X_n)) \wedge$$

$$(\exists n < \omega)(\forall m \geq n)(a \cap X_n = \emptyset) \wedge p \notin a \cap X_0\}$$

Tomemos el álgebra de conjuntos $A := I \cup U$. Para verificar que A es efectivamente un álgebra booleana tomemos $a, b \in A$. Si $b \in U$, entonces $a \cup b \in U$. Si $a, b \in I$, entonces $a \cup b \in I$. Similarmennte se puede verificar que A está cerrado bajo intersecciones. Además $a \in I$ sii $X \setminus a \in U$.

Por definición, I es un ideal máximo de A. Sea $C := \{a_n \mid n < \omega\}$ una famila estrictamente creciente de elementos de A. Si $C \subseteq I$, entonces $p \notin \bigcup_{n<\omega} X_0 \cap a_n$, y como $\beta\omega \setminus \omega$ no tiene torres numerables, existen $a, b \in clop(X_0)$ tales que

1. $p \in b$
2. $\bigcup_{n<\omega} X_0 \cap a_n \subset a$,
3. $b \cap a = \emptyset$ y
4. $a \cup b \neq X_0$.

Entonces $a \cup b \cup (\bigcup_{0<n<\omega} X_n)$ es un elemento de A distinto de X que contiene cada elemento de C, y de tal modo cada elemento de este último conjunto no forma una torre.

Si C no es subconjunto de I, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $C \subseteq U$. Entonces existe $m < \omega$ tal que para cada $n, k < \omega$, $k \geq m$, $a_n \cap X_k = X_k$. Por lo tanto, existe $k < m$ tal que para cada $n < \omega$, $a_n \cap X_k \subsetneqq X_k$, i.e., $\{a_n \cap X_k \mid n < \omega\}$ es una familia estrictamente creciente en $clop(X_k)$. Como esta es un álgebra sin torres numerables, existe $a \in clop(X_k)$ tal que $a \cup \bigcup_{n\in\omega\setminus\{k\}} X_n$ atestigua que C no es una torre.

Se ha probado que $\omega < \mathfrak{t}(A)$.

Sean $x := \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} X_n$ y $B := A(x)$. Como x no es elemento de A, B es una extensión of A. Tanto $A \restriction x$ como $A \restriction -x$ son respectivamente

$$\{y \in I \mid y \cap X_0 = \emptyset\}$$

y

$$\{y \in I \mid y \subset X_0\}.$$

Es fácil verificar que $Smp_x^A = I$. Como I es un ideal máximo de A, se sigue que $A \leq_m B$.

Trivialmente

$$\left\{ \bigcup_{k<n} X_k \mid n < \omega \right\}$$

es una torre numerable de B. Entonces $\omega = \mathfrak{t}(B) < \mathfrak{t}(A)$.

□

De este teorema y del hecho de que para cada álgebra booleana infinita A, $\mathfrak{t}(A) = \omega$ sii $\mathfrak{a}(A) = \omega$ sii $\mathfrak{p}(A) = \omega$ se sigue este corolario.

Corolario 2.1.8. Existen A y B álgebras booleanas, tales que $A \leq_m B$, $\mathfrak{p}(B) < \mathfrak{p}(A)$ y $\mathfrak{a}(B) < \mathfrak{a}(A)$.

2.2. Familias densas e irredundantes

Contrario a lo que se ha visto en el teorema anterior la función π queda fija con extensiones mínimas.

Teorema 2.2.1. Si $A \leq_m B$ son álgebras booleanas infinitas, entonces $\pi(A) = \pi(B)$.

Para una prueba ver [3] proposition 6.2. Por otro lado hay ejemplos de $A \leq_s B$, donde $\pi(A) < \pi(B)$. Uno se obtiene tomando $A = P(\omega)$ y $B = P(\omega)/Fin \times P(\omega)/\{\emptyset\}$. Trivialmente en este caso $\pi(A) = \omega$, y tomando como testigo a cualquier familia casi ajena de $P(\omega)/Fin$ de tamaño $\mathfrak{c}$ se verifica que $\pi(B) = \mathfrak{c}$. A continuación, y respondiendo negativamente a Problem 71, se demostrará que no es posible tener la desigualdad opuesta.

Proposición 2.2.2. Si $A \leq_s B$, entonces $\pi(A) \leq \pi(B)$.

Demostración. Recordemos que si $A \leq_s B$, entonces existen I_0 y I_1 ideales de A tales que $I_0 \cap I_1 = \{0\}$ y $B \cong (A/I_0) \times (A/I_1)$. Se sigue fácilmente que $\pi(B) = \text{máx}\{\pi(A/I_0), \pi(A/I_1)\}$.

