



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**INTEGRACIÓN DE RESTRICCIONES NO LINEALES NO
CONVEXAS EN MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL**

TESIS

Que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Presenta

Emanuel HUERTA BALCÁZAR

Director de Tesis

Dr. en Ingeniería Eléctrica y Electrónica Jaime CERDA JACOBO

Morelia, Michoacán a agosto del año 2019

Agradecimientos

Quiero agradecer a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica (DEP-FIE), así como a la Universidad Michoacana de san Nicolás de Hidalgo (UMSNH) por haberme permitido cursar los estudios de maestría en esta prestigiosa institución.

Al personal docente de la DEP-FIE por sus valiosas enseñanzas.

Al Dr. Jaime Cerda Jacobo por el apoyo brindado durante este proceso.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el financiamiento otorgado a través de la beca con numero 621611.

DEDICATORIA

A mi padre

Víctor Manuel Huerta Herrera

A mi madre

María Dolores Balcázar Hernandez

A mis hermanos

Jorge Alfredo Huerta Balcázar

Daniel Gerardo Huerta Balcázar

Lista de Publicaciones

E. H. Balcázar, J. Cerda y A. Avalos, *A Validation Method to Integrate Non-Linear Non-Convex Constraints into Linear Programs*, 2018 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC), Ixtapa, México, 2018, pp. 1-7. doi: 10.1109/ROPEC.2018.8661468

E. H. Balcázar y J. Cerda, *A Non-Convex Zones Identification Method for Non-Linear Non-Convex Constraints Applied to LP*, Enviado a 2019 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC).

Resumen

En muchos sistemas se requiere de la integración de restricciones no lineales como parte de un programa lineal para su correcto modelado. Una forma de enfrentar este problema es expresar la función no lineal como un conjunto de restricciones lineales. Este proceso se llamará linealización. Por lo tanto, la linealización da como resultado un conjunto de restricciones lineales que pasarán a formar parte del problema de programación lineal.

Al tratarse de una función no lineal, existe la posibilidad de que sea o no convexa, las restricciones obtenidas por la linealización pueden o no representar un problema al resolver con programación lineal. Si la función no lineal es convexa, el programa lineal puede ser resuelto sin correr el riesgo de obtener soluciones no factibles. Por otro lado, si se trata de una función no convexa, su linealización resulta inevitablemente en la pérdida de región factible, de modo que cuando se resuelve el problema con programación lineal, se podría devolver una solución no óptima. Para evitar esta situación, se pueden considerar solamente las restricciones obtenidas del conjunto de vértices convexos para la solución del problema. Sin embargo, bajo este enfoque, el riesgo de obtener soluciones no factibles es un problema a resolver.

Esta tesis analiza las situaciones que pueden surgir al resolver un problema de programación lineal en el que se ha introducido una función no lineal no convexa como un conjunto de restricciones lineales y presenta una metodología diseñada para la solución de este tipo de problemas. Con este fin, se propone un algoritmo para la identificación de regiones no convexas, así como los vértices que delimitan la frontera de cada una de estas zonas. Posteriormente, se propone un algoritmo para identificar posibles soluciones no factibles causadas por la integración de la restricción no convexa. Finalmente, se devuelve una solución alternativa a la obtenida con programación lineal en caso de que se requiera, asegurando que la solución propuesta pertenece a la región factible.

Palabras clave : *Programación Lineal, Restricciones No Convexas, Zonas No Convexas, Envoltura Convexa, Triangulación de Delaunay.*

Abstract

There are systems that require the integration of non-linear functions into a linear program for their correct modeling. One way to face this problem is to express the non-linear function as a set of linear constraints. This process will be called linearization. Therefore, the linearization results in a set of linear constraints which will become part of the linear program.

Being a non-linear function, and because it may or may not be convex, the restrictions obtained when linearizing it may or may not represent a problem when solving a linear program. If the non-linear function is convex the linear program can be solved with a solver without running the risk of getting wrong solutions. On the other hand, if it is a non-convex function, its linearization results in a loss of feasible region, so that when solved with a solver, a non-optimal solution can be returned. In order to avoid this problem, it could only be considered the restrictions obtained from the set of convex vertices for the solution of the linear program. However, under such approach, the risk of obtaining unfeasible solutions is one issue to be solved.

This document analyzes the situations that may arise when solving an linear program to which a non linear non convex function has been introduced as a set of linear constraints. It presents a methodology focused on the solution of the above type of problems. To this end an algorithm for the identification of non convex regions as well as the vertices that delimit the border of each of these zones is proposed. Subsequently, an algorithm to assess the risk of falling into non-feasible solutions is proposed. Finally, an alternative solution from that obtained by the solver is returned if required, ensuring that the proposed solution belongs to the feasible region.

Keywords : *Linear Programming, Non-Convex Constraints, Non-Convex Zones, Convex Hull, Delaunay Triangulation.*

Contenido

Agradecimientos	III
Dedicatoria	V
Lista de Publicaciones	VII
Resumen	IX
Abstract	XI
Contenido	XIII
Lista de Figuras	XV
Lista de Tablas	XVII
Lista de Algoritmos	XIX
Lista de Símbolos	XXI
Lista de Acrónimos	XXIII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Planteamiento del Problema	5
1.3. Justificación	7
1.4. Metodología	9
1.5. Objetivos de la Tesis	11
1.5.1. Objetivo general	11
1.5.2. Objetivos particulares	11
1.6. Descripción de Capítulos	12
1.7. Comentarios finales	12
2. Problemas originados por las restricciones NLNC en programación lineal	13
2.1. Programación Lineal	13
2.2. Programación Lineal con una restricción no lineal	15
2.2.1. Restricciones convexas y no convexas	15
2.3. Comentarios finales	22
3. Identificación de la frontera que envuelve a zonas no convexas	23
3.1. Determinación de las no convexidades	23
3.1.1. Envoltura convexa	24
3.2. Identificación de las regiones no convexas	26
3.2.1. Construcción de las facetas no convexas	26

3.3. Identificación de las fronteras y zonas no convexas	27
3.3.1. Algoritmos para la identificación de la frontera de las zonas no convexas	28
3.4. Comentarios finales	35
4. Metodología de validación de restricciones no lineales no convexas en problemas de programación lineal	37
4.1. Representación de una restricción no lineal como un conjunto de restricciones lineales	37
4.1.1. Línea recta	38
4.1.2. Plano	38
4.1.3. Linealización de una restricción NLNC	40
4.2. Determinación de la intersección entre una restricción lineal y una faceta . .	41
4.3. Algoritmos para identificar intersecciones entre una faceta y una restricción lineal	42
4.4. Comentarios finales	46
5. Resultados	47
5.1. Linealización de la restricción no convexa	47
5.1.1. Casos de estudio	48
5.2. Identificación de las regiones no convexas	54
5.3. Evaluación de la solución obtenida con PL	56
5.4. Comentarios finales	58
6. Conclusiones y Trabajo Futuro	59
6.1. Conclusiones	59
6.2. Trabajo Futuro	61
A. Conjuntos de vértices para los casos de estudio	63
B. Desigualdades lineales obtenidas de la superficie convexa	73
C. Zonas no convexas identificadas con el algoritmo propuesto	95
Referencias	97

Lista de Figuras

1.1. Vértices correspondientes a una función en \mathbb{R}^2	3
1.2. Vértices correspondientes a una función en \mathbb{R}^3	3
1.3. Ejemplo de función convexa.	8
2.1. Ejemplo de un programa lineal en \mathbb{R}^2	14
2.2. Polígono no convexo	16
2.3. Vértices discretizados de una función en \mathbb{R}^2	16
2.4. Restricción NC con solución factible no óptima.	18
2.5. Restricción NC donde no se afecta la solución óptima.	19
2.6. Intersección entre una faceta no factible y una región NC que no afecta la solución.	20
2.7. Solución no factible.	21
3.1. Linealización entre los vértices de la envoltura convexa.	24
3.2. Conjunto de facetas que forman la envoltura convexa.	25
4.1. Plano con vertices p, q, r	38
4.2. Plano que pasa a través de p con vector normal n	39
4.3. Intersección entre una faceta y una restricción.	42
5.1. Vértices correspondientes a una función en \mathbb{R}^3	48
5.2. Triangulación y vértices de la envoltura convexa.	49
5.3. Restricción NLNC donde no se afecta la solución óptima.	51
5.4. Intersección entre una restricción lineal y una zona no convexa que no afecta la solución óptima.	52
5.5. Restricción NLNC con solución no factible.	53
5.6. Solución no factible.	54
5.7. Facetas obtenidas con la triangulación de Delaunay.	54
5.8. Facetas generadas a partir de puntos no convexos.	55
5.9. Zonas no convexas	56
5.10. Solución alternativa a la obtenida con Gurobi	57

Lista de Tablas

5.1. Resultados de los casos de estudio	57
A.1. Conjunto de 21 vértices en \mathbb{R}^2	63
A.2. Conjunto de 631 vértices en \mathbb{R}^3	64
B.1. Desigualdades lineales para el conjunto de 631 vértices en \mathbb{R}^3	74
C.1. Vértices que dan origen a regiones no convexas.	96

Lista de Algoritmos

1.	Algoritmo principal para la identificación de regiones no convexas	29
2.	Obtención de puntos y facetas, convexos y no convexos.	30
3.	Obtención de facetas no convexas asociadas a un punto.	31
4.	Identificación de zonas no convexas	33
5.	Auxiliar en la identificación de zonas no convexas	34
6.	Algoritmo principal para la detección de intersecciones entre una restricción y una faceta no factible.	43
7.	Detección de soluciones potencialmente no factibles por eliminación de punto no convexo.	44
8.	Detección de intersecciones entre una restricción y una faceta.	45

Lista de Símbolos

\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
n	Número de variables de decisión.
$c \in \mathbb{R}^n$	Vector de coeficientes de la función objetivo.
$x \in \mathbb{R}^n$	Vector de variables independientes.
\mathbb{A}	Conjunto de restricciones lineales del modelo lineal.
$m = \mathbb{A} $	Número de restricciones.
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	Matriz de coeficientes de las restricciones.
$b \in \mathbb{R}^m$	Vector de términos independientes de R .
\mathcal{G}	Función no lineal potencialmente no convexa definida en \mathbb{R}^n .
$\mathbb{P} \subset \mathcal{G}$	Conjunto discreto de puntos de \mathcal{G} .
\mathbb{G}	Conjunto de restricciones lineales formadas a partir de \mathbb{P} .
$G \in \mathbb{R}^{ \mathbb{G} \times n}$	Matriz de coeficientes de las restricciones \mathbb{G} .
$k \in \mathbb{R}^{ \mathbb{G} }$	Vector de términos independientes de \mathbb{G} .
$\mathbb{P}_c \subset \mathbb{P}$	Conjunto de puntos convexos.
$\mathbb{P}_{nc} \subset \mathbb{P}$	Conjunto de puntos no convexos.
f	Faceta definida por el triangulo formado por $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}$.
\mathbb{F}_c	Conjunto de facetas convexas.
\mathbb{F}_D	Conjunto de facetas de Delaunay.
\mathbb{F}_{nc}	Conjunto de facetas no convexas.
\mathbb{F}_p	Conjunto de facetas asociadas al punto $p \in \mathbb{P}$.
\mathbb{I}_f	Conjuntos de intersecciones entre $f \in \mathbb{F}_{nc}$ y $r \in \mathbb{A}$.
$\mathbb{P}_{iz} \subset \mathbb{P}_{nc}$	Conjunto de vértices internos asociados una zona no convexa.
$\mathbb{P}_{bz} \subset \mathbb{P}_c$	Conjunto de vértices frontera asociados a una zona no convexa.
$\mathbb{P}_f \subset \mathbb{P}_{nc}$	Conjunto de puntos encontrados.
$\mathbb{P}_v \subset \mathbb{P}_{nc}$	Conjunto de puntos visitados.
$\{l_{12}, l_{23}, l_{31}\}$	Lineas formadas por los vértices de una faceta en \mathbb{R}^3 .
\mathbb{H}_f	Hiperplano formado a partir de una faceta f .
L	Linea recta formada por la intersección de dos planos $\mathbb{H}_f \cap r, r \in \mathbb{A}$.
$\{I_1, I_2, I_3\}$	Puntos de intersección entre dos lineas $L \cap l_{ij}$
\mathcal{P}	Problema de programación lineal.
\mathcal{P}'	Problema de programación lineal aumentado.
x^*	Punto de solución optimo para un problema de PL.
y^*	Punto de solución alternativo al obtenido con PL.

Lista de Acrónimos

NL	No lineal
NC	No convexa
NLNC	No lineal no convexa
PL	Programación Lineal

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis se propone una metodología para la integración de restricciones no lineales no convexas (NLNC) en problemas de programación lineal (PL). Esto debido a que existen problemas que por su misma naturaleza requieren de la incorporación de este tipo de restricciones para su correcto modelado.

Partiendo de un conjunto de puntos discretos \mathbb{P} obtenidos a partir de una función \mathcal{G} que modela un sistema no lineal y no convexo, se obtendrá una linealización de su envolvente convexa \mathbb{P}_c . Lo anterior, dará como resultado un conjunto de restricciones lineales \mathbb{G} que pueden ser introducidas en el problema a ser resuelto con PL.

Como producto de la convexificación se habrá introducido inevitablemente al problema original un conjunto de restricciones o facetas no factibles. Por lo cual será importante identificar si existen restricciones lineales propias del problema que se intersecten con alguna de las facetas no factibles, ya que en caso afirmativo existe el riesgo de caer en puntos de solución no factibles.

Con la finalidad de evitar el problema descrito, se propone un algoritmo mediante el cual se identifica a las regiones no convexas junto con los vértices convexos que las delimitan. Posteriormente se propone un algoritmo que permite identificar las posibles intersecciones entre las facetas no factibles y las restricciones propias del problema.

Con lo anterior es posible proporcionar un punto de solución alternativo al obtenido con PL, garantizando que el vértice propuesto es una solución factible.

1.1. Antecedentes

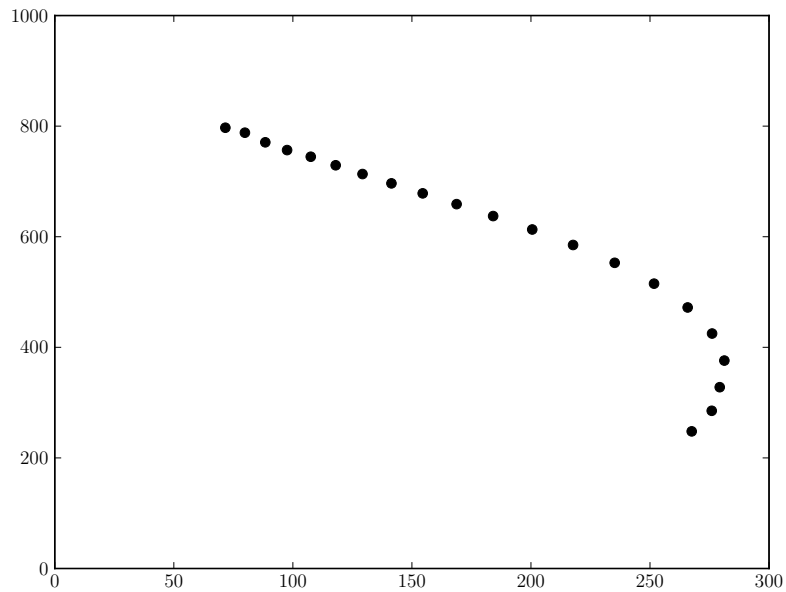
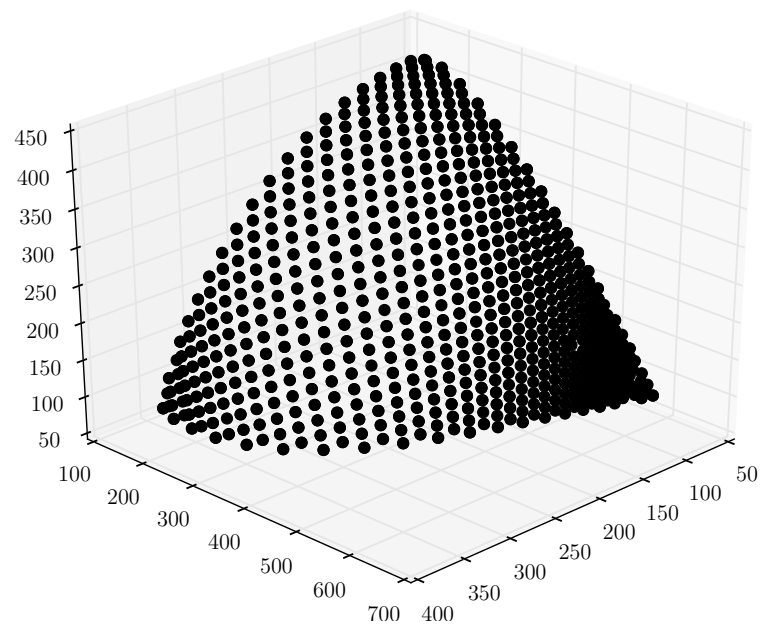
Durante la revisión del estado del arte para la elaboración de esta tesis, no han sido encontrados trabajos similares, en donde se este incorporando restricciones NLNC en modelos de PL.

La Programación Lineal surge durante la segunda guerra mundial como una herramienta para la solución de problemas de asignación de recursos. El termino programación hace referencia a la terminología militar, donde al entrenamiento, abastecimiento y los planes de despliegue se les conocía como programas y cada programa era un problema de asignación de recursos [Haeussler02].

En [Chávez16] son tratados algunos problemas donde se tiene una restricción que está definida por un conjunto de vértices discretos, mismos que representan una región de estabilidad y que son obtenidos partiendo de un fenómeno al que llamaremos \mathcal{G} , que obedece a un comportamiento no lineal y que es no convexo. A partir de este conjunto discreto se obtiene una triangulación entre vértices vecinos que dan lugar a un conjunto de facetas. De este modo pueden ser incorporadas en un problema de programación lineal como un conjunto de restricciones lineales.

Sin embargo, en el trabajo descrito en [Chávez16] se asume convexidad para los conjuntos de puntos empleados, que si bien, a simple vista parecieran convexos, en realidad no lo son. Esta situación en algunos casos podría ocasionar que se obtengan soluciones no factibles, por lo que se podría ver comprometida la estabilidad del sistema en cuestión. Los datos utilizados para uno de los casos de estudio empleados en la tesis [Chávez15] son obtenidos a partir del sistema de potencia de 9 buses y 3 generadores del IEEE, del cual, toda su información puede ser encontrada en [Sauer98]. Como producto de este sistema se obtienen en esta tesis [Chávez15] algunos conjuntos de puntos discretos en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , de los cuales en el presente trabajo se han retomado dos de ellos; en el primero, se trata de un conjunto de 21 puntos en \mathbb{R}^2 , mientras que en el segundo, se tienen una colección de 631 puntos en \mathbb{R}^3 . Estos conjuntos de puntos se observan en las Figuras 1.1 y 1.2.

Las coordenadas para los vértices que corresponden a las Figuras 1.1 y 1.2 pueden ser encontrados en las Tablas A.1 y A.2 del Apéndice A respectivamente.

Figura 1.1: Vértices correspondientes a una función en \mathbb{R}^2 .Figura 1.2: Vértices correspondientes a una función en \mathbb{R}^3 .

Cuando se asume convexidad en una restricción \mathcal{G} para su integración en un modelo de PL, se corre el riesgo de obtener soluciones no óptimas o no factibles. Es por eso que en este trabajo de tesis se han retomado los casos de estudio antes mencionados, obtenidos de la tesis [Chávez15]. Estos se obtienen como un conjunto de puntos discretos a los que llamaremos \mathbb{P} , y que si bien $\mathbb{P} \subset \mathcal{G}$, para la realización de este trabajo de tesis, únicamente se ha tenido acceso a los puntos \mathbb{P} y no al sistema original modelado por \mathcal{G} . Se analizan entonces en capítulos posteriores los casos que se pueden presentar si se asume convexidad en una restricción introducida a un modelo de PL, cuando en realidad esta no es convexa.

1.2. Planteamiento del Problema

Este trabajo nace de la necesidad de integrar restricciones no convexas en modelos de programación lineal, particularmente en el problema de integrar la zona de estabilidad en la solución de flujos óptimos de potencia. En dicha área, en [Gutierrez-Martinez11], se obtuvo una función no convexa definida por una red neuronal cuya configuración fue parte de ese trabajo. De esta red neuronal se obtuvo un conjunto discreto de puntos de la función los cuales fueron utilizados en [Chávez15] para generar restricciones cuya intersección representaban una aproximación a la región factible definida por la función representada por la red neuronal. En este trabajo la función representada por la red neuronal la hemos llamado \mathcal{G} . Esta restricción es en realidad una función no convexa en \mathbb{R}^n , misma que puede ser linealizada para su integración en un modelo lineal. Aproximando \mathcal{G} a través de un conjunto de puntos discretos $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^n$, podemos formar un conjunto de restricciones lineales \mathbb{G} . Cabe mencionar que para este trabajo de tesis se parte del conjunto de puntos discretos \mathbb{P} , sin haber tenido acceso al modelo original \mathcal{G} , es decir, hemos formado a \mathbb{P} con los puntos definidos en [Chávez15].

En (1.1) se observa la forma de un problema de maximización de PL, donde al multiplicar el vector de coeficientes \mathbf{c} por el vector de variables independientes \mathbf{x} se busca obtener el punto de solución óptimo que satisfaga además a todas las restricciones propias de este problema. Estas restricciones se encuentran definidas como $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz de coeficientes correspondientes a las ecuaciones de las restricciones, mientras que $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ representa al vector de términos independientes de las mismas. A este modelo le llamaremos \mathcal{P} .

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{x}}{\text{máx}} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 & \text{Sujeto a :} && \\
 & && \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si en (1.1) se considera además al conjunto de restricciones lineales \mathbb{G} obtenidas a partir de los vértices discretos \mathbb{P} se tendrá entonces el problema que se observa en (1.2), donde $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{|\mathbb{G}| \times n}$ es la matriz de coeficientes asociados a las restricciones contenidas en

\mathbb{G} , mientras que $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{|\mathbb{G}|}$ es el vector que representa a los términos independientes de \mathbb{G} . Denominaremos a este problema aumentado de \mathcal{P} como \mathcal{P}' .

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{máx}} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{Sujeto a :} && \\ & && \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & && \mathbf{G}\mathbf{x} \leq \mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Cabe mencionar que el conjunto de restricciones lineales \mathbb{G} obtenidas a partir de $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^n$ estarán formadas entre cada n vértices vecinos y tendrán la forma de una línea recta en \mathbb{R}^2 , de un plano en \mathbb{R}^3 o de un hiperplano en \mathbb{R}^n . Es decir que cada una de las restricciones lineales pertenecientes a \mathbb{G} será formada por una faceta f , esta a su vez se encuentra definida por un conjunto de n vértices vecinos en \mathbb{R}^n .

De este modo, cada una de las aproximaciones lineales obtenidas será integrada a \mathcal{P} como una restricción lineal representada por una desigualdad. Entonces el problema \mathcal{P} se convierte en \mathcal{P}' , mismo que quedaría como en (1.3).

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{máx}} && c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & \text{Sujeto a :} && \\ & && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & && a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & && a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ & && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots \\ & && a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} & && g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n}x_n \leq k_1 \\ & && g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + \dots + g_{2n}x_n \leq k_2 \\ & && g_{31}x_1 + g_{32}x_2 + \dots + g_{3n}x_n \leq k_3 \\ & && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots \\ & && g_{m1}x_1 + g_{m2}x_2 + \dots + g_{mn}x_n \leq k_m \end{aligned}$$

1.3. Justificación

En esta sección se habla sobre los problemas que se pueden presentar al introducir en un modelo de PL, una linealización de los vértices discretos \mathbb{P} obtenidos de una función no lineal \mathcal{G} , y se destaca la importancia de poder realizar este proceso adecuadamente.

El método simplex es una de las principales herramientas para resolver modelos de programación lineal. Aunque la complejidad del mismo, en el peor de los casos, puede llegar a ser exponencial [Klee72, Paparrizos09], en promedio, tiene una complejidad polinomial. Por lo anterior, la integración de restricciones no convexas en este tipo de modelos es atractiva ya que si la región factible existe, entonces siempre regresa la solución óptima x^* .

En un modelo de PL, el conjunto de restricciones a que se encuentra sujeto, acotan el espacio de soluciones factibles, formando un poliedro convexo. Al tratarse de un espacio factible convexo, se tiene la certeza de que un máximo local será también un máximo global. Así como un mínimo local será siempre un mínimo global. Por lo anterior, si existe un punto óptimo que satisfaga todas las restricciones del problema, este puede sin duda ser encontrado utilizando PL.

Este tipo de problemas con una restricción \mathcal{G} que es NLNC pueden ser resueltos por medio de técnicas de optimización global, sin embargo, este tipo de métodos suelen tener una mayor complejidad computacional.

A continuación se describen brevemente los problemas que pueden ser ocasionados por la integración de una restricción NLNC en un problema de PL.

La linealización de \mathbb{P} no supone un mayor problema cuando esta es convexa, ya que las restricciones obtenidas a partir de ella no alteran el espacio factible del problema más allá de la distorsión introducida como producto de la misma discretización.

En la Figura 1.3 se presenta una función $f(x)$, la cual es convexa. Esto puede ser comprobado al trazar una línea recta entre cualesquiera dos puntos en $f(x)$, como es el caso de p_0 y p_1 . Si para cualquier línea recta trazada entre dos puntos en $f(x)$ se cumple (1.4), entonces f es una función convexa.

$$l(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [x_0, \dots, x_1] \quad (1.4)$$

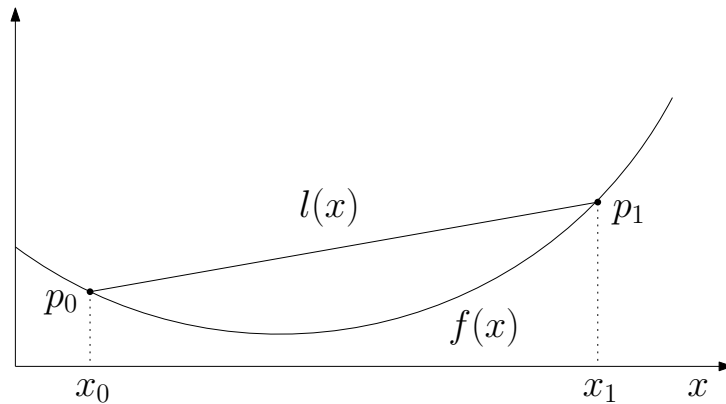


Figura 1.3: Ejemplo de función convexa.

Si \mathbb{P} es un conjunto no convexo, su linealización inevitablemente reducirá el espacio factible del problema original y por lo tanto, la solución que se obtenga, podría no ser un punto de solución óptimo. Por lo anterior, a partir de \mathbb{P} debe ser obtenido el conjunto convexo $\mathbb{P}_c \subset \mathbb{P}$ y linealizar \mathbb{P}_c antes de que el problema de PL pueda ser resuelto. La linealización de \mathbb{P}_c introduce inevitablemente una serie de facetas que no son factibles por encontrarse sobre una superficie no convexa de \mathbb{P} . Esto supone un problema adicional, debido a que se corre el riesgo de que la solución obtenida no sea factible. Este caso podría convertirse en un problema grave si no es tomado en consideración.

Se debe considerar entonces que cuando \mathbb{P} es un conjunto no convexo, si se linealizan sus vértices convexos $\mathbb{P}_c \subset \mathbb{P}$ se pueden presentar los tres casos siguientes, mismos que son analizados con más detalle en el Capítulo 2.

- Ninguna de las restricciones lineales propias de \mathcal{P}' se intersecta con ninguna de las facetas no factibles. Este caso es el menos relevante, debido a que la introducción de facetas no factibles no ha generado ningún vértice adicional a los que ya existían en \mathbb{P} . Por lo tanto, al resolver \mathcal{P}' con PL x^* será sin duda la solución óptima.
- El segundo caso que se puede presentar es cuando alguna de las restricciones propias del problema si tiene alguna intersección con las facetas no factibles, por lo tanto, la linealización de \mathbb{P}_c ha ocasionado la creación de nuevos vértices, lo que podría ocasionar que se obtenga una solución no factible. Sin embargo, la dirección en que se

mueve la función objetivo evita que lo anterior ocurra, debido a que x^* fue encontrado sobre un vértice $p \in \mathbb{P}_c$.

- El tercer y mas relevante de los casos es cuando además de que la linealización de \mathbb{P}_c ha ocasionado la creación de nuevos vértices que no son factibles, la dirección que tiene la función objetivo, ocasiona que al resolver con PL x^* sea uno de los vértices no factibles.

La complejidad que se tiene al resolver este tipo de problemas que involucran alguna restricción NLNC con herramientas de optimización no lineal, es la principal motivación para el desarrollo de este trabajo de tesis. En esta tesis se busca evitar también el problema descrito en el tercer caso, en el que se viola la factibilidad del problema. Para lograrlo, en el Capítulo 3 se propone un algoritmo que se encarga de identificar las diferentes regiones no convexas de \mathbb{P} , así como los vértices convexos pertenecientes a \mathbb{P}_c que envuelven a cada una de estas zonas. Posteriormente en el Capítulo 4 se propone otro algoritmo mediante el cual se pueden identificar las intersecciones entre las facetas no factibles y las restricciones propias del problema. Con lo anterior es posible ofrecer una solución alternativa (a la que llamaremos y^*) a x^* al resolver \mathcal{P}' con PL. Además se puede garantizar que y^* es factible al ser evaluada contra las restricciones propias de \mathcal{P}' .

1.4. Metodología

Este trabajo de tesis ha sido enfocado en la integración de restricciones NLNC en PL, para lograrlo, se han empleado algoritmos existentes para la obtención de la envoltura convexa [BARBER96], así como para obtener una triangulación [Delaunay34] a partir de \mathbb{P} . Por otro lado, han sido empleados también los algoritmos propuestos en los Capítulos 3 y 4. Con esto ha sido posible identificar si al resolver un problema con PL, se obtiene una solución no factible debido a la integración de restricciones NLNC. Lo anterior, ha permitido proponer un punto de solución factible y cercano al óptimo y^* alternativo al punto x^* encontrado con PL. Con respecto y^* se puede asegurar que se trata de un punto factible, por lo que se trata de una mejor solución que x^* .

Es importante recordar que cuando \mathbb{P} es un conjunto convexo, este no representa mayor problema al momento de optimizar con PL. Basta con obtener el conjunto de restricciones lineales \mathbb{G} con sus respectivas ecuaciones a partir de \mathbb{P} e introducir \mathbb{G} en el problema original.

Si el conjunto \mathbb{P} fue obtenido a partir de una función no convexa, la linealización entre sus vértices, dará como resultado la pérdida de una región que era factible en el problema original. Una alternativa es la de omitir las restricciones que realizan cortes en la región factible, sin embargo, al realizarlo se corre el riesgo de caer en soluciones no factibles. Los problemas ocasionados por este comportamiento se analizan con mayor detalle en el capítulo 2

Para la realización de este trabajo se ha empleado un conjunto de vértices discretos \mathbb{P} los cuales se obtienen de la tesis [Chávez15]. Estos puntos corresponden a un sistema de comportamiento no lineal y no convexo. A partir de \mathbb{P} son obtenidos un conjunto de puntos convexos $\mathbb{P}_c \subset \mathbb{P}$, así como un conjunto de facetas que se conectan entre los vértices \mathbb{P}_c , formando así una superficie convexa.

