



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**MÉTODOS INTEGRALES PARA EL ESTUDIO DE CRISTALES
FOTÓNICOS Y FONÓNICOS EN DOS Y TRES DIMENSIONES**

TESIS

Para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

PRESENTA:

HUGO ENRIQUE ALVA MEDRANO

ASESORES DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica
ALBERTO MENDOZA SUÁREZ

Doctor en Ciencias en Óptica
HÉCTOR IGOR PÉREZ AGUILAR

Morelia, Michoacán, Noviembre de 2020

Índice

	Página
Índice	i
Resumen	iii
Abstract	iv
I. INTRODUCCIÓN	1
II. CRISTALES FOTÓNICOS	6
II.1. Modos de superficie en sistemas que incluyen metamateriales	8
II.2. Caos electromagnético	16
III. CRISTALES FONÓNICOS	19
IV. MÉTODOS NUMÉRICOS INTEGRALES	26
IV.1. Descripción de los métodos numéricos integrales	27
IV.2. Método Integral de Superficie Numérica para sistemas electromagnéticos	27
IV.2.1. Observaciones preliminares	27
IV.2.2. Ecuación de Helmholtz para el caso electromagnético	29
IV.2.3. Función de Green para la ecuación de Helmholtz	30
IV.2.4. Representación integral	31
IV.2.5. Discretización de las ecuaciones integrales	32
IV.2.6. Guía de ondas finita	42
IV.3. Método de la Función de Green Periódica para sistemas acústicos . .	47
IV.3.1. Observaciones preliminares	47
IV.3.2. Ecuación general de Helmholtz para el caso acústico	48
IV.3.3. 3DPnCW formada por cuatro placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas	49
IV.3.4. 3DPnCW formada por dos placas acústicas y planas que en- vuelve un arreglo periódico bidimensional de inclusiones cúbicas	54
V. RESULTADOS y DISCUSIONES	60
V.1. Modos de superficie	60

Índice (continuación)

	Página
V.2. Guía de ondas de cristal fotónico con paredes sinusoidales que contienen una capa de metamaterial	62
V.2.1. Polarización TE	62
V.2.2. Polarización TM	64
V.3. Guía de ondas de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto y metamaterial	66
V.3.1. Polarización TE	66
V.3.2. Polarización TM	69
V.3.3. Guía de ondas finita	69
V.4. Caos electromagnético	77
V.4.1. Guía de ondas de cristal fotónico con paredes sinusoidales . .	77
V.4.2. Guía de ondas de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto	80
V.4.3. Polarización TE	81
V.4.4. Polarización TM	83
V.5. 3DPnCW formada por cuatro placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas	86
V.5.1. Intensidades del campo acústico	89
V.6. 3DPnCW formada por dos placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico bidimensional de inclusiones cúbicas	93
VI. CONCLUSIONES	98
A. ECUACIÓN DE ESTADO	102
B. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD	104
C. ECUACIÓN DE FUERZA	106
REFERENCIAS	109

RESUMEN

El estudio de guías de ondas de cristales fotónicos (PCWs) y fonónicos (PnCWs) es de interés actual desde el punto de vista teórico y aplicado. Estas estructuras han mostrado características importantes que nos permiten abordar problemas que van desde tratamientos médicos hasta la obtención de energías limpias. En esta tesis se estudian numéricamente PCWs y PnCWs. En algunas PCWs se considera la presencia de capas de metamaterial (LHM). En estos sistemas se estudia numéricamente la presencia de modos de superficie, mientras que en otras se analiza si, bajo ciertas circunstancias, aparece el fenómeno de caos electromagnético. El modelo para estas PCWs supone superficies perfectamente conductoras. Para las PnCWs se desea calcular sus estructuras de bandas e intensidad del campo en la celda unitaria. La periodicidad requerida para tener un cristal fotónico o fonónico en las guías de ondas es obtenida de varias formas; por ejemplo, para PCWs se consideraron superficies conductoras de forma sinusoidal o superficies planas que envuelven un arreglo periódico de cilindros. Mientras que para una PnCW se trataron superficies acústicas planas que envuelven arreglos de inclusiones esféricas y/o cúbicas. La mayoría de los cálculos numéricos que presentamos fueron realizados para simular guías de ondas de una longitud supuesta infinita (perfectamente periódica). Sin embargo, para PCWs el caso de un modelo de longitud finita (periodicidad truncada) también es tratado para cálculos de reflectancia, transmitancia y campo esparcido. Los métodos numéricos utilizados son métodos basados en ecuaciones integrales. Los resultados obtenidos para cristales fotónicos permiten concluir que para los sistemas con metamaterial se tiene la presencia de modos de superficie, al menos para un estado de polarización. También fue posible obtener el fenómeno de caos electromagnético, el cual se caracteriza por patrones del campo desordenados. En el sistema finito se calculó la respuesta óptica del sistema; así como también la intensidad del campo esparcido en un rango de frecuencias, obteniendo una excelente concordancia para la conservación de la energía y las condiciones de frontera consideradas. Finalmente para los sistemas acústicos fue posible calcular estructuras de bandas y en algunos casos, las intensidades del campo asociadas a modos del sistema, mostrando un comportamiento acorde a las condiciones de frontera. Los resultados encontrados muestran que para sistemas 3D es necesario implementar técnicas de paralelización para mejorar el tiempo de cómputo y con ello obtener cálculos para inclusiones de mayor tamaño. En general, podemos concluir que los métodos numéricos implementados nos permitieron realizar el análisis deseado en cada sistema considerado.

Palabras clave: Modo de superficie, caos electromagnético, campo esparcido, estructura de bandas, inclusiones.

ABSTRACT

The study of photonic (PCWs) and phononic (PnCWs) crystal waveguides is of current interest from the theoretical and applied point of view. These structures have shown important characteristics that allow us to address problems ranging from medical treatments to obtaining clean energy. In this thesis, PCWs and PnCWs are studied numerically. In some PCWs the presence of metamaterial layers (LHM) is considered. In these systems the presence of surface modes is studied numerically, while in others it is analyzed if, under certain circumstances, the phenomenon of electromagnetic chaos appears. The model for these PCWs assumes perfectly conductive surfaces. For the PnCWs it is desired to calculate their band structures and field intensity in the unit cell. The periodicity required to have a photonic or phononic crystal in the waveguides is obtained in several ways; for example, for PCWs, sinusoidal conductive or flat surfaces that surround a periodic arrangement of conductive cylinders were considered. While for a PnCW flat acoustic surfaces that surround arrangements of spherical and or cubic inclusions are considered. Most of the numerical calculations we present were performed to simulate waveguides of assumed infinite length (perfectly periodic). However, for PCWs the case of a finite length model (truncated periodicity) is also treated for reflectance, transmittance and scattered field calculations. The numerical methods used are methods based on integral equations. The results obtained for photonic crystals allow us to conclude that for systems with metamaterial there is the presence of surface modes, at least for a state of polarization. It was also possible to obtain the phenomenon of electromagnetic chaos, which is characterized by disordered field patterns. In the finite system, the optical response of the system was calculated, as well as the intensity of the scattered field in a range of frequencies, obtaining an excellent agreement for the conservation of energy and the boundary conditions considered. Finally, for acoustic systems, it was possible to calculate band structures and in some cases, field intensities associated with system modes, showing a behavior according to the boundary conditions. The results found show that for 3D systems it is necessary to implement parallelization techniques to improve computation time and thus obtain calculations for larger inclusions. In general, we can conclude that the numerical methods implemented allowed us to perform the desired analysis in each system considered.

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

La interacción de ondas con la materia ofrecen un panorama lleno de fenómenos cuyo estudio permite entender la naturaleza que los provoca. Este panorama presenta problemáticas actuales que se vuelven cada vez más difíciles de abordar, englobando con ello, una gran cantidad de fenómenos electromagnéticos, ópticos, acústicos, cuánticos, etc. En los últimos años un gran número de investigadores han apostado por la fabricación de nuevos materiales para hacerle frente a los problemas tecnológicos que enfrenta la humanidad (Collantes-Pablo *et al.*, 2017; Ibiza, 2013a; Porras-González *et al.*, 2015). Entre los objetivos más notables se encuentra el desarrollo de dispositivos cada vez más eficientes (Yong *et al.*, 2017; Yang *et al.*, 2017; Kyung-Koo *et al.*, 2017).

Otro objetivo que puede ser mencionado es el de poder abordar el problema de abastecimiento de energía eléctrica, y a su vez utilizar energías cada vez más limpias, como pueden ser: la energía undimotriz, la cual se refiere en exclusiva al aprovechamiento energético a partir del movimiento de las olas, o la energía mareomotriz, la cual aprovecha el movimiento de las mareas. En medicina también se han encontrado limitaciones tecnológicas para el diagnóstico y tratamiento de algunas enfermedades como el cáncer.

Es bien sabido que desde hace 60 años el número de dispositivos electrónicos en un chip se ha duplicado cada dieciocho meses, este hecho fue predicho por la conocida ley de Moore (Bravo-Abad, 2006). Actualmente se tienen transistores del orden de un nanómetro (Desai *et al.*, 2016). Sin embargo, en el desarrollo de la tecnología se han presentado problemas con el paso del tiempo que sugieren buscar otras alternativas a lo usualmente considerado.

Entre los materiales que aparecen como serios candidatos para resolver algo de estas problemáticas se encuentran los Cristales Fotónicos (PCs¹) y los Cristales Fonónicos (PnCs²). Estos materiales pueden ser de una, dos o tres dimensiones, como se muestra en la Fig. 1.



Figura 1. Ejemplos de PCs en a) 1 dimensión, b) 2 dimensiones y c) 3 dimensiones.

Los PCs y los PnCs comparten características semejantes pero también diferencias importantes, las cuales serán abordadas en los siguientes capítulos. Para el análisis de estos materiales son necesarios modelos matemáticos que en muchas ocasiones, y debido a la falta de soluciones analíticas disponibles, suelen ser abordados desde un punto de vista numérico.

¹Por sus siglas en inglés, Photonic Crystals.

²Por sus siglas en inglés, Phononic Crystals.

Dentro de la literatura pueden encontrarse una amplia variedad de métodos de cálculo teórico-numérico para poder modelar sistemas como los PCs o los PnCs. Entre ellos podemos mencionar: el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD³), el cual es aplicable a estructuras arbitrarias de tamaño finito (Miyashita, 2005) y el método de expansión de ondas planas (PWE⁴), el cual es válido para estructuras periódicas de tamaño infinito. Otros métodos que han sido considerados son: la teoría de dispersión múltiple (MST⁵), el método de la matriz de transferencia (TMM⁶), y el método de elemento finito (FEM⁷) (Vuylsteke, 2014).

Cada método numérico presenta ventajas y desventajas que son apreciadas al considerar sistemas con geometrías particulares. Esto ofrece una amplia gama de posibilidades numéricas para abordar algún sistema físico en particular y con ella una incertidumbre sobre la mejor selección del método teórico-numérico considerado. Finalmente, nuestra selección del modelo puede depender de las propiedades que deseamos conocer en el sistema a analizar.

Particularmente para los sistemas abordados en este trabajo serán utilizadas dos técnicas numéricas conocidas como: el Método Integral de Superficie Numérica (NSIM⁸) (Na, 1980) y el Método de la Función de Green Periódica (PGFM⁹) (Guillén-Gallegos *et al.*, 2019). La convergencia y propiedades de unicidad pueden ser consultados en la Ref. Keller (1968) . Estos métodos hacen uso de la segunda identidad de Green para pasar de un sistema de ecuaciones integrales a un sistema de ecuaciones algebraico. Es importante recalcar que estas técnicas ya han sido utilizadas en el estudio de PCs

³Por sus siglas en inglés, Finite-Diference Time-Domain.

⁴Por sus siglas en inglés, Plane-Wave Expansion.

⁵Por sus siglas en inglés, Multiple Scattering Theory.

⁶Por sus siglas en inglés, Transfer Matrix Method.

⁷Por sus siglas en inglés, Finite Element Method.

⁸Por sus siglas en inglés, Numerical Surface Integral Method.

⁹Por sus siglas en inglés, Periodic Green's Function Method.

y PnCs en 1D, 2D y 3D, dando resultados favorables para el cálculo de estructuras de bandas, reflectancia, transmitancia (Mendoza-Suárez *et al.*, 2007, 2011; Mendoza-Suárez and Pérez-Aguilar, 2015, 2016), cálculo de modos de superficie (Pérez-Aguilar and Mendoza-Suárez, 2016; Alva Medrano and Mendoza-Suárez, 2016) e incluso para el estudio de dispersión acústica de sistemas complejos en 3D con superficies rugosas (Guel-Tapia *et al.*, 2016; Pérez-Aguilar and Mendoza-Suárez, 2016). De modo que el análisis numérico de este tipo de sistemas no sólo requiere un dominio de la naturaleza que lo forma, sino que también constituyen un reto desde el punto de vista computacional.

En esta tesis se estudian numéricamente guías de ondas de cristal fotónico (PCWs¹⁰) y guías de ondas de cristal fonónico (PnCW¹¹). En algunas PCWs se considera la presencia de capas de metamaterial. Es bien sabido que en sistemas que incluyen metamaterial aparecen modos de superficie (Ruppin, 2004). En otros sistemas se analiza si, bajo ciertas circunstancias, aparece el fenómeno de caos electromagnético, el cual está caracterizado por patrones de intensidad de campo desordenados. Para las PnCWs se desea calcular sus estructuras de bandas e intensidad del campo en la celda unitaria. La periodicidad requerida para tener un cristal fotónico o fonónico en las guías de ondas se obtiene de varias formas; por ejemplo, para PCWs se consideraron superficies de conductor perfecto (PEC¹²) de forma sinusoidal o superficies planas que envuelven un arreglo periódico de cilindros. Mientras que para las PnCWs se consideran superficies acústicas planas que envuelven arreglos de inclusiones esféricas y/o cúbicas. Una PCWs para un modelo de longitud finita (periodicidad truncada) también es tratado para cálculos de reflectancia, transmitancia, y campo esparcido.

¹⁰Por sus siglas en inglés, Photonic Crystal Waveguides.

¹¹Por sus siglas en inglés, Phononic Crystal Waveguides.

¹²Por sus siglas en inglés, Perfect Electric Conductor.

Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis se desarrolla de la siguiente manera:

En el capítulo II y III introduciremos con más detalle a los Cristales Fotónicos y Fonónicos, respectivamente. Esto permitirá introducir la terminología y los conceptos básicos, así como posibles aplicaciones. En el capítulo IV se introducen los métodos numéricos empleados para realizar los cálculos en los sistemas considerados. Como ya se había mencionado, los métodos utilizados son el NSIM y el PGFM. En el capítulo IV se presentan los resultados numéricos obtenidos y su interpretación física. Finalmente, en el capítulo V se presentan las conclusiones más sobresalientes de este trabajo de tesis.

Capítulo II

CRISTALES FOTÓNICOS

Es bien sabido que la tecnología actual, basada en el silicio, presenta una serie de problemas, entre los que destacan el hecho de que las interconexiones metálicas que transportan información digital dentro de los chips disminuyen su capacidad a medida que los sistemas disminuyen de tamaño (Cadien *et al.*, 2005). Esta limitación ha permitido el planteamiento de búsqueda de nuevas tecnologías para desarrollar electrónica que pueda cubrir las necesidades actuales.

La tecnología de la nanofotónica se ha planteado como una seria candidata para resolver la problemática derivada de la tecnología actual. La nanofotónica centra su atención en poder controlar la propagación de ondas electromagnéticas a través de materiales sintetizados con la intención de poder confinar la luz en una cierta región del espacio (Mengens *et al.*, 1999). En este sentido se tiene que los PCs son materiales propuestos para el desarrollo de la nanofotónica, presentando significativas ventajas frente a los dispositivos electrónicos. Una de las principales ventajas se debe al hecho de que en los PCs los portadores son los fotones. Esto se ve reflejado en la velocidad de operación comparada con los portadores de los dispositivos electrónicos, que son los electrones.

Un PC es un material estructurado de forma que su función dieléctrica varía periódicamente en el espacio; es decir, son materiales que poseen una periodicidad supuesta perfecta en su estructura (Kittel, 1996). Al comienzo de su desarrollo los PCs eran contruidos, generalmente, de materiales dieléctricos; sin embargo, en la actualidad se pueden encontrar PCs metálicos o metal-dieléctricos. Incorporar este tipo de materiales ha permitido encontrar propiedades interesantes (Miguez *et al.*, 2002). En la Fig. 2 se muestran algunos ejemplos de PCs reales en una, dos y tres dimensiones (Neshev *et al.*, 2007).

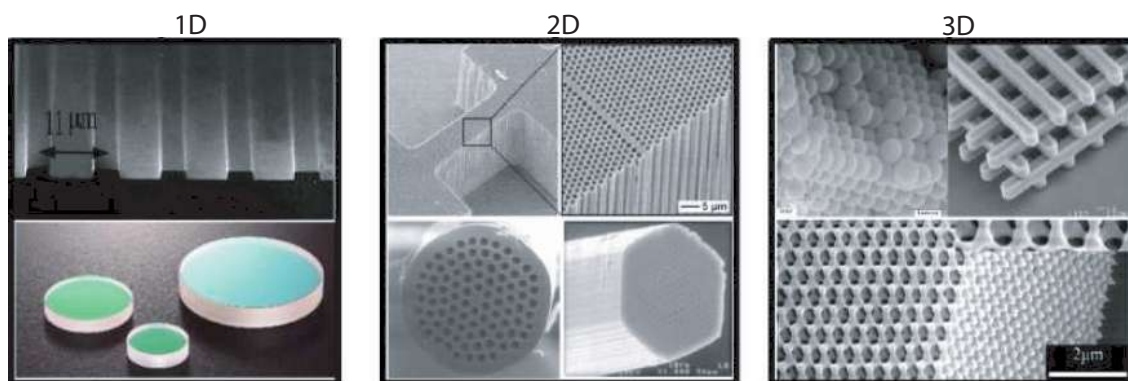


Figura 2. Ejemplos reales de PCs en una, dos y tres dimensiones.

Aunque los PCs son materiales relativamente novedosos, propuestos principalmente para producir localización de la luz, lo cierto es que existen manifestaciones de estos materiales en la naturaleza. Podemos encontrar la presencia de este tipo de materiales en ópalos, en las plumas de algunas aves, en las alas de algunas mariposas y en el caparazón de algunos insectos, y son estas estructuras las que las proveen de ciertas coloraciones, como se muestra en la Fig. 3.

Además, en sistemas donde sea posible obtener una estructura de bandas asociada a la propagación de ondas en un rango de frecuencias también podría ser posible encontrar un rango de frecuencias que no logran transmitirse por el cristal. Al conjunto de todas



Figura 3. Existen estructuras naturales análogas a los PCs que dotan de cierta coloración a la fauna que las porta.

las frecuencias incapaces de transmitirse se les denomina bandas prohibidas (bandgaps). Los bandgaps representan una solución viable para la fabricación de filtros a frecuencias contenidas en ellos. Los PCs presentan otras propiedades interesantes, entre ellas podemos destacar los modos de superficie (Mendoza-Suárez and Pérez-Aguilar, 2015) y el caos electromagnético (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013b). En este trabajo de investigación nos concentraremos precisamente en estas dos propiedades.

II.1. Modos de superficie en sistemas que incluyen metamateriales

Se han encontrado aplicaciones ópticas interesantes en los PCs (Míguez *et al.*, 2002) y si bien es cierto que las principales aplicaciones sugeridas sobre los PCs están relacionadas con el desarrollo de tecnologías. Este mismo desarrollo provee de herramientas

importantes a otras ramas de la ciencias como lo es la medicina (Ebbesen *et al.*, 1998; Atwater, 2007; Lukyanova-Hleb *et al.*, 2016). En medicina los PCs han sido utilizados en detectores químicos y biosensores (González Porras *et al.*, 2015); así como también se han encontrado aplicaciones en telecomunicaciones (Sergey *et al.*, 2006).

Otra herramienta importante son las fibras ópticas basadas en PCs, las cuales son estructuras periódicas fabricadas con periodos del orden desde décimas de micra hasta micras. Las fibras ópticas también tienen grandes aplicaciones en medicina, gracias a éstas ha sido posible, además de la endoscopía, la cirugía laparoscópica caracterizada por realizar a los pacientes incisiones extremadamente pequeñas en comparación con la cirugía tradicional. En la Fig. 4 podemos apreciar un corte transversal de una fibra óptica basada en un PC (Ghirghi, 2013). Las fibras ópticas, naturalmente, pueden ser utilizadas para guiar luz a través de un cristal fotónico. Para ello basta crear un “defecto”, que sirve precisamente de camino para confinar la luz que no puede penetrar en el resto del cristal. En este caso, el cristal fotónico juega el papel del recubrimiento, mientras que el defecto constituye el núcleo.

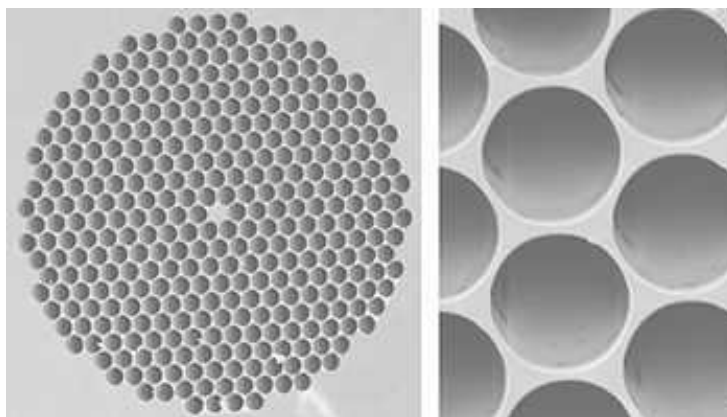


Figura 4. Micrografías SEM de una fibra de cristal fotónico.

Dentro de los cristales fotónicos encontramos los llamados materiales izquierdos

(LHMs¹) o metamateriales (Veselago, 1968). A diferencia de algunos PCs, los LHMs no se encuentran en la naturaleza, de modo que son fabricados artificialmente. Su nombre lo deben al hecho de que los vectores de luz \mathbf{E} , \mathbf{H} y \mathbf{k} forman una triada que cumple la regla de la mano izquierda para una onda que se propaga a través de estos materiales, como se muestra en la Fig. 5. Los LHMs son arreglos periódicos de estructuras, cuyo tamaño de la celda unitaria es mucho menor que la longitud de onda de la luz que interactúa con el cristal (Podolsky *et al.*, 2003). Además, se caracterizan por tener algunas propiedades macroscópicas distintas a las de sus materiales constituyentes básicos, las cuales dependen de su estructura, normalmente ordenada, y no de su composición.

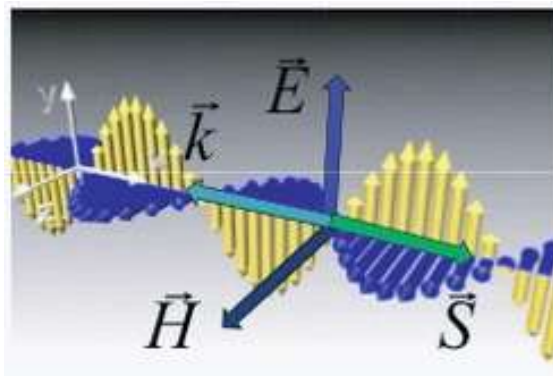


Figura 5. Representación de los vectores \mathbf{E} , \mathbf{H} y \mathbf{k} en un metamaterial.

Entre las propiedades destacadas de los matamateriales podemos mencionar que tienen simultáneamente una permitividad eléctrica (ϵ), una permeabilidad magnética (μ) y un índice de refracción (n) negativos. Estas propiedades les dan capacidades extraordinarias para curvar la trayectoria de las ondas electromagnéticas de manera distinta a lo que ocurre en materiales naturales, lo que origina que algunos fenómenos ópticos conocidos presenten variaciones que pueden ser utilizadas para el desarrollo de nuevas tecnologías.

¹Por sus siglas en inglés, Left-Handed Materials.

Debido a estas propiedades se han comenzado a estudiar una gran variedad de sistemas que incluyen LHMs. Entre los estudios realizados para estos sistemas se pueden mencionar: la refracción negativa (Yuntuan *et al.*, 2006), la investigación sobre propiedades de esparcimiento en sistemas cilíndricos largos hechos a partir de medios con LHM (Ruppin, 2004; Kuzmiak and Maradudin, 2002) y la transmisión extraordinaria de la luz (Ebbesen *et al.*, 1998), lo que ha dado lugar a un buen número de aplicaciones entre las que destacan el desarrollo de sensores y dispositivos opto-electrónicos. En la Fig. 6 puede apreciarse el efecto de la refracción negativa obtenida para una lámina de LHM (Represa Fernández *et al.*, 2013). En ella puede observarse que el haz refractado se dirige del mismo lado del haz incidente, tomando como referencia la normal a la superficie. Esto es contrario al caso ordinario de la refracción típica con materiales no artificiales.

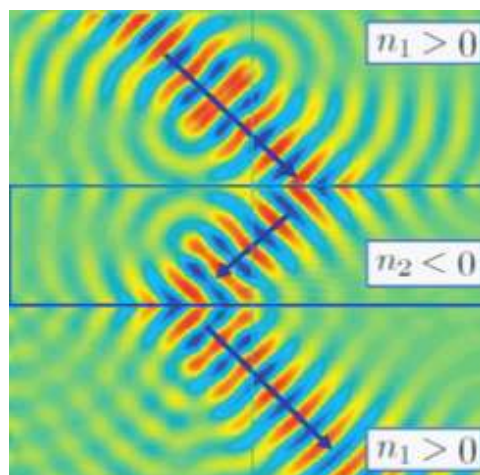


Figura 6. Refracción negativa en una lámina de metamaterial. Debido al índice de refracción negativo, el haz refractado se dirige hacia mismo lado del haz incidente.

Al comienzo del desarrollo de los LHMs los experimentos fueron realizados en el rango de microondas en el espectro electromagnético; sin embargo recientemente se ha logrado realizar investigaciones en el espectro del visible e infrarrojo (García-Meca *et al.*, 2007; Shalaev, 2005). Por otro lado, existen evidencias teóricas (Ruppin, 2004)

y numéricas (Mendoza-Suárez *et al.*, 2008; Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a) suficientes para determinar que en sistemas que incluyen metamateriales aparecen modos de superficie. Este tipo de fenómenos ya es utilizado en tratamientos médicos. Por ejemplo, se han sintetizado nanopartículas que localizan y destruyen células cancerígenas (Atwater, 2007; Lukyanova-Hleb *et al.*, 2016). Para ello se introducen en el torrente sanguíneo nanopartículas que se adhieren a las células de cáncer. Posteriormente mediante radiación electromagnética se produce calentamiento en las nanopartículas que origina la destrucción de las células malignas. Este proceso resulta poco dañino para el tejido continuo a las células de cáncer, y aunque este tratamiento aún no ha sido probado en seres humanos se espera que un futuro cercano se pueda utilizar con éxito en pacientes con esta enfermedad. Precisamente el proceso para la aniquilación de las células malignas se realiza mediante modos de superficie excitados en las nanopartículas (Ebbesen *et al.*, 1998).

El estudio de estos modos de superficie los hace la plasmónica (Podolsky *et al.*, 2003; Blaber *et al.*, 2009; Evlyukhin *et al.*, 2008), la cual constituye una rama de la nanofotónica. La nanofotónica surgió en los últimos años como un nuevo campo de investigación como consecuencia del avance de la tecnología para la fabricación de nanoestructuras (Salas Montiel and Blaize, 2015).

Por su parte, la plasmónica tiene precisamente como estudio principal el confinamiento de los campos electromagnéticos en volúmenes pequeños comparados con la longitud de onda utilizada en el experimento. Este fenómeno surge como resultado de la interacción entre los electrones de conducción de las interfaces metal-dieléctrico o en nanoestructuras metálicas (Cruz *et al.*, 2015), debido a que los metales, además de reflejar la luz, tienen una propiedad óptica menos conocida: bajo ciertas condiciones la luz puede propagarse sobre las superficies metálicas sin alejarse de ellas. Ésta es una

propiedad muy peculiar, ya que en condiciones normales la luz viaja en el espacio y los medios materiales y no se le confina con facilidad.

Esta onda de superficie involucra una transferencia de energía entre la luz y los electrones libres presentes en los metales. A este tipo de ondas se les llama “ondas plasmónicas”. Más aún, cuando los campos se confinan para propagarse a través de la interfaz son llamados polaritones de plasmones de superficie (SPPs²) para polarización TM. Debido a que en este trabajo se han considerado ambos estados de polarización llamaremos a este fenómeno de forma general modo de superficie. Los modos de superficie fueron descubiertos por Rufus Ritchie en los años cincuenta del pasado siglo (Ritchie, 1957).

La luz es indispensable para nuestra visión, a través de ella conocemos en gran medida el mundo que nos rodea; desde observar un arcoiris en un día lluvioso, hasta una constelación a miles de años luz de la nuestra. El hombre ha sabido sacar partido de las propiedades de la luz, hoy en día se guían datos y señales con la ayuda de fibras ópticas a grandes distancias con pocas pérdidas. Sin embargo, los electrones al moverse por un medio disipan energía en forma de calor. Este hecho ha limitado la aplicación de los modos de superficie en dispositivos ópticos que envíen o procesen información.

Lo cierto es que, tras haber recorrido un modo de superficie sólo una décima de milímetro, más del 50% de la intensidad de luz que lleva se ha disipado ya en forma de calor. Este efecto muestra que estos modos pueden no ser muy adecuados para transportar energía a distancias mayores que las décimas de milímetro. Sin embargo, utilizar estos modos de superficie para transportar energía a distancias más pequeñas a las de una décima de milímetro podría no ser una mala idea. Esto se debe a que la continua miniaturización de los componentes electrónicos ha creado la necesidad de

²Por sus siglas en inglés, Surface Plasmon Polaritons.

transportar información a escalas de una pocas micras (Weeber *et al.*, 2001; Lezec *et al.*, 2002; García-Vidal and Martin-Moreno, 2008).

Precisamente esta necesidad de trasportar energía a escalas de pocas micras ha llevado a considerar que los dispositivos fotónicos podrían llegar algún día a reemplazar a los circuitos electrónicos de los microprocesadores y de otros componentes informáticos, para ello se debe poder manipular la luz visible y otras ondas electromagnéticas. Esto explica porque investigadores y científicos en todo el mundo trabajan en la generación de estos modos de superficie (Moreno *et al.*, 2008). Poder controlar el paso de luz a través de superficies a nuestra voluntad, aún en pequeñas dimensiones espaciales, podría abrir las puertas a nuevas tecnologías que permitan transportar información a grandes distancias de manera más eficiente.

En este trabajo de investigación se han considerado tres sistemas para el análisis de modos de superficie. Dos de ellos son considerados idealmente infinitos y son básicamente guías de ondas de cristal fotónico que contienen metamaterial. El primero se caracteriza por tener paredes sinusoidales de PEC recubiertas por una capa de LHM como se muestra en la Fig. 7(a). En la Fig. 7(b) se muestra el segundo, el cual es una PCW con superficies planas de PEC y con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas suaves formadas por una capa de LHM, cuyo interior puede ser PEC, dieléctrico o simplemente vacío. En estos dos sistemas se calcularán los modos propios y sus respectivas intensidades del campo electromagnético dentro de las guías de ondas.

