

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Facultad de Ingeniería Eléctrica



**CALIBRACIÓN DE ROBOTS DE LOCOMOCIÓN
DIFERENCIAL MEDIANTE EL MÉTODO DE MÍNIMOS
CUADRADOS**

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

presenta

Shadai Rafael López García

Leonardo Romero Muñoz

Director de Tesis

Carlos Alberto Lara Alvarez

Co-Director de Tesis

Agosto 2011

*A mi esposa, a mi hijo, a mi familia.
Y a todas aquellas personas que hicieron posible esta tesis.*

Resumen

La odometría es el procesamiento de la información de los sensores del robot para determinar su posición. La odometría provee en tiempo real información cinemática del robot; así que es implementada en muchas aplicaciones prácticas en la robótica. Sin embargo este método es susceptible a errores; en los robots de locomoción diferencial, existen dos fuentes principales de error: la incertidumbre de la dimensión efectiva del diámetro de la base del robot y la diferencia en el tamaño en los radios en las llantas del robot. Estos errores permanecen casi constantes a lo largo de períodos de tiempo prolongados.

La calibración odométrica consiste en identificar el conjunto de parámetros odométricos (como el radio de la base del robot o el radio de las llantas) que permiten determinar la posición del robot a partir de la información de los sensores del robot; cuando los robots son calibrados se incrementa la precisión odométrica.

En la presente tesis se analizan dos métodos para la calibración de robots de locomoción diferencial, el método propuesto por Antonelli et al. en [Antonelli05] y el método propuesto por Papadopoulou y Misailis [Papadopolous07]. En ambos métodos se linealiza la ecuación cinemática del robot, se aplica el método de mínimos cuadrados para estimar los parámetros odométricos.

Para estimar los parámetros odométricos por medio del método de mínimos cuadrados es necesario obtener un conjunto de mediciones de la localización del robot. Para obtener estas mediciones se propone un método de SLAM completo llamado suavizado y cartografía incremental. Esta técnica es propuesta por Kaess y Dellaert en [Kaess08]; se emplea esta técnica ya que aun teniendo información odométrica relativamente mala, se puede obtener una buena estimación de la localización.

Abstract

The odometry is the processing of information of motion sensors to determine a robot's position. The odometry provides real-time information about the kinematics of the robot; so it is used in most practical applications in robotics. However this method is sensitive to errors; in differential-drive mobile robots, these errors have two dominant error sources: uncertainty about the effective wheelbase and unequal wheel diameters. These errors stay almost constant over prolonged periods of time.

The odometry calibration consists of the identification of a set of kinematic parameters (wheelbase or wheel diameters, for example) that allow to determine the vehicle's position with the information of motion sensors; when the robot is calibrated increase the robot's odometric accuracy.

This thesis analyzes two methods for odometry calibration of differential-drive mobile robots, the method proposed by Antonelli et al in [Antonelli05] and the method proposed by Papadopolous and Misailis in [Papadopolous07]. The first step in both methods is linearize the kinematic equations; then it can be applied the least-squares method to estimate kinematic parameters.

To estimate kinematic parameters by the least square method is necessary a set of measurements of the robot's localization. To obtain this set of measurements is proposed a full SLAM method called incremental smooth and mapping. This method is proposed by Kaess and Dellaert in [Kaess08]; this method is used because even with bad odometry information is possible to obtain a good estimate of localization.

Contenido

Contenido	IX
Lista de Símbolos	XIII
1. Introducción	1
1.1. Problema de odometría	2
1.1.1. Reducción errores no sistemáticos por medio sistemas INS y fusión sensorial	4
1.1.2. Reducción de errores sistemáticos por medio de la calibración de odométrica	5
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Antecedentes	6
1.3.1. Antecedentes de las técnicas de calibración	6
1.3.2. Antecedentes de las técnicas de localización	7
1.3.3. Antecedentes en FIE	10
1.4. Objetivos de la tesis	12
1.4.1. Objetivo general	12
1.4.2. Objetivos particulares	12
1.5. Descripción de capítulos	12
2. Cinemática del robot	15
2.1. Robots de locomoción diferencial	15
2.2. Modelo odométrico de robots de locomoción diferencial	16
2.3. Proceso odométrico	19
2.4. Implementación del proceso odométrico	21
2.5. Discusión	25
3. Técnicas de calibración	27
3.1. Calibración odométrica por método de Antonelli	27
3.2. Calibración odométrica por método de Papadopolous	30
3.3. Proceso de calibración propuesto	33
3.4. Resultados obtenidos	35
3.5. Discusión	36

4. Conclusiones	37
4.1. Conclusiones generales	37
4.2. Trabajos futuros	38
A. Suavizado y cartografía	39
A.1. Notación	39
A.2. Función de movimiento	39
A.3. Modelo de movimiento	40
A.4. Modelo de observación	43
A.5. SAM	43
A.6. SAM como problema de mínimos cuadrados	45
A.7. Suavizado y cartografía incremental	47
A.8. Asociación de datos	49
A.8.1. Asociación de datos por máxima verosimilitud	49
A.8.2. Estimación de covarianza	50
A.9. Resultados obtenidos	51
B. Mínimos cuadrados	53
B.1. Mínimos cuadrados en una dimensión	54
B.2. Mínimos cuadrados en multiples dimensiones	55
B.3. Pseudoinversa	57
B.4. Mínimos cuadrados mediante factorización QR	57
Referencias	61

Lista de Figuras

1.1.	Aplicaciones de la robótica móvil.	1
1.2.	Problemas en la robótica móvil.	3
1.3.	Método de localización por triangulación de marcas.	8
1.4.	Generación de mapas y localización simultánea.	9
1.5.	Robot desarrollado en DEPFIE.	11
2.1.	Robot de locomoción diferencial.	15
2.2.	La cinemática en los DDR.	17
2.3.	Acciones de control de los robots de locomoción diferencial	19
2.4.	Descomposición del vector de velocidad \mathbf{v}	20
2.5.	Proceso odométrico, diagrama a bloques.	21
2.6.	Desplazamiento de traslación en línea recta.	24
2.7.	Desplazamiento angular.	25
3.1.	Trayectoria cuadrada en ambos sentidos.	34
3.2.	Proceso de calibración diagrama a bloques.	34
A.1.	Sistema global y local de coordenadas.	40
A.2.	Función de movimiento.	41
A.3.	Modelo de medición.	42
A.4.	Red Bayesiana de una trayectoria	44
A.5.	Mapa generado mediante la técnica de Suavizado	52
B.1.	Proyección de dos vectores.	54
B.2.	Proyección de un vector sobre el espacio de columnas.	56

Lista de Símbolos

r_d	Radio de la llanta derecha.
r_i	Radio de la llanta izquierda.
D	Radio de la base del Robot.
θ	Orientación del robot.
RC	Radio de curvatura.
CIR	Centro instantáneo de rotación.
$[v, \omega]^t$	Vector de velocidad del robot en donde v es la velocidad de traslación y ω la velocidad angular del robot.
$[\omega_d, \omega_i]^t$	Velocidad angular de la llanta derecha e izquierda.
$\mathbf{x} = [x, y, \theta]^t$	Vector de posición del robot en el plano en donde x, y son las coordenadas del plano y θ es la orientación del robot.
$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}]^t$	Vector que expresa la velocidad del robot
C	Matriz de parámetros del modelo odométrico.
\mathbf{x}_i	i-ésima posición del robot.
\mathbf{u}_i	i-ésima acción de control del robot.
\mathbf{l}_j	j-ésima marca.
\mathbf{z}_k	k-ésima medición del robot.
X	Trayectoria del robot.
U	Conjunto de acciones de control del robot.
L	Mapa del entorno del robot.
Z	Conjunto de mediciones del robot.
T	Período de muestreo.
Ω	Conjunto de conjuntos de mediciones de velocidad $\Omega = \{W_1, W_2, \dots, W_P\}$.
W	Conjunto de mediciones de velocidad angular en las llantas en un movimiento $W = \{\omega_{i,1}, \omega_{d,1}, \dots, \omega_{i,K}, \omega_{d,K}\}$.

Capítulo 1

Introducción

Desde hace algunos años la robótica móvil se ha visto motivada en desarrollar sistemas capaces de desplazarse en forma autónoma. Con esta habilidad los robots podrían realizar tareas complejas dentro de ambientes dinámicos. Como por ejemplo en el transporte, el entretenimiento, la manufactura, la asistencia a personas con capacidades diferentes, etc. En la actualidad existen robots con cierto grado de autonomía que realizan aplicaciones reales sobre todo en ambientes controlados.

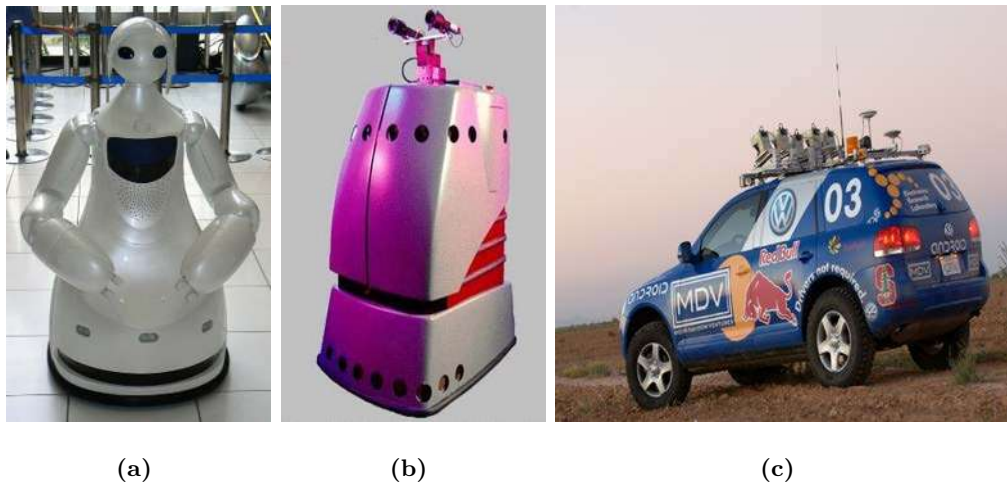


Figura 1.1: Aplicaciones de la robótica móvil.

Como los robots TPR-Robina de Toyota (figura 1.1(a) [Grisetti10]) y Minerva (figura 1.1(b) [Thrun99]) que fueron diseñados para guiar a visitantes en ferias y exposi-

ciones; el vehículo autónomo de la Universidad de Stanford (figura 1.1(c) [Petrovskaya08]) recorrió 131 millas en la competencia de vehículos autónomos organizada por la agencia DARPA en 2005 . La diferencia tecnológica entre un robot que simplemente realiza tareas a un robot que pueda navegar libremente en su entorno no es trivial. Ya que el robot deberá comprender el entorno en donde se encuentra para poder planear de forma inteligente sus movimientos [Dudek00]. En [Borenstein96] Borenstein et al. afirman que un robot debe resolver tres preguntas clave ¿Dónde estoy? ¿Dónde voy? ¿Cómo llegar a ese sitio? La literatura especializada en robótica móvil ha denominado una de estas preguntas como el problema de *localización, la generación de mapas y la planeación de movimientos* respectivamente. Como se muestra en la figura 1.2 [Stachniss09] existen otros problemas que surgen de la interdependencia de los tres problemas básicos. Si el problema consiste en construir un mapa del entorno al mismo tiempo que el robot se localiza en el mapa el problema se denomina *Mapeo y Cartografía simultánea* o SLAM (del inglés *Simoultaneous Localization and Mapping*); si el problema busca encontrar trayectorias óptimas dentro de ambientes desconocidos el problema se conoce como *exploración*; si el problema consiste en guiar al robot hacia una posición mejorar el estimado de su localización el problema se conoce como *localización activa*; la intersección de los tres problemas básicos origina el problema de planeación de trayectorias mientras el robot construye el mapa y se localiza en su entorno que se conoce como *planeación, localización y mapeo simultáneo* o SPLAM (del inglés *Simoultaneous Planning Localization and Mapping*).

1.1. Problema de odometría

En la robótica móvil el problema de odometría¹ consiste en estimar la localización del robot a partir de las mediciones de los sensores propioceptivos ² [Rodríguez-Losada04].

Para estimar la odometría se pueden utilizar sensores inerciales o sensores electromecánicos. Los sensores inerciales son transductores que convierten las fuerzas inerciales a las que está sujeto el robot en señales eléctricas; donde tenemos a el giróscopio y el acel-

¹También conocido como problema de Dead Reckoning.

²Sensores que permiten obtener observaciones relacionadas con las variables internas del estado del robot, es decir su velocidad, aceleración, rotación, etc

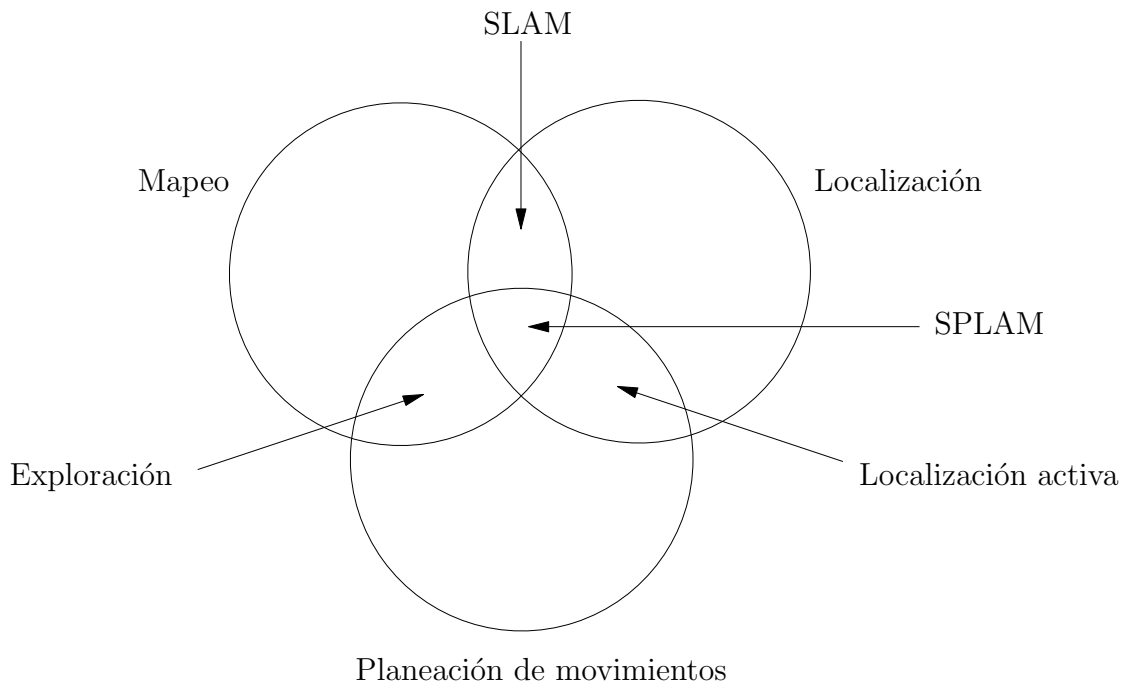


Figura 1.2: Problemas en la robótica móvil.

erómetro. Cuando se emplean este tipo de sensores se dice que la odometría se obtiene mediante un *Sistema de Navegación Inercial* o INS (del inglés *Inertial Navigation System*). Los giroscopios se encargan de brindar información acerca de la orientación del robot y los acelerómetros nos permiten estimar la velocidad del robot. Cuando son utilizados los acelerómetros no es necesario conocer el modelo cinemático para determinar el desplazamiento del robot; basta con integrar las mediciones en intervalos definidos.

Existen también sensores electromecánicos que se acoplan a los ejes de las llantas del robot. Convierten el desplazamiento angular en un determinado número de pulsos eléctricos; posteriormente estos pulsos son decodificados como velocidad angular. Existen varios tipos de sensores electromecánicos de los que destaca el encoder rotatorio incremental óptico o mecánico. Están formados por un disco y un transductor; el disco tiene un número determinado de muescas de algún tipo que al coincidir con el transductor se genera un pulso eléctrico. Cuando se utilizan este tipo de sensores es necesario conocer el modelo cinemático

del robot para poder estimar el desplazamiento (este proceso se explica en la sección 2.3).