Una vez identificado el conjunto \mathbb{P}_c puede ser encontrado también el conjunto de vértices $\mathbb{P}_{nc} \subset \mathbb{P}$ utilizando (1.5).

$$\mathbb{P}_{nc} \leftarrow \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_c \quad (1.5)$$

Posteriormente, se obtiene una triangulación \mathbb{F}_D a partir de \mathbb{P} , esto da como resultado un conjunto de facetas, de entre las que son elegidas únicamente aquellas que se encuentran asociadas a vértices no convexos \mathbb{F}_{nc} . Con lo anterior se han identificado las facetas que corresponden a regiones no convexas, sin embargo, se desconoce a que zona pertenece cada faceta o sus vértices asociados. En el Capítulo 3 se propone un algoritmo mediante el cual se identifican las zonas no convexas existentes dentro de la restricción NLNC, esto permite que más adelante puedan ser ofrecidas algunas alternativas de solución. Posteriormente en el Capítulo 4 se propone un método de validación que busca identificar posibles problemas causados por una región no convexa utilizando las regiones previamente identificadas. Con base en la información obtenida por los algoritmos implementados, se propone una solución alternativa y^x , de la cual se verifica que cumple con las restricciones

propias del problema, además de que al tratarse de un vértice convexo, se puede garantizar que se trata de una solución factible, por lo tanto es una mejor solución que el punto x^* obtenido con PL.

1.5. Objetivos de la Tesis

1.5.1. Objetivo general

Proponer una metodología para la integración de restricciones NLNC en problemas de PL, la cual permita identificar si existe algún riesgo de que el vértice de solución x^* obtenido al resolver el modelo de PL, sea en realidad un punto no factible. En caso de que lo anterior ocurra, proponer un punto solución y^* alternativo y cercano al óptimo, garantizando que se trata de un vértice factible, es decir, que se cumple para todas las restricciones propias del modelo.

1.5.2. Objetivos particulares

- Proponer un algoritmo que sea capaz de identificar las regiones no convexas de una restricción, es decir, que devuelva un conjunto de zonas donde cada una de ellas contenga, en primer lugar, el conjunto de vértices no convexas pertenecientes a una región no convexa y en segundo lugar, el conjunto de vértices convexas que delimitan la frontera de la misma región no convexa.
- Proponer un algoritmo que permita determinar si una faceta no factible se intersecta con alguna restricción lineal propia del problema. Lo anterior debido a que en esta situación se corre el riesgo de obtener soluciones no factibles al resolver con PL.
- Proponer un vértice de solución alternativo y^* , que sea factible y cercano al óptimo, en los casos en que sea detectado que el punto de solución x^* obtenido con PL, es en realidad un vértice no factible.

1.6. Descripción de Capítulos

El Capítulo 2 analiza las situaciones que se pueden presentar al resolver un problema de PL, en el cual, por su propia naturaleza, sea necesario integrar un conjunto de restricciones \mathbb{G} que derivan de un conjunto de puntos \mathbb{P} , de el cual se sabe que es no lineal discretizado y no convexo. En este capítulo se destaca la importancia de este trabajo de tesis, ya que a partir de las situaciones aquí descritas, se puede comprender la importancia de los algoritmos propuestos en capítulos posteriores. El Capítulo 3 propone un algoritmo para la identificación de las regiones no convexas de una restricción NLNC, para lo cual este algoritmo recibe un conjunto de vértices \mathbb{P} y regresa un conjunto de zonas, donde para cada una de ellas se encuentran contenidos dos conjuntos; el primero de ellos es un conjunto de vértices no convexos asociados a una región no convexa, mientras que el segundo es el conjunto de puntos convexos que delimitan a esta región no convexa. Posteriormente, el Capítulo 4 propone un algoritmo para la detección de intersecciones entre una faceta no factible y alguna restricción lineal propia del problema. Basado en los algoritmos propuestos en capítulos anteriores, el Capítulo 5 habla sobre los resultados obtenidos mediante la implementación propuesta y cuando es detectado que la solución x^* obtenida con PL es no factible, se propone una solución y^* alternativa garantizando su factibilidad. El Capítulo 6 trata sobre las conclusiones referentes a este trabajo de tesis, así como también sobre los trabajos futuros.

1.7. Comentarios finales

En este Capítulo se ha presentado una introducción al problema a ser tratado en esta tesis, el cual consiste en la integración de restricciones no convexas en modelos de programación lineal. Con este fin se ha hablado acerca de los problemas que pueden ocurrir y que deben ser considerados al momento de integrar este tipo de restricciones en PL. En general la solución de problemas de optimización por medio de PL resulta ser eficiente en términos de costo computacional, por lo que la integración de este tipo de restricciones puede ser una alternativa al uso de técnicas de optimización global. Lo anterior motiva a la realización del presente trabajo de tesis.

Capítulo 2

Problemas originados por las restricciones NLNC en programación lineal

En este capítulo se presenta una breve introducción a la programación lineal, seguida se analizan las diferentes situaciones que pueden ocurrir en un problema de PL cuando a este se le integra un conjunto de restricciones lineales como producto de la linealización de \mathbb{P} .

2.1. Programación Lineal

Una de las técnicas más eficientes para la optimización de recursos es la programación lineal, que está compuesta por una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones lineales. La programación lineal busca el valor óptimo para la función objetivo del problema a solucionar, lo anterior respetando las limitantes impuestas por el conjunto de restricciones lineales que representan a los recursos disponibles. A continuación, en (2.1) se muestra un ejemplo de maximización de un programa lineal.

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{máx}} \quad & 10x_1 + 13x_2 \\ \text{Sujeto a :} \quad & \\ & 0.44x_1 + x_2 \leq 3.5 \\ & 2.29x_1 + x_2 \leq 8.0 \\ & 1.0x_1 + x_2 \leq 4.0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

En la Figura 2.1 se ilustra el poliedro, (también llamado politope) formado a partir del problema descrito en (2.1). Considerando adicionalmente las restricciones de positividad $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, queda delimitado el espacio de soluciones factibles que está representado por el área sombreada. Al maximizar o minimizar el problema, la función objetivo (En color rojo) podrá tomar distintos valores al ser evaluada en los diferentes vértices del politope, por lo que el punto de solución óptimo será el vértice que le proporcione la mayor ganancia.

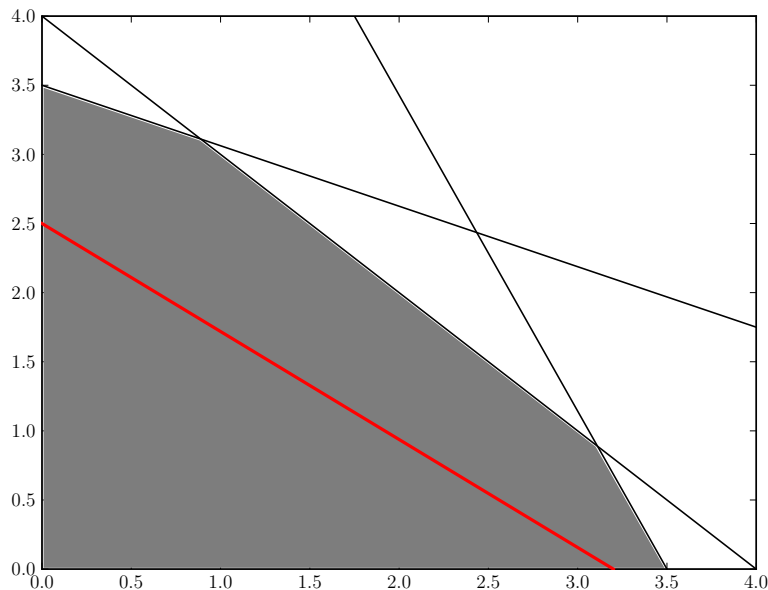


Figura 2.1: Ejemplo de un programa lineal en \mathbb{R}^2

2.2. Programación Lineal con una restricción no lineal

Existe en muchos casos la necesidad de introducir una función no lineal en modelos de PL, esto podría representarse como (2.2) donde el programa lineal se encuentra sujeto a dos restricciones, $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ que hace referencia a las restricciones propias del problema, mientras que $\mathbf{Gx} \leq \mathbf{k}$ representa a las restricciones lineales obtenidas como producto de la linealización de \mathbb{P} .

$$\begin{array}{ll}
 \underset{\mathbf{x}}{\text{máx}} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{Sujeto a :} & \\
 & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\
 & \mathbf{Gx} \leq \mathbf{k}
 \end{array} \tag{2.2}$$

2.2.1. Restricciones convexas y no convexas

Es importante recordar que una restricción no lineal puede ser convexa o no convexa, sin embargo, cuando la restricción es convexa no existe peligro alguno de caer en soluciones no óptimas o no factibles. Basta con obtener la linealización del conjunto de puntos discretos para que este pueda ser resuelto con PL. Si la restricción no lineal es también no convexa, al integrar su conjunto de aproximaciones lineales al problema de PL pueden ocurrir una serie de situaciones que son analizadas más adelante en este mismo capítulo.

Un polígono es llamado convexo si todo segmento de línea que conecta dos puntos en el interior del mismo cae enteramente dentro del polígono. Todo polígono que no cumple con esta regla es llamado no convexo [Rosen12].

Considerando esta definición de convexidad, si se observa ahora el polígono de color gris en la Figura 2.2, al tratar de conectar dos puntos en su interior, la línea que los conecta no siempre permanece dentro del polígono. En este caso, la línea de color negro se encuentra completamente dentro del mismo. Por otro lado, la línea identificada en color rojo no cumple con la regla mencionada y sale de la superficie que lo delimita, por lo tanto, el polígono que aquí se representa es no convexo.

Al observar nuevamente la Figura 2.1 se puede ver de acuerdo con la definición de

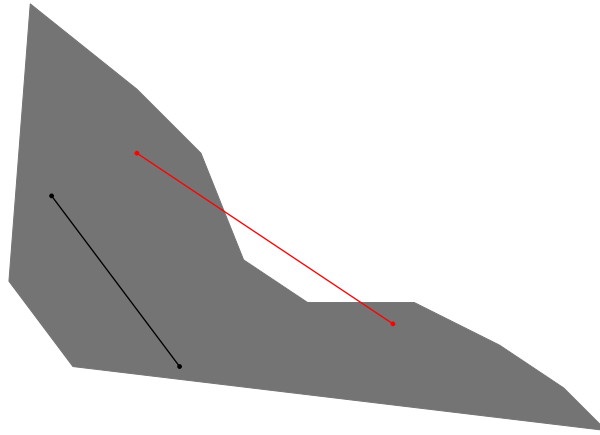
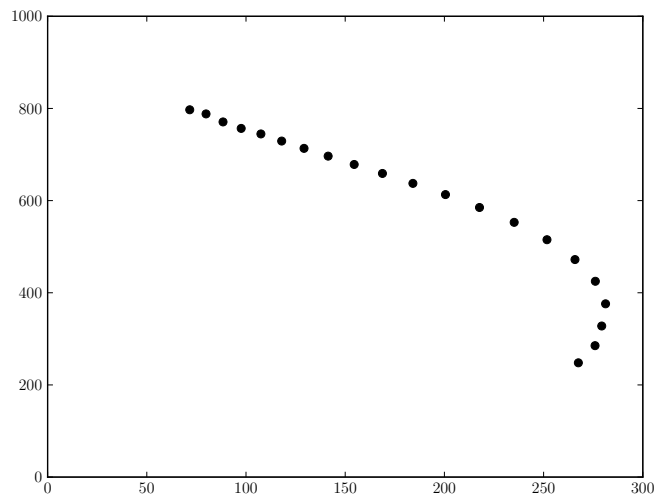


Figura 2.2: Polígono no convexo

convexidad, que el politopo representado en color gris es un polígono convexo. Esta misma definición puede ser aplicada al espacio factible delimitado por una restricción no lineal junto con sus restricciones de positividad.

Figura 2.3: Vértices discretizados de una función en \mathbb{R}^2 .

Es importante recordar que una restricción no lineal dentro de un PL puede estar acompañada de más restricciones lineales, además de una función objetivo, y dependiendo de estas, una región no convexa podría afectar de manera diferente la solución del problema.

Por lo anterior, a continuación (Figuras 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7) se ilustran situaciones que podrían ocurrir si se resuelve con PL un politopo formado por la restricción NLNC discretizada de la Figura 2.3 que consta de un conjunto de 21 puntos $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^2$. El problema de PL queda entonces como en (2.3). Tanto la función objetivo (en color azul) como una restricción lineal (de color rojo) arbitrarias, son introducidas para ejemplificar los diferentes casos que se pueden presentar, por lo que son definidas posteriormente para cada ejemplo.

$$\begin{aligned}
 & \underset{x}{\text{máx}} && c_1x_1 & + & c_2x_2 \\
 & \text{Sujeto a :} && & & \\
 & && -4.43x_1 & + & x_2 & \leq & -935.96 \\
 & && -12.69x_1 & + & x_2 & \leq & -3217.28 \\
 & && -24.82x_1 & + & x_2 & \leq & -6605.43 \\
 & && 9.5x_1 & + & x_2 & \leq & 3046.35 \\
 & && 4.59x_1 & + & x_2 & \leq & 1693.12 \\
 & && 3.05x_1 & + & x_2 & \leq & 1282.89 \\
 & && 2.28x_1 & + & x_2 & \leq & 1089.03 \\
 & && 1.84x_1 & + & x_2 & \leq & 986.57 \\
 & && 1.63x_1 & + & x_2 & \leq & 940.73 \\
 & && 1.48x_1 & + & x_2 & \leq & 909.74 \\
 & && 1.4x_1 & + & x_2 & \leq & 895.98 \\
 & && 1.37x_1 & + & x_2 & \leq & 890.04 \\
 & && 1.38x_1 & + & x_2 & \leq & 891.1 \\
 & && 1.39x_1 & + & x_2 & \leq & 892.71 \\
 & && 1.41x_1 & + & x_2 & \leq & 895.25 \\
 & && 1.48x_1 & + & x_2 & \leq & 903.32 \\
 & && 1.21x_1 & + & x_2 & \leq & 874.6 \\
 & && 1.54x_1 & + & x_2 & \leq & 906.56 \\
 & && 2.03x_1 & + & x_2 & \leq & 950.34 \\
 & && 1.09x_1 & + & x_2 & \leq & 875.46
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

En la Figura 2.4 se ilustra el resultado obtenido al resolver (2.3), en el que para este ejemplo se ha definido una función objetivo (con coeficientes $\mathbf{c} = [30, 50]$), así como una restricción adicional ($-1.9x_1 + x_2 \leq 50.0$). El punto de solución óptimo obtenido ($x^* = [229.02, 485.13]$) se encuentra en la intersección de las líneas roja, azul y gris. Es claro que este punto representa una solución factible, que sin embargo, no es el óptimo. Este problema es causado debido a que con la linealización de la restricción NLNC se ha disminuido la región factible original.

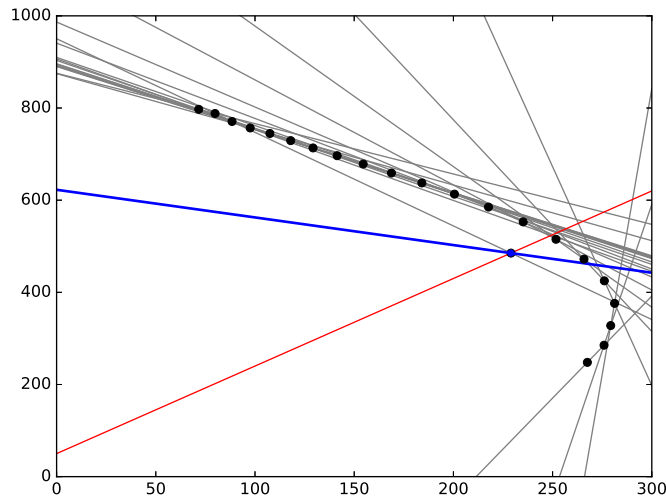


Figura 2.4: Restricción NC con solución factible no óptima.

Del caso anterior se entiende la importancia de incluir únicamente los vértices convexos \mathbb{P}_c en la linealización y así evitar la pérdida de región factible. Por lo tanto, los siguientes ejemplos describen las situaciones que pueden ocurrir al introducir al problema únicamente las restricciones lineales obtenidas a partir de los vértices convexos \mathbb{P}_c .

A continuación se ilustran tres casos importantes, producto de la linealización de los vértices convexos \mathbb{P}_c (de color negro), mientras que los vértices no convexos \mathbb{P}_{nc} (en color rojo) se muestran con fines representativos sin que haya sido obtenida ninguna restricción a partir de ellos. El programa lineal utilizado en los siguientes ejemplos se encuentra definido en (2.4).

$$\begin{aligned}
 & \underset{x}{\text{máx}} && c_1x_1 & + & c_2x_2 \\
 & \text{Sujeto a :} && & & \\
 & && -4.43x_1 & + & x_2 & \leq & -935.96 \\
 & && -12.69x_1 & + & x_2 & \leq & -3217.28 \\
 & && -24.82x_1 & + & x_2 & \leq & -6605.43 \\
 & && 9.5x_1 & + & x_2 & \leq & 3046.35 \\
 & && 4.59x_1 & + & x_2 & \leq & 1693.12 \\
 & && 3.05x_1 & + & x_2 & \leq & 1282.89 \\
 & && 2.28x_1 & + & x_2 & \leq & 1089.03 \\
 & && 1.84x_1 & + & x_2 & \leq & 986.57 \\
 & && 1.63x_1 & + & x_2 & \leq & 940.73 \\
 & && 1.48x_1 & + & x_2 & \leq & 909.74 \\
 & && 1.45x_1 & + & x_2 & \leq & 903.61 \\
 & && 1.09x_1 & + & x_2 & \leq & 875.46
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

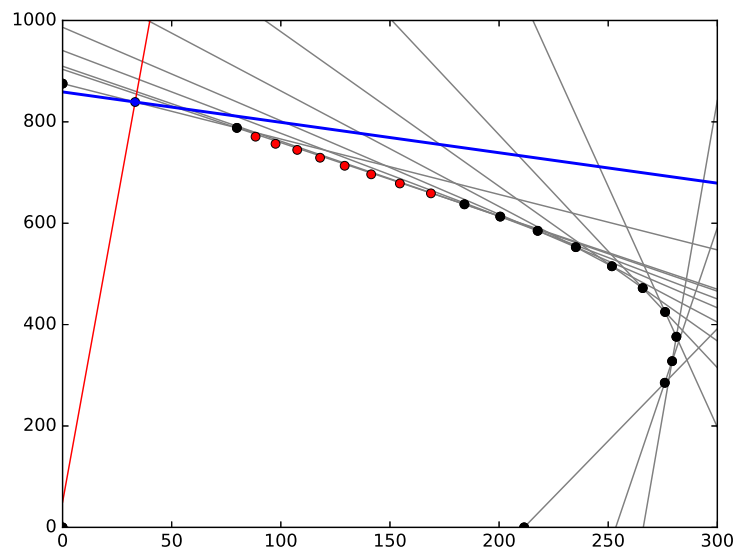


Figura 2.5: Restricción NC donde no se afecta la solución óptima.

Región no convexa que no afecta la solución óptima

En este caso la restricción lineal adicional ($-23.75x_1 + x_2 \leq 50.0$) no se intersecta dentro de la región no convexa que fue omitida por recortar espacio factible, se han empleado para la función objetivo los coeficientes $\mathbf{c} = [30.0, 50.0]$, sin embargo, debido a que no existe intersección entre una restricción adicional y una región no convexa, independientemente de la función objetivo, la solución obtenida ($x^* = [33.22, 839.12]$) con PL será el punto de solución óptimo, esto se observa en la Figura 2.5.

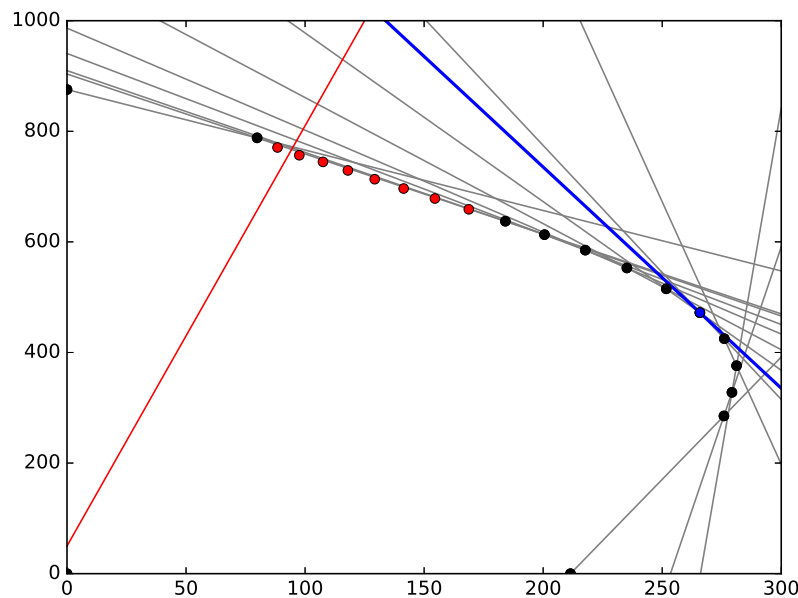


Figura 2.6: Intersección entre una faceta no factible y una región NC que no afecta la solución.

Intersección entre una restricción lineal y una región NLNC que no afecta la solución óptima

La restricción ($-7.6x_1 + x_2 \leq 50.0$) que ha sido introducida para este caso se intersecta dentro de la región originalmente no convexa (entre los vértices de color rojo), es decir, que su intersección dará origen a un vértice no factible, sin embargo, debido a la dirección en que se mueve la función objetivo (con coeficientes $\mathbf{c} = [200.0, 50.0]$), el punto

óptimo de solución ($x^* = [265.82, 472.05]$) no se verá afectado. Este comportamiento se muestra en la Figura 2.6.

Solución no factible

En este otro caso se ha empleado la misma restricción del ejemplo anterior ($-7.6x_1 + x_2 \leq 50.0$), sin embargo, se han cambiado los coeficientes de la función objetivo ($c = [30.0, 50.0]$). Al resolver con PL se obtiene una solución no factible, esto ocurre por que la linealización de \mathbb{P}_c ha dado como resultado una faceta que en realidad no es factible, debido a que se encuentran por encima de los puntos rojos omitidos por ser no convexos. Al omitir a los vértices no convexos, se introdujo entonces un espacio adicional que no es factible. Por lo tanto, el vértice generado entre la faceta no factible y la restricción adicional tampoco es factible. Esto se muestra en la Figura 2.7, donde el punto de solución ($x^* = [94.36, 767.15]$) que se identifica en color azul se encuentra por encima de los puntos de color rojo.

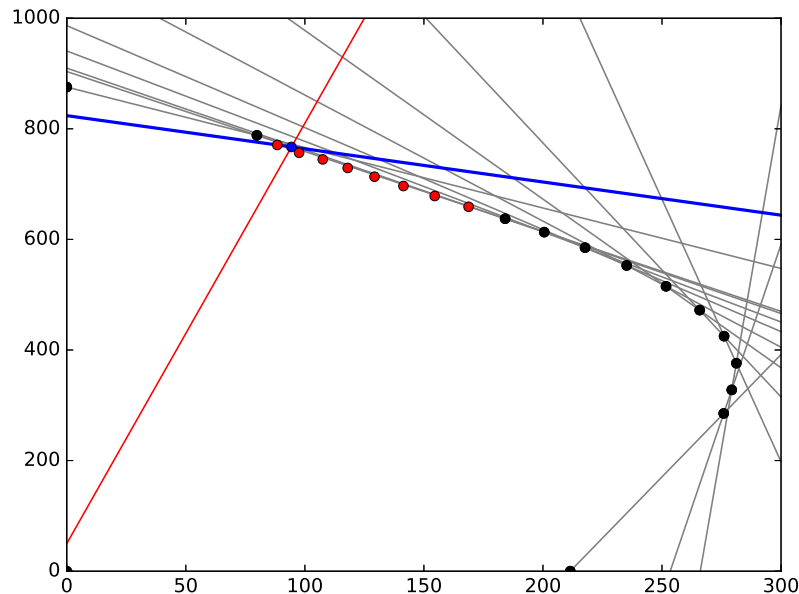


Figura 2.7: Solución no factible.

2.3. Comentarios finales

En los ejemplos mostrados en esta sección se observa que tanto la linealización de toda la superficie de una función NLNC, como si se linealiza solamente su parte convexa, se pueden presentar una serie de problemas que deben ser considerados al momento de dar solución a un modelo de PL. De lo anterior surge la necesidad de identificar las regiones no convexas de las restricciones y así poder determinar posibles afectaciones en la solución al resolver con PL. En caso de ser necesario se pueden proporcionar entonces soluciones alternativas que garanticen la factibilidad del problema en cuestión.

Capítulo 3

Identificación de la frontera que envuelve a zonas no convexas

En este Capítulo se propone una metodología para la identificación de las regiones no convexas pertenecientes a alguna restricción NLNC discretizada por un conjunto de puntos \mathbb{P} . Esta metodología se apoya en dos algoritmos existentes [BARBER96, Delaunay34], el primero permiten determinar la envoltura convexa de un conjunto de vértices \mathbb{P} , dando como resultado el conjunto de vértices convexas \mathbb{P}_c y las conexiones entre sus facetas convexas \mathbb{F}_c , mientras que el segundo obtiene una triangulación \mathbb{F}_D asociada a un conjunto de vértices \mathbb{P} .

Se propone entonces un algoritmo con el que se identifican a cada una de las regiones no convexas, las cuales se conforman por un conjunto de vértices no convexas \mathbb{P}_{iz} y el conjunto de puntos convexas que delimitan la frontera \mathbb{P}_{bz} que los rodea. El reconocimiento de estas zonas permitirá que en capítulos posteriores pueda ser propuesta alguna solución alternativa a la que se obtenga con PL.

3.1. Determinación de las no convexidades

Debido al interés que se tiene en conocer a las zonas no convexas para evitar situaciones que puedan derivar en soluciones no óptimas o no factibles, se ha optado por el

uso de un algoritmo para la obtención de la envoltura convexa. A partir de lo que pueden deducirse también a los vértices no convexos \mathbb{P}_{nc} .

3.1.1. Envoltura convexa

Utilizando un algoritmo de envoltura convexa es posible determinar para un conjunto de puntos, cuales de ellos pertenecen a una región convexa y cuales no. Dado un conjunto de n puntos en un plano, los algoritmos de envoltura convexa forman el límite convexo utilizando el subconjunto de puntos que encierra a todos los demás. Existen diferentes algoritmos para encontrar la envoltura convexa, uno de ellos es Quick Hull, el cual sigue un enfoque de dividir y vencer y su complejidad es $O(n \log n)$ o en el peor de los casos $O(n^2)$ [Renold17]. En este trabajo se ha utilizado el algoritmo QuickHull para determinar los puntos que forman una superficie convexa.

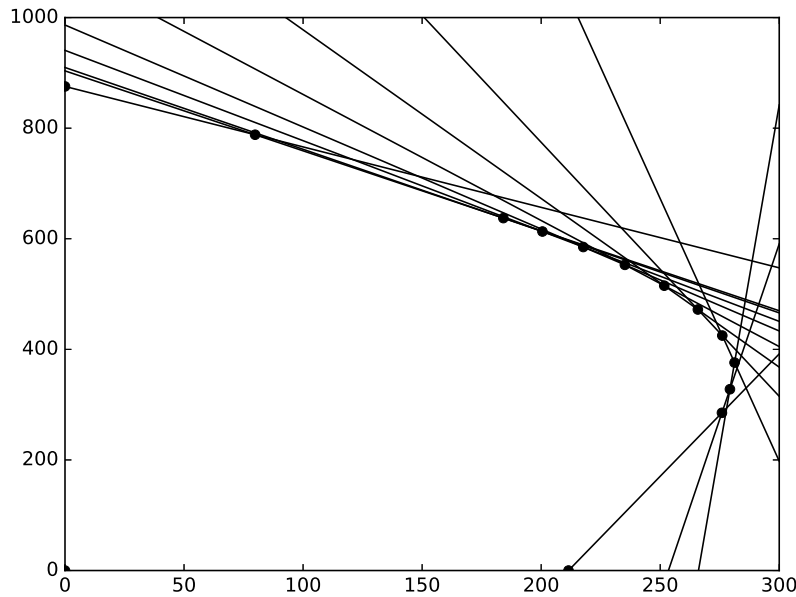


Figura 3.1: Linealización entre los vértices de la envoltura convexa.

Si se construyen únicamente las restricciones lineales que dan lugar a la envoltura convexa(3.1), al ignorar aquellas restricciones que se generaban entre puntos no convexos,

se introduce ahora una región adicional que en realidad no es factible. Por lo tanto, el punto de solución x^* que se obtenga al resolver con PL podría no ser factible esto debido a que la linealización de \mathbb{P}_c produjo facetas no factibles sobre las regiones no convexas. Si alguna de las facetas no factibles intersecta con una restricción lineal propia del modelo, dicha intersección dará lugar a un vértice no factible en el problema original, que sin embargo es totalmente válido para una herramienta de PL.

Los problemas analizados para \mathbb{R}^2 son también aplicables a \mathbb{R}^3 , donde en lugar de líneas, tanto las restricciones lineales como la función objetivo tendrán la forma de un plano. Este otro caso es analizado a continuación.

Así como para el caso en dos dimensiones, cada una de las restricciones lineales correspondía a una línea recta conectando dos vértices vecinos entre si, para el caso en \mathbb{R}^3 cada una de las facetas tendrá la forma de un triángulo construido entre tres vértices vecinos, mismos que darán lugar a una restricción con la forma de una plano. Es entonces fundamental determinar cuales son las conexiones apropiadas entre los vértices, que permitirán conformar cada una de las restricciones.

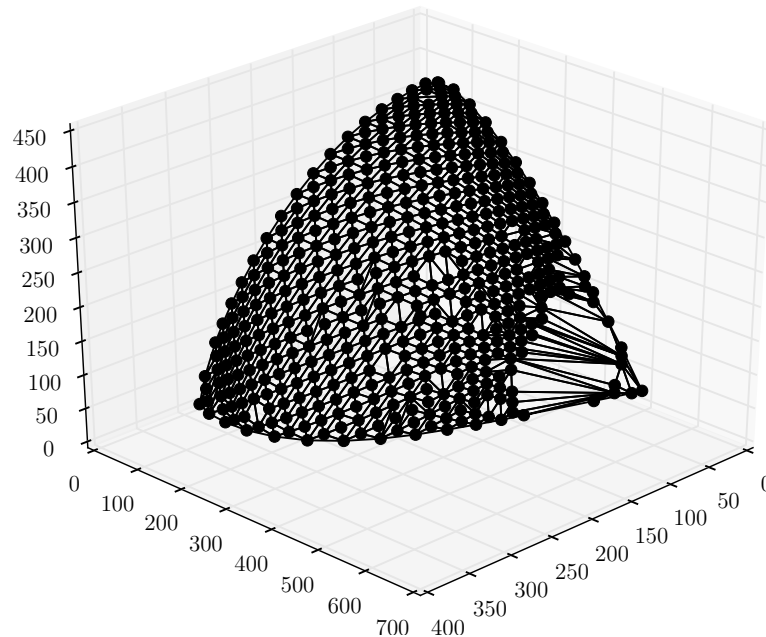


Figura 3.2: Conjunto de facetas que forman la envoltura convexa.

Una de las ventajas de la utilización del algoritmo Quick Hull, es que no solamente identifica los vértices convexos, sino que devuelve también una lista de las conexiones entre las facetas que garantizan la convexidad.

Utilizando nuevamente este algoritmo se identifican los puntos que forman la envoltura convexa \mathbb{P}_c , así como el conjunto de facetas que garantizan su convexidad \mathbb{F}_c para el conjunto de vértices en \mathbb{R}^3 de la Figura 1.2, el resultado se observa en la Figura 3.2, donde se muestra la triangulación entre las facetas convexas.