El tercer sistema corresponde a una PCW finita formada por dos placas paralelas de PEC y un arreglo de inclusiones cilíndricas de LHM. La descripción gráfica del sistema se muestra en la Fig. 8. Puede notarse la similitud entre este sistema y el mostrado en la Fig. 7(b). En efecto, ambos sistemas comparten características en su forma. Sin embargo, también difieren en características que los hacen físicamente

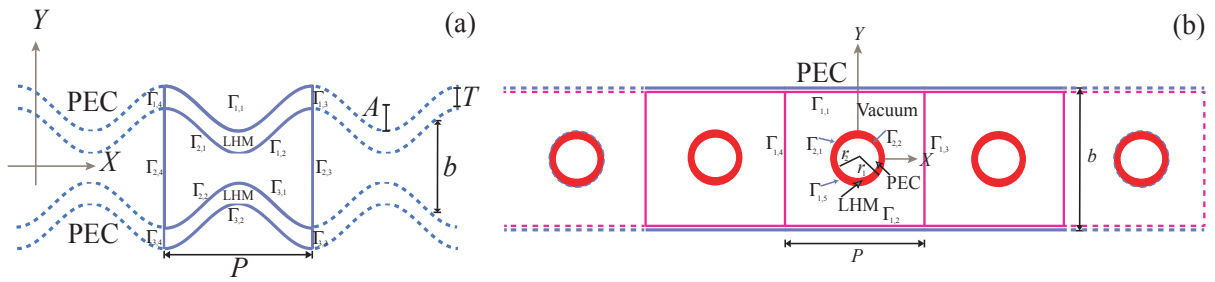


Figura 7. (a) Guía de onda de PEC con paredes sinusoidales recubiertas de metamaterial. (b) Guía de onda de PEC con inclusión de PEC recubierto por una capa de metamaterial.

diferentes. Como veremos en la sección de los métodos numéricos; por un lado, el sistema infinito puede ser considerado como un problema de eigenvalores, cuyos valores son modos electromagnéticos en el sistema. Mientras que en el sistema finito se calcula la respuesta óptica mediante la reflectancia, transmitancia y el campo esparcido a una frecuencia dada. El objetivo del análisis de este sistema es averiguar si bajo ciertas condiciones, el sistema finito hereda propiedades del infinito.

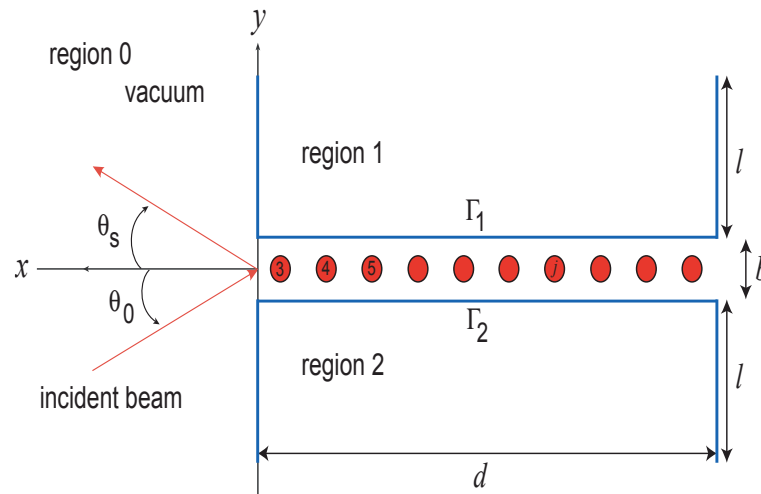


Figura 8. Guía de onda finita con inclusiones cilíndricas de LHM.

II.2. Caos electromagnético

El estudio de las propiedades de transporte en canales de billar clásicos y cuánticos ha resultado ser de gran interés debido a las aplicaciones que surgen de ellas. Algunas de estas propiedades pueden ser aplicadas en superconductores (Diggins *et al.*, 1994), nano-física (Park *et al.*, 2000), cristales fotónicos (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011) o fibras ópticas (Doya *et al.*, 2002). Algunos de los canales de billar más citados en la literatura son: el billar de Hadamard (Sanjuán, 2006) y el billar de Sinaí (Sinai, 1963), considerados como algunos de los precursores de la teoría de caos en billares.

De forma general, un canal de billar es un espacio cerrado o abierto en el que transitan una o varias partículas con movimiento rectilíneo. En estos sistemas pueden considerarse interacciones entre las partículas o no. La interacción con la frontera (o contorno) del canal es mediante choques y reflexiones, en donde el ángulo de entrada es igual al de salida respecto al plano normal a la superficie de la frontera. Las propiedades dinámicas de un canal de billar se determinan generalmente por la geometría de la frontera.

Como ejemplo de canales de billar cerrados podemos tomar el juego de billar, que es una mesa con forma rectangular, en la que se puede predecir la trayectoria de una bola y llevarla hasta la buchaca. En particular, cuando la mesa no es rectangular y tiene formas geométricas diversas se puede presentar el fenómeno de caos, en cuyo caso ya no es posible predecir la trayectoria de la bola. Las formas del canal podrían ser por ejemplo: elíptica, ondulada o circular. En las Figs. 9 y 10 se muestran dos ejemplos de canales de billar.

El sistema mostrado en la Fig. 9 es un canal de billar abierto, formado por dos superficies onduladas. Por otro lado el sistema mostrado en la Fig. 10 es un canal de billar cerrado que puede imaginarse como una mesa de billar sin buchacas, donde

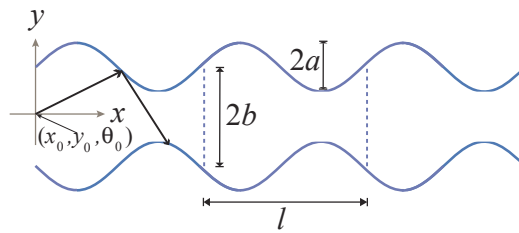


Figura 9. Descripción gráfica de un canal clásico.

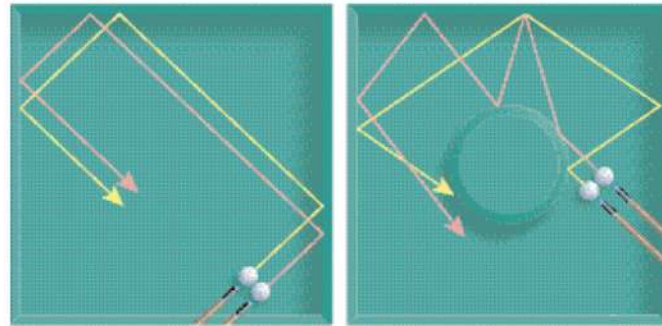


Figura 10. Comportamiento caótico en una partida idealizada de billar (Porter and Liboff, 2003).

se considera una quinta banda de forma circular. En la literatura se puede ver que ambos sistemas clásicos han sido objeto de estudio, y en ambos casos se tiene que, bajo ciertas condiciones, los sistemas presentan el fenómeno de caos (Herrera-González *et al.*, 2012b; Sinai, 1963). Estos dos sistemas inspiraron esta parte del presente trabajo. Para entender con mayor facilidad lo que se quiere transmitir, consideremos los sistemas mostrados en las Figs. 11 y 12.

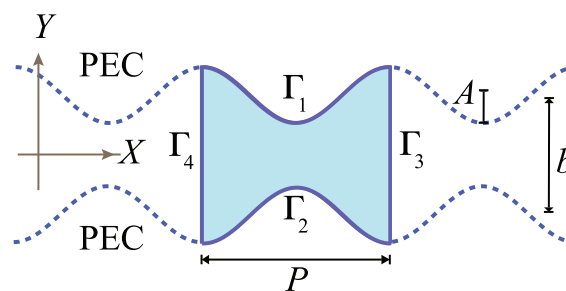


Figura 11. Guía de ondas compuesta por dos superficies onduladas perfectamente conductoras.

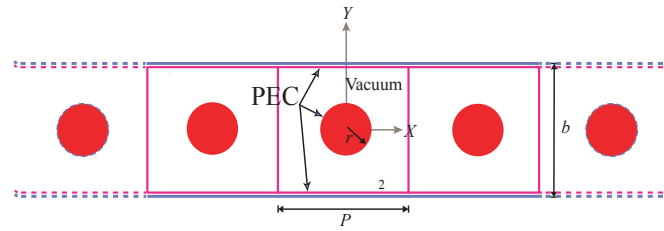


Figura 12. PCW compuesta por dos superficies planas de PEC y una serie periódica de inclusiones cilíndricas circulares.

El sistema mostrado en la Fig. 11 es una PCW formada por dos superficies onduladas de PEC, mientras que el de la Fig. 12 es una PCW compuesta por dos superficies planas de PEC y una serie periódica de inclusiones cilíndricas circulares. Como se puede notar en las geometrías de los sistemas de las Figs. 11 y 12, estos sistemas pueden representar una contraparte electromagnética u óptica de los sistemas mostrados en las Figs. 9 y 10, respectivamente. En esta parte del trabajo estamos interesados en conocer, si bajo ciertas circunstancias, en los sistemas mostrados en las Figs. 11 y 12 aparece el fenómeno de caos, el cual tiene como característica un patrón de intensidad de campo, $I(\mathbf{r})$, irregular, desordenado o con cierta granularidad.

Esta parte del trabajo completa el estudio de los sistemas introducidos en las Refs. (Pérez-Aguilar and Mendoza-Suárez, 2016; Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a,b), donde se obtienen modos de superficie para los sistemas considerados en las Figs. 11 y 12.

Capítulo III

CRISTALES FONÓNICOS

Otro concepto que aparece después del cristal fotónico es el de cristal fonónico o PnC, el cual es el análogo al de cristal fotónico pero para ondas acústicas. En este caso el fonón es la vibración elástica primaria de la materia; así como el fotón es la partícula elemental de la luz (Ibiza, 2013b). Los PnCs son estructuras artificiales diseñadas para el control de la propagación de ondas acústicas, y al igual que los PCs pueden ser de una, dos o tres dimensiones. Los PnCs permiten cubrir gran parte del espectro sónico continuo, desde los infrasonidos (hercios) hasta las ondas térmicas (terahercios), pasando por los sonidos audibles (kilohercios), los ultrasonidos (megahercios) y los hipersonidos (gigahercios) (Maldovan, 2013). En la Fig. 13 se muestra el espectro acústico para las ondas sónicas.

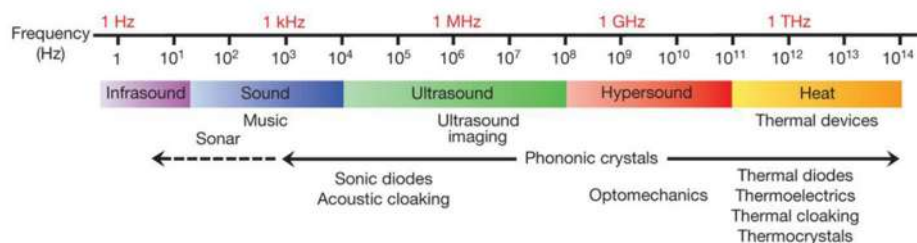


Figura 13. Rango de frecuencias del espectro sónico.

Un ejemplo de cristal fonónico es la escultura minimalista de Eusebio Sempere (1923-1985) localizada en un parque de la capital española, en Madrid, y la cual es mostrada en la Fig. 14. Eusebio Sempere construyó, aparentemente sin intención, este cristal fonónico cuyo nombre es Órgano. Esta estructura está realizada con tubos de 3 cm de diámetro dispuestos en una estructura periódica con una distancia de 10 cm entre los centros de los tubos, formando un círculo en una plataforma de 4 m de diámetro.



Figura 14. Escultura hecha por Eusebio Sempere, la cual resulta ser un cristal fonónico.

Este cristal fonónico tiene una banda prohibida alrededor de la frecuencia (audible) de 1.6 kHz, por lo que ciertas frecuencias cercanas a 1.6 kHz no logran transmitirse a través de él. Los bangaps en PnCs resultan particularmente interesantes debido a sus posibles aplicaciones como filtros de ondas electromagnéticas y acústicas. En la Fig. 14 se muestra una estructura de bandas obtenida a partir de una red cuadrada de cilindros rígidos de radio $r = 0.07$ m, un parámetro de red $a = 0.15$ m y una fracción de llenado del 68.4% (Ibiza, 2013a). En ella se puede apreciar que aparece una banda prohibida para frecuencias entre 1000 y 1800 Hz. En este rango ninguna frecuencia puede propagarse en el sistema.

Las dimensiones que intervienen en los cristales fonónicos van desde unos pocos

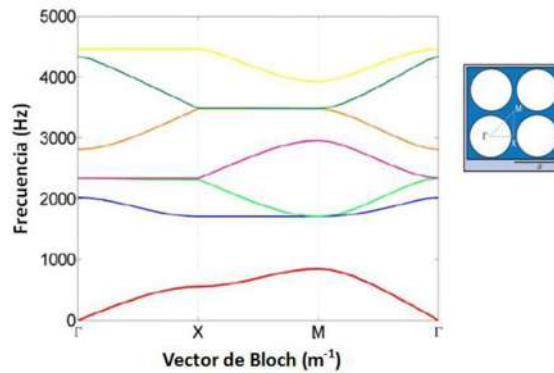


Figura 15. Estructura de bandas de una red cuadrada de cilindros rígidos de radio $r = 0.07$ m, un parámetro de red $a = 0.15$ m y una fracción de llenado del 68.4%.

metros hasta un centenar de nanómetros. A esta escala, la materia aparece como continua, por lo que las leyes de la mecánica clásica son aplicables. La idea detrás de los cristales fonónicos es fabricar un material artificial periódicamente estructurado, uniendo al menos dos materiales diferentes. Cuanto más contraste exista entre las propiedades acústicas que participan, más probable será observar fenómenos relacionados con la interferencia de ondas (Ibiza, 2013b).

Como se había mencionado, entre las principales propuestas para las aplicaciones de los PnCs se tiene al aislamiento acústico. Esta idea está fundamentada en la analogía que se tiene entre los PnCs con los PCs: es bien sabido que bajo ciertas circunstancias en un PC pueden aparecer bandgaps en donde las ondas no pueden propagarse. Para una frecuencia contenida en un bandgap completo, un PnC se comportaría como un filtro acústico al reflejar toda la onda incidente asociada a esa frecuencia. Este principio podría ser aplicado para controlar la propagación de las ondas acústicas, disminuyendo con ello la contaminación acústica que sufren algunas de las ciudades más concurridas en el planeta. También podría ser posible la fabricación de barreras insonorizadas para autopistas. En estos ejemplos deben considerarse periodicidades que van desde los 17.15 m hasta los 0.01715 m, aproximadamente. Esto debido a que el oído humano es sensible

a las frecuencias entre 20 y 20,000 Hz, típicamente.

Otra aplicación puede ser la de considerar PnCs para que actúen como rompeolas. Esto debido a que las olas cuando golpean un obstáculo, son parcialmente dispersadas en todas direcciones. Esto podría reducir de forma importante la amplitud de las olas que alcanzan la orilla. Y ya con este tipo de propuestas en mente, no puede faltar la idea de usar estas estructuras para focalizar las olas hacia una planta con el fin de convertir la energía mecánica en energía eléctrica (Ibiza, 2013b). Este tipo de procesos podría ayudar a la obtención de energía eléctrica de forma limpia.

De forma análoga a las PCWs surge el concepto de las PnCWs, con ellas y los PnCs se busca controlar la dispersión de ondas en aplicaciones tecnológicas diversas (Romero, 2012). Algunos ejemplos de lo anterior son:

a) Dispositivos optoacústicos. En el desarrollo de prototipos, se acoplan fonones y fotones. De ahí que, una cavidad óptica también puede ser considerada acústica, siendo que un modo óptico localizado de forma espacial se puede acoplar a uno acústico, también localizado. Usando un material con una estructura periódica con un espaciado de 150 nm, ello permite localizar fotones de 500 THz y fonones de 20 GHz (Maldovan, 2013).

b) Diodos sónicos. Se ha fabricado un PnC unidimensional de 1 mm de espesor, que se comporta como un diodo para ultrasonidos (megahercios) (Yeh, 2013).

c) Capas de camuflaje (o “invisibilidad”) acústicas. Existen, tanto diseños bidimensionales para ultrasonidos, como tridimensionales para frecuencias audibles (aunque sólo para objetos de tamaño milimétrico) (Berkowitz, 2018; Porter *et al.*, 2015; Casadei and Bertoldi, 2014; Gupta, 2014; Miyashita, 2005).

También es posible fabricar PnCs con periodicidades de micras donde aparecen bangaps para frecuencias de órdenes que van de algunos cientos de MHz hasta algunos

GHz. Este hecho es importante porque este rango de frecuencias es precisamente donde se desarrolla el campo de las comunicaciones inalámbricas. Los investigadores en el tema tienen grandes expectativas sobre los PnCs para guiar ondas acústicas de forma altamente eficiente, minimizando la pérdida de energía. Para ello se han considerado canales que van a lo largo de la dirección de propagación.

En la literatura es posible encontrar una vasta diversidad de estudios enfocados en sistemas formados por cristales fonónicos bidimensionales (2DPnC¹) y que consideran planos transversales y arreglos periódicos de cilindros, cuya longitud es considerada infinita (Gupta, 2014; Ibiza, 2013a; Yeh, 2013; Lucklum, 2014; Cicek, 2014; Romero, 2012; Bringuier, 2011; Sz-Chin, 2011; Miyashita, 2005; Sliwa, 2005; Penec, 2004; Khelif, 2003a,b). Por otro lado, para sistemas de cristales fonónicos tridimensionales (3DPnC²), se han encontrado características importantes que pueden ser utilizadas en evaluación no destructiva de sólidos, imagen médica ultrasónica y quirúrgica, estructura de resonancia por vibraciones, la refracción negativa, aislamiento del sonido, barreras sónicas, dispositivos de sonar bajo el agua, capas de protección contra golpes, por mencionar algunos. Estos resultados han inspirado un gran número de estudios prácticos en 3D (Berkowitz, 2018; Cui *et al.*, 2018; Fitzgerald, 2018; Guel-Tapia *et al.*, 2016; Lee, 2015; Porter *et al.*, 2015; Vuylsteke, 2014; Turley, 2006; Yang, 2004; Kress, 2006; Liu, 2000; Partridge, 1993).

En este trabajo de investigación se han considerado dos sistemas acústicos, ambos son básicamente guías de ondas de cristal fonónico en tres dimensiones (3DPnC³). El primero de ellos está formado por cuatro placas acústicas y planas que envuelven un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas, como se muestra en la Fig.

¹Por sus siglas en inglés, Two-Dimensional Phononic Crystal.

²Por sus siglas en inglés, Three-Dimensional Phononic Crystal.

³Por sus siglas en inglés, 3D Phononic Crystal Waveguides.

16. En este sistema estamos interesados en el cálculo de estructuras de bandas y las intensidades del campo dentro de la guía para modos del sistema.

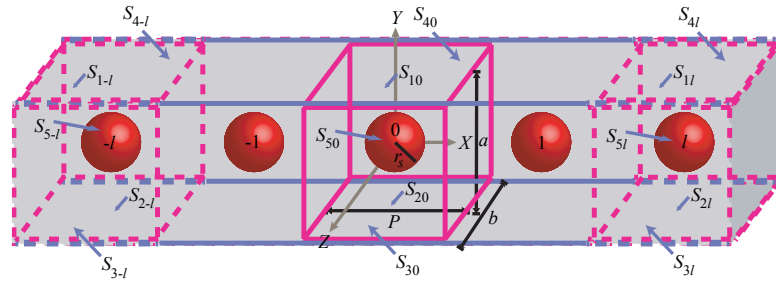


Figura 16. Descripción gráfica de una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones esféricas.

El segundo sistema es una 3DPnCW formada por dos placas acústicas y planas que envuelven un arreglo periódico bidimensional de inclusiones cúbicas como puede observarse en la Fig. 17. Para este sistema estamos interesados en el cálculo de estructuras de bandas.

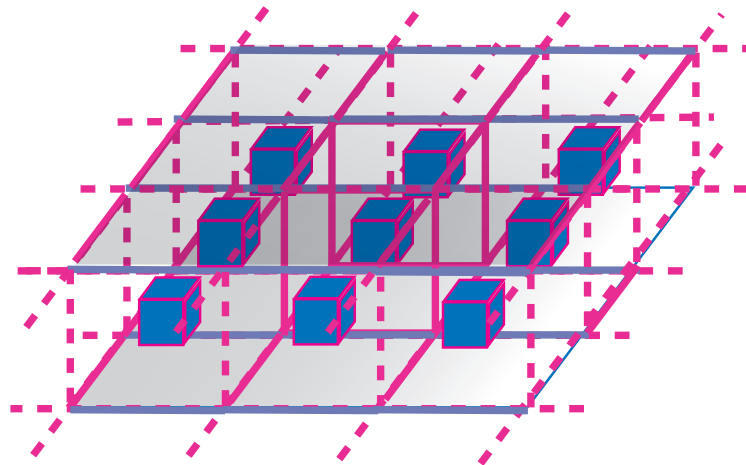


Figura 17. Descripción gráfica de una 3DPnCW formada por dos superficies acústicas planas y paralelas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones cúbicas.

En ambos sistemas se considera que todas las superficies involucradas son superficies acústicas y el medio entre los planos es aire. Además, en ambos sistemas se consideraron superficies acústicas suaves y rígidas (o condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann).

Esta parte del presente trabajo de investigación surge debido a lo poco extensas que resultan algunas referencias sobre la propagación acústica a través de guías de ondas para sistemas 3D. Nuestro objetivo principal es aportar en el análisis y modelado numérico de la respuesta acústica de estructuras cristalinas, como son las PnCWs. Más aún, es bien sabido que para la respuesta acústica de estructuras cristalinas como son las PnCWs, es posible establecer una correspondencia biunívoca que podría relacionar las regiones de bandgaps que aparecen en dichas estructuras periódicas con los valores de la reflectancia del sistema finito; permitiendo sentar las bases para un comparativo en un trabajo futuro, entre los casos infinito y finito, respectivamente.

Capítulo IV

MÉTODOS NUMÉRICOS INTEGRALES

En este capítulo se presentan el NSIM y PGFM, métodos numéricos rigurosos que han permitido el análisis de los sistemas electromagnéticos y acústicos que sentaron las bases para este trabajo de investigación. El NSIM será presentado y aplicado para los sistemas electromagnéticos, mientras que el PGFM será presentado y utilizado para sistemas acústicos. Para los casos electromagnéticos, el NSIM nos permitirá realizar el cálculo de las estructuras de bandas para las guías de onda de cristal fotónico en el caso infinito, y la reflectancia y transmitancia para el caso finito. En ambos casos nos permitirá calcular las intensidades del campo dentro de las guías de ondas. En el caso de sistemas acústicos, el PGFM calcular la estructura de bandas de los sistemas acústicos considerados, así como también el cálculo de la intensidad del campo acústico asociados a algunos modos.

IV.1. Descripción de los métodos numéricos integrales

Para todos los sistemas considerados en este trabajo, los métodos integrales utilizados se basan en resolver numéricamente la ecuación de Helmholtz a partir de ecuaciones integrales (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006). Sin importar si los sistemas son electromagnéticos o acústicos, los métodos parten del segundo teorema integral de Green, de donde se obtienen ecuaciones integrales acopladas que involucran como incógnitas: al módulo del campo y su derivada normal, evaluadas en las fronteras de los perfiles generados por interfaces en la celda unitaria para el caso infinito, y el propio sistema para el caso finito. La discretización de las ecuaciones permite pasar de un sistema de ecuaciones integrales a un sistema de ecuaciones algebraico. El hecho de que los métodos sólo involucren un conjunto discreto de puntos a lo largo de las interfaces del sistema permite resolver problemas de interacción del campo electromagnético con recursos computacionales viables. Una vez calculadas las fuentes es posible calcular la estructura de bandas, la intensidad del campo cercano, la reflectancia, la transmitancia o el campo esparcido, según sea el caso.

IV.2. Método Integral de Superficie Numérica para sistemas electromagnéticos

IV.2.1. Observaciones preliminares

En este trabajo de tesis consideramos cinco sistemas electromagnéticos. El primer sistema considerado para presentar el NSIM se compone de una guía de ondas formada

por dos superficies onduladas de PEC [ver Fig. 11]. En la literatura se pueden encontrar resultados sobre este sistema (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011; Mendoza-Suárez and Pérez-Aguilar, 2013, 2015); sin embargo, este sistema sentó las bases para una parte de este trabajo de investigación, razón por la que ha sido considerado. El segundo sistema se compone de una guía de ondas formada por dos superficies de PEC, con perfiles ondulados y periódicos en una sola dirección [ver Fig. 12]. Cada uno de los perfiles contiene una capa de LHM y el medio existente entre ambas superficies es vacío. Como veremos más adelante, este sistema puede ser considerado como una generalización del sistema anterior, ya que sólo se consideran capas de LHM adicionales al sistema anterior, con vacío en su interior.

El tercer sistema está formado por una guía de ondas compuesta por dos superficies planas y paralelas de PEC que envuelven un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas huecas de LHM, cuyo interior puede contener, PEC o vacío. El cuarto sistema es una guía formada por dos superficies planas y paralelas de PEC con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas también de conductor perfecto. Este último sistema es un sistema más simple del que lo precede, donde se considera LHM en el sistema.

Aunque los cuatro sistemas ya mencionados podrían relacionarse por la similitud de sus geometrías, en realidad en cada uno se busca obtener resultados distintos. En algunos casos, como el segundo y tercer sistema estamos interesados en completar cálculos que se habían realizado como parte de un trabajo de investigación anterior (Alva Medrano and Mendoza-Suárez, 2016), relacionado con modos de superficie. Para el caso del primer sistema nos pareció importante presentarlo en el método numérico para que éste pueda ser entendido con mayor facilidad. Finalmente en el cuarto sistema estamos interesados en saber si bajo ciertas condiciones podemos obtener caos electromagnético.

Todos los sistemas anteriores tienen algo en común, todos ellos son sistemas considerados idealmente infinitos. Sin embargo, los sistemas físicos reales son finitos. Por esto, el quinto sistema considerado es una guía de ondas de cristal fotónico finita, formado por dos placas paralelas de PEC y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas de LHM. En este sistema estamos interesados en la reflectancia y transmitancia, de donde obtendremos también cálculos para el campo esparcido dentro de la guía.

IV.2.2. Ecuación de Helmholtz para el caso electromagnético

Antes de comenzar con la descripción del método integral vamos a obtener la ecuación de onda con medios sin cargas ni corrientes $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, cuyas propiedades de material dadas por la permitividad eléctrica $\varepsilon(\omega)$ y permeabilidad magnética $\mu(\omega)$ dependerán de la frecuencia ω , ya que estamos considerando el vacío. Entonces las ecuaciones de Maxwell correspondientes son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu(\omega) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon(\omega) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

Aplicando el operador rotacional sobre la Ec. (3) se tiene que,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right), \quad (5)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (6)$$

Luego, sustituyendo las expresiones dadas por las Ecs. (2) y (4) en la Ec. (6) obtenemos la ecuación de onda asociada al campo eléctrico,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Análogamente, para el campo \mathbf{H} se obtiene:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon(\omega)\mu(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

tal que $\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = 1/(v(\omega))^2$, donde $v(\omega)$ corresponde a la velocidad de onda en el medio que depende de la frecuencia ω . Por otro lado, si consideramos que los campos electromagnéticos poseen una dependencia armónica con el tiempo, entonces los podemos expresar como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (10)$$

donde ω es la frecuencia de la onda electromagnética y $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ el vector de posición del punto de observación que es independiente de z . De modo que las ecuaciones de onda resultantes se pueden expresar en la forma de la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + k^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (11)$$

donde se ha definido $k = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}\omega$ como la magnitud del vector de onda y $\Psi(\mathbf{r})$ representa el campo eléctrico E_z o el campo magnético H_z , para polarización TE y TM, respectivamente.

IV.2.3. Función de Green para la ecuación de Helmholtz

Para estudiar los sistemas propuestos, la ecuación de Helmholtz se puede escribir como:

$$\nabla^2 \Psi_j(\mathbf{r}) + k_j^2 \Psi_j(\mathbf{r}) = 0, \quad (12)$$

donde j indica el j -ésimo medio, de nuevo $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ representa el vector de posición del punto de observación, el índice de refracción en el j -ésimo medio está dado por $n_j(\omega) = \pm \sqrt{\varepsilon_j(\omega)\mu_j(\omega)}$, donde $\mu_j(\omega)$ es la permeabilidad magnética y $\varepsilon_j(\omega)$ la permitividad eléctrica. La velocidad de la luz en el vacío es denotada por c . El signo en el

índice de refracción será negativo cuando consideremos LHM y positivo para materiales dieléctricos o el vacío. La magnitud del vector de onda en ese medio puede ser expresada como $k_j = n_j(\omega) \left(\frac{\omega}{c}\right)$.

Para resolver la Ec. (12) consideremos una función de Green $G_j(r, r')$ que sea solución a la ecuación

$$\nabla^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (13)$$

donde $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ físicamente representa un propagador del campo debido a una fuente de luz puntual que emite a la frecuencia ω en la posición \mathbf{r}' y $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la delta de Dirac.

Una solución de la Ec. (13) está representada por la siguiente función de Green,

$$G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (14)$$

donde $H_0^{(1)}(\zeta)$ es la función de Hankel de primera clase y de orden cero y \mathbf{r}' representa el vector de integración.

IV.2.4. Representación integral

Para encontrar la solución de la Ec. (12) aplicamos el Teorema de Green (Marsden and Tromba, 2004) para las funciones $\Psi_j(\mathbf{r})$ y $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en el j -ésimo medio. Para ello multipliquemos la Ec. (12) por $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y la Ec. (13) por $-\Psi(\mathbf{r})$. Posteriormente sumando las ecuaciones restantes e integrando sobre una superficie cerrada S_j que a su vez, está limitada por el contorno Γ_j , es posible obtener

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} [G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \Psi_j(\mathbf{r}) - \Psi_j(\mathbf{r}) \nabla G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \oint_{S_j} \Psi_j(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') da. \quad (15)$$

En este caso ds' representa la longitud de arco, da representa el diferencial de área y $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal al contorno Γ_j . Dado que la derivada normal está definida como

$$\frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \Psi_j(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (16)$$

y

$$\frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}} = \nabla G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (17)$$

entonces la Ec. (15) se puede expresar como:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds' = \Psi_j(\mathbf{r}') \theta(\mathbf{r}'). \quad (18)$$

Notemos que en la Ec (18) la integral de superficie se ha representado mediante el producto del campo por la función $\theta(\mathbf{r})$, definida como $\theta(\mathbf{r}') = 1$ si \mathbf{r}' está dentro de la celda unitaria S y $\theta(\mathbf{r}') = 0$, en el caso contrario.