Si $I \subseteq A$ es un ideal, definamos $\pi(I)$ como el mínimo tamaño de un subconjunto denso de I. Supongamos que $D := \{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ es una familia de representantes de una familia densa en A/I_0. Para cada x_α para el que existe $y_\alpha \in I_1$ tal que $0 \neq [x_\alpha]_{I_0} < [y_\alpha]_{I_0}$ tomemos $z_\alpha := x_\alpha \cdot y_\alpha \neq 0$. Se afirma que el conjunto de estos z_α es denso en I_1. En efecto, si $x \in I_1$, existe $x_\alpha \in D$ tal que $0 \neq [x_\alpha]_{I_0} < [x]_{I_0}$. Supongamos que $z_\alpha \nleq x$. Entonces $0 \neq z_\alpha \cdot (-x) \leq x_\alpha \cdot (-x) \in I_0$. Pero $z_\alpha \in I_1$, por lo que $0 \neq z_\alpha \cdot (-x) \in I_0 \cap I_1$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, $z_\alpha \leq x$.

Así, cualquier subconjunto denso de A/I_0 debe contener un subconjunto de tamaño al menos $\pi(I_1)$. Lo mismo sucede con el ideal $\langle I_0 \cup I_1 \rangle_{Id}^{\perp}$. Se sigue que $\pi(A/I_0) \geq \pi(I_1) + \pi\left(\langle I_0 \cup I_1 \rangle_{Id}^{\perp}\right)$. Con un argumento análogo, se puede concluir que $\pi(B) \geq \pi(I_0) + \pi(I_1) + \pi\left(\langle I_0 \cup I_1 \rangle_{Id}^{\perp}\right)$.

Tomemos $D_0 \subseteq I_0$, $D_1 \subseteq I_1$ y $D^{\perp} \subseteq \langle I_0 \cup I_1 \rangle_{Id}^{\perp}$, subconjuntos densos de los ideales respectivos. Tomemos $x \in A^+$. Si existe, para algún $i < 2$, un elemento positivo $y_i \in I_i$ tal que $y_i \cdot x \neq 0$, entonces existe $z \in D_i$ tal que $z \leq x$. Si este no es el caso, entonces $x \in \langle I_0 \cup I_1 \rangle_{Id}^{\perp}$, y por lo tanto, existe $z \in D^{\perp}$ tal que $z \leq x$. Así, $D_0 \cup D_1 \cup D^{\perp}$ es un subconjunto denso de A.

Entonces $\pi(I_0) + \pi(I_1) + \pi\left(\langle I_0 \cup I_1 \rangle_{Id}^{\perp}\right) \geq \pi(A)$. Finalmente se consiguió la desigualdad deseada.

$\square$

Finalmente, se enuncia que Irr no es movido por extensiones simples. Para probrarlo se necesita que

Teorema 2.2.3. $Irr(A \times B) = \max\{Irr(A), Irr(B)\}$ para todas álgebras booleanas infinitas A y B.

Ver [3], theorem 8.4.

Proposición 2.2.4. Si $A \leq_s B$ son dos álgebras booleanas infinitas, entonces $Irr(A) = Irr(B)$.

Demostración. Se sabe que $Irr(A) \leq Irr(B)$. Se sabe también que existen dos ideales I_0 y I_1 of A tales que $I_0 \cap I_1 = \{0\}$ y $B \cong (A/I_0 \times A/I_1)$.

El teorema anterior nos dice que $Irr(B) = \max\{Irr(A/I_0), Irr(A/I_1)\}$. Sea $i < 2$ y tomemos $\kappa < Irr(A/I_i)$ y $\left\{[a_\alpha]_{I_i} \mid \alpha < \kappa\right\}$ una familia irredundante de A/I_i. Si $\{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ fuese redundante tendríamos $\alpha < \kappa$ tales que a_α es generado por $\{a_\beta \mid \alpha \neq \beta \in \kappa\}$, mientras que $[a_\alpha]_{I_i}$ no es generado por $\left\{[a_\beta]_{I_i} \mid \alpha \neq \beta \in \kappa\right\}$, lo que es claramente una contradicción. Entonces $\kappa < Irr(A)$. Se sigue que $Irr(A/I_i) \leq Irr(A)$. Se concluye que $Irr(B) \leq Irr(A)$, y que, por lo tanto, ambos números son iguales.

$\square$

Esto responde negativamente problem 86.

Capítulo 3

Productos libres

De aquí en adelante A y B serán dos álgebras Booleanas infinitas isomorfas respectivamente a las bases de cerrados abieros de los espacios booleanos X y Y. Igualmente se hará uso extensivo de que $A \oplus B$ es isomorfo a la base de cerrados abiertos de $X \times Y$, consistente de elementos del tipo $\bigcup_{i<n} a_i \times b_i$ con $n < \omega$, $a_i \in A$ y $b_i \in B$.

