



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Universidad Nacional Autónoma de México

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



HACES VECTORIALES DE RANGO DOS
CON DETERMINANTE CANÓNICO
Y CUATRO SECCIONES

Tesis que para obtener el grado de
Doctora en Ciencias Matemáticas

P R E S E N T A

Graciela Astrid Reyes Ahumada

DIRECTOR DE TESIS

Doctor en Ciencias Matemáticas
Luis Abel Castorena Martínez

Morelia, Michoacán.

marzo del 2015

A mi querida familia:
a mis padres, a mi abuela,
a Iris, Gon y Gaby.

*The art of doing mathematics is finding that special case
that contains all the germs of generality.*

David Hilbert.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera empezar por agradecer a mi familia. A las dos personas que más admiro, mi padre el profesor Gonzalo Reyes y mi madre la profesora Juanis Ahumada, por su amor incondicional e infinito apoyo. A mi querida abuela Alicia Reyes por todos sus sabios consejos. Y por supuesto, a mis hermanos Iris, Gonzalo y Gabriela. No lo hubiera logrado sin todos ustedes.

A mi asesor el Dr. Abel Castorena, le agradezco por todo el apoyo que me brindó, por las incontables horas de trabajo que me dedicó y por todos sus sabios consejos (para las matemáticas y la vida). Me siento muy afortunada de haber contado no sólo con su valioso consejo académico sino también con su gran amistad. Muchas gracias Abel por creer en mí, ha sido un honor tener el privilegio de trabajar contigo.

A la Dra. Claudia Reynoso, por todos estos años de amistad y por tantos valiosos consejos que han marcado profundamente mi vida académica (y no académica). En particular, le agradezco el haberme introducido al interesante tema de la Geometría Algebraica.

Por supuesto, a mis queridos amigos, en especial a Jesús Jiménez y a Benjamín García, gracias por sus consejos, apoyo y compañía durante todo este largo camino.

A los profesores Ciro Ciliberto y Flaminio Flamini por sus interesantes sugerencias y por todo el apoyo que me brindaron a lo largo de mis estudios doctorales. Agradezco también a los profesores Elham Izadi y Christian Pauly por sus valiosos comentarios durante el desarrollo