En [Thrun05] se menciona que la odometría como método de localización es efectiva solamente a corto plazo; esto se debe a que a lo largo del tiempo se van acumulando los errores; errores que se clasifican en dos grupos [Jared10]:

- Errores sistemáticos. Son aquellos errores que se acumulan a través del tiempo y son causados por las imperfecciones en el robot. Como radios desiguales en las llantas, llantas desalineadas, asimetría de la base, resolución limitada del encoder, etc. Por lo tanto las causas que originan estos errores pueden determinarse mediante pruebas de laboratorio (calibración).
- Errores no sistemáticos. Son aquellos errores causados por perturbaciones aleatorias. Como irregularidades en el entorno, objetos extraños, deslizamiento de las llantas, etc. Las causas de estos errores no se pueden determinar fácilmente.

A continuación se mencionan dos técnicas que permiten reducir los errores sistemáticos y no sistemáticos.

1.1.1. Reducción errores no sistemáticos por medio sistemas INS y fusión sensorial

Algunas perturbaciones como el deslizamiento de las llantas pueden provocar un inusual efecto rotatorio. Estos fenómenos generan errores no sistemáticos sobre la orientación del robot. Los giróscopios en cambio pueden medir estas rotaciones, surgiendo numerosas investigaciones en la robótica para incluir el giroscopio en las técnicas de localización [Jared10]. Cabe señalar que los giroscopios no brindan información acerca de la traslación del robot, por lo que es usual que su uso implique emplear técnicas de fusión de datos. Como en las técnicas propuestas en en [Azizi03] [Luo08] [Yizhong04] [Han99] y [Pornsarayouth09] donde por medio del Filtro de Kalman se fusionan los datos de la odométricos del encoder con los del giroscopio para mejorar la localización.

1.1.2. Reducción de errores sistemáticos por medio de la calibración de odométrica

El proceso de calibración odométrica consiste en identificar el conjunto de parámetros cinemáticos que permiten reconstruir la trayectoria del robot a partir de las mediciones que obtiene de los encoders en sus llantas [Antonelli05]. Al identificar dichos parámetros se tiene un modelo odométrico del que se reducen los errores sistemáticos. Es por esta razón que en [Borenstein94][Antonelli05][Papadopolous07][Yun08] se afirma que la calibración permite mejorar la estimación odométrica.

1.2. Planteamiento del problema

Cuando Romero y Concha en [Romero06] implementan un control de velocidad y posición en los motores acoplados en las llantas del robot de la FIE. Con este control se asegura que las llantas del robot giren a la misma velocidad; por la arquitectura del robot si la velocidad entre las llantas no es la misma el movimiento del robot sería caótico. En este momento la estimación odométrica se realiza por mediante el producto del número de pasos por una constantes de conversión; cada constante de conversión equivale a la distancia que recorre el robot por cada paso de encoder. Cabe mencionar que el robot de la FIE es de locomoción diferencial por lo que puede realizar solo dos movimientos: la rotación y la tralación en línea recta. Cuando el robot rota el desplazamiento angular se estima con la siguiente ecuación

$$\theta = c_{rot} \times n, \quad (1.1)$$

en donde θ es el desplazamiento angular del robot desde un marco de referenencia local, c_{rot} es la constante de conversión y n es el número de pasos de encoder. Si el movimiento es de traslación en línea recta entonces

$$y = c_{tras} \times n, \quad (1.2)$$

en donde y representa el desplazamiento del robot sobre el eje y en un marco de referencia local, en ambos casos $x = 0$.

Posteriormente Lara en [Lara11] aborda el problema de la extracción de características y asociación de datos en el problema de SLAM basado en el filtro extendido de Kalman. En esta tesis se determinó que la estimación odométrica era poco precisa por que la covarianza del modelo de movimiento del robot debía ser elevada para poder construir los mapas. Esto quiere decir que se tiene una fuerte incertidumbre de la posición del robot lo que afecta de forma negativa la calidad de los mapas que se generan.

Por lo tanto el problema que se aborda en esta tesis es mejorar la estimación odométrica mediante la calibración de los parámetros odométricos del robot.

1.3. Antecedentes

La odometría a pesar de su simplicidad ocupa un papel importante en muchos problemas que son estudiados por la robótica móvil. Una forma de mejorar la estimación odométrica es por medio de la calibración. A continuación se mencionaran las técnicas de calibración más importantes con una pequeña descripción

1.3.1. Antecedentes de las técnicas de calibración

Desde un punto de vista general las técnicas de calibración pueden clasificarse en técnicas fuera de línea y técnicas en línea. Las técnicas de calibración fuera de línea requieren de la interacción humana [Roy99]; en cambio las técnicas de calibración en línea son algoritmos especialmente diseñados para que el robot se calibre a si mismo. Las técnicas de calibración fuera de línea fueron las primeras en ser propuestas; donde tiene un papel muy importante la *Prueba de Marca de Referencia de la Universidad de Michigan* UMBmark (del inglés *University of Michigan Benchmark test*) propuesta por Borenstein y Feng en [Borenstein94]. Esta es la primera publicación en donde se demuestra que los errores sistemáticos de los robots de locomoción direfencial están asociados con la incertidumbre del radio de las llantas del robot y la incertidumbre del radio de la base del robot. La prueba consiste en programar al robot para que recorra una trayectoria cuadrada en sentido horario y en sentido antihorario, se mide la diferencia ente el punto inicial y el punto final de la trayectoria, también se estima la diferencia entre el área recorrida y el área estimada; con

estos datos se evalúan algunas ecuaciones diseñadas de tal forma que la forma geométrica de la trayectoria real nos permita determinar los parámetros odométricos del robot. Posteriormente en [Borenstein95] en la prueba se incluyó un giroscopio para darle una mayor precisión. Otra técnica similar es la que propone Ivanjko *et al.* en [Ivanjko07]; donde se argumenta que en algunas ocasiones la prueba UMBmark puede ser impráctica debido a que la trayectoria cuadrada puede tener dimensiones considerablemente grandes para que sea efectiva; así que proponen una trayectoria más corta. A este tipo de técnicas de calibración se les conoce como técnicas geométricas. La desventaja más notable es que no se sabe a ciencia cierta cuál es la forma geométrica que debe tener una trayectoria óptima para determinar los parámetros odométricos. Existen también técnicas de calibración fuera de línea que están basadas en el método de mínimos cuadrados. La primera técnica basada en el método de mínimos cuadrados fue propuesta por Antonelli *et al.* en [Antonelli05]. La estrategia general de estas técnicas es encontrar los valores de los parámetros odométricos que minimicen los errores entre el modelo cinemático y un conjunto de mediciones. Otra técnica de este tipo es la Papadopolous y Misailis en [Papadopolous07] donde se linealiza el modelo cinemático mediante la serie de Taylor para después formar un sistema de ecuaciones para estimar cada uno de los parámetros odométricos en forma individual. De las técnicas de calibración en línea tenemos la propuesta de Larsen *et al.* en [Larsen99] donde se propone estimar los parámetros odométricos mediante el filtro extendido de Kalman, usando las lecturas de encoder y tomando observaciones las lecturas del encoder y mediciones con sensores internos del robot que pueden ser inerciales. En ese mismo año Roy y Thrun en [Roy99] proponen una técnica de calibración estadística en línea basada en el principio de máxima verosimilitud. Posteriormente Martinelli *et al.* en [Martinelli03][Martinelli06] proponen técnicas de calibración basada en el filtro extendido de Kalman enfocada a robots con telémetro láser.

1.3.2. Antecedentes de las técnicas de localización

En esta tesis se usan las técnicas de calibración de Antonelli *et al.* en [Antonelli05] y la técnica de calibración de Papadopolous y Misailis en [Papadopolous07]. Ambas técnicas están basadas en el método de mínimos cuadrados por lo tanto requieren de un conjunto

de mediciones de la localización del robot. Las técnicas que pueden utilizarse se describen a continuación.

Localización por GPS

Una solución a este problema es usar el sistema de posicionamiento global o GPS (del inglés *Global Positioning System*). Sin embargo el GPS ha mostrado ser susceptible a electrodomesticos como hornos de microonda y las señales de los satelites no pueden penetrar a algunos edificios; por lo tanto el GPS sólo es recomendable en entornos exteriores como método de localización se recomienda unicamente para robots en entornos interiores.

Localización por medio de la triangulación de marcas

La triangulación es un método que usa la posición de tres marcas para determinar la localización del robot. Una técnica de localización de este tipo en propuesta por [Font09] en donde se propone una técnica de triangulación basada en la intersección de líneas; en este método se usan marcas artificiales para realizar la triangulación. En la figura 1.3 se muestra un diagrama de [Font09] del modelo geométrico de triangulación; l_1 , l_2 y l_3 son marcas artificiales, Ψ_1 , Ψ_2 y Ψ_3 es el ángulo de las marcas con respecto al robot y z_1 , z_2 y z_3 son mediciones que representan las distancias entre el robot y las marcas.

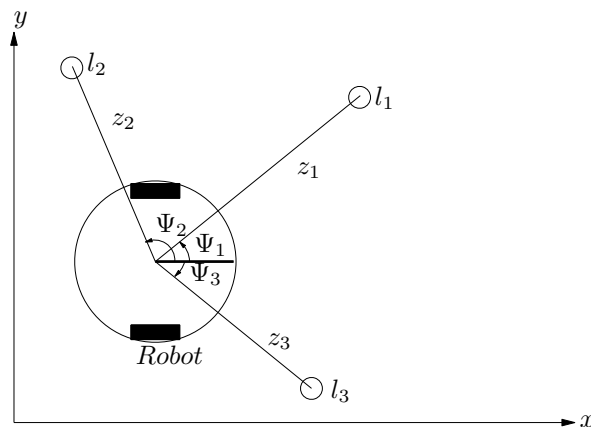


Figura 1.3: Método de localización por triangulación de marcas.

Localización y cartografía simultánea

En las técnicas de SLAM el robot utiliza las acciones de control que gobiernan el vehículo y los datos proporcionados por sensores para estimar la trayectoria y el mapa del entorno [Durrant-Whyte06].

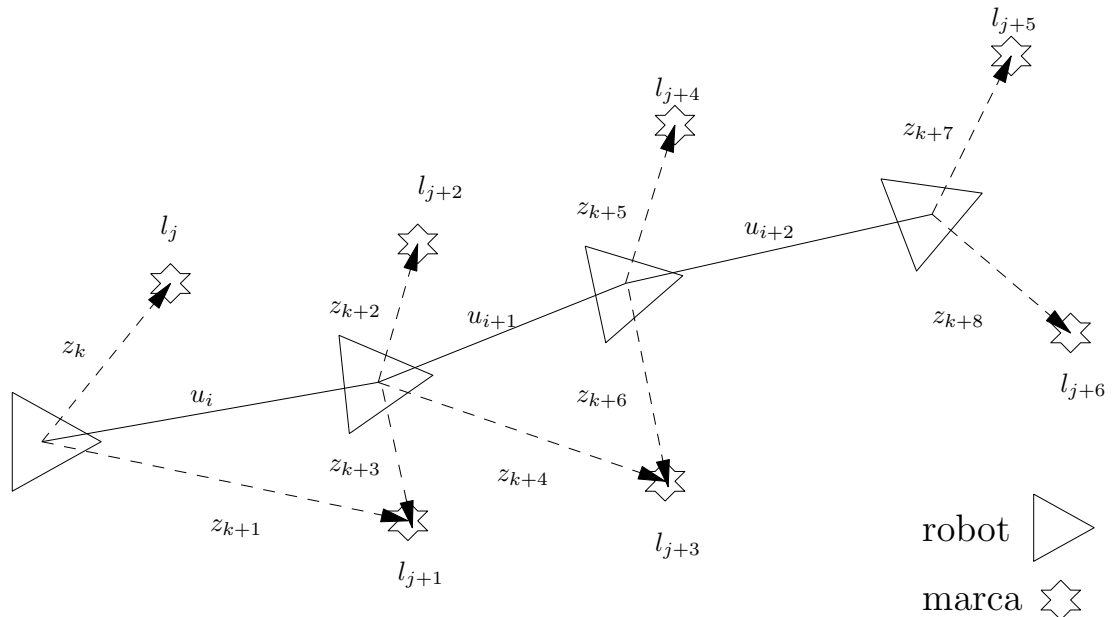


Figura 1.4: Generación de mapas y localización simultánea.

En la figura 1.4 se muestra en forma gráfica el problema de SLAM [Durrant-Whyte06]; se observa al robot explorando su entorno ejecutando una serie de acciones de control (\mathbf{u}_i). Al ejecutarse cada acción de control en el estado \mathbf{x}_{i-1} desplaza al estado \mathbf{x}_i ; así sucesivamente hasta completar una trayectoria. Mientras el robot se desplaza va tomando mediciones (\mathbf{z}_k) de los objetos en el entorno. Estos objetos se representan como marcas (\mathbf{l}_j) son representados como estructuras geométricas que fácilmente pueden ser reconocidas. Es por esta razón que en el SLAM se menciona que las mediciones que se realizan sobre las marcas. Con la información de la localización en el estado \mathbf{x}_i y con la medición \mathbf{z}_i de la marca se puede estimar la ubicación de la marca; por lo que el conjunto de marcas es por lo tanto el mapa del entorno. Un aspecto importante de la localización en el SLAM es que las marcas se usan también para retroalimentar la estimación de la localización. De manera que se pueden

obtener estimaciones de localización muy precisas.

En [Thrun05] se clasifican las técnicas de SLAM en SLAM en línea y SLAM completo. Las técnicas de SLAM en línea se caracterizan por tomar en cuenta la información del estado anterior para obtener el estimado del estado actual. Sus técnicas más representativas son: el *filtro extendido de kalman* [Chatila85] [Ayache88] [Crowley89] [Nocedal06] [Bailey02], el *filtro de partículas* [Thrun04], [Montemerlo03], y el *filtro de información* [Zhan10], [Cadena09].

En cambio el SLAM completo no solo estima el estado actual sino que cada vez que se agrega un nuevo estado se vuelve a estimar toda la trayectoria y todo el mapa, es por ello que se considera que estas técnicas son de gran escala. Algunas de las técnicas de SLAM completo son: el *SLAM basado en Grafos* [Frese05],[Olson06],[Grisetti], *SLAM basado en Mínimos Cuadrados* [Shoudong10], *SLAM basado en suavizado y cartografía* [Dellaert06] [Kaess08].

1.3.3. Antecedentes en FIE

En la FIE se cuenta con un robot de locomoción diferencial que se muestra en la figura 1.5. El robot cuenta con un motor de corriente directa sin escobillas Pittman 4441S010 en cada llanta. Cada uno de los cuales incluye un encoder óptico Hewlett-Packard con tres canales y 500 cuentas por revolución. Tiene un anillo de 16 sonares, 3 cámaras digitales Fire-i400 y un telémetro láser marca sick montado sobre un sistema de giro-inclinación (del inglés *pan-tilt*).

Con este robot se realizó el trabajo de maestría de [Vieyra04] presentado por Adrián Núñez Vieyra. Donde se lleva a cabo una reconstrucción tridimensional usando la correspondencia entre imágenes de tres cámaras de un sistema de visión estéreo trinocular integrando mediciones del telémetro láser. Posteriormente se realizó el trabajo de tesis de maestría [Arellano05] presentado por J. Jesús Arellano Pimentel. En esta tesis se abordaron los problemas de localización local y construcción de mapas 2D, así como la reconstrucción tridimensional de ambientes reales, utilizando el telémetro láser. Posteriormente se realizó el trabajo de tesis de maestría [Lara06] presentado por Carlos Aberto Lara Álvarez. En donde se propone un algoritmo tipo RANSAC para elaborar mapas de entornos interiores utilizan-



Figura 1.5: Robot desarrollado en DEPFIE.

do el telémetro láser. Posteriormente Antonio Concha [Concha07] en su tesis de maestría implementa un control de velocidad y posición de las llantas del robot. Posteriormente se realizó el trabajo de tesis doctoral [Lara11] por Carlos Alberto Lara Álvarez. En donde se propone una técnica bayesiana para la detección de marcas a partir de mediciones láser tomadas desde una posición fija. Esta técnica se implementa en un algoritmo de SLAM basado en el Filtro de Kalman.

1.4. Objetivos de la tesis

A continuación se establecen los objetivos de la tesis.

1.4.1. Objetivo general

La estimación odométrica basada en constantes odométricas supone condiciones ideales en el robot, como llantas iguales; también se ignora la velocidad angular de las llantas que pudieran afectar la dirección del robot. Así que el objetivo de esta tesis es brindar al robot de la capacidad de utilizar la información odométrica de los encoders y calibrar su modelo odométrico para mejorar la calidad de la información odométrica. La estrategia a seguir es: calibrar el modelo cinemático del robot con la información obtenida con la técnica de SLAM conocida como iSAM [Kaess08].