Con esta caracterización en mente es fácil concluir el siguiente

Teorema 3.0.1.

$$\mathfrak{p}(A \oplus B) \leq \text{mín}\{\mathfrak{p}(A), \mathfrak{p}(B)\}$$

$$\mathfrak{t}(A \oplus B) \leq \text{mín}\{\mathfrak{t}(A), \mathfrak{t}(B)\}$$

$$\mathfrak{a}(A \oplus B) \leq \text{mín}\{\mathfrak{a}(A), \mathfrak{a}(B)\}$$

$$\mathfrak{s}(A \oplus B) \leq \text{mín}\{\mathfrak{s}(A), \mathfrak{s}(B)\}$$

Considerando estas sencillas desigualdades una pregunta que surge naturalmente es si alguna de ellas es una igualdad o si alguna de ellas podría ser estricta. Monk plantea estas preguntas (Problems 8, 46, 52) para $\mathfrak{p}, \mathfrak{a}$, y $\mathfrak{s}$, y da una prueba para responder afirmativamente el caso de $\mathfrak{t}$. Aquí se dan respuestas afirmativas para $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{s}$, y se da otra, quizás mejor, prueba para $\mathfrak{t}$. Para $\mathfrak{a}$ se dan dos cotas inferiores.

Teorema 3.0.2. $\mathfrak{s}(A \oplus B) = \text{mín}\{\mathfrak{s}(A), \mathfrak{s}(B)\}$.

Demostración. Supongamos que $\kappa < \text{mín}\{\mathfrak{s}(A), \mathfrak{s}(B)\}$ y que

$$C := \left\{ c_\alpha := \bigcup_{i<n_\alpha} a_i^\alpha \times b_i^\alpha \mid \alpha < \kappa \right\}$$

combinatoria infinita - particiones - torres - familias centradas - irredundancia

es un subconjunto de $A \oplus B$. Es inmediato que ni $\{a_i^\alpha \mid \alpha < \kappa, i < n_\alpha\}$ es una familia splitting de A, ni $\{b_i^\alpha \mid \alpha < \kappa, i < n_\alpha\}$ es una familia splitting de B. Sean a y b testigos de este hecho. Es decir:

1. $\forall \alpha < \kappa \forall i < n_\alpha$, o $a \cap a_i^\alpha = \emptyset$ o $a \subset a_i^\alpha$, y
2. $\forall \alpha < \kappa \forall i < n_\alpha$, o $b \cap b_i^\alpha = \emptyset$ o $b \subset b_i^\alpha$.

Sea $\alpha < \kappa$. Supongamos que $(a \times b)$ no es ajeno a c_α. Entonces existe $i < n_\alpha$ tal que $(a \times b) \cap (a_i^\alpha \times b_i^\alpha) \neq \emptyset$. Pero de este modo $a \cap a_i^\alpha \neq \emptyset$ y $b \cap b_i^\alpha \neq \emptyset$, lo cual implica que $a \subset a_i^\alpha$ y $b \subset b_i^\alpha$. Es decir, $(a \times b) \subset c_\alpha$.

Por lo tanto, para toda $\alpha < \kappa$ o $a \times b$ es ajeno a c_α, o está contenido en c_α. En otras palabras, $a \times b$ es testigo de que C no es familia splitting. Entonces $\kappa < \mathfrak{s}(a \oplus b)$.

□

Teorema 3.0.3. $\mathfrak{p}(A \oplus B) = \text{mín}\{\mathfrak{p}(A), \mathfrak{p}(B)\}$.

Demostración. Supongamos que $\kappa < \text{mín}\{\mathfrak{p}(A), \mathfrak{p}(B)\}$ y que

$$C := \left\{ c_\alpha := \bigcup_{i<n_\alpha} a_i^\alpha \times b_i^\alpha \mid \alpha < \kappa \right\}$$

es una familia centrada en $A \oplus B$. Extendamos C a un ultrafiltro U de $A \oplus B$. Así, para cada $\alpha < \kappa$ existen $i_\alpha < n_\alpha$ tales que $a_{i_\alpha}^\alpha \times b_{i_\alpha}^\alpha$ es un elemento de U. Por ende $\{a_{i_\alpha}^\alpha \times b_{i_\alpha}^\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ es una familia centrada, y se sigue que tanto $\{a_{i_\alpha}^\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ como $\{b_{i_\alpha}^\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ son familias centradas. Sean a y b pseudointersecciones para cada fmilia. Así $a \times b$ es una pseudointersección de $\{a_{i_\alpha}^\alpha \times b_{i_\alpha}^\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ y por lo tanto de C. Se sigue que $\kappa < \mathfrak{p}(A \oplus B)$.

□

Estas sencillas demostraciones nos dicen esencialmente que si tenemos en $A \oplus B$ una familia centrada sin pseudointersección (resp. splitting) es por que la familia centrada que proyecta a alguna de las coordenadas no tiene tampoco pseudointersección (resp. es también splitting). Es decir que en ambos tipos de estructuras en $A \oplus B$ se hereda el comportamiento que tienen en A y en B.

Por otro lado, si en $A \oplus B$ tenemos una familia de $c_\alpha := \bigcup_{i<n_\alpha} a_i^\alpha \times b_i^\alpha$ estrictamente decreciente, al proyectarla en cualquier coordenada nos da apenas una familia monótonamente decreciente, y escogiendo, por ejemplo mediante un ultrafiltro, un $i_\alpha < n_\alpha$ para cada α, como en la demostración anterior, a lo más se puede asegurar inmediatamente que se toma una familia centrada en cada coordenada. Por esta razón, aunque el resultado próximo se enuncie de manera análoga a los anteriores dos, su demostración es menos trivial.