Si consideramos la convención de que \mathbf{r} representa la posición del observador, que es donde se mide el campo, podemos entonces intercambiar las variables \mathbf{r} y \mathbf{r}' en la Ec. (18), resultando

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right] ds = \Psi_j(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{r}), \quad (19)$$

donde ahora \mathbf{r}' se desplaza sobre los contornos.

Resumiendo, la representación integral de la ecuación de Helmholtz para el campo $\Psi_j(\mathbf{r})$ está expresado por la Ec. (19), siendo la función de la Ec. (14) una función de Green en medios homogéneos en la Ec. (19). Γ_j es el contorno cerrado que limita a la superficie S_j , de este modo la normal involucrada en las derivadas normales que aparecen en la Ec. (18), va hacia afuera del contorno cerrado Γ_j .

IV.2.5. Discretización de las ecuaciones integrales

Con el objetivo de discretizar la Ec. (19), y así poder obtener los cálculos numéricos es necesario considerar concretamente los sistemas que debemos analizar.

Guía de ondas de cristal fotónico con paredes sinusoidales

Con el objetivo de mostrar con mayor facilidad la discretización de la Ec. (19) comenzaremos con un sistema simple que ilustra el método numérico. Dicho sistema es una PCW formada por dos superficies onduladas y periódicas de PEC que se muestra en la Fig. 18. Consideremos que se tiene un periodo P en los perfiles ondulados, un ancho medio de la guía dado por b y que los perfiles pueden ser representados por las funciones armónicas $y_1(x) = b + A \cos(2\pi x/P)$ (perfil superior) y $y_2(x) = A \cos(2\pi x/P - \Delta\phi)$ (perfil inferior); además A representa la amplitud y $\Delta\phi$ la diferencia de fase entre los perfiles.

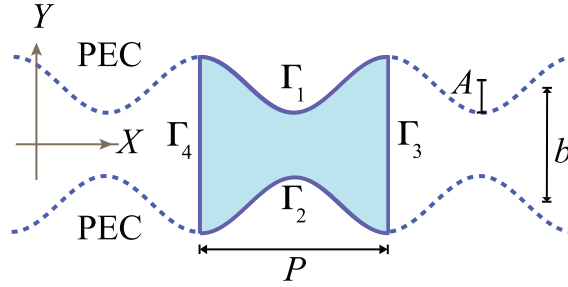


Figura 18. Guía de ondas compuesta por dos superficies onduladas perfectamente conductoras.

La geometría de la celda unitaria de la Fig. 18 puede ser descrita por la representación de puntos a lo largo del contorno $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ con coordenadas $x(s)$ y $y(s)$ como funciones paramétricas de la longitud de arco s y sus respectivas derivadas hasta el segundo orden, $x'(s)$, $y'(s)$, $x''(s)$ y $y''(s)$. Para cada contorno Γ_j corresponde un vector normal $\hat{\mathbf{n}}_j$ que apunta hacia afuera de la celda unitaria, y en la Ec. (19) sean

$$I_G^j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds' \quad (20)$$

y

$$I_\Psi^j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds'. \quad (21)$$

Para resolver las Ecs. (20) y (21) se realiza una discretización en el contorno Γ_j , dividiendo el contorno Γ_j en N_j pequeños segmentos de longitud Δs . Sea $n = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ en número total de puntos en la celda unitaria. De este modo, las ecuaciones anteriores pueden expresarse como:

$$I_G^j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds', \quad (22)$$

$$I_\Psi^j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds'. \quad (23)$$

Si Δs es suficientemente pequeño, entonces podemos considerar que el campo $\Psi_j(\mathbf{r}')$ y su derivada normal $\partial \Psi_j(\mathbf{r}') / \partial \mathbf{n}'$ son aproximadamente constantes entre dos puntos consecutivos de la discretización y con ello podríamos sacarlos de las integrales. Con esta hipótesis podemos representar las últimas dos integrales como:

$$I_G^j(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^j \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds', \quad (24)$$

$$I_\Psi^j(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^j \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds', \quad (25)$$

donde

$$\Phi_n^j = \left. \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n} \quad (26)$$

y

$$\Psi_n^j = \Psi_j(\mathbf{r}') \big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}. \quad (27)$$

Podemos definir la integrales involucradas en las Ecs. (24) y (25) como sigue:

$$L_{ml} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_{l-\Delta s/2}}^{s_{l+\Delta s/2}} G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'_l) ds', \quad (28)$$

$$N_{ml} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_{l-\Delta s/2}}^{s_{l+\Delta s/2}} \frac{\partial G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'_l)}{\partial \mathbf{n}'} ds', \quad (29)$$

donde \mathbf{r}_m indica el punto de observación y \mathbf{r}'_l el punto de integración.

Finalmente los elementos de matriz están dados por (Mendoza-Suárez and Pérez-Aguilar, 2015):

$$L_{mn} = i \frac{\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} R_{mn} \right) (1 - \delta_{mn}) + i \frac{\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega \Delta s}{c 2e} \right) \delta_{mn}, \quad (30)$$

$$N_{mn} = i \frac{\Delta s \omega}{4 c} H_1^{(1)} (k R_{mn}) \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} (1 - \delta_{mn}) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n \right) \delta_{mn}, \quad (31)$$

donde

$$R_{mn} = \sqrt{(X_m - X_n)^2 + (Y_m - Y_n)^2}, \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \mathbf{R}_{mn} = -Y'(s_n)(X_m - X_n) + X'(s_n)(Y_m - Y_n), \quad (33)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n = X'(s_n)Y''(s_n) - Y'(s_n)X''(s_n). \quad (34)$$

Haciendo uso de las Ecs. (28) y (29) podemos reescribir las Ecs. (24) y (25) como:

$$I_G^j(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^j \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{mn}^j \Phi_n^j, \quad (35)$$

$$I_\Psi^j(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^j \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_{mn}^j \Psi_n^j, \quad (36)$$

Ahora aplicando la discretización en las Ecs. (35) y (36) para el sistema se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1,1)} \Phi_{n(1,1)} - \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1,1)} \Psi_{n(1,1)} + \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(1,2)} \Phi_{n(1,2)} - \sum_{n=1}^{N_2} N_{mn(1,2)} \Psi_{n(1,2)} \\ & + \sum_{n=1}^{N_3} L_{mn(1,3)} \Phi_{n(1,3)} - \sum_{n=1}^{N_3} N_{mn(1,3)} \Psi_{n(1,3)} + \sum_{n=1}^{N_4} L_{mn(1,4)} \Phi_{n(1,4)} - \sum_{n=1}^{N_4} N_{mn(1,4)} \Psi_{n(1,4)} = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

donde $m = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 + N_3 + N_4$. El primer índice entre paréntesis se refiere a la región que en este caso sólo es una y el segundo subíndice hace referencia al perfil.

Recordemos que en este caso consideramos que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ como se muestra en la Fig. 18.

Notemos sin embargo que las incógnitas son Ψ_n y Φ_n , de manera que en el sistema se tienen $2m = 2(N_1 + N_2 + N_3 + N_4)$ incógnitas y m ecuaciones; es decir la matriz asociada al sistema no es una matriz cuadrada. Sin embargo aún no consideramos las condiciones de frontera. Ya que hemos supuesto que las paredes de la guía son de conductor perfecto, entonces para los perfiles Γ_1 y Γ_2 se tiene que:

para polarización TE

$$\Psi_{n(1,1)} = \Psi_{n(1,2)} = 0 \quad (38)$$

y para polarización TM

$$\Phi_{n(1,1)} = \Phi_{n(1,2)} = 0. \quad (39)$$

Es decir el campo o su derivada normal son cero en la superficie de un conductor perfecto para polarización TE o TM, respectivamente. De manera que el sistema resultante ahora tiene $N_1 + N_2 + 2(N_3 + N_4)$ incógnitas.

Por otro lado, debido a la periodicidad del sistema, la cual se obtiene al considerar el sistema infinito, es posible hacer uso del teorema de Bloch, el cual establece que los autoestados Ψ de un electrón vienen dados por el producto de una onda plana y una función periódica $u(\mathbf{r})$ en \mathbf{R} , donde \mathbf{R} es un vector de traslación en la red:

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}u(\mathbf{r}), \quad (40)$$

donde \mathbf{k} es el vector de Bloch. Esta última ecuación nos permitirá relacionar las fuentes de los perfiles Γ_3 y Γ_4 de donde obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\Psi_{n(1,4)} = e^{-ikP}\Psi_{n(1,3)} \quad (41)$$

y

$$\Phi_{n(1,4)} = -e^{-ikP}\Phi_{n(1,3)}. \quad (42)$$

De manera que finalmente obtenemos un sistema de m ecuaciones y m incógnitas. Sustituyendo las Ecs. (38), (39), (41) y (42) en la Ec. (37) obtenemos;

para polarización TE

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1,1)} \Phi_{n(1,1)} + \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(1,2)} \Phi_{n(1,2)} + \sum_{n=1}^{N_3} [L_{mn(1,3)} - e^{-ikP} L_{mn(1,4)}] \Phi_{n(1,3)} \\ - \sum_{n=1}^{N_3} [N_{mn(1,3)} + e^{-ikP} N_{mn(1,4)}] \Psi_{n(1,3)} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

y para polarización TM

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1,1)} \Psi_{n(1,1)} - \sum_{n=1}^{N_2} N_{mn(1,2)} \Psi_{n(1,2)} + \sum_{n=1}^{N_3} [L_{mn(1,3)} - e^{-ikP} L_{mn(1,4)}] \Phi_{n(1,3)} \\ - \sum_{n=1}^{N_3} [N_{mn(1,3)} + e^{-ikP} N_{mn(1,4)}] \Psi_{n(1,3)} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

con $m = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 + N_3 + N_4$. El sistema puede ser expresado en términos de un sistema de ecuaciones algebraico y homogéneo de la siguiente forma:

$$M(\omega, \mathbf{k})F(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (45)$$

donde M depende tanto de la frecuencia ω como del vector de Bloch \mathbf{k} y F representa las fuentes. Una solución no trivial del sistema puede ser obtenida cuando el determinante del sistema es cero y para determinar las frecuencias que generan soluciones no triviales definimos la función:

$$D(K, \omega) = \ln(|\det(M)|). \quad (46)$$

Numéricamente la función $D(\mathbf{k}, \omega)$ proporciona la relación de dispersión numérica buscada $\omega = \omega(\mathbf{k})$ con la cual podemos calcular los modos del sistema y la intensidad del campo electromagnético.

Guía de ondas de cristal fotónico con paredes sinusoidales que contienen una capa de metamaterial

Con un análisis análogo al mostrado en el apartado anterior se pueden obtener las ecuaciones para el sistema mostrado en la Fig. 19, el cual está formado por una PCW con paredes sinusoidales que contienen una capa de LHM. Es importante notar que en este caso se tienen tres regiones en la celda unitaria. Como consecuencia de lo anterior surgen dos nuevas interfaces: una entre la región superior y la región de en medio y la segunda entre la región de en medio y la región inferior. Para este sistema, las regiones encerradas por las curvas $\Gamma_{l,m}$, con $l = \{1, 2, 3\}$ y $m = \{1, 2, 3, 4\}$ pueden ser consideradas como una celda unitaria del sistema. El subíndice l se refiere al l -ésimo medio y el subíndice m hace referencia al m -ésimo perfil en el l -ésimo medio. Así que se tendrán ecuaciones adicionales que surgen de las condiciones de frontera entre las interfaces en el sistema de capas.

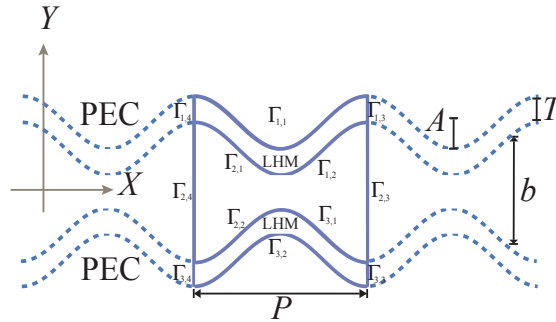


Figura 19. Guía de ondas con paredes sinusoidales de PEC recubiertas de metamaterial.

A continuación se presentan las ecuaciones adicionales:

$$\Psi_{n(1,2)} = \Psi_{n(2,1)} \quad , \quad \Phi_{n(2,1)} = \frac{-1}{f_{12}} \Phi_{n(1,2)}, \quad (47)$$

$$\Psi_{n(3,1)} = \Psi_{n(2,2)} \quad y \quad \Phi_{n(3,1)} = \frac{-1}{f_{23}} \Phi_{n(2,2)}, \quad (48)$$

donde $f_{lm} = \mu_l/\mu_m$ o $f_{lm} = \varepsilon_l/\varepsilon_m$ para polarización TE o TM, respectivamente. Además, ε_m es la permitividad eléctrica y μ_m la permeabilidad magnética del medio m -ésimo.

Consideremos en la Fig. 19 que la región 1 es la superior, la región 2 es la de en medio y la región 3 es la de abajo. También hacemos una correspondencia de puntos entre $\Gamma_{1,2}$ y $\Gamma_{2,1}$, y $\Gamma_{2,2}$ y $\Gamma_{3,1}$, así como $N_{1,2} = N_{2,1} = N_{2,2} = N_{3,1} = Nx$. Sumado a estas consideraciones, se tienen condiciones de frontera en las superficies supuestas perfectamente conductoras, por lo tanto la Ec. (19) puede ser representada numéricamente en términos de un sistema homogéneo de ecuaciones algebraicas acopladas como se muestra a continuación.

En la región 1,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{Nx} L_{mn(1,1)} \Phi_{n(1,1)} \right) (1 - \delta_{t2}) - \left(\sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(1,1)} \Psi_{n(1,1)} \right) (1 - \delta_{t1}) + \\ & \quad \sum_{n=1}^{Nx} L_{mn(1,2)} \Phi_{n(1,2)} - \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(1,2)} \Psi_{n(1,2)} + \\ & \sum_{n=1}^{N_{1,3}} [L_{mn(1,3)} - e^{-ikP} L_{mn(1,4)}] \Phi_{n(1,3)} - \sum_{n=1}^{N_{y1,3}} [N_{mn(1,3)} + e^{-ikP} N_{mn(1,4)}] \Psi_{n(1,3)} = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

con $m = 1, 2, \dots, 2Nx + 2N_{1,3}$.

En la región 2,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{Nx} \frac{L_{mn(2,1)}}{f_{12}} \Phi_{n(1,2)} - \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(2,1)} \Psi_{n(1,2)} + \sum_{n=1}^{Nx} L_{mn(2,2)} \Phi_{n(2,2)} - \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(2,2)} \Psi_{n(2,2)} + \\ & \sum_{n=1}^{N_{2,3}} [L_{mn(2,3)} - e^{-ikP} L_{mn(2,4)}] \Phi_{n(2,3)} - \sum_{n=1}^{N_{2,3}} [N_{mn(2,3)} + e^{-ikP} N_{mn(2,4)}] \Psi_{n(2,3)} = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

con $m = 2Nx + 2N_{13} + 1, \dots, 4Nx + 2N_{13} + 2N_{2,3}$.

En la región 3,

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{Nx} \frac{L_{mn(3,1)}}{f_{23}} \Phi_{n(2,2)} - \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(3,1)} \Psi_{n(2,2)} + \\
& \left(\sum_{n=1}^{Nx} L_{mn(3,2)} \Phi_{n(3,2)} \right) (1 - \delta_{t2}) - \left(\sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(3,2)} \Psi_{n(3,2)} \right) (1 - \delta_{t2}) + \\
& \sum_{n=1}^{N_{3,3}} [L_{mn(3,3)} - e^{-ikP} L_{mn(3,4)}] \Phi_{n(3,3)} - \sum_{n=1}^{N_{3,3}} [N_{mn(3,3)} + e^{-ikP} N_{mn(3,4)}] \Psi_{n(3,3)} = 0, \quad (51)
\end{aligned}$$

con $m = 4Nx + 2N_{13} + 2N_{2,3} + 1, \dots, 6Nx + 2N_{13} + 2N_{2,3} + 2N_{3,3}$. δ_{ij} es la delta de Kronecker, además, $t = 1$ para polarización TE y $t = 2$ para polarización TM.

Guía de ondas de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto y metamaterial

En la Fig. 20 se muestra el siguiente sistema a analizar, el cual es una PCW con inclusión de PEC rodeada por una capa de LHM. En éste distinguimos dos regiones considerando como la región 1 a la región que está entre las placas de PEC y la capa de LHM y la región 2 como la capa de metamaterial.

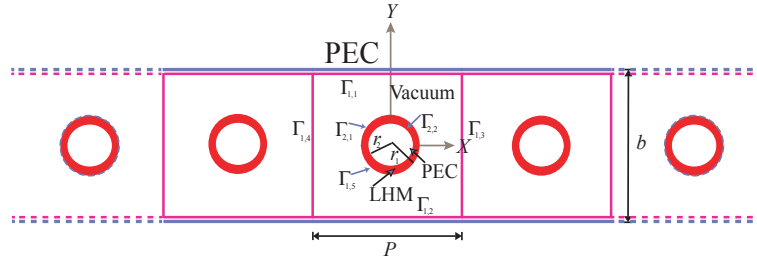


Figura 20. Guía de onda de cristal fotónico con inclusión de PEC recubierto por una capa de metamaterial.

Con un análisis análogo al previamente mostrado llegamos al siguiente sistema de

ecuaciones:

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{n=1}^{Nx} L_{mn(1,1)} \Phi_{n(1,1)} + \sum_{n=1}^{Nx} L_{mn(1,2)} \Phi_{n(1,2)} \right) (1 - \delta_{t2}) \\
& - \left(\sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(1,1)} \Psi_{n(1,1)} + \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(1,2)} \Psi_{n(1,2)} \right) (1 - \delta_{t1}) \\
& + \sum_{n=1}^{Ny} [L_{mn(1,3)} - e^{-ikP} L_{mn(1,4)}] \Phi_{n(1,3)} - \sum_{n=1}^{Ny} [N_{mn(1,3)} + e^{-ikP} N_{mn(1,4)}] \Psi_{n(1,3)} \\
& + \sum_{n=1}^{Ni} L_{mn(1,5)} \Phi_{n(1,5)} - \sum_{n=1}^{Ni} N_{mn(1,5)} \Psi_{n(1,5)} = 0, \tag{52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{N_{1,5}} \frac{L_{mn(2,1)}}{f_{12}} \Phi_{n(1,5)} - \sum_{n=1}^{N_{1,5}} N_{mn(2,1)} \Psi_{n(1,5)} \\
& + \sum_{n=1}^{N_{2,2}} L_{mn(2,2)} \Phi_{n(2,2)} (1 - \delta_{t2}) - \sum_{n=1}^{N_{2,2}} N_{mn(2,2)} \Psi_{n(2,2)} (1 - \delta_{t1}) = 0, \tag{53}
\end{aligned}$$

con $m = 1, 2, \dots, N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} + N_{1,4} + N_{1,5}$ en la Ec. (52) y $m = N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} + N_{1,4} + N_{1,5} + 1, \dots, N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} + N_{1,4} + 2N_{1,5} + N_{2,2}$ en la Ec. (53). $t = 1$ para polarización TE y $t = 2$ para polarización TM.

Guía de ondas de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto

El cuarto sistema electromagnético considerado se muestra en la Fig. 21. Este sistema es una PCW con inclusión de PEC. En este sistema sólo se tiene una región, la cual está entre las placas de conductor perfecto y la inclusión.

Con un análisis análogo al previamente mostrado llegamos al siguiente sistema de

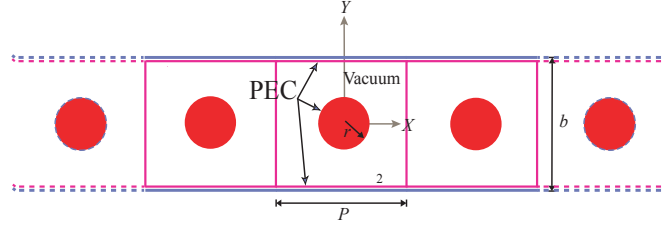


Figura 21. PCW compuesta por dos superficies planas de PEC y una serie periódica de inclusiones cilíndricas circulares.

ecuaciones:

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{n=1}^{Nx} L_{mn(1,1)} \Phi_{n(1,1)} + \sum_{n=1}^{Nx} L_{mn(1,2)} \Phi_{n(1,2)} \right) (1 - \delta_{l2}) \\
& - \left(\sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(1,1)} \Psi_{n(1,1)} + \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(1,2)} \Psi_{n(1,2)} \right) (1 - \delta_{l1}) \\
& + \sum_{n=1}^{Ny} [L_{mn(1,3)} - e^{-ikP} L_{mn(1,4)}] \Phi_{n(1,3)} - \sum_{n=1}^{Ny} [N_{mn(1,3)} + e^{-ikP} N_{mn(1,4)}] \Psi_{n(1,3)} \\
& + \left(\sum_{n=1}^{Ni} L_{mn(1,5)} \Phi_{n(1,5)} \right) (1 - \delta_{l2}) - \left(\sum_{n=1}^{Ni} N_{mn(1,5)} \Psi_{n(1,5)} \right) (1 - \delta_{l1}) = 0, \quad (54)
\end{aligned}$$

con $m = 1, 2, \dots, N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} + N_{1,4} + N_{1,5}$ en la Ec. (54); además $l = 1$ para polarización TE y $l = 2$ para polarización TM.

IV.2.6. Guía de ondas finita

Los métodos creados hasta el momento no sólo nos permiten el cálculo de estructuras de bandas, sino que además con ellos podemos calcular la intensidad del campo correspondiente a modos electromagnéticos dentro de la celda unitaria. Sin embargo en la realidad los sistemas tienen longitud finita, razón por la que es de suma importancia poder tratar los problemas físicos reales. Como parte de este trabajo se implementó un método numérico capaz de calcular la respuesta óptica mediante la reflectancia, la transmitancia y el campo esparcido por una guía de onda finita que contiene inclusiones de LHM. El sistema está formado por dos placas paralelas y un arreglo de inclusiones

cilíndricas que se considera como un sistema de M cuerpos como se ve en la Fig. 22.

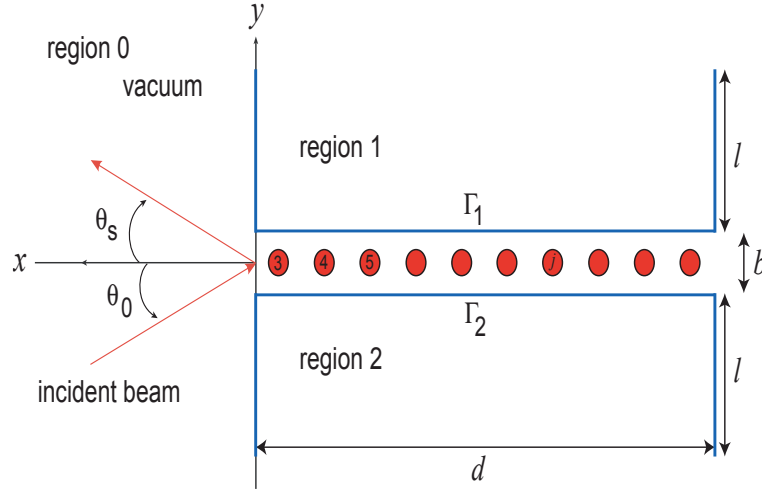


Figura 22. Guía de onda finita con inclusiones cilíndricas de LHM.

La región 0 se caracteriza por un índice de refracción $n_0(\omega) = \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$ y las regiones desde 1 a M están definidas por las curvas Γ_j y se caracterizan por los correspondientes índices de refracción $n_j(\omega) = \pm\sqrt{\varepsilon_j(\omega)\mu_j(\omega)}$ que involucran las propiedades de los materiales que se dan en términos de la permeabilidad magnética $\mu_j(\omega)$ y de la permitividad eléctrica $\varepsilon_j(\omega)$.

Aplicando las Ecs. (12), (13), (19) y $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ podemos expresar el campo en la región 0 como:

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds. \quad (55)$$

En esta expresión, $\Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r})$ representa el campo incidente y la suma de las integrales representa el campo esparcido.

Siguiendo los mismos pasos, para la j -ésima región, el campo $\Psi^{(j)}(\mathbf{r})$ puede expresarse como:

$$\Psi^{(j)}(\mathbf{r}) \theta_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds, \quad (56)$$

donde $\theta(\mathbf{r}) = 1$ si \mathbf{r} está dentro del medio j -ésimo o $\theta(\mathbf{r}) = 0$ en otro caso. Las Ecs. (55) y (56) forman un sistema de ecuaciones con las que se puede obtener el campo total en cualquier parte.

Para encontrar el campo esparcido usando el segundo término del lado derecho de la Ec. (55), es necesario encontrar una forma de obtener las funciones fuente a partir de las ecuaciones integrales. Para esto, se hace una aproximación del punto de observación en la región 0 a la superficie de la j -ésima región. Por tanto, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds \quad (57)$$

y

$$\Psi^{(j)}(\mathbf{r})\theta_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[\frac{1}{f_{oj}} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] \delta_{ij} ds. \quad (58)$$

En este caso δ_{ij} es la delta de Kronecker, $f_{0j} = \mu_0/\mu_j$ o $f_{lm} = \epsilon_l/\epsilon_m$ para polarización TE o TM, respectivamente, $i = 1, 2, \dots, M$. Nuevamente se hace una discretización sobre la geometría del sistema. En nuestro caso la paredes de la guía son consideradas de conductor perfecto, de manera que las Ecs. (57) y (58) logran simplificarse de manera análoga al caso infinito dependiendo la polarización que se desee analizar.

El campo incidente

En campo incidente se expresa en términos de su espectro angular

$$\Psi_{inc}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} A(q, k) \exp[iqx - \alpha_0(q)y] dq, \quad (59)$$

donde $\alpha_0(q) = [(n_0(\omega/c))^2 - q^2]^{1/2}$, además

$$A(q, k) = \Psi_0 \sqrt{\pi} \exp[-g^2(q - k)^2/4 + i\alpha_0(q)d], \quad (60)$$

siendo Ψ_0 una constante con unidades apropiadas. Para calcular la potencia incidente total a través del plano $L_y L_z$, se emplea el vector de Poynting S , el cual proporciona la dirección y magnitud del flujo y energía por unidad de tiempo, dado por

$$S = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (61)$$

La parte real de S proporciona una medida de la irradiancia. Para polarización TE la componente del vector de Poynting a lo largo del eje Y es

$$S_y = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}\{H_x^* E_z\} = \frac{c}{8\pi\omega} \operatorname{Re}\left\{-iE_z \frac{\partial E_z}{\partial y}\right\}. \quad (62)$$

Mientras que para polarización TM se tiene que

$$S_y = \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon(\omega)} \operatorname{Re}\left\{-iH_z \frac{\partial H_z}{\partial y}\right\}. \quad (63)$$

De modo que la potencia incidente total es

$$P_{inc}(k) = L_z \sqrt{\frac{\pi}{2}} g \alpha_0(q) \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon(\omega)} |\Psi_0|^2 = L_z \sqrt{\frac{\pi}{2}} g \alpha_0(q) \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon(\omega)}, \quad (64)$$

donde se ha considerado que $\omega/c \gg 1$.

El campo esparcido

El campo esparcido es representado por el segundo término de la Ec. (55). Para obtener una expresión para los campos reflejado y transmitido se usa una expansión en términos de ondas planas para la función de Green (Maradudin *et al.*, 1990) dada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} \exp\{iq(x - x') + i\alpha_0(q)|y - y'|\}, \quad (65)$$

que nos permite encontrar el campo esparcido de la forma

$$\begin{aligned} \Psi_{sc}^{(0)}(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[\frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} [-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}] \Psi^0(s) - \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} \frac{\partial \Psi^0(s)}{\partial n} \right] \\ &\quad \times \exp\{iq(x - x') + i\alpha_0(q)|y - y'(s)|\} ds, \end{aligned} \quad (66)$$

donde $\mathbf{Q} = (q, \pm\alpha_0(q))$. Considerando la geometría de la Fig. 22 y la Ec. (66), para $x > d$ se tiene que el campo reflejado es

$$\Psi_{sc}^{(0)+}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^+(q, k) \times \exp\{iqx + i\alpha_0(q)y\}, \quad (67)$$

donde

$$S^+(q, k) = \frac{-i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[[i\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}] \Psi^0(s) + \frac{\partial \Psi^0(s)}{\partial n} \right] \exp\{-i[qx' + \alpha_0(q)y'(s)]\} ds, \quad (68)$$

y para el caso $x < 0$, el campo transmitido tiene la forma

$$\Psi_{sc}^{(0)-}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^-(q, k) \times \exp\{iqx - i\alpha_0(q)y\}, \quad (69)$$

con

$$S^-(q, k) = \frac{-i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[[i\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}] \Psi^0(s) + \frac{\partial \Psi^0(s)}{\partial n} \right] \exp\{-i[qx' - \alpha_0(q)y'(s)]\} ds. \quad (70)$$

Por tanto el campo total para la región $x < 0$ es

$$\Psi_{tot}^{(0)-}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} [A(q, k) + S^-(q, k)] \times \exp\{iqx - i\alpha_0(q)y\} \quad (71)$$

y para la región $x > d$ es de la forma

$$\Psi_{tot}^{(0)+}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^+(q, k) \times \exp\{iqx - i\alpha_0(q)y\}, \quad (72)$$

donde $S^\pm(q, k)$ es el espectro angular del campo esparcido.

Para el caso de transmisión, $S^-(q, k)$ y $q < n_0(\omega/c)$, las componentes del vector de onda son $q = n_0(\omega/c)\sin \theta_t$ y $\alpha_0(q) = n_0(\omega/c)\cos \theta_t$. Para el caso de reflexión $S^+(q, k)$ y $q > n_0(\omega/c)$, las componentes del vector de onda son $q = n_0(\omega/c)\sin \theta_r$ y $\alpha_0(q) = n_0(\omega/c)\cos \theta_r$.

De las Ecs. (62), (63), (67) y (69) se obtiene la *potencia esparcida*, la cual está dada

en términos del espectro angular,

$$\begin{aligned}
P_{sc}^{\pm}(k) &= \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon(\omega)} \int dx_1 \operatorname{Re} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq'}{2\pi} S^{\pm}(q, k) \\
&\quad \times \exp\{i(q - q')x_1 \pm i(\alpha_0(q) - \alpha_0^*(q'))x_3\} \\
&= \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon(\omega)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S^{\pm}(q, k)|^2.
\end{aligned} \tag{73}$$

De las Ecs. (64) y (73) podemos calcular el coeficiente de reflexión diferencial

$$\left(\frac{\partial R}{\partial k}\right) = \frac{P_{sc}^{\pm}(k)}{P_{inc}(k)} = \pm \frac{1}{F(k)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S^{\pm}(q, k)|^2, \tag{74}$$

donde

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} g \alpha_0(k) |\Psi_0|^2. \tag{75}$$

Finalmente se obtiene la Reflectancia R y la Transmitancia T , como:

$$R(k) = \frac{P_{sc}^+(k)}{P_{inc}(k)} = + \frac{1}{F(k)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S^+(q, k)|^2, \tag{76}$$

$$T(k) = \frac{P_{sc}^-(k)}{P_{inc}(k)} = - \frac{1}{F(k)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |A(q, k) + S^-(q, k)|^2. \tag{77}$$

En la Ec. (77) aparece en campo incidente debido a que el campo en la región 0 es el resultado de la interferencia de los campos incidente y esparcido.