3.2. Identificación de las regiones no convexas

En esta sección se aborda el tema de la creación de las facetas, las cuales estarán formadas entre cada conjunto de n puntos vecinos si.

3.2.1. Construcción de las facetas no convexas

Conforme aumenta la dimensionalidad de un problema se vuelve más complicado determinar cuáles son aquellos puntos más cercanos entre sí, con los que se ha de construir una faceta, y es por este motivo que en [Chávez16] se propone un algoritmo en el cual se realiza una comparación de la distancia euclidiana por fuerza bruta, sin embargo, esto resulta costoso debido a que su complejidad computacional es $O(n^2)$.

Triangulación de Delaunay

Sea $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}, p_i \in \mathbb{R}^2$ un conjunto de puntos en el plano. Una triangulación $D(\mathbb{P})$ es llamada triangulación de Delaunay [Delaunay34] si y solo si, cada circunferencia circunscrita de cada triángulo no contiene vértices de la triangulación en su interior. Esta definición original para \mathbb{R}^2 puede ser llevada hacia \mathbb{R}^n , usando la esfera circunscrita en vez de la circunferencia. En otras palabras, la triangulación de Delaunay es construida de un conjunto de círculos circunscritos, elegidos de modo que haya al menos tres de los puntos en el conjunto de triangulación sobre la circunferencia circunscrita [Kallis17].

La triangulación de Delaunay recibe un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n y devuelve una triangulación entre $n + 1$ vértices, es decir, que para un conjunto de puntos $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^2$ se

obtienen un conjunto de triángulos formados entre 3 vértices vecinos, mientras que para un conjunto $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^3$ se obtendrán un conjunto de facetas formadas entre 4 vértices vecinos. Debido a esto, para la identificación de los vértices que dan origen a la triangulación de \mathbb{P} en \mathbb{R}^3 , se ha considerado un conjunto $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^2$. Asumiendo, que el conjunto \mathbb{P} fue obtenido a partir de una función no lineal \mathcal{G} donde para $\mathcal{G}(x_1, x_2)$ corresponde un único valor en x_3 , se utiliza Delaunay para obtener la triangulación en \mathbb{R}^2 . Con lo anterior se obtienen un conjunto de facetas entre cada 3 vértices, tal como ha sido realizado en [Kallis17].

Hasta este momento se tienen plenamente identificados los puntos convexos. Sin embargo, para poder proponer posteriormente alguna solución factible alternativa al resolver el problema con PL, es necesario conocer a los punto no convexas \mathbb{P}_{nc} y clasificarlos de acuerdo a la zona no convexa a que pertenecen, así como también identificar a los vértices convexos \mathbb{P}_c que delimitan la frontera de cada una de estas zonas. Para la solución de este problema, se ha implementado el algoritmo 1 que se explica más adelante.

Partiendo de la premisa de que son ya conocidos los vértices convexos \mathbb{P}_c , los vértices no convexas \mathbb{P}_{nc} serán la diferencia del conjunto total, menos el conjunto de vértices convexos, tal como en (3.1).

$$\mathbb{P}_{nc} \leftarrow \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_c \quad (3.1)$$

Una vez identificados \mathbb{P}_{nc} habrá que encontrar aquellos que pertenecen a una misma vecindad, así como también deberán ser identificados los puntos convexos \mathbb{P}_c que delimitan la frontera cada una de estas vecindades no convexas.

Con el propósito de identificar las regiones no convexas junto con la frontera que las delimita se ha empleado en este trabajo la triangulación de Delaunay, y a partir de esta, con el Algoritmo 1 se obtienen cada una de estas zonas.

3.3. Identificación de las fronteras y zonas no convexas

Para la identificación de las regiones no convexas, así como la frontera que las delimita, se requiere identificar en primer lugar las facetas formadas entre vértices no convexas \mathbb{F}_{nc} . Para esto se ha utilizado el Algoritmo 3 que se encarga de descartar de entre \mathbb{F}_D aque-

llas facetas que no incluyan a ningún vértice del conjunto no convexo \mathbb{P}_{nc} . Posteriormente se han utilizado las conexiones entre las facetas de \mathbb{F}_{nc} , así como los puntos convexos \mathbb{P}_c y los puntos no convexas \mathbb{P}_{nc} . Estos tres conjuntos alimentan al Algoritmo 4, el cual se encarga de visitar a todos los vértices \mathbb{P}_{nc} utilizando las conexiones proporcionadas en \mathbb{F}_{nc} a la vez que los puntos encontrados en las facetas de \mathbb{F}_{nc} son clasificados según corresponda. Los vértices \mathbb{P}_{nc} encontrados en \mathbb{F}_{nc} son anexados a un conjunto \mathbb{P}_f para ser visitados en otra iteración, a la vez que son agregados a la zona no convexa actual, mientras que los puntos \mathbb{P}_c encontrados, son clasificados en la frontera de la misma región no convexa. Lo anterior se realiza mientras haya vértices no convexas \mathbb{P}_f por visitar. Estos a su vez son removidos del conjunto una vez que han sido visitados. Al finalizar, este algoritmo devuelve un conjunto de zonas, donde a su vez cada zona esta compuesta dos elementos. El primero consta de un conjunto de vértices frontera \mathbb{P}_{bz} , mientras que el segundo es un conjunto de puntos no convexas \mathbb{P}_{iz} .

3.3.1. Algoritmos para la identificación de la frontera de las zonas no convexas

En esta sección se describen los algoritmos propuestos en este capítulo para la identificación de las regiones no convexas y sus fronteras que las delimitan.

El Algoritmo 1 es el principal, este recibe un conjunto de puntos \mathbb{P} y devuelve un conjunto de vértices frontera \mathbb{P}_{bz} y un conjunto de puntos no convexas \mathbb{P}_{iz} . Este algoritmo, en la línea 2, se apoya a su vez en el Algoritmo 2, del cual obtiene a los conjuntos de puntos convexos \mathbb{P}_c , puntos no convexas \mathbb{P}_{nc} , facetas convexas \mathbb{F}_c , facetas no convexas \mathbb{F}_{nc} , así como facetas asociadas a un punto no convexo \mathbb{F}_p . Posteriormente, en la línea 3, se llama al Algoritmo 4, con lo que se obtiene a las zonas no convexas comprendidas por el conjunto de vértices frontera \mathbb{P}_{bz} asociados a cada zona y al conjunto de puntos no convexas \mathbb{P}_{iz} que se encuentran al interior de cada zona no convexa.

Los Algoritmos 2 y 4 ya mencionados, se apoyan a su vez en otros algoritmos auxiliares, los cuales se explican mas a detalle a continuación.

En el Algoritmo 2, en el cual en la línea 1 se define una función que recibe un conjunto de puntos $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^n$, la línea 2 inicializa como un conjunto vacío a \mathbb{P}_{nc} , mismo que

Algoritmo 1 Algoritmo principal para la identificación de regiones no convexas

Input: \mathbb{P} ▷ Conjunto de vértices
Output: \mathbb{P}_{bz} ▷ Conjuntos de vértices frontera por zona no convexa. **Output:** \mathbb{P}_{iz}
▷ Conjuntos de vértices no convexas por zona.

- 1: **function** ZONESIDENTIFICATION(\mathbb{P})
- 2: $\mathbb{P}_c, \mathbb{P}_{nc}, \mathbb{F}_c, \mathbb{F}_{nc}, \mathbb{F}_p \leftarrow \text{GETPOINTSANDFACETS}(\mathbb{P})$
- 3: $\mathbb{P}_{bz}, \mathbb{P}_{iz} \leftarrow \text{GETNONCONVEXZONES}(\mathbb{P}_c, \mathbb{P}_{nc}, \mathbb{F}_{nc})$
- 4: **return** $\mathbb{P}_{bz}, \mathbb{P}_{iz}$
- 5: **end function**

al final contendrá un conjunto de puntos no convexas. Posteriormente, en las línea 4 se obtienen los conjuntos de vértices y facetas convexas \mathbb{P}_c y \mathbb{F}_c respectivamente. Enseguida, entre las líneas 4 a la 8 se verifica para cada punto $p \in \mathbb{P}$, si este forma parte del conjunto convexo \mathbb{P}_c y en caso contrario el vértice p se une al conjunto de vértices no convexas \mathbb{P}_{nc} , en la línea 9 se llama al Algoritmo 3 para obtener un conjunto de facetas no convexas y una lista de facetas no convexas asociadas a cada punto \mathbb{F}_p . Por ultimo, en la línea 10 se devuelven los conjuntos de puntos convexas \mathbb{P}_c , puntos no convexas \mathbb{P}_{nc} , facetas convexas \mathbb{F}_c , el conjunto de facetas no convexas \mathbb{F}_{nc} y las facetas no convexas asociadas a cada punto \mathbb{F}_p .

Para obtener las facetas no convexas asociadas a cada uno de los puntos no convexas \mathbb{P}_{nc} , el Algoritmo 3 recibe al conjunto de vértices \mathbb{P} así como al conjunto de puntos no convexas \mathbb{P}_{nc} obtenidos en el Algoritmo 2. En la línea 2 se define como una lista de conjuntos vacíos a $\mathbb{F}_p \forall p \in \mathbb{P}_{nc}$ que contendrá un conjunto de facetas para cada punto no convexo, mientras que en la línea 3 se obtiene el conjunto de facetas de Delaunay \mathbb{F}_D . Posteriormente, de las líneas 4 a la 10, se verifica para cada faceta $p \in f \in \mathbb{F}_D$ si se trata de un punto no convexo \mathbb{P}_{nc} y en caso afirmativo se añade la faceta f al conjunto de facetas asociadas al punto p , así como al conjunto de facetas no convexas \mathbb{F}_{nc} . Después de agregar la faceta actual a los conjuntos correspondientes, la línea 9 rompe la iteración actual para

Algoritmo 2 Obtención de puntos y facetas, convexos y no convexas.

Input: \mathbb{P} ▷ Conjunto de puntos en \mathbb{R}^n .
Output: \mathbb{P}_c ▷ Conjunto de puntos convexos en \mathbb{R}^n .
Output: \mathbb{P}_{nc} ▷ Conjunto de puntos no convexas en \mathbb{R}^n .
Output: \mathbb{F}_c ▷ Conjuntos de facetas convexas.

```

1: function GETPOINTSANDFACETS( $\mathbb{P}$ )
2:    $\mathbb{P}_{nc} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $\mathbb{P}_c, \mathbb{F}_c \leftarrow \text{CONVEXHULL}(\mathbb{P})$ 
4:   for  $p \in \mathbb{P}$  do
5:     if  $p \notin \mathbb{P}_c$  then
6:        $\mathbb{P}_{nc} \leftarrow \mathbb{P}_{nc} \cup p$ 
7:     end if
8:   end for
9:    $\mathbb{F}_{nc}, \mathbb{F}_p \leftarrow \text{GETNONCONVEXPOINTSANDFACETS}(\mathbb{P}, \mathbb{P}_{nc})$ 
10:  return  $\mathbb{P}_c, \mathbb{P}_{nc}, \mathbb{F}_c, \mathbb{F}_{nc}, \mathbb{F}_p$ 
11: end function

```

evitar realizar más procesos de los necesarios. Al final de la iteración, en la línea 13, se devuelve la el conjunto de facetas no convexas y la lista que contiene a los conjuntos de facetas asociadas a cada vértice.

Algoritmo 3 Obtención de facetas no convexas asociadas a un punto.

Input: \mathbb{P}_{nc} ▷ Conjunto de puntos no convexas en \mathbb{R}^n .

Input: \mathbb{P} ▷ Conjuntos de vértices.

Output: \mathbb{F}_p ▷ Lista de conjuntos con facetas asociadas a un punto p .

```

1: function GETNONCONVEXPOINTSFACTETS( $\mathbb{P}, \mathbb{P}_{nc}$ )
2:    $\mathbb{F}_p \leftarrow \emptyset$  ▷  $\forall p \in \mathbb{P}_{nc}$ 
3:    $\mathbb{F}_D \leftarrow \text{DELAUNAY}(\mathbb{P})$ 
4:   for  $f \in \mathbb{F}_D$  do
5:     for  $p \in f$  do
6:       if  $p \in \mathbb{P}_{nc}$  then
7:          $\mathbb{F}_{nc} \leftarrow \mathbb{F}_{nc} \cup f$ 
8:          $\mathbb{F}_p \leftarrow \mathbb{F}_p \cup f$ 
9:         break
10:      end if
11:    end for
12:  end for
13:  return  $\mathbb{F}_{nc}, \mathbb{F}_p$ 
14: end function

```

Con respecto a la identificación de la regiones no convexas de la restricción NLNC, se utilizan los Algoritmos 4 y 5. En este caso, se verifican para cada punto no convexo las conexiones que tiene con otros vértices, considerando para tal propósito, las facetas no convexas, y de este modo son visitados todos los puntos \mathbb{P}_{nc} conectados entre si por las facetas \mathbb{F}_{nc} . Con lo anterior se delimitan cada una de las zonas no convexas junto con sus vértices que conforman la frontera. En la línea 1 del Algoritmo 4 se define la función principal, la

cual recibe a los conjuntos de puntos convexos y no convexos, así como facetas no convexas ($\mathbb{P}_c, \mathbb{P}_{nc}, \mathbb{F}_{nc}$). En la línea 2 se inicializa un contador z que funcionará como iterador para las listas de zonas no convexas y sus respectivas fronteras ($\mathbb{P}_{iz}, \mathbb{P}_{bz}$), mientras que en la línea 3 se asigna a p el primer punto contenido en el conjunto de vértices no convexos \mathbb{P}_{nc} . Posteriormente, en las líneas 4 y 5, se inicializan como vacíos los conjuntos de vértices visitados y encontrados respectivamente, en las líneas 6 y 7 se inicializan también como conjuntos vacíos los elementos de las listas para zonas no convexas y sus vértices frontera. Estas listas son inicializadas con respecto al iterador z previamente definido. Enseguida, entre las líneas 8 a la 20 se estará iterando el ciclo principal de este algoritmo, dentro del cual, en las líneas 9 y 10 es llamado el Algoritmo 5 con el cual será verificado cada uno de los vértices no convexos. Entre las líneas 11 y 13 se asigna a p un nuevo punto a verificar en la siguiente iteración, mismo que es eliminado del conjunto de puntos no convexos para evitar repetirlo. Por otro lado, cuando todos los vértices de una zona no convexa han sido visitados, se ejecutan las instrucciones de la línea 14 a la 19, donde además de asignarse un nuevo punto a p , se incrementa el iterador z y se inicializan los nuevos elementos de las listas con respecto a z . Por último, se devuelven las listas de las frontera y zonas encontradas $\mathbb{P}_{bz}, \mathbb{P}_{iz}$.

El Algoritmo 5 recibe a un punto p , así como a los conjuntos $\mathbb{P}_v, \mathbb{P}_f, \mathbb{P}_{bz}, \mathbb{P}_{iz}, \mathbb{F}_{nc}, \mathbb{P}_c$. En la línea 2 verifica para el vértice recibido p si ya había sido visitado y en caso contrario lo visita en la línea 3 y continua con la ejecución. Entre las líneas de la 4 a la 13 se verifica para cada faceta $f \in \mathbb{F}$ y para cada punto $pf \in f$, si pf pertenece al conjunto de vértices convexos \mathbb{P}_c . En caso afirmativo, en la línea 7 el vértice pf se agrega al conjunto de la frontera \mathbb{P}_{bz} y en caso contrario se añade a la zona no convexa \mathbb{P}_{iz} (línea 9), además, en la línea 10 se agrega también al conjunto de puntos encontrados \mathbb{P}_f , de modo que pueda ser visitado en otra iteración. Más adelante, en la línea 14, el punto p se remueve del conjunto \mathbb{P}_f para evitar que sea visitado nuevamente. Para finalizar se devuelven los conjuntos $\mathbb{P}_f, \mathbb{P}_v, \mathbb{P}_{iz}, \mathbb{P}_{bz}$ para que estos sean reescritos por el Algoritmo 4 y pueda comenzar una nueva iteración.

Algoritmo 4 Identificación de zonas no convexas

Input: \mathbb{P}_c ▷ Conjunto de puntos convexos.
Input: \mathbb{P}_{nc} ▷ Conjunto de vértices no convexas.
Input: \mathbb{F}_{nc} ▷ Conjunto de facetas no convexas
Output: \mathbb{P}_{bz} ▷ Conjuntos de vértices frontera por zona no convexa.
Output: \mathbb{P}_{iz} ▷ Conjuntos de vértices no convexas por zona.

```

1: function GETNONCONVEXZONES( $\mathbb{P}_c, \mathbb{P}_{nc}, \mathbb{F}_{nc}$ )
2:    $z \leftarrow 0$ 
3:    $p \leftarrow \mathbb{P}_{nc0}$ 
4:    $\mathbb{P}_v \leftarrow \emptyset$ 
5:    $\mathbb{P}_f \leftarrow \emptyset$ 
6:    $\mathbb{P}_{bz} \leftarrow \emptyset$ 
7:    $\mathbb{P}_{iz} \leftarrow \emptyset$ 
8:   while  $|\mathbb{P}_{nc}| > 0$  do
9:      $\mathbb{P}_f, \mathbb{P}_v, \mathbb{P}_{bz}, \mathbb{P}_{iz} \leftarrow \text{CHECKVERTICES}(p, \mathbb{P}_v, \mathbb{P}_f, \mathbb{P}_{bz}, \mathbb{P}_{iz}, \mathbb{F}_{nc}, \mathbb{P}_c)$ 
10:    if  $|\mathbb{P}_f| > 0$  then
11:       $p \leftarrow \mathbb{P}_{f0}$ 
12:       $\mathbb{P}_{nc} \leftarrow \mathbb{P}_{nc} \setminus p$ 
13:    else
14:       $p \leftarrow \mathbb{P}_{nc0}$ 
15:       $z \leftarrow z + 1$ 
16:       $\mathbb{P}_{iz} \leftarrow \emptyset$ 
17:       $\mathbb{P}_{bz} \leftarrow \emptyset$ 
18:    end if
19:  end while
20:  return  $\mathbb{P}_{bz}, \mathbb{P}_{iz}$ 
21: end function

```

Algoritmo 5 Auxiliar en la identificación de zonas no convexas

Input: p ▷ Vertice.
Input: \mathbb{P}_v ▷ Conjunto de vértices visitados.
Input: \mathbb{P}_f ▷ Conjunto de vértices encontrados.
Input: \mathbb{P}_{bz} ▷ Conjunto de puntos frontera pertenecientes a una zona.
Input: \mathbb{P}_{iz} ▷ Conjunto de puntos no convexas pertenecientes a una zona.
Input: \mathbb{F}_{nc} ▷ Conjunto de facetas no convexas.
Input: \mathbb{P}_c ▷ conjunto de vértices convexas.
Output: \mathbb{P}_f ▷ Conjunto de vértices encontrados
Output: \mathbb{P}_v ▷ Conjunto de vértices visitados
Output: \mathbb{P}_{iz} ▷ Conjunto de puntos no convexas pertenecientes a una zona.
Output: \mathbb{P}_{bz} ▷ Conjunto de puntos frontera pertenecientes a una zona.

```

1: function CHECKVERTICES( $p, \mathbb{P}_v, \mathbb{P}_f, \mathbb{P}_{bz}, \mathbb{P}_{iz}, \mathbb{F}_{nc}, \mathbb{P}_c$ )
2:   if  $p \notin \mathbb{P}_v$  then
3:      $\mathbb{P}_v \leftarrow \mathbb{P}_v \cup p$ 
4:     for  $f \in \mathbb{F}_{ncp}$  do
5:       for  $p_f \in f$  do
6:         if  $p_f \in \mathbb{P}_c$  then
7:            $\mathbb{P}_{bz} \leftarrow \mathbb{P}_{bz} \cup p_f$ 
8:         else
9:            $\mathbb{P}_{iz} \leftarrow \mathbb{P}_{iz} \cup p_f$ 
10:           $\mathbb{P}_f \leftarrow \mathbb{P}_f \cup p_f$ 
11:        end if
12:      end for
13:    end for
14:     $\mathbb{P}_f \leftarrow \mathbb{P}_f \setminus p$ 
15:  end if
16:  return  $\mathbb{P}_f, \mathbb{P}_v, \mathbb{P}_{iz}, \mathbb{P}_{bz}$ 
17: end function

```

3.4. Comentarios finales

En este capítulo se han empleado algoritmos existentes en la librería Scipy haciendo uso del lenguaje de programación Python. El uso del algoritmo QuikHull ha permitido identificar a los vértices que forman la envoltura convexa, así como a las facetas que se forman entre los mismos. Por otro lado, se ha utilizado a la triangulación de Delaunay para formar un conjunto de facetas entre las que se incluyan a todos los vértices de la restricción NLNC. A partir de los puntos identificados con Quick Hull, se han identificado posteriormente a los vértices no convexos. Por ultimo, se proponen algunos algoritmos mediante los cuales se clasifican a los puntos no convexos de acuerdo con las zonas a que pertenecen, al mismo tiempo que son clasificados también de la misma forma los vértices que conforman la frontera entre cada una de estas zonas.

Capítulo 4

Metodología de validación de restricciones no lineales no convexas en problemas de programación lineal

Este capítulo proporciona los elementos mediante los cuales pueda ser linealizada una restricción NLNC. Posteriormente presenta una metodología que permite identificar intersecciones entre una faceta no factible y una restricción lineal propia de un modelo de PL. En caso de que no exista intersección alguna con las facetas no factibles, sabremos que la no convexidad de la restricción NL no afecta la solución del problema al resolverlo con PL.

4.1. Representación de una restricción no lineal como un conjunto de restricciones lineales

Para llevar a cabo la linealización a partir de un conjunto de facetas convexas, considerando el conjunto de vértices discretos \mathbb{P} , a continuación se describen algunos conceptos que son necesarios para este propósito.

4.1.1. Línea recta

Además del punto, el objeto geométrico más simple es la línea, la cual es definida completamente por dos elementos: un punto p sobre la línea y una dirección \mathbf{v} en la cual moverse partiendo de p . Geométricamente, t describe el movimiento en la dirección \mathbf{v} desde el punto p , simplemente se agregan múltiplos escalares de \mathbf{v} a p [Simon94].

La parametrización de una línea recta en \mathbb{R}^n puede entonces definirse como en (4.1).

$$p^*(t) = p + t\mathbf{v} \quad (4.1)$$

4.1.2. Plano

Tres puntos no colineales determinan un plano. Para encontrar las ecuaciones paramétricas del plano que contiene a los puntos $p, q, r \in \mathbb{R}^3$ (Figura 4.1), se puede considerar a $q - p$ y $r - p$ como vectores de desplazamiento desde el punto p que viven sobre el plano. Entonces, la parametrización del plano, dados $s, t \in \mathbb{R}$ será como en (4.2).

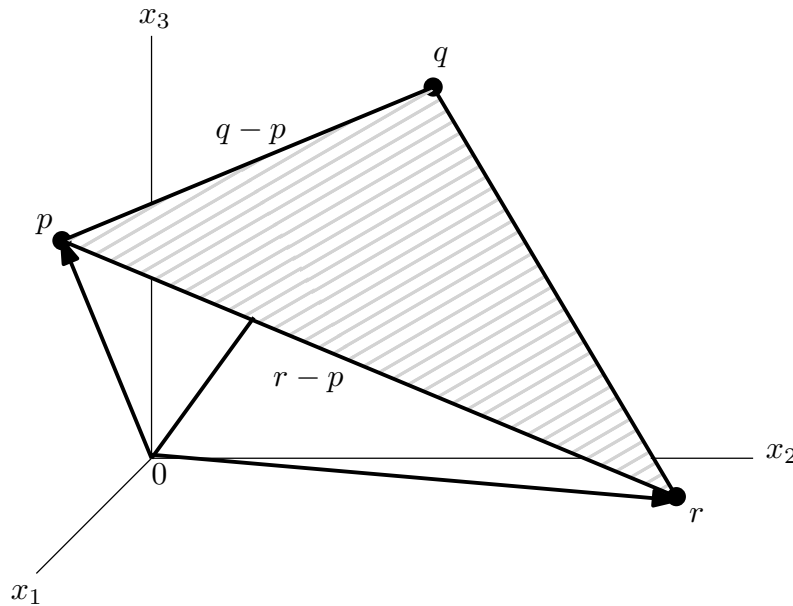


Figura 4.1: Plano con vértices p, q, r .

$$p^*(s, t) = p + s(q - p) + t(r - p) \quad (4.2)$$

Suponiendo que se desea escribir la ecuación para el plano que pasa a través del punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y teniendo un vector normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ es un punto arbitrario en el plano, entonces $x - p$ será un vector sobre el plano y consecuentemente será perpendicular a \mathbf{n} [Simon94], esto se observa en la Figura 4.2.

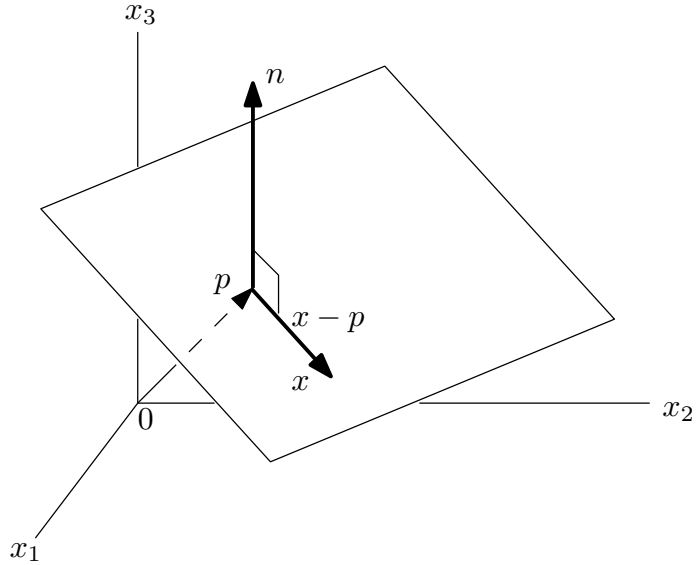


Figura 4.2: Plano que pasa a través de p con vector normal n .

Si se considera que dos vectores son perpendiculares si y solo si su producto punto es cero, entonces se cumple (4.3).

$$0 = \mathbf{n}(x - p) = (a, b, c)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \tag{4.3}$$

O en la forma de ecuación de punto normal, como en (4.4).

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{4.4}$$

Esta ultima puede ser también expresado como en (4.5).

$$ax + by + cz = d \tag{4.5}$$

En (4.5) se cumple que $d = (ax_0, by_0, cz_0)$.

Similarmente, tal como establece la teoría de espacios euclidianos se puede escribir para un hiperplano en \mathbb{R}^n la ecuación (4.6)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d \quad (4.6)$$

4.1.3. Linealización de una restricción NLNC

Dado un conjunto de puntos que forman parte de una restricción no lineal y no convexa se requiere obtener un conjunto de restricciones lineales también llamadas facetas, las cuales pueden ser construidas entre los vecinos cercanos de un punto específico. Si se tienen dos puntos en \mathbb{R}^2 , es posible dibujar una línea que cruce por ambos puntos, mientras que para \mathbb{R}^3 con tres puntos se podría construir un plano que pase por todos ellos. En ambos casos, tanto la línea como el plano formarán una nueva restricción lineal para ser integrada al problema de PL.

Para la integración de la restricción NLNC como un conjunto de restricciones lineales en un modelo de PL, se parte de que se tiene el conjunto de vértices discretos \mathbb{P} , entre los que se debe identificar aquellos que sean los más apropiados para formar las facetas, a partir de las cuales son generada las restricciones lineales \mathbb{G} , las cuales serán expresadas como un conjunto de desigualdades lineales.

La envoltura convexa para el conjunto $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^n$, proporciona como resultado el conjunto de vértices convexos \mathbb{P}_c , así como un conjunto de facetas \mathbb{F}_c que se forman entre n vértices \mathbb{P}_c vecinos entre si. Por cada facetas $f \in \mathbb{F}_c$, donde $p_1, p_2, \dots, p_n \in f$ se obtiene las ecuación del hiperplano $H_f \in \mathbb{R}^n$, la cual sera expresada como una desigualdad lineal y será integrada en el modelo de PL.

Para construir una restricción lineal a partir de una faceta en \mathbb{R}^n se requieren n puntos vecinos entre si. En \mathbb{R}^2 , utilizando (4.1) se construye una línea recta entre dos vértices vecinos. Para el caso en \mathbb{R}^3 , una faceta f estará formada por tres puntos $p_1, p_2, p_3 \in f$. Posteriormente con (4.2) se construye una restricción que tendrá la forma de un plano y que pasará a través de todos ellos.

4.2. Determinación de la intersección entre una restricción lineal y una faceta

Se requiere encontrar la intersección para alguna faceta $f \in \mathbb{F}_{nc}$ con una de las restricciones dadas en el problema original, donde para el caso en \mathbb{R}^3 , tanto la restricción como la faceta son planos en el espacio, mientras que la intersección entre ambos planos es una línea recta L .

Considerando la ecuación del plano $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$ con vector normal $\mathbf{n}_1 = [a_1, a_2, a_3]$ y la ecuación $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d$ con vector normal $\mathbf{n}_2 = [b_1, b_2, b_3]$ se calcula el producto cruz para obtener la dirección del vector \mathbf{v} que interseca ambos planos.

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \quad (4.7)$$

Posteriormente se resuelve el sistema de ecuaciones con el fin de encontrar un punto p_0 que satisface a ambos planos.

$$p_0 = \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = c \\ b_1x_1 + b_2x_2 = d \end{cases} \quad (4.8)$$

Una vez calculados p_0 y \mathbf{v} , se sustituyen en la ecuación paramétrica de la línea (4.1), y se obtienen los valores de x_1 , x_2 y x_3 para cualquier valor de t . La línea L obtenida que interseca entre la restricción r y el hiperplano H_f (formado a partir de la faceta f) se observa en color negro en la Figura 4.3. En esta misma se puede apreciar en color rojo los vértices p_f que dan origen a una faceta f (en forma de triángulo) y que habitan sobre el plano H_f , el cual se obtiene a partir de estos puntos. Se observa también que los vértices I_f (de color negro) se obtienen de la intersección entre ambos planos, sin embargo, solamente dos de ellos intersecan entre las aristas de la faceta. Son estos últimos los que indican que para el caso de este ejemplo, la restricción r interseca con el hiperplano H_f , por lo que se corre el riesgo de obtener una solución no factible al resolver el modelo de PL.

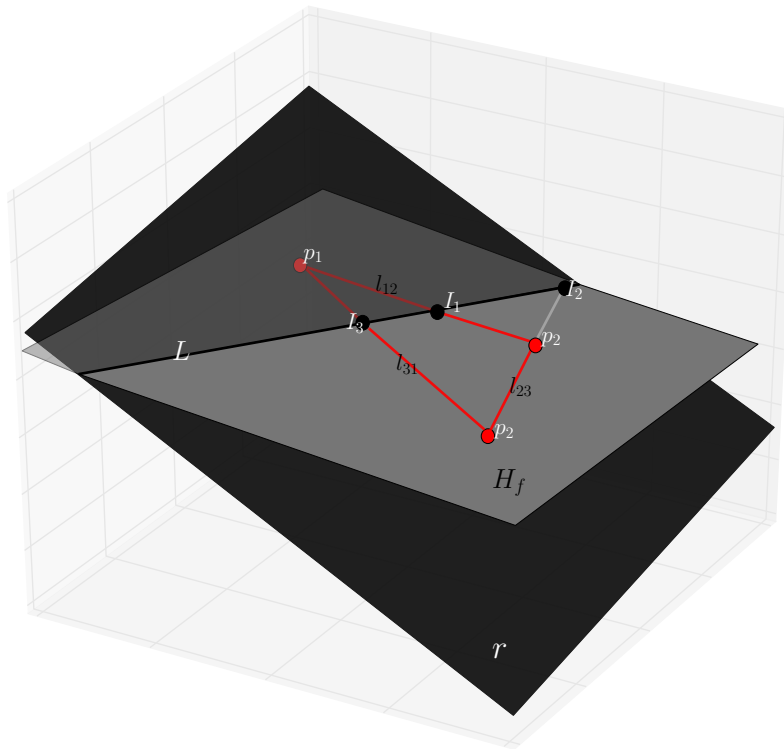


Figura 4.3: Intersección entre una faceta y una restricción.