1.4.2. Objetivos particulares

- Brindar la capacidad al robot de la FIE para reconstruir el desplazamiento del robot con la información odométrica.
- Calibrar el robot de la FIE con las técnicas de calibración basadas en mínimos cuadrados de Antonelli [Antonelli05] y Papadopolous [Papadopolous07].
- Realizar la comparación entre dichas técnicas.

1.5. Descripción de capítulos

En el capítulo 2 se describe el modelo odométrico del robot, el proceso de reconstrucción de una trayectoria a partir los métodos de calibración. En el capítulo 3 se describen las técnicas de calibración de Antonelli *et al.* [Antonelli05] y la técnica de calibración propuesta por Papadopolous y Misailis en [Papadopolous07], también se muestran los resultados obtenidos. El capítulo 4 esta dedicado a las conclusiones resultado de la experimentación y a los trabajos futuros que pudieran derivarse. El apéndice A explica la técnica de Suavizado y Cartografía. En el apéndice B se hace una descripción del método

de mínimos cuadrados. Finalmente en el apéndice ?? se describe el comando que permite la lectura de las mediciones de los encoders.

Capítulo 2

Cinemática del robot

En este capítulo se describe la arquitectura de un robot de locomoción diferencial, se explica el modelo cinemático de este tipo de robots y por último se describe como con el modelo cinemático del robot se puede conocer la posición del robot al ejecutar una acción de control.

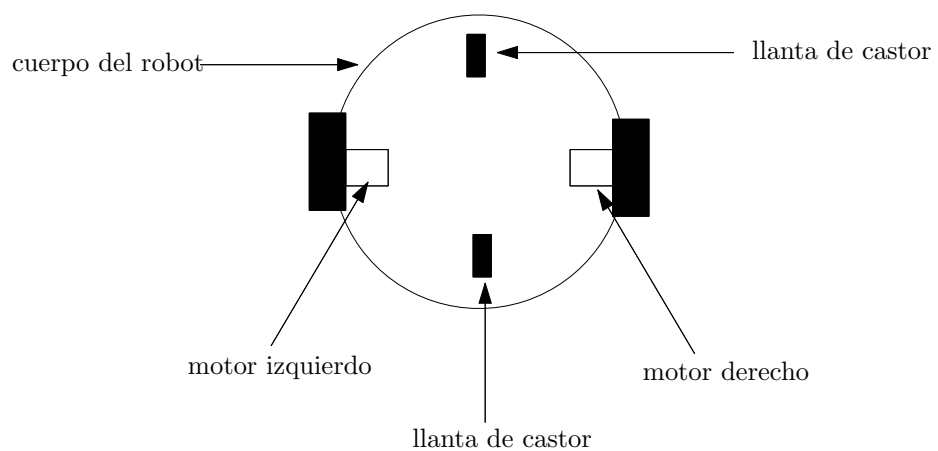


Figura 2.1: Robot de locomoción diferencial.

2.1. Robots de locomoción diferencial

Como se puede observar en la figura 2.1 los robots móviles de locomoción diferencial o DDR (del inglés Differential Drive Robots) es una arquitectura de robots que esta

conformada por un cuerpo rígido y dos llantas alineadas sobre un eje común cada una con su propio motor [Dudek00]. Típicamente cuentan también con al menos una rueda de castor para mantener el balance. Los DDR se clasifican como robots con restricciones no holonómicas; es decir que pueden rotar, moverse hacia adelante o hacia atrás pero no pueden moverse lateralmente sin cambiar su orientación. Por su diseño son fáciles de construir, pero les cuesta mantener trayectorias totalmente rectas; debido a su sensibilidad a las pequeñas variaciones en el terreno [Dudek00].

2.2. Modelo odométrico de robots de locomoción diferencial

Como se puede observar en la figura 2.2 la cinemática del robot puede representarse mediante un vector bidimensional \mathbf{v} que representa la velocidad de traslación del robot y ω que representa la velocidad con la que cambia la orientación del robot. La velocidad de orientación del robot ω se determina con la siguiente ecuación

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (2.1)$$

en donde θ es la orientación que se define como la diferencia angular entre un marco de referencia local y el marco de referencia global. La velocidad de traslación \mathbf{v} se define como

$$\mathbf{v} = \omega R \quad (2.2)$$

donde R es lo que en la literatura especializada se conoce como *radio de curvatura*. El radio de curvatura tiene su origen en un punto denominado *Centro Instantáneo de Rotación (CIR)*. De la figura 2.2 se observa que se puede calcular el radio de curvatura de la llanta derecha por medio de la siguiente ecuación

$$R_d = R + \frac{D}{2}, \quad (2.3)$$

donde D es el diámetro de la base del robot; por lo que el radio de curvatura de la llanta izquierda R_i se puede calcular con la siguiente ecuación

$$R_i = R - \frac{D}{2}. \quad (2.4)$$

La velocidad de traslación del robot orientada en la llanta derecha es

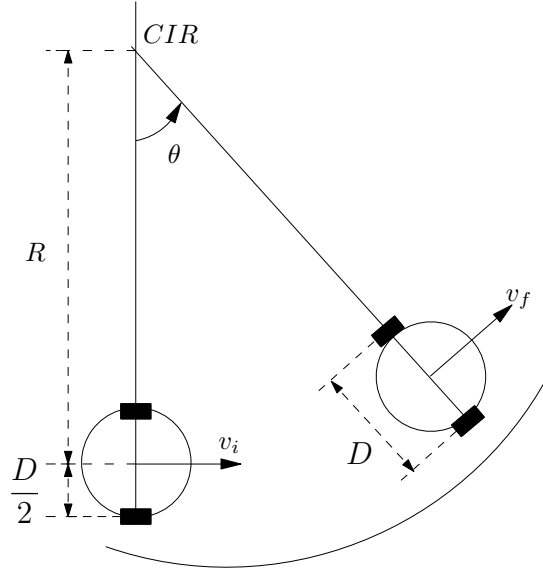


Figura 2.2: La cinemática en los DDR.

$$\mathbf{v}_d = \omega \left(R + \frac{D}{2} \right); \quad (2.5)$$

y la velocidad de traslación del robot orientada en la llanta izquierda es

$$\mathbf{v}_i = \omega \left(R - \frac{D}{2} \right); \quad (2.6)$$

al restar \mathbf{v}_d y \mathbf{v}_i , a partir de la ecuaciones 2.5 y 2.6 se tiene que

$$\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_i = \omega D; \quad (2.7)$$

de donde podemos despejar ω como se muestra a continuación

$$\omega = \frac{\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_i}{D}. \quad (2.8)$$

Igualando ω en las ecuaciones 2.5 y 2.6 se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\mathbf{v}_d}{R + \frac{D}{2}} = \frac{\mathbf{v}_i}{R - \frac{D}{2}}; \quad (2.9)$$

de donde se puede despejar R como se muestra a continuación

$$R = \frac{D(\mathbf{v}_d + \mathbf{v}_i)}{2(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_i)}. \quad (2.10)$$

Combinando las ecuaciones 2.2, 2.8 y 2.10 se obtiene la siguiente ecuación

$$\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_d)}{2}. \quad (2.11)$$

Así que con las ecuaciones 2.8 y 2.11 se puede determinar la velocidad del robot con la siguiente ecuación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{D} & \frac{-1}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_d \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

La velocidad del robot con referencia cada una de las llantas puede determinarse con el producto del radio de las llantas por su velocidad angular; de manera que se puede reescribir a la ecuación 2.12 como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_d}{2} & \frac{r_i}{2} \\ \frac{r_d}{D} & \frac{-r_i}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_d \\ \omega_i \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

aquí ω_d y ω_i son la velocidad angular de la llanta derecha e izquierda respectivamente. A esta última ecuación se le conoce como modelo cinemático del robot. Para facilitar la notación en [Antonelli05] la ecuación 2.13 se reescribe en la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \omega_d \\ \omega_i \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

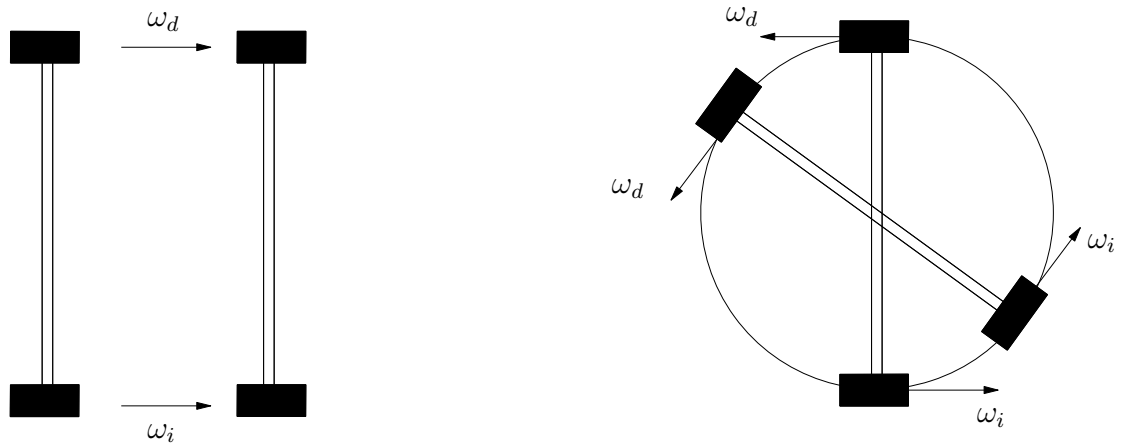
en donde C es la matriz de parámetros que se define como

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_d}{2} & \frac{r_i}{2} \\ \frac{r_d}{D} & \frac{-r_i}{D} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

El modelo cinemático nos permite definir las siguientes acciones de control:

- El desplazamiento en línea Recta: en este caso las llantas deben de mantener la misma velocidad y dirección $\omega_d = \omega_i$ figura 2.3(a). Al evaluar estos valores en la ecuación 2.13 tenemos que la velocidad de rotación (ω) se anula. Con la componente de traslación (\mathbf{v}) como la única velocidad sobre el robot. En ningún momento se produce un cambio de dirección, así que la trayectoria es en línea recta.
- Rotación del robot: en este caso las llantas del robot deben girar con la misma velocidad pero en sentido opuesto $\omega_d = -\omega_i$ figura 2.3(b). Al sustituir estos valores en la

ecuación 2.13 la velocidad de traslación (\mathbf{v}) se anula; por lo que el robot rotará sobre su propio eje.



(a) *Desplazamiento en línea recta, donde $\omega_d = \omega_i$.*

(b) *Rotación, donde $\omega_d = -\omega_i$.*

Figura 2.3: Acciones de control de los robots de locomoción diferencial

2.3. Proceso odométrico

Este proceso consiste en determinar la posición y orientación del robot a partir de la velocidad angular de sus llantas. Con la ecuación 2.13 se obtiene la velocidad del robot de traslación \mathbf{v} y de rotación ω ; sin embargo para determinar la posición del robot en el plano es necesario descomponer al vector \mathbf{v} en las componentes de velocidad \dot{x} y \dot{y} como se observa en la figura 2.4; entonces \dot{x} y \dot{y} se determinan con la siguiente ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cos\theta \\ \mathbf{v} \sen\theta \\ \omega \end{bmatrix}; \quad (2.16)$$

note que en esta ecuación $\dot{\theta}$ y ω son equivalentes; a la ecuación 2.16 en la literatura se le conoce como ecuación cinemática de robot. La posición del robot en el instante de tiempo

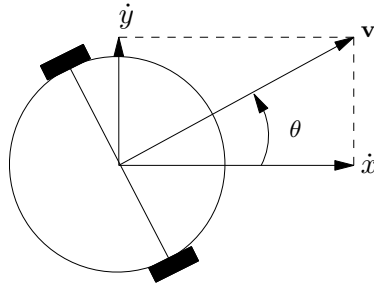


Figura 2.4: Descomposición del vector de velocidad \mathbf{v} .

$T \times (k + 1)$, en donde T es el período de muestreo, se determina por medio de las siguientes ecuaciones

$$x_{k+1} = x_k + \int_0^T \mathbf{v}(t) \cos(\theta(t)) dt, \quad (2.17)$$

$$y_{k+1} = y_k + \int_0^T \mathbf{v}(t) \sin(\theta(t)) dt, \quad (2.18)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \int_0^T \omega(t) dt; \quad (2.19)$$

en estas últimas tres ecuaciones se resuelven las integrales con la regla del punto medio, que se define por la siguiente ecuación

$$\int_{(k)T}^{(k+1)T} f(t) dt = T f((k + (k + 1)T)/2); \quad (2.20)$$

por lo tanto las ecuaciones 2.17, 2.18 y 2.19 se pueden reescribir como se muestra a continuación

$$x_{k+1} = x_k + T \mathbf{v}_k \cos(\theta_k + T\omega_k/2), \quad (2.21)$$

$$y_{k+1} = y_k + T \mathbf{v}_k \sin(\theta_k + T\omega_k/2), \quad (2.22)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + T\omega_k; \quad (2.23)$$

cómo $\mathbf{v}_k = (c_{1,1}\omega_{d,k} + c_{1,2}\omega_{i,k})$ y $\omega_k = (c_{2,1}\omega_{d,k} - c_{2,2}\omega_{i,k})/D$ las ecuaciones; la posición final del robot después de K muestras es calculada mediante las siguientes sumatorias

$$x_K = x_0 + T \sum_{k=0}^{K-1} (c_{1,1}\omega_{d,k} + c_{1,2}\omega_{i,k}) \cos(\theta_k + T\omega_k/2), \quad (2.24)$$

$$y_K = y_0 + T \sum_{k=0}^{K-1} (c_{1,1}\omega_{d,k} + c_{1,2}\omega_{i,k}) \sen(\theta_k + T\omega_k/2), \quad (2.25)$$

$$\theta_K = \theta_0 + T \sum_{k=0}^{K-1} (c_{2,1}\omega_{d,k} - c_{2,2}\omega_{i,k}). \quad (2.26)$$

El proceso odométrico se muestra el diagrama a bloques de la figura 2.5; inicia al obtener muestras de la velocidad angular de las llantas del robot ω_d, ω_i via encoder; posteriormente al multiplicar $[\omega_d, \omega_i]^t$ por la matriz de parámetros C se obtiene la velocidad del robot v, ω ; posteriormente se descompone el vector de velocidad $[v, \omega]^t$ en el vector de velocidad $\dot{x} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}]^t$; al aplicar la integral definida durante con respecto al tiempo al vector de velocidad \dot{x}

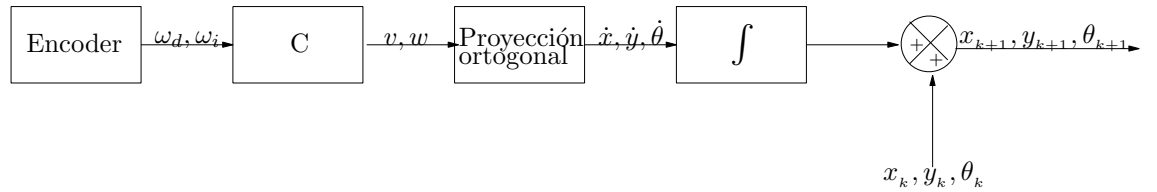


Figura 2.5: Proceso odométrico, diagrama a bloques.

A continuación se describe cuales fueron los pasos que se siguieron para implementar el proceso odométrico en el robot de la FIE.

2.4. Implementación del proceso odométrico

El robot de la FIE tiene un microcontrolador 9S12DP256 que controla el movimiento de sus llantas; sin embargo este microcontrolador responde a las ordenes que se le envían a través del puerto serial desde una computadora. Este microcontrolador no contaba con una instrucción ni tampoco una rutina con la que se pudieran obtener lecturas de los encoders de forma periódica, por lo que fue necesario programarla. El algoritmo 1 describe la rutina

implementada en el microcontrolador; los puertos PA0 y PA1 del microcontrolador están conectados a las salidas de cada encoder y están configurados para acumular automáticamente cada pulso. Los registros donde se acumulan los pulsos de cada puerto se les nombra como *LEFT_AC* y *RIGHT_AC* refiriéndose al encoder izquierdo y derecho respectivamente. El microcontrolador tiene programada una interrupción que ocurre cada milisegundo; en

Algoritmo 1: Algoritmo para obtener muestras de velocidad a través de los encoders.