IV.3. Método de la Función de Green Periódica para sistemas acústicos

IV.3.1. Observaciones preliminares

Los métodos creados hasta el momento nos permiten el cálculo de estructuras de bandas; además con ellos podemos calcular el campo esparcido correspondiente a la propagación de los modos. Sin embargo, los sistemas considerados hasta ahora son bidimensionales.

En la realidad los sistemas tienen tres dimensiones, razón por la que es de suma importancia poder resolver problemas físicos tridimensionales. En esta sección se introducirá un método numérico capaz de calcular la estructura de bandas de algunas 3DPnCWs, formada por placas acústicas y planas que envuelven arreglos periódicos unidimensionales o bidimensionales de inclusiones cúbicas o esféricas. Se consideran superficies acústicas suaves o rígidas, lo que matemáticamente puede describirse como condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann, respectivamente. A continuación presentaremos el desarrollo matemático y físico que nos llevará a la Ecuación de Helmholtz para el campo de presiones acústicas de forma general.

IV.3.2. Ecuación general de Helmholtz para el caso acústico

Al igual que con las Ecuaciones de Maxwell para el caso electromagnético, para los sistemas acústicos partiremos de expresiones básicas de la mecánica de fluidos y la termodinámica para llegar a la ecuación de onda.

Consideremos a continuación las Ecs. (128), (132) y (137) de los apéndice A, B y C, las cuales son: la ecuación de estado, la ecuación de continuidad y la ecuación de fuerza no viscosa,

$$p = Bs, \quad (78)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (79)$$

$$-\nabla p(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \partial \mathbf{u} / \partial t, \quad (80)$$

respectivamente. Comencemos aplicando la divergencia a la Ec. (80), de donde se obtiene

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) = -\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (81)$$

siendo ∇^2 es el operador Laplaciano tridimensional.

Por otro lado, si consideramos la derivada temporal de la Ec. (79) y utilizamos que $\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})/\partial t = \nabla \cdot (\partial \mathbf{u})/\partial t$, llegamos a

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (82)$$

Ahora combinando las Ecs. (80) y (82) obtenemos

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (83)$$

Es el momento de utilizar la Ec. (78), que para ello sustituycamos s en términos de p en la Ec. (83), de este modo se llega a

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (84)$$

siendo c_m la velocidad longitudinal de la onda en el m -ésimo medio acústico dada por

$$c_m = \sqrt{B/\rho_0}, \quad (85)$$

B es el módulo adiabático de volumen y ρ_0 es la densidad de equilibrio constante. La Ec. (84) es la denominada ecuación de onda sonora homogénea de presiones. Para una onda de presión acústica lineal en una celda unitaria $p(\mathbf{r}, t)$, para el caso armónico con el tiempo con frecuencia ω ($p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$), se cumple que

$$\nabla^2 P(\mathbf{r}) + k^2 P(\mathbf{r}) = 0, \quad (86)$$

donde $k^2 = (\omega/c_m)^2$ es la magnitud del vector de onda.

IV.3.3. 3DPnCW formada por cuatro placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas

El sistema considerado en esta sección se muestra en la Fig. 23. En este sistema se consideraron superficies acústicas suaves y rígidas, y el medio entre las superficies es aire. La celda unitaria del sistema se muestra en la Fig. 24.

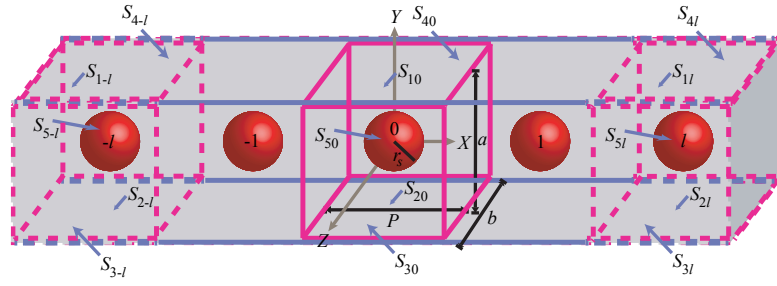


Figura 23. Descripción gráfica de una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones esféricas.

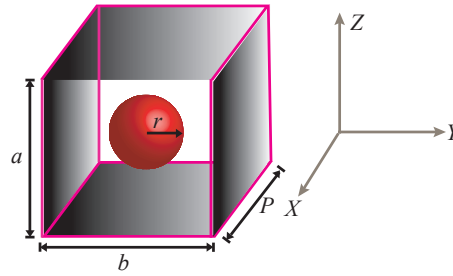


Figura 24. Celda unitaria de una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas que envuelven una inclusión esférica.

Ecuación de Helmholtz

Sabemos del desarrollo de la ecuación general de Helmholtz que la presión acústica $p_m(\mathbf{r}, t)$, para el caso armónico con el tiempo con frecuencia ω ($p_m(\mathbf{r}, t) = P_m(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$), satisface la ecuación de Helmholtz dada por

$$\nabla^2 P_m(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c_m}\right)^2 P_m(\mathbf{r}) = 0, \quad (87)$$

siendo $m \in \mathbb{Z}$, c_m la velocidad longitudinal de la onda acústica en el medio acústico y $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ el punto de observación. En este caso el índice m representa la posición de una celda unitaria como se muestra en la Fig. 23. Nuestro problema es calcular los modos de un sistema periódico. Para ello proponemos utilizar un método integral numérico que puede ser formulado a partir del PGFM para resolver la ecuación de Helmholtz.

Función de Green para la ecuación de Helmholtz

Para calcular la estructura de bandas es necesario obtener la relación de dispersión $\omega = \omega(k_x)$. Para ello consideremos la función de Green tridimensional dada por:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (88)$$

donde \mathbf{r} es un punto de integración y \mathbf{r}' un punto de observación. La función de Green es una solución de

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (89)$$

Representación integral

Considerando la geometría del sistema y aplicando la segunda identidad de Green tridimensional a la onda de presión P_m y a la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en la región de aire, se obtiene la expresión

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_l} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial P_m(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} P_m(\mathbf{r}') \right] dS' = \theta(\mathbf{r}) P_0(\mathbf{r}), \quad (90)$$

con

$$\theta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V_0, \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin V_0. \end{cases} \quad (91)$$

dS' es un elemento diferencial de área, $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal hacia afuera de la región de integración, V_0 es el volumen de la celda unitaria con $m = 0$, y el punto de integración \mathbf{r}' está infinitesimalmente separado de la superficie S_m . En este punto se puede observar una diferencia significativa entre el NSIM y PGFM. En el primero no es necesario tomar la sumatoria sobre m como en la Ec. (90), de modo que la solución del sistema queda determinada por una celda unitaria, mientras que en el segundo se considera teóricamente la superficie total. Como veremos más adelante, la sumatoria sobre m deberá ser acotada para poder tener una representación numérica.

Debido a que se tiene periodicidad en la dirección X podemos hacer uso del teorema de Bloch, de donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$P_m(x + ma, y, z) = e^{ik_x ma} P_0(x, y, z), \quad (92)$$

$$\frac{\partial P_m(x + ma, y, z)}{\partial n} = e^{ik_x ma} \frac{\partial P_0(x, y, z)}{\partial n}, \quad (93)$$

y donde $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ es el vector de Bloch unidimensional.

Discretización de las ecuaciones integrales

Consideremos una versión numérica para la parte izquierda de la Ec. (90), tomando un muestreo de pequeñas superficies denotadas por ΔS_m^n , sobre la superficie S_m , con $n = 1, 2, \dots, N$, tal que

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_m} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial P_m(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} P_m(\mathbf{r}') \right] dS' \\ & \approx \sum_{n=1}^N Q_n \left(\frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta S_m^n} e^{i(k_x ma)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right) \\ & - \sum_{n=1}^N P_n \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_{l,m}^n} e^{i(k_x ma)} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \right), \end{aligned} \quad (94)$$

siendo P_n y Q_n valores numéricos de la presión, $P_0(\mathbf{r}')$, y su derivada normal $\partial P_0(\mathbf{r}')/\partial n'$, evaluados en el i -ésimo punto central, denotado por R_i , de la pequeña superficie elemental ΔS_m^n , respectivamente. En la última expresión las relaciones de periodicidad dadas por las Ecs. (92) y (93) son utilizadas. Es conveniente seleccionar N puntos de observación $\mathbf{R}_i + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_i)$, siendo ε una cantidad infinitesimal. Con esto nos aseguramos de que $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ nunca sea cero. Finalmente la Ec. (90) puede escribirse como un sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) Q_j - \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) P_j = 0, \quad (95)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$, donde los elementos de matriz $\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ y $N_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, que dependen del vector de Bloch \mathbf{k} y la frecuencia ω , están dados por:

$$\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{m=-N_L}^{N_L} e^{i(k_x m a)} L_{ij}^m(\omega) \quad (96)$$

y

$$\mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{m=-N_L}^{N_L} e^{i(k_x m a)} N_{ij}^m(\omega), \quad (97)$$

siendo N_L el máximo valor de m , considerado numéricamente. Este número entero positivo representa una forma simple de truncar la serie. Para N_L lo suficientemente grande se deberían obtener resultados muy precisos. En las dos últimas expresiones los elementos $L_{ij}^m(\omega)$ y $N_{ij}^m(\omega)$ están definidos por los límites (Guel-Tapia *et al.*, 2016)

$$L_{ij}^m(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Delta S_m^j} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_i+\varepsilon\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_i)} dS' \quad (98)$$

y

$$N_{ij}^m(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Delta S_m^j} e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - i\frac{\omega}{c} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right) (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_i+\varepsilon\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_i)} dS', \quad (99)$$

donde tanto la función de Green (Ec. (88)) como su derivada normal han sido utilizadas.

Para superficies acústicas suaves se tiene que la presión acústica es cero en todas las superficies (condiciones de frontera de Dirichlet). Esto lleva a que $P_j = 0$ para toda $j = 1, 2, \dots, N$, en la Ec. (95), obteniendo un sistema de ecuaciones reducido,

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{L}_{ij}(k, \omega) Q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (100)$$

Para superficies acústicas rígidas, la derivada normal de la presión acústica es cero en las superficies (condiciones de frontera de Neumann). En este caso $Q_j = 0$ para toda $j = 1, 2, \dots, N$, en la Ec. (95), obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{N}_{ij}(k, \omega) P_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (101)$$

El sistema lineal de ecuaciones obtenido tiene una matriz asociada $M(k, \omega) = \mathcal{L}_{mn}(k, \omega)$ o $\mathcal{N}_{mn}(k, \omega)$, que depende del vector de Bloch \mathbf{k} y la frecuencia ω . Ya que el sistema de ecuaciones es homogéneo, una solución distinta de la trivial puede ser obtenida si el determinante de la matriz es cero. Para determinar la estructura de bandas, definimos la función

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \ln(|\det(M(\mathbf{k}, \omega))|), \quad (102)$$

que numéricamente representa puntos de mínimos locales que nos dan la relación de dispersión $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Encontrada la relación de dispersión es posible calcular las fuentes y, a su vez, las estructuras de bandas y el campo en un punto dado de la celda unitaria.

IV.3.4. 3DPnCW formada por dos placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico bidimensional de inclusiones cúbicas

En esta sección introduciremos un método numérico para calcular la estructura de bandas de una 3DPnCW formada por dos superficies planas que envuelven un arreglo bidimensional periódico de inclusiones cúbicas como se muestra en la Fig. 25. Se considera que todas las superficies involucradas son superficies acústicas y el medio entre los planos es aire. La celda unitaria del sistema es mostrada en la Fig. 26.

Como puede observarse, en este caso se tienen dos direcciones de periodicidad, de modo que para identificar una celda en el sistema serán necesarios dos índices l y m , cada uno asociado a una de estas direcciones.

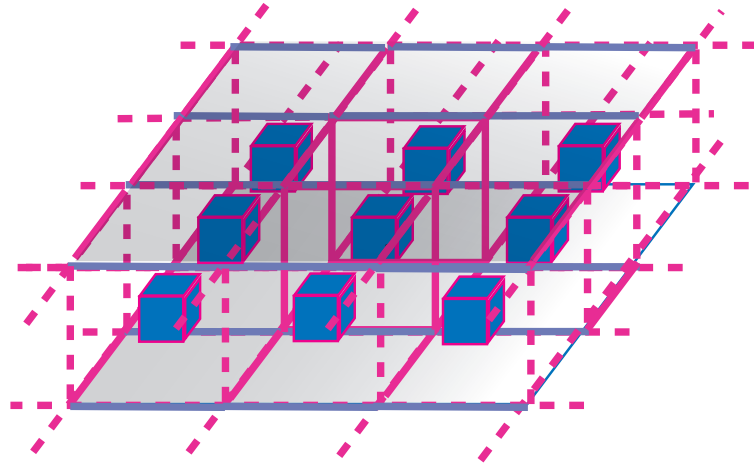


Figura 25. Descripción gráfica de una 3DPnCW formada por dos superficies acústicas planas y paralelas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones cúbicas.

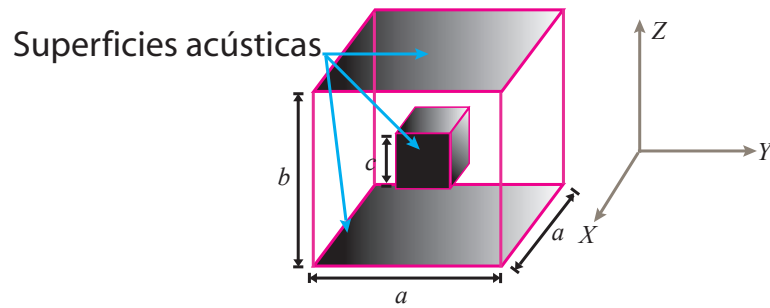


Figura 26. Celda unitaria de una 3DPnCW formada por dos superficies planas y paralelas que envuelven una inclusión cúbica.

Ecuación de Helmholtz

Sabemos que una onda de presión acústica lineal $P_{l,m}(\mathbf{r}, t)$ para el caso armónico con el tiempo con frecuencia ω ($P_{l,m}(\mathbf{r}, t) = P_{l,m}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$) cumple la ecuación de Helmholtz dada por:

$$\nabla^2 P_{l,m}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c_m}\right)^2 P_{l,m}(\mathbf{r}) = 0, \quad (103)$$

siendo $l, m \in \mathbb{Z}$, donde c_m es la velocidad longitudinal de la onda acústica en el medio acústico y $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ es el punto de observación. En este caso los índices l y m representan una ubicación de una celda unitaria en el espacio, debido a la doble

periodicidad del sistema se necesitan dos índices. De nuevo, estamos interesados en calcular la estructura de bandas de un sistema periódico. Como es de esperarse, se hará uso del PGFM para resolver la ecuación de Helmholtz.

Función de Green para la ecuación de Helmholtz

Para calcular la estructura de bandas es necesario obtener la relación de dispersión $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Como en el sistema anterior, la función de Green tridimensional considerada es:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (104)$$

donde \mathbf{r} es un punto de integración y \mathbf{r}' un punto de observación. La función de Green es una solución de

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (105)$$

Representación integral

Considerando la geometría del sistema y aplicando la segunda identidad de Green tridimensional a la onda de presión $P_{l,m}$ y a la función de Green G en la región de aire, se obtiene la expresión

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_l} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial P_{l,m}(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} P_{l,m}(\mathbf{r}') \right] dS' = \theta(\mathbf{r}) P_{0,0}(\mathbf{r}), \quad (106)$$

con

$$\theta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V_0, \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin V_0. \end{cases} \quad (107)$$

dS' es un elemento diferencial de área, $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal hacia afuera de la región de integración, V_0 es el volumen de la celda unitaria con $l = m = 0$, y el punto de

integración \mathbf{r}' está infinitesimalmente separado de la superficie $S_{l,m}$. En la Ec. (106) se puede notar la complejidad matemática del sistema al ser necesarias dos sumatorias, comparadas con el sistema de la sección anterior.

Debido a que se tiene periodicidad en la dirección X y Y podemos hacer uso del teorema de Bloch, de donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$P_{l,m}(x+la, y, z) = e^{ik_x la} P_{0,m}(x, y, z), \quad (108)$$

$$P_{l,m}(x, y+la, z) = e^{ik_y la} P_{l,0}(x, y, z), \quad (109)$$

$$\frac{\partial P_{l,m}(x+la, y, z)}{\partial n} = e^{ik_x la} \frac{\partial P_{0,m}(x, y, z)}{\partial n}, \quad (110)$$

y

$$\frac{\partial P_{l,m}(x, y+la, z)}{\partial n} = e^{ik_y la} \frac{\partial P_{l,0}(x, y, z)}{\partial n}, \quad (111)$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ es el vector de Bloch bidimensional. Podemos notar que este sistema representa una generalización de la 3DPnCW considerada en la sección anterior.

Discretización de las ecuaciones integrales

Consideremos una versión numérica para la parte izquierda de la Ec. (106), tomando un muestreo de pequeñas superficies denotadas por $\Delta S_{l,m}^n$, sobre la superficie $S_{l,m}$, con $n = 1, 2, \dots, N$ tal que

$$\begin{aligned} & \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_{l,m}} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial P_{l,m}(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} P_{l,m}(\mathbf{r}') \right] dS' \\ & \approx \sum_{n=1}^N Q_n \left(\frac{1}{4\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta S_{l,m}^n} e^{i(k_x la + k_y ma)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right) \\ & - \sum_{n=1}^N P_n \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_{l,m}^n} e^{i(k_x la + k_y ma)} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \right), \end{aligned} \quad (112)$$

siendo P_n y Q_n valores numéricos de la presión, $P_{0,0}(\mathbf{r}')$, y su derivada normal $\partial P_{0,0}(\mathbf{r}')/\partial n'$, evaluados en el i -ésimo punto central, denotado por R_i , de la pequeña superficie elemental $\Delta S_{l,m}^n$, respectivamente. En la última expresión las relaciones de periodicidad dadas por las Ecs. (108)-(111) son utilizadas. Es conveniente seleccionar N puntos de observación $\mathbf{R}_i + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_i)$, siendo ε una cantidad infinitesimal. Con esto nos aseguramos de que $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ nunca sea cero. Finalmente la Ec. (106) puede escribirse como un sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) Q_j - \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) P_j = 0, \quad (113)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$, donde los elementos de matriz $\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ y $\mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, que dependen del vector de Bloch \mathbf{k} y la frecuencia ω , están dados por:

$$\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{l=-N_L}^{N_L} \sum_{m=-N_L}^{N_L} e^{i(k_x la + k_y ma)} L_{ij}^{lm}(\omega) \quad (114)$$

y

$$\mathcal{N}_{mn}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{l=-N_L}^{N_L} \sum_{m=-N_L}^{N_L} e^{i(k_x la + k_y ma)} N_{mn}^{lm}(\omega), \quad (115)$$

siendo N_L el máximo valor de l , considerado numéricamente. Este número entero positivo representa una forma simple de truncar la serie, para N_L lo suficientemente grande se deberían obtener resultados muy precisos. En las dos últimas expresiones los elementos $L_{ij}^{lm}(\omega)$ y $N_{ij}^{lm}(\omega)$ están definidos por los límites (Guel-Tapia *et al.*, 2016)

$$L_{ij}^{lm}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Delta S_{l,m}^j} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_i+\varepsilon\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_i)} dS' \quad (116)$$

y

$$N_{ij}^{lm}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Delta S_{l,m}^j} e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - i\frac{\omega}{c} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right) (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_i+\varepsilon\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_i)} dS', \quad (117)$$

donde tanto la función de Green (Ec. (88)) como su derivada normal han sido utilizadas.

Para superficies acústicas suaves se tiene que la presión acústica es cero en todas las superficies (condiciones de frontera de Dirichlet). Esto lleva a que $P_j = 0$ para toda $i = 1, 2, \dots, N$, en la Ec. (95), obteniendo un sistema de ecuaciones reducido,

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) Q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (118)$$

Al igual que en el sistema anterior se tiene que para superficies acústicas rígidas, la derivada normal de la presión acústica es cero en las superficies (condiciones de frontera de Neumann). En este caso $Q_j = 0$ para toda $i = 1, 2, \dots, N$, en la Ec. (95), obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) P_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (119)$$

El sistema lineal de ecuaciones obtenido tiene una matriz asociada $M(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{k}, \omega)$ o $\mathcal{N}_{mn}(\mathbf{k}, \omega)$, que depende del vector de Bloch \mathbf{k} y la frecuencia ω . Ya que el sistema de ecuaciones es homogéneo, una solución distinta de la trivial puede ser obtenida si el determinante de la matriz es cero. Para determinar la estructura de bandas, definimos la función

$$D(k, \omega) = \ln(|\det(M(\mathbf{k}, \omega))|), \quad (120)$$

que numéricamente representa puntos de mínimos locales que nos dan la relación de dispersión $\omega = \omega(\mathbf{k})$. De este modo la estructura de bandas de la 3DPnCW puede ser calculada.

Capítulo V

RESULTADOS Y DISCUSIONES

En esta sección mostraremos algunos de los resultados numéricos más sobresalientes obtenidos para cada sistema considerado. En estos cálculos es común introducir cantidades adimensionales, por lo que nuestros resultados serán expresados en términos de una frecuencia reducida dada por $\omega_r = (P/2\pi c)\omega$ y un vector de Bloch reducido dado por $k_r = (P/2\pi)k$. Para periodicidad unidimensional se tiene que el vector de Bloch k está dentro de la primera zona de Brillouin dada por $-\pi/P \leq k \leq \pi/P$.

V.1. Modos de superficie

Los primeros cálculos mostrados son para la guía de ondas de cristal fotónico con paredes sinusoidales que contienen una capa de metamaterial, posteriormente se muestran los resultados para la guía de ondas de cristal fotónico con inclusión de PEC y LHM. Para ello se tiene que las propiedades ópticas del metamaterial son las siguientes (Pendry *et al.*, 1998):

$$\varepsilon(\omega_r) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2}, \quad (121)$$

y

$$\mu(\omega_r) = 1 - \frac{0.56\omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega_0^2}. \quad (122)$$

Estas funciones son mostradas en la Fig. 27 con los parámetros $\omega_p = 10/2\pi$ y $\omega_0 = 4/2\pi$. La región donde el metamaterial tiene un índice de refracción negativo está dada por $0.6366 < \omega_n < 0.9597$, parámetros donde el material tiene índice de refracción negativo para el rango de frecuencias normalizadas analizado.

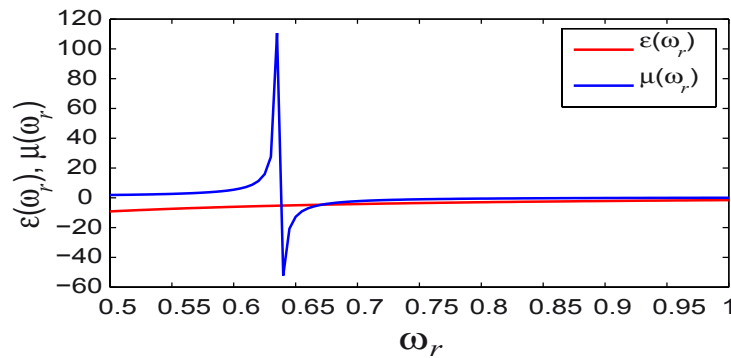


Figura 27. Función dieléctrica y permeabilidad magnética de un metamaterial como una función de la frecuencia.

Los resultados mostrados a continuación son un complemento a algunos encontrados en la literatura (Alva Medrano and Mendoza-Suárez, 2016), cuyo tema principal son los modos superficiales. En este trabajo se consideraron ambos estados de polarización para los dos sistemas mencionados, a diferencia de lo que se encuentra en la literatura, donde sólo se considera polarización TM para el primer sistema y polarización TE para el segundo.

V.2. Guía de ondas de cristal fotónico con paredes sinusoidales que contienen una capa de metamaterial

Comenzaremos mostrando los resultados obtenidos en el sistema de la Fig. 28, el cual está formado por una PCW con dos superficies sinusoidales con amplitud A que contienen una capa de metamaterial de grosor T . El ancho medio de la guía es b , el período es P y el desfase entre perfiles es denotado por $\Delta\phi$. Para los resultados obtenidos ambas polarizaciones fueron consideradas.

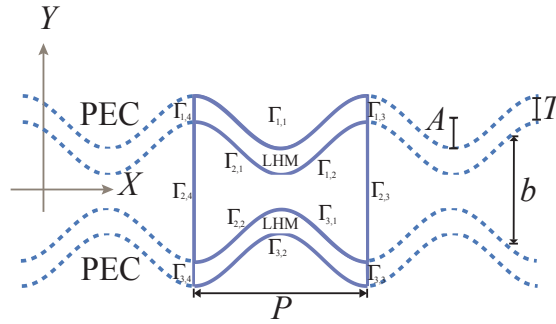


Figura 28. Guía de ondas con paredes sinusoidales recubiertas de metamaterial.

V.2.1. Polarización TE

Para polarización TE primero se muestran los resultados obtenidos considerando los siguientes parámetros: $b = 1.5$, $A = 0.1b$, $P = 2\pi$, $\Delta\phi = \pi$, $T = 0.25b$. En la Fig. 29(a) se muestra la función determinante $D(k = 0, \omega_r)$, claramente puede observarse un mínimo a la frecuencia $\omega_r = 0.7505$. En la Fig. 29(b) se muestra la intensidad del campo electromagnético, $I(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$, obtenido para esta frecuencia. En la Fig. 29(b) se

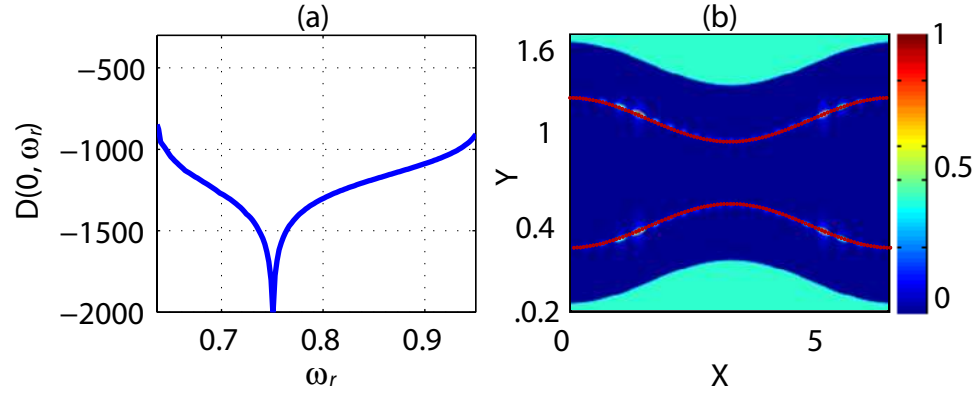


Figura 29. (a) Función determinante $D(k = 0, \omega_n)$. (b) Campo obtenido con $\omega_n = 0.7505$ y $T = 0.25b$.

puede observar que la intensidad del campo para la única frecuencia que aparece como un mínimo en la Fig. 29(a) corresponde precisamente a un modo de superficie. Lo interesante de este resultado es que la frecuencia $\omega_r = 0.7502$ se encuentra reportada en la literatura como una frecuencia asociada a un modo superficial (Ruppin, 2004) en sistemas con inclusiones cilíndricas formadas del metamaterial considerado en este trabajo.

Consideremos ahora los siguientes parámetros: $b = 1.5$, $A = 0.0$, $P = 2\pi$, $\Delta\phi = 0$, $T = 0.25b$. En la Fig. 30(a) se muestra la función determinante $D(k = 0, \omega_r)$, nuevamente se observa un único mínimo en la curva que corresponde a la frecuencia $\omega_r = 0.7505$. En la Fig. 30(b) se muestra la intensidad del campo electromagnético, $I(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$, obtenido para esta frecuencia.

De la Fig. 30(b) se puede observar que el campo asociado corresponde, de nuevo, a un modo de superficie. Lo interesante de este cálculo es que con la amplitud de $A = 0.0$ también es posible obtener este mismo modo de superficie. Este resultado muestra que no es necesario tener superficies onduladas para que el modo de superficie aparezca en el sistema, basta tener paredes rectas recubiertas de una capa de LHM para obtener un campo superficial entre la interfaz de LHM y el vacío. Además, con $A =$

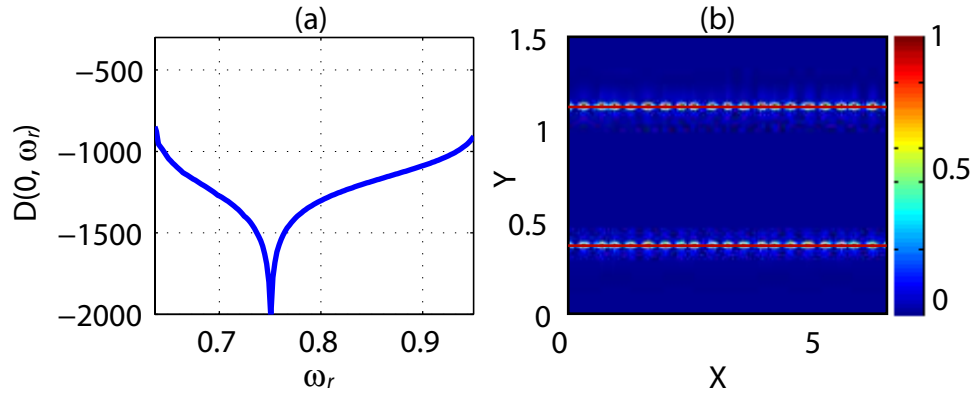


Figura 30. (a) Función determinante $D(k = 0, \omega_n)$. (b) Campo obtenido con $\omega_n = 0.7505$.

0.0 nuevamente se corrobora el cálculo del modo superficial reportado en la literatura (Ruppin, 2004), lo cual permite mostrar la validez del método numérico. Además, como se había mencionado, el valor reportado en la literatura para la frecuencia normalizada asociada a un modo de superficie para el LHM considerado es $\omega_r = 0.7502$ (Ruppin, 2004), de donde se obtiene un error relativo del 0.039% respecto del valor numérico calculado en este trabajo. El hecho de que con $A = 0.0$ aparezcan modos de superficie puede verse reflejado directamente en el tamaño del sistema y por tanto en un menor costo de fabricación. Un sistema con perfiles ondulados necesitará una mayor cantidad de recubrimiento de LHM que uno con perfiles rectos, ambos con longitudes P .