4.3. Algoritmos para identificar intersecciones entre una faceta y una restricción lineal

Se sabe que dos líneas que no son paralelas entre si indudablemente se habrán de intersectar en algún punto en el espacio tal como se pudo apreciar en la Figura 4.3, donde las líneas formadas por dos puntos de una faceta se intersectan con L . Sin embargo, las únicas intersecciones que para este trabajo son de interés, son aquellas que ocurren dentro de los confines de la faceta. Lo anterior debido a que al tratarse de una faceta de una región no convexa, su intersección con cualquiera de las restricciones lineales adicionales a la NLNC pone en riesgo de que se obtenga una solución no factible al resolver el problema de PL.

En esta sección se propone un algoritmo donde a partir de un conjunto de facetas no convexas \mathbb{F}_{nc} , se debe determinar si intersecta con alguna restricción $r \in \mathbb{A}$ propia de el problema original.

El Algoritmo 6 recibe un conjunto de puntos no convexos, un conjunto de facetas asociadas a cada punto y un conjunto de restricciones $\mathbb{P}_{nc}, \mathbb{F}_p$ y \mathbb{A} respectivamente. Entre las líneas 2 y 4 de este algoritmo se itera para cada punto $p \in \mathbb{P}_{nc}$ desde donde se llama en la línea 3 al Algoritmo 7 que se encarga de encontrar las intersecciones entre una faceta no factible y una restricción lineal. Al final, en la línea 5 se entrega como resultado un conjunto de facetas junto con las restricciones que las intersectan \mathbb{F}_I en caso de que exista dicha intersección.

Algoritmo 6 Algoritmo principal para la detección de intersecciones entre una restricción y una faceta no factible.

Input: \mathbb{P}_{nc} ▷ Conjunto de puntos no convexos.
Input: \mathbb{F}_p ▷ Lista de conjuntos de facetas.
Input: \mathbb{R} ▷ Conjunto de restricciones.
Output: \mathbb{F}_I ▷ Conjuntos de facetas no convexas y sus intersecciones con las restricciones lineales.

```

1: function VALIDATION( $\mathbb{P}_{nc}, \mathbb{F}_p, \mathbb{R}$ )
2:   for  $p \in \mathbb{P}_{nc}$  do
3:      $\mathbb{F}_I \leftarrow$  GETINTERSECTIONS( $p, \mathbb{F}_p, \mathbb{R}$ )
4:   end for
5:   return  $\mathbb{F}_I$ 
6: end function

```

El Algoritmo 7 devuelve las intersecciones encontradas entre las restricciones lineales y las facetas no convexas de la restricción NLNC, para esto utiliza a su vez en el Algoritmo 8. El primero recibe un punto p así como un conjunto de facetas asociadas a dicho punto \mathbb{F}_p y un conjunto de restricciones lineales \mathbb{A} . En la línea 2 se inicializa como vacío el conjunto de facetas con sus intersecciones, posteriormente, se itera entre las líneas 3 y 11, para cada faceta $f \in \mathbb{F}_p$, en la línea 4 se obtiene el hiperplano H_f que corresponde a la faceta f , mientras que de las líneas 5 la 10 se itera para cada restricción $r \in \mathbb{R}$ y

posteriormente, en la línea 6 se obtiene la línea recta L que interseca entre el hiperplano H_f y la restricción r . Por ultimo, en la línea 8 se verifica con ayuda del Algoritmo 8 si la intersección se presenta dentro de los confines de la faceta f y en caso afirmativo se añade la faceta junto con la restricción al conjunto de facetas intersectadas y en la línea 12 se devuelve dicho conjunto.

Algoritmo 7 Detección de soluciones potencialmente no factibles por eliminación de punto no convexo.

Input: p ▷ Punto generador de no convexidad.
Input: \mathbb{F}_p ▷ Conjunto de facetas no convexas.
Input: \mathbb{R} ▷ Conjunto de restricciones.
Output: \mathbb{F}_I ▷ Conjunto de intersecciones entre una faceta y una restricción

```

1: function GETINTERSECTIONS( $p, \mathbb{F}_p, \mathbb{R}$ )
2:    $\mathbb{F}_I \leftarrow \emptyset$ 
3:   for  $f \in \mathbb{F}_p$  do
4:      $H_f \leftarrow$  GETHYPERPLANE( $f$ )
5:     for  $r \in \mathbb{R}$  do
6:        $L \leftarrow H_f \cap r$ 
7:       if CHECKINTERSECTION( $L, f$ ) then
8:          $\mathbb{F}_I \leftarrow \mathbb{F}_I \cup (f, r)$ 
9:       end if
10:    end for
11:  end for
12:  return  $\mathbb{F}_I$ 
13: end function
    
```

Por ultimo, el Algoritmo 8 se encarga de identificar si el punto de intersección entre la línea L y una línea lf obtenida entre dos vértices de una faceta se encuentra dentro de la misma faceta. En el caso de que se cumpla lo anterior para cualquiera de las líneas

Algoritmo 8 Detección de intersecciones entre una restricción y una faceta.

Input: L ▷ Línea de intersección entre dos planos.

Input: f ▷ Faceta no convexa.

Output: True / False ▷ Booleano verdadero o falso.

```

1: function CHECKINTERSECTION( $L, f$ )
2:    $dim \leftarrow 3$  ▷  $\mathbb{R}^3$ 
3:   for  $i \leftarrow 1$  to 3 do
4:      $j \leftarrow i + 1$ 
5:     if  $i == dim$  then
6:        $j \leftarrow 1$ 
7:     end if
8:      $l_{fij} \leftarrow \text{GETLINE}(p_{fi}, p_{fj})$ 
9:      $I_{fi} \leftarrow \text{GETINTERSECTIONPOINT}(l_{fij}, L)$ 
10:    if  $p_{fi} < p_{fj}$  then
11:       $less \leftarrow p_{fi}$ 
12:       $higher \leftarrow p_{fj}$ 
13:    else
14:       $less \leftarrow p_{fj}$ 
15:       $higher \leftarrow p_{fi}$ 
16:    end if
17:    if  $less < I_{fi} < higher$  then
18:      return True
19:    end if
20:  end for
21:  return False
22: end function

```

obtenidas de la faceta, se sabrá que se corre el riesgo de obtener soluciones no factibles al resolver el modelo de PL. Este algoritmo recibe una línea L y una faceta f . En la línea 2 se define el número de dimensiones del problema, posteriormente, de las líneas 3 a la 7, se itera con la finalidad de definir los índices para los vértices de la faceta f . En la línea 8 se obtiene la ecuación de la línea recta l_{fij} formada entre los vértices p_{fi} y p_{fj} , mientras que en la línea 9 se obtiene la intersección entre L y l_{fij} . Con lo anterior, de las líneas 10 a la 19 se determina si la intersección previamente encontrada se localiza entre los vértices p_{fi} y p_{fj} y en caso afirmativo se devuelve el booleano *True* en la línea 18. Si se ha terminado de iterar para todos los lados de la faceta y no se ha encontrado ninguna intersección en la misma, entonces, en la línea 21 se devuelve el booleano *False*.

4.4. Comentarios finales

En este capítulo se ha presentado una metodología para evaluar si la solución a un problema de PL, al cual se le han integrado restricciones lineales producto de una linealización de una restricción NLNC, podría llevar a una solución no factible, al eliminar las regiones no convexas. Para este fin, se ha propuesto la utilización del algoritmo de la envoltura convexa para determinar los puntos que causan las no convexidades. Enseguida la triangulación de Delaunay es aplicada para obtener las facetas que componen cada una de las regiones no convexas. Una vez hecho lo anterior, se procede a calificar las restricciones que delimitan la región factible en cuanto a su posible intersección con alguna de las facetas no convexas.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación de los algoritmos descritos en los capítulos previos. Posteriormente se propone una solución y^* alternativa a la obtenida con PL, cuando se sabe que el punto de solución obtenido x^* cae fuera del espacio de factibilidad del problema. Esta solución alternativa se basa en la identificación de las zonas no convexas y su frontera (Capítulo 3), así como en las intersecciones encontradas entre las restricciones propias del modelo y las facetas no factibles (Capítulo 4).

Cabe mencionar que los algoritmos propuestos han sido implementados en Python, así como también han sido utilizados los algoritmos para la obtención de la envoltura convexa y la triangulación de Delaunay contenidos en la librería Scipy. Por otro lado, se ha empleado Gurobi como herramienta para la optimización de los modelos de PL, Gurobi es utilizado también desde Python por medio de la librería Gurobipy.

5.1. Linealización de la restricción no convexa

Se ha retomado en este capítulo el caso de estudio que se observa en la Figura 5.1, el cual consta de un conjunto de 631 puntos $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^3$.

Con el fin de poder integrar a \mathbb{P} en un modelo de PL sin el riesgo de caer en soluciones sub-óptimas se ha obtenido la envoltura convexa, teniendo como resultado al conjunto de vértices convexas \mathbb{P}_c , así como la triangulación convexa para dichos vértices. El

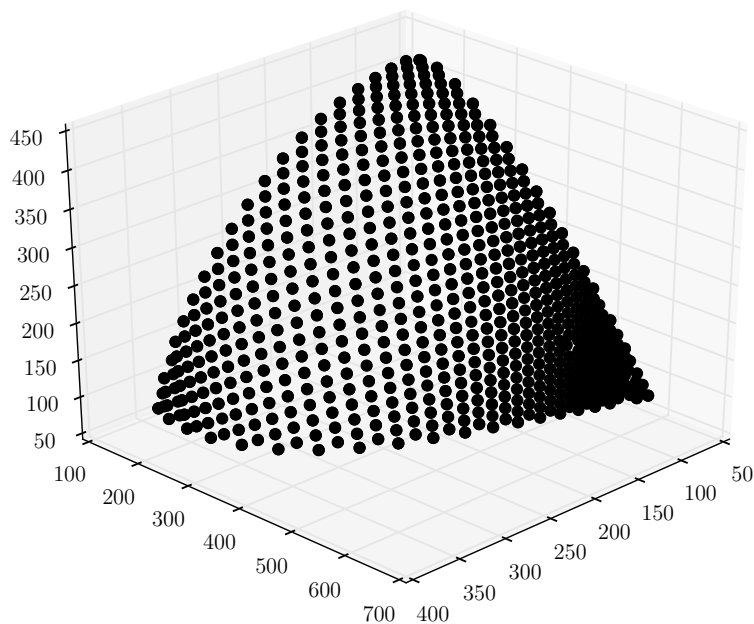


Figura 5.1: Vértices correspondientes a una función en \mathbb{R}^3 .

resultado obtenido se observa en la Figura 5.2.

La Figura 5.2 consta de 888 facetas, de las cuales, con base en el Capítulo 4 se han obtenido sus correspondientes ecuaciones lineales, mismas que pueden ser encontradas en el Apéndice B como un conjunto de desigualdades lineales. Este conjunto de desigualdades lineales representan en el modelo de PL, un conjunto de restricciones lineales que forman un poliedro convexo. De este modo podría ya ser resuelto con el modelo utilizando PL, sin embargo, al linealizar al conjunto \mathbb{P}_c se han omitido las restricciones que habrían sido creadas a partir de regiones no convexas de la restricción original. Por lo tanto, al resolver este problema de PL, se correría el riesgo de obtener soluciones no factibles. Lo anterior debido a que la eliminación de vértices no convexas, dio como resultado, la creación de facetas que no son factibles, ya que han quedado por encima de los puntos no convexas.

5.1.1. Casos de estudio

Si se introducen al modelo de PL las restricciones lineales obtenidas a partir de zonas no convexas de la función NLNC, existe un riesgo muy alto de obtener soluciones sub-óptimas. Por este motivo únicamente se muestran en esta sección, las situaciones que se

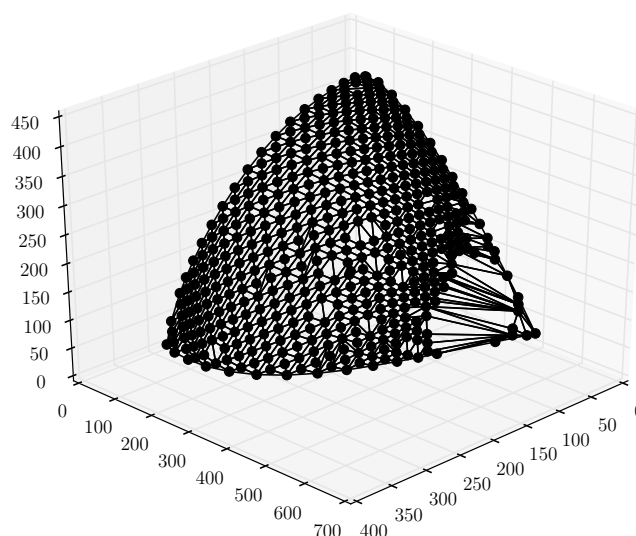


Figura 5.2: Triangulación y vértices de la envoltura convexa.

presentan al linealizar la superficie convexa. A continuación se presentan 3 casos de estudio donde se ha linealizado la superficie convexa del conjunto de vértices \mathbb{P} . Para estos casos de estudio, se han variado tanto la función objetivo como una restricción lineal introducida al modelo, y que es independiente a las que se obtuvieron como producto de la linealización de \mathbb{P} .

En primer lugar se ha obtenido la envoltura convexa de \mathbb{P} , que da como resultado un conjunto de vértices convexos \mathbb{P}_c , así como un conjunto de facetas \mathbb{F}_c formadas entre cada tres vértices vecinos que pertenecen a \mathbb{P}_c . Posteriormente por cada faceta $f \in \mathbb{F}_c$, con base en el Capítulo 4 se ha obtenido su ecuación, resultando un total de 888 restricciones lineales que pueden ser encontradas como un conjunto de desigualdades lineales en el Apéndice B. Cada desigualdad representa una restricción lineal en el modelo de PL, este problema aumentado se define en (5.1). En este modelo, $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ representa una restricción lineal adicional a las obtenidas por la linealización de \mathbb{P} , por otro lado, $\mathbf{Gx} \leq \mathbf{k}$ hace referencia al conjunto de desigualdades lineales que se localizan en el Apéndice B. Tanto los coeficientes de la función objetivo \mathbf{c} como la restricción no lineal $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ son especificadas más adelante para cada uno de los casos.

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{x}}{\text{máx}} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 & \text{Sujeto a :} && \\
 & && \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\
 & && \mathbf{Gx} \leq \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Se han obtenido para todos los casos las restricciones lineales a partir de la superficie convexa (entre los vértices de color negro). Los puntos de color rojo pertenecen al conjunto de vértices no convexos \mathbb{P}_{nc} , por lo que no se genera entre ellos restricción alguna, sin embargo, la linealización de \mathbb{P}_c ha ocasionado la generación de facetas no factibles que cubren a las regiones originalmente no convexas, por lo que pueden dar origen también a soluciones no factibles. La restricción que se ha introducido para cada uno de los siguientes casos se observa de color gris oscuro, mientras que la función objetivo se muestra en una tonalidad de gris más claro, además

Caso 1: Región no convexa que no afecta la solución óptima

Para este caso de estudio se define el modelo de PL en (5.2). La restricción lineal que ha sido utilizada no se intersecta dentro de ninguna de las regiones no convexas, por lo tanto, no ocasiona la generación de ningún vértice adicional. Esto significa que sin importar la dirección en que apunte la función objetivo, la solución obtenida al resolver con PL será siempre el punto de solución óptimo x^* , esto se observa en la Figura 5.3, donde el punto de solución obtenido con PL es un vértice formado entre una región convexa de \mathbb{P} y una restricción lineal propia del modelo, este vértice de solución se identifica en color amarillo.

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{x}}{\text{máx}} && 279x_1 + 518x_2 + 457x_3 \\
 & \text{Sujeto a :} && \\
 & && 15x_1 + 173x_2 + 320x_3 \leq 96000 \\
 & && \mathbf{Gx} \leq \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

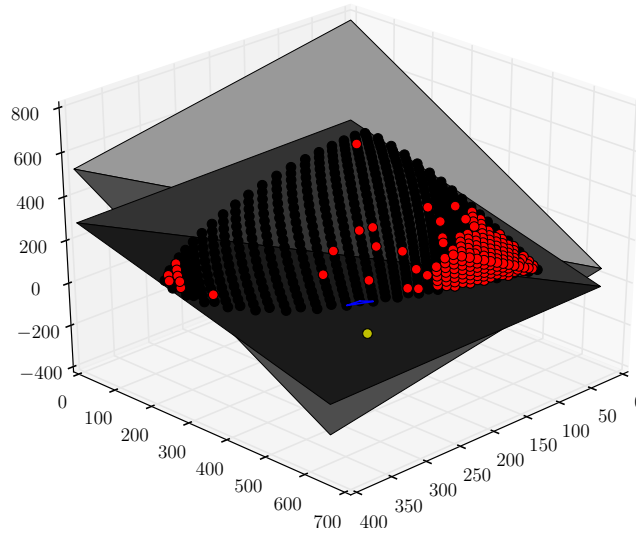


Figura 5.3: Restricción NLNC donde no se afecta la solución óptima.

Caso 2: Intersección entre una restricción lineal y una región no convexa que no afecta la solución óptima

Para este segundo caso se ha solucionado el modelo de PL que se presenta en (5.3). En este problema, la restricción adicional se intersecta dentro de una región no convexa, es decir, cruza a través de una faceta no factible que se ha generado por encima de los vértices en color rojo, sin embargo, debido a la dirección en que apunta la función objetivo, el punto de solución óptimo obtenido con PL (identificado en color amarillo) no se ve afectado. Esto se puede observar en la Figura 5.4, donde x^* pertenece al conjunto convexo \mathbb{P}_c y por lo tanto se trata de un óptimo factible.

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{x}}{\text{máx}} && 279x_1 + 518x_2 + 457x_3 \\
 & \text{Sujeto a :} && \\
 & && 15x_1 + 173x_2 + 320x_3 \leq 144000 \\
 & && \mathbf{Gx} \leq \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

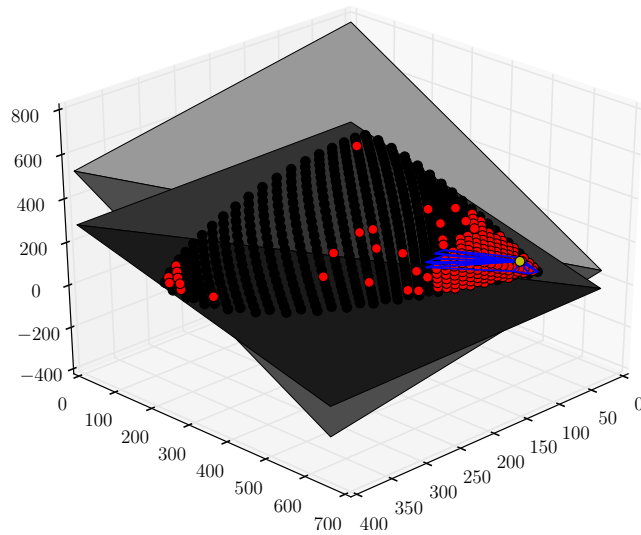


Figura 5.4: Intersección entre una restricción lineal y una zona no convexa que no afecta la solución óptima.

Caso 3: Solución no factible

Para este tercer y último caso se considera el modelo de PL descrito en (5.4), en el que se tiene una restricción (de color gris oscuro), así como una función objetivo (en gris claro), en este caso la restricción lineal cruza a través de una región no convexa. Con la linealización de \mathbb{P}_c se crearon facetas no factibles que conectan vértices convexos por encima de los puntos omitidos por ser no convexos. Si bien, al obtener la linealización de \mathbb{P}_c se evitó caer en soluciones sub-óptimas, en consecuencia dos restricciones lineales no factibles que fueron introducidas al modelo, han quedado por encima de un vértice no convexo. Debido a la dirección de maximización de la función objetivo, al resolver \mathcal{P}' con PL se ha encontrado como punto de solución x^* un vértice que originalmente no existía, sino que este se ha formado entre la intersección de las dos restricciones introducidas artificialmente, junto con una tercera restricción lineal $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ propia del modelo original. x^* se muestra como un punto de color amarillo en la Figura 5.5.

$$\begin{aligned}
 & \max_x && 80x_1 + 307x_2 + 503x_3 \\
 & \text{Sujeto a :} && \\
 & && 15x_1 + 173x_2 + 320x_3 \leq 144000 \\
 & && Gx \leq k
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

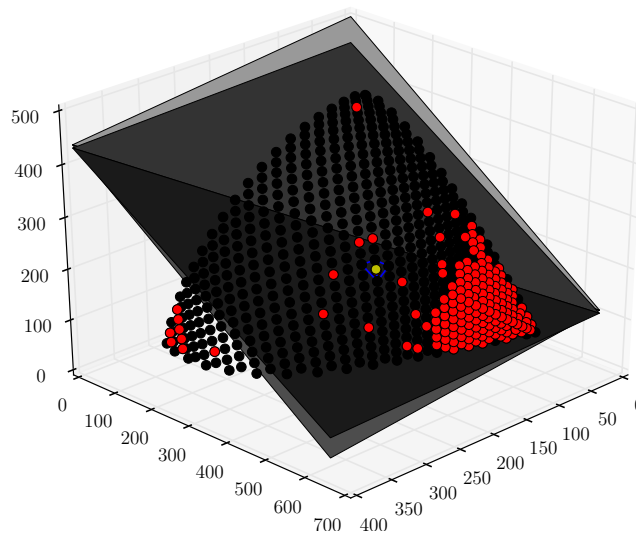


Figura 5.5: Restricción NLNC con solución no factible.

Para este caso en particular, a simple vista podría pensarse que se trata de una solución factible, pero al mirar más de cerca se puede apreciar un vértice no convexo (de color rojo) que ha quedado oculto debajo del punto de solución. En la Figura 5.6 se observan los vértices involucrados en la solución proporcionada al resolver con PL. Los triángulos de color azul representan las facetas que dan origen a las restricciones lineales, mismas que estuvieron involucradas en la solución, mientras que el vértice amarillo es la solución no factible que ha sido obtenida.

De este último ejemplo donde se viola la factibilidad del problema original es que se observa la importancia de tomar las medidas adecuadas al resolver este tipo de problemas. A continuación se muestran los resultados que se han obtenido con la implementación de los algoritmos propuestos y basado en ellos se propone también una solución alternativa para este último caso.

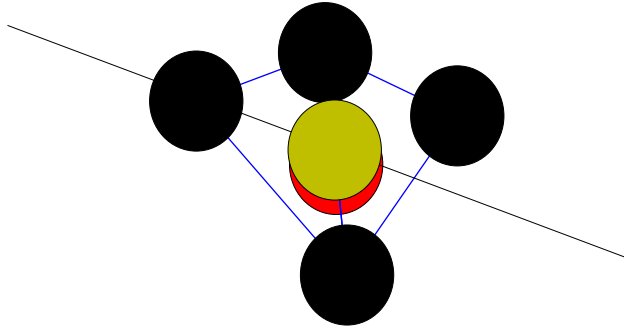


Figura 5.6: Solución no factible.

5.2. Identificación de las regiones no convexas

Utilizando el algoritmo de la triangulación de Delaunay para el conjunto de vértices \mathbb{P} , se obtiene un conjunto de triángulos o facetas formadas entre tres vértices vecinos $p_1, p_2, p_3 \in f$, el resultado de esta triangulación se ilustra en la Figura 5.7.

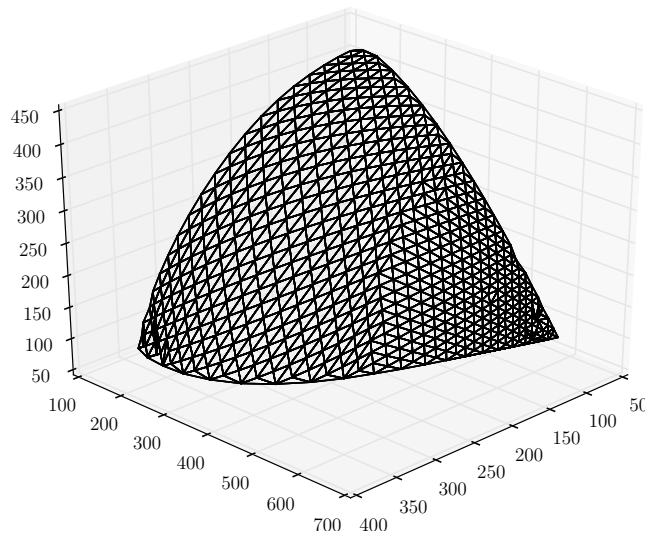


Figura 5.7: Facetas obtenidas con la triangulación de Delaunay.

Con lo anterior se ha obtenido una triangulación para toda la superficie de la función NLNC, sin embargo, el propósito de utilizar este algoritmo, es el de obtener una triangulación para las regiones no convexas, por lo que serán descartadas aquellas que contengan solamente vértices pertenecientes a \mathbb{P}_c .

Con el fin de conservar únicamente las facetas formadas entre vértices no convexos se ha empleado el Algoritmo 3, del cual, en la Figura 5.8 se muestra el resultado obtenido, donde se presenta una triangulación para el conjunto de vértices que no forman parte de la envoltura convexa (en color rojo).

Se han incluido también algunos puntos en color negro que si forman parte de la envoltura convexa, esto debido a su cercanía con los vértices de color rojo, ya que se forman regiones no convexas entre ellos. Estos últimos vértices de color negro son de un particular interés, debido a que al ser puntos convexos, son soluciones potencialmente factibles, y en caso de que el punto de solución obtenido con PL sea un vértice no factible, alguno de estos puntos que conforman la frontera entre las zonas convexas y no convexas de la restricción podría ser propuesto como una solución alternativa.

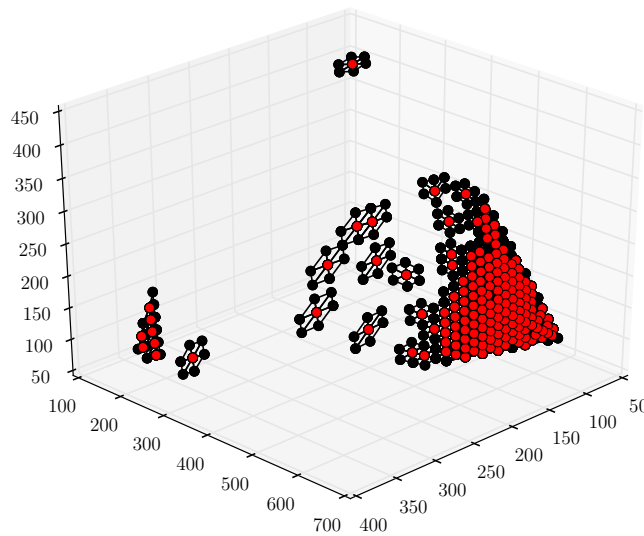


Figura 5.8: Facetas generadas a partir de puntos no convexas.

Hasta este punto se ha podido identificar si los vértices son convexos o no convexos, así como también, si un no de estos puntos convexos forma parte de la frontera entre ambas zonas. Sin embargo, una restricción NLNC, tal como se observa en la Figura 5.8 puede contener más de una región no convexa.

Con la finalidad de poder ofrecer un punto de solución alternativo y^* cuando así se requiera, es importante poder identificar las diferentes regiones no convexas de la restricción,

así como también a los vértices convexos que conforman la frontera alrededor de ellos.

Utilizando el Algoritmo 4 se han identificado 17 zonas no convexas. El resultado obtenido por medio de este algoritmo se muestra en la Figura 5.9. En esta se observa con un color diferente cada una de las regiones no convexas del conjunto \mathbb{P} . En la Tabla C.1 del Apéndice C se presentan para cada zona no convexa identificada, los índices que apuntan hacia los vértices del conjunto \mathbb{P} . Estas zonas no convexas que se conforman por los conjuntos de vértices convexos de la frontera \mathbb{P}_{bz} y los vértices no convexos internos \mathbb{P}_{iz} .

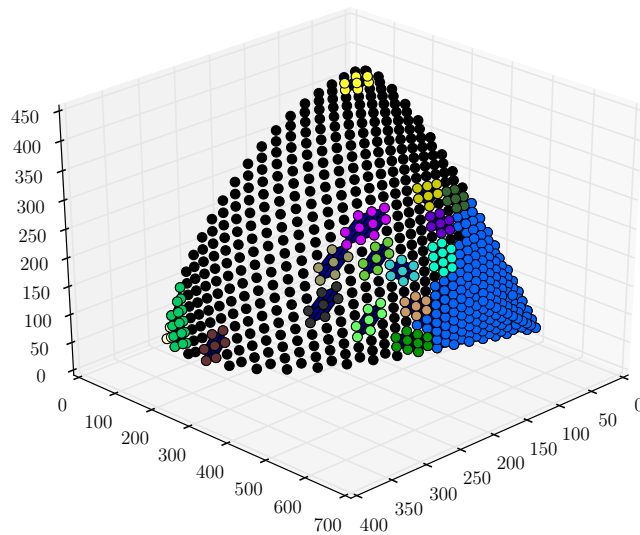


Figura 5.9: Zonas no convexas

5.3. Evaluación de la solución obtenida con PL

Se sabe que la linealización del conjunto \mathbb{P}_c introdujo una serie de facetas no factibles al modelo, las cuales están conformadas entre los vértices de la frontera \mathbb{P}_{bz} de las regiones originalmente no convexas. Por lo tanto, habiendo identificado las zonas no convexas y sus vértices, es sencillo deducir cuales son las facetas no factibles que se introdujeron al problema, basta con verificar para cada faceta, si todos los sus vértices pertenecen a una frontera.

Basados en lo anterior, así como en el punto de solución x^* obtenido con PL, si x^* satisface la ecuación del plano asociado a una faceta, entonces puede ser verificado con

el Algoritmo 6 si en realidad una faceta no factible se encuentra involucrada en el punto de solución. Con lo anterior, es posible proponer como una solución alternativa un vértice convexo de entre aquellos que conforman la frontera de esa zona no convexa. Para lo cual, estos vértices son evaluados en la función objetivo, así como también contra las restricciones lineales propias del problema. Lo anterior permite garantizar que la solución propuesta es factible y podría considerarse como una solución cuasi-óptima. En la Figura 5.10 se observa en color verde el vértice y^* propuesto como una solución alternativa al caso 3 visto en este mismo capítulo, donde x^* era en realidad un vértice no factible. En la Tabla 5.1 se presentan los resultados obtenidos con PL para los tres casos estudiados en este capítulo, así como el vértice de solución y^* propuesto para el caso 3.