Teorema 3.0.4. $\mathfrak{t}(A \oplus B) = \text{mín}\{\mathfrak{t}(A), \mathfrak{t}(B)\}$.

Demostración. Sea κ un cardinal regular menor a mín $\{\mathfrak{t}(A), \mathfrak{t}(B)\}$ y sea

$$C := \left\{ c_\alpha := \bigcup_{i<n_\alpha} a_i^\alpha \times b_i^\alpha \mid \alpha < \kappa \right\}$$

una familia estrictamente decreciente de los positivos de $A \oplus B$.

Primero supongamos que $\kappa = \omega$. Como $\omega < \mathfrak{t}(A)$ y $\omega < \mathfrak{t}(B)$, se sigue que $\omega < \mathfrak{p}(A)$ y $\omega < \mathfrak{p}(B)$, y por ende que $\omega = \kappa < \mathfrak{p}(A \oplus B) \leq \mathfrak{t}(A \oplus B)$.

Ahora va el caso en que $\omega < \kappa$. Supongamos que para cada $\alpha < \kappa$ y $i < j < n_\alpha$ tenemos que $b_i^\alpha \cap b_j^\alpha = \emptyset$, lo cual se puede lograr sencillamente sin modificar a c_α. Como κ es un cardinal regular, podemos suponer que existe $n < \omega$ tal que para todo $\alpha < \kappa$ $n = n_\alpha$. Se probará inductivamente que para toda $0 < n < \omega$ una familia estrictamente decreciente de tal forma tiene una pseudointersección.

El paso base, $n = 1$, es trivial. Supongamos que n es mayor a 1 y que la afirmación está probada para cada $m \in n \setminus \{0\}$. Si $\alpha < \kappa$ y I es un subconjunto no vacío de n, sean

$$c_I^\alpha := \bigcap_{i\in I} a_i^\alpha \setminus \bigcup_{i\in n\setminus I} a_i^\alpha$$

y

$$d_I^\alpha := \bigcup_{i\in I} b_i^\alpha.$$

Claramente para cada $\alpha < \kappa$ y $I, J \in P(n) \setminus \{\emptyset\}$

$$c_I^\alpha \times d_I^\alpha \subseteq \bigcup_{i<n} a_i^\alpha \times b_i^\alpha,$$

y para cada $\alpha < \beta < \kappa$ si $c_J^\beta \cap c_I^\alpha \neq \emptyset$, se sigue que $d_J^\beta \subseteq d_I^\alpha$. Como los conjuntos de la forma

$$\bigcup_{I\in P(n)\setminus\{\emptyset\}} c_I^\alpha,$$

donde $\alpha < \kappa$, forma una familia decreciente de conjuntos no vacíos, y por lo tanto una familia centrada extendible a un ultrafiltro, para cada $\alpha < \kappa$ existe $I_\alpha \in P(n) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\left\{c_{I_\alpha}^\alpha \mid \alpha < \kappa\right\}$ es una familia centrada. Entonces $\left\{d_{I_\alpha}^\alpha \mid \alpha < \kappa\right\}$ es una familia decreciente. Se sigue que

$$C' := \left\{ \bigcup_{i\in I_\alpha} a_i^\alpha \times b_i^\alpha \mid \alpha < \kappa \right\}$$

es una familia decreciente de subconjuntos no vacíos. Tenemos dos casos: Caso 1. Para un conjunto cofinal de $\alpha < \kappa$ $I_\alpha \neq n$. En este caso podemos suponer que para un subconjunto cofinal de $\alpha < \kappa$ el tamaño de I_α es $m < n$. Entonces, por hipótesis de inducción, C' tiene una pseudointersección, y por ende C también tiene una pseudointersección.

Caso 2. Para (casi) cada $\alpha < \kappa$, $I_\alpha = n$. En este caso $\{\bigcap_{i<n} a_i^\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ es una familia centrada.

Si existe $\alpha < \kappa$ tal que para cada $\alpha < \beta_0 < \beta_1 < \kappa$ se tiene que $\bigcap_{i<n} a_i^{\beta_1} \subseteq \bigcap_{i<n} a_i^{\beta_0}$, entonces es claro que existe $a \in A$ tal que $a \subseteq \bigcap_{i<n} a_i^\beta$ para todo $\alpha < \beta < \kappa$. Si $b \in B$ es una pseudointersección para $\{\bigcup_{i<n} b_i^\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, se sigue que $a \times b$ es una pseudointersección para C.