V.2.2. Polarización TM

Para polarización TM se consideraron los siguientes parámetros: $b = 1.5$, $A = 0.1b$, $P = 2\pi$, $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$, $T = 0.25b$. En la Fig. 31(a) se muestra la estructura de bandas para $0.6366 < \omega_r < 0.9597$, intervalo de nuestro interés, ya que es donde tanto ε como μ son simultáneamente negativos, lo que permite tener LHM en el sistema. En la Fig. 31(b) se muestra la función determinante $D(k = 0, \omega_r)$, de donde encontramos varios valores para ω_r que parecen interesantes, debido a que son mínimos locales y por tanto modos

del sistema. Uno de ellos está en la posición dada por $\omega_r = 0.6457$. En la Fig. 31(d) se muestra la intensidad del campo $I(\mathbf{r})$ correspondiente para esta frecuencia y en la Fig 31(c) tenemos la celda unitaria del sistema. Este sistema es de suma importancia, ya que fue posible encontrar una frecuencia donde la intensidad del campo es mayor entre el conductor y el metamaterial como un modo electromagnético de superficie. Además en la Fig. 31(a) no podemos dejar pasar el hecho de que se tienen dos bandas prohibidas que aparecen aproximadamente para rangos de frecuencias donde $0.6500 < \omega_r < 0.75$ y $0.6500 < \omega_r < 0.75$. Este hecho es importante desde el punto de vista de aplicaciones relacionadas con filtros ópticos.

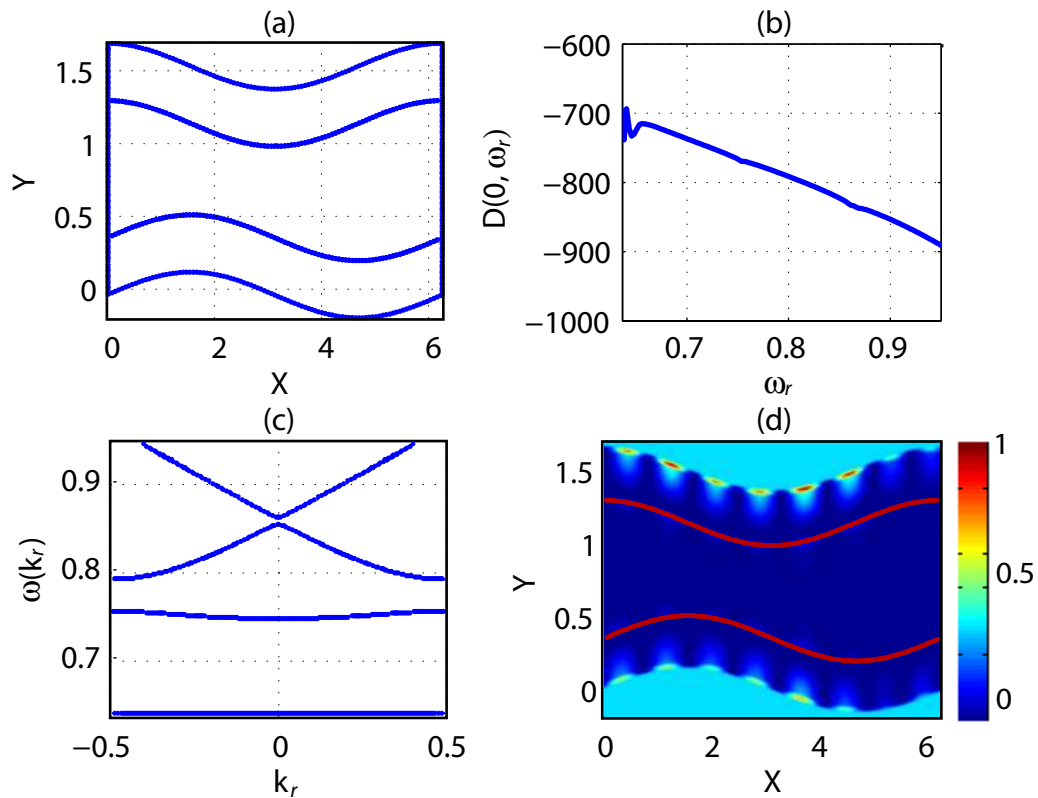


Figura 31. (a) Celda unitaria con capas. (b) Función determinante $D(k = 0, \omega_n)$. (c) Estructura de bandas. (d) Campo obtenido con $\omega_n = 0.6407$.

En resumen, para el sistema mostrado en la Fig. 28 fue posible calcular modos de

superficie para ambas polarizaciones. En el caso de polarización TE fue posible calcular un modo superficial encontrado en la literatura (Ruppin, 2004). Ambos resultados son importantes, ya que muestran el potencial que puede tener el sistema para producir modos de superficie en ambos estados de polarización.

V.3. Guía de ondas de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto y metamaterial

Ahora consideremos el sistema mostrado en la Fig. 32. Este sistema está formado por una PCW con inclusión de conductor perfecto y/o LHM. El ancho de la guía es denotado por b , el período es P y los radios internos y externos son r_1 y r_2 , respectivamente. Algunos de los resultados obtenidos se presentan a continuación.

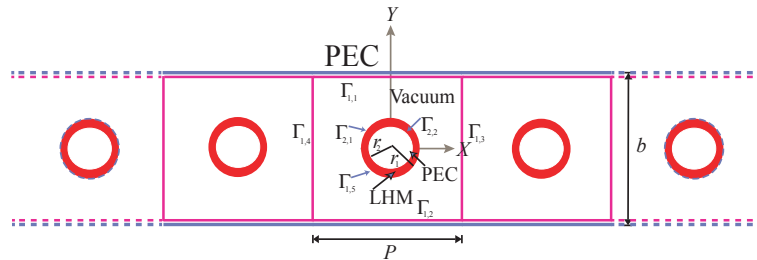


Figura 32. Guía de onda de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto recubierto por una capa de metamaterial.

V.3.1. Polarización TE

En la Fig. 33 se muestra la función determinante $D(k = 0, \omega_r)$, la cual es obtenida con los parámetros: $b = 4\pi$, $P = 2\pi$, $r_1 = 0.1b$, $r_2 = 0.05b$ y polarización TE, podemos observar que el valor de $\omega_r = 0.7487$ aparece como un mínimo local de la curva y por tanto representa un modo del sistema.

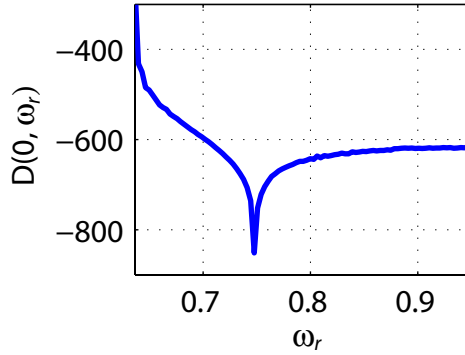


Figura 33. Función determinante $D(k = 0, \omega_n)$.

En la Fig. 34(a) se muestra la celda unitaria del sistema, en la Fig. 34(b) se muestra la intensidad del campo electromagnético, $I(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$, obtenida para este sistema y finalmente en la Fig. 34(c) se muestra la intensidad $I(\mathbf{r})$ obtenida para esta frecuencia cuando el conductor es removido de la parte interna de la inclusión, de tal forma que sólo se tiene un anillo de metamaterial hueco. Es importante hacer énfasis en este resultado, ya que muestra que no es necesaria la presencia del conductor en el interior de la inclusión para poder calcular el modo de superficie.

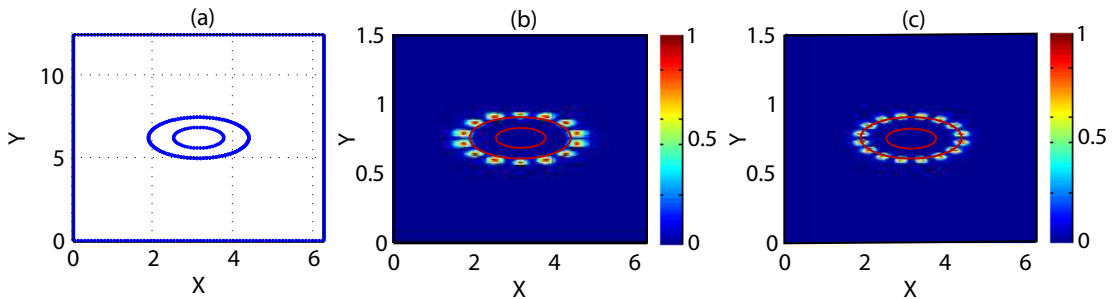


Figura 34. (a) Celda unitaria con capas. (b) Campo obtenido con $\omega_n = 0.7487$ y PEC dentro de la inclusión. (c) Campo obtenido con $\omega_n = 0.7487$ y vacío dentro de la inclusión.

Finalmente se considera una capa más delgada de LHM. En la Fig. 35(a) se muestra la función determinante $D(k = 0, \omega_r)$ obtenida con los parámetros: $b = 4\pi$, $P = 2\pi$, $r_1 = 0.1b$, $r_2 = 0.07b$ y polarización TE. De nuevo aparece $\omega_r = 0.7487$ como un modo del sistema y en la Fig. 35(b) se muestra la intensidad del campo $I(\mathbf{r})$ obtenido para

esta frecuencia. La importancia de este resultado es que la frecuencia $\omega_r = 0.7487$ sigue apareciendo como un modo del sistema aún considerando capas relativamente delgadas de LHM. Al igual que en el sistema anterior, esta frecuencia ha sido reportada teóricamente en la literatura como un modo de superficie (Ruppin, 2004). En este caso se tiene un error relativo del 0.19% respecto del valor teórico reportado en la literatura que es de $\omega_r = 0.7502$ (Ruppin, 2004), lo que muestra confiabilidad en el método numérico implementado.

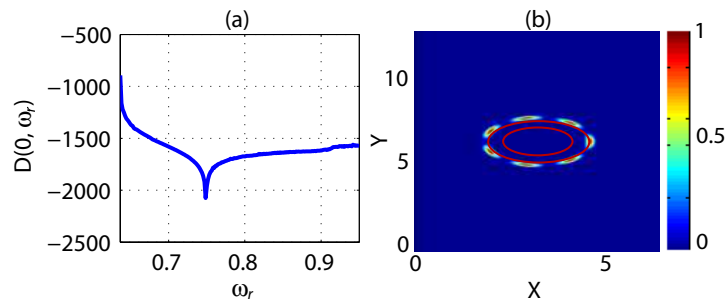


Figura 35. (a) Función determinante $D(k = 0, \omega_n)$. (b) Campo obtenido con $\omega_n = 0.7487$ y PEC dentro de la inclusión.

Resultados con condiciones parecidas han sido reportadas en la literatura (Mendoza-Suárez and Pérez-Aguilar, 2016; Pérez-Aguilar and Mendoza-Suárez, 2014); sin embargo, en estos casos se consideran inclusiones sin huecos de metamaterial. En cambio para nuestro caso se ha mostrado que con cantidades mucho menores de metamaterial es posible reproducir tal efecto. De nuevo, este resultado tiene implicaciones importantes en la fabricación de este tipo de sistemas, ya que los sistemas como los considerados en esta sección requieren una cantidad mucho menor de metamaterial, comparada con la reportada en la literatura.

V.3.2. Polarización TM

La principal razón para considerar sistemas con capas de LHM proviene de que en la literatura se encuentran resultados sobre modos de superficie en los sistemas considerados en este trabajo. Para el sistema de la Fig. 20 no se encontraron evidencias en la literatura sobre modos de superficie bajo polarización TM que pudiéramos reproducir. Para polarización TM se consideraron inclusiones cilíndricas formadas sólo de LHM; es decir sin la presencia de conductor perfecto.

En la Fig. 36(a) se muestra la celda unitaria obtenida con $b = 4\pi$, $P = 2\pi$ y $r_1 = 0.1b$. En la Fig. 36(b) se muestra la función determinante $D(k = 0, \omega_r)$, de donde se observan varios valores para ω_r que podrían dar como resultado un modo de superficie. Ninguno de los valores obtenidos generó un modo de superficie. En la Fig. 36(d) se muestra la intensidad del campo $I(\mathbf{r})$ obtenido para $\omega_r = 0.6491$ y es evidente que no se trata de un campo superficial. Finalmente en la Fig. 36(c) se muestra la estructura de bandas obtenida con los parámetros mencionados.

En conclusión, para el sistema mostrado en la Fig. 32 se pudo calcular un modo de superficie reportado en la literatura bajo polarización TE. Es importante mencionar que dicho modo de superficie puede ser calculado con inclusiones de LHM (Pérez-Aguilar and Mendoza-Suárez, 2016), con inclusiones de PEC y una capa de LHM o simplemente con un anillo hueco de LHM. Por otro lado no fue posible calcular modos de superficie para este sistema bajo polarización TM. En la literatura no se encontró ningún valor de frecuencia reportado para polarización TM asociado a un modo de superficie.

V.3.3. Guía de ondas finita

En la Fig. 34 observamos que los cálculos realizados con el método numérico están de acuerdo con el modo superficial reportado en la literatura; sin embargo el sistema de la

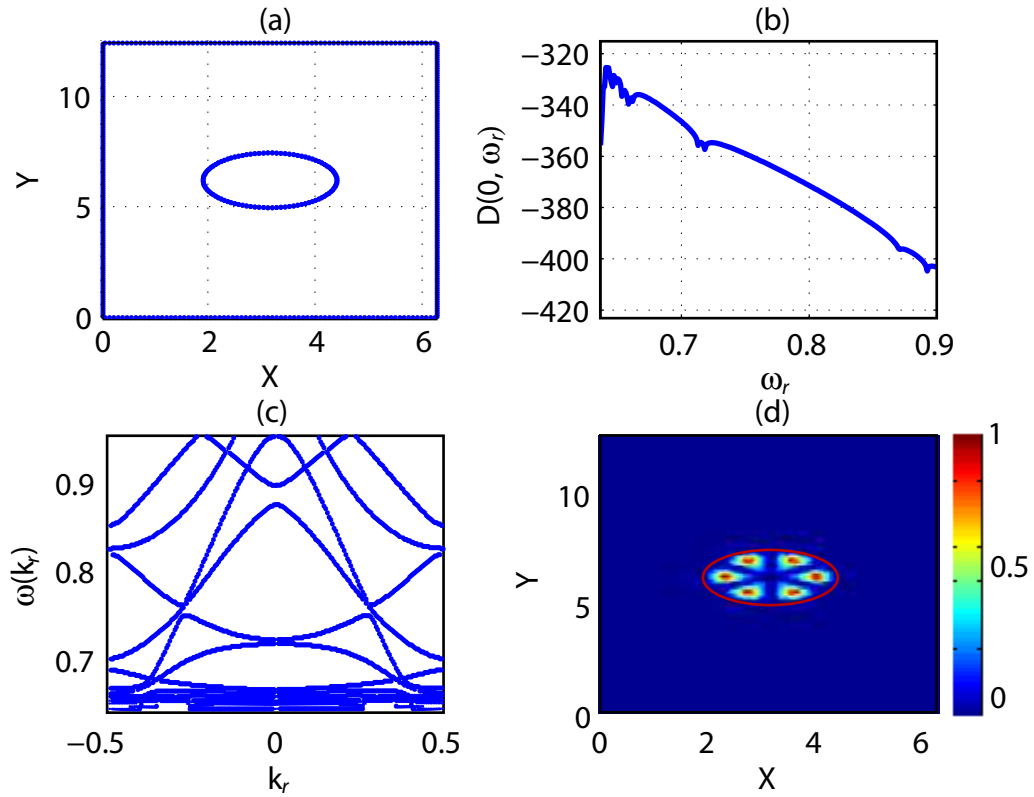


Figura 36. (a) Celda unitaria. (b) Función determinante $D(k = 0, \omega_n)$. (c) Estructura de bandas. (d) Campo obtenido con $\omega_n = 0.6491$.

Fig. 34 es un sistema considerado idealmente infinito. Por tal motivo consideramos importante el análisis de un sistema finito que compartiera características con el infinito. Finalmente, estamos interesados en conocer si aquellas frecuencias que aparecen como modos en el sistema infinito también son frecuencias que se transmiten en el sistema finito mostrado en la Fig. 37; es decir, esperamos que entre las propiedades que pueden ser heredadas del sistema infinito puedan encontrarse la frecuencia cuyo campo esparcido asociado se encuentre localizado en la vecindad de la superficie de las inclusiones.

Para la guía finita de la Fig. 37 centramos nuestra atención en el cálculo de la reflectancia, transmitancia y el campo esparcido. Los cálculos para la reflectancia y transmitancia fueron realizados considerando distintos ángulos de incidencia para una

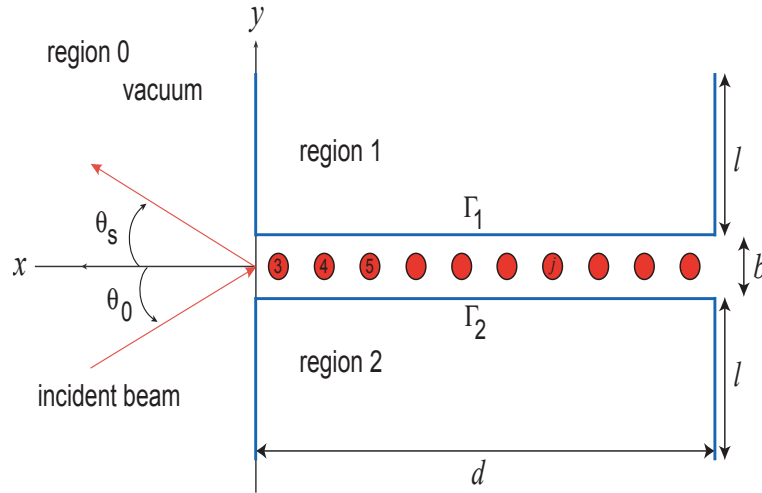


Figura 37. Guía de onda finita con inclusiones cilíndricas de LHM.

onda plana incidente con polarización TE. También se consideraron variaciones en las longitudes de la guía.

Primero considerando una guía con $d = 14\pi$, $b = 4\pi$, $l = 9$ y un radio en las inclusiones de $0.1b$. Calculamos la reflectancia y la transmitancia para $\theta_0 = \{0^\circ, 10^\circ, 25^\circ\}$. El perfil de la guía se muestra en la Fig. 38(a).

En las Figs. 38(b), (c) y (d) se muestran los cálculos para la reflectancia y la transmitancia para $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_0 = 10^\circ$ y $\theta_0 = 25^\circ$, respectivamente. En la Fig. 38 se puede observar que la conservación de la energía se cumple de manera satisfactoria para todos los casos considerados. Este hecho es de suma importancia porque muestra la fiabilidad del método numérico.

Con la intención de conocer la influencia que podría tener la longitud de la guía en los cálculos, consideramos ahora una guía con $d = 40\pi$. Nuevamente calculamos la reflectancia, transmitancia y el campo esparcido para $\theta_0 = \{0^\circ, 10^\circ, 25^\circ\}$. En la Fig. 39(a) se observa la superficie considerada, mientras que en las Figs. 39(b), (c) y (d) se muestran las reflectancias y transmitancias para $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_0 = 10^\circ$ y $\theta_0 = 25^\circ$,

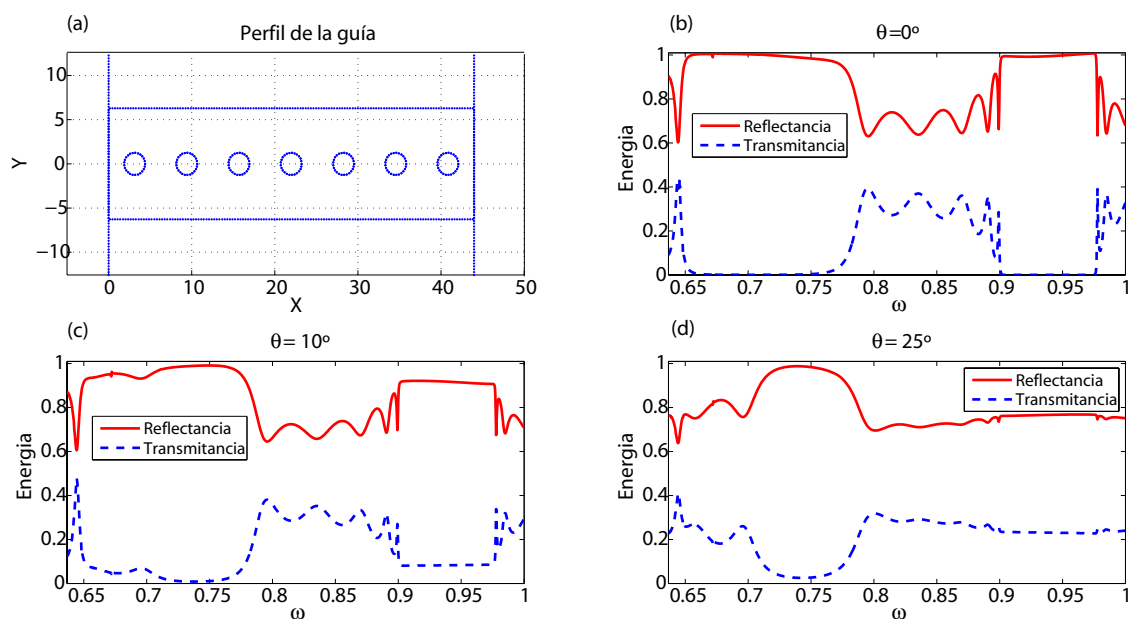


Figura 38. (a) Perfil de la guía de ondas. Reflectancia y transmitancia para una guía de ondas con $d = 14\pi$ y cuyo haz tiene un ángulo de incidencia de (b) $\theta_0 = 0^\circ$, (c) $\theta_0 = 10^\circ$ y (d) $\theta_0 = 25^\circ$.

respectivamente.

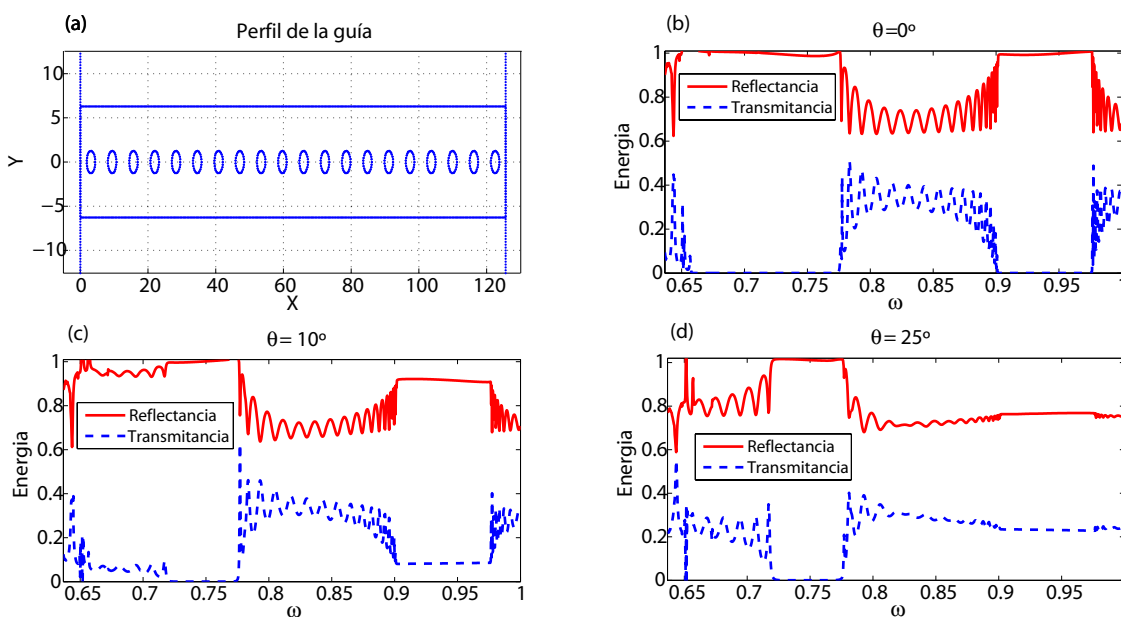


Figura 39. (a) Perfil de la guía de ondas. Reflectancia y transmitancia para una guía de ondas con $d = 40\pi$ y cuyo haz tiene un ángulo de incidencia de (b) $\theta_0 = 0^\circ$, (c) $\theta_0 = 10^\circ$ y (d) $\theta_0 = 25^\circ$.

Al igual que en la Fig. 38, en la Fig. 39 se observa un excelente comportamiento para la conservación de la energía, mostrando con ello que el método es confiable al variar la longitud de la guía. Comparando las Figs. 38 y 39 podemos observar un comportamiento similar en la reflectancia y transmitancia para ambas guías. Podemos apreciar que a medida que el ángulo de incidencia aumenta, también se incrementa el número de frecuencias que se propagan en el sistema, haciéndose más estrechos o desapareciendo los intervalos de frecuencias donde la reflectancia es 1.

Sabemos que para el sistema infinito se tiene un modo de superficie asociado a la frecuencia $\omega = 0.7487$, valor muy cercano a uno encontrado en la literatura donde se reporta un modo de superficie (Ruppin, 2004). En el caso finito tenemos que sólo para $\theta_0 = 25^\circ$ y $d = 14\pi$ aparece $\omega = 0.7487$ con transmitancia distinta a cero, aunque con un valor casi nulo. En la Fig. 40 se muestra la intensidad del campo esparcido, $I(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$, dentro de la guía para $\theta_0 = 25^\circ$, $d = 14\pi$ y $\omega = 0.7487$, que como se puede observar el campo penetra la guía; sin embargo no se encuentra localizado en las superficies de las inclusiones de LHM.

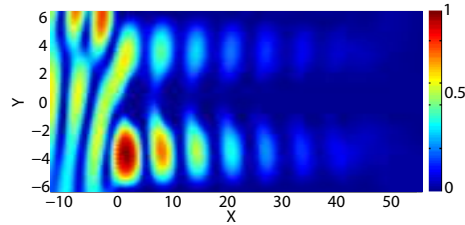


Figura 40. Campo obtenido con $\theta_0 = 25^\circ$, $d = 14\pi$ y $\omega = 0.7487$.

Para mostrar el efecto que tiene la variación del ángulo incidente en el campo esparcido consideremos: $d = 14\pi$, $b = 4\pi$, $l = 9$ un radio en las inclusiones de $0.1b$ y para la frecuencia $\omega_r = 0.9501$. En la Fig. 41 se muestra el campo esparcido dentro de la guía para (a) $\theta_0 = 0^\circ$, (b) $\theta_0 = 10^\circ$ y (c) $\theta_0 = 25^\circ$, respectivamente.

Finalmente consideremos los parámetros: $d = 40\pi$, $b = 4\pi$, $l = 9$ un radio en

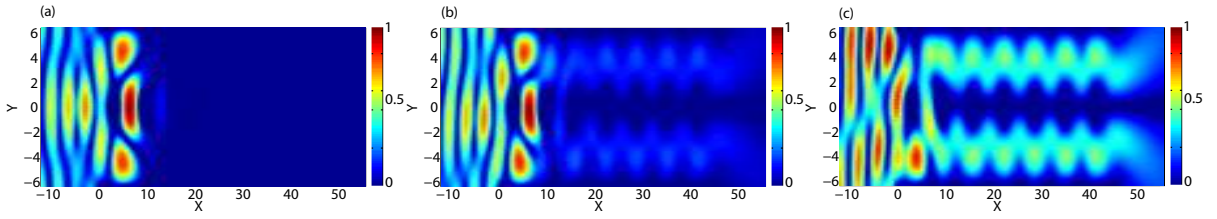


Figura 41. Campo obtenido con $d = 14\pi$ y $\omega = 0.9501$ para (a) $\theta_0 = 0^\circ$, (b) $\theta_0 = 10^\circ$ y (c) $\theta_0 = 25^\circ$.

las inclusiones de $0.1b$ y para la frecuencia $\omega_r = 0.7002$. En la Fig. 42 se muestran las intensidades de los campos, $I(\mathbf{r})$, obtenidos para (a) $\theta_0 = 0^\circ$, (b) $\theta_0 = 10^\circ$ y (c) $\theta_0 = 25^\circ$.

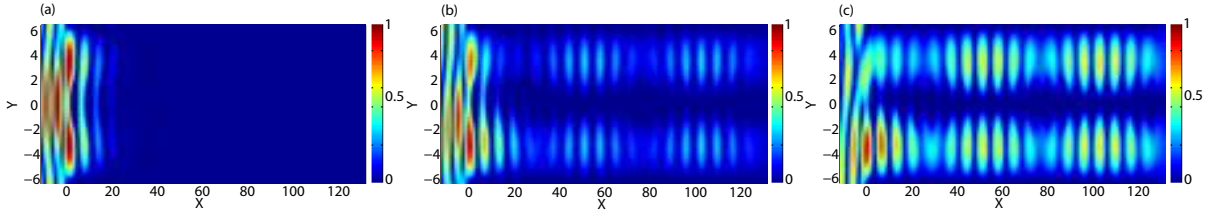


Figura 42. Campo obtenido con $d = 40\pi$ y $\omega = 0.7002$ para (a) $\theta_0 = 0^\circ$, (b) $\theta_0 = 10^\circ$ y (c) $\theta_0 = 25^\circ$.

Podemos observar el mismo comportamiento que en la Fig. 41 en la respuesta óptica de la guía al variar el ángulo de incidencia considerado. En las Figs. 41 y 42 podemos observar comportamientos similares en la respuesta óptica de la guía al variar el ángulo de incidencia; es decir, para los ángulos considerados, a medida que el ángulo de incidencia aumenta el campo incidente logra penetrar de forma más eficiente en la guía, tal y como lo predicen las curvas de transmitancia y reflectancia mostradas en las Figs. 38 y 39.

Para los tres ángulos considerados tenemos que un haz de luz con polarización TE tiene una mayor cantidad de frecuencias que se transmiten por la guía a $\theta_0 = 25^\circ$. Sólo a este ángulo y con $d = 14\pi$ aparece como frecuencia transmitida $\omega_r = 0.7487$; sin embargo la distribución del campo esparcido no se encuentra localizado en las superficies

de las inclusiones de LHM.

Hasta el momento en los cálculos anteriores se mantuvo fija la longitud y se variaba el ángulo de incidencia del haz, ahora consideraremos ambas variaciones. En la Fig. 43 podemos observar la respuesta óptica de la guía de ondas considerando $d = \pi$, $d = 6\pi$, $d = 10\pi$ y $l = 9$, para $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_0 = 10^\circ$ y $\theta_0 = 25^\circ$. En todos los casos se tiene que el radio en las inclusiones es de $0.1b$. De nuevo, podemos notar que la mayor transmitancia para las tres longitudes consideradas se obtiene con $\theta_0 = 25^\circ$, comportamiento que ya había sido observado en los cálculos anteriores.