Entrada: nula

Salida: lecturas

- 1 **Cada 1ms hacer**
- 2 $cuentas[0] \leftarrow cuentas[0] + (LEFT_AC - LEFT_AN)$
- 3 $cuentas[1] \leftarrow cuentas[1] + (RIGHT_AC - RIGHT_AN)$
- 4 $i \leftarrow i + 1$
- 5 $LEFT_AN \leftarrow LEFT_AC$
- 6 $RIGHT_AN \leftarrow RIGHT_AC$
- 7 **si** ($i == 10$) **entonces**
- 8 $lecturas[k] \leftarrow cuentas[0]$
- 9 $lecturas[k+1] \leftarrow cuentas[1]$
- 10 $cuentas[0] \leftarrow 0$
- 11 $cuentas[1] \leftarrow 0$
- 12 $i \leftarrow 0$
- 13 $k \leftarrow k + 2$
- 14 **si** $k > 103$ **entonces**
- 15 $k \leftarrow 0$
- 16 inicializar(*lecturas*)
- 17 **finSi**
- 18 **finSi**
- 19 **fin Cada**
- 20 **regresa** lecturas

donde se acumula en el arreglo *cuentas* los pasos de encoder que se registraron en dicho milisegundo. Las variables *LEFT_AC* y *RIGHT_AC* no se pueden modificar ya que son utilizadas por el algoritmo de control; por lo tanto se declaran dos variables temporales *LEFT_AN* y *RIGHT_AN* que almacenan la cantidad de pasos de encoder acumulados en el milisegundo anterior; de manera que la diferencia entre *LEFT_AC* y *LEFT_AN* da como resultado el número de cuentas de encoder que avanza cada llanta en un milisegundo. Después de diez interrupciones o diez milisegundos los pasos de encoder acumulados se almacenan en el arreglo *lecturas*; las mediciones correspondientes a al encoder izquierdo tienen un índice par y las del encoder derecho índice impar; ya que se almacena de forma intercalada una medición del encoder izquierdo y una medición del encoder derecho. El arreglo *lecturas* tiene una dimensión de 104 caracteres, de manera que se pueden almacenar hasta 52 mediciones de cada encoder. La función inicializar asigna el caracter nulo a todo el arreglo *lecturas* para inicializarlo.

Para obtener el contenido del arreglo *lecturas* desde la computadora se envía el comando “o” $\langle /n \rangle$ hacia el microcontrolador. Este comando ordena en al microcontrolador ejecutar una pequeña función llamada *odometer* que envía el contenido del arreglo *lecturas* a la computadora hasta encontrar un caracter nulo. Del lado de la computadora debe de haber una lista ligada o un vector que almacene los caracteres. Cuando el microcontrolador detecta el paro de los motores almacena en el arreglo *lecturas* el caracter “f” para indicar que no habrá más mediciones.

Para obtener todas las mediciones que se producen durante un movimiento es necesario programar un timer en la computadora para que cada 5000ms como máximo se envíe el comando “o” $\langle /n \rangle$ hacia el microcontrolador; de manera que cada caracter que se recibe se inserta en una lista ligada hasta recibir un caracter nulo; este proceso continua hasta recibir “f” que indica el paro de los motores y por lo tanto también debe detenerse el timer.

Al obtener el número de pasos de encoder cada 10ms se puede obtener la velocidad angular del robot con una constante de conversión; la constante de conversión en este caso es el desplazamiento angular de las llantas equivalente a cada paso de encoder, que en [Concha07] se determinó esta constante con el siguiente valor

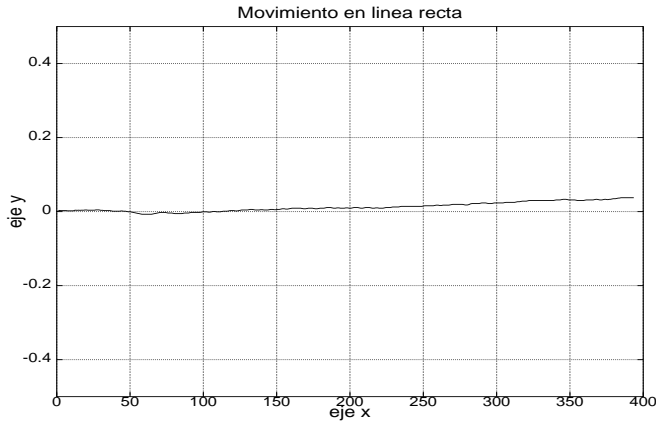


Figura 2.6: Desplazamiento de traslación en línea recta.

$$cte_{\omega} = 0.8803654 \text{ rad/s}; \quad (2.27)$$

así que $\omega_{d,k}$ se determina por

$$\omega_d = cte_{\omega} \times \text{pasos_encoder_derecho} \quad (2.28)$$

y $\omega_{i,k}$ se determina por

$$\omega_{i,k} = cte_{\omega} \times \text{pasos_encoder_izquierdo} \quad (2.29)$$

en donde k es el subíndice que indica el instante en el que se tomó la muestra. Con el diámetro de la base $D = 400 \text{ mm}$, con el radio de la llanta derecha es $r_d = 75 \text{ mm}$ y con el radio de la llanta izquierda $r_i = 75 \text{ mm}$ se tiene la siguiente matriz de parámetros

$$C = \begin{bmatrix} 37.5 & 37.5 \\ 0.189873417 & -0.189873417 \end{bmatrix}; \quad (2.30)$$

dando la acción de control de 600 pasos de encoder para que el robot avance en línea recta aproximadamente 400 mm se obtiene la reconstrucción odométrica de la figura 2.6. La reconstrucción odométrica de la acción de control de 242 pasos de encoder para que el robot rote aproximadamente $\pi/4$ radianes se muestra en la figura 2.7.

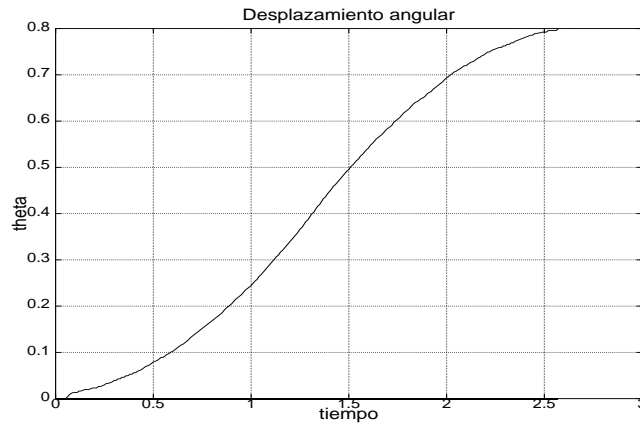


Figura 2.7: Desplazamiento angular.

2.5. **Discusión**

Del modelo cinemático del robot se observa que la velocidad del robot puede determinarse a partir de la velocidad angular de las llantas del robot. Si se conoce la velocidad del robot a lo largo de un movimiento se puede determinar el desplazamiento que sufre el robot; a esta metodología se le conoce como proceso odométrico. Algo que también es importante recalcar es que la velocidad del robot tiene una relación directa con sus parámetros odométricos; esta relación es evidente en la ecuación 2.13.

Capítulo 3

Técnicas de calibración

En este capítulo se describen las técnicas de calibración odométrica basadas en el método de mínimos cuadrados. En la sección 3.1 se describe la técnica propuesta por Antonelli *et al.* en [Antonelli05]; posteriormente en la sección 3.2 se describe la técnica propuesta por Papadopolous y Misailis en [Papadopolous07]. En la sección 3.3 se describe el proceso de calibración propuesto y en la sección 3.4 se muestran los resultados obtenidos.

3.1. Calibración odométrica por método de Antonelli

En la ecuación 2.14 en el modelo cinemático del robot se define una matriz C en donde

$$c_{1,1} = \frac{r_d}{2}, c_{1,2} = \frac{r_i}{2} \quad (3.1)$$

$$c_{2,1} = \frac{r_d}{D}, c_{2,2} = -\frac{r_i}{D}; \quad (3.2)$$

en cada c_{ij} se puede observar que los parámetros odométricos r_d , r_i y D tienen una relación matemática no lineal; por lo tanto determinar los parámetros odométricos es un problema no lineal. Para linealizar este problema Antonelli *et al.* sugieren en [Antonelli05] calcular todos los elementos $c_{i,j}$ en lugar de los tres parámetros odométricos, ya que el resultado numérico es el mismo.

A continuación se explica como es que se forma el sistema de ecuaciones para estimar $c_{1,1}$ y $c_{1,2}$. La rotación del robot durante un movimiento se puede estimar a partir

de la ecuación 2.26 en la siguiente forma

$$\theta_K - \theta_0 = T c_{2,1} \sum_{k=0}^{K-1} \omega_{d,k} + T c_{2,2} \sum_{k=0}^{K-1} \omega_{i,k}; \quad (3.3)$$

en donde θ_K es la medición final de la orientación y θ_0 es la medición inicial de la orientación inicial. Para simplificar la notación se define el vector $\Phi_\theta \in \mathbb{R}^2$ como

$$\phi_\theta = \left[T \sum_{k=0}^{K-1} \omega_{d,k} \quad T \sum_{k=0}^{K-1} \omega_{i,k} \right]; \quad (3.4)$$

con ϕ_θ se puede establecer la siguiente ecuación

$$\Delta\theta = \theta_K - \theta_0 = \phi_\theta \begin{bmatrix} c_{2,1} \\ c_{2,2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

aquí $\Delta\theta$ es el desplazamiento angular durante un movimiento. Si el robot realiza una trayectoria con P movimientos se puede construir el vector

$$\Delta_\Phi = \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\theta_{P-1} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

en donde $\Phi_\theta \in \mathbb{R}^{P-1}$, con el que se puede construir es siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \phi_{\theta 1} \\ \phi_{\theta 2} \\ \vdots \\ \phi_{\theta P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{2,1} \\ c_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\theta_{P-1} \end{bmatrix}; \quad (3.7)$$

este sistema de ecuaciones al estar sobredeterminado puede resolverse por medio de la pseudoinversa que se describe en el apéndice o mediante factorización QR como se describe en [Nocedal06]. Al solucionar el sistema 3.7 se obtienen los elementos $c_{2,1}$ y $c_{2,2}$ relacionados con el desplazamiento angular del robot. Para encontrar los elementos $c_{1,1}$ y $c_{1,2}$ se busca establecer un sistema de ecuaciones; a partir de las ecuaciones 2.24 y 2.25 se puede estimar

el desplazamiento de traslación como se muestra a continuación

$$\Delta x = x_K - x_0 = T \sum_{n=0}^{K-1} c_{1,1} \omega_{d,k} \cos(\theta_k + T\omega_k/2) + T \sum_{k=0}^{K-1} c_{1,2} \omega_{i,k} \cos(\theta_k + T\omega_k/2) \quad (3.8)$$

$$\Delta y = x_K - x_0 = T \sum_{n=0}^{K-1} c_{1,1} \omega_{d,k} \sin(\theta_k + T\omega_k/2) + T \sum_{k=0}^{K-1} c_{1,2} \omega_{i,k} \sin(\theta_k + T\omega_k/2) \quad (3.9)$$

si se define una matriz ϕ_{xy} de 2×2 a partir de las ecuaciones 3.8 y 3.9 de la siguiente forma

$$\phi_{xy} = \begin{bmatrix} T \sum_{n=0}^{K-1} \omega_{d,k} \cos(\theta_k + T\omega_k/2) & T \sum_{k=0}^{K-1} \omega_{i,k} \cos(\theta_k + T\omega_k/2) \\ T \sum_{n=0}^{K-1} \omega_{d,k} \sin(\theta_k + T\omega_k/2) & T \sum_{k=0}^{K-1} \omega_{i,k} \sin(\theta_k + T\omega_k/2) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\Phi_{x,y} \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Al realizar el robot una trayectoria con P movimientos se forma un vector de mediciones se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \phi_{xy1} \\ \phi_{xy2} \\ \vdots \\ \phi_{xyP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta x_{P-1} \\ \Delta y_{P-1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

este sistema al ser sobredeterminado se puede resolverse mediante la pseudoinversa; note que deben estimarse $c_{2,1}$ y $c_{2,2}$ para poder determinar θ_k y ω_k .

3.2. Calibración odométrica por método de Papadopolous

Para la estrategia propuesta por Papadopolous se reescribe la ecuación cinemática del robot 2.16 en la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega_d r_d + \omega_i r_i}{2} \right) \cos(\theta) \\ \left(\frac{\omega_d r_d + \omega_i r_i}{2} \right) \text{sen}(\theta) \\ \frac{\omega_d r_d - \omega_i r_i}{D} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

y [Papadopolous07] se define un vector de parámetros $\mathbf{h} = [r_d, r_i, D]^t$. Si en la ecuación 3.13 se conoce en cada instante ω_d , ω_i y θ pero se desconocen los parámetros odométricos del vector \mathbf{h} ; se puede considerar que en un instante definido la velocidad del robot en el plano $\dot{\mathbf{x}}$ está en función de \mathbf{h} , es decir

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{h}); \quad (3.14)$$

linealizando $f(\mathbf{h})$ mediante la expansión de la serie de Taylor de primer orden se obtiene

$$f(\mathbf{h}) \approx f(\mathbf{h}_0) + \nabla f(\mathbf{h}_0) \delta \mathbf{h}, \quad (3.15)$$

en donde $\delta \mathbf{h}$ se define como

$$\delta \mathbf{h} = \begin{bmatrix} r_d - r_{d0} \\ r_i - r_{i0} \\ D - D_0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

aquí r_{d0} , r_{i0} y D_0 son los valores del punto inicial, que en este caso se toma como punto inicial las dimensiones nominales de los parámetros odométricos del robot. Si se obtiene una medición de la velocidad del robot que denotaremos $\dot{\mathbf{x}}_{medido}$ se puede establecer la siguiente ecuación

$$\dot{\mathbf{x}}_{medido} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \nabla f(\mathbf{h}_0) \delta \mathbf{h}. \quad (3.17)$$

Siendo que el error de velocidad se define como

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_{medido} - \dot{\mathbf{x}}_0; \quad (3.18)$$

se puede obtener el error $\delta \dot{\mathbf{x}}$ al despejarlo de la ecuación 3.17 como se muestra a continuación

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{h}_0) \delta \mathbf{h}; \quad (3.19)$$

desarrollando el jacobiano $\nabla f(\mathbf{h}_0)$ con la ecuación 3.13 se obtiene

$$\nabla f(\mathbf{h}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\omega_d}{2} \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_d r_{d0}}{D_0} & \frac{\omega_i}{2} \cos\theta + v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_i r_{i0}}{D_0} & v \operatorname{sen}\theta \frac{\theta}{D_0} \\ \frac{\omega_d}{2} \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta \frac{\omega_d r_{d0}}{D_0} & \frac{\omega_i}{2} \operatorname{sen}\theta - v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_i r_{i0}}{D_0} & -v \cos\theta \frac{\theta}{D_0} \\ \frac{\omega_d}{D_0} & -\frac{\omega_i}{D_0} & -\frac{\omega}{D_0} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

note que para simplificar la notación en esta última ecuación $(\omega_d r_{d0} + \omega_i r_{i0})/2$ se reemplaza por v y $(\omega_d r_{d0} - \omega_i r_{i0})/D_0$ se reemplaza por ω . Sustituyendo la ecuación 3.20 en la ecuación 3.19 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\delta \dot{x} = \frac{\omega_d}{2} \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_d r_{d0}}{D_0} (\delta r_d) + \frac{\omega_i}{2} \cos\theta + v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_i r_{i0}}{D_0} (\delta r_i) + v \operatorname{sen}\theta \frac{\theta}{D_0} (\delta D), \quad (3.21)$$

$$\delta \dot{y} = \frac{\omega_d}{2} \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta \frac{\omega_d r_{d0}}{D_0} (\delta r_d) + \frac{\omega_i}{2} \operatorname{sen}\theta - v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_i r_{i0}}{D_0} (\delta r_i) - v \cos\theta \frac{\theta}{D_0} (\delta D), \quad (3.22)$$

$$\delta \dot{\theta} = \frac{\omega_d}{D_0} (\delta r_d) - \frac{\omega_i}{D_0} (\delta r_i) - \frac{\omega}{D_0} (\delta D). \quad (3.23)$$