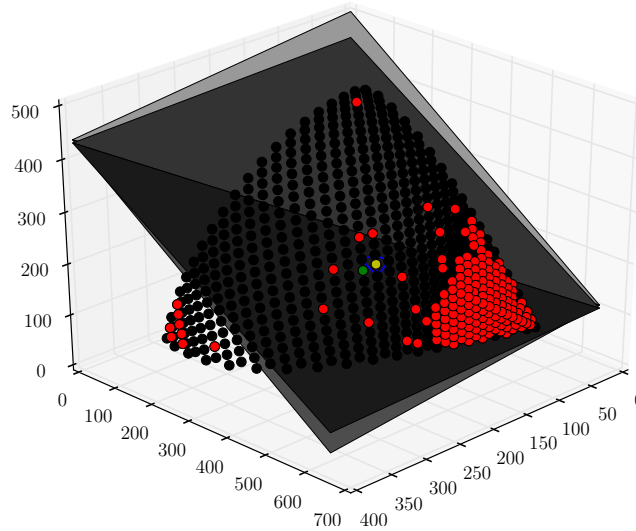


Figura 5.10: Solución alternativa a la obtenida con Gurobi

Tabla 5.1: Resultados de los casos de estudio

	Vértice solución	Valor óptimo
Caso 1 x^*	[279.16, 530.70, 0.0]	352794.215974
Caso 2 x^*	[78.83, 572.32, 119.14]	372908.833
Caso 3 x^*	[198.68, 412.39, 217.73]	252020.699191
Caso 3 y^*	[214.31, 406.45, 211.95]	248535.8

5.4. Comentarios finales

En este capítulo se han presentado los resultados obtenidos mediante la implementación en Python de los algoritmos propuestos. Se han utilizado tanto Quick Hull como la triangulación de Delaunay contenidos en el paquete Scipy, por otro lado, se ha utilizado Gurobi como herramienta de optimización.

Primeramente se analizan los problemas que pueden ser ocasionados por la introducción de funciones NLNC en los problemas de programación lineal. Posteriormente se obtiene la triangulación de la superficie convexa de la restricción NLNC, resultado de la utilización de Quick Hull, lo que permite a su vez identificar a los vértices no convexos. Con lo anterior, apoyados en la triangulación de Delaunay se obtiene un conjunto de facetas donde se incluye a todos los puntos de la restricción NLNC, a partir de la cual, son descartadas aquellas facetas que no contengan a ningún vértice no convexo. Una vez identificados todos los vértices que no forman parte de la envoltura convexa, son divididos en subconjuntos según la zona donde se ubican, identificando también a los vértices convexos que forman la frontera de cada una de las regiones no convexas. Por último, a partir de la solución obtenida con PL, se propone una solución alternativa. Para esto se consideran los vértices convexos de la frontera que se encuentra asociada a la región no convexa sobre la que se obtuvo el punto de solución. Son evaluados entonces los vértices de la frontera en la función objetivo, así como también tomando en cuenta las restricciones lineales propias del problema. Lo anterior garantiza que la solución propuesta es cuando menos mejor que la obtenida con el solver, esto debido a que no se viola ninguna de las restricciones del problema. Se puede decir entonces que se ha obtenido una solución cuasi-óptima.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

Este capítulo presenta algunas conclusiones derivadas de la implementación de este trabajo, así como algunas posibles líneas de investigación que pudiesen ser exploradas basadas en el contenido aquí presentado.

6.1. Conclusiones

Las restricciones no lineales no convexas son tratadas generalmente con técnicas de optimización global las cuales, aparte del costo computacional, no garantizan que el óptimo global sea encontrado. Lo anterior lleva a la integración de dicha restricción no lineal no convexa en un modelo de PL mediante su representación como un conjunto de restricciones lineales cuya solución, si la región factible del problema no es vacía, será regresada por los algoritmos de solución de PL. Sin embargo, dicha integración conlleva el riesgo de regresar una solución no factible y por lo tanto, en sistemas reales, dicha solución pudiese tener consecuencias serias debido a su no factibilidad.

En este trabajo, se ha presentado una metodología que dada una restricción no lineal no convexa representada por un conjunto discreto de sus puntos, identifica las zonas no convexas de la misma. El algoritmo propuesto para este propósito se encarga de obtener los vértices no convexos que pertenecen a una región en particular, así como a los vértices convexos que delimitan la frontera que los rodea. La identificación de estos vértices frontera es importante, debido a que la convexificación de los puntos discretos da como resultado la

creación de facetas no factibles.

La implementación propuesta utiliza dos algoritmos ya maduros en la literatura para extraer la envoltura convexa así como la extracción de facetas triangulares. La envoltura convexa proporcionada por uno de estos algoritmos permite que posteriormente puedan ser generadas las ecuaciones para cada una de las facetas, dando origen a una restricción lineal.

El conjunto de facetas triangulares obtenidas de la envoltura convexa son integradas entonces al modelo de PL como un conjunto de restricciones lineales. A este proceso lo hemos denominado linealización, y permite que el conjunto de vértices discretos que pertenecen a una función no lineal puedan ser tratados en un problema de PL.

La solución de este problema lineal nos regresa una solución x^* que potencialmente puede ser no factible. Esto ocurre cuando la función original es no convexa y su convexificación da como resultado la creación de facetas no factibles que, aunado a las condiciones propias del modelo, produce vértices que tampoco son factibles. En consecuencia se corre el riesgo de que alguno de esos vértices sea devuelto como el punto óptimo x^* al resolver mediante PL.

Se presenta una metodología que, dado un conjunto de zonas no convexas y el punto solución x^* , determina si esta solución es factible. Esto se basa en la identificación previa de los vértices convexos entre los que se han formado facetas no factibles. Si x^* pertenece a una de esas facetas entonces la solución también será no factible, con la excepción de cuando x^* es uno de los vértices de una de las facetas no factibles.

Podemos concluir entonces que este trabajo determina si la solución x^* regresa al resolver el problema aumentado P' si es una solución factible y en caso contrario, proporciona las bases para regresar una solución quasi-óptima de acuerdo a la información contenida en las zonas no convexas. Específicamente, cada uno de los puntos factibles que delimitan la frontera no convexa se convierte en un potencial candidato a solución, y^* , que en este trabajo se propone sea el mejor evaluado por la función objetivo.

6.2. Trabajo Futuro

A continuación se describen algunas de las posibles líneas de investigación que pueden derivarse del presente trabajo.

La generalización de la metodología propuesta hacia espacios más allá de \mathbb{R}^3 es una área de investigación abierta. En cuanto a este trabajo, la metodología está solidamente desarrollada para espacios en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , sin embargo debemos desarrollarla de manera consistente para dimensiones mayores.

Es necesario realizar investigación para proponer soluciones alternativas a las obtenidas por el problema aumentado y lo ideal sería que garantizará que el punto ofrecido como solución sea sin lugar a dudas el vértice factible con el que se obtenga el mejor resultado después de x^* para el problema en cuestión.

Aplicar la metodología aquí desarrollada a aplicaciones que pertenecen a los diferentes campos de las ciencias, en especial en el campo de la ingeniería de donde empezó la necesidad para integrar dichas restricciones no convexas a problemas de PL.

Apéndice A

Conjuntos de vértices para los casos de estudio

Tabla A.1: Conjunto de 21 vértices en \mathbb{R}^2

	X_1	X_2		X_1	X_2
1	267.52	248.0	12	168.77	658.93
2	275.93	285.22	13	154.53	678.43
3	279.29	327.87	14	141.4	696.5
4	281.23	376.03	15	129.25	713.36
5	276.08	424.93	16	117.98	729.22
6	265.82	472.06	17	107.51	744.67
7	251.7	515.13	18	97.57	756.68
8	235.17	552.82	19	88.42	770.74
9	217.69	585.06	20	79.85	788.14
10	200.54	613.08	21	71.64	797.12
11	184.12	637.37			

Tabla A.2: Conjunto de 631 vértices en \mathbb{R}^3

	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
1	364.49	163	85	41	71.641	163	421.87
2	372.32	199.01	85	42	364.33	174.48	90.987
3	359.46	163	102.97	43	71.641	594.39	96.84
4	374.65	239.6	85	44	71.641	583.26	109.35
5	357.1	163	122.63	45	71.641	569.71	122.43
6	373.3	284.12	85	46	71.641	559.44	136.68
7	348.27	163	142.92	47	71.641	544.66	151.34
8	365.18	329.91	85	48	71.641	530.87	167.21
9	343.7	163	165.7	49	71.641	509.74	182.36
10	350.71	374.65	85	50	71.641	497.48	201.28
11	334.38	163	188.91	51	71.641	478.9	219.78
12	329.54	414.48	85	52	71.641	458.79	239.25
13	323.41	163	213.02	53	71.641	437.02	259.65
14	304.14	447.84	85	54	71.641	413.42	280.88
15	310.71	163	237.73	55	71.641	387.82	302.73
16	276.98	474.46	85	56	71.641	360.29	325.05
17	296.26	163	262.67	57	71.641	330.64	347.25
18	250.41	495.19	85	58	71.641	299.05	368.78
19	280.23	163	287.49	59	71.641	265.8	388.79
20	225.51	513.1	85	60	71.641	231.45	406.25
21	262.58	163	311.54	61	71.641	196.77	419.55
22	202.81	527.75	85	62	367.81	212.01	91.389
23	243.63	163	334.41	63	362.33	175.03	110.08
24	182.15	540.17	85	64	372.8	255.24	91.871
25	223.57	163	355.39	65	353.72	175.34	130.05
26	163.52	551.24	85	66	368.11	300.66	92.179
27	202.75	163	373.88	67	349.65	175.91	152.32
28	146.65	561.19	85	68	356.96	346.46	92.359
29	181.65	163	389.55	69	340.66	176.31	175.2
30	131.32	570.36	85	70	339.15	389.48	92.381
31	160.7	163	402.01	71	330.05	176.67	199.08
32	117.33	578.85	85	72	315.67	426.73	92.238
33	140.42	163	411.42	73	317.67	176.99	223.66
34	104.45	586	85	74	289.15	457.26	91.975
35	121.21	163	418.26	75	303.62	177.27	248.65
36	92.086	581.66	85	76	262.06	481.57	91.645
37	103.32	163	423.31	77	287.76	177.46	273.54
38	81.745	599.81	85	78	236.16	501.1	91.297
39	86.782	163	426.32	79	270.38	177.59	297.98
40	71.641	605.09	85	80	212.28	517.27	90.959

	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
81	251.53	177.62	321.3	121	368.96	271.24	99.11
82	190.53	530.89	90.642	122	355.33	188.82	138.85
83	231.6	177.56	343.11	123	361.32	317.26	99.625
84	170.88	542.72	90.352	124	346.68	189.63	161.37
85	210.83	177.39	362.14	125	347	362.35	99.851
86	153.13	553.31	90.088	126	336.41	190.38	184.96
87	189.59	177.12	379.61	127	326.15	403.1	99.73
88	137.05	562.94	89.85	128	324.45	191.06	209.31
89	168.39	176.16	393.49	129	300.95	437.59	99.319
90	122.42	571.79	89.634	130	310.62	191.62	234.24
91	147.71	176.31	404.34	131	273.94	465.47	98.716
92	108.98	579.22	89.43	132	295.15	192.06	259.27
93	127.98	175.82	412.53	133	247.34	487.81	98.029
94	96.795	588.15	89.264	134	277.98	192.34	283.91
95	109.47	175.3	418.45	135	222.33	505.85	97.33
96	85.369	592.48	89.012	136	259.27	192.44	307.61
97	92.35	174.78	422.84	137	199.33	520.57	96.654
98	74.935	597.64	88.908	138	239.48	192.37	330.09
99	76.588	174.26	425.46	139	178.71	533.7	96.046
100	75.03	587.13	101.09	140	218.67	192.09	350.45
101	75.093	571.41	113.67	141	160.02	545.07	95.486
102	75.258	566.2	127.91	142	197.43	191.62	368.57
103	75.356	551.78	142.3	143	143.11	555.18	94.976
104	75.464	537.06	157.58	144	176.03	190.94	383.72
105	75.589	522.28	173.99	145	127.61	563.23	94.487
106	75.71	505.53	191.21	146	155.04	190.11	395.99
107	75.836	487.48	209.42	147	113.85	573.31	94.105
108	75.964	467.88	228.6	148	134.85	189.15	405.44
109	76.095	446.73	248.81	149	101.03	580.94	93.718
110	76.226	423.82	269.98	150	115.82	188.13	412.58
111	76.353	398.86	291.85	151	89.11	584.3	93.29
112	76.473	371.9	314.34	152	98.052	187.04	417.16
113	76.579	342.76	336.92	153	78.4	593.57	93.019
114	76.665	311.59	359.19	154	81.776	186.06	421.69
115	76.719	278.55	380.25	155	78.339	566.86	104.87
116	76.734	244.11	399.22	156	78.837	572.32	119.15
117	76.694	208.99	414.75	151	79.017	557.39	133.13
118	367.41	187.03	97.533	158	79.268	544.75	148.34
119	370.54	227.16	98.382	159	79.499	529.54	164.25
120	359.06	187.68	117.17	160	79.744	513.27	181.13

	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
161	79.998	495.16	199.03	201	105.56	574.65	98.417
162	80.262	476.85	217.98	202	122.3	201.42	405.59
163	80.523	456.04	237.81	203	93.342	582.69	97.874
164	80.803	434.01	258.94	204	104.05	199.87	411.86
165	81.069	409.68	280.76	205	82.031	588.51	97.327
166	81.326	383.35	303.32	206	87.167	198.32	416.57
167	81.561	354.84	326.27	207	82.364	577.75	110.44
168	81.759	324.14	349.09	208	82.666	564.34	124.24
169	81.899	291.37	371.02	209	82.988	550.25	138.85
170	81.967	256.98	391.29	210	83.371	536.65	154.59
171	81.933	221.54	408.59	211	83.741	520.88	171.13
172	362.67	199.79	104.18	212	84.126	503.87	188.69
173	368.14	242.37	105.69	213	84.528	485.54	207.32
174	360.74	201.69	125.35	214	84.896	464.59	226.54
175	362.29	286.99	106.55	215	85.361	443.94	247.78
176	352.45	202.93	147.47	216	85.776	420.28	269.48
177	352.9	333.65	107.25	217	86.184	394.62	292.06
178	342.52	204.09	170.71	218	86.567	366.76	315.22
179	335.45	377.36	107.36	219	86.899	336.57	338.44
180	330.9	205.13	194.86	220	87.161	304.25	361.22
181	312.33	415.75	106.97	221	87.316	269.99	382.56
182	317.44	206.02	219.6	222	87.332	234.4	401.5
183	285.89	447.35	106.18	223	365.84	214.49	111.85
184	302.16	206.71	244.54	224	364.22	258.1	113.34
185	258.9	472.87	105.2	225	357.97	216.18	133.531
186	285.29	207.19	269.35	226	356.91	304.1	114.43
187	232.86	493.14	104.13	227	348.38	217.75	156.38
188	266.84	207.41	293.44	228	342.97	349.63	114.95
189	208.84	509.85	103.09	229	337.09	219.18	180.22
190	247.13	207.36	316.34	230	322.61	391.41	114.78
191	187.06	524.1	102.12	231	323.97	220.41	204.75
192	226.36	207	337.41	232	297.64	427.05	113.99
193	167.35	536.3	101.22	233	309.02	221.39	229.62
194	205.07	206.37	356.39	234	270.58	455.89	112.77
195	149.57	547.15	100.41	235	292.37	222.08	254.46
196	183.57	205.44	372.73	236	243.97	479.2	111.38
197	133.49	557	99.676	237	274.12	222.44	278.74
198	162.38	204.29	386.44	238	218.89	498.03	109.96
199	118.89	566.09	99.013	239	254.49	222.43	301.95
200	141.83	202.92	397.27	240	195.92	513.62	108.59

	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
241	233.86	222.05	323.66	281	299.15	236.95	239.25
242	175.14	526.93	107.33	282	255.35	463.42	119.06
243	212.58	221.31	343.44	283	281.16	237.49	263.67
244	156.21	537.72	106.12	284	229.45	484.9	117.28
245	191.09	220.21	360.98	285	261.76	237.58	287.23
246	139.5	549	105.13	286	205.33	502.28	115.5
247	169.67	218.76	375.76	287	241.25	237.21	309.45
248	124.21	558.62	104.19	288	183.45	516.93	113.84
249	148.81	217.02	387.85	289	219.94	236.35	329.81
250	110.29	567.49	103.34	290	163.69	529.5	112.3
251	128.89	215.1	397.43	291	198.42	235.11	348.23
252	97.475	574.44	102.51	292	145.91	540.71	110.92
253	110.15	213.07	404.84	293	176.86	233.41	364.06
254	85.808	582.03	101.81	294	129.84	550.79	109.66
255	92.743	211.01	410.49	295	155.78	231.37	377.34
256	86.233	569.71	115.3	296	115.27	560.1	108.53
257	86.705	557.16	129.68	291	135.52	229.07	388.18
258	87.195	543.42	144.98	298	101.92	567.79	107.46
259	87.616	527.82	161.1	299	116.37	226.6	396.76
260	88.212	511.15	178.39	300	89.813	576.46	106.56
261	88.75	493.89	196.65	301	98.474	224.05	403.36
262	89.313	474.61	216.04	302	90.325	562.6	120.47
263	89.886	453.58	236.53	303	90.977	550.15	135.47
264	90.468	430.72	258.12	304	91.488	533.27	150.93
265	91.036	405.71	280.6	305	92.247	519.31	168.12
266	91.581	378.5	303.84	306	92.936	502.16	186.06
267	92.072	348.94	327.41	307	93.65	483.48	205.12
268	92.482	317.11	350.82	308	94.383	463.12	225.31
269	92.161	283.13	373.17	309	95.13	440.9	246.64
270	92.853	247.46	393.3	310	95.871	416.59	268.99
271	363.21	229.34	119.59	311	96.589	390.05	292.2
272	358.87	274.23	121.25	312	97.26	361.18	316.01
273	353.98	231.34	142.02	313	97.83	329.84	339.79
274	348.55	320.51	122.33	314	98.275	296.32	363.09
275	343.01	233.16	165.49	315	98.507	260.8	384.63
276	331.38	364.8	122.58	316	359.21	244.8	127.66
277	330.2	234.74	189.75	317	352.14	290.64	129.37
218	308.61	404.27	122	318	348.62	247.03	150.73
279	315.56	236.02	214.47	319	338.6	336.54	130.25
280	282.49	437.13	120.74	320	336.12	248.96	174.66

	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
321	318.64	379.14	130.09	361	327.03	351.85	138.03
322	321.8	250.56	199.16	362	327.71	264.96	183.74
323	293.92	415.87	128.95	363	304.7	392.3	137.31
324	305.67	251.75	223.84	364	311.94	266.44	208.29
325	267.14	446.05	127.17	365	278.69	426.25	135.58
326	287.9	252.46	248.28	366	294.4	267.35	232.7
327	240.45	470.27	125.06	367	251.68	453.71	133.23
328	268.65	252.65	272	368	275.32	267.64	256.5
329	215.21	489.78	122.87	369	225.77	476.1	130.72
330	248.31	252.33	294.62	370	255.22	267.42	279.47
331	192.25	506.01	120.77	371	201.63	494.26	128.19
332	227.19	251.48	315.69	372	234.05	266.47	300.82
333	171.44	519.83	118.83	373	179.59	509.09	125.75
334	205.57	250.07	334.71	374	212.56	265.02	320.59
335	152.68	531.79	117.05	375	159.91	522.39	123.58
336	183.96	248.19	351.53	376	190.87	262.94	338.15
337	135.81	542.61	115.45	377	142.15	533.97	121.6
338	162.68	245.85	365.83	378	169.52	260.43	353.55
339	120.54	552.41	114.01	379	126.1	544.26	119.79
340	142.15	243.22	377.82	380	148.8	257.53	366.68
341	106.67	561.45	112.7	381	111.33	551.31	117.96
342	122.64	240.36	387.55	382	128.99	254.34	377.6
343	93.963	569.3	111.48	383	98.381	562.81	116.73
344	104.34	237.41	395.4	384	110.29	250.94	386.35
345	94.7	556.48	126.04	385	99.24	548.74	131.18
346	95.45	542.2	141.5	386	100.17	533.88	147.86
347	96.236	526.74	157.95	387	101.14	517.76	165
348	97.061	510.02	175.48	388	102.16	500.28	183.29
349	97.926	491.93	194.15	389	103.22	481.23	202.77
350	98.829	472.29	214.03	390	104.31	460.35	223.45
351	99.749	450.78	235.07	391	105.43	437.57	245.36
352	100.67	427.23	257.24	392	106.54	412.54	268.36
353	101.58	401.41	280.37	393	107.6	385.08	292.23
354	102.44	373.23	304.26	394	108.58	355.09	316.64
355	103.21	342.57	328.46	395	109.41	322.57	341.04
356	103.83	309.49	352.37	396	110.01	287.7	364.62
357	104.23	274.23	375.03	397	347.16	276.98	144.44
358	353.95	260.74	135.97	398	333.91	323.1	145.72
359	343.85	307.03	137.58	399	333.45	279.23	168.34
360	341.78	263.06	159.54	400	314.29	366.4	145.61

	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
401	317.89	280.95	192.64	441	268.17	297.14	248.22
402	289.87	404.17	144.18	442	221.83	466.74	144.4
403	300.63	282.09	216.96	443	247.37	296.28	270.33
404	263.22	435.43	141.83	444	197.74	485.76	141.1
405	281.79	282.53	240.83	445	226.03	294.73	291.08
406	236.66	460.17	139.01	446	175.8	501.56	137.97
407	261.83	282.37	263.97	447	204.36	292.41	309.95
408	211.46	481.13	136.04	448	156.02	514.96	135.06
409	240.87	281.47	285.78	449	182.95	289.63	327.12
410	188.42	498.01	133.19	450	138.29	526.92	132.44
411	219.39	279.92	306.03	451	161.92	286.24	342.06
412	167.62	512.39	130.55	452	122.31	537.66	130.09
413	197.77	277.79	324.45	453	141.64	282.44	354.91
414	148.87	524.79	128.12	454	107.82	547.19	127.93
415	176.29	275.05	340.63	455	122.38	278.44	365.92
416	132.02	535.9	125.94	456	109.1	532.36	144.27
417	155.37	271.87	354.66	457	110.43	516.03	161.71
418	116.8	545.96	123.97	458	111.82	498.17	180.33
419	135.32	268.37	366.6	459	113.27	478.72	200.25
420	102.99	555.28	122.19	460	114.78	457.41	221.5
421	116.32	264.65	376.54	461	116.28	433.86	243.9
422	104.04	540.75	137.85	462	117.8	408.07	267.56
423	105.15	525.12	154.57	463	119.23	379.51	292.05
424	106.32	508.19	172.43	464	120.54	348.45	317.09
425	107.55	489.79	191.51	465	121.63	314.65	342.02
426	108.83	469.76	211.87	466	328.87	309.31	161.3
427	110.13	447.61	233.42	467	309.64	353.26	161.32
428	111.45	423.38	256.2	468	312.17	310.91	185.27
429	112.73	396.1	279.99	469	285.62	392.11	159.67
430	113.92	367.43	304.48	470	293.78	311.65	209.03
431	114.99	335.6	329.31	471	259.16	424.5	156.77
432	115.82	301.22	353.65	472	274.17	311.65	232.28
433	338.75	293.23	152.91	473	232.62	450.77	153.21
434	322.36	338.52	153.65	474	253.56	310.82	254.59
435	323.5	295.24	176.95	475	207.52	472.15	149.49
436	300.36	379.83	152.84	476	232.43	309.33	275.77
437	306.47	296.57	201.09	477	184.44	489.64	145.83
438	274.7	415	150.71	478	210.82	306.93	295.16
439	288	297.26	225.02	479	163.66	504.61	142.46
440	247.87	443.68	147.73	480	189.43	304.05	313.01

	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
481	144.94	517.39	139.35	521	131.52	373.56	291.68
482	168.35	300.52	328.83	522	133.14	341.09	317.18
483	128.14	528.85	136.56	523	304.7	339.76	177.17
484	147.95	296.55	342.68	524	281.03	379.55	175.34
485	112.97	539.18	134.04	525	285.6	340.02	200.39
486	128.43	292.2	354.51	526	254.84	413.09	171.94
487	113.79	517.85	150.02	527	265.33	339.28	222.89
488	115.72	504.02	168.69	528	228.37	440.35	167.65
489	117.66	487.59	188.74	529	244.55	337.85	244.56
490	119.34	466.88	209.51	530	203.37	462.71	163.15
491	121.09	444.25	231.67	531	223.26	335.49	264.89
492	122.8	419.09	254.96	532	180.33	480.93	158.69
493	124.5	391.5	279.41	533	201.9	332.35	283.7
494	126.06	361.1	304.52	534	159.58	496.47	154.56
495	127.42	327.98	329.87	535	180.85	328.64	300.95
496	317.42	324.88	169.41	536	140.93	509.84	150.77
497	295.69	366.9	168.54	531	160.29	324.36	316.39
498	299.45	325.9	193.12	538	124.18	521.64	147.34
499	270.19	402.99	165.98	539	140.48	319.63	330.03
500	280.09	326.03	216.39	540	126.18	504.22	165.88
501	243.72	433.02	162.44	541	128.26	485.03	185.76
502	259.7	325.3	238.88	542	130.35	463.55	206.9
503	217.77	457.12	158.35	543	132.61	440.46	229.69
504	238.53	323.65	260.16	544	134.8	414.48	253.61
505	193.65	476.81	154.23	545	136.92	385.79	278.63
506	217.07	321.25	280.05	546	138.84	354.12	304.26
507	171.77	493.34	150.34	547	290.77	353.63	184.41
508	195.71	318.26	298.45	548	265.75	390.94	181.58
509	152.03	507.31	146.72	549	270.91	353.13	207.02
510	174.67	314.68	315.1	550	239.26	421.79	177.34
511	134.35	519.68	143.46	551	250.15	351.57	228.72
512	154.13	310.46	329.67	552	213.5	447.03	172.52
513	118.42	530.68	140.5	553	229.11	349.31	249.41
514	134.49	305.99	342.59	554	189.43	467.54	167.58
515	120.15	514.16	158.25	555	207.92	346.22	268.74
516	121.94	495.95	177.24	556	167.6	484.74	162.9
517	123.85	476.16	197.62	557	186.89	342.41	286.5
518	125.79	454.19	219.32	558	147.93	499.32	158.55
519	127.76	429.97	242.38	559	166.32	338.02	302.64
520	129.7	403.17	266.6	560	130.31	512.11	154.61

	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
561	146.43	333.17	317.09	601	245.28	388.76	202.73
562	132.57	493.57	173.91	602	219.19	418.14	197.04
563	134.93	473.14	194.75	603	224.58	385.7	222.91
564	137.38	450.65	217	604	194.48	442.49	191
565	139.83	425.57	240.59	605	203.97	381.97	242
566	142.23	397.73	265.39	606	171.61	462.29	184.89
567	144.45	366.88	290.99	607	183.57	377.45	259.13
568	276.12	366.54	191.14	608	151.05	479.17	179.21
569	250.19	401.14	187.27	609	163.69	372.43	276.12
570	255.67	365.13	212.99	610	154.25	456.69	201.4
571	223.87	429.42	182.25	611	157.49	431.56	225.05
572	234.74	362.82	233.86	612	160.68	403.57	250.06
573	199.02	452.82	176.99	613	229.64	398.05	207.57
574	213.64	359.66	253.48	614	204.3	425.45	201.33
575	176.05	471.82	171.71	615	209.27	394.45	227
576	192.76	355.9	271.81	616	180.5	447.83	194.18
577	155.38	488.01	166.82	617	189.02	390.01	245.16
578	172.21	351.44	288.56	618	158.82	466.31	188.44
579	136.81	501.9	162.32	619	169.15	384.87	261.95
580	152.29	346.5	303.72	620	162.37	442.28	211.64
581	139.38	482.26	182.6	621	165.87	415.22	236.25
582	142.04	460.45	204.32	622	214.31	406.45	211.95
583	144.75	436.27	227.5	623	189.76	431.74	205.12
584	147.42	409.29	251.91	624	194.3	402.21	230.53
585	149.97	379.39	277.5	625	167.06	452.47	198.21
586	260.85	378.25	197.25	626	174.58	397.22	247.85
587	234.54	410.09	192.31	627	170.84	426.32	222.32
588	240.03	375.85	218.2	628	199.33	413.9	215.84
589	209	436.46	186.86	629	175.76	437.29	208.53
590	219.28	372.94	238.21	630	179.77	409.01	233.54
591	185.06	457.91	181.12	631	184.84	420.55	219.31
592	198.37	368.95	256.84				
593	163.28	475.76	175.61				
594	177.94	364.55	274.19				
595	143.72	490.98	170.52				
596	158.05	359.6	290.04				
597	146.61	470.04	191.74				
598	149.58	446.71	214.45				
599	152.54	420.68	238.57				
600	155.41	391.7	263.89				

Apéndice B

Desigualdades lineales obtenidas de la superficie convexa

Tabla B.1: Desigualdades lineales para el conjunto de 631 vértices en \mathbb{R}^3

1	241.45968 x_1	+	183.8452 x_2	+	151.5532 x_3	\leq	168652.803443
2	-50.107 x_1	-	32.34204 x_2	+	170.48766 x_3	\leq	63062.1610172
3	-147.3575 x_1	+	11.47704 x_2	+	167.06019 x_3	\leq	61791.6012178
4	-185.6745 x_1	-	189.441 x_2	-	143.1866 x_3	\geq	-153481.16087
5	-310.37436 x_1	+	6.54809 x_2	-	116.6873 x_3	\geq	-125270.515409
6	-293.98523 x_1	-	156.25577 x_2	-	146.4837 x_3	\geq	-174095.898744
7	180.312 x_1	+	345.0516 x_2	+	293.1132 x_3	\leq	246619.626636
8	-305.89692 x_1	-	9.27585 x_2	-	61.248 x_3	\geq	-122032.854738
9	300.7328 x_1	-	15.8498 x_2	+	118.4409 x_3	\leq	120404.00309
10	-556.0337 x_1	+	76.9745 x_2	-	172.994 x_3	\geq	-207227.04499
11	-516.98144 x_1	+	52.98636 x_2	-	151.8872 x_3	\geq	-194848.126237
12	-451.31333 x_1	+	98.13339 x_2	-	83.0057 x_3	\geq	-155558.937582
13	543.17538 x_1	-	31.18006 x_2	+	137.8397 x_3	\leq	207746.288241
14	-294.76972 x_1	+	3.48311 x_2	-	87.2944 x_3	\geq	-117020.946442
15	304.24095 x_1	-	0.88968 x_2	+	101.7666 x_3	\leq	122543.343545
16	-308.9251 x_1	+	17.9816 x_2	-	124.0492 x_3	\geq	-123801.50851
17	-87.6888 x_1	-	63.7665 x_2	-	246.2722 x_3	\geq	-124028.50932
18	29.054 x_1	+	40.2636 x_2	+	182.781 x_3	\leq	87007.526948
19	-35.4578 x_1	-	40.79256 x_2	-	194.81764 x_3	\geq	-92780.9423644
20	-259.94024 x_1	-	180.15792 x_2	-	193.2076 x_3	\geq	-176755.207371
21	-276.1714 x_1	-	183.5616 x_2	-	208.5592 x_3	\geq	-184881.926186
22	-243.5512 x_1	-	192.96628 x_2	-	199.0382 x_3	\geq	-177585.19346
23	-254.134 x_1	-	194.9367 x_2	-	211.7932 x_3	\geq	-183074.123849
24	247.5316 x_1	+	193.648 x_2	+	206.2702 x_3	\leq	179885.423922
25	-358.8972 x_1	-	36.7239 x_2	-	231.7938 x_3	\geq	-173198.157618
26	-357.5262 x_1	-	58.3449 x_2	-	253.4652 x_3	\geq	-182568.496074
27	89.37344 x_1	+	151.73444 x_2	+	99.4731 x_3	\leq	106772.879809
28	-164.93152 x_1	-	276.39248 x_2	-	191.4678 x_3	\geq	-195615.96529
29	-264.4786 x_1	-	208.7 x_2	-	261.0002 x_3	\geq	-199412.30726
30	228.08459 x_1	+	188.18729 x_2	+	185.5234 x_3	\leq	169416.932156
31	233.9608 x_1	+	192.51901 x_2	+	191.0954 x_3	\leq	173634.300378
32	301.4244 x_1	-	7.7542 x_2	+	113.4007 x_3	\leq	121386.671203
33	557.1956 x_1	-	68.2877 x_2	+	169.5083 x_3	\leq	208630.456489
34	555.91479 x_1	-	60.44497 x_2	+	165.1535 x_3	\leq	209051.54657
35	-310.2936 x_1	+	13.4059 x_2	-	122.1548 x_3	\geq	-124742.544507
36	310.775 x_1	-	9.7054 x_2	+	119.7187 x_3	\leq	125218.048617
37	-301.6439 x_1	+	11.3981 x_2	-	116.2723 x_3	\geq	-121175.3466
38	552.66 x_1	-	49.455 x_2	+	161.892 x_3	\leq	209685.15165
39	-548.67414 x_1	+	38.92236 x_2	-	154.8576 x_3	\geq	-209699.312941
40	300.3318 x_1	-	4.3281 x_2	+	109.355 x_3	\leq	121176.408293
41	308.88225 x_1	-	3.89277 x_2	+	112.4248 x_3	\leq	124741.235983
42	297.44064 x_1	-	2.0244 x_2	+	101.895 x_3	\leq	119778.425932