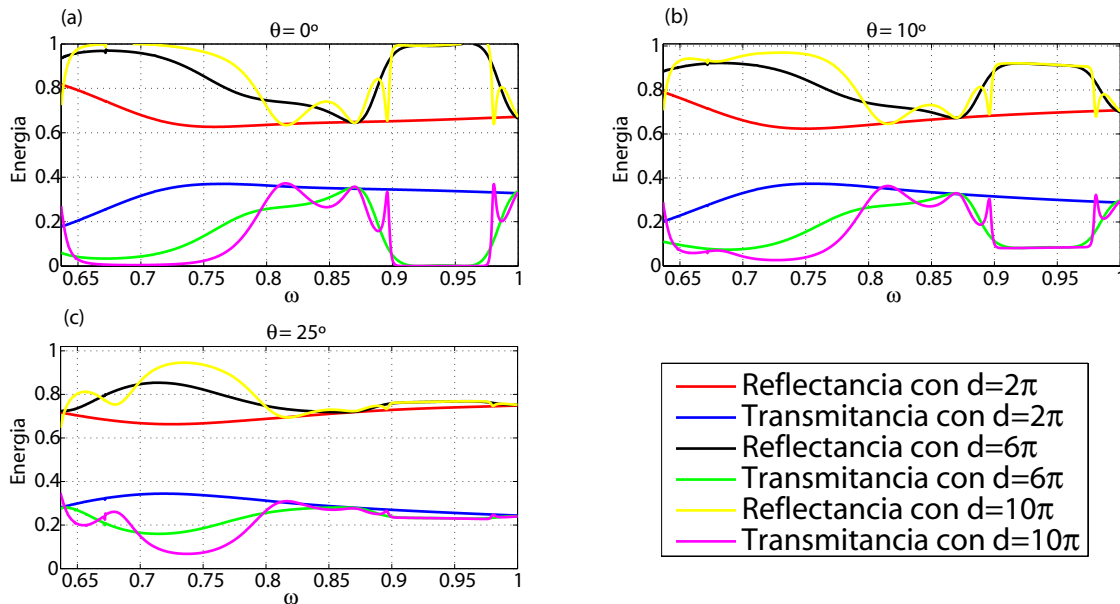


Figura 43. Reflectancia y transmitancia para guías de ondas con $d = 2\pi$, $d = 6\pi$ y $d = 10\pi$, y cuyo haz tiene un ángulo de incidencia de (a) $\theta_0 = 0^\circ$, (b) $\theta_0 = 10^\circ$ y (c) $\theta_0 = 25^\circ$.

Finalmente en la Fig. 44 se muestran las intensidades de los campos, $I(\mathbf{r})$, obtenidos para $\omega_r = 0.8697$ y $\theta_0 = 0^\circ$, con (a) $d = \pi$, (b) $d = 6\pi$ y (c) $d = 10\pi$.

En los tres casos de la Fig. 44 puede observarse que el haz incidente atraviesa las guías como lo muestran los cálculos de la Fig. 44. Con todo lo obtenido se tiene que, siguiendo como pista los resultados obtenidos para el sistema finito no fue posible calcular modos de superficie en la guía de ondas finita. Mostramos que la respuesta

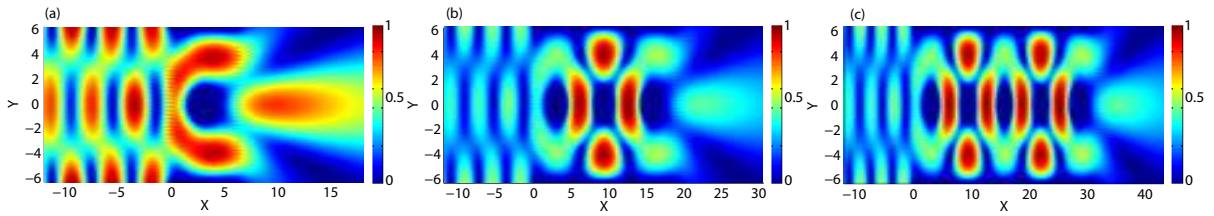


Figura 44. Campo obtenido con $\omega = 0.8697$ para (a) $d = 2\pi$, (b) $d = 6\pi$ y (c) $d = 10\pi$.

óptica del sistema finito no hereda características tales como los modos de la guía infinita, lo cual se podía observar de los cálculos de la reflectancia y transmitancia. Este resultado no es contradictorio, ya que el sistema infinito y el finito representan al final dos sistemas distintos. El sistema finito puede ser considerado como un problema de eigenvalores, cuyos valores son modos electromagnéticos en el sistema. Mientras que en el sistema finito se calcula la reflectancia, transmitancia y el campo esparcido a una frecuencia dada.

Por otro lado, en colaboración con el grupo de investigación de Cristales Fotónicos y Fonónicos de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo se han obtenido resultados favorables para el cálculo del modo superficial para el caso finito, al considerar una PCW como la de la Fig. 37 pero formada sólo por LHM. En la Fig. 45(a) se muestra la reflectancia R bajo polarización TE para una PCW, correspondiente a un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 25^\circ$ y distintas fracciones de llenado f . En la Fig. 45(b) se muestran las fases del campo esparcido correspondientes a las reflectancias de la Fig. 45(a). En estos cálculos se ha considerado $b = \pi$, $d = 12\pi$ y $l = 9$. En esta Fig. 45 se observa una gran correspondencia a la frecuencia correspondiente al caso infinito, la cual se da a la frecuencia $\omega_r = 0.7505$ (Ruppin, 2004).

Este resultado es importante ya que muestra que, bajo ciertos parámetros, es posible calcular una frecuencia que se transmite en el sistema y que está asociada a un modo de superficie en el caso infinito, al considerar toda la PCW de LHM. Este resultado

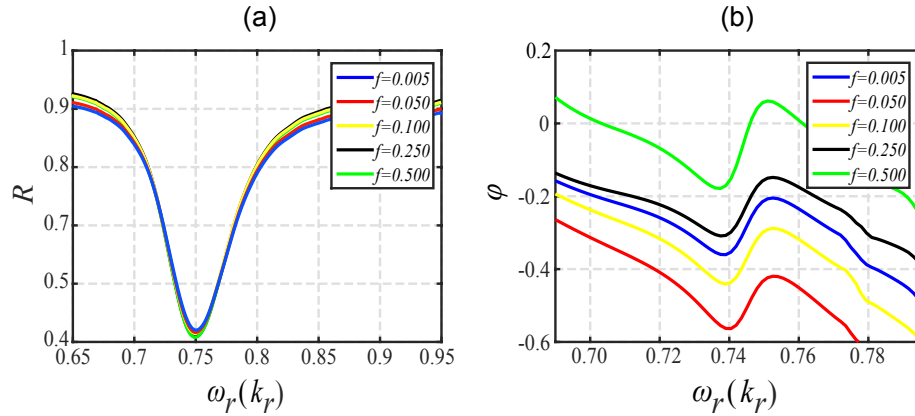


Figura 45. Reflectancia bajo polarización TE para una PCW, correspondiente (a) a un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 25^\circ$ y distintas fracciones de llenado f . (b) Fases del campo esparcido correspondientes a las reflectancias de (a).

también permite mostrar que el cálculo de modos de superficie para el caso finito no es algo sencillo de obtener, debido a la cantidad de parámetros que intervienen en el cálculo como la longitud de la guía o los propios materiales que la forman. Como trabajo futuro se espera realizar cálculos del campo esparcido en la PCW para poder completar el trabajo presentado en esta tesis.

V.4. Caos electromagnético

En esta sección mostraremos los resultados del fenómeno de caos electromagnético obtenidos para la guía de ondas de cristal fotónico con paredes sinusoidales y un arreglo de inclusiones de conductor perfecto.

V.4.1. Guía de ondas de cristal fotónico con paredes sinusoidales

En esta sección mostraremos los resultados obtenidos para el sistema de la Fig. 46. Como ya se había mencionado, este sistema fue considerado para introducir de forma

más simple la discretización de las ecuaciones integrales. Por otro lado, este sistema presenta cualidades interesantes que van desde modos de superficie (Mendoza-Suárez and Pérez-Aguilar, 2013, 2015) hasta caos electromagnético (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a,b; Herrera-González *et al.*, 2012b). En la Ref. Herrera González *et al.* (2011) puede encontrarse su contraparte desde un punto de vista de la mecánica clásica. Este tipo de estudios es importante porque nos permite entender los posibles resultados a obtener en un sistema como el nuestro. Resulta que al considerar frecuencias lo suficientemente grandes en sistemas electromagnéticos se llega al límite de la óptica geométrica. En este caso un sistema electromagnético como el nuestro debería presentar un comportamiento análogo a un sistema clásico correspondiente. Este hecho será utilizado también en la siguiente sección.

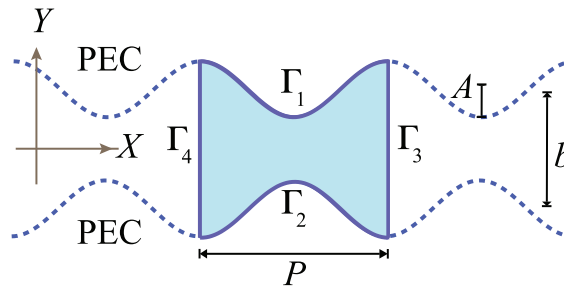


Figura 46. Guía de ondas compuesta por dos superficies onduladas perfectamente conductoras.

Para mostrar que nuestro método numérico puede reproducir resultados que están acorde con lo encontrado en la literatura se calcularon intensidades de campo dentro de la guía. En la Fig. 47 se muestran las intensidades del campo, $I(\mathbf{r})$, obtenidas con $b = 1.5$, $P = 2\pi$, y $A = 0.4b$, para $\Delta\phi = 0.5\pi$ con (a) $\omega_r = 2.7287$ y (b) $\omega_r = 119.0526$, y para $\Delta\phi = \pi$ con (c) $\omega_r = 2.7890$ y (d) $\omega_r = 119.1170$. En todos los casos se consideró polarización TE.

En la Fig. 47 se puede observar que las figuras del lado izquierdo corresponden a campos calculados a frecuencias bajas; mientras que las Figs. 47(b) y (d) corresponden

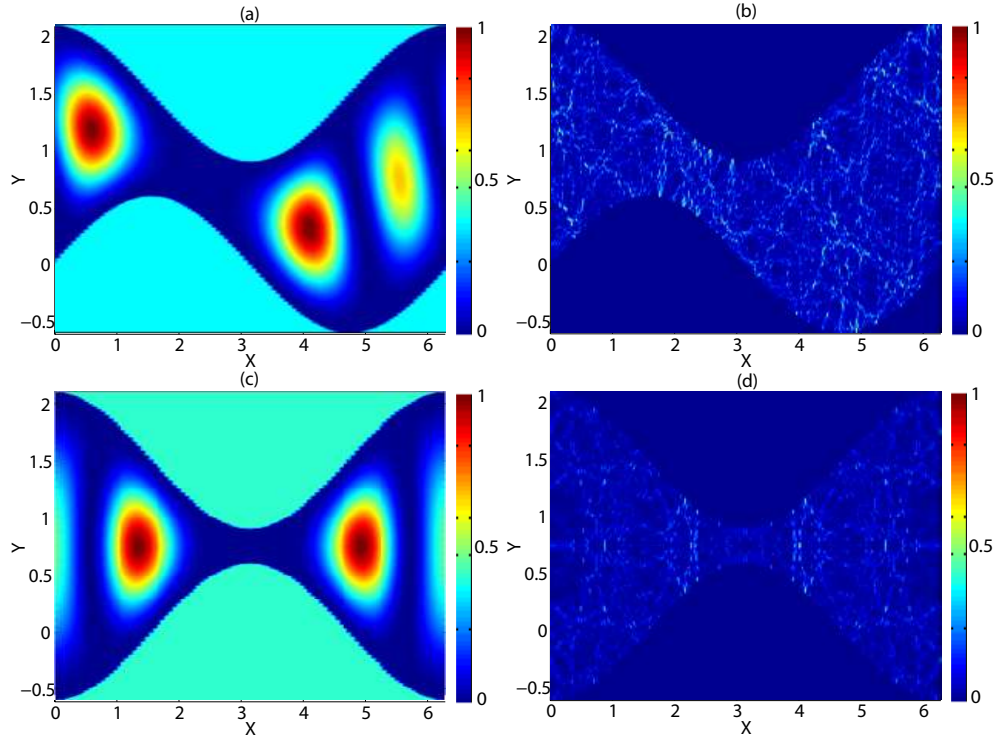


Figura 47. Intensidades de campo en una PCW con $b = 1.5$, $P = 2\pi$, y $A = 0.4b$, para $\Delta\phi = 0.5\pi$ con (a) $\omega_r = 2.7287$ y (b) $\omega_r = 119.0526$, y para $\Delta\phi = \pi$ con (c) $\omega_r = 2.7890$ y (d) $\omega_r = 119.1170$.

a intensidades del campo para frecuencias altas. Primero notemos que las condiciones de frontera se cumplen, ya que la intensidad de los campos en las superficies de PEC son nulas. Por otro lado, si comparamos las Figs. 47(a) y (b) podemos observar que a frecuencias altas aparece una intensidad del campo más desordenada. Lo mismo ocurre al comparar las Figs. 47(c) y (d). La simetría de las Figs. 47(c) y (d) no contradice el desorden del campo y no existe ninguna razón para obtener una intensidad del campo asimétrica en estas figuras debido a los parámetros considerados. Finalmente el desorden de la intensidad del campo puede cuantificarse con herramientas estadísticas como la función de autocorrelación y la longitud de correlación. Debido a la seguridad que se tiene sobre el fenómeno de caos en este sistema (Herrera González *et al.*, 2011; Herrera-González *et al.*, 2012a) no se consideraron dichas herramientas; sin embargo,

ambas definiciones serán presentadas y utilizadas en el siguiente apartado.

V.4.2. Guía de ondas de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto

En esta sección se muestra el cálculo de modos electromagnéticos en una PCW compuesta por dos superficies planas de PEC y una serie periódica de inclusiones cilíndricas circulares, el cual se muestra en la Fig. 48. Estamos especialmente interesados en averiguar si bajo ciertas condiciones es posible obtener patrones del campo desordenados para ciertos modos propios del sistema, lo que podría dar indicios de la presencia del fenómeno de caos en el sistema. Los cálculos se realizaron para polarización TE y TM.

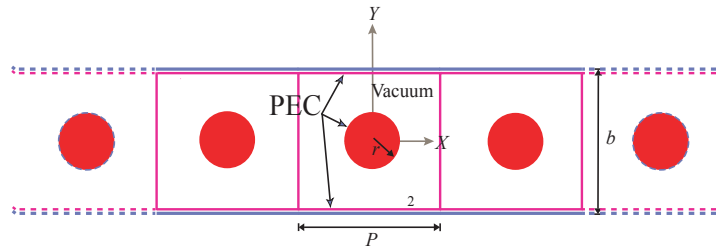


Figura 48. PCW compuesta por dos superficies planas de PEC y una serie periódica de inclusiones cilíndricas circulares.

Para realizar cálculos confiables en el caso de altas frecuencias, es necesario utilizar intervalos de discretización pequeños. Debido a las aproximaciones numéricas involucradas, se utilizó $\Delta s = (P/\omega_{r_{\max}})/20$. Este valor produjo una buena resolución en nuestros cálculos, que luego se verificó comparando los resultados numéricos con los resultados analíticos correspondientes para la guía de onda plana (Alva Medrano and Mendoza-Suárez, 2016).

V.4.3. Polarización TE

Para polarización TE, primero se consideró una PCW formada por dos superficies planas de PEC (sin inclusiones), con $b = \pi$, $P = 2\pi$ y $r = 0$. Obtuvimos la intensidad de campo, $I(\mathbf{r})$, para la frecuencia reducida baja $\omega_r = 2.2400$ [Fig. 49(a)] y para la frecuencia reducida alta $\omega_r = 70.0122$ [Fig. 49(b)]. Además, consideramos los parámetros: $b = \pi$, $P = 2\pi$ y $r = 0.3b$. En este caso, calculamos el campo normalizado para las frecuencias reducidas $\omega_r = 1.2101$ [Fig. 49(c)] y $\omega_r = 70.0224$ [Fig. 49(d)]. Para todos los casos utilizamos el vector Bloch de $\mathbf{k}_r = 0$.

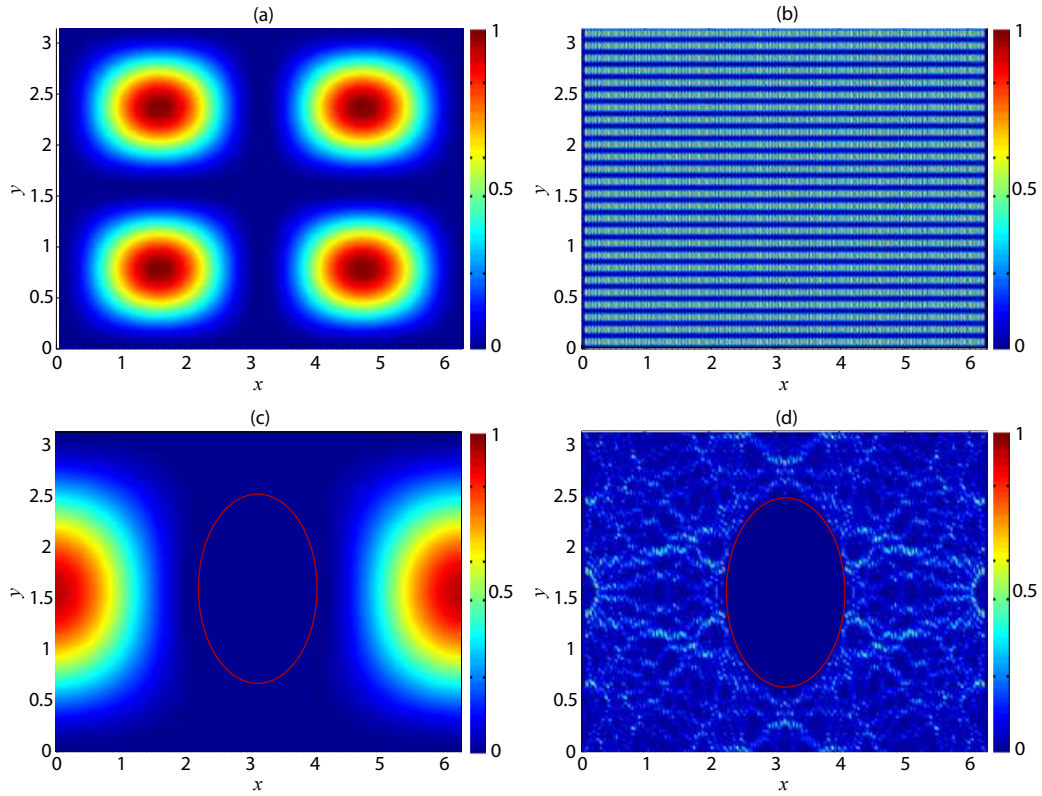


Figura 49. Intensidades del campo en una PCW para polarización TE con $b = 1.5$ y $P = 2\pi$, para $r = 0$ con (a) $\omega_r = 2.2400$ y (b) $\omega_r = 70.0122$, y para $r = 0.3b$ con (c) $\omega_r = 1.2101$ y $\omega_r = 70.0224$.

En la Fig. 49(d) se puede observar que aparece una intensidad de campo desordenada al considerar frecuencias altas e inclusión cilíndrica en el sistema. Este resultado

no es suficiente para asegurar la presencia del fenómeno de caos; sin embargo, usaremos herramientas matemáticas para la interpretación de estos resultados.

Funciones de autocorrelación para polarización TE

Una herramienta matemática importante para la interpretación de caos en sistemas electromagnéticos es la función de autocorrelación (Doya *et al.*, 2002; Luna-Acosta *et al.*, 1996). La función de autocorrelación para un patrón de intensidad electromagnética, $I(r)$, en la celda unitaria se define como:

$$FAC(j) = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} (I(\mathbf{r}_i) - \mu)(I(\mathbf{r}_{i-j}) - \mu)/N_p}{\sigma^2}, \quad (123)$$

donde $\mu = \sum_{i=1}^{N_p} I(\mathbf{r}_i)/N_p$ es el valor medio de I y $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N_p} (I(\mathbf{r}_i) - \mu)^2/N_p$ es la varianza;

$N_p = 245$ es el número de puntos de muestreo con coordenadas $(xi, y(xi))$, siendo para este caso $y(x) = 2.75$, con $0 < x < P$. De esta manera, la autocorrelación se calculó utilizando puntos localizados en la sección superior de la celda unitaria. Las autocorrelaciones de los patrones de intensidad que mostraremos en este trabajo resultan de las correlaciones entre las entradas de la propia intensidad $I(r)$. Una cantidad que podría ser aún más importante es la longitud de correlación l_c , la cual se define como la desviación estándar de la autocorrelación espacial. Para sistemas donde se presenta el fenómeno de caos la longitud de correlación tiende a cero (Alva Medrano and Mendoza-Suárez, 2016).

Se calcularon las correspondientes funciones de autocorrelación. En las Figs. 50(a)-(d) muestran las funciones de autocorrelación calculadas a partir de las Figs. 49(a)-(d), respectivamente. Para las frecuencias bajas, las longitudes de correlación fueron $l_c = 0.4239$ [Fig. 3(a)] y $l_c = 0.4288$ [Fig. 50(c)], y para las frecuencias altas fueron

$l_c = 0.4129$ [Fig. 50(b)] y $l_c = 0.0809$ [Fig. 50(d)].

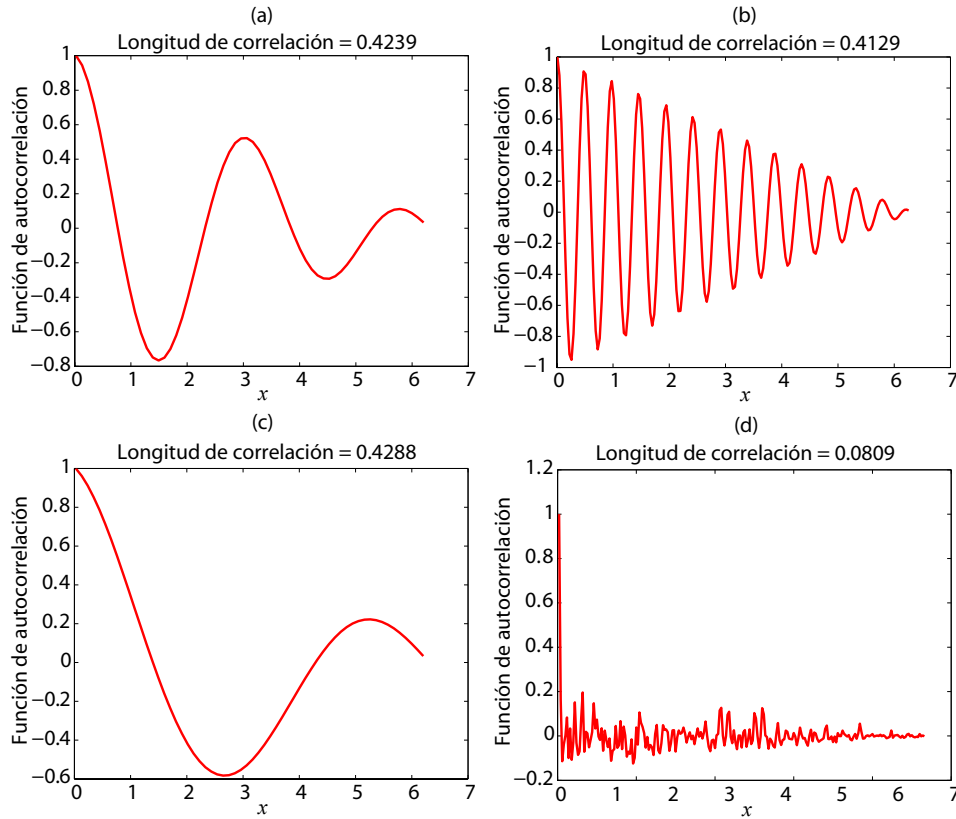


Figura 50. Funciones de autocorrelación calculadas a partir de las Figs. 49(a)-(d), respectivamente.

Antes de discutir estos resultados consideremos los obtenidos para polarización TM.

V.4.4. Polarización TM

Para polarización TM se procedió de manera semejante. Primero se consideró una PCW formada por dos superficies planas de PEC (sin inclusiones), con $b = \pi$, $P = 2\pi$ y $r = 0$. Obtuvimos la intensidad de campo normalizada para las frecuencias reducidas baja $\omega_r = 1.4200$ [Fig. 51(a)] y alta $\omega_r = 70.0081$ [Fig. 51(b)]. Al igual que para polarización TE, en este caso también se consideraron los parámetros: $b = \pi$, $P = 2\pi$ y $r = 0.3b$, de donde se calcularon los campos normalizados para las frecuencias reducidas

$\omega_r = 0.8600$ [Fig. 51(c)] y $\omega_r = 70.0346$ [Fig. 51 (d)]. Para todos los casos se consideró $\mathbf{k}_r = 0$.

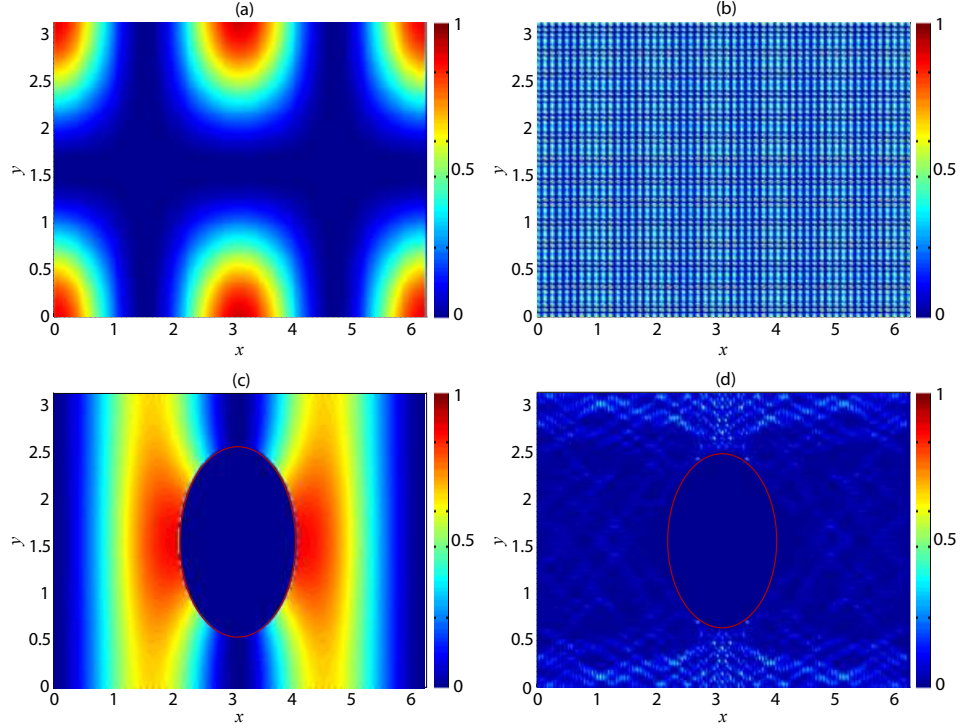


Figura 51. Intensidades del campo en una PCW para polarización TM con $b = 1.5$ y $P = 2\pi$, para $r = 0$ con (a) $\omega_r = 1.4200$ y (b) $\omega_r = 70.0081$, y para $r = 0.3b$ con (c) $\omega_r = 0.8600$ y (d) $\omega_r = 70.0746$.

Funciones de autocorrelación para polarización TM

Finalmente, en las Figs. 52(a)-(d) muestran las funciones de autocorrelación calculadas a partir de las Figs. 51(a)-(d), respectivamente. Para las frecuencias bajas, las longitudes de correlación fueron $l_c = 0.5490$ [Fig. 52(a)] y $l_c = 0.3461$ [Fig. 52(c)], y para las frecuencias altas fueron $l_c = 0.4160$ [Fig. 52(b)] y $l_c = 0.0744$ [Fig. 52(d)].

Al comparar las intensidades de campo normalizadas obtenidas para ambas polarizaciones, de las Figs. 49(d) y 51(d) se tiene una distribución del campo con mayor desorden. De la misma manera, con las longitudes de correlación obtenidas, los ca-

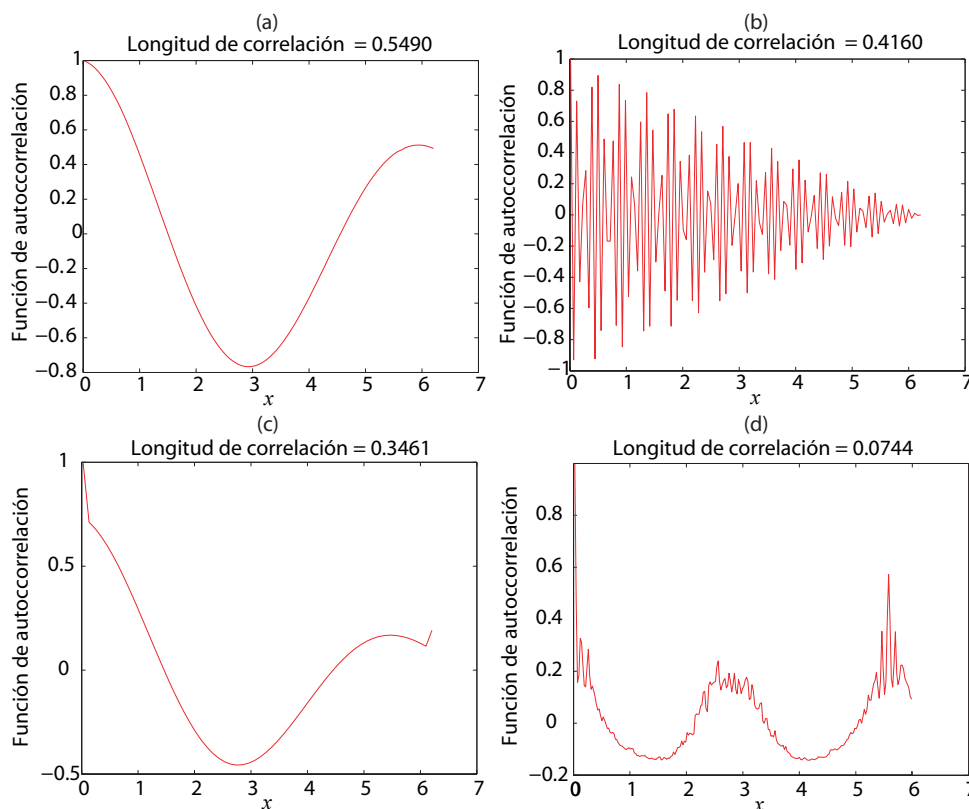


Figura 52. Funciones de autocorrelación calculadas a partir de las Figs. 51(a)-(d), respectivamente.

Los casos antes mencionados tienen un valor pequeño para el parámetro l_c en comparación con los otros casos. Para sistemas caóticos la longitud de correlación l_c tiende a cero, por ello creemos que ésta es una manifestación del caos de ondas electromagnéticas, ya que los cálculos mostrados nos llevan a pensar que la intensidad del modo propio es una variable aleatoria no correlacionada en función de un punto (x, y) en la celda unitaria. La intensidad de campo que se muestra en las Figs. 49(d) y 51(d) no son suficientes para garantizar la presencia del caos en el sistema; sin embargo, algunos sistemas clásicos con geometría similar, como los billares de Sinai (Sinai, 1970), presentan un comportamiento caótico, y éste es nuestro principal argumento para interpretar nuestros resultados como una manifestación de caos electromagnético.

V.5. 3DPnCW formada por cuatro placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas

Ahora consideremos el sistema mostrado en la Fig. 53. Este sistema es una 3DPnCW que contiene cuatro placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas. La periodicidad en este sistema se da en la dirección X y las inclusiones son también de material acústico. La guía presenta un período P , una altura a , un ancho b y el radio de la inclusión es denotado por r . Cabe destacar que al considerar un radio de $r = 0$ se tienen soluciones analíticas para este sistema; sin embargo, nosotros presentaremos los siguientes resultados similares a los que nuestro grupo ya calculó. Tanto las soluciones analíticas como los resultados del grupo pueden ser consultados en la Ref. de Guillén-Gallegos *et al.* (2019). Para este sistema se han calculado estructuras de bandas e intensidades del campo acústico a partir del PGFM, los cuales se muestran a continuación.