De otro modo para cada $\alpha < \kappa$ existen $\alpha < \beta_0 < \beta_1 < \kappa$ tal que $\bigcap_{i<n} a_i^{\beta_1} \nsubseteq \bigcap_{i<n} a_i^{\beta_0}$. Notemos que esto significa que existe $j < n$ tal que para cada $i < n$ $b_j^{\beta_0} \cap b_i^{\beta_1} = \emptyset$. En efecto, sea $x \in \bigcap_{i<n} a_i^{\beta_1}$ y supongamos que para cada $j < n$ existe $i < n$ tal que $b_j^{\beta_0} \cap b_i^{\beta_1} \neq \emptyset$. De esto se seguiría que $a_i^{\beta_1} \subseteq a_j^{\beta_0}$, (como se observó con los d's y c's). Finalmente se tiene que $x \in a_j^{\beta_0}$. Pero esto implicaría que $\bigcap_{i<n} a_i^{\beta_1} \subseteq \bigcap_{i<n} a_i^{\beta_0}$, lo que no sucede por nuestra suposición.

Esta observación implica que para todo α existe β_0 tal que a c_{β_0} se le puede quitar un cuadro $a_j^{\beta_0} \times b_j^{\beta_0}$ y sin embargo sigue conteniendo todos los cuadros a partir de otro c_{β_1}. Con esta idea es fácil construir inductivamnete un conjunto $\{\beta_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ y una sucesión $\{j_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ tales que

$$\left\{ \bigcup_{i \neq j_\alpha} a_i^{\beta_\alpha} \times b_i^{\beta_\alpha} \mid \alpha < \kappa \right\}$$

es una familia decreciente. Aplicando la hipótesis inductiva a esta familia obtenemos una pseudointersección para C.

□

Tomemos ahora dos elementos ajenos de $(A \oplus B)^+$, digamos $a \times b$ y $c \times d$. No existe ningún impedimento para que, por ejemplo, a y c no sean ajenos. Basta que b y d sean ajenos para que los cuadros lo sean. Con esto se puede observar que dada una familia ajena infinita de $A \oplus B$ su proyección a alguna coordenada puede no ser, ni de lejos, una familia ajena. Sin embargo, también se puede notar que si a nuestra familia ajena infinita en el producto libre la restringimos a una subfamilia que, digamos, en la segunda coordenada proyecte una familia centrada, entonces necesariamente en la primera coordenada se proyecta una familia ajena. Con esta imagen en mente se obtuvo el siguiente resultado.

Teorema 3.0.5. $\min\{\min\{\mathfrak{a}(A), \mathfrak{a}(B)\}, \max\{\mathfrak{p}(A), \mathfrak{p}(B)\}\} \leq \mathfrak{a}(A \oplus B)$.

Demostración. Sea $\kappa < \min\{\min\{\mathfrak{a}(A), \mathfrak{a}(B)\}, \max\{\mathfrak{p}(A), \mathfrak{p}(B)\}\}$ y tomemos $P := \{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ una familia ajena de $A \oplus B$. Como cada c_α puede reemplazarse con la unión de una cantidad finita de conjuntos de la forma $a_\alpha \times b_\alpha$, donde a_α (resp. b_α) es un elemento de A (resp.

B), se puede suponer que cada $c_\alpha := a_\alpha \times b_\alpha$. Sin pérdida de generalidad también se puede suponer que $\kappa < \mathfrak{a}(A), \mathfrak{p}(B)$. Se consideran dos casos.

Caso 1. Para todo $E \in [\kappa]^{\geq\omega}$ existe $F \in [E]^{<\omega}$ tal que $b_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\in F} b_\beta$ para todo $\alpha \in E$.

Sea F_0 subconjunto finito de κ que cumple la hipóptesis. Supongamos que para un $n < \omega$ hemos ya definido F_i, $i < n$. Sea F_n el conjunto finito correspondiente a $\kappa \setminus \bigcup_{i<n} F_i$. Entonces recursivamente se define una sucesión $\{F_n \mid n < \omega\}$ de subconjuntos finitos de κ tal que si $m < n < \omega$, entonces

$$\bigcup_{\alpha\in F_n} b_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in F_m} b_\alpha$$

. Se sigue fácilmente que para cada $n < \omega$ existe $\alpha_n \in F_n$ tal que $\{b_{\alpha_n} \mid n < \omega\}$ es una familia centrada.

Extendamos el conjunto $\{\alpha_n \mid n < \omega\}$ a un subconjunto $D \subseteq \kappa$, maximal con la propiedad de que $\{b_\alpha \mid \alpha \in D\}$ es una familia centrada. Como para cada $\alpha, \beta \in D$, $\alpha < \beta$, c_α y c_β son ajenos, se sigue que $\{a_\alpha \mid \alpha \in D\}$ es una familia de elementos ajenos de A.

Como $\kappa < \mathfrak{a}(A)$, existe $a \in A$ que atestigua que $\{a_\alpha \mid \alpha \in D\}$ no es una partición. También, $\kappa < \mathfrak{p}(B)$, lo que significa que existe $b \in B^+$ pseudointersección de $\{b_\alpha \mid \alpha \in D\}$. Por ende $a \times b$ atestigua que P no es una partición de $A \oplus B$.

Caso 2. Existe $E \in [\kappa]^{\geq\omega}$ tal que para todo $F \in [E]^{<\omega}$ existe $\alpha \in E$ tal que $b_\alpha \nsubseteq \bigcup_{\beta\in F} b_\beta$.