43	-307.2672 x_1	+	1.6012 x_2	-	107.4794 x_3	\geq	-124088.76195
44	-20.4369 x_1	-	88.92378 x_2	-	174.94455 x_3	\geq	-93116.7522714
45	-15.1247 x_1	-	49.31127 x_2	-	175.15648 x_3	\geq	-84273.4284146
46	-28.9556 x_1	-	45.83018 x_2	-	183.29384 x_3	\geq	-88188.215826
47	-43.6546 x_1	-	60.33853 x_2	-	190.44772 x_3	\geq	-95106.3845082
48	-105.5102 x_1	-	136.78717 x_2	-	423.21631 x_3	\geq	-212623.857414
49	100.0802 x_1	+	130.09577 x_2	+	405.69996 x_3	\leq	203526.716237
50	51.4698 x_1	+	56.2047 x_2	+	207.378 x_3	\leq	102264.407016
51	62.115 x_1	+	55.8879 x_2	+	220.047 x_3	\leq	108675.54507
52	-72.9148 x_1	-	65.9839 x_2	-	233.7778 x_3	\geq	-117373.281236
53	-59.6762 x_1	-	73.6619 x_2	-	225.5581 x_3	\geq	-113830.471629
54	72.9012 x_1	+	71.0617 x_2	+	234.1813 x_3	\leq	118430.775359
55	105.5397 x_1	+	79.9833 x_2	+	259.0342 x_3	\leq	134429.013138
56	125.2471 x_1	+	74.9835 x_2	+	269.9268 x_3	\leq	140862.792338
57	-143.2925 x_1	-	91.3876 x_2	-	276.8243 x_3	\geq	-149209.420393
58	-323.0608 x_1	-	11.14223 x_2	-	131.9468 x_3	\geq	-135673.790008
59	284.25422 x_1	+	166.57689 x_2	+	194.1118 x_3	\leq	179215.428026
60	290.89081 x_1	+	169.63454 x_2	+	200.1848 x_3	\leq	183218.15086
61	-268.7257 x_1	-	179.025 x_2	-	200.1551 x_3	\geq	-179771.332678
62	275.0181 x_1	+	182.3614 x_2	+	206.3368 x_3	\leq	183785.002719
63	270.6177 x_1	+	210.9075 x_2	+	266.8884 x_3	\leq	203042.04315
64	-333.6658 x_1	-	176.0767 x_2	-	276.6171 x_3	\geq	-210719.914692
65	350.3534 x_1	+	157.8657 x_2	+	266.2533 x_3	\leq	207780.594556
66	-212.2018 x_1	-	120.955 x_2	-	305.1728 x_3	\geq	-177549.93737
67	325.9762 x_1	+	182.74 x_2	+	266.091 x_3	\leq	208556.03301
68	-327.6273 x_1	-	181.5423 x_2	-	271.5627 x_3	\geq	-209716.819179
69	302.5137 x_1	+	198.5087 x_2	+	277.7492 x_3	\leq	209553.003082
70	-337.174 x_1	-	163.7222 x_2	-	244.5356 x_3	\geq	-201687.544724
71	-326.10543 x_1	-	144.24851 x_2	-	208.5599 x_3	\geq	-186251.946383
72	-318.2342 x_1	-	165.0563 x_2	-	224.6866 x_3	\geq	-193211.070864
73	-310.27308 x_1	-	517.30523 x_2	-	390.022 x_3	\geq	-369100.877611
74	70.07364 x_1	+	116.56372 x_2	+	87.6452 x_3	\leq	83177.9801584
75	-108.6905 x_1	-	170.9703 x_2	-	156.6781 x_3	\geq	-126780.811475
76	-1340.80548 x_1	-	2278.99155 x_2	-	1876.72035 x_3	\geq	-1637695.71189
77	-230.74174 x_1	-	433.475142 x_2	-	368.58649 x_3	\geq	-310194.560109
78	77.11116 x_1	+	144.304092 x_2	+	122.43498 x_3	\leq	103265.462497
79	-137.75085 x_1	-	176.55765 x_2	-	120.3789 x_3	\geq	-132155.979552
80	154.18755 x_1	+	181.2424 x_2	+	152.2716 x_3	\leq	141642.222703
81	173.20995 x_1	+	188.12772 x_2	+	161.6963 x_3	\leq	150978.955482
82	-159.78956 x_1	-	186.57728 x_2	-	157.7056 x_3	\geq	-146186.944598
83	82.331 x_1	+	138.433 x_2	+	114.5565 x_3	\leq	99711.605585
84	-156.9855 x_1	-	265.3585 x_2	-	218.794 x_3	\geq	-190878.26834
85	80.2683 x_1	+	132.6171 x_2	+	107.0444 x_3	\leq	95464.911634

86	-85.5361 x_1	-	139.9735 x_2	-	113.2279 x_3	\geq	-100946.839443
87	-87.29935 x_1	-	135.2693 x_2	-	99.1605 x_3	\geq	-97522.1967485
88	-163.02253 x_1	-	264.45481 x_2	-	206.0183 x_3	\geq	-190140.180787
89	174.71404 x_1	+	278.95531 x_2	+	219.8689 x_3	\leq	201382.56489
90	-229.4082 x_1	-	203.1772 x_2	-	208.885 x_3	\geq	-178858.681058
91	519.1676 x_1	-	62.6171 x_2	+	156.3317 x_3	\leq	194359.119031
92	-518.26313 x_1	+	58.3226 x_2	-	154.0532 x_3	\geq	-194532.251471
93	452.6889 x_1	-	104.0604 x_2	+	88.9017 x_3	\leq	155595.376461
94	-451.90041 x_1	+	100.30488 x_2	-	87.0324 x_3	\geq	-155761.239001
95	50.3459 x_1	+	76.38568 x_2	+	205.60247 x_3	\leq	105185.130051
96	351.1844 x_1	+	142.8538 x_2	+	233.7168 x_3	\leq	197477.25788
97	340.3552 x_1	+	162.1328 x_2	+	247.008 x_3	\leq	202554.876928
98	-344.8896 x_1	-	162.144 x_2	-	254.4192 x_3	\geq	-205253.356224
99	347.4059 x_1	+	160.5267 x_2	+	256.3959 x_3	\leq	205861.524493
100	345.6929 x_1	+	6.7074 x_2	+	177.673 x_3	\leq	150741.749449
101	-324.5913 x_1	-	0.0223 x_2	-	141.3114 x_3	\geq	-135336.961251
102	318.99832 x_1	+	22.76514 x_2	+	118.8992 x_3	\leq	135656.536433
103	320.0461 x_1	+	15.8149 x_2	+	128.3378 x_3	\leq	135218.850649
104	330.6278 x_1	+	15.2339 x_2	+	134.6958 x_3	\leq	139689.336586
105	37.2205 x_1	+	109.6236 x_2	+	146.4117 x_3	\leq	89753.9237695
106	44.8442 x_1	+	113.60486 x_2	+	154.72716 x_3	\leq	94504.0005526
107	-47.0299 x_1	-	117.7208 x_2	-	160.0942 x_3	\geq	-97890.4219841
108	35.7111 x_1	+	107.85024 x_2	+	133.02496 x_3	\leq	84655.5051327
109	57.2726 x_1	+	128.28379 x_2	+	170.72907 x_3	\leq	105934.953318
110	28.8275 x_1	+	101.61078 x_2	+	168.8435 x_3	\leq	94718.0406165
111	-43.6499 x_1	-	102.22856 x_2	-	178.57943 x_3	\geq	-99729.3703236
112	-37.7676 x_1	-	94.96768 x_2	-	179.05068 x_3	\geq	-97561.2318528
113	44.4736 x_1	+	103.51848 x_2	+	181.51944 x_3	\leq	101274.288239
114	87.9444 x_1	+	85.8709 x_2	+	246.6625 x_3	\leq	128108.627075
115	-105.6986 x_1	-	83.6204 x_2	-	259.6346 x_3	\geq	-135336.507094
116	-110.0917 x_1	-	178.22 x_2	-	210.3216 x_3	\geq	-142489.582049
117	300.5438 x_1	+	184.7431 x_2	+	235.8887 x_3	\leq	196495.536349
118	-307.1504 x_1	-	190.4113 x_2	-	295.548 x_3	\geq	-212308.26101
119	-166.0621 x_1	-	110.3927 x_2	-	291.546 x_3	\geq	-162182.324721
120	151.754 x_1	+	94.517 x_2	+	282.9615 x_3	\leq	153546.491415
121	173.2415 x_1	+	111.3295 x_2	+	303.891 x_3	\leq	168362.010495
122	-163.9736 x_1	-	82.6766 x_2	-	275.702 x_3	\geq	-150661.80434
123	-186.8064 x_1	-	99.4486 x_2	-	296.5252 x_3	\geq	-165654.89602
124	259.5879 x_1	+	105.3616 x_2	+	307.8044 x_3	\leq	184887.296597
125	-260.8697 x_1	-	106.2348 x_2	-	308.5432 x_3	\geq	-185579.984471
126	266.0711 x_1	+	95.0276 x_2	+	299.5998 x_3	\leq	181449.787549
127	-267.4441 x_1	-	96.0106 x_2	-	300.0956 x_3	\geq	-182093.180521
128	195.404 x_1	+	102.153 x_2	+	301.198 x_3	\leq	169477.7565

129	212.1678	x_1	+	117.48	x_2	+	304.9688	x_3	\leq	176802.15697
130	-221.2604	x_1	-	85.3142	x_2	-	297.932	x_3	\geq	-170157.57686
131	-238.9698	x_1	-	100.3632	x_2	-	301.5208	x_3	\geq	-177542.925254
132	-333.185	x_1	-	145.875	x_2	-	216.08	x_3	\geq	-190113.1317
133	322.9585	x_1	+	163.86	x_2	+	228.2755	x_3	\leq	194780.12652
134	-328.1817	x_1	-	164.8984	x_2	-	235.0611	x_3	\geq	-197790.247024
135	332.4799	x_1	+	162.8675	x_2	+	238.3934	x_3	\leq	198941.272574
136	322.76524	x_1	+	145.22937	x_2	+	206.1587	x_3	\leq	185208.552853
137	-311.59629	x_1	-	145.84754	x_2	-	194.9782	x_3	\geq	-180494.862727
138	315.27421	x_1	+	143.67066	x_2	+	197.7521	x_3	\leq	181204.959458
139	-312.5804	x_1	-	163.3371	x_2	-	218.3782	x_3	\geq	-189937.066788
140	306.1489	x_1	+	167.123	x_2	+	213.3253	x_3	\leq	188665.787993
141	-300.38535	x_1	-	164.87636	x_2	-	207.6058	x_3	\geq	-185270.567555
142	-334.3594	x_1	-	67.7615	x_2	-	277.049	x_3	\geq	-185153.061212
143	-350.982	x_1	-	83.1297	x_2	-	276.7325	x_3	\geq	-192122.266933
144	350.8895	x_1	+	51.744	x_2	+	257.5135	x_3	\leq	180796.5927
145	-360.0088	x_1	-	58.8655	x_2	-	256.1715	x_3	\geq	-184127.087059
146	340.6456	x_1	+	73.71	x_2	+	275.2555	x_3	\leq	187214.550118
147	-346.0131	x_1	-	77.5597	x_2	-	279.5892	x_3	\geq	-190640.838917
148	360.9397	x_1	+	92.5341	x_2	+	275.5907	x_3	\leq	196374.982237
149	356.206	x_1	+	85.7117	x_2	+	280.8457	x_3	\leq	195238.834945
150	307.943	x_1	+	190.5311	x_2	+	297.1086	x_3	\leq	212943.782056
151	-313.0197	x_1	-	187.4226	x_2	-	301.7636	x_3	\geq	-214537.005105
152	335.8466	x_1	+	176.3623	x_2	+	280.1155	x_3	\leq	212180.867908
153	-353.739	x_1	-	156.7233	x_2	-	268.9093	x_3	\geq	-208974.370844
154	658.48848	x_1	+	1104.31596	x_2	+	878.42055	x_3	\leq	791653.156271
155	-76.4357	x_1	-	127.1959	x_2	-	101.359	x_3	\geq	-91312.214312
156	647.87366	x_1	+	1080.67199	x_2	+	835.15285	x_3	\leq	772857.245841
157	155.8021	x_1	+	253.5857	x_2	+	197.399	x_3	\leq	182206.992076
158	-74.3501	x_1	-	121.3721	x_2	-	94.277	x_3	\geq	-87146.614556
159	-97.7231	x_1	-	163.1171	x_2	-	147.553	x_3	\geq	-119502.387507
160	91.3244	x_1	+	155.3047	x_2	+	142.1313	x_3	\leq	113758.889697
161	-85.0994	x_1	-	145.4587	x_2	-	131.6954	x_3	\geq	-106225.490338
162	486.3761	x_1	+	882.57596	x_2	+	779.97259	x_3	\leq	636394.040121
163	76.7633	x_1	+	138.3818	x_2	+	123.862	x_3	\leq	100121.842612
164	-44.1761	x_1	-	110.42701	x_2	-	103.33769	x_3	\geq	-79066.3019237
165	-50.9937	x_1	-	186.92656	x_2	-	165.11605	x_3	\geq	-130795.496102
166	78.0672	x_1	+	185.25981	x_2	+	161.32335	x_3	\leq	131404.155458
167	-87.9593	x_1	-	147.7258	x_2	-	132.2771	x_3	\geq	-107898.522562
168	93.3499	x_1	+	156.5312	x_2	+	140.2102	x_3	\leq	114364.294121
169	113.9738	x_1	+	176.8294	x_2	+	167.3154	x_3	\leq	132368.10723
170	-179.96212	x_1	-	191.11158	x_2	-	173.2974	x_3	\geq	-155362.756434
171	184.8948	x_1	+	195.8732	x_2	+	178.016	x_3	\leq	159400.332452

172	166.11632	x_1	+	189.58592	x_2	+	168.9472	x_3	\leq	150430.254678
173	-170.0232	x_1	-	194.2328	x_2	-	173.3424	x_3	\geq	-154101.491096
174	202.3312	x_1	+	203.36	x_2	+	200.904	x_3	\leq	170308.446448
175	223.0272	x_1	+	199.176	x_2	+	203.136	x_3	\leq	174595.399248
176	-219.02868	x_1	-	199.92315	x_2	-	193.0458	x_3	\geq	-172574.168265
177	212.97851	x_1	+	195.99575	x_2	+	187.7476	x_3	\leq	168508.566711
178	-41.7778	x_1	-	73.82416	x_2	-	192.39829	x_3	\geq	-98429.8085691
179	3.938	x_1	+	67.2049	x_2	+	175.23804	x_3	\leq	87027.150113
180	-25.2572	x_1	-	59.46142	x_2	-	177.96733	x_3	\geq	-88175.8679801
181	32.3172	x_1	+	63.43338	x_2	+	185.92095	x_3	\leq	92846.1914355
182	-347.3537	x_1	-	93.80485	x_2	-	181.9353	x_3	\geq	-173391.669857
183	354.7947	x_1	+	113.327	x_2	+	209.5202	x_3	\leq	185616.735521
184	335.1351	x_1	+	91.81176	x_2	+	167.866	x_3	\leq	166942.86356
185	341.73974	x_1	+	94.42472	x_2	+	174.4036	x_3	\leq	170809.548174
186	329.24166	x_1	+	106.48473	x_2	+	128.2843	x_3	\leq	166267.012173
187	-328.13399	x_1	-	120.12064	x_2	-	181.4599	x_3	\geq	-175507.160909
188	335.22135	x_1	+	120.19328	x_2	+	190.7279	x_3	\leq	178918.215001
189	-336.59518	x_1	-	116.60563	x_2	-	192.0821	x_3	\geq	-178290.712696
190	343.4401	x_1	+	14.0092	x_2	+	168.2964	x_3	\leq	149331.857681
191	340.4694	x_1	+	9.366	x_2	+	171.3594	x_3	\leq	148140.846042
192	-350.4326	x_1	-	11.0006	x_2	-	176.3562	x_3	\geq	-152712.747928
193	-329.5837	x_1	+	7.1686	x_2	-	149.9599	x_3	\geq	-137366.640515
194	322.7784	x_1	-	4.5033	x_2	+	143.4799	x_3	\leq	134301.391401
195	-332.478	x_1	+	2.0636	x_2	-	147.7527	x_3	\geq	-138784.395204
196	-352.4305	x_1	-	15.7645	x_2	-	172.6632	x_3	\geq	-153498.175487
197	325.216	x_1	+	3.9322	x_2	+	138.7622	x_3	\leq	135883.60218
198	334.1064	x_1	+	2.2126	x_2	+	145.3842	x_3	\leq	139708.230444
199	-354.5331	x_1	-	20.6283	x_2	-	169.6986	x_3	\geq	-154613.955165
200	345.9165	x_1	+	18.0285	x_2	+	165.6646	x_3	\leq	150443.360011
201	357.8441	x_1	+	39.1668	x_2	+	227.7206	x_3	\leq	172214.451468
202	-355.8938	x_1	-	19.0306	x_2	-	206.2015	x_3	\geq	-162702.032993
203	-353.5497	x_1	-	23.7531	x_2	-	198.5083	x_3	\geq	-160914.560746
204	326.9986	x_1	+	17.8079	x_2	+	130.9433	x_3	\leq	138536.762704
205	-315.82837	x_1	-	18.52148	x_2	-	123.7522	x_3	\geq	-133837.477257
206	-322.80046	x_1	-	20.33034	x_2	-	126.2976	x_3	\geq	-137132.214279
207	-333.4673	x_1	-	38.6371	x_2	-	146.7552	x_3	\geq	-148060.929884
208	365.9985	x_1	+	85.7283	x_2	+	198.933	x_3	\leq	179538.946314
209	-362.2979	x_1	-	132.6361	x_2	-	243.561	x_3	\geq	-199460.971764
210	360.2369	x_1	+	139.0195	x_2	+	241.699	x_3	\leq	200457.279548
211	-354.4175	x_1	-	137.5166	x_2	-	236.3683	x_3	\geq	-197218.749561
212	-362.6212	x_1	-	113.8396	x_2	-	218.0654	x_3	\geq	-189640.90974
213	362.2884	x_1	+	108.6714	x_2	+	218.352	x_3	\leq	187979.114442
214	-369.6993	x_1	-	109.5677	x_2	-	225.3612	x_3	\geq	-191824.155638

215	-53.3656 x_1	-	123.09215 x_2	-	169.42109 x_3	\geq	-103405.415899
216	51.6062 x_1	+	121.85339 x_2	+	154.82652 x_3	\leq	97962.7588662
217	44.2053 x_1	+	112.13824 x_2	+	141.5056 x_3	\leq	89565.5936669
218	-46.3074 x_1	-	115.94398 x_2	-	146.05132 x_3	\geq	-92570.603891
219	-43.3049 x_1	-	111.72604 x_2	-	146.9855 x_3	\geq	-91133.8180675
220	47.5619 x_1	+	117.48064 x_2	+	155.50418 x_3	\leq	96302.3752321
221	-50.9752 x_1	-	121.83355 x_2	-	160.54177 x_3	\geq	-99768.9684671
222	-37.304 x_1	-	102.9572 x_2	-	120.6272 x_3	\geq	-79118.829424
223	100.4723 x_1	+	169.8069 x_2	+	198.5835 x_3	\leq	134597.791872
224	224.3615 x_1	+	212.0763 x_2	+	233.372 x_3	\leq	184908.865107
225	-197.901 x_1	-	213.7314 x_2	-	226.636 x_3	\geq	-177691.188706
226	199.7054 x_1	+	457.33083 x_2	+	472.36379 x_3	\leq	337138.942815
227	-174.2832 x_1	-	395.83407 x_2	-	407.59332 x_3	\geq	-291631.618724
228	278.2124 x_1	+	199.6261 x_2	+	241.4996 x_3	\leq	196298.656891
229	-256.8557 x_1	-	210.796 x_2	-	244.1969 x_3	\geq	-195009.263617
230	264.5091 x_1	+	211.2659 x_2	+	256.1588 x_3	\leq	199435.84871
231	257.6669 x_1	+	208.8616 x_2	+	249.7142 x_3	\leq	195470.437015
232	-295.2601 x_1	-	197.5787 x_2	-	263.7176 x_3	\geq	-204354.697574
233	-299.7321 x_1	-	200.4691 x_2	-	267.7096 x_3	\geq	-207413.317886
234	320.179 x_1	+	185.1706 x_2	+	261.2952 x_3	\leq	206765.77494
235	-317.5795 x_1	-	185.0249 x_2	-	256.5728 x_3	\geq	-205087.53665
236	-275.8785 x_1	-	199.27 x_2	-	237.103 x_3	\geq	-194790.41288
237	266.7185 x_1	+	200.5192 x_2	+	229.2973 x_3	\leq	191417.621373
238	294.4082 x_1	+	185.1534 x_2	+	230.9462 x_3	\leq	194053.080082
239	260.7875 x_1	+	197.7294 x_2	+	221.1953 x_3	\leq	187403.521513
240	-261.1591 x_1	-	198.0374 x_2	-	221.5845 x_3	\geq	-187691.017485
241	-290.069 x_1	-	184.758 x_2	-	223.289 x_3	\geq	-191524.40029
242	283.31 x_1	+	186.1098 x_2	+	217.8626 x_3	\leq	189250.145146
243	-300.3025 x_1	-	197.9712 x_2	-	278.361 x_3	\geq	-208890.814351
244	302.7375 x_1	+	199.4174 x_2	+	280.9423 x_3	\leq	210602.905594
245	-277.4354 x_1	-	208.86 x_2	-	279.8236 x_3	\geq	-206843.837686
246	-280.0809 x_1	-	210.2701 x_2	-	282.4535 x_3	\geq	-208610.36534
247	332.1953 x_1	+	96.9299 x_2	+	292.746 x_3	\leq	194833.062447
248	-321.8823 x_1	-	88.5345 x_2	-	292.696 x_3	\geq	-190731.777609
249	158.8497 x_1	+	199.6836 x_2	+	256.6848 x_3	\leq	171601.277109
250	-223.8282 x_1	-	131.5718 x_2	-	308.6386 x_3	\geq	-183157.118644
251	333.0559 x_1	+	176.7795 x_2	+	284.0642 x_3	\leq	212389.699654
252	-334.7192 x_1	-	176.8902 x_2	-	287.0133 x_3	\geq	-213565.243218
253	-311.8065 x_1	-	190.8563 x_2	-	288.8866 x_3	\geq	-212070.933448
254	313.347 x_1	+	191.0518 x_2	+	291.8597 x_3	\leq	213244.811576
255	339.2578 x_1	+	167.6624 x_2	+	293.7948 x_3	\leq	213723.715018
256	339.8388 x_1	+	169.4403 x_2	+	291.3507 x_3	\leq	213801.132492
257	-342.0474 x_1	-	163.0574 x_2	-	296.1692 x_3	\geq	-213780.572504

258	358.9263	x_1	+	144.9976	x_2	+	285.9775	x_3	\leq	210979.97533
259	-358.7694	x_1	-	147.8315	x_2	-	280.4428	x_3	\geq	-210403.502445
260	358.5615	x_1	+	149.6277	x_2	+	280.2456	x_3	\leq	210804.907014
261	-217.2297	x_1	-	389.40842	x_2	-	338.79839	x_3	\geq	-280359.792962
262	-84.0596	x_1	-	142.3331	x_2	-	125.3657	x_3	\geq	-103505.008384
263	75.6048	x_1	+	135.509	x_2	+	117.8861	x_3	\leq	97561.64283
264	670.75498	x_1	+	1173.57703	x_2	+	998.3788	x_3	\leq	844284.343687
265	-482.83914	x_1	-	856.430178	x_2	-	736.74243	x_3	\geq	-616210.400019
266	1356.93818	x_1	+	2429.653458	x_2	+	2109.32011	x_3	\leq	1748841.69349
267	-430.9203	x_1	-	772.38336	x_2	-	671.88591	x_3	\geq	-556078.114463
268	190.272	x_1	+	208.058	x_2	+	213.7654	x_3	\leq	171190.418576
269	192.9495	x_1	+	210.4917	x_2	+	225.349	x_3	\leq	174911.783173
270	-140.124	x_1	-	179.35616	x_2	-	147.7824	x_3	\geq	-136636.959459
271	128.41488	x_1	+	172.188	x_2	+	127.7904	x_3	\leq	128284.329821
272	-127.2465	x_1	-	184.6296	x_2	-	177.3678	x_3	\geq	-140320.900824
273	130.2765	x_1	+	187.5282	x_2	+	179.1086	x_3	\leq	142544.579668
274	110.6599	x_1	+	173.6591	x_2	+	158.8771	x_3	\leq	128779.504889
275	-124.3419	x_1	-	180.9587	x_2	-	168.3937	x_3	\geq	-136492.244435
276	-121.6512	x_1	-	175.7062	x_2	-	155.257	x_3	\geq	-131414.108284
277	-277.7605	x_1	-	372.7208	x_2	-	335.4501	x_3	\geq	-284018.312347
278	132.732	x_1	+	178.522	x_2	+	160.375	x_3	\leq	135925.44784
279	86.575	x_1	+	144.9182	x_2	+	120.0425	x_3	\leq	104471.634857
280	-89.5991	x_1	-	146.4862	x_2	-	118.7026	x_3	\geq	-105684.622039
281	98.3633	x_1	+	151.5784	x_2	+	124.4762	x_3	\leq	110708.736241
282	90.9125	x_1	+	151.0911	x_2	+	126.8725	x_3	\leq	109272.760236
283	-86.6355	x_1	-	144.3738	x_2	-	121.509	x_3	\geq	-104407.240758
284	-169.7174	x_1	-	284.0117	x_2	-	244.0208	x_3	\geq	-205952.776948
285	-202.93335	x_1	-	190.19445	x_2	-	179.2601	x_3	\geq	-162133.940057
286	209.3252	x_1	+	193.708	x_2	+	184.849	x_3	\leq	166126.522048
287	-189.5444	x_1	-	197.91635	x_2	-	181.5745	x_3	\geq	-162006.308098
288	-195.5898	x_1	-	201.634	x_2	-	187.205	x_3	\geq	-165995.564722
289	-31.6786	x_1	-	75.65798	x_2	-	181.08309	x_3	\geq	-93345.5313661
290	41.0198	x_1	+	76.5437	x_2	+	190.83217	x_3	\leq	98290.4829117
291	-50.3029	x_1	-	87.9642	x_2	-	201.30983	x_3	\geq	-105862.239813
292	-354.4289	x_1	-	116.7817	x_2	-	208.9087	x_3	\geq	-186521.697033
293	-336.0832	x_1	-	143.0224	x_2	-	218.356	x_3	\geq	-190371.399016
294	345.287	x_1	+	118.28	x_2	+	199.8163	x_3	\leq	182746.202475
295	345.8012	x_1	+	115.594	x_2	+	200.4735	x_3	\leq	182101.964455
296	-345.1266	x_1	-	141.4868	x_2	-	227.5518	x_3	\geq	-194114.456382
297	342.8496	x_1	+	144.3908	x_2	+	225.7258	x_3	\leq	194082.939842
298	334.0812	x_1	+	6.1105	x_2	+	142.4414	x_3	\leq	139992.755963
299	-324.63348	x_1	-	7.54853	x_2	-	135.7339	x_3	\geq	-135965.571452
300	-333.06311	x_1	-	9.758	x_2	-	139.1201	x_3	\geq	-139912.932

301	-346.1463	x_1	-	22.0833	x_2	-	162.6012	x_3	\geq	-150826.662225
302	-366.1053	x_1	-	42.3851	x_2	-	232.9601	x_3	\geq	-176596.026728
303	-369.9808	x_1	-	69.8768	x_2	-	257.0213	x_3	\geq	-189258.283779
304	363.7396	x_1	+	62.9263	x_2	+	252.7512	x_3	\leq	184974.171742
305	-360.9523	x_1	-	34.924	x_2	-	195.1227	x_3	\geq	-164624.685512
306	-369.948	x_1	-	75.7664	x_2	-	209.141	x_3	\geq	-179738.291764
307	-379.8657	x_1	-	84.8313	x_2	-	252.2637	x_3	\geq	-194091.690915
308	-375.3769	x_1	-	75.449	x_2	-	253.9358	x_3	\geq	-191121.161841
309	356.7445	x_1	+	90.36	x_2	+	189.8198	x_3	\leq	176525.235209
310	-346.91405	x_1	-	88.9308	x_2	-	182.3857	x_3	\geq	-171731.345516
311	-338.7838	x_1	-	33.6901	x_2	-	149.8174	x_3	\geq	-149067.554562
312	344.1395	x_1	+	39.8348	x_2	+	151.5311	x_3	\leq	152798.385444
313	353.3131	x_1	+	58.2764	x_2	+	171.4979	x_3	\leq	163568.729744
314	-363.1264	x_1	-	56.9604	x_2	-	181.888	x_3	\geq	-168111.755336
315	367.5743	x_1	+	107.8955	x_2	+	224.153	x_3	\leq	190429.22682
316	-374.594	x_1	-	77.77	x_2	-	211.6849	x_3	\geq	-182259.122466
317	-369.3175	x_1	-	84.8753	x_2	-	203.865	x_3	\geq	-181167.284494
318	366.663	x_1	+	78.439	x_2	+	202.9482	x_3	\leq	178330.599308
319	-354.072	x_1	-	155.7944	x_2	-	268.7928	x_3	\geq	-208767.9352
320	-357.4567	x_1	-	153.3677	x_2	-	271.4752	x_3	\geq	-209624.961606
321	-32.9619	x_1	-	108.16672	x_2	-	158.70816	x_3	\geq	-93237.0763387
322	42.558	x_1	+	111.56476	x_2	+	160.0919	x_3	\leq	95528.5821994
323	-59.0654	x_1	-	131.11123	x_2	-	175.35903	x_3	\geq	-108609.340989
324	-57.0464	x_1	-	127.78873	x_2	-	175.14367	x_3	\geq	-107242.751644
325	-95.6127	x_1	-	165.0105	x_2	-	194.2059	x_3	\geq	-130862.281596
326	47.6567	x_1	+	95.97338	x_2	+	187.20869	x_3	\leq	101822.404231
327	49.4619	x_1	+	89.03892	x_2	+	199.16577	x_3	\leq	105155.386154
328	39.3965	x_1	+	86.11598	x_2	+	183.62371	x_3	\leq	97351.080415
329	-40.1695	x_1	-	85.60394	x_2	-	185.85921	x_3	\geq	-98196.119125
330	-72.4938	x_1	-	86.9379	x_2	-	232.4985	x_3	\geq	-120676.090173
331	-87.7608	x_1	-	86.7525	x_2	-	246.2991	x_3	\geq	-128103.286359
332	-246.6609	x_1	-	214.0265	x_2	-	271.0596	x_3	\geq	-198944.272452
333	248.7208	x_1	+	215.3104	x_2	+	274.4252	x_3	\leq	200680.717192
334	269.7132	x_1	+	206.7708	x_2	+	272.8944	x_3	\leq	202579.574304
335	273.0136	x_1	+	207.3184	x_2	+	276.0912	x_3	\leq	204328.861192
336	210.342	x_1	+	213.483	x_2	+	250.9056	x_3	\leq	185508.366756
337	188.2193	x_1	+	212.4081	x_2	+	254.246	x_3	\leq	181052.144578
338	-183.923	x_1	-	199.9825	x_2	-	267.4501	x_3	\geq	-179473.830945
339	212.0941	x_1	+	213.2721	x_2	+	263.8156	x_3	\leq	188889.205298
340	-216.1345	x_1	-	215.9125	x_2	-	265.8402	x_3	\geq	-191242.174952
341	-243.7265	x_1	-	212.7865	x_2	-	273.1142	x_3	\geq	-198286.043352
342	244.4278	x_1	+	210.6387	x_2	+	280.4218	x_3	\leq	199519.058693
343	284.5046	x_1	+	201.482	x_2	+	298.0071	x_3	\leq	210633.249205