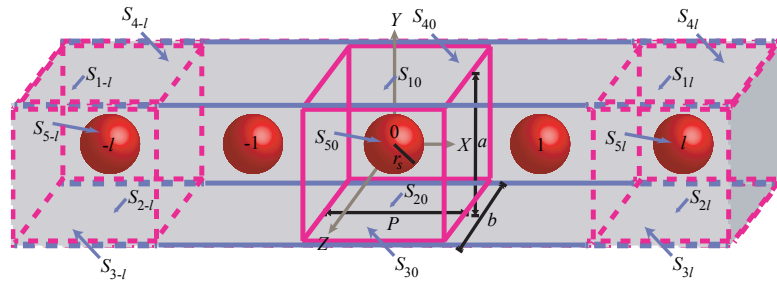


Figura 53. Descripción gráfica de una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones esféricas.

En la Figura 54(a) se muestra la celda unitaria del sistema obtenida con $P = 2\pi$, $a = b = 2\pi$ y $r = 0.1679$. Al igual que para sistemas electromagnéticos, los resultados serán mostrados en términos de dos cantidades adimensionales; una frecuencia reducida

dada por $\omega_r = (P/2\pi c)\omega$ y un vector de Bloch reducido dado por $k_r = (P/2\pi)k$. Para periodicidad unidimensional se tiene que el módulo del vector de Bloch \mathbf{k} está dentro de la primera zona de Brillouin dada por $-\pi/P \leq k \leq \pi/P$. En las Figs. 54(b) y (c) se muestran las estructuras de bandas obtenidas para superficies acústicas suaves y duras, respectivamente. Para estos cálculos $N_L = 45$.

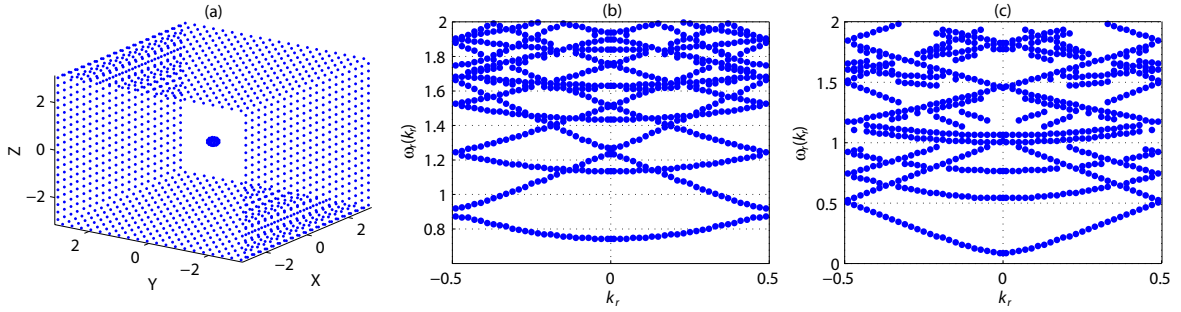


Figura 54. (a) Celda unitaria de una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas que envuelven una inclusión cúbica. Estructuras de bandas obtenidas bajo condiciones de frontera de (b) Dirichlet y (c) Neumann.

En la estructura de bandas mostrada en la Fig. 54(b) se observan todas las bandas completas. Esto nos indica que para los parámetros utilizados y con condiciones de frontera de Dirichlet, el parámetro $N_L = 45$ es un valor suficiente para obtener buenos resultados en este sistema. Es importante mencionar la presencia de bandas prohibidas para frecuencias bajas en esta estructura de bandas. Lo anterior indica de que la guía de onda de cristal fonónico actúa como un filtro unimodal. Este tipo de propiedades representan un interés notable desde un punto de vista tecnológico. En la Fig. 54(c) se tiene que algunas de las bandas en la estructura no aparecen completas. Sabemos por la experiencia del grupo en dicho sistema que esto se soluciona aumentando N_L al orden de 300; sin embargo, por el tiempo de poder de computó requerido nos pareció suficiente obtener este tipo de estructuras para poder pasar al sistema con periodicidad bidimensional. Los resultados mostrados en la Fig. 54 están de acuerdo con los

obtenidos anteriormente por nuestro grupo. También es importante mencionar que al menos con inclusiones cúbicas se obtienen las mismas estructuras de bandas que al considerar inclusiones esféricas, siempre y cuando se conserve la misma fracción de llenado, la cual está dada por el volumen de la inclusión entre el volumen de la celda unitaria. Para mostrar este resultado se consideraron inclusiones cúbicas, la celda unitaria del sistema se muestra en la Fig. 55.

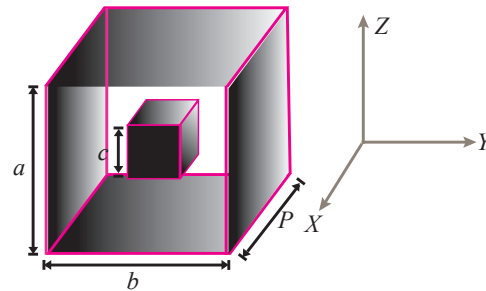


Figura 55. Celda unitaria de una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas que envuelven una inclusión cúbica.

En la Fig. 56(a) se muestra la celda unitaria del sistema obtenida con $P = 2\pi$, $a = b = 2\pi$ y $c = 0.2707$, donde c es el lado de la inclusión cúbica. c es calculado para que la fracción de llenado coincida con la considerada en la Fig. 54. En la Fig. 56(b) se muestra la estructura de bandas obtenida $N_L = 45$.

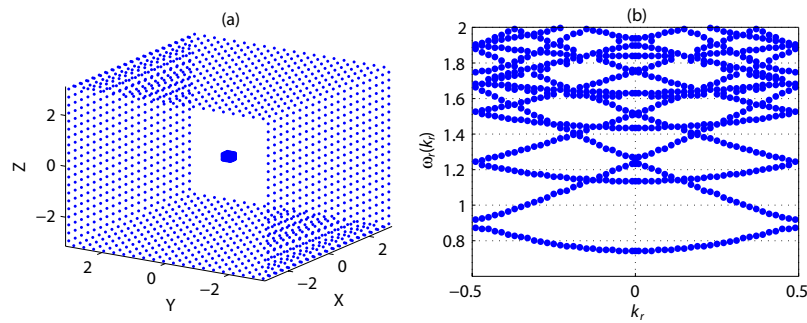


Figura 56. (a) Celda unitaria de una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas que envuelven una inclusión esférica. (b) Estructuras de bandas obtenidas bajo condiciones de frontera de Dirichlet.

Comparando las Figs. 54(a) y 56(b) se puede observar la concordancia entre ambas

estructuras. Mostrando que la estructura de bandas no se ve afectada al considerar inclusiones esféricas o cúbicas. A partir de este punto consideraremos sólo inclusiones esféricas para este sistema.

V.5.1. Intensidades del campo acústico

Con el objetivo de complementar los cálculos mostrados en la sección anterior se calcularon los patrones del campo para ciertos modos del sistema. Los cálculos se realizaron para condiciones de frontera de Dirichlet.

En todos los patrones del campo mostrados en este trabajo los parámetros utilizados fueron: $b = 2\pi$ y $P = 2\pi$; además consideramos tres radios para las inclusiones esféricas, los cuales son: 0.1π , 0.2π y 0.5π . En la Fig. 57 se muestran las celdas unitarias de los sistemas para los tres radios considerados, respectivamente. En todos los resultados mostrados en esta sección se consideró $N_L = 50$ y $\mathbf{k}_r = 0$.

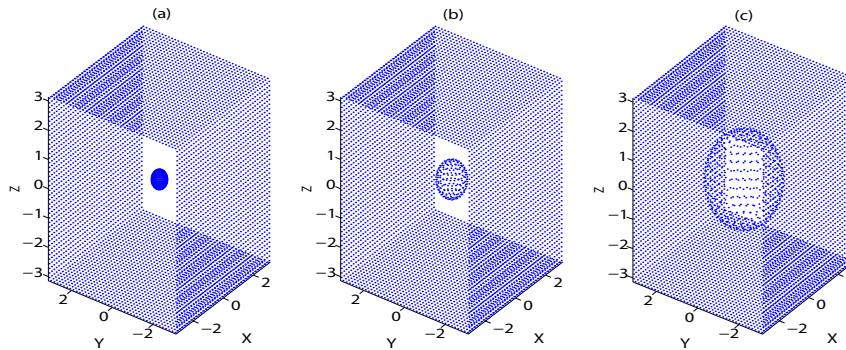


Figura 57. Descripción gráfica de una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones esféricas de distintos tamaños.

En la Fig. 58 se muestran algunas de las intensidades del campo acústicos calculadas al considerar $r = 0.1\pi$ [Fig. 57(a)]. En las Figs. 58(a) y (d) se muestra la intensidad del campo, $I(\mathbf{r}) = |P(\mathbf{r})|^2$, para $\omega_r = 2.2964$, considerando un plano perpendicular (plano YZ) y uno paralelo (plano XZ) a la dirección de periodicidad, respectivamente.

Análogamente en las Figs. 58(b) y (e) se muestra el campo para $\omega_r = 4.1680$ y en las Figs. 58(c) y (f) para $\omega_r = 4.7394$.

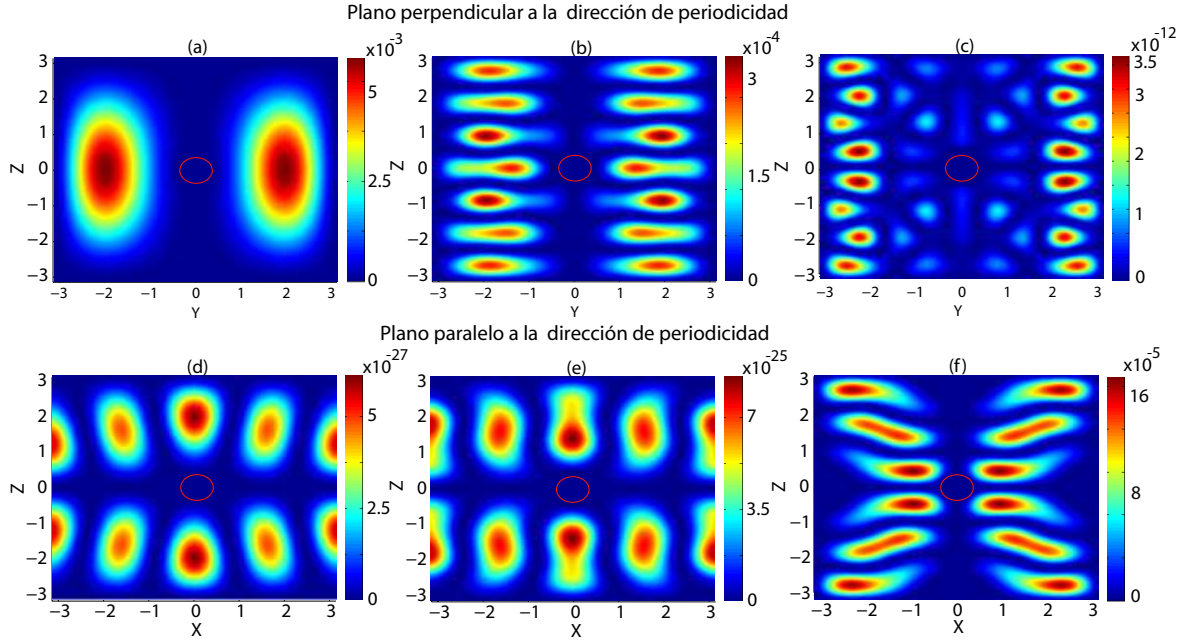


Figura 58. Distribuciones de intensidad de campo acústico dentro de la celda unitaria con una inclusión esférica en un plano (a), (b) y (c) perpendicular a la dirección de periodicidad (plano YZ), y (d), (e) y (f) paralelos a la dirección de periodicidad (plano ZX). Los valores de las frecuencias son: (a) y (c) $\omega_r = 2.2964$, (b) y (d) $\omega_r = 4.1680$, y (e) y (f) para $\omega_r = 4.7394$.

En la Fig. 59 se muestran las intensidades del campo acústico $I(\mathbf{r})$ obtenidas aumentando el valor del radio a $r = 0.2\pi$ [Fig. 57(b)]. En las Figs 59(a) y (d) se muestra la intensidad del campo para $\omega_r = 0.8126$, considerando un plano perpendicular (plano YZ) y uno paralelo (plano XZ) a la dirección de periodicidad, respectivamente. En las Figs. 59(b) y (e) se muestra el campo para $\omega_r = 1.1454$ y finalmente en las Figs. 58(c) y (f) para $\omega_r = 4.7394$. Algunas de estas figuras pueden verse en la Ref. de Guillén-Gallegos *et al.* (2019).

Por último, en la Fig. 60 se muestran las intensidades del campo acústico obtenidas con $r = 0.5\pi$ [Fig. 57(c)]. En las Figs 60(a) y (d) se pueden observar la intensidad del campo acústico $I(\mathbf{r})$ para $\omega_r = 1.2663$, considerando un plano perpendicular (plano

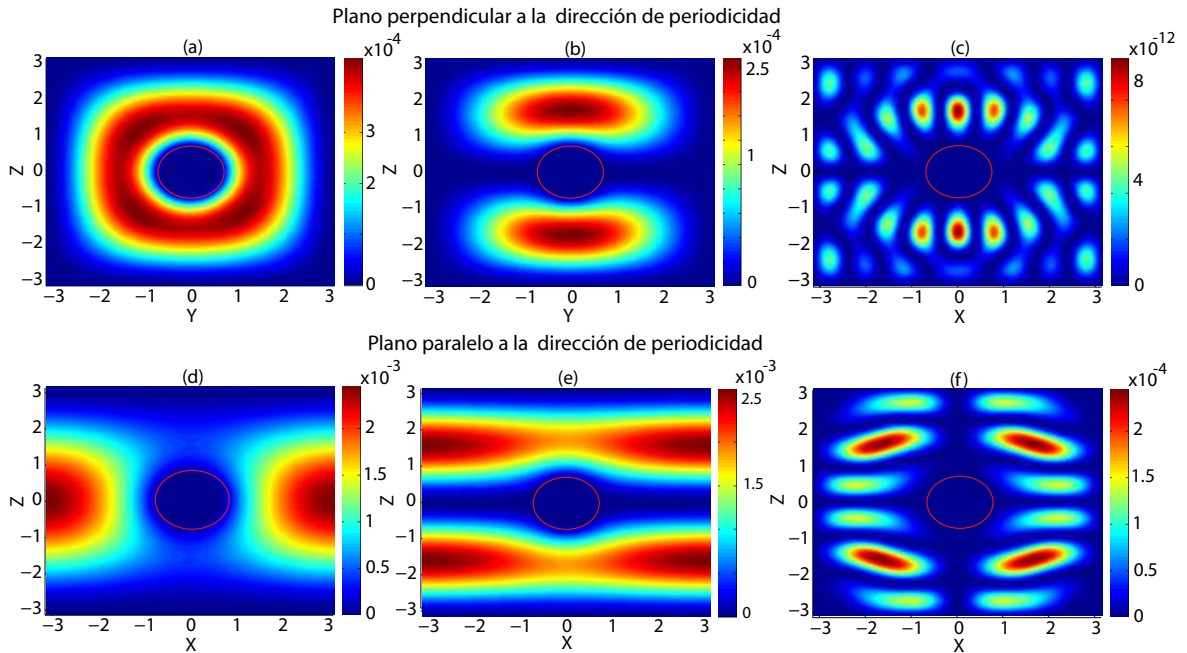


Figura 59. Distribuciones de intensidad de campo acústico dentro de la celda unitaria con una inclusión esférica en un plano (a), (b) y (c) perpendicular a la dirección de periodicidad (plano YZ), y (d), (e) y (f) paralelos a la dirección de periodicidad (plano ZX). Los valores de las frecuencias son: (a) y (c) $\omega_r = 0.8126$, (b) y (d) $\omega_r = 1.1454$, y (e) y (f) para $\omega_r = 4.7394$.

YZ) y uno paralelo (plano XZ) a la dirección de periodicidad, respectivamente. En las Figs. 60(b) y (e) se muestra el campo para $\omega_r = 1.7688$ y en las Figs. 60(c) y (f) se muestra la intensidad del campo acústico para $\omega_r = 4.4621$.

En las Figs. 58, 59 y 60 se puede observar que la intensidad del campo es cero en todas las superficies del sistema, lo cual está de acuerdo con las condiciones de frontera consideradas (condiciones de Dirichlet). A diferencia de algunos patrones de campos mostrados en la PCW mostrada en la Fig. 48, los campos mostrados no presentan un comportamiento caótico, los cuales están caracterizados por patrones irregulares. Al restringir el cálculo del campo a planos paralelos y perpendiculares a la dirección de periodicidad obtenemos un campo cuyo comportamiento se espera que esté de acuerdo con toda la teoría desarrollada sobre el sistema. Al considerar frecuencias lo suficien-

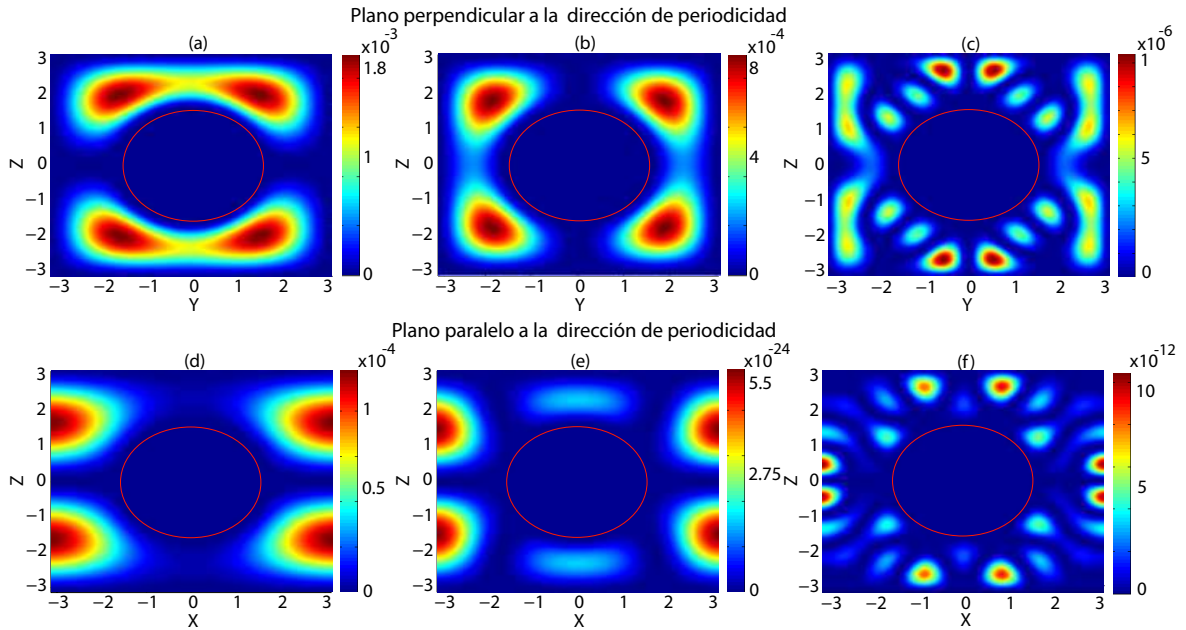


Figura 60. Distribuciones de intensidad de campo acústico dentro de la celda unitaria con una inclusión esférica en un plano (a), (b) y (c) perpendicular a la dirección de periodicidad (plano YZ), y (d), (e) y (f) paralelos a la dirección de periodicidad (plano ZX). Los valores de las frecuencias son: (a) y (c) $\omega_r = 1.2663$, (b) y (d) $\omega_r = 1.7688$, y (e) y (f) para $\omega_r = 4.4621$.

temente grandes se llega al límite de los sistemas clásicos. Un ejemplo muy claro es el sistema óptico mostrado en la Fig. 48. Al considerar frecuencias lo suficientemente grandes en el sistema de la Fig. 48 se llega a la óptica geométrica, en donde el comportamiento del sistema óptico es similar a un sistema clásico con geometrías análogas donde se lanzan partículas en una guía clásica. Como se había mencionado en secciones anteriores, estos sistemas son conocidos como billares de Sinai (Sinai, 1970).

Entre las similitudes que se espera encontrar entre sistemas ópticos o acústicos y clásicos, podríamos mencionar el fenómeno de caos. Según nuestros estudios, como los cálculos mostrados para el sistema de la Fig. 48, con frecuencias normalizadas del orden de 70 es posible observar el fenómeno de caos en ese sistema. Tenemos la hipótesis de que frecuencias de orden similar en el sistema acústico tratado en esta parte de la investigación serán suficientes para observar el fenómeno de caos; sin embargo no hemos

podido hacer cálculos a frecuencias de ese orden. El intervalo de las frecuencias donde se han obtenido cálculos es de $(0, 7)$; no obstante, también por el poder computacional requerido sólo nos ha sido posible obtener cálculos para la intensidad del campo acústico en frecuencias normalizadas no más grandes a 5. Los tiempos para la obtención de los resultados mostrados en esta sección van de 24 a 120 horas. Como trabajo futuro se podría intentar mejorar el tiempo de cómputo y como poder hacer cálculos a frecuencias reducidas del orden de 70. Aún con todo anteriormente dicho estos resultados podrían ser utilizados, por ejemplo, en criptografía.

V.6. 3DPnCW formada por dos placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico bidimensional de inclusiones cúbicas

En este apartado mostraremos los resultados obtenidos para el sistema mostrado en la Fig. 61. Este sistema es una 3DPnCW que contiene dos placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico bidimensional de inclusiones cúbicas. Como podemos observar, este sistema representa una generalización para el sistema mostrado en la sección anterior. A diferencia de la periodicidad unidireccional del sistema anterior, este sistema presenta periodicidad en dos direcciones. Para este sistema mostraremos las estructuras de bandas obtenidas.

Los primeros resultados numéricos obtenidos para este sistema fueron calculados considerando una 3DPnCW formada por dos placas planas y paralelas de superficies acústicas (sin inclusiones). Este sistema tiene una estructura de bandas que puede ser calculada de forma analítica para ambas condiciones de frontera (Dirichlet y Neumann).

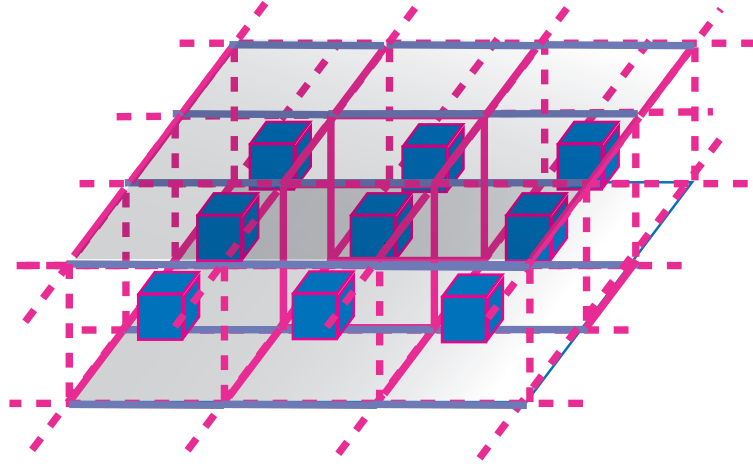


Figura 61. Descripción gráfica de una 3DPnCW formada por dos superficies acústicas planas y paralelas que el envuelven un arreglo periódico de inclusiones cúbicas.

Una guía 3DPnCW formada por dos placas planas (sin inclusiones) y paralelas con una distancia entre placas de $b = 2\pi$, así como periodicidad en ambos ejes, X y Y , de $a = 2\pi$, donde además se cumplen las condiciones de frontera de Dirichlet tiene la relación de dispersión

$$\omega(\mathbf{k} = (k_x, k_y)) = \frac{P}{2\pi} \sqrt{\left(k_x - \frac{2\pi}{P}l\right)^2 + \left(k_y - \frac{2\pi}{P}m\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}q\right)^2}, \quad (124)$$

con $l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; $q = 1, 2, 3, \dots$. Cuando en la guía se tengan condiciones de frontera de Neumann, la única diferencia en la relación de dispersión analítica es que q puede tomar el valor de cero; es decir $q = 0, 1, 2, 3, \dots$. Análogamente al sistema con periodicidad unidimensional, los resultados para este sistema serán expresados en términos de una frecuencia reducida dada por $\omega_r = P/2\pi\omega$ y un vector de Bloch reducido dado por $k_r = (P/2\pi)k$. En la Fig. 62(a) se muestra la celda unitaria del sistema. En la Fig. 62(b) se muestra la comparación entre la estructura de bandas obtenidas analíticamente y numéricamente para superficies acústicas suaves (condiciones de frontera de Dirichlet). En las Fig. 62(c) se muestra la misma comparación pero para superficies acústicas duras (condiciones de frontera de Neumann). Para las estructuras obtenidas

numéricamente se utilizó $N_L = 45$.

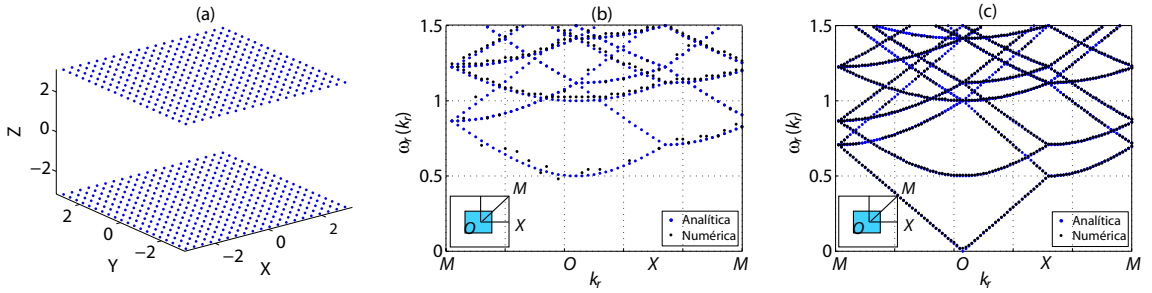


Figura 62. (a) Celda unitaria de una 3DPnCW formada por dos superficies acústicas planas. Comparación de estructuras de bandas obtenidas analítica y numéricamente para superficies acústicas (b) suaves y (c) rígidas.

En la Fig. 62(b) se aprecia que la estructura de bandas obtenida numéricamente no genera todas las bandas predichas por el resultado analítico. De la experiencia obtenida en el método numérico para la 3DPnCW con periodicidad unidimensional se sabe que para obtener resultados más precisos se requiere de valores de N_L hasta del orden de 300, a eso hay que sumarle una buena discretización de la superficie. El problema con este sistema es que los tiempos de cómputo crecen en forma exponencial a medida que se aumenta el valor del parámetro N_L . En la Fig. 62(c) se puede observar una excelente concordancia entre las estructuras calculadas numérica y analíticamente para superficies rígidas. Este hecho permite deducir que valores de $N_L = 45$ son suficientes para obtener buenos resultados en las estructuras de bandas. Con la buena concordancia mostrada para superficies rígidas se calculan estructuras de bandas considerando inclusiones dentro de la guía.

En la Fig. 63 se muestran las celdas unitarias obtenidas para $a = b = 2\pi$, considerando (a) $c = 0.1\pi$ y (b) $c = 0.5\pi$. En las Figs. 63(c) y (d) se muestran sus respectivas estructuras de bandas obtenidas para cada configuración considerando superficies acústicas rígidas.

Es importante recalcar que en el análisis de este sistema nos encontramos con varios

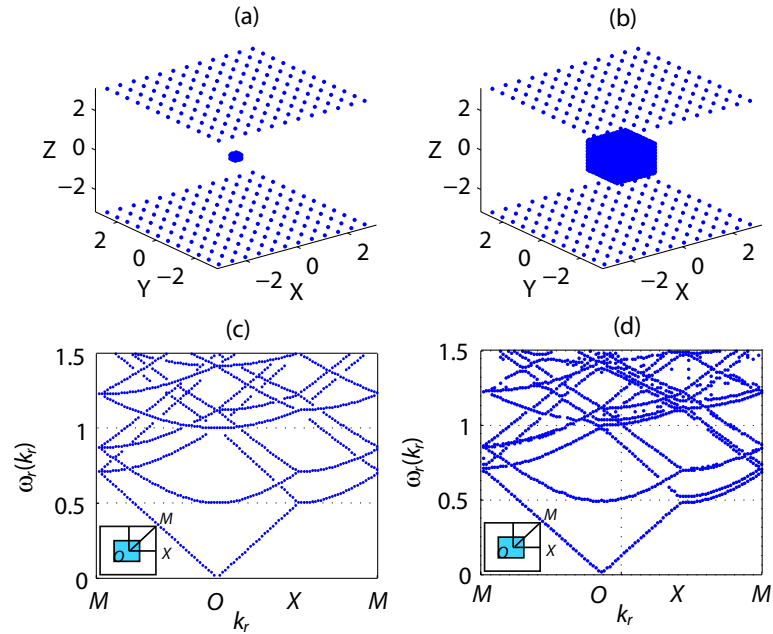


Figura 63. Celda unitaria para una 3DPnCW que envuelve una inclusión cúbica obtenida con $a = b = 2\pi$, para (a) $c = 0.1\pi$ y (b) $c = 0.5\pi$. En (c) y (d) se muestran sus respectivas estructuras de banda obtenidas al considerar superficies acústicas rígidas.

problemas; por ejemplo en la Ecs. (96) y (97) se puede observar la doble sumatoria que va de $-N_L$ a N_L en ambos casos. Esto hace que el poder de cómputo requerido sea considerablemente mayor al necesario para calcular estructuras de bandas en el sistema mostrado en la Fig. 53. El tiempo necesario para calcular una estructura de bandas en nuestro sistema de interés es del orden de N_L veces comparado con el sistema con periodicidad unidimensional. Por otro lado, dado que se trunca una serie infinita hasta el valor de N_L es de esperar que se obtengan mejores resultados para valores cada vez más grandes de N_L .

Se ha considerado, como un trabajo futuro, implementar el paradigma de la paralelización para los métodos numéricos mostrados en este avance de tesis, con lo que se esperaría reducir el tiempo de cómputo que ha llegado a rondar el orden de 80,000 minutos considerando valores no mayores a 50 para N_L . Para superficies suaves se obtienen parte de las estructuras de bandas predichas por la teoría y suponemos que los resul-

tados se pueden mejorar aumentando el valor del parámetro N_L que debido a nuestra limitación computacional sólo pudimos hacer cálculos para $N_L = 50$. Para superficies rígidas se obtuvo una excelente concordancia para las estructuras de bandas obtenidas numéricamente y la obtenida de forma analítica. Además se calcularon estructuras de bandas para la 3DPnCW considerando inclusiones cúbicas pequeñas.