Supongamos que E es un subconjunto maximal de κ con esta propiedad. Sean $\alpha_0, ..., \alpha_n$ elementos de $\kappa \setminus E$. Si $i \leq n$, Entonces existe F_i, un subconjunto finito de E, tal que

$$\bigcup_{\alpha\in E} b_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\in F_i} b_\beta \cup b_{\alpha_i}.$$

Si $F := \bigcup_{i\leq N} F_i$, se sigue que para todo $i \leq n$

$$\bigcup_{\alpha\in E} b_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\in F} b_\beta \cup b_{\alpha_i}.$$

También, por hipótesis, sabemos que existe $\alpha' \in E$ tal que $b_{\alpha'} \nsubseteq \bigcup_{\beta\in F} b_\beta$. Por ende $\emptyset \neq b_{\alpha'} \setminus \bigcup_{\beta\in F} b_\beta \subseteq b_{\alpha_i}$ para todo $i \leq n$. Se sigue que $\{b_\alpha \mid \alpha \in \kappa \setminus E\}$ es una familia centrada. Si $\kappa \setminus E$ es infinito, como en el caso anterior, se puede probar que P no es una partición de $A \oplus B$.

Supongamos que $|\kappa \setminus E| < \omega$. Por hipótesis se sabe que para todo $F \in [E]^{<\omega}$, $Y \neq \bigcup_{\beta\in F} b_\beta$. Como $\kappa < \mathfrak{p}(B)$, se sigue que existe $b \in B$ tal que $b \cap b_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in E$. Para que P sea una partición de $A \oplus B$, tiene que cubrir $X \times b$. Esto solo puede lograrse si $\bigcup_{\alpha\in\kappa\setminus E} a_\alpha = X$. Supongamos que esto sucede. Como $\kappa \setminus E$ es finito, se puede suponer que es igual a $\{\alpha_i \mid i \leq n\}$ para algún $n < \omega$. Como se observó anteriormente, se seguiría que existe $\alpha' \in E$ tal que $b_{\alpha'} \cap b_{\alpha_i} \neq \emptyset$ para todo $i \leq n$. También $a_{\alpha'} \cap a_{\alpha_j} \neq \emptyset$ para algún $j \leq n$, lo que implicaría que $c_{\alpha'} \cap c_{\alpha_j} \neq \emptyset$. Esto es una contradicción, pues se supone que P es una familia ajena. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha\in\kappa\setminus E} a_\alpha \neq X$ y P no es una partición de $A \oplus B$.

combinatoria infinita - particiones - torres - familias centradas - irredundancia

Se concluye que $\kappa < \mathfrak{a}(A \oplus B)$.

□

El complicado enunciado del teorema anterior se puede traducir como sigue: Si acaso existe una partición infinita en $A \oplus B$ que niegue la igualdad para $\mathfrak{a}$ en el teorema 3.0.1, su tamaño ha de superar tanto a $\mathfrak{p}(A)$ como a $\mathfrak{p}(B)$.

Simplifiquemos al caso $A = B$. Se sigue entonces que si quisiéramos obtener un ejemplo en el que $\mathfrak{a}(A \oplus A) < \mathfrak{a}(A)$, es necesario que $\mathfrak{p}(A)$ sea menor a $\mathfrak{a}(A)$.

Buscando un ejemplo tal se puede volver la mirada al naturalmente interesante caso en que $A = B = P(\omega)/Fin$, el álgebra booleana en que inició el estudio de estos invariantes, y en el que se conoce la consistencia de $\mathfrak{p} < \mathfrak{a}$. Para pasar a este caso específico se hará un ligero cambio de notación y se introducirá un par de conceptos.

Definición 3.0.6. Una familia infinita $\{(A_\alpha, B_\alpha) \mid \alpha < \kappa\}$ de pares en $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ será llamada una familia 2-AD (de almost disjoint) si siempre que $\alpha < \beta < \kappa$, o A_α es casi ajeno con A_β, o B_α es casi ajeno con B_β. Si además es maximal con está propiedad, se dirá que es una familia 2-MAD.

Es fácil notar que los conceptos de familia 2-AD y de familia 2-MAD se corresponden exactamente con los de familia ajena infinita y partición infinita de cuadros del espacio booleano $\beta\omega \setminus \omega \times \beta\omega \setminus \omega$, isomorfo a $P(\omega)/Fin \oplus P(\omega)/Fin$, y que por ende

$$\mathfrak{a}(2) := \mathfrak{a}(P(\omega)/Fin \oplus P(\omega)/Fin)$$

$$= \text{mín}\{|X| \mid X \subseteq [\omega]^\omega \times [\omega]^\omega \;\; X \; es \; una \; familia \; 2 - MAD\}.$$

La pregunta planteada anteriormente se puede reformular: Â¿$\mathfrak{a}(2) = \mathfrak{a}$ en ZFC, o es consistente que $\mathfrak{a}(2) < \mathfrak{a}$? En este impulso no se ha conseguido responder a esta pregunta, sin embargo, el teorema 3.0.5 se ha mejorado para este caso específico.