Para calcular $\delta \mathbf{x}$ las se integra en el tiempo a las funciones que definen a los elementos $\delta \dot{\mathbf{x}}$ como se muestra a continuación

$$\delta x_{k+1} = x_k + \int_{T(k)}^{T(k+1)} \frac{\omega_d}{2} \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_d r_{d0}}{D_0} (\delta r_d) + \frac{\omega_i}{2} \cos\theta + v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_i r_{i0}}{D_0} (\delta r_i) + v \operatorname{sen}\theta \frac{\theta}{D_0} (\delta D), \quad (3.24)$$

$$\delta y_{k+1} = y_k + \int_{T(k)}^{T(k+1)} \frac{\omega_d}{2} \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta \frac{\omega_d r_{d0}}{D_0} (\delta r_d) + \frac{\omega_i}{2} \operatorname{sen}\theta - v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_i r_{i0}}{D_0} (\delta r_i) - v \cos\theta \frac{\theta}{D_0} (\delta D), \quad (3.25)$$

$$\delta \theta_{k+1} = \theta_k + \int_{T(k)}^{T(k+1)} \frac{\omega_d}{D_0} (\delta r_d) - \frac{\omega_i}{D_0} (\delta r_i) - \frac{\omega}{D_0} (\delta D), \quad (3.26)$$

en donde T es el período de muestreo, note que δr_d , δr_i y δD no dependen del tiempo por lo que quedan como constantes ; entonces la posición final de un movimiento con K muestras se obtiene por medio de una sumatoria de integrales donde se puede definir una matriz A de 3×3 en la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{K-1} \int_{T_k}^{T(k+1)} \frac{\omega_d}{2} \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_d r_{d0}}{D_0} & \sum_{k=1}^{K-1} \int_0^T \frac{\omega_i}{2} \cos\theta + v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_i r_{i0}}{D_0} & \sum_{k=1}^{K-1} \int_0^T v \operatorname{sen}\theta \frac{\theta}{D_0} \\ \sum_{k=1}^{K-1} \int_{T_k}^{T(k+1)} \frac{\omega_d}{2} \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta \frac{\omega_d r_{d0}}{D_0} & \sum_{k=1}^{K-1} \int_0^T \frac{\omega_i}{2} \operatorname{sen}\theta - v \operatorname{sen}\theta \frac{\omega_i r_{i0}}{D_0} & \sum_{k=1}^{K-1} \int_0^T -v \cos\theta \frac{\theta}{D_0} \\ \sum_{k=1}^{K-1} \int_{T_k}^{T(k+1)} \frac{\omega_d}{D_0} & \sum_{k=1}^{K-1} \int_0^T -\frac{\omega_i}{D_0} & \sum_{k=1}^{K-1} \int_0^T -\frac{\omega}{D_0} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

de manera que $\delta \mathbf{x}$ se puede estimar con la siguiente ecuación

$$\delta \mathbf{x} = A \delta \mathbf{h}, \quad (3.28)$$

en donde si se resuelven estas integrales mediante la regla del punto medio (definida por ecuación 2.20) cada elemento $a_{i,j}$ se obtiene como se muestra a continuación

$$a_{1,1} = \sum_{k=1}^K \frac{T\omega_{d,k}}{2} \cos\left(\theta_k + \frac{T\omega}{2}\right) - (Tv) \sin\left(\theta_k + \frac{T\omega}{2}\right) \frac{\omega_{d,k} r_d}{D} \quad (3.29)$$

$$a_{1,2} = \sum_{k=1}^K \frac{T\omega_{i,k}}{2} \cos\left(\theta_k + \frac{T\omega}{2}\right) + (Tv) \sin\left(\theta_k + \frac{T\omega}{2}\right) \frac{\omega_{d,k} r_d}{D} \quad (3.30)$$

$$a_{1,3} = \sum_{k=1}^K (Tv) \sin\left(\theta_k + \frac{T\omega}{2}\right) \frac{\theta_k + \frac{T\omega}{2}}{D} \quad (3.31)$$

$$a_{2,1} = \sum_{k=1}^K \frac{T\omega_{d,k}}{2} \sin\left(\theta_k + \frac{T\omega}{2}\right) + (Tv) \cos\left(\theta_k + \frac{T\omega}{2}\right) \frac{\omega_{d,k} r_d}{D} \quad (3.32)$$

$$a_{2,2} = \sum_{k=1}^K \frac{T\omega_{i,k}}{2} \sin\left(\theta_k + \frac{T\omega}{2}\right) - (Tv) \cos\left(\theta_k + \frac{T\omega}{2}\right) \frac{\omega_{d,k} r_d}{D} \quad (3.33)$$

$$a_{2,3} = \sum_{k=1}^K -(Tv) \cos\left(\theta_k + \frac{T\omega}{2}\right) \frac{\theta_k + \frac{T\omega}{2}}{D} \quad (3.34)$$

$$a_{3,1} = \sum_{k=1}^K T\omega_{d,k} \quad (3.35)$$

$$a_{3,2} = \sum_{k=1}^K -T\omega_{i,k} \quad (3.36)$$

$$a_{3,3} = \sum_{k=1}^K -\frac{T\omega}{D}. \quad (3.37)$$

después de una trayectoria con P movimientos se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_d \\ \delta r_i \\ \delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_1 \\ \delta \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \delta \mathbf{x}_P \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

este sistema al estar sobredeterminado puede resolverse mediante la pseudoinversa (ver apéndice B.3). Al determinar $\delta\mathbf{R}^*$ los parámetros odométricos se estiman en la siguiente forma

$$r_d = r_{d0} + \delta r_d^*, \quad (3.39)$$

$$r_i = r_{i0} + \delta r_i^*, \quad (3.40)$$

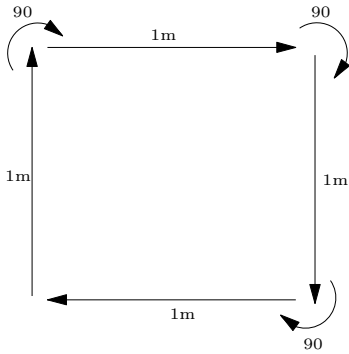
$$D = D_0 + \delta D^*; \quad (3.41)$$

con cada uno de estos parámetros se forma la matriz C de parámetros del modelo odométrico.

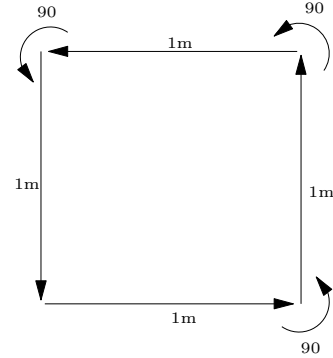
3.3. Proceso de calibración propuesto

El proceso de calibración que se propone en esta tesis inicia cuando el robot realiza una trayectoria formada por dos trayectorias cuadradas una en sentido de horario y otra en sentido antihorario, como se muestra en las figuras 3.1(b) y 3.1(a). La trayectoria cuadrada consiste en realizar tres rotaciones y cuatro desplazamientos de manera que el robot describe una trayectoria con una forma geométrica cuadrada. En [Antonelli05] se menciona que esta trayectoria nos brinda información de todos los movimientos que el robot puede realizar: la traslación en línea recta hacia adelante y hacia atrás, la rotación en dirección de las manecillas del reloj y en contra de las manecilla del reloj. Al realizar la trayectoria el robot obtiene un conjunto de mediciones de velocidad de las llantas $\Omega = \{W_1, W_2, \dots, W_p, \dots, W_P\}$ en donde W_p es el conjunto de mediciones de velocidad de la llanta derecha e izquierda en el p -ésimo movimiento; también un conjunto de mediciones crudas RW para la técnica de localización.

Posteriormente el conjunto de mediciones crudas RW se procesan con la técnica de localización obteniéndose el conjunto de mediciones de localización $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_P\}$, en donde $\mathbf{x}_p = [x_p, y_p, \theta_p]^t$. En la sección 1.3 se mencionan algunas técnicas de localización como: la localización por GPS, la localización por triangulación o SLAM. La localización por GPS no es una buena opción debido a que en entornos interiores puede tener interferencia o puede simplemente no recibirse señal de los satélites por la densidad de los muros de los



(a) Trayectoria en dirección antihoraria.



(b) Trayectoria en dirección horaria.

Figura 3.1: Trayectoria cuadrada en ambos sentidos.

edificios [Grisetti10]. Tanto las técnicas de triangulación como las técnicas de SLAM pueden ser adecuadas para calibrar al robot; sin embargo la apuesta es que en el futuro los robots tendrán implementada una técnica de SLAM, tal como se muestra en el diagrama de la figura 1.2 de la sección 1. Por lo tanto en esta tesis se utiliza una técnica de SLAM llamada *suavizado y cartografía incremental* o iSAM (del inglés *Incremental Smooth and Mapping*) esta técnica es explicada con detalle en el apéndice A.

Posteriormente al obtener el conjunto de mediciones de localización X mediante iSAM y el conjunto de mediciones de la velocidad del robot en cada movimiento de la trayectoria Ω se forma el sistema de ecuaciones definido por las ecuaciones 3.7 y 3.12 para el método de calibración de Antonelli *et al.* y el sistema de ecuaciones definido por la ecuación 3.38 para el método de Papadopolous y Misailis.

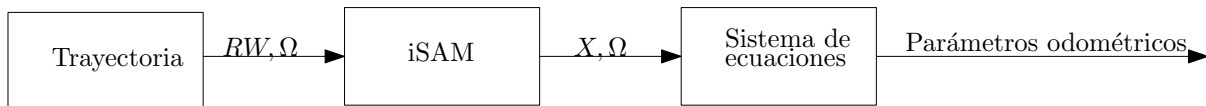


Figura 3.2: Proceso de calibración diagrama a bloques.

3.4. Resultados obtenidos

Se estima la matriz de parámetros odométricos con los valores nominales de los parámetros odométricos del robot; posteriormente se implementa el proceso de calibración mostrado en la figura 3.2 con el método de calibración de propuesto en [Antonelli05] y [Papadopolous07].

Las dimensiones nominales de los parámetros de odometría son: $400mm$ de diámetro en la base D y $75mm$ de radio en cada llanta r_d , r_i . Entonces la matriz de parámetros del modelo nominal es el siguiente

$$C_0 = \begin{bmatrix} 37.5 & 37.5 \\ 0.189873417 & -0.189873417 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Al implementar el proceso de calibración de la figura 3.2 con el método de calibración de Antonelli *et al.* se obtiene la siguiente matriz de parámetros

$$C_1 = \begin{bmatrix} 38.81687 & 38.90997 \\ 0.19073 & -0.19089 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Al implementar el proceso de calibración de la figura 3.2 con el método de calibración de Papadopolous y Misailis se obtienen los siguientes parámetros odométricos

$$r_d = 78.613142mm$$

$$r_i = 78.841121mm$$

$$D = 412.814892mm$$

por lo que la matriz de parámetros es

$$C_2 = \begin{bmatrix} 39.35657 & 39.42056 \\ 0.190430 & -0.190988 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Note que en la matriz C_1 como en la matriz C_2 tenemos que la rueda izquierda es ligeramente más grande.

Para determinar cual es el método de calibración del que se obtienen mejores estimaciones odométricas se hace la siguiente prueba: se ordena al robot que recorra un movimiento de 15145 de pasos de encoder; con las matrices de parámetros C_0 , C_1 y C_2 se

realiza la estimación odométrica y se comparan con las mediciones de localización obtenida mediante iSAM. El error para el movimiento de traslación se define como

$$Error_{tras} = \sqrt{(\overline{x_{medida}} - \overline{x_{odometria}})^2 + (\overline{y_{medida}} - \overline{y_{odometria}})^2} \quad (3.45)$$

en donde $\overline{x_{medida}}$ es el promedio de las mediciones del desplazamiento sobre el eje x tomada mediante la técnica iSAM, $\overline{x_{odometria}}$ es el promedio de la trayectoria reconstruida con el proceso odométrico, $\overline{y_{medida}}$ es el promedio de las mediciones del desplazamiento sobre el eje y tomada mediante la técnica iSAM $\overline{y_{odometria}}$ es el promedio de la trayectoria reconstruida con el proceso odométrico. El error de traslación para el modelo nominal es:

$$Error_{tras} = 450.25511mm \quad (3.46)$$

para el modelo propuesto por Antonelli *et al.*

$$Error_{tras} = 62.5554mm \quad (3.47)$$

para el modelo propuesto por Papadopolous y Misailis

$$Error_{tras} = 162.5554mm \quad (3.48)$$

3.5. Discusión

El método de calibración de Antonelli *et al.* aprovecha la matriz de parámetros para linealizar el modelo cinemático del robot en cambio Papadopolous y Misailis linealizan mediante la expansión de la serie de Taylor para poder obtener los parámetros odométricos. Otra diferencia importante entre estas técnicas es que la técnica de Papadopolous y Misailis es que aquí se estima el error entre la trayectoria real contra la trayectoria estimada para posteriormente sumar este error a un punto inicial para obtener los valores reales de los parámetros odométricos. También se puede observar que el mejor método fue de Antonelli.

Capítulo 4

Conclusiones

4.1. Conclusiones generales

Es evidente que el método de calibración que nos brinda los mejores parámetros odométricos es el propuesto por de Antonelli *et al.* en [Antonelli05]; este método es evidentemente menos elaborado que el método de Papadopolous y Misailis en donde se linealiza el modelo cinemático del robot mediante la expansión de la serie de Taylor; esta expansión de serie de Taylor es francamente innecesaria ya que como se muestra en [Antonelli05] con la matriz de parámetros C el problema es lineal. Otros problemas que son evidentes en el método de Papadopolous y Misailis es que se requiere de un punto inicial que puede estar alejado del valor real de los parámetros odométricos, esta cuestión puede afectar la convergencia del método; este método puede acarrear más errores numéricos al emplear un mayor número de integrales numéricas en comparación con el de Antonelli.

Experimentalmente se pudo corroborar que la incertidumbre en las dimensiones de las llantas y de la base del robot determinan los errores sistemáticos del robot. Por ejemplo la diferencia en el tamaño de los radios de las llantas originan una desviación en la trayectoria del robot; desviación que se va acumulando con el paso del tiempo.

Cabe mencionar que se ha encontrado que cuando las llantas de castor giran la fricción con el suelo crea una componente de fuerza que provoca una ligera desviación en la dirección del robot. En [Papadopolous07] se menciona que este efecto es sumamente difícil

de modelar, así que Papadopolus y Misailis proponen utilizar una omnirueda que brindar al robot un comportamiento más estable. Así como este fenómeno con la rueda de castor existen otros que no pueden ser incluidos en el modelo odometrico; los errores causados por dichos fenomenos pueden ser mitigados en el SLAM con la evidencia obtenida de las marcas del mapa.

4.2. Trabajos futuros

1. El método de suavizado y cartografía incremental [Kaess08] es una técnica de SLAM basado en el método de mínimos cuadrados pero que se resuelve en forma incremental. En este método se resuelve un sistema sobredeterminado anulando algunos términos de la nueva restricción para después resolviendo mediante una sustitución hacia atrás como se explica en [Watkins02], en lugar de formar el sistema y luego resolverlo mediante pseudoinversa como se propone en [Antonelli05] y [Papadopolous07]. De esta forma tanto ambos métodos pueden formularse un método de generación de mapas, localización y calibración simultánea.
2. En [Papadopolous07] se menciona que si se conocen los parámetros odométricos en el robot se pueden mejorar las técnicas de planeación de trayectorias; ya que como se conocen los parámetros odométricos se pueden conocer las restricciones cinemáticas del robot. Como trabajo futuro se propone corroborar esta hipótesis.
3. Con información odométrica y la técnica de localización y cartografía es posible modelar el error de los movimientos del robot. En [Albores09] se sugiere una metodología de esta naturaleza; por lo tanto se sugiere modelar el error de movimiento para de esta forma mejorar las estimaciones en las técnicas de SLAM.