344	-283.2785	x_1	-	201.9071	x_2	-	296.8138	x_3	\geq	-210150.686624
345	-428.2114	x_1	-	431.6938	x_2	-	504.7056	x_3	\geq	-375175.940168
346	-237.325	x_1	-	216.6854	x_2	-	258.7202	x_3	\geq	-194900.03825
347	469.4575	x_1	+	431.5811	x_2	+	518.5768	x_3	\leq	388061.0787
348	-234.2329	x_1	-	217.1299	x_2	-	249.0823	x_3	\geq	-192360.520315
349	-228.1342	x_1	-	212.6197	x_2	-	242.7148	x_3	\geq	-187820.362552
350	186.0634	x_1	+	212.566	x_2	+	241.7306	x_3	\leq	177656.992618
351	-182.7492	x_1	-	209.563	x_2	-	238.9278	x_3	\geq	-175142.661034
352	-160.4401	x_1	-	203.557	x_2	-	251.0393	x_3	\geq	-171607.362109
353	155.5023	x_1	+	199.326	x_2	+	243.8547	x_3	\leq	167196.892755
354	-365.7775	x_1	-	416.9535	x_2	-	502.192	x_3	\geq	-355401.82907
355	57.5364	x_1	+	99.60108	x_2	+	209.57022	x_3	\leq	112513.705367
356	-134.7544	x_1	-	190.6556	x_2	-	238.0896	x_3	\geq	-158913.194264
357	154.7502	x_1	+	194.6283	x_2	+	250.2408	x_3	\leq	167259.186942
358	-66.4566	x_1	-	137.9264	x_2	-	186.526	x_3	\geq	-115374.762494
359	-66.0606	x_1	-	137.22184	x_2	-	190.95144	x_3	\geq	-116613.418272
360	64.2756	x_1	+	134.4124	x_2	+	186.29336	x_3	\leq	113923.288758
361	-97.448	x_1	-	167.7102	x_2	-	202.4616	x_3	\geq	-134520.18276
362	-91.4283	x_1	-	156.2201	x_2	-	144.6861	x_3	\geq	-114660.013621
363	95.363	x_1	+	162.0005	x_2	+	152.008	x_3	\leq	119361.214695
364	-88.2908	x_1	-	153.1796	x_2	-	143.0891	x_3	\geq	-112420.725171
365	77.1391	x_1	+	148.1477	x_2	+	155.9883	x_3	\leq	111362.802139
366	-85.6241	x_1	-	156.4355	x_2	-	160.0558	x_3	\geq	-117054.89856
367	86.0696	x_1	+	155.3236	x_2	+	165.5506	x_3	\leq	117965.995474
368	84.0549	x_1	+	157.869	x_2	+	182.7306	x_3	\leq	123327.305496
369	-61.9738	x_1	-	138.63083	x_2	-	135.86391	x_3	\geq	-100752.618119
370	151.0258	x_1	+	325.66291	x_2	+	321.36151	x_3	\leq	237514.068537
371	33.7588	x_1	+	77.6075	x_2	+	77.9431	x_3	\leq	56715.0804588
372	-77.5466	x_1	-	167.82407	x_2	-	166.20795	x_3	\geq	-122498.97049
373	288.338	x_1	+	198.24	x_2	+	252.8381	x_3	\leq	200606.252594
374	-294.1888	x_1	-	199.3839	x_2	-	257.9227	x_3	\geq	-203612.93104
375	-286.529	x_1	-	198.406	x_2	-	248.6293	x_3	\geq	-199422.903632
376	312.2762	x_1	+	185.8641	x_2	+	252.2253	x_3	\leq	203040.53993
377	309.1552	x_1	+	185.5815	x_2	+	246.729	x_3	\leq	201087.659098
378	-304.3349	x_1	-	184.9369	x_2	-	242.833	x_3	\geq	-198769.209011
379	-231.6369	x_1	-	203.9762	x_2	-	212.7537	x_3	\geq	-180344.889557
380	241.3419	x_1	+	204.5926	x_2	+	221.3505	x_3	\leq	184562.282785
381	-246.5085	x_1	-	207.2308	x_2	-	228.9777	x_3	\geq	-188225.896117
382	-451.8321	x_1	-	423.0697	x_2	-	460.7371	x_3	\geq	-369129.891711
383	491.0367	x_1	+	417.2924	x_2	+	467.6007	x_3	\leq	378536.228987
384	261.5454	x_1	+	120.2664	x_2	+	309.6992	x_3	\leq	188828.190034
385	236.2737	x_1	+	135.2088	x_2	+	311.9426	x_3	\leq	187528.910929
386	-244.851	x_1	-	144.6003	x_2	-	309.7492	x_3	\geq	-190444.275869

387	-250.2726	x_1	-	147.3991	x_2	-	315.1884	x_3	\geq	-194072.148225
388	336.0127	x_1	+	100.1405	x_2	+	296.1166	x_3	\leq	197477.477875
389	-342.1045	x_1	-	105.9377	x_2	-	294.6802	x_3	\geq	-199730.661025
390	344.3835	x_1	+	115.0829	x_2	+	296.6617	x_3	\leq	202817.046677
391	-305.4688	x_1	-	77.8674	x_2	-	292.0736	x_3	\geq	-184786.08252
392	-318.4182	x_1	-	88.0746	x_2	-	292.8971	x_3	\geq	-189880.105077
393	285.2988	x_1	+	99.8402	x_2	+	304.9367	x_3	\leq	188429.659129
394	297.886	x_1	+	110.5094	x_2	+	305.9897	x_3	\leq	193600.572631
395	-350.0209	x_1	-	119.9243	x_2	-	296.2979	x_3	\geq	-205218.731795
396	85.2407	x_1	+	149.2934	x_2	+	139.5944	x_3	\leq	109460.102064
397	-79.0409	x_1	-	141.9363	x_2	-	132.0203	x_3	\geq	-103617.497123
398	-74.0739	x_1	-	135.9417	x_2	-	122.8785	x_3	\geq	-98349.102969
399	75.5953	x_1	+	137.2579	x_2	+	126.8003	x_3	\leq	99912.419771
400	1075.7177	x_1	+	2161.80667	x_2	+	2042.43004	x_3	\leq	1566218.52564
401	-151.641	x_1	-	185.214	x_2	-	165.1225	x_3	\geq	-144212.88608
402	-155.3245	x_1	-	189.113	x_2	-	169.8185	x_3	\geq	-147519.448145
403	164.1087	x_1	+	192.1999	x_2	+	173.079	x_3	\leq	151581.219943
404	167.3848	x_1	+	196.828	x_2	+	178.2288	x_3	\leq	155175.661368
405	193.9431	x_1	+	209.7304	x_2	+	212.9768	x_3	\leq	172681.221532
406	-213.2596	x_1	-	209.5626	x_2	-	218.3514	x_3	\geq	-178458.630614
407	211.91	x_1	+	210.9408	x_2	+	212.73	x_3	\leq	177812.6473
408	-171.8518	x_1	-	201.0814	x_2	-	184.2484	x_3	\geq	-159031.71735
409	-185.7714	x_1	-	203.5919	x_2	-	199.9484	x_3	\geq	-165915.188242
410	-162.7107	x_1	-	201.5855	x_2	-	191.9885	x_3	\geq	-158133.016954
411	306.4435	x_1	+	386.3791	x_2	+	352.8897	x_3	\leq	299519.224814
412	158.1749	x_1	+	193.9627	x_2	+	175.7305	x_3	\leq	151224.849964
413	141.7818	x_1	+	182.4888	x_2	+	155.6065	x_3	\leq	139370.590676
414	-137.72163	x_1	-	178.50383	x_2	-	149.8794	x_3	\geq	-135832.548979
415	112.77927	x_1	+	156.7953	x_2	+	108.0585	x_3	\leq	115069.494108
416	123.47325	x_1	+	166.33146	x_2	+	123.3087	x_3	\leq	123765.85171
417	-147.2671	x_1	-	191.3208	x_2	-	187.2359	x_3	\geq	-149269.600542
418	-147.2046	x_1	-	194.0253	x_2	-	183.3354	x_3	\geq	-149792.335167
419	160.1334	x_1	+	199.5115	x_2	+	191.0995	x_3	\leq	156462.384758
420	-167.7253	x_1	-	205.4784	x_2	-	205.0723	x_3	\geq	-163166.211296
421	-121.6714	x_1	-	176.784	x_2	-	159.1345	x_3	\geq	-132506.830933
422	124.4353	x_1	+	178.9591	x_2	+	159.6268	x_3	\leq	134180.962853
423	127.6423	x_1	+	183.552	x_2	+	169.1653	x_3	\leq	138489.279166
424	141.8421	x_1	+	188.4767	x_2	+	176.951	x_3	\leq	145065.614071
425	-138.0293	x_1	-	186.2891	x_2	-	168.638	x_3	\geq	-141918.941353
426	115.4271	x_1	+	171.5087	x_2	+	148.322	x_3	\leq	127103.920277
427	107.7123	x_1	+	164.5976	x_2	+	141.4478	x_3	\leq	121212.244958
428	-102.7833	x_1	-	157.4418	x_2	-	134.6307	x_3	\geq	-115799.69028
429	-101.7268	x_1	-	155.7402	x_2	-	128.5214	x_3	\geq	-113962.484202

430	112.2631	x_1	+	168.5127	x_2	+	142.644	x_3	\leq	124220.960237
431	-105.0196	x_1	-	158.8986	x_2	-	134.267	x_3	\geq	-116924.010714
432	96.3462	x_1	+	159.0008	x_2	+	140.8628	x_3	\leq	116195.882722
433	-105.5466	x_1	-	167.4044	x_2	-	149.6064	x_3	\geq	-123332.986126
434	89.7506	x_1	+	149.3996	x_2	+	130.034	x_3	\leq	108670.570786
435	182.2234	x_1	+	303.1945	x_2	+	263.4337	x_3	\leq	220483.110506
436	108.4012	x_1	+	169.7932	x_2	+	150.2718	x_3	\leq	125127.407786
437	-103.6088	x_1	-	162.7265	x_2	-	143.1959	x_3	\geq	-119738.570242
438	376.6209	x_1	+	86.5503	x_2	+	246.1605	x_3	\leq	192068.135445
439	381.0753	x_1	+	91.3125	x_2	+	248.9316	x_3	\leq	195192.05817
440	377.472	x_1	+	76.0194	x_2	+	215.664	x_3	\leq	183469.552704
441	372.534	x_1	+	71.0488	x_2	+	213.1024	x_3	\leq	180124.902512
442	379.0256	x_1	+	69.8856	x_2	+	220.8528	x_3	\leq	183466.017664
443	-377.0661	x_1	-	92.9471	x_2	-	241.9558	x_3	\geq	-192816.613484
444	365.5209	x_1	+	47.7127	x_2	+	225.0745	x_3	\leq	175402.260412
445	362.6413	x_1	+	27.5305	x_2	+	203.5775	x_3	\leq	165605.028616
446	358.8011	x_1	+	29.4351	x_2	+	198.3849	x_3	\leq	163560.83052
447	-367.1904	x_1	-	32.4486	x_2	-	202.9712	x_3	\geq	-167818.456668
448	371.3388	x_1	+	108.0603	x_2	+	271.1725	x_3	\leq	201568.91073
449	376.3416	x_1	+	98.0829	x_2	+	235.8348	x_3	\leq	192651.237072
450	-381.0537	x_1	-	96.0779	x_2	-	244.411	x_3	\geq	-195373.254044
451	374.1268	x_1	+	124.0053	x_2	+	264.2089	x_3	\leq	204777.157905
452	-372.7334	x_1	-	119.6963	x_2	-	263.3683	x_3	\geq	-203019.322175
453	-343.75236	x_1	-	67.68909	x_2	-	162.5624	x_3	\geq	-161874.922509
454	688.09817	x_1	+	119.99596	x_2	+	327.8016	x_3	\leq	319590.226379
455	-328.72641	x_1	-	58.29348	x_2	-	103.3453	x_3	\geq	-148060.262891
456	-336.9669	x_1	-	70.56219	x_2	-	149.9695	x_3	\geq	-159080.152145
457	325.84492	x_1	+	42.07404	x_2	+	138.6308	x_3	\leq	145375.602881
458	672.08249	x_1	+	88.75279	x_2	+	294.3063	x_3	\leq	301213.559663
459	-358.2179	x_1	-	60.9835	x_2	-	173.6536	x_3	\geq	-166332.661978
460	-354.4606	x_1	-	61.8138	x_2	-	168.8615	x_3	\geq	-164630.930771
461	-359.1459	x_1	-	84.0445	x_2	-	194.8636	x_3	\geq	-176105.834638
462	355.3732	x_1	+	84.6909	x_2	+	189.7637	x_3	\leq	174305.411693
463	-354.3471	x_1	-	25.1689	x_2	-	166.2998	x_3	\geq	-154933.933397
464	345.0925	x_1	+	26.0972	x_2	+	159.2743	x_3	\leq	150813.305484
465	362.4282	x_1	+	45.0721	x_2	+	188.4374	x_3	\leq	166010.013044
466	-368.8194	x_1	-	49.6837	x_2	-	191.5118	x_3	\geq	-169786.281668
467	50.8642	x_1	+	120.72453	x_2	+	175.30441	x_3	\leq	104487.271769
468	-48.6575	x_1	-	116.35042	x_2	-	169.11476	x_3	\geq	-100728.28525
469	44.9344	x_1	+	110.85536	x_2	+	168.496	x_3	\leq	98508.3956384
470	51.5778	x_1	+	121.81532	x_2	+	143.06431	x_3	\leq	94299.3050722
471	-50.8196	x_1	-	119.92058	x_2	-	137.56509	x_3	\geq	-91880.1558714
472	-43.4552	x_1	-	106.85655	x_2	-	123.16048	x_3	\geq	-81883.1245066

473	-56.4918 x_1	-	128.50212 x_2	-	151.81361 x_3	\geq	-99938.6752182
474	67.8132 x_1	+	140.7716 x_2	+	172.6352 x_3	\leq	112012.954428
475	42.12 x_1	+	108.15288 x_2	+	127.98504 x_3	\leq	83706.2800008
476	-42.5039 x_1	-	109.59197 x_2	-	132.58616 x_3	\geq	-85684.7879221
477	45.3757 x_1	+	111.71724 x_2	+	131.39329 x_3	\leq	86371.240855
478	-48.7506 x_1	-	117.99746 x_2	-	139.13515 x_3	\geq	-91401.4912846
479	46.5668 x_1	+	115.50652 x_2	+	140.52072 x_3	\leq	90689.2608092
480	-49.0882 x_1	-	119.30918 x_2	-	144.7116 x_3	\geq	-93623.2436182
481	213.9203 x_1	+	206.3094 x_2	+	277.3604 x_3	\leq	190444.58314
482	212.6418 x_1	+	212.7918 x_2	+	267.1188 x_3	\leq	189670.766364
483	-219.3074 x_1	-	214.9407 x_2	-	274.7693 x_3	\geq	-193856.665444
484	-188.9776 x_1	-	213.7812 x_2	-	259.12 x_3	\geq	-182943.458456
485	-189.3336 x_1	-	207.6936 x_2	-	268.7499 x_3	\geq	-183497.76843
486	183.6135 x_1	+	204.6795 x_2	+	261.33 x_3	\leq	179270.87961
487	-211.7157 x_1	-	199.3404 x_2	-	285.8655 x_3	\geq	-190193.513826
488	213.4736 x_1	+	202.5074 x_2	+	283.0326 x_3	\leq	190700.00285
489	186.6578 x_1	+	200.6616 x_2	+	276.347 x_3	\leq	182869.121004
490	188.33 x_1	+	203.71 x_2	+	273.6296 x_3	\leq	183355.56302
491	-220.252 x_1	-	207.3837 x_2	-	284.7298 x_3	\geq	-194170.695755
492	-219.989 x_1	-	206.4062 x_2	-	286.6094 x_3	\geq	-194325.96645
493	241.6544 x_1	+	206.3644 x_2	+	292.5112 x_3	\leq	200668.245668
494	-241.4008 x_1	-	205.3396 x_2	-	294.4552 x_3	\geq	-200828.396916
495	-251.87 x_1	-	209.7374 x_2	-	288.1108 x_3	\geq	-202914.966338
496	-252.556 x_1	-	209.5117 x_2	-	290.8904 x_3	\geq	-203728.690849
497	276.436 x_1	+	202.1464 x_2	+	290.681 x_3	\leq	206986.5304
498	278.9731 x_1	+	200.6557 x_2	+	293.0894 x_3	\leq	207735.809152
499	-279.2195 x_1	-	193.9154 x_2	-	301.644 x_3	\geq	-208067.204947
500	246.35 x_1	+	206.7531 x_2	+	300.146 x_3	\leq	203985.329343
501	184.7365 x_1	+	214.16 x_2	+	233.3535 x_3	\leq	176106.463855
502	-202.2826 x_1	-	215.4272 x_2	-	240.1614 x_3	\geq	-182053.275022
503	-197.2586 x_1	-	214.123 x_2	-	232.281 x_3	\geq	-178744.692224
504	203.5426 x_1	+	218.03 x_2	+	239.2371 x_3	\leq	183186.809011
505	-178.98 x_1	-	208.6413 x_2	-	226.296 x_3	\geq	-171122.897385
506	102.3114 x_1	+	101.4865 x_2	+	258.4581 x_3	\leq	137782.115829
507	-140.4859 x_1	-	116.7603 x_2	-	281.3432 x_3	\geq	-155387.328337
508	124.6275 x_1	+	100.9211 x_2	+	276.1953 x_3	\leq	147878.934768
509	120.0498 x_1	+	97.3882 x_2	+	266.7054 x_3	\leq	142742.730936
510	-71.883 x_1	-	89.868 x_2	-	231.445 x_3	\geq	-120764.28101
511	60.1188 x_1	+	87.73214 x_2	+	217.2064 x_3	\leq	113249.011866
512	58.9882 x_1	+	91.73176 x_2	+	215.18142 x_3	\leq	113156.882406
513	-51.8134 x_1	-	100.36241 x_2	-	194.73108 x_3	\geq	-106234.445373
514	-54.984 x_1	-	105.7875 x_2	-	205.50627 x_3	\geq	-112109.220093
515	130.1544 x_1	+	185.7096 x_2	+	232.6378 x_3	\leq	154826.342592

516	109.0776	x_1	+	176.6621	x_2	+	223.9417	x_3	\leq	145840.418478
517	112.0354	x_1	+	180.576	x_2	+	220.0928	x_3	\leq	146478.040282
518	-108.0078	x_1	-	175.4521	x_2	-	214.3702	x_3	\geq	-142351.177656
519	92.8628	x_1	+	162.6756	x_2	+	197.3496	x_3	\leq	130545.34392
520	-68.8653	x_1	-	136.5858	x_2	-	139.2263	x_3	\geq	-101271.697748
521	-74.6131	x_1	-	144.4868	x_2	-	147.9543	x_3	\geq	-107518.722286
522	78.2801	x_1	+	148.1378	x_2	+	150.5128	x_3	\leq	110200.784481
523	99.0554	x_1	+	167.0318	x_2	+	169.5728	x_3	\leq	125846.837194
524	99.0608	x_1	+	168.7376	x_2	+	172.0574	x_3	\leq	127143.001918
525	-89.5295	x_1	-	157.8011	x_2	-	158.7272	x_3	\geq	-117922.200031
526	-90.3352	x_1	-	160.1173	x_2	-	161.9257	x_3	\geq	-119768.491421
527	87.0435	x_1	+	154.4235	x_2	+	155.7549	x_3	\leq	115404.12672
528	-102.4306	x_1	-	172.0465	x_2	-	183.6319	x_3	\geq	-131810.347727
529	113.44	x_1	+	180.4891	x_2	+	194.8915	x_3	\leq	139802.093777
530	-114.5886	x_1	-	183.1992	x_2	-	215.282	x_3	\geq	-146429.55183
531	132.5756	x_1	+	188.76	x_2	+	227.6952	x_3	\leq	154872.385388
532	-138.5379	x_1	-	193.7136	x_2	-	231.9699	x_3	\geq	-158873.553687
533	277.7937	x_1	+	389.388	x_2	+	447.5292	x_3	\leq	314090.037726
534	-311.7043	x_1	-	403.8542	x_2	-	473.1592	x_3	\geq	-332425.2328
535	322.0536	x_1	+	410.2359	x_2	+	479.8749	x_3	\leq	338516.805315
536	132.8355	x_1	+	190.6464	x_2	+	188.2062	x_3	\leq	146140.357776
537	-129.5573	x_1	-	187.416	x_2	-	185.9938	x_3	\geq	-143650.825344
538	-158.51	x_1	-	204.1753	x_2	-	215.88	x_3	\geq	-162713.094785
539	131.6652	x_1	+	187.6758	x_2	+	193.6494	x_3	\leq	145733.303172
540	53.4818	x_1	+	123.58759	x_2	+	141.24114	x_3	\leq	94641.7541677
541	-52.4254	x_1	-	121.30379	x_2	-	135.50922	x_3	\geq	-92010.6464873
542	40.8126	x_1	+	87.80551	x_2	+	86.55165	x_3	\leq	64027.7824128
543	-51.3002	x_1	-	110.17246	x_2	-	111.09132	x_3	\geq	-80894.921761
544	48.3018	x_1	+	103.707	x_2	+	103.34601	x_3	\leq	75872.5441425
545	-129.0695	x_1	-	279.8571	x_2	-	278.38055	x_3	\geq	-204511.308491
546	-52.7154	x_1	-	112.81074	x_2	-	113.3441	x_3	\geq	-82757.906678
547	54.3921	x_1	+	116.44285	x_2	+	117.07968	x_3	\leq	85439.9249671
548	-85.7726	x_1	-	192.28794	x_2	-	195.9608	x_3	\geq	-141299.793927
549	116.0334	x_1	+	258.80547	x_2	+	261.32346	x_3	\leq	189688.358431
550	-238.0194	x_1	-	181.8534	x_2	-	310.3728	x_3	\geq	-198290.607684
551	227.403	x_1	+	177.654	x_2	+	307.098	x_3	\leq	193961.94207
552	226.2096	x_1	+	171.9042	x_2	+	309.8436	x_3	\leq	193197.742122
553	-222.9406	x_1	-	172.9156	x_2	-	305.7567	x_3	\geq	-191410.728291
554	274.7766	x_1	+	131.6654	x_2	+	312.5892	x_3	\leq	194923.890948
555	275.4027	x_1	+	133.1657	x_2	+	313.3413	x_3	\leq	195629.943105
556	-287.514	x_1	-	144.25	x_2	-	314.714	x_3	\geq	-201129.06978
557	-299.9164	x_1	-	114.794	x_2	-	308.1239	x_3	\geq	-195615.519403
558	312.1535	x_1	+	127.5625	x_2	+	309.8885	x_3	\leq	201623.982545

559	-310.8893	x_1	-	124.402	x_2	-	308.5883	x_3	\geq	-200244.894251
560	325.7092	x_1	+	135.3236	x_2	+	308.3076	x_3	\leq	206083.242476
561	-319.7161	x_1	-	134.4719	x_2	-	309.7323	x_3	\geq	-204876.248759
562	-331.1866	x_1	-	140.3678	x_2	-	308.0366	x_3	\geq	-208517.338958
563	330.4793	x_1	+	147.2901	x_2	+	307.499	x_3	\leq	209822.381296
564	-309.1011	x_1	-	182.067	x_2	-	304.5676	x_3	\geq	-212738.909175
565	-283.36	x_1	-	194.828	x_2	-	305.9704	x_3	\geq	-210531.381272
566	-334.9776	x_1	-	152.7026	x_2	-	304.883	x_3	\geq	-211534.364374
567	-312.1095	x_1	-	180.7159	x_2	-	307.403	x_3	\geq	-213893.548978
568	339.9915	x_1	+	159.7183	x_2	+	299.0408	x_3	\leq	213057.430792
569	205.5638	x_1	+	191.8086	x_2	+	290.4276	x_3	\leq	188166.09854
570	59.1195	x_1	+	111.46569	x_2	+	210.05928	x_3	\leq	115689.037405
571	-53.298	x_1	-	108.76986	x_2	-	194.75222	x_3	\geq	-108524.951953
572	-55.725	x_1	-	105.74616	x_2	-	199.04532	x_3	\geq	-109626.702535
573	214.192	x_1	+	158.8561	x_2	+	308.783	x_3	\leq	187376.138401
574	-212.6664	x_1	-	157.7538	x_2	-	306.5868	x_3	\geq	-186049.48437
575	453.5269	x_1	+	839.0413	x_2	+	755.72189	x_3	\leq	605999.080225
576	-100.1649	x_1	-	187.29117	x_2	-	170.04603	x_3	\geq	-135348.16711
577	69.5063	x_1	+	128.4464	x_2	+	115.9345	x_3	\leq	92823.209848
578	-98.8998	x_1	-	190.66638	x_2	-	176.68464	x_3	\geq	-137998.037807
579	-69.6684	x_1	-	131.1735	x_2	-	120.2667	x_3	\geq	-94930.813122
580	-400.6116	x_1	-	757.44423	x_2	-	692.8479	x_3	\geq	-547636.325708
581	501.3639	x_1	+	945.70227	x_2	+	863.92233	x_3	\leq	683706.69457
582	85.8553	x_1	+	153.7868	x_2	+	148.3323	x_3	\leq	113350.198937
583	-77.8107	x_1	-	144.8142	x_2	-	138.5917	x_3	\geq	-106049.865853
584	-89.1807	x_1	-	157.0772	x_2	-	150.3257	x_3	\geq	-115767.305423
585	-85.379	x_1	-	151.4393	x_2	-	142.5176	x_3	\geq	-111033.569307
586	80.0868	x_1	+	143.1606	x_2	+	134.5063	x_3	\leq	104822.972134
587	381.7749	x_1	+	744.59554	x_2	+	694.96952	x_3	\leq	539215.161475
588	-449.5467	x_1	-	883.72222	x_2	-	828.08744	x_3	\geq	-640116.170963
589	124.7388	x_1	+	244.0028	x_2	+	228.8704	x_3	\leq	176862.642076
590	75.7025	x_1	+	141.1473	x_2	+	135.1004	x_3	\leq	103347.771113
591	-133.3788	x_1	-	259.4492	x_2	-	246.2368	x_3	\geq	-188719.611868
592	46.7127	x_1	+	100.29555	x_2	+	98.80832	x_3	\leq	73133.0994674
593	584.9935	x_1	+	1200.73645	x_2	+	1155.8818	x_3	\leq	872619.474323
594	-334.9556	x_1	-	710.81446	x_2	-	693.71267	x_3	\geq	-517342.322071
595	-42.0077	x_1	-	90.0588	x_2	-	88.5822	x_3	\geq	-65645.630593
596	-183.603	x_1	-	201.903	x_2	-	195.357	x_3	\geq	-163950.08826
597	187.742	x_1	+	205.375	x_2	+	201.2705	x_3	\leq	167390.080505
598	-200.9538	x_1	-	202.2902	x_2	-	200.277	x_3	\geq	-169383.567932
599	205.4617	x_1	+	205.7468	x_2	+	206.3579	x_3	\leq	172937.698755
600	-128.1632	x_1	-	176.4704	x_2	-	150.6384	x_3	\geq	-132644.414752
601	-130.663	x_1	-	177.8656	x_2	-	149.7276	x_3	\geq	-133787.707718

602	114.7792	x_1	+	170.8144	x_2	+	143.2704	x_3	\leq	125966.742512
603	-109.1183	x_1	-	163.2672	x_2	-	135.4384	x_3	\geq	-120089.674767
604	126.8997	x_1	+	173.97352	x_2	+	144.2262	x_3	\leq	130391.744749
605	184.75693	x_1	+	290.9155	x_2	+	230.0185	x_3	\leq	210624.314527
606	-97.0003	x_1	-	152.2052	x_2	-	120.6592	x_3	\geq	-110302.837055
607	-94.61885	x_1	-	144.17628	x_2	-	109.1781	x_3	\geq	-104594.484631
608	102.30675	x_1	+	151.33896	x_2	+	115.3725	x_3	\leq	110529.878068
609	-108.5895	x_1	-	158.5536	x_2	-	127.7464	x_3	\geq	-116780.599207
610	-165.0643	x_1	-	202.599	x_2	-	202.5477	x_3	\geq	-160867.325746
611	153.1713	x_1	+	196.357	x_2	+	194.2091	x_3	\leq	154004.690346
612	-373.4376	x_1	-	65.5944	x_2	-	217.7656	x_3	\geq	-180027.747576
613	369.2251	x_1	+	38.3288	x_2	+	199.5011	x_3	\leq	168913.75668
614	-372.4323	x_1	-	59.6064	x_2	-	221.5299	x_3	\geq	-179152.98588
615	378.6951	x_1	+	63.8427	x_2	+	225.1277	x_3	\leq	182852.317629
616	362.6537	x_1	+	40.2361	x_2	+	191.9497	x_3	\leq	165659.059065
617	-369.9649	x_1	-	43.9781	x_2	-	195.6725	x_3	\geq	-169614.686049
618	-373.1707	x_1	-	52.4128	x_2	-	229.7199	x_3	\geq	-179767.212946
619	-374.946	x_1	-	78.0156	x_2	-	249.1554	x_3	\geq	-190348.749552
620	371.7281	x_1	+	74.6675	x_2	+	251.1672	x_3	\leq	189176.308709
621	376.414	x_1	+	56.8892	x_2	+	229.0438	x_3	\leq	181507.191624
622	369.2376	x_1	+	53.6084	x_2	+	224.7378	x_3	\leq	177607.607192
623	373.878	x_1	+	112.2753	x_2	+	272.9499	x_3	\leq	203752.49961
624	374.9734	x_1	+	117.9966	x_2	+	269.2103	x_3	\leq	204583.79678
625	-372.6531	x_1	-	114.4869	x_2	-	267.6252	x_3	\geq	-202636.17492
626	-358.9002	x_1	-	142.5664	x_2	-	285.9862	x_3	\geq	-210324.33466
627	-356.4199	x_1	-	133.1336	x_2	-	292.9781	x_3	\geq	-209078.453375
628	-340.9103	x_1	-	158.3401	x_2	-	299.8316	x_3	\geq	-213144.37356
629	337.52	x_1	+	153.0706	x_2	+	304.1554	x_3	\leq	212078.30389
630	358.5078	x_1	+	140.1626	x_2	+	289.8248	x_3	\leq	210557.54696
631	-358.0125	x_1	-	136.3847	x_2	-	289.4531	x_3	\geq	-209368.89578
632	-366.8896	x_1	-	99.8401	x_2	-	274.2913	x_3	\geq	-199236.165958
633	-370.8392	x_1	-	104.0963	x_2	-	277.1969	x_3	\geq	-202075.486382
634	365.3067	x_1	+	95.8398	x_2	+	278.9051	x_3	\leq	199198.48529
635	350.1627	x_1	+	119.8848	x_2	+	295.99	x_3	\leq	205158.026836
636	355.9343	x_1	+	126.4956	x_2	+	292.6036	x_3	\leq	207266.719044
637	-373.249	x_1	-	100.142	x_2	-	231.914	x_3	\geq	-191462.93247
638	379.3825	x_1	+	100.728	x_2	+	237.6287	x_3	\leq	194678.227293
639	374.2338	x_1	+	107.8134	x_2	+	232.0016	x_3	\leq	193948.145636
640	-370.7242	x_1	-	125.415	x_2	-	257.2256	x_3	\geq	-202636.799772
641	370.2454	x_1	+	131.8874	x_2	+	256.5824	x_3	\leq	204179.108772
642	364.7551	x_1	+	131.0925	x_2	+	249.8144	x_3	\leq	200906.68263
643	-368.2814	x_1	-	132.4994	x_2	-	252.7968	x_3	\geq	-202997.456228
644	357.3879	x_1	+	54.0011	x_2	+	179.2163	x_3	\leq	164945.73433