Teorema 3.0.7. $\text{mín}\{\mathfrak{s}, \mathfrak{a}\} \leq \mathfrak{a}(2)$.

Demostración. Sea $\kappa < \mathfrak{s}, \mathfrak{a}$ un cardinal infinito y tomemos $P := \{(A_\alpha, B_\alpha) \mid \alpha < \kappa\}$ una familia 2-AD. Pues $\{B_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ no es una familia splitting, enlistemos todos los conjuntos infinitos de enteros que atestiguan este hecho: $\{X_\alpha \mid \beta < \mathfrak{c}\}$. Además, para cada $\beta < \mathfrak{c}$ tomemos el conjunto $F_\beta := \{\alpha < \kappa \mid X_\beta \subseteq^* B_\alpha\}$. Claramente para cada $\beta < \mathfrak{c}$, $|X_\beta \cap B_\alpha| < \omega$ sii $\alpha \notin F_\beta$.

Si existe $\beta < \mathfrak{c}$ tal que $F_\beta = \emptyset$, se sigue inmediatamente que (ω, X_β) es un testigo de que P no es una familia 2-MAD.

También, si existe $\beta < \mathfrak{c}$ tal que F_β es infinito, como en la prueba del teorema anterior, se puede obtener un testigo de que P no es una familia 2-MAD.

Supongamos que existe $\beta < \mathfrak{c}$ tal que F_β es finito y que para un $\alpha \in \kappa \setminus F_\beta$ la familia $\{B_\gamma \mid \gamma \in F_\beta\} \cup \{B_\alpha\}$ es centrada. En este caso (A_α, X_β) atestigua que P no es una familia 2-MAD.

Supongamos que para todo $\beta < \mathfrak{c}$ el conjunto F_β es finito y no vacío, y que para todo $\alpha \in \kappa \setminus F_\beta$ la familia $\{B_\gamma \mid \gamma \in F_\beta\} \cup \{B_\alpha\}$ no es centrada. Por lo tanto, $\{F_\beta \mid \beta < \mathfrak{c}\} \subseteq [\kappa]^{<\omega}$. Se sigue que hay a lo más κ conjuntos de la forma F_β, con $\beta < \mathfrak{c}$. Por ende se puede reordenar esta familia como $\{F_\beta \mid \beta < \kappa\}$, eliminando todas las repeticiones. La familia $\mathcal{A} = \left\{\bigcap_{\alpha \in F_\beta} B_\alpha \mid \beta < \kappa\right\}$ es una familia casi ajena. En efecto, si para algún $\beta < \beta' < \kappa$, $\bigcap_{\alpha \in F_\beta \cup F_{\beta'}} B_\alpha$ es infinito, entonces (s.p.d.g.) existiría $\alpha \in F_{\beta'} \setminus F_\beta$ tal que $\{B_\gamma \mid \gamma \in F_\beta\} \cup \{B_\alpha\}$ es centrado, lo que contradiría nuestra suposición. Como $\kappa < \mathfrak{a}$, existe $X \in [\omega]^\omega$ que atestigua que $\mathcal{A}$ no es una familia MAD. Sabemos que $\{X \cap B_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ no es una familia splitting bajo X, y cuaquier subconjunto Y de X que atestiguara este hecho, atestiguaría también que $\{B_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ no es una familia splitting. Entonces, existen $\beta < \mathfrak{c}$ tal que $Y = X_\beta$, y $\beta' < \kappa$ tal que para todo $\alpha < \kappa$, $Y \subseteq^* B_\alpha$ sii $\alpha \in F_{\beta'}$. Pero esto contradice el hecho de que X es casi ajeno a cada $\bigcap_{\alpha \in F_{\beta'}} B_\alpha$. Por lo tanto, este último caso no es posible y P no es una familia 2-MAD.

$\square$

Como consecuencia directa de este teorema se tiene que si se busca un modelo de la teoría de conjuntos en que $\mathfrak{a}(2) < \mathfrak{a}$, ha de ser uno en que $\mathfrak{s} < \mathfrak{a}$, quizás paradigmáticamente el modelo de Hechler (ver [1]). De momento el autor no conoce ni la existencia de tal modelo, ni la imposibilidad de encontrarlo, y en este texto no se va más en esta dirección.

Cabe notar que la última demostración también funciona para cuando se trata de dos álgebras booleanas homogéneas, como lo es $P(\omega)/Fin$. Sin embargo, principalmente porque $\mathfrak{s}(\ )$ y $\mathfrak{a}(\ )$ son por lo general funciones incomparables, la propia enunciación del resultado sería bastante más difícil de escribir y de leer que la desigualdad del teorema 3.0.5, y por ello se omite.

Capítulo 4

Otras preguntas

En esta última sección se tratarán brevemente algunas cuestiones que, si bien versan sobre los invariantes cardinales definidos en la primera sección, quedan en el contexto general de este trabajo un tanto aisladas. La primera concierne a una posible definición alternativa de la función $\mathfrak{p}\,(\ )$. Tal posible definición refiere a los conjuntos de ramificación.