Apéndice A

Suavizado y cartografía

A.1. Notación

La localización del robot en el entorno es denotada por el vector \mathbf{x}_i . La trayectoria o conjunto de posiciones del robot a través del tiempo es denotado por $X = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_M\}$. Las marcas en el mapa son denotadas por el vector \mathbf{l}_j por lo que el mapa es el conjunto de marcas $L = \{\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_j, \dots, \mathbf{l}_N\}$; se considera que el conjunto L es el mapa del entorno. Las acciones de control son denotadas por \mathbf{u}_i , donde el conjunto $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M\}$ representa el historial de acciones de control. Las mediciones de las marcas se denotan por \mathbf{z}_k . De manera que el conjunto de mediciones es $Z = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_K\}$

A.2. Función de movimiento

La función de movimiento describe el desplazamiento desde la posición \mathbf{x}_{i-1} hasta \mathbf{x}_i por efecto de la acción de control \mathbf{u}_i . En la literatura esta función es denotada como

$$\mathbf{x}_i = f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) \tag{A.1}$$

teniendo en consideración que la posición del robot se mapea en un sistema de coordenadas global y que las acciones del robot se encuentran mapeados en sistemas de coordenadas local (ver figura A.1 de [Siegwart04]); es necesario convertir el vector de acción de control al sistema global de coordenadas por medio de la matriz de rotación R como se muestra a

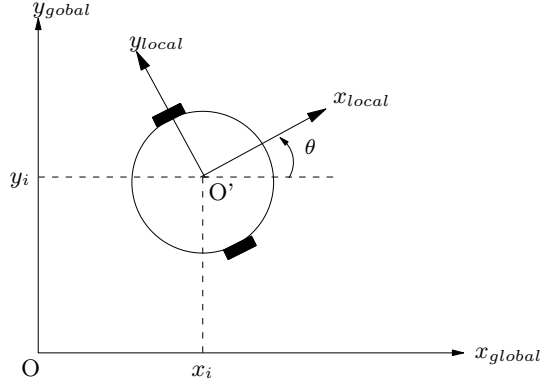


Figura A.1: Sistema global y local de coordenadas.

continuación

$$Ru_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ux_i \\ uy_i \\ u\theta_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Por lo que la posición \mathbf{x}_i es el resultado de la suma vectorial de la posición \mathbf{x}_{i-1} más la acción de control Ru_i como se muestra en la figura A.2, es decir

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + Ru_i \quad (\text{A.3})$$

En forma vectorial la función $\mathbf{x}_i = f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i)$ puede representarse como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ y_i \\ \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i-1} + ux_i \cos(\theta_{i-1}) - uy_i \sin(\theta_{i-1}) \\ y_{i-1} + ux_i \sin(\theta_{i-1}) + uy_i \cos(\theta_{i-1}) \\ \theta_{i-1} + u\theta_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.3. Modelo de movimiento

El modelo de movimiento tiene un enfoque probabilista, describe en términos de una función de probabilidad condicional la certidumbre de la posición \mathbf{x}_i al llevarse a cabo la acción de control \mathbf{u}_i , que se define en la siguiente forma

$$p(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) \quad (\text{A.5})$$

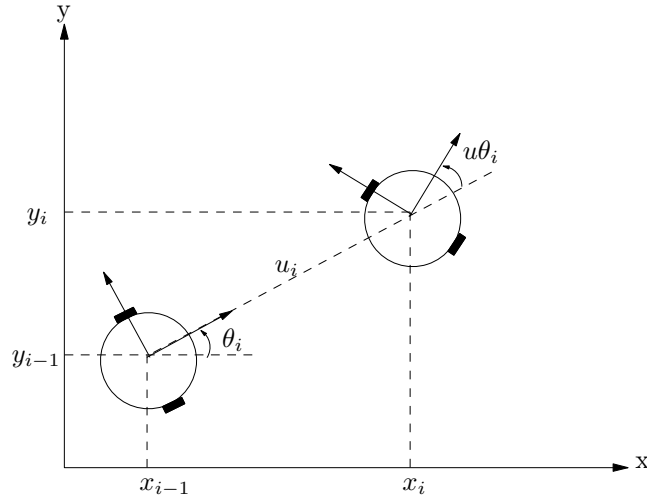


Figura A.2: Función de movimiento.

se considera que el movimiento del robot se encuentra descrito por un proceso gaussiano definido por la siguiente ecuación

$$\mathbf{x}_i = f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) + w_i \quad (\text{A.6})$$

donde $f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i)$ es la función de movimiento y w_i es una variable aleatoria que representa ruido gaussiano. Esta variable aleatoria está definida por una distribución de probabilidad normal $w_i = \mathcal{N}(0, \Lambda_i)$. Con la ecuación A.6 podemos escribir la probabilidad condicional del modelo de movimiento en forma de una distribución de probabilidad Normal

$$p(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) \propto \exp - \frac{1}{2} \{ [f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) - \mathbf{x}_i]^t \Lambda_i^{-1} [(f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) - \mathbf{x}_i)] \} \quad (\text{A.7})$$

La función de observación describe de forma geométrica como se lleva a cabo la medición de una marca \mathbf{l}_j desde la posición \mathbf{x}_i . Dicho modelo es definido por la siguiente ecuación

$$\mathbf{z}_k = h(x_{i_k}, l_{j_k}) \quad (\text{A.8})$$

en esta función las marcas son representadas en forma de líneas. Existen varias formas de representar matemáticamente a la línea, en este caso se usa la forma polar

$$r_i = y_i \cos(\phi) + x_i \sin(\phi) \quad (\text{A.9})$$

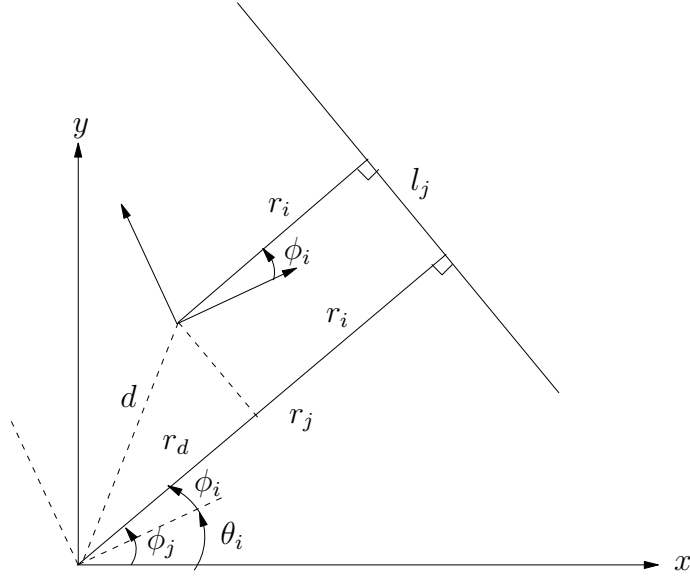


Figura A.3: Modelo de medición.

para definir la función de observación en la figura A.3 se muestra que el radio r_i y r_j son paralelos entonces

$$\phi_i = \phi_j - \theta_i \quad (\text{A.10})$$

en la misma figura observamos que

$$r_j = r_d + r_i \quad (\text{A.11})$$

por lo que el vector \vec{r}_d es la proyección ortogonal de \vec{d} sobre \vec{r} . Por lo tanto \vec{r}_d está definida por la siguiente ecuación

$$\vec{r}_d = \left(\frac{\vec{r}_j \cdot \vec{d}}{\vec{r}_j \cdot \vec{r}_j} \right) \vec{r}_j \quad (\text{A.12})$$

teniendo en cuenta que $\vec{d} = [x_i, y_i]^t$ y que $\vec{r}_j = [r \cos(\phi_j), r \sin(\phi_j)]^t$; el escalar en la proyección tiene la siguiente equivalencia

$$\left(\frac{\vec{r}_j \cdot \vec{d}}{\vec{r}_j \cdot \vec{r}_j} \right) = \frac{\cos(\phi_j)x_i + \sin(\phi_j)y_i}{r_j} \quad (\text{A.13})$$

si a este escalar lo denotamos como \hat{c} y se obtiene la norma al cuadrado de la ecuación A.12

$$\begin{aligned} \|\hat{c}r_j\|^2 &= \hat{c}^2 r_j^2 [\cos^2(\phi_j) + \sin^2(\phi_j)] \\ &= \hat{c}^2 r_j^2 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

como $r_d = \|\hat{c}r_j\|$ al sustituir las ecuaciones A.12 y A.14 tenemos que

$$r_d = \sqrt{\hat{c}^2 r^2} \quad (\text{A.15})$$

$$= \cos(\phi_j)\mathbf{x}_i + \text{sen}(\phi_j)y_i \quad (\text{A.16})$$

teniendo en cuenta que $r_i = r_j - r_d$, con la ecuación A.16 y la ecuación A.10 se puede estimar el vector \mathbf{l}_j con la siguiente ecuación

$$\begin{bmatrix} r_i \\ \phi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_j - \cos(\phi_j)\mathbf{x}_i - \text{sen}(\phi_j)y_i \\ \phi_j - \theta_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

A.4. Modelo de observación

El modelo de observación permite representar matemáticamente la certidumbre de las mediciones de las marcas. Formalmente éste modelo de observación es definido por la siguiente función de probabilidad condicional

$$p(\mathbf{z}_k \mid x_{i_k}, l_{j,k}) \quad (\text{A.18})$$

aquí $l_{j,k}$ es la j -ésima marca vista en la k -ésima observación. En este modelo la observación se describe mediante un proceso gaussiano que matemáticamente se define por la siguiente ecuación

$$\mathbf{z}_k = h(x_{i_k}, l_{j,k}) + v_k \quad (\text{A.19})$$

donde $h(x_{i_k}, l_{j,k})$ es la función de observación y v_k es una variable aleatoria que representa ruido gaussiano. Esta variable se define por la distribución de probabilidad normal $\mathcal{N}(0, \Gamma_i)$. Así que el modelo de medición queda definido por la siguiente distribución de probabilidad

$$p(\mathbf{z}_k \mid x_{i_j}, l_{j_k}) \propto \exp - \frac{1}{2} \{ [h(x_{i_k}, l_{j_k}) - \mathbf{z}_k]^t \Gamma_k^{-1} [h(x_{i_k}, l_{j_k}) - \mathbf{z}_k] \} \quad (\text{A.20})$$

A.5. SAM

La técnica de Suavizado y Cartografía (SAM por sus siglas en ingles) fue propuesta por Dellaert y Kaess en [Dellaert06]. Es una técnica que utiliza toda la información que se va recabando a lo largo de la trayectoria. En cada iteración se busca mejorar el estimado de

toda la trayectoria y de todo el mapa. Por lo tanto esta técnica se clasifica como una técnicas de SLAM completo. El problema de SLAM puede representarse como una red bayesiana con M movimieto, K observaciones y N marcas como se muestra en la figura A.4. En donde la probabilidad conjunta de todo es sistema se puede calcular mediante la siguiente ecuación

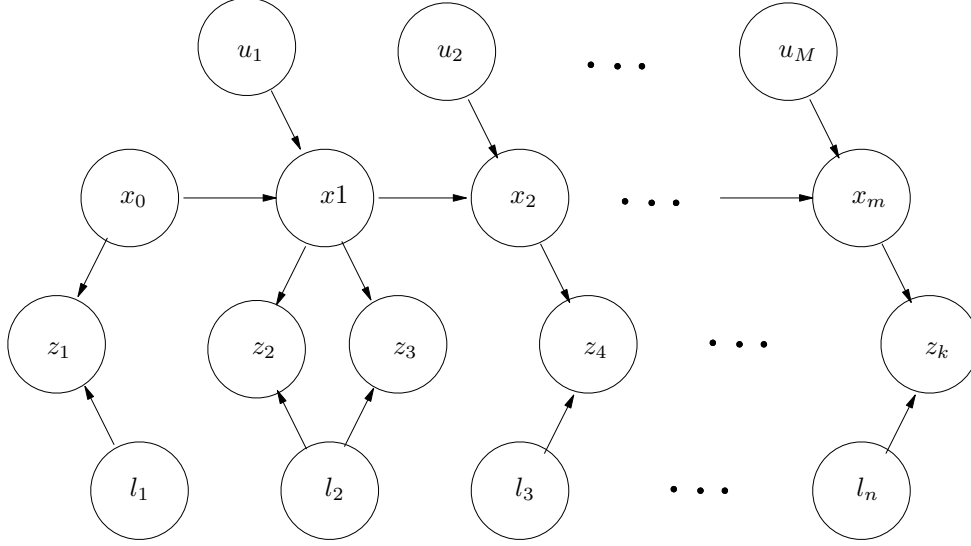


Figura A.4: Red Bayesiana de una trayectoria

$$p(X, L, U, Z) \propto p(x_0) \prod_{i=1}^M p(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) \prod_{k=1}^K p(\mathbf{z}_k | x_{i_k}, l_{j_k}) \quad (\text{A.21})$$

en donde $p(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i)$ es el modelo de movimiento definido en la sección A.3 y $p(\mathbf{z}_k | x_{i_k}, l_{j_k})$ es el modelo de observación definido en la sección A.4. De manera que se puede estimar X^* y L^* (la trayectoria y el mapa óptimos) aplicando el principio de máxima verosimilitud como se muestra a continuación

$$X^*, L^* = \arg \max_{X, L} p(X, L, U, Z) \quad (\text{A.22})$$

si se sustituye la distribución de probabilidad del modelo de movimiento (ecuación A.7) y la distribución de probabilidad del modelo de observación (ecuación A.20) en la ecuación A.21 obtenemos

$$p(X, L, U, Z) \propto \exp - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^M \| (f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) - \mathbf{x}_i) \|_{\Lambda_i}^2 + \sum_{k=1}^K \| (f(x_{i_k}, l_{j_k}) - \mathbf{z}_k) \|_{\Gamma_k}^2 \right\} \quad (\text{A.23})$$

aquí $\|e\|_{\Sigma}^2$ denota la distancia de mahalanobis. Note que como $p(x_0)$ tiene una distribución uniforme, por lo tanto su contribución es nula. Si se aplica el logaritmo negativo a la ecuación A.23, X^* y L^* se pueden estimar como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} X^*, L^* &= \arg \min_{X, L} -\log p(X, L, U, Z) \\ &= \arg \min_{X, L} \left\{ \sum_{i=1}^M \| (f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) - \mathbf{x}_i) \|_{\Lambda_i}^2 + \sum_{k=1}^K \| (f(x_{i_k}, l_{j_k}) - \mathbf{z}_k) \|_{\Gamma_k}^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A.6. SAM como problema de mínimos cuadrados

Para poder resolver el problema de SAM por medio del método de mínimos cuadrados es necesario linealizar el error de movimiento y observación. La linealización se realiza por medio de la expansión de la serie de Taylor de primer orden. El procedimiento de linealización del error de movimiento es el siguiente

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) - \mathbf{x}_i &\approx \{ f(\mathbf{x}_{i-1}^0, \mathbf{u}_i) + F_i^{i-1} \delta \mathbf{x}_{i-1} \} - \{ x_0^i + \delta \mathbf{x}_i \} \\ &= \{ F_i^{i-1} \delta \mathbf{x}_{i-1} - \delta \mathbf{x}_i \} - \{ \mathbf{x}_i^0 - f(\mathbf{x}_{i-1}^0, \mathbf{u}_i) \} \end{aligned}$$

Finalmente tenemos la aproximación del error de movimiento en la siguiente ecuación

$$f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i) - \mathbf{x}_i \approx \{ F_i^{i-1} \delta \mathbf{x}_{i-1} - \delta \mathbf{x}_i \} - a_i \quad (\text{A.25})$$

donde $a_i = \mathbf{x}_i^0 - f(\mathbf{x}_{i-1}^0, \mathbf{u}_i)$ es el error de predicción odométrica y F_i^{i-1} es el jacobiano de la función de movimiento evaluado en el punto \mathbf{x}_{i-1}^0 es decir

$$F_i^{i-1} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{x}_{i-1}} \right|_{\mathbf{x}_{i-1}^0} \quad (\text{A.26})$$

el procedimiento para linealizar el error de observación es el siguiente

$$\begin{aligned} h(x_{i_k}, l_{j_k}) - \mathbf{z}_k &\approx \left\{ h(x_{i_k}^0, l_{i_k}^0) + H_i^{i_k} \delta x_{i_k} + J_k^{j_k} \delta l_{j_k} \right\} - \{ \mathbf{z}_k^0 + \delta z_i \} \\ &\approx \left\{ H_i^{i_k} \delta x_{i_k} + J_k^{j_k} \delta l_{j_k} - \delta z_i \right\} - \{ \mathbf{z}_k^0 - h(x_{i_k}^0, l_{i_k}^0) \} \end{aligned}$$

finalmente la aproximación para el error de medición es el siguiente

$$h(x_{i_k}, l_{j_k}) - \mathbf{z}_k \approx \left\{ H_i^{i_k} \delta x_{i_k} + J_k^{j_k} \delta l_{j_k} - \delta z_i \right\} - c_k \quad (\text{A.27})$$

donde $c_k = \mathbf{z}_k^0 - h(x_{i_k}^0, l_{i_k}^0)$ es el error de predicción de medición, $H_i^{i_k}$ es el jacobiano de la función de observación con respecto a la variable \mathbf{x}_i como se muestra a continuación

$$H_i^{i_k} = \left. \frac{\partial h(x_{i_k}, l_{j_k})}{\partial x_{i_k}} \right|_{x_{i_k}^0, l_{j_k}^0} \quad (\text{A.28})$$

por su parte $J_k^{j_k}$ es el jacobiano de la función de observación con respecto a la variable \mathbf{l}_j

$$J_k^{j_k} = \left. \frac{\partial h(x_{i_k}, l_{j_k})}{\partial l_{j_k}} \right|_{x_{i_k}^0, l_{j_k}^0} \quad (\text{A.29})$$

sustituyendo las ecuaciones A.25 y A.27 en la ecuación A.24 se obtiene una ecuación que nos permite minimizar los errores de movimiento y observación

$$\delta\Theta^* = \arg \min_{\delta\Theta} \left\{ \sum_{i=1}^M \left\| (F_i^{i-1} \delta\mathbf{x}_{i-1} + G_i^i \delta\mathbf{x}_i - a_i) \right\|^2 + \sum_{k=1}^K \left\| (H_i^{i_k} \delta x_{i,k} + J_k^{j,k} \delta l_{j,k} - c_k) \right\|^2 \right\} \quad (\text{A.30})$$

aquí la matriz $G_i^i = I_{dx \times dx}$ es una matriz identidad que se incluye para facilitar la notación.