Capítulo VI

CONCLUSIONES

En este capítulo enunciaremos las conclusiones más sobresalientes obtenidas después de hacer un análisis teórico-numérico en sistemas electromagnéticos y acústicos formados por cristales fotónicos y fonónicos en guías de ondas.

- Para la PCW con paredes sinusoidales que contienen una capa de metamaterial fue posible calcular modos de superficie para ambas polarizaciones. En el caso de polarización TE se calculó un modo superficial reportado en la literatura (Ruppin, 2004) con un error relativo del 0.039%, respecto del valor teórico. Para polarización TM aparecen bandgaps en la estructura de bandas, lo que permite pensar en aplicaciones como filtros ópticos. Además, para polarización TM no se encontraron en la literatura frecuencias asociadas a modos de superficie para este sistema, lo cual da relevancia a nuestros resultados. Parte de estos resultados fueron publicados (Alva-Medrano *et al.*, 2019).

- Para la PCW con inclusión de conductor perfecto recubierta de metamaterial y polarización TE fue posible calcular un modo de superficie reportado en la literatura (Ruppin, 2004) con un error relativo respecto del valor teórico es de 0.19%. El modo superficial también puede ser calculado con capas delgadas de metamaterial y sin la

presencia del conductor dentro de la inclusión, mostrando que es secundaria la cantidad de metamaterial incluida en la formación de estos modos de superficie. Bajo polarización TM no se encontraron modos de superficie con las configuraciones consideradas; sin embargo, existen modos cuya intensidad del campo se concentra en las inclusiones, aunque no de forma superficial. Parte de estos resultados también fueron publicados (Alva-Medrano *et al.*, 2019).

- Para la PCW finita se calculó la respuesta óptica mediante la reflectancia, la transmitancia y el campo esparcido considerando inclusiones de LHM y placas de PEC, y bajo polarización TE. Se obtuvo un excelente comportamiento para la conservación de la energía y para ciertos parámetros aparece una frecuencia que se transmite en el sistema y que está asociada a un modo de superficie en el caso infinito, aunque para este sistema su correspondiente patrón del campo no es superficial. Concluimos que, para los parámetros considerados, la respuesta óptica del sistema finito no hereda características tales como los modos superficiales de la guía infinita. Finalmente el sistema infinito y el finito representan dos sistemas distintos.

Por otro lado, al considerar una PCW finita formada sólo por LHM se tiene que, bajo ciertos parámetros, es posible calcular una frecuencia que se transmite en el sistema y que está asociada a un modo de superficie en el caso infinito. Como trabajo futuro se espera realizar cálculos del campo esparcido para estas condiciones para poder completar el trabajo presentado en esta tesis.

- Una PCW con paredes sinusoidales de PEC fue considerada. A partir de ello fue posible calcular patrones del campo desordenados para frecuencias normalizadas del orden de 70. Estos patrones del campo están de acuerdo con lo reportado en la literatura (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a,b; Herrera-González *et al.*, 2012b). Concluimos que este sistema presenta el fenómeno de caos, que también está presente en sistemas

que pueden ser descritos mediante la mecánica clásica (Herrera González *et al.*, 2011).

- El quinto sistema electromagnético considerado fue una PCW formada por dos superficies planas y una serie periódica de inclusiones cilíndricas circulares de PEC. Para ambas polarizaciones se encontraron modos que muestran una distribución del campo desordenada para frecuencias del orden de 70. Además, con los valores obtenidos para l_c y los sistemas clásicos con geometrías similares que presentan el fenómeno de caos, como los billares de Sinai (Sinai, 1970), interpretamos nuestros resultados como una manifestación de caos electromagnético.

- Consideramos una 3DPnCW formada por cuatro placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas. Para condiciones de Dirichlet fue posible calcular estructuras de bandas y algunas cuentan con la presencia de bandas prohibidas, lo que le puede permitir al sistema actuar como un filtro acústico. También se calcularon patrones del campo para algunos modos del sistema cuya intensidad está de acuerdo con las condiciones de frontera. Además, con inclusiones cúbicas y esféricas se obtienen las mismas estructuras de bandas, siempre y cuando se conserve la misma fracción de llenado. Para condiciones de frontera de Neumann se requieren valores mayores de N_L para obtener bandas completas en la estructura de bandas; sin embargo, los cálculos se vuelven poco prácticos debido a los tiempos de cómputo requeridos. Algunos de los resultados mostrados para este sistema fueron publicados (Guillén-Gallegos *et al.*, 2019).

- El último sistema considerado en este trabajo fue una 3DPnCW formada por dos placas acústicas y planas que envuelve un arreglo periódico bidimensional de inclusiones cúbicas. Para condiciones de frontera de Dirichlet se requieren valores de N_L mayores a los considerados para generar completamente las bandas predichas por el resultado analítico; sin embargo, los tiempos de cómputo hacen poco prácticos estos cálculos.

Para condiciones de frontera de Neumann se obtuvo una excelente concordancia entre las estructuras numérica y analítica. Finalmente fue posible obtener estructuras de bandas considerando inclusiones cúbicas. Como trabajo futuro se espera trabajar en la reducción del tiempo de cómputo. Parte de estos resultados fueron publicados (Alva Medrano *et al.*, 2019).

Concluimos de forma general que los métodos numéricos desarrollados en este trabajo de tesis permitieron el análisis de sistemas ópticos y acústicos. Todos estos sistemas han mostrado características importantes que pueden sentar las bases para abordar problemas que pueden ir desde resolver parte de la problemática derivada de la tecnología actual, tratamientos médicos, hasta la obtención de energías limpias.

Apéndice A

ECUACIÓN DE ESTADO

En este apéndice obtendremos la ecuación de estado para un fluido. Esta ecuación relaciona las fuerzas restauradoras internas con las deformaciones correspondientes. Usando la ley de los gases perfectos, se obtiene la ecuación de estado adiabática:

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (125)$$

donde ρ es la densidad del medio, ρ_0 es la densidad de equilibrio constante. Además, β representa la presión instantánea en cualquier punto, β_0 es la presión de equilibrio constante en el fluido y $\gamma = c_p/c_v$ es la razón de los calores específicos a presión y volumen constante, conocido como coeficiente adiabático.

Consideremos una expansión en serie de Taylor para la Ec. (125), alrededor de $\rho = \rho_0$,

$$\beta = \beta_0 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots, \quad (126)$$

al considerar valores pequeños para $(\rho - \rho_0)$ la Ec. (126) puede escribirse como:

$$\beta - \beta_0 \doteq B \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right), \quad (127)$$

donde $B = \rho_0 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$ es llamado el módulo adiabático del volumen.

Finalmente la Ec. (127) puede escribirse como:

$$p \doteq Bs, \tag{128}$$

donde $p = \beta - \beta_0$ es la presión acústica en cualquier punto y $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ es la condensación en cualquier punto, la cual por hipótesis cumple que $|s| \ll 1$. La Ec. (128) es conocida como la *ecuación de estado*.

Apéndice B

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En este apartado obtendremos la ecuación de continuidad, la cual relaciona el movimiento de un fluido respecto a su dilatación o compresión; es decir, establece una relación entre la velocidad de la partícula \mathbf{u} y la densidad instantánea ρ .

Observando la Fig. 64 podemos deducir que la rapidez neta $(\partial p/\partial t) dV$ con la que la masa $\rho\mathbf{u}$ fluye por el volumen dV , debe ser igual a la rapidez con que aumenta la masa dentro del volumen; es decir, $\partial(\rho\mathbf{u})/\partial V$.

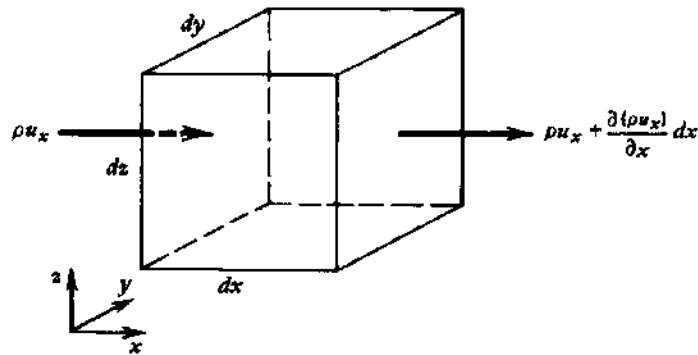


Figura 64. Flujo de masa en la dirección X por un elemento de volumen dV fijo.

De este modo el flujo neto de masa asociado a la dirección X , es

$$\left\{ \rho u_x - \left[\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx \right] \right\} dydz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV \quad (129)$$

con un razonamiento análogo en las direcciones Y y Z obtenemos que el flujo total es

$$-\left[\frac{\partial(pu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(pu_y)}{\partial y} + \frac{\partial(pu_z)}{\partial z}\right]dV \equiv -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})dV. \quad (130)$$

Dado que la rapidez con que la masa aumenta es $(\partial\rho/\partial t)dV$, de la Ec. (130) se obtiene que:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (131)$$

La Ec. (131) se denomina *ecuación de continuidad*. Puede observarse que debido a que el segundo término en la Ec. (131) contiene el producto de ρ con \mathbf{u} no se tiene una relación lineal. Para obtener una ecuación linealizada expresemos la densidad instantánea como $\rho = \rho_0(1 + s)$, suponiendo de nuevo que $|s| \ll 1$ y sabiendo que ρ_0 es una constante respecto del tiempo, se llega a que:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (132)$$

La Ec. (132) es denominada como la *ecuación de continuidad linealizada*.

Apéndice C

ECUACIÓN DE FUERZA

En este apéndice obtendremos la ecuación de Euler del movimiento en un fluido, la cual permite representar el caso más realista de un fluido con viscosidad sujeto a un campo de fuerzas externas \mathbf{f} .

En la Fig. 65 se muestra un volumen de gas situado en un medio homogéneo encerrado en una caja cúbica con paredes flexibles e ingravidas. La presión sonora aumenta de izquierda a derecha con la velocidad espacial en la forma del ∇p .

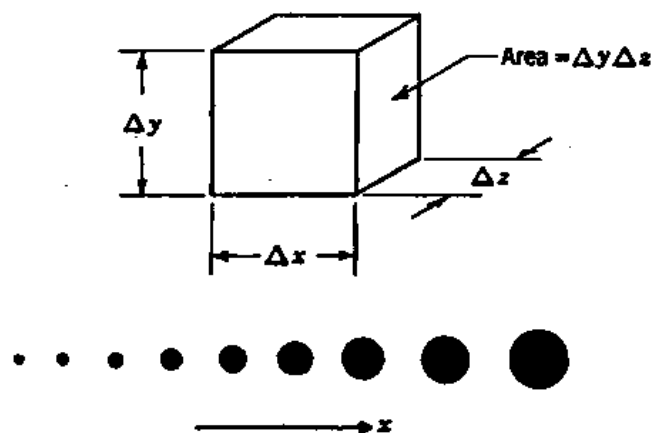


Figura 65. Pequeño cubo de aire, parte de un medio gaseoso en el que la presión sonora aumenta en la dirección X . El tamaño de los puntos indica el aumento de la magnitud de p .

Supongamos que las únicas fuerzas que actúan son las debidas a la presión ejercida sobre las paredes de la caja; es decir es despreciable todo arrastre viscoso entre las partículas de gas dentro de la caja y las de afuera. De este modo, la diferencia entre las fuerzas que actúan sobre dos caras opuestas de la caja cúbica es igual a la velocidad de variación de la fuerza con la distancia, multiplicada por la distancia incremental entre las dos caras.

De este análisis se obtiene que la fuerza que actúa acelerando la caja en dirección positiva es

$$\hat{\mathbf{i}}[(\partial\rho/\partial x) \Delta x] \Delta y \Delta z - \hat{\mathbf{j}}[(\partial\rho/\partial y) \Delta y] \Delta x \Delta z - \hat{\mathbf{k}}[(\partial\rho/\partial z) \Delta z] \Delta x \Delta y \quad (133)$$

Notemos que al dividir la Ec. (133) por $V = \Delta x \Delta y \Delta z$, obtenemos la fuerza por unidad de volumen que acelera la caja,

$$-\nabla p = f/V. \quad (134)$$

Por la segunda ley de Newton, obtenemos que:

$$-\nabla p = f/V = M(D\mathbf{u}/Dt)/V = \rho(D\mathbf{u}/Dt), \quad (135)$$

donde \mathbf{u} representa la velocidad vectorial media del gas en la caja, ρ es la densidad media en la caja y M es la masa total del gas en la caja. Es importante mencionar que $D\mathbf{u}/Dt$ es:

$$D\mathbf{u}/Dt = \partial\mathbf{u}/\partial t + u_x\partial\mathbf{u}/\partial x + u_y\partial\mathbf{u}/\partial y + u_z\partial\mathbf{u}/\partial z, \quad (136)$$

donde u_x , u_y y u_z son las componentes de la velocidad \mathbf{u} . Notemos que si la velocidad \mathbf{u} en la Ec. (136) es lo suficientemente pequeña, entonces la velocidad de variación de la cantidad de movimiento puede tomarse como la velocidad de la variación de la cantidad de movimiento en un punto fijo; es decir, $D\mathbf{u}/Dt = \partial\mathbf{u}/\partial t$.

Finalmente, si consideramos a ρ como la densidad media ρ_0 , llegamos a

$$-\nabla p = \rho_0 \partial \mathbf{u} / \partial t. \quad (137)$$

La Ec. (137) es denominada como la *ecuación de fuerza no viscosa*, la cual es válida para procesos acústicos de pequeña amplitud.

Referencias

- Alva Medrano, H. and Mendoza-Suárez, A. (2016). Plasmones en sistemas que incluyen metamateriales dispersivos. *Tesis de Maestría, UMSNH*, páginas 31–36.
- Alva Medrano, H., Guillén Gallegos, C., Mendoza Suárez, A., and Pérez Aguilar, H. (2019). Calculation of band structures of a phononic crystal within a waveguide in 3d with cubic inclusions using a periodic green’s function method. *Journal of Physics: Conference Series*, **1221**: 012011.
- Alva-Medrano, H., Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., and Villa-Villa, F. (2019). Surface modes in photonic crystal waveguides coated with a layer of dispersive left-handed material. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, **105**: 196–201.
- Atwater, H. A. (2007). The promise of plasmonics. *Scientific American*, **296**(4): 56–63.
- Berkowitz, R. (2018). Quietening a room with metamaterial wall panels. *Physics today*, **66**(22): 11–17.
- Blaber, M. G., Arnold, M., and Ford, M. J. (2009). Optical properties of intermetallic compounds from first principles calculations: a search for the ideal plasmonic material. *Journal of Physics: Condensed Matter*, **21**(14): 144221.
- Bravo-Abad, J. (2006). Transmisión resonante de luz a través de láminas metálicas nanoestructuradas. *Departamento de Física Teórica de Materia Condensada de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España*, página 1.
- Bringuier, S. (2011). Phase and controlling phononic crystals: Realization of acoustic boolean logic gates. *J. Acoust. Soc. Am.*, **130**(4): 1919–1925.
- Cadien, K., Reshotko, M., Block, B. A., Bower, A., Kenche, D., and Davids, P. (2005). Challenger for on-chip optical interconnects. *Proc. SPIE*, **5730**: 133.

- Casadei, F. and Bertoldi, K. (2014). Harnessing fluid structure interactions to design self regulating acoustic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, **115**(3): 034907.
- Cicek, A. (2014). Acoustic waveguiding by pliable conduits with axial cross sections as linear waveguides in two dimensional sonic crystals. *J. Acoust. Soc. Am.*, **134**(5): 13–18.
- Collantes-Pablo, G., Martínez-Abietar, A., and García-Ruperez, J. (2017). Estudio de fibras de cristal fotónico para biosensado haciendo uso de interrogación transversal. *TRABAJO FIN DE GRADO EN INGENIERÍA BIOMÉDICA, UPV*, páginas 76–82.
- Cruz, A., Rodríguez, M., López, J., Herrera, V., Orive, A., and Creus, A. (2015). Nanopartículas metálicas y plasmones de superficie: Una relación profunda. *Avances en Ciencias e Ingeniería*, **03**(02): 67–78.
- Cui, J. G., Yang, T., Chen, L. Q., and Khelif, A. (2018). Frequency-preserved non-reciprocal acoustic propagation in a granular chain. *Appl. Phys. Lett.*, **112**: 181904(1)–(4).
- Desai, S. B., Madhvapathy, S. R., Sachid, A. B., Llinas, J. P., Wang, Q., Ahn, G. H., Pitner, G., Kim, M. J., Bokor, J., Hu, C., Philip Wong, H. S., and Javey, A. (2016). Mos2 transistors with 1-nanometer gate lengths. *Science*, **354**(6308): 99–102.
- Diggins, J., Ralph, J., Spiller, T., Clark, T., Prance, H., and Prance, R. (1994). Chaotic dynamics in the rf superconducting quantum-interference-device magnetometer: a coupled quantum-classical system. *Physical Review E*, **49**(3): 1854–1859.
- Doya, V., Legrand, O., and Mortessagne, F. (2002). Light scattering in an optical fiber. *Physical review letters*, **88**(1): 014102(1)–(4).
- Ebbesen, T. W., Lezec, H., and Ghaemi, H. (1998). Extraordinary optical transmission through subwavelength hole arrays. *Nature*, **391**: 667–669.

- Evlyukhin, A. B., A. L. Stepanov, A. L., Kiyani, R., Chichkov, B. N. Blaber, M. G., Arnold, M., and Ford, M. J. (2008). Efficiency of surface-plasmon-polariton focusing by curved chains of nanoparticles. *Journal of the Optical Society of America B*, **25**(6): 1011–1015.
- Fitzgerald, R. (2018). A granular acoustic diode. *Appl. Phys. Lett.*, **67**(37): 24–29.
- García-Meca, C., Orduño, R., Salvador, R., Martínez, A., and Martí, J. (2007). Low-loss single-layer metamaterial with negative index of refraction at visible wavelengths. *Opt. Express*, **15**: 9320–9325.
- García-Vidal, F. J. and Martín-Moreno, L. M. (2008). Plasmones superficiales. *Universidad Autónoma de Madrid, Investigación y Ciencia, España*.
- Ghirghi, M. V. (2013). Fabricación e investigación de fibras de cristal fotónico (microestructuradas) con núcleo de gran Área. pereira. *Centro de Investigaciones en Óptica, A.C.*
- González Porras, Y. M., Ossa Puestes, A., and Rodríguez Patarroyo, D. J. (2015). Cristales fotónicos empleados en tratamientos médicos. *Avances: Investigación en Ingeniería*, **12**(1).
- Guel-Tapia, J., Villa-Villa, F., Mendoza-Suárez, A., and Pérez-Aguilar, H. (2016). Acoustic scattering of 3d complex systems having random rough surfaces by scalar integral equations. *Archives of Acoustics*, **41**(3): 461–472.
- Guillén-Gallegos, C., Alva-Medrano, H., Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., and Villa-Villa, F. (2019). Phononic band structure of an acoustic waveguide that behaves as a phononic crystal. *Results in Physics*, **12**: 1111–1118.
- Gupta, A. (2014). A review on sonic crystal, its applications and numerical analysis techniques. *Acoustical Physics India*, **60**(2): 223–234.

- Herrera González, I. F., Arroyo Correa, G., Mendoza Suárez, A., and Tututi, E. S. (2011). Study of the resistivity in a channel with dephased ripples. *International Journal of Modern Physics B*, **25**(5): 683–698.
- Herrera-González, I. F., Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., and Tututi, E. S. (2012a). Heat conduction in systems with kolmogorov-arnold-moser phase space structure. *PHYSICAL REVIEW E*, **86**: 031138(1)–(9).
- Herrera-González, I. F., Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., and Tututi, E. S. (2012b). Heat conduction in systems with kolmogorov-arnold-moser phase space structure. *PHYSICAL REVIEW E*, **86**: 031138(1)–(9).
- Ibiza, T. (2013a). Estudio numérico de la focalización de ondas evanescentes con una estructura periódica. *Universidad Politécnica de Valencia, Trabajo de grado*, páginas 1–68.
- Ibiza, T. (2013b). Estudio numérico de la focalización de ondas evanescentes con una estructura periódica. *Universidad Politécnica de Valencia, Trabajo de Grado*, páginas 1–68.
- Keller, H. B. (1968). Numerical methods for two-point boundary value problems. *Ginn-Blaisdell, Boston, Massachusetts*, páginas 139–159.
- Khelif, A. (2003a). Transmission and dispersion relations of perfect and defect containing waveguide structures in phononic band gap materials. *P.R.B.*, **68**: 1–8.
- Khelif, A. (2003b). Two dimensional phononic crystal with tunable narrow pass band and application to a waveguide with selective frequency. *Journal of Applied Physics*, **94**(3): 1308–1311.
- Kittel, C. (1996). instruction to solid state physicsmengens. *John Wiley and Sons, Inc., Madrid, España, 7ma edición*, página 804.
- Kress, R. (2006). Acoustic scattering, in scattering. scattering and inverse scattering in pure and applied science. *Academic Press, London*.

- Kuzmiak, V. and Maradudin, A. A. (2002). Scattering properties of a cylinder fabricated from a left-handed material. *Phys. Rev. B.*, **66**: 045116.
- Kyung-Koo, L., Park, K., Lee, H., Noh, Y., Kossowska, D., Kwak, K., and Cho, M. (2017). Ultrafast fluxional exchange dynamics in electrolyte solvation sheath of lithium ion battery. *Nature Communications*, **8**(14658).
- Lee, W. M. (2015). Three-dimensional acoustic scattering by multiple spheres using collocation multipole method. *International Journal of Solids and Structures*, **63**: 39–49.
- Lezec, H., Degiron, A., Devaux, E., Linke, R., Martin-Moreno, L. M., García-Vidal, F. J., and Ebbesen, T. (2002). Beaming light from a subwavelength aperture. *Science*, **297**(5582).
- Liu, Z. (2000). Locally resonant sonic materials. *Science*, **289**: 173(4)–(6).
- Lucklum, R. (2014). Phononics crystals and metamaterials, promising new sensor platforms. *Institute for Micro and Sensor Systems, Germany*, **87**: 40–45.
- Lukyanova-Hleb, E., Yoo-Shin, K., Belatsarkouski, I., Gillenwater, A., O’Neill, B., and Lapotko, D. (2016). Intraoperative diagnostics and elimination of residual microtumours with plasmonic nanobubbles. *Nature Nanotechnology*, **11**: 525–532.
- Luna-Acosta, G. A., Na, K., Reichl, L. E., and Krokhin, A. (1996). Band structure and quantum poincaré sections of a classically chaotic quantum rippled channel. *Physical Review E*, **53**(4): 3271.
- Maldovan, M. (2013). Sound and heat revolutions in phononics. *Nature*, **503**: 209–217.
- Maradudin, A. A., Michel, T., McGurn, R. A., and Méndez, E. R. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **203**: 255–307.
- Marsden, J. E. and Tromba, A. J. (2004). Cálculo vectorial. *Pearson educación, S. A.*, **5**: 501–509.

- Mendoza-Suárez, A. and Pérez-Aguilar, H. (2013). Band structure of a periodic waveguide that includes a dispersive metamaterial. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, **8785**.
- Mendoza-Suárez, A. and Pérez-Aguilar, H. (2015). Optical response of a photonic crystal waveguide that includes a dispersive left-handed material. *Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications*, **14**: 93–100.
- Mendoza-Suárez, A. and Pérez-Aguilar, H. (2016). Numerical integral methods to study plasmonic modes in a photonic crystal waveguide with circular inclusions that involve a metamaterial. *Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications*, **21**: 1–12.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., and Gaspar-Armenta, J. A. (2006). Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and two-dimensional photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**(10): 2249–2256.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., and Gaspar-Armenta, J. A. (2007). Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive lefthanded materials and dielectrics in the unit cell. *J. Opt. Soc. Am. B*, **24**(12): 3091–3098.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., and Gaspar-Armenta, J. (2008). Plasmonic modes in a dispersive left handed material optical fiber. *Revista mexicana de física*, **54**(2): 82–86.
- Mendoza-Suárez, A., Pérez-Aguilar, H., and Villa-Villa, F. (2011). Optical response of a perfect conductor waveguide that behaves as a photonic crystal. *Prog. Electromagn. Res.*, **121**: 433–452.
- Mengers, M., Wijnhoven, J., Lagendijk, A., and Vos, W. L. (1999). Light sources inside photonics crystal. *J. Opt. Soc. Am. B*, **16**(9): 1403–1408.

- Miguez, H., Yang, S. M., Tetreault, N., and Ozin, G. A. (2002). Oriented free-standing three-dimensional silicon inverted colloidal photonic crystal microribers. *Advanced Materials*, **14**: 1805–1808.
- Miyashita, T. (2005). Sonics crystals and sonic wave-guides. *Ryukoku University, Japan. Sci. Technol.*, **16**: R47–R63.
- Moreno, E., García-Vidal, F. J., Sergio, G., Martín-Moreno, L., and Sergey, I. B. (2008). Plasmones superficiales. *Universidad Autónoma de Madrid, Investigación y Ciencia, España*.
- Na, T. Y. (1980). Computational methods in engineering boundary value problems. *Academic press*, páginas 289–305.
- Neshev, D. N., Sukhorukov, A. A., Krolikowski, W., and Kivshar, Y. S. (2007). Non-linear optics and light localization in periodic photonic lattices. *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*, **16**(01): 1–25.
- Park, H., Park, J., Lim, A. K., Anderson, E. H., Alivisatos, A. P., and McEuen, P. L. (2000). Nanomechanical oscillations in a single-c 60 transistor. *Nature*, **407**: 57–60.
- Partridge, C. J. (1993). Sound wave scattering from a rigid sphere. *MRL Technical Report*, **91**(9): 1–49.
- Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J., and Stewart, W. J. (1998). Low frequency plasmons in thin-wire structures. *J.Phys.: Condens. Matter.*, **10**: 4785–4809.
- Pennek, Y. (2004). Tunable filtering and demultiplexing in phononic crystals with hollow cylinders. *Phys. Rev. E.*, **69**: 046608(1)–(6).
- Pérez-Aguilar, H. and Mendoza-Suárez, A. (2014). A plasmonic mode in a photonic crystal waveguide that involve a dispersive left handed material. *Latin America Optics and Photonics Conference (LAOP)*, página LM4A.43.

- Pérez-Aguilar, H. and Mendoza-Suárez, A. (2016). Numerical study on a photonic crystal waveguide that includes a dispersive metamaterial. *Óptica Pura y Aplicada*, **49**(3): 115–123.
- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., and Herrera-González, I. F. (2013a). Disordered field patterns in a waveguide with periodic surfaces. *Prog. Electromagn. Res. B*, **48**: 329–346.
- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., and Herrera-González, I. F. (2013b). Chaotic behavior of a quantum waveguide. *Physica B: Condensed matter*, **411**: 93–98.
- Podolsky, V., Sarychev, A., and Shalaev, V. (2003). Plasmon modes and negative refraction in metal nanowire composites. *Opt. Express*, **11**: 735–745.
- Porras-González, Y. M., Puentes-Ossa, A., and Rodríguez-Patarroyo, D. J. (2015). Photonic crystals used in medical treatments. *Avances: Investigacion en Ingenieria*, **12**(1).
- Porter, M. A. and Liboff, R. L. (2003). Caos en la escala cuántica. *INVESTIGACIÓN Y CIENCIA*, **319**: 76–82.
- Porter, M. A., Kevrekidis, P. G., and Daraio, C. (2015). Granular crystals: Nonlinear dynamics meets materials engineering. *Physics today*, **68**(11): 44–49.
- Represa Fernández, J., Grande Sáez, A., Barba García, I., López Cabeceira, A. C., *et al.* (2013). Metamateriales con índice de refracción negativo: una nueva frontera en electromagnetismo. *Revista de ciencias*, **1**: 15–20.
- Ritchie, R. H. (1957). Plasma losses by fast electrons in thin films. *Physical Review*, **106**: 874.
- Romero, V. (2012). Theoretical and experimental evidence of level repulsion states and evanescent modes in sonic crystal stubbed waveguides. *Optical Society of America*, **134**: 267–276.

- Ruppín, R. (2004). Surface polaritons and extinction properties of a left-handed material cylinder. *J. Phys.: Condens. Matter*, **16**(14): 5991–5998.
- Salas Montiel, R. and Blaize, S. (2015). Dispositivos nanofotónicos: enfocar y concentrar la luz a escalas nanométricas. *Mundo nano*, **8**(15): 10–15.
- Sanjuán, M. (2006). Boltzmann, caos y mecánica estadística. *Revista Española de Física*, páginas 1–4.
- Sergey, I. B., Volkov, V. S., Dexaux, E., Laluet, J., and W., E. T. (2006). Channel plasmon subwavelength waveguide components including interferometers and ring resonator. *Nature*, **440**: 508–515.
- Shalaev, V. (2005). Negative index of refraction in optical metamaterials. *Opt. Lett.*, **30**: 3356–3358.
- Sinai, Y. G. (1963). On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics. *Doklady Akademii Nauk SSSR (in Russian)*.
- Sinai, Y. G. (1970). Dynamical systems with elastic reflections. *RUSS MATH SURV*, **25**(2): 137–189.
- Sliwa, I. (2005). Phononic band gap width control through structural and material parameters in two dimensional phononic crystals. *Acta Phy. Pol. A.*, **108**(6): 1–15.
- Sz-Chin, S. (2011). Tunable phononic crystals with anisotropic inclusions. *Phys. Rev. B.*, **83**: 174303(1)–(9).
- Turley, S. (2006). Acoustic scattering from a sphere. internal hughes research laboratory notes. *Physics, Université Paris-Est*.
- Veselago, V. (1968). The electrodynamics of surfaces with simultaneously negative values. *Sov. Phys. Usp.*, **10**(4).

- Vuylsteke, X. (2014). Development of a reference method based on the fast multipole boundary element method for sound propagation problems in urban environments: formalism, improvements and applications. *Physics, Université Paris-Est*.
- Weeber, J. C., Kreen, J. R., Dereux, A., Lamprecht, B., Lacroute, Y., and Goudonnet, J. P. (2001). Near-field observation of surface plasmon polatiton propagation on thin metal stripes. *Physical Review B*, **64**(045411).
- Yang, M., Li, Z., Reese, M., Reid, G., Kim, D., Siol, S., Klein, T., Yan, Y., Berry, J., Van-Hest, M., and Zhu, K. (2017). Perovskite ink with wide processing window for scalable high-efficiency solar cells. *Nature Energy*, **2**(17038).
- Yang, S. (2004). Phys. rev. letters. *Physics Today*, **93**: 024301(1)–(4).
- Yeh, J. Y. (2013). Application and analysis of phononic crystal energy harvesting devices. *J. Eng. Technol. Educ.*, **10**(1): 18–26.
- Yong, Y., Thanh-Nguyen, M., Tsukamoto, H., Matsubara, M., Ying-Chih, L., and Yonezawa, T. (2017). Effect of decomposition and organic residues on resistivity of copper films fabricated via low-temperature sintering of complex particle mixed dispersions. *Scientific Reports*, **7**(45150): 1–9.
- Yuntuan, F., Haijin, S., and Tiggen, S. (2006). New evidence of negative refraction in photonic crystal. *Opt. Mater*, **28**: 1156–1159.