Definición 4.0.1. Sea A un álgebra booleana. Se dice que $X \subset A$ es un conjunto de ramificación si para todo $a, b \in X$, o a y b son comparables, o $a \cdot b = 0$.

Monk pregunta (Problem 48) si

$$\mathfrak{p}\,(A) = \text{mín}\,\{|X| \mid X\ es\ un\ conjunto\ de\ ramificacion\ maximal\ de\ A\}?$$

Esta pregunta se responde aquí negativamente. El álgebra que nos da el contraejemplo es un álgebra de intervalos.

Definición 4.0.2. Sea L un conjunto linealmente ordenado. El álgebra de intervalos de L, $Intalg\,(L)$ es el álgebra de conjuntos en L generada por los intervalos de la forma $[a, b)$, donde $a \in L \cup \{-\infty\}$, y $b \in L \cup \{\infty\}$.

Es fácil verificar que para todo conjunto linealmente ordenado L, su álgebra de intervalos consiste de los conjuntos de la forma $\bigcup_{i<n}[a_i, b_i)$, donde $n < \omega$,$a_i \in L \cup \{-\infty\}$ $b_i \in L \cup \{\infty\}$, y para todo $i < j < n$, $a_i < b_i$ y $b_i < a_j$.

Tomemos $A := Intalg\,(\omega_1)$. El conjunto

$$\{[n, n+1) \mid n < \omega\} \cup \{[\omega, \infty)\}$$

atestigua que $\mathfrak{a}\,(A)$, y por ende $\mathfrak{p}\,(A)$, es igual a ω.

Ahora supongamos que $R := \{c_n \mid n < \omega\}$ es un conjunto de ramificación. Cada c_n es de la forma $\bigcup_{i \leq m_n}[\alpha_i^n, \beta_i^n)$. Supongamos que para todo $n < \omega$, $\beta_{m_n}^n < \infty$. Sea β el supremo de todos los $\beta^n_{m_n}$, $n < \omega$. Claramente $[\beta, \infty)$, siendo ajeno a todo elemento de R, atestigua que R no es un conjunto maximal de ramificación.

Por otro lado, supongamos que existe $n_0 < \omega$ tal que $\beta^{n_0}_{m_{n_0}} = \infty$. Tomemos entonces α como el supremo de todos los $\alpha^n_{m_n}$ y de todos los $\beta^n_{m_n}$ tales que $\beta^n_{m_n} < \infty$. Ahora, si $\beta^n_{m_n} = \infty$, entonces $[\alpha, \infty)$ está contenido en $[\alpha^n_{m_n}, \beta^n_{m_n}) \subseteq c_n$. Si $\beta^n_{m_n} < \infty$, entonces $[\alpha, \infty)$ es ajeno a $[\alpha^n_{m_n}, \beta^n_{m_n}$, y por lo tanto a c_n. De cualquier modo $[\alpha, \infty)$ atestigua que R no es un conjunto de ramificación maximal.

Así queda claro que el tamaño mínimo de una familia de ramificación por lo general define una función distinta a $\mathfrak{p}\,(\ )$.

La siguiente cuestión es sobre otro tipo de extensión de los tratados previamente.

Definición 4.0.3. Sean A y B álgebras booleanas tales que $A \leq B$. Se dice que A está σ-encajada en B, $A \leq_\sigma B$, si para cada $b \in B$ el ideal $A \upharpoonright b$ es σ-generado.

Reflejando lo demostrado en proposición 2.2.2, se tiene la siguiente proposición, que responde negativamente a (Problem 70).

Proposición 4.0.4. Sean A y B dos álgebras booleanas infinitas. Si $A \leq_\sigma B$, entonces $\pi\,(A) \leq \pi\,(B)$.

Demostración. Sea $X \subseteq B$ una cubierta (lo dual a un subconjunto denso) de B de tamaño mínimo, i.e., de tamaño $\pi\,(B)$. Para $x \in X$, tomemos $C_x \subseteq A$ un conjunto numerable de generadores de $A \upharpoonright x$.

Tomemos $a \in A$. Como X es una cubierta de B, existe $x \in X$ tal que $a \leq x$. Se sigue que a es un elemento de $A \upharpoonright x$. Por ende existe F, un subconjunto finito de C_x tal que $a \leq \sum F$. Por lo tanto

$$Y := \left\{ \sum F \mid F \in [C_x]^{<\omega}, x \in X \right\}$$

es una cubierta de A. Como el tamaño de Y es $\pi\,(B) \cdot \omega = \pi\,(B)$, se sigue que $\pi\,(A) \leq \pi\,(B)$.

$\square$

Bibliografía

[1] Baumgartner, James E., Dordal, Peter, Adjoining dominating reals, J. Symb. Logic 50, no. 1 (1985), 94-101

[2] Koppelberg, Sabine, Handbook of Boolean Algebras, North Holland, (1989)

[3] Monk, J. Donald, Cardinal Invariants on Boolean Algebras, Second Edition, Birkhauser, (2014)

combinatoria infinita - particiones - torres - familias centradas - irredundancia