El vector $\Theta \in \mathbb{R}^m$ es donde se agrupan los errores de movimiento ($\delta\mathbf{x}_i$) y de medición ($\delta\mathbf{l}_j$).

La dimensión del vector Θ está determinada por

$$m = (M \times dx) + (Z \times dl) \quad (\text{A.31})$$

en donde dx es la dimensión de \mathbf{x}_i y dl es la dimensión del vector \mathbf{l}_j . Para minimizar los errores por medio del método de mínimos cuadrados es necesario hacer un cambio de variables; debido a que los errores están normados por la distancia de mahalánobis. El cambio de variable se determina con el siguiente procedimiento

$$\begin{aligned} \|e\|_{\Sigma}^2 &= e^T \Sigma^{-1} e \\ &= e^T (\Sigma^{-1/2} \Sigma^{-T/2}) e \\ &= (\Sigma^{-T/2} e)^T (\Sigma^{-T/2} e) \\ &= \left\| \Sigma^{-T/2} e \right\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

así que la distancia de mahalánobis tiene la siguiente equivalencia con el cuadrado de la distancia euclidiana

$$\|e\|_{\Sigma}^2 = \left\| \Sigma^{-T/2} e \right\|^2 \quad (\text{A.33})$$

puesto que Q es una matriz ortogonal tiene la siguiente propiedad

$$\|Q^T x\|_2 = x^T Q Q^T x = \|x\|_2$$

de manera que podemos premultiplicar en ambos términos de la ecuación anterior por Q^T sin alterarla

$$\begin{aligned} \|A\Theta - b\|^2 &= \left\| Q^T Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Theta - Q^T b \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Theta - Q^T b \right\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

se va a fragmentar el vector $Q^T b$ en $d \in \mathbb{R}^n$ y $e \in \mathbb{R}^{m-n}$ en la siguiente forma

$$Q^T b = [d, e]^t$$

para reescribir la ecuación A.38 como sigue

$$\begin{aligned} \|A\Theta - b\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Theta - \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \|R\Theta - d\|^2 + \|e\|^2 \end{aligned}$$

aquí el vector e se considera un residuo, así que el sistema queda determinado por la siguiente ecuación

$$R\Theta = d \quad (\text{A.39})$$

dado que R es una matriz triangular superior, el sistema se puede solucionar por medio de la sustitución hacia atrás ahorrando trabajo computacional. Posteriormente viene un proceso que se llama actualización; que es cuando se agrega una nueva restricción al sistema, es decir

$$\begin{bmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

aquí w representa la nueva restricción. Simultáneamente se agrega un vector γ_w con los elementos correspondientes a la restricción w en el vector de observaciones. De manera que

podemos escribir la siguiente ecuación

$$\begin{bmatrix} R \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ \gamma_w \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

note como $[R \ w]^t$ puede ser interpretado como una matriz A y $[d \ \gamma_w]^t$ como un vector b . Salvo que en este caso el proceso de factorización esta casi concluido. Así que después de pocas operaciones (en este caso rotaciones de Givens ver apéndice ??) obtenemos una matriz triangular superior y se resuelve de nuevo mediante una sustitución hacia atras.

A.8. Asociación de datos

La asociación de datos dentro del esquema de SLAM se refiere al proceso en el cual se infere a cual de las marcas del mapa corresponde una medición o si la medición corresponde a una nueva marca que debe añadirse al mapa.

A.8.1. Asociación de datos por máxima verosimilitud

A esta técnica de asociación también se le conoce como la prueba de compatibilidad individual. Donde para poder inferir si una medición corresponde a una marca determinada, es necesario conocer la probabilidad de medir \tilde{z}_k (la tilde $\tilde{\cdot}$ indica que la medición realizada no tiene aún una asociación) la marca \mathbf{l}_j ; esta probabilidad está definida por

$$p(\tilde{z}_k, j_k = j \mid Z) \quad (\text{A.42})$$

esta probabilidad está relacionada con la probabilidad de que el robot se localice en \mathbf{x}_i ; asumiendo que se ha marginalizado \mathbf{x}_i en dicha función de probabilidad se evidencia la relación mencionada con el siguiente planteamiento

$$p(\tilde{z}_k, j_k = j \mid Z) = \int_x p(\tilde{z}_k, j_k = j \mid x, Z) p(x) \quad (\text{A.43})$$

si cada una de estas probabilidades se expresa por una función de probabilidad gaussiana, tendremos la siguiente ecuación

$$p(\tilde{z}_k, j_k = j \mid Z) = \int_x \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(\Gamma)}} e^{-\|h_{i_k j}(x) - \tilde{z}_k\|_{\Gamma}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(\Sigma)}} e^{-\|x - \hat{x}\|_{\Sigma}^2} \quad (\text{A.44})$$

al resolver la integral tenemos

$$p(\tilde{z}_k, j_k = j | Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(C_{i_k j})}} e^{-\|h_{i_k j}(x) - \tilde{z}_k\|_{C_{i_k j}}^2} \quad (\text{A.45})$$

donde $C_{i_k j}$ es la matriz de covarianza definida por

$$C_{i_k j} = \frac{\partial h_{i_k j}}{\partial x} \Big|_x \Sigma \frac{\partial h_{i_k j}}{\partial x} \Big|_x + \Gamma \quad (\text{A.46})$$

teniendo un conjunto de observaciones $Z_i = \{\tilde{z}_k, \dots, \tilde{z}_K\}$ tomadas desde la posición \mathbf{x}_i ; cada hipótesis de asociación entre una observación \mathbf{z}_k y una marca \mathbf{l}_j se puede cuantificar por medio de la distancia de mahalanoobis en la siguiente forma

$$M_{k,j} = [h(\mathbf{x}_i, \mathbf{l}_j) - \mathbf{z}_k]^t C_{i_k j}^{-1} [h(\mathbf{x}_i, \mathbf{l}_j) - \mathbf{z}_k] \quad (\text{A.47})$$

Posteriormente para determinar cuál de las hipótesis es la más verosímil se aplica la prueba Chi-cuadrada. Esta prueba consiste en aceptar las asociaciones que cumplan con la siguiente condición

$$M_{k,j} < \chi_{d,\alpha}^2 \quad (\text{A.48})$$

aquí $\chi_{d,\alpha}^2$ es un umbral de decisión basado en la distribución Chi-cuadrada. Este umbral esta definido por 2 parámetros, la dimensión del vector residual denotada por el subíndice d y el nivel de confiabilidad indicado por α . Por ejemplo el umbral para un vector de dimensión 3 y con un nivel de confiabilidad del 95 % es $\chi_{3,0.95}^2 = 7.8147$. Estos valores umbrales pueden ser obtenidos mediante tablas o por medio de la función gamma incompleta por el método de búsqueda de raíces propuesto en [Press92].

A.8.2. Estimación de covarianza

Para poder establecer las asociación de datos es necesario recuperar la matriz Σ de covarianzas marginales de la posición \mathbf{x}_i y la marca \mathbf{l}_j

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{ii} & \Sigma_{ij}^T \\ \Sigma_{ij} & \Sigma_{jj} \end{bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

esta matriz puede ser obtenida a partir de los elementos de la matriz de covarianza del sistema definida por la inversa del cuadrado de la matriz triangular superior de la factorización de cholesky $(R^T R)^{-1}$. Sin embargo estimar de esta forma la covarianza es demasiado

costoso. En [Eustice05] Eustice et al. se enfrentaron al mismo problema cuando implementaban un filtro extendido de kalman para realizar la construcción de un mapa. En el filtro extendido de kalman es necesario realizar la inversión de una matriz para obtener la matriz de covarianza. Para evitar dicha inversión se propuso una estrategia conservativa; en donde se argumenta que como Σ_{jj} (matriz de covarianza de la marca j) no crece con el tiempo, se puede emplear su valor inicial. De manera que se puede obtener una aproximación de la covarianza mediante la siguiente ecuación

$$\tilde{\Sigma} = [J_x \ J_l] \begin{bmatrix} \Sigma_{ii} & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_l \end{bmatrix} \quad (\text{A.50})$$

en donde J_x es el jacobiano del modelo de observación con respecto a x y J_l con respecto a l y Γ es el error de medición. La submatriz de covarianza Σ_{ii} se refiere a la covarianza de la última posición. Para obtener Σ_{ii} es necesario factorizar la matriz A despues de insertar la restricción relacionada con el vector \mathbf{x}_i ; posteriormente se extrae un bloque de R al final de la matriz de tamaño $dx \times dx$. A este bloque lo llamaremos R_{ii} así que Σ_{ii} se calcula de la siguiente forma

$$\Sigma_{ii} = (R_{ii}^T R_{ii}) \quad (\text{A.51})$$

A.9. Resultados obtenidos

Se genera el mapa de un pasillo que tiene forma circular, se muestra lo robusto del método al cerrar un bucle. Es decir que con está técnica de suavizado es posible hacer que el robot reconozca marcas que ha dejado de ver después de una trayectoria circular.

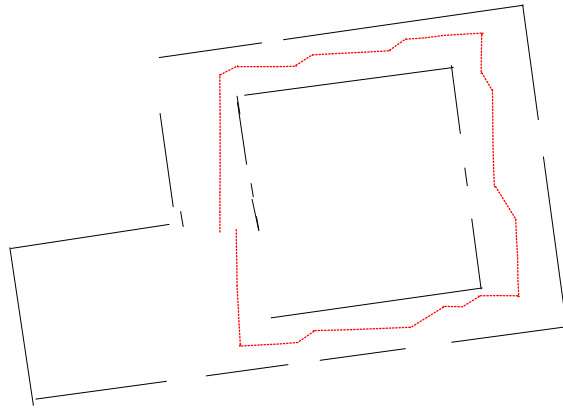


Figura A.5: Mapa generado mediante la técnica de Suavizado

Apéndice B

Mínimos cuadrados

En diversas áreas de la ciencia existen problemas en donde se tiene un conjunto de observaciones que se desean ajustar a funciones que describen la relación entre una variable dependiente y la variable independiente. A este problema se le conoce como mínimos cuadrados y es considerado como un problema de optimización. Consiste en minimizar la suma del cuadrado de los errores entre la función mencionada anteriormente y los datos observados. Algunas aplicaciones a este problema son la estimación de parámetros de modelos de sistemas, estimación de parámetros en funciones de distribución de probabilidad y la estimación de trayectorias de cuerpos en movimiento.

Para realizar un buen ajuste es necesario incluir un número considerable de observaciones, de manera que los sistemas a resolver están sobrecondicionados. Es decir que estos sistemas se caracterizan por tener un mayor número de restricciones que de variables. En esta tesis nos enfocaremos a los sistemas lineales del tipo $Ax = b$. Así que cuando estos sistemas son precondicionados no se puede garantizar que el vector b se encuentre en el espacio columna de A , $\mathcal{R}(A)$, es decir que el sistema puede ser inconsistente y por lo tanto la eliminación gaussiana puede fallar. Este es un problema cuya solución más obvia sería tomar una parte del sistema e ignorar el resto. Pero esto difícilmente se puede justificar, ya que la solución obtenida tendría errores considerables con algunas restricciones. Una propuesta más inteligente es encontrar el valor de x que minimice los errores entre los elementos del vector b con cada restricción de Ax .

B.1. Mínimos cuadrados en una dimensión

Para llegar a la solución general del problema tomamos el caso particular más sencillo. Que es cuando se tiene una sola dimensión como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 a_1x &= b_1 \\
 a_2x &= b_2 \\
 a_3x &= b_3 \\
 &\vdots \\
 a_mx &= b_m
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

el error en se calcula mediante el cuadrado de la distancia euclidiana entre ax y b . Por lo que la función a minimizar es la siguiente

$$E^2 = \|ax - b\|^2 = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_mx - b_m)^2 \tag{B.2}$$

función que de forma compacta se puede expresar en forma de sumatoria como

$$E^2 = \sum_{i=1}^m (a_i x - b_i)^2 = 0; \tag{B.3}$$

siguiendo el procedimiento habitual de minimización derivamos e igualamos a cero

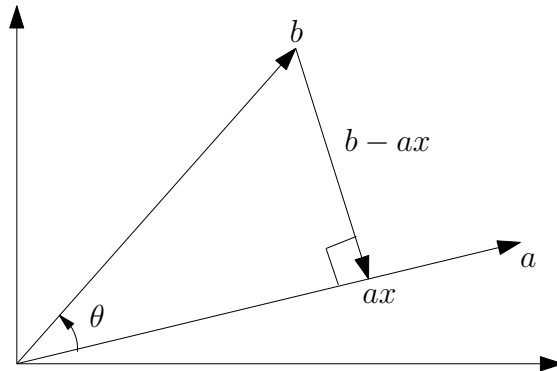


Figura B.1: Proyección de dos vectores.

$$\frac{dE^2}{dx} = 2a_i \sum_{i=1}^m (a_i x - b_i) = 0; \tag{B.4}$$

reescribiendo esta ecuación en una forma vectorial llegamos a la siguiente expresión

$$a^T(b - ax) = [a_1, a_2, \dots, a_m] \begin{bmatrix} (a_1x - b_1) \\ (a_2x - b_2) \\ \vdots \\ (a_mx - b_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Es importante notar que este sistema puede expresarse como el producto punto entre el vector a y el vector $ax - b$ y que además este producto debe ser igual a cero. Lo que geoméricamente implica que para optimizar el sistema tenemos que encontrar un valor para x tal que el vector $ax - b$ sea perpendicular al vector a (ver figura). Si a continuación despejamos $a^T b$ llegamos a la siguiente equivalencia

$$a^T ax = a^T b \quad (\text{B.6})$$

como $a^T a$ es un escalar entonces x se determina mediante

$$x = \frac{a^T b}{a^T a} \quad (\text{B.7})$$

B.2. Mínimos cuadrados en múltiples dimensiones

En el caso general para varias dimensiones tenemos a la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ donde $m > n$, el vector $x \in \mathbb{R}^n$ y el vector $b \in \mathbb{R}^m$. Como el sistema puede ser inconsistente entonces se va a considerar que el vector b está fuera del espacio de columnas de A (en otras palabras esto quiere decir que no existe una combinación lineal de A que nos de como resultado el vector b). Por lo que el error se define como la distancia entre el punto Ax y el vector b

$$E = \| b - Ax \| \quad (\text{B.8})$$

para minimizar el error el vector $b - Ax$ debe ser perpendicular a el espacio de columnas de A (ver figura). Esto implica que cada columna de A debe ser perpendicular con el vector

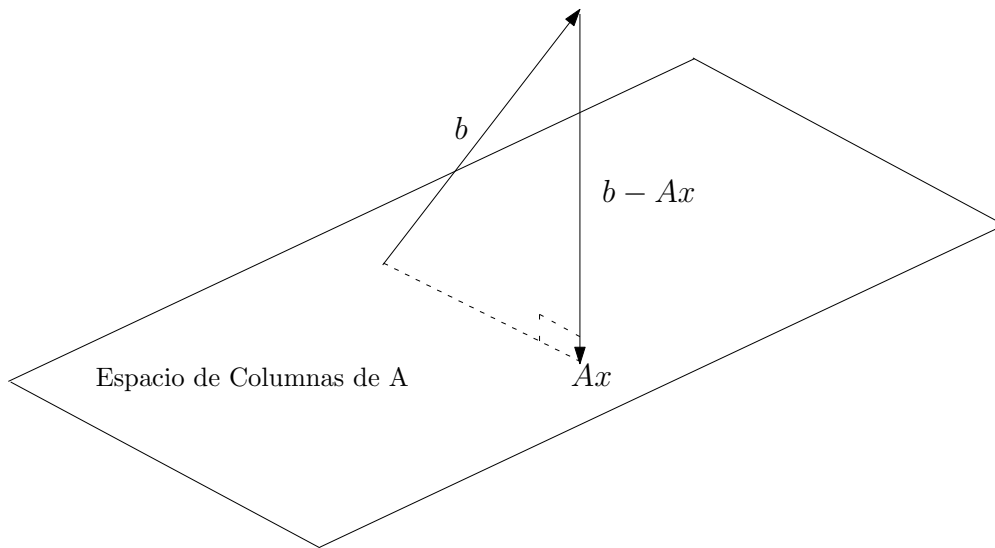


Figura B.2: Proyección de un vector sobre el espacio de columnas.