645	366.5946	x_1	+	53.5562	x_2	+	187.1738	x_3	\leq	169244.904412
646	-360.3959	x_1	-	50.2527	x_2	-	184.2023	x_3	\geq	-165819.955818
647	352.3921	x_1	+	30.2505	x_2	+	162.3641	x_3	\leq	154796.85571
648	-342.545	x_1	-	31.4163	x_2	-	154.2043	x_3	\geq	-150422.020628
649	-349.2045	x_1	-	33.3453	x_2	-	157.0748	x_3	\geq	-153652.846853
650	-44.0692	x_1	-	107.1502	x_2	-	122.85558	x_3	\geq	-81962.8725516
651	47.2706	x_1	+	113.4455	x_2	+	129.79647	x_3	\leq	86750.1896286
652	-79.6443	x_1	-	153.3957	x_2	-	178.7136	x_3	\geq	-119904.498876
653	-78.1987	x_1	-	151.1126	x_2	-	180.2635	x_3	\geq	-119318.329002
654	81.0082	x_1	+	155.7834	x_2	+	185.6204	x_3	\leq	122990.40364
655	-63.966	x_1	-	136.2734	x_2	-	167.9522	x_3	\geq	-108515.134494
656	-53.9424	x_1	-	125.99872	x_2	-	159.83136	x_3	\geq	-101262.963587
657	54.2258	x_1	+	125.6474	x_2	+	153.51394	x_3	\leq	99167.2694194
658	56.8615	x_1	+	129.76885	x_2	+	158.14955	x_3	\leq	102377.102028
659	59.766	x_1	+	132.4206	x_2	+	169.37668	x_3	\leq	107165.238115
660	-64.0962	x_1	-	137.1855	x_2	-	174.4297	x_3	\geq	-110904.184799
661	239.6796	x_1	+	198.5991	x_2	+	299.6612	x_3	\leq	199933.274827
662	216.5868	x_1	+	201.0471	x_2	+	291.978	x_3	\leq	193548.442059
663	-213.5172	x_1	-	196.3196	x_2	-	294.9842	x_3	\geq	-192470.542018
664	-103.4991	x_1	-	171.1938	x_2	-	218.3127	x_3	\geq	-141416.785602
665	-78.039	x_1	-	146.8935	x_2	-	146.3982	x_3	\geq	-108686.962995
666	75.4872	x_1	+	143.6103	x_2	+	143.6929	x_3	\leq	106269.772531
667	-74.9492	x_1	-	142.813	x_2	-	137.9204	x_3	\geq	-104583.926346
668	133.5428	x_1	+	261.8712	x_2	+	251.4706	x_3	\leq	190927.486344
669	97.3763	x_1	+	167.4164	x_2	+	180.3178	x_3	\leq	128300.9295
670	-89.6132	x_1	-	161.2946	x_2	-	172.8233	x_3	\geq	-122762.962281
671	88.5976	x_1	+	159.6468	x_2	+	170.3146	x_3	\leq	121306.84785
672	-114.0532	x_1	-	180.5903	x_2	-	198.4575	x_3	\geq	-140833.177997
673	-111.7134	x_1	-	179.222	x_2	-	206.7556	x_3	\geq	-142123.372178
674	101.0143	x_1	+	171.4633	x_2	+	195.4615	x_3	\leq	134441.142208
675	97.7472	x_1	+	166.5382	x_2	+	189.3885	x_3	\leq	130401.636557
676	98.6244	x_1	+	169.8814	x_2	+	183.6565	x_3	\leq	130334.876169
677	-101.0671	x_1	-	173.6363	x_2	-	187.5406	x_3	\geq	-133210.265655
678	-160.4544	x_1	-	205.841	x_2	-	227.9536	x_3	\geq	-166517.741938
679	156.1772	x_1	+	202.0337	x_2	+	224.8412	x_3	\leq	163437.846273
680	-308.6292	x_1	-	401.824	x_2	-	425.5028	x_3	\geq	-319675.445084
681	-274.7752	x_1	-	388.432	x_2	-	403.2504	x_3	\geq	-302581.370792
682	-138.3003	x_1	-	197.054	x_2	-	214.2368	x_3	\geq	-155516.847134
683	116.9124	x_1	+	181.8828	x_2	+	183.966	x_3	\leq	138446.483016
684	98.7066	x_1	+	165.2418	x_2	+	159.8472	x_3	\leq	122940.195354
685	-203.2854	x_1	-	334.443	x_2	-	320.568	x_3	\geq	-248826.066414
686	218.9366	x_1	+	350.0862	x_2	+	337.6464	x_3	\leq	261978.895006
687	115.0235	x_1	+	181.5848	x_2	+	176.696	x_3	\leq	136468.164432

688	94.7115 x_1	+	223.2918 x_2	+	248.69465 x_3	\leq	168997.591082
689	45.059 x_1	+	108.21914 x_2	+	121.70667 x_3	\leq	82158.4700154
690	36.448 x_1	+	97.33955 x_2	+	108.206 x_3	\leq	73246.189209
691	-42.014 x_1	-	102.215 x_2	-	115.1991 x_3	\geq	-77624.773482
692	-42.8602 x_1	-	98.97037 x_2	-	103.36085 x_3	\geq	-73206.247003
693	50.3707 x_1	+	115.65038 x_2	+	125.29779 x_3	\leq	86711.733716
694	-47.8078 x_1	-	109.867 x_2	-	116.70063 x_3	\geq	-81771.3596972
695	47.7202 x_1	+	109.98284 x_2	+	117.04701 x_3	\leq	81901.1341196
696	51.1745 x_1	+	113.25868 x_2	+	117.14527 x_3	\leq	83696.6915898
697	-52.7956 x_1	-	116.2712 x_2	-	122.3528 x_3	\geq	-86463.5121
698	56.4916 x_1	+	123.116 x_2	+	129.7912 x_3	\leq	91673.34634
699	54.4158 x_1	+	116.19414 x_2	+	119.12424 x_3	\leq	85808.4511602
700	124.6702 x_1	+	259.9968 x_2	+	271.1107 x_3	\leq	193430.500314
701	-57.6884 x_1	-	122.6374 x_2	-	125.8304 x_3	\geq	-90618.282074
702	123.9504 x_1	+	259.0309 x_2	+	268.1804 x_3	\leq	192212.984529
703	-72.6818 x_1	-	144.264 x_2	-	153.4256 x_3	\geq	-108502.315776
704	-67.4594 x_1	-	136.6326 x_2	-	144.7664 x_3	\geq	-102455.011998
705	133.3407 x_1	+	278.034 x_2	+	313.3874 x_3	\leq	213014.801584
706	67.7188 x_1	+	136.81 x_2	+	146.527 x_3	\leq	103010.09546
707	276.73 x_1	+	186.666 x_2	+	307.8268 x_3	\leq	207167.577024
708	243.4452 x_1	+	188.9786 x_2	+	307.5901 x_3	\leq	200440.130443
709	238.4154 x_1	+	192.1022 x_2	+	302.0477 x_3	\leq	198514.860061
710	-244.7807 x_1	-	198.6697 x_2	-	305.5279 x_3	\geq	-202814.763434
711	-260.1356 x_1	-	157.7464 x_2	-	314.5344 x_3	\geq	-198234.175968
712	258.7984 x_1	+	159.2474 x_2	+	313.0732 x_3	\leq	197812.915178
713	287.405 x_1	+	144.4656 x_2	+	314.6048 x_3	\leq	201116.109348
714	-296.437 x_1	-	152.3547 x_2	-	316.7042 x_3	\geq	-205659.599327
715	305.9729 x_1	+	164.4554 x_2	+	313.3334 x_3	\leq	209787.448189
716	295.9036 x_1	+	153.2872 x_2	+	316.1853 x_3	\leq	205591.541297
717	270.1524 x_1	+	179.5458 x_2	+	310.4652 x_3	\leq	204538.860528
718	-264.4398 x_1	-	172.3246 x_2	-	313.3631 x_3	\geq	-202339.865609
719	-267.8634 x_1	-	167.3794 x_2	-	316.8881 x_3	\geq	-202986.861647
720	-201.2631 x_1	-	140.5394 x_2	-	305.4694 x_3	\geq	-179675.891065
721	-199.562 x_1	-	144.3458 x_2	-	303.3775 x_3	\geq	-179433.901148
722	190.3218 x_1	+	129.9148 x_2	+	301.9828 x_3	\leq	174185.118382
723	181.9364 x_1	+	125.9532 x_2	+	294.837 x_3	\leq	169210.62214
724	-116.96385 x_1	-	165.68854 x_2	-	132.8498 x_3	\geq	-122777.498401
725	120.36174 x_1	+	169.60759 x_2	+	137.4905 x_3	\leq	125984.607474
726	-108.97943 x_1	-	157.57149 x_2	-	125.7618 x_3	\geq	-116177.330882
727	111.1045 x_1	+	161.6575 x_2	+	130.1083 x_3	\leq	119139.750699
728	-153.0086 x_1	-	195.2953 x_2	-	198.2959 x_3	\geq	-154270.955912
729	156.1224 x_1	+	198.3525 x_2	+	200.6808 x_3	\leq	156701.728038
730	159.1422 x_1	+	201.0747 x_2	+	209.7369 x_3	\leq	160286.312652

731	-168.2325	x_1	-	204.6393	x_2	-	209.3076	x_3	\geq	-163684.728081
732	175.8495	x_1	+	207.4639	x_2	+	217.591	x_3	\leq	168167.537691
733	179.7922	x_1	+	211.064	x_2	+	224.259	x_3	\leq	171850.946638
734	176.4462	x_1	+	207.1959	x_2	+	220.1997	x_3	\leq	168700.285092
735	-133.2094	x_1	-	277.6104	x_2	-	314.6254	x_3	\geq	-213178.524914
736	72.563	x_1	+	146.0546	x_2	+	168.7976	x_3	\leq	113378.206816
737	58.4543	x_1	+	130.40986	x_2	+	149.89023	x_3	\leq	100310.333482
738	-59.4336	x_1	-	132.61713	x_2	-	156.12555	x_3	\geq	-103087.829257
739	67.167	x_1	+	139.2396	x_2	+	165.966	x_3	\leq	109345.798548
740	-71.4095	x_1	-	143.6051	x_2	-	170.0671	x_3	\geq	-112681.822741
741	71.7434	x_1	+	143.8041	x_2	+	184.9145	x_3	\leq	117404.623521
742	-70.6826	x_1	-	142.9224	x_2	-	192.386	x_3	\geq	-119447.183274
743	-91.0276	x_1	-	159.2094	x_2	-	200.1966	x_3	\geq	-129929.322228
744	93.9185	x_1	+	163.305	x_2	+	206.13	x_3	\leq	133586.32494
745	-75.3583	x_1	-	148.6487	x_2	-	190.538	x_3	\geq	-121298.023417
746	-75.1894	x_1	-	147.8366	x_2	-	183.044	x_3	\geq	-118618.415506
747	79.0621	x_1	+	152.8206	x_2	+	188.5126	x_3	\leq	122555.943938
748	127.7884	x_1	+	256.0038	x_2	+	247.7647	x_3	\leq	186688.622762
749	-66.4877	x_1	-	132.966	x_2	-	132.3218	x_3	\geq	-97776.132499
750	-68.5634	x_1	-	136.0107	x_2	-	134.9879	x_3	\geq	-100004.836147
751	-120.262	x_1	-	183.1998	x_2	-	206.7759	x_3	\geq	-145015.371331
752	120.9147	x_1	+	184.1034	x_2	+	208.2174	x_3	\leq	145851.144993
753	-135.348	x_1	-	190.4022	x_2	-	218.8941	x_3	\geq	-153513.518409
754	135.6688	x_1	+	191.3847	x_2	+	220.2948	x_3	\leq	154312.829869
755	-132.7959	x_1	-	192.3024	x_2	-	206.6007	x_3	\geq	-150775.851045
756	131.4994	x_1	+	191.5012	x_2	+	202.1522	x_3	\leq	149176.177738
757	-120.816	x_1	-	184.8441	x_2	-	196.1109	x_3	\geq	-143121.917247
758	119.6417	x_1	+	184.0573	x_2	+	191.8907	x_3	\leq	141603.41876
759	-113.7871	x_1	-	180.0603	x_2	-	184.0769	x_3	\geq	-137126.671668
760	-112.588	x_1	-	178.2508	x_2	-	181.9684	x_3	\geq	-135681.629664
761	-103.7748	x_1	-	171.0667	x_2	-	173.3382	x_3	\geq	-129194.591
762	102.9288	x_1	+	169.3469	x_2	+	171.4391	x_3	\leq	127894.667312
763	89.9073	x_1	+	212.34957	x_2	+	233.27426	x_3	\leq	159830.653322
764	-40.4653	x_1	-	97.89881	x_2	-	107.13755	x_3	\geq	-73500.977361
765	-47.3489	x_1	-	109.48901	x_2	-	118.79058	x_3	\geq	-82104.891182
766	-44.859	x_1	-	104.12384	x_2	-	110.96927	x_3	\geq	-77549.9123492
767	-76.8607	x_1	-	186.9048	x_2	-	199.45674	x_3	\geq	-138976.455646
768	81.0231	x_1	+	191.99494	x_2	+	203.9259	x_3	\leq	142679.206005
769	-55.6524	x_1	-	125.00989	x_2	-	138.83397	x_3	\geq	-94758.2709058
770	-62.5887	x_1	-	131.2646	x_2	-	147.495	x_3	\geq	-100401.856382
771	54.2907	x_1	+	122.33738	x_2	+	132.95411	x_3	\leq	91932.7588828
772	-58.0896	x_1	-	125.9784	x_2	-	135.7587	x_3	\geq	-94592.199852
773	63.0272	x_1	+	132.9936	x_2	+	144.0061	x_3	\leq	100225.574628

774	73.9722	x_1	+	147.447	x_2	+	164.353	x_3	\leq	112856.91113
775	-86.473	x_1	-	159.4721	x_2	-	178.4946	x_3	\geq	-123096.575017
776	82.2477	x_1	+	155.0442	x_2	+	174.6334	x_3	\leq	119733.961244
777	84.3507	x_1	+	156.5937	x_2	+	169.4583	x_3	\leq	119251.750599
778	-75.1524	x_1	-	148.995	x_2	-	159.231	x_3	\geq	-112268.56503
779	-72.3192	x_1	-	145.14	x_2	-	155.638	x_3	\geq	-109388.98484
780	303.1998	x_1	+	169.5142	x_2	+	310.7578	x_3	\leq	209616.52346
781	-307.779	x_1	-	173.197	x_2	-	312.8908	x_3	\geq	-212311.289996
782	305.962	x_1	+	172.7898	x_2	+	311.071	x_3	\leq	211230.082326
783	-280.438	x_1	-	184.9542	x_2	-	311.629	x_3	\geq	-208665.495354
784	-278.0994	x_1	-	182.2536	x_2	-	312.0204	x_3	\geq	-207516.25809
785	127.1207	x_1	+	181.2062	x_2	+	236.3804	x_3	\leq	153940.614791
786	-131.3528	x_1	-	186.4001	x_2	-	242.7842	x_3	\geq	-158329.769786
787	71.7968	x_1	+	135.6432	x_2	+	203.84815	x_3	\leq	121264.848327
788	61.2729	x_1	+	130.26081	x_2	+	191.78226	x_3	\leq	114254.69825
789	-58.4238	x_1	-	125.53587	x_2	-	185.12157	x_3	\geq	-110156.178795
790	46.4128	x_1	+	112.31528	x_2	+	172.5352	x_3	\leq	100540.474945
791	-42.1696	x_1	-	106.28454	x_2	-	171.28996	x_3	\geq	-97973.7754494
792	53.6284	x_1	+	118.75714	x_2	+	184.87598	x_3	\leq	107587.066313
793	-54.7007	x_1	-	116.58606	x_2	-	185.73514	x_3	\geq	-107361.064574
794	49.3946	x_1	+	109.77611	x_2	+	180.19434	x_3	\leq	102886.537543
795	-49.1226	x_1	-	106.77693	x_2	-	174.76548	x_3	\geq	-99976.1743011
796	139.7976	x_1	+	117.9876	x_2	+	280.1924	x_3	\leq	155081.572148
797	-156.3591	x_1	-	134.6487	x_2	-	289.1596	x_3	\geq	-164639.809405
798	-56.144	x_1	-	114.3203	x_2	-	110.5216	x_3	\geq	-83229.46704
799	59.8473	x_1	+	120.9336	x_2	+	117.0879	x_3	\leq	88134.741879
800	-58.2012	x_1	-	118.3251	x_2	-	114.7959	x_3	\geq	-86240.242905
801	-61.4362	x_1	-	125.7275	x_2	-	124.5734	x_3	\geq	-92153.670911
802	57.9316	x_1	+	118.9973	x_2	+	116.8145	x_3	\leq	86954.355791
803	55.5618	x_1	+	118.7844	x_2	+	119.2338	x_3	\leq	87120.842508
804	-50.9778	x_1	-	109.31535	x_2	-	108.89766	x_3	\geq	-79973.9978175
805	51.0399	x_1	+	109.16163	x_2	+	108.45885	x_3	\leq	79813.6161753
806	95.659	x_1	+	155.5228	x_2	+	228.5531	x_3	\leq	138753.607011
807	-111.2837	x_1	-	160.9886	x_2	-	242.8198	x_3	\geq	-147415.081809
808	-92.2185	x_1	-	160.4088	x_2	-	207.2852	x_3	\geq	-132738.528418
809	85.9204	x_1	+	155.0026	x_2	+	202.0165	x_3	\leq	128424.912971
810	-101.6847	x_1	-	168.1353	x_2	-	219.5343	x_3	\geq	-140519.459709
811	-156.3194	x_1	-	195.1553	x_2	-	260.8072	x_3	\geq	-170896.128122
812	-150.7214	x_1	-	189.9463	x_2	-	254.8012	x_3	\geq	-166386.666742
813	-179.5909	x_1	-	195.9378	x_2	-	271.743	x_3	\geq	-178653.068707
814	180.1271	x_1	+	194.7204	x_2	+	281.7216	x_3	\leq	181507.892189
815	-202.735	x_1	-	182.634	x_2	-	300.072	x_3	\geq	-188187.16021
816	-198.887	x_1	-	182.436	x_2	-	294.93	x_3	\geq	-185702.81693

817	198.6118	x_1	+	177.9436	x_2	+	298.7351	x_3	\leq	185714.798515
818	187.6732	x_1	+	172.8894	x_2	+	293.9776	x_3	\leq	180775.727786
819	-116.9916	x_1	-	120.778	x_2	-	267.4704	x_3	\geq	-147359.156196
820	-101.5776	x_1	-	104.536	x_2	-	257.2854	x_3	\geq	-137830.966986
821	84.804	x_1	+	104.0865	x_2	+	242.9855	x_3	\leq	129889.120975
822	132.7986	x_1	+	166.3404	x_2	+	260.427	x_3	\leq	158218.92285
823	-113.7208	x_1	-	164.0823	x_2	-	247.9787	x_3	\geq	-150460.939341
824	-105.8826	x_1	-	169.9484	x_2	-	226.5149	x_3	\geq	-143951.707187
825	102.6936	x_1	+	164.992	x_2	+	228.1549	x_3	\leq	142460.751535
826	123.4794	x_1	+	175.1834	x_2	+	240.0839	x_3	\leq	152575.145771
827	126.7816	x_1	+	179.0544	x_2	+	246.2222	x_3	\leq	156302.149706
828	117.3388	x_1	+	169.5967	x_2	+	240.14	x_3	\leq	149945.352045
829	-124.3093	x_1	-	175.3617	x_2	-	246.5421	x_3	\geq	-154880.119898
830	-93.0607	x_1	-	152.8735	x_2	-	223.0244	x_3	\geq	-135699.425004
831	-97.6209	x_1	-	159.5493	x_2	-	221.5652	x_3	\geq	-137855.547016
832	76.9152	x_1	+	143.921	x_2	+	204.0312	x_3	\leq	124422.68945
833	-78.9897	x_1	-	146.8805	x_2	-	209.0744	x_3	\geq	-127331.092824
834	80.1322	x_1	+	148.809	x_2	+	203.4202	x_3	\leq	126143.00814
835	85.1182	x_1	+	154.2669	x_2	+	209.8117	x_3	\leq	130652.804385
836	-143.6792	x_1	-	183.6672	x_2	-	258.8884	x_3	\geq	-164514.332836
837	151.1728	x_1	+	189.2846	x_2	+	264.7984	x_3	\leq	169407.406744
838	141.0038	x_1	+	179.811	x_2	+	259.2294	x_3	\leq	163017.195052
839	-173.7333	x_1	-	189.6508	x_2	-	275.5608	x_3	\geq	-176854.517335
840	182.0338	x_1	+	165.1084	x_2	+	297.9044	x_3	\leq	179187.525376
841	-179.7588	x_1	-	163.5064	x_2	-	294.2568	x_3	\geq	-177089.175168
842	65.9614	x_1	+	116.87015	x_2	+	218.09099	x_3	\leq	120861.732233
843	-73.1454	x_1	-	125.96283	x_2	-	221.00073	x_3	\geq	-125059.950762
844	86.6085	x_1	+	130.6845	x_2	+	235.875	x_3	\leq	133476.326145
845	-88.495	x_1	-	130.5025	x_2	-	239.836	x_3	\geq	-135169.0495
846	79.513	x_1	+	118.9075	x_2	+	230.0465	x_3	\leq	127486.602095
847	-138.8154	x_1	-	171.961	x_2	-	268.2794	x_3	\geq	-163466.757772
848	145.2549	x_1	+	180.8365	x_2	+	265.7849	x_3	\leq	166196.696062
849	-160.0947	x_1	-	171.0195	x_2	-	278.2675	x_3	\geq	-170059.336554
850	-165.4814	x_1	-	175.9793	x_2	-	285.8457	x_3	\geq	-174943.443262
851	172.0263	x_1	+	184.6149	x_2	+	284.04	x_3	\leq	177857.389872
852	-168.4935	x_1	-	182.1627	x_2	-	278.5107	x_3	\geq	-174692.08881
853	153.4262	x_1	+	162.7903	x_2	+	278.0718	x_3	\leq	166716.572143
854	155.8234	x_1	+	164.6324	x_2	+	282.2616	x_3	\leq	169083.98738
855	-130.6364	x_1	-	163.3921	x_2	-	266.3331	x_3	\geq	-159176.084941
856	-125.594	x_1	-	158.0868	x_2	-	258.1724	x_3	\geq	-154067.136436
857	118.1176	x_1	+	148.7864	x_2	+	257.7416	x_3	\leq	150401.55036
858	-73.8758	x_1	-	137.62225	x_2	-	208.7394	x_3	\geq	-123831.558111
859	80.8465	x_1	+	119.3235	x_2	+	233.3115	x_3	\leq	129015.483045

860	-83.8549	x_1	-	105.329	x_2	-	240.9256	x_3	\geq	-129215.387169
861	67.878	x_1	+	103.73656	x_2	+	224.13226	x_3	\leq	120332.382834
862	-68.694	x_1	-	103.54768	x_2	-	226.27188	x_3	\geq	-121233.456177
863	105.8576	x_1	+	153.1461	x_2	+	240.8176	x_3	\leq	143716.829364
864	108.1507	x_1	+	155.5662	x_2	+	245.7082	x_3	\leq	146460.879938
865	94.8748	x_1	+	140.979	x_2	+	237.1979	x_3	\leq	137660.426352
866	-101.2296	x_1	-	146.6444	x_2	-	245.2913	x_3	\geq	-142977.13768
867	91.0846	x_1	+	149.0831	x_2	+	228.0846	x_3	\leq	136118.348544
868	-84.0062	x_1	-	143.2519	x_2	-	221.043	x_3	\geq	-131051.792352
869	120.7286	x_1	+	148.0654	x_2	+	262.2676	x_3	\leq	152263.98171
870	-71.6887	x_1	-	124.70573	x_2	-	217.19504	x_3	\geq	-123124.82139
871	65.1786	x_1	+	133.02756	x_2	+	213.60471	x_3	\leq	123381.887648
872	69.1251	x_1	+	131.00475	x_2	+	207.89405	x_3	\leq	121096.847337
873	-80.9167	x_1	-	137.5464	x_2	-	224.7759	x_3	\geq	-130451.00269
874	78.8856	x_1	+	136.2857	x_2	+	220.1467	x_3	\leq	128157.4905
875	-60.4239	x_1	-	119.28021	x_2	-	202.8895	x_3	\geq	-115097.84427
876	59.1306	x_1	+	122.33961	x_2	+	201.70716	x_3	\leq	115358.609903
877	-103.5281	x_1	-	132.1565	x_2	-	251.7539	x_3	\geq	-142029.046469
878	112.0902	x_1	+	137.7962	x_2	+	259.9396	x_3	\leq	147658.793366
879	97.0151	x_1	+	120.2521	x_2	+	251.1494	x_3	\leq	138184.808991
880	-95.3121	x_1	-	122.5749	x_2	-	248.0171	x_3	\geq	-137270.206013
881	116.0726	x_1	+	120.7446	x_2	+	265.5528	x_3	\leq	146471.410178
882	-146.7448	x_1	-	153.8938	x_2	-	281.5744	x_3	\geq	-164715.597546
883	-138.8778	x_1	-	148.6462	x_2	-	273.8478	x_3	\geq	-159360.38383
884	155.2041	x_1	+	134.9713	x_2	+	287.2132	x_3	\leq	163783.033267
885	131.381	x_1	+	137.3778	x_2	+	274.7	x_3	\leq	155906.931766
886	-129.558	x_1	-	138.0244	x_2	-	271.43	x_3	\geq	-154538.646868
887	170.684	x_1	+	151.1528	x_2	+	294.1544	x_3	\leq	172557.598152
888	-168.814	x_1	-	150.9988	x_2	-	291.1624	x_3	\geq	-171101.657292

Apéndice C

**Zonas no convexas identificadas
con el algoritmo propuesto**

Tabla C.1: Vértices que dan origen a regiones no convexas.

z	\mathbb{P}_{bz}	\mathbb{P}_{iz}
1	1, 5, 118, 63	42, 3
2	2, 67, 5, 9, 174, 118, 119, 122, 223, 63	120, 65, 172, 62, 7
3	517, 582, 490, 518, 564, 597, 541, 581	563, 542
4	586, 590, 601, 570, 603, 572	588
5	576, 609, 617, 619, 590, 594, 605, 574	592, 607
6	591, 625, 629, 623, 604, 606	616
7	614, 622, 624, 630, 631, 602	628
8	240, 135, 238, 80, 82, 22, 286, 191	137, 189
9	97, 204, 206, 150, 154, 95	152
10	66, 6, 226, 272, 121, 317	175
11	164, 165, 264, 265, 110, 310	216
12	327, 367, 503, 473, 282, 442	406
13	353, 393, 493, 462, 463, 311	429
14	491, 391, 519, 428, 427, 492	461
15	532, 505, 410, 507, 444, 446	477
16	548, 526, 402, 469, 438, 569	499
17	51, 517, 534, 24, 410, 156, 541, 288, 164, 38, 40, 426, 46, 48, 50, 307, 308, 94, 52, 53, 446, 191, 577, 331, 581, 32, 203, 82, 595, 215, 309, 350, 351, 102, 490, 107, 507, 106	513, 515, 516, 536, 538, 540, 30, 34, 36, 43, 44, 45, 558, 47, 560, 49, 562, 579, 84, 86, 88, 90, 92, 96, 98, 100, 101, 103, 104, 105, 108, 109, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 26, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 28, 193, 195, 197, 199, 201, 205, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 242, 244, 246, 248, 250, 252, 254, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 290, 292, 294, 296, 298, 300, 302, 303, 304, 305, 306, 333, 335, 337, 339, 341, 343, 345, 346, 347, 348, 349, 373, 375, 377, 379, 381, 383, 385, 386, 387, 388, 389, 412, 414, 416, 418, 420, 422, 423, 424, 425, 157, 448, 450, 452, 454, 456, 457, 458, 459, 479, 481, 483, 485, 487, 488, 489, 509, 511

Referencias

- [BARBER96] BARBER, C. B., DOBKIN, D. P., y HUHDANPAA, H. The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 22(4):469–483, December 1996. doi: 10.1145/235815.235821.
- [Chávez15] Chávez, L. M. *A security boundary constrained direct current optimal power flow*. Tesis Doctoral, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, 2015.
- [Chávez16] Chávez, L. M., Fuerte-Esquivel, C. R., Cañizares, C. A., y Gutierrez-Martinez, V. J. Practical security boundary-constrained dc optimal power flow for electricity markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 31(5):3358–3368, Sept 2016. ISSN 0885-8950. doi:10.1109/TPWRS.2015.2504870.
- [Delaunay34] Delaunay, B. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voroni. *Bullettin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na*, (6):793–800, 1934.
- [Gutierrez-Martinez11] Gutierrez-Martinez, V. J., Canizares, C. A., Fuerte-Esquivel, C. R., Pizano-Martinez, A., y Gu, X. Neural-network security-boundary constrained optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 26(1):63–72, Feb 2011. ISSN 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2010.2050344.

- [Haeussler02] Haeussler, E. F. y Paul, R. S. *Introductory Mathematical Analysis*. PRENTICE-HALL INC, tenth edition ed^{ón}., 2002.
- [Kallis17] Kallis, C., Deliparaschos, K. M., Moustiris, G. P., Georgiou, A., y Charalambous, T. Incremental 2d delaunay triangulation core implementation on fpga for surface reconstruction via high-level synthesis. *En 2017 22nd IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA)*, págs. 1–4. Sept 2017. ISSN 1946-0759. doi:10.1109/ETFA.2017.8247736.
- [Klee72] Klee, V. y Minty, G. J. How good is the simplex algorithm? *O. Shisha, Ed., Inequalities III, Academic Press, New York*, págs. 159–175, 1972.
- [Paparrizos09] Paparrizos, K., Samaras, N., y Zissopoulos, D. *Linear programming: Klee–Minty examples* *Linear Programming: Klee–Minty Examples*, págs. 1891–1897. Springer US, Boston, MA, 2009. ISBN 978-0-387-74759-0.
- [Renold17] Renold, A. P. y Chandrakala, S. Convex-hull-based boundary detection in unattended wireless sensor networks. *IEEE Sensors Letters*, 1(4):1–4, Aug 2017. doi:10.1109/LENS.2017.2731200.
- [Rosen12] Rosen, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. Mc Graw Hill, 2012.
- [Sauer98] Sauer, P. W. y Pai, M. A. *POWER SYSTEM DYNAMICS AND STABILITY*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1998.
- [Simon94] Simon, C. P. y Blume, L. *Mathematics for economists*. W. W. Norton & Company, Inc., 1994.