$b - Ax$ como se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b - Ax \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.9})$$

es decir que el vector $b - Ax$ debe estar dentro del espacio nulo de A^T . Una forma compacta de expresar la ecuación anterior es la siguiente

$$A^T(b - Ax) = 0; \quad (\text{B.10})$$

espejando el vector x

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (\text{B.11})$$

obteniendo de esta manera la solución del problema de mínimos cuadrados.

B.3. Pseudoinversa

La pseudoinversa de A denotada por A^+ , es por definición es una matriz que debe cumplir con el siguiente criterio

$$I = A^+A \quad (\text{B.12})$$

si las columnas de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son linealmente independientes entonces A^+ tiene la siguiente equivalencia

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (\text{B.13})$$

así que la ecuación B.11 puede ser reescrita como

$$x = A^+b \quad (\text{B.14})$$

por que el problema de mínimos cuadrados se resuelve mediante la pseudoinversa. También tenemos otra equivalencia de la matriz pseudoinversa asociada a la descomposición QR en donde $A = QR$, sustituyendo esta igualdad en la ecuación B.13 tenemos

$$A^+ = (R^T Q^T Q R)^{-1} R^T Q^T \quad (\text{B.15})$$

como Q es ortogonal entonces $Q^T Q = I$ entonces

$$A^+ = (R^T R)^{-1} R^T Q^T \quad (\text{B.16})$$

desarrollando la ecuación anterior

$$A^+ = R^{-1} R^{-T} R^T Q^T \quad (\text{B.17})$$

para obtenerse la definición alternativa de A^+ en

$$A^+ = R^{-1} Q^T \quad (\text{B.18})$$

B.4. Mínimos cuadrados mediante factorización QR

Una forma para resolver el problema de mínimos cuadrados es mediante la factorización QR , retomando las ecuaciones B.11 y B.18 en la siguiente forma

$$x = R^{-1} Q^T b \quad (\text{B.19})$$

si consideramos que R es una matriz triangular superior es necesario invertirla para obtener x , ya que la ecuación

$$Rx = Q^T b \quad (\text{B.20})$$

puede ser resuelta mediante una sustitución hacia atrás. La factorización QR de una matriz de una matriz A se puede realizar por medio de rotaciones de Givens. En donde se forma una matriz q^T de rotación, como se muestra a continuación

$$q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & q_{i,i} & \dots & q_{i,k} & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & q_{k,i} & \dots & q_{k,k} & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \ddots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

En donde los elementos $q_{i,i}^T = \cos(\phi)$, $q_{i,k}^T = \sin(\phi)$, $q_{k,i}^T = -\sin(\phi)$, y $q_{k,k}^T = \cos(\phi)$. En cada rotación se anula un elementos $a_{i,k}$ donde $i > k$. O lo que es lo mismo se anula cada elemento por debajo de la diagonal (como en la eliminación gaussiana). Este procedimiento se repite hasta obtener una matriz triangular superior que en este caso sería la matriz R , es decir:

$$R = q_1^T \dots q_m^T A \quad (\text{B.22})$$

lo que es lo mismo

$$R = Q^T A \quad (\text{B.23})$$

teniendo en cuenta que cada matriz de rotación q^T es ortogonal se puede obtener la matriz Q con el siguiente producto de matrices

$$Q = q_1 q_2 \dots q_m \quad (\text{B.24})$$

un aspecto importante es como obtener la dupla $(\cos(\phi), \sin(\phi))$ con los valores adecuados para anular un elemento $a_{i,k}$; la propuesta de Given es la siguiente

$$(\cos(\phi), \sin(\phi)) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } a_{i,k} = 0 \\ \left(\frac{-a_{kk}}{a_{i,k} \sqrt{1 + \left(\frac{a_{k,k}}{a_{i,k}}\right)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_{k,k}}{a_{i,k}}\right)^2}} \right) & \text{si } |a_{kk}| < |a_{ik}| \\ \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}\right)^2}}, \frac{-a_{i,k}}{\sqrt{a_{k,k} + \left(\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}\right)^2}} \right) & \text{si } |a_{kk}| > |a_{ik}| \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

por otro lado una forma eficiente de estimar a la matriz R es cuando se tiene en cuenta que las matrices q solo alteran 2 filas de la matriz A^1 , es decir

$$\begin{aligned} a_i &= \cos(\phi)a_i - \sin(\phi)a_k \\ a_k &= \sin(\phi)a_i + \cos(\phi)a_k \end{aligned}$$

En donde a_i y a_k son las filas i y k de la matriz A respectivamente. De forma similar el efecto de premultiplicar las matrices q sobre el vector b es el siguiente

$$q^T b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \cos(\phi)b_i - \sin(\phi)b_k \\ \vdots \\ \sin(\phi)b_i + \cos(\phi)b_k \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

¹Como es el caso de las operaciones elementales de matrices mediante el producto de matrices

Referencias

- [Albores09] Albores, C., Josep, M., Tur, M., y Gordillo, J. L. Estate your position. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 16(2):82–90, Junio 2009.
- [Antonelli05] Antonelli, G., Chiaverini, S., y Giuseppe, F. A calibration method for odometry of mobile robots based on the least-square technique: Theory and experimental validation. *IEEE Transactions on robotics*, 21(5):994–1004, Octubre 2005.
- [Arellano05] Arellano, J. J. *Reconstrucción tridimensional de ambientes interiores utilizando un robot móvil equipado con un telémetro láser*. Proyecto Fin de Carrera, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Facultad de Ingeniería Eléctrica, División de Estudios de Posgrado, Agosto 2005.
- [Ayache88] Ayache, N. y Faugeras, O. Building, registering, and fusing noisy visual maps. *J. Robotics Research*, 7(6):45–65, 1988.
- [Azizi03] Azizi, F. y Houshangi, N. Sensor integration for mobile robot position determination. *Systems, Man and Cybernetics*, 2:1136–1140, Octubre 2003.
- [Bailey02] Bailey, T. *Mobile Robot Localization and Mapping and Mapping in Extensive Outdoor Environments*. Tesis Doctoral, The University of Sydney, Agosto 2002.

- [Borenstein94] Borenstein, J. y Feng, L. Umbmark - a method for measuring, comparing, and correcting odometry errors in mobile robots. *Inf. téc.*, University of Michigan, Diciembre 1994.
- [Borenstein95] Borenstein, J. y Feng, L. Correction of systematic odometry errors in mobile robots. *Proc. International Conference on Intelligent Robots and Systems*, págs. 569–574, 1995.
- [Borenstein96] Borenstein, J., Everett, H., y Feng, L. *Navigating Mobile Robots: Systems and Techniques*. Wellesley, 1996.
- [Cadena09] Cadena, C. y Neira, J. Slam in $o(\log n)$ with the combined kalman - information filter. *In Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pág. 2069, Octubre 2009.
- [Chatila85] Chatila, R. y Laumond, J. Position referencing and consistent world modeling for mobile robots. *In Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, págs. 138–143, 1985.
- [Concha07] Concha, S. A. *Diseño y Construcción de un Robot Móvil*. Proyecto Fin de Carrera, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Mayo 2007.
- [Crowley89] Crowley, J. World modeling and position estimation for a mobile robot using ultra-sonic ranging. *In Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, págs. 674–681, 1989.
- [Dellaert06] Dellaert, F. y Kaess, M. Square root sam: Simultaneous localization and mapping via square root information smoothing. *International Journal of Robotics Research*, 25, 2006.
- [Dudek00] Dudek, G. y Jenkin, M. *Computational Principles of Mobile Robotics*. Cambridge University Press, 40 West 20th Street, New York, N.Y., 2000. ISBN 0521 56021 7 hardback.

- [Durrant-Whyte06] Durrant-Whyte, H. F. y Bailey, T. Simultaneous localisation and mapping (slam): Part i the essential algorithms. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2, Junio 2006.
- [Eustice05] Eustice, R., Singh, H., y Hole, W. Visually navigating the rms titanic with slam information filters. in *Proceedings of Robotics: Science and Systems*, págs. 57–64, 2005.
- [Font09] Font, J. M. y Batlle, J. A. Consistent triangulation for mobile robot localization using discontinuous angular measurements. *Robotics and Autonomous Systems*, 57, Septiembre 2009.
- [Frese05] Frese, U., Larsson, P., y Duckett, T. A multilevel relaxation algorithm for simultaneous localisation and mapping. *IEEE Transactions on Robotics*, págs. 196–207, 2005.
- [Grisetti] Grisetti, G., Stachniss, C., Grzonka, S., y Burgard, W. A tree parametrization for efficiently computing maximum likelihood maps using gradient decent. In *Proc. of Robotics: Science and Systems (RSS)*, 2007.
- [Grisetti10] Grisetti, G., Kuimmerle, R., Stachniss, C., y Burgard, W. A tutorial on graph-based slam. *Intelligent Transportation Systems Magazine, IEEE*, 2:31–43, 2010.
- [Han99] Han, W. y Ching, T. G. Fuzzy logic kalman filter estimation for 2-wheel steerable vehicles. *Intelligent Robots and Systems, 1999. IROS '99. Proceedings. 1999 IEEE/RSJ International Conference on*, 1:88, Octubre 1999.
- [Ivanjko07] Ivanjko, E., Komii, I., y Petrovi, I. Simple off-line odometry calibration of differential drive mobile robots. *Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region - RAAD 2007*, (16), Junio 2007.

- [Jared10] Jared, A. F. Localization and navigation techniques for indoor wheeled mobile robots: A literature review (2010). Inf. téc., Polytechnic Institute of New York University, 2010.
- [Kaess08] Kaess, M., Ranganathan, A., y Dellaert, F. isam: Incremental smoothing and mapping. *IEEE Trans. on Robotics*, 24(6):1365–1378, Diciembre 2008.
- [Lara06] Lara, C. *Construcción de mapas geométrico bidimensionales de ambientes interiores con un telémetro láser*. Proyecto Fin de Carrera, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Facultad de Ingeniería Eléctrica, División de Estudios de Posgrado, Junio 2006.
- [Lara11] Lara, C. *Modelado Bidimensional robusto de entornos interiores para un robot móvil equipado con telémetro láser*. Tesis Doctoral, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Facultad de Ingeniería Eléctrica, División de Estudios de Posgrado, Febrero 2011.
- [Larsen99] Larsen, T., Hansen, K., Andersen, N., y Ole, R. Design of kalman filters for mobile robots; evaluation of the kinematic and odometric approach. *Control Applications, 1999. Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on*, 2:1021, Agosto 1999.
- [Luo08] Luo, R. y Jian-Xian Li Chen, C.-T. Indoor localization using line based map for autonomous mobile robot. *Advanced robotics and Its Social Impacts, 2008. ARSO 2008. IEEE Workshop on*, 1:1, Agosto 2008.
- [Martinelli03] Martinelli, A., Tomatis, N., Tapus, A., y Siegwart, R. Simultaneous localization and odometry calibration for mobile robot. *Intelligent Robots and Systems, 2003. (IROS 2003)*., 2:1499–1504, Octubre 2003.
- [Martinelli06] Martinelli, A. y Siegwart, R. Observability properties and optimal

- trajectories for on-line odometry self-calibration. *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, págs. 3065–3070, Diciembre 2006.
- [Montemerlo03] Montemerlo, M. *FastSLAM: A Factored Solution to the Simultaneous Localization and Mapping Problem With Unknown Data Association*. Tesis Doctoral, The Robotics Institute Carnegie Mellon University, Julio 2003.
- [Nocedal06] Nocedal, J. y Wright, S. W. *Numerical Optimization*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2^a ed^{ón}., 2006.
- [Olson06] Olson, E., Leonard, J., y Teller, S. Fast iterative optimization of pose graph whit poor initial estimates. *In Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, págs. 2262–2269, 2006.
- [Papadopolous07] Papadopolous, E. y Misaildis, M. On diferencial drive robot odometry with application to path planning. *Proceedings of the European Control Conference (ECC '07)*, págs. 5492–5499, Julio 2007.
- [Petrovskaya08] Petrovskaya, A. y Thrun, S. Model based vehicle tracking for autonomous driving in urban environments. *Proceedings of Robotics: Science and Systems IV*, Junio 2008.
- [Pornsarayouth09] Pornsarayouth, S. y Wongsaisuwan, M. Sensor fusion of delay and non-delay signal using kalman filter with moving covariance. *Robotics and Biomimetics, 2008. ROBIO 2008. IEEE International Conference on*, pág. 2045, Febrero 2009.
- [Press92] Press, W. H., Flannery, B. P., Teoukolsky, S. A., y Vetterling, W. T. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2^a ed^{ón}., 1992.
- [Rodríguez-Losada04] Rodríguez-Losada, D. *SLAM Geométrico en Tiempo Real para*

- Robots Móviles en Interiores Basado En EKF*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 2004.
- [Romero06] Romero, L. y Concha, S. A. Control of position/velocity in a mobile robot using dc brushless motors. *Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*, págs. 200–205, Septiembre 2006.
- [Roy99] Roy, N. y Thrun, S. Online self-calibration for mobile robots. : *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, 3:2292–2297, Mayo 1999.
- [Shoudong10] Shoudong, H., Yingwu, L., Frese, U., y Dissanayake, G. How far is slam from a linear least squares problem? *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, págs. 3011–3016, Diciembre 2010.
- [Siegwart04] Siegwart, R. y Nourbakhsh, I. *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. The MIT Press, 2004.
- [Stachniss09] Stachniss, C. *Robotic Mapping and Exploration*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2009.
- [Thrun99] Thrun, S., Bennewitz, M., Burgard, W., Cremers, A., Dellaert, F., Hähnel, D., Rosenberg, C., Roy, N., Schulte, J., y Schulz, D. Minerva: A second-generation museum tour-guide robot. *In Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation (ICRA)*, 1999.
- [Thrun04] Thrun, S., Montemerlo, M., Koller, D., Wegbreit, B., Nieto, J., y Nebot, E. Fastslam: An efficient solution to the simultaneous localization and mapping problem with unknown data association. *Journal of Machine Learning Research*, 2004.
- [Thrun05] Thrun, S., Burgard, W., y Fox, D. *Probabilistic Robotics (Intelligent Robotics and Autonomous Agents)*. MIT Press, Septiembre 2005.

- [Vieyra04] Vieyra, A. *Fusión de lecturas de un telémetro láser con un sistema de visión estéreo trinocular para detectar obstáculos en tres dimensiones*. Proyecto Fin de Carrera, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Facultad de Ingeniería Eléctrica, División de Estudios de Posgrado, Abril 2004.
- [Watkins02] Watkins, D. *Fundamentals of Matrix Computations*. Wiley Interscience, 2^a ed^{ón}., 2002. ISBN 0471213942.
- [Yizhong04] Yizhong, L., Yumei, H., y Enxiu, S. Application of data fusion algorithm based on kalman filter in mobile robot position measuring system. *Intelligent Control and Automation, 2004. WCICA 2004. Fifth World Congress on*, 6:4956, Junio 2004.
- [Yun08] Yun, Y., Park, B., y Kyun Chung, W. Odometry calibration using home positioning function for mobile robot. *Robotics and Automation, 2008. ICRA 2008. IEEE International Conference on*, pág. 2116, Mayo 2008.
- [Zhan10] Zhan, W. y Dissanayake, G. Efficient monocular slam using sparse information filters. *Information and Automation for Sustainability (ICIAFs)*, pág. 311, Diciembre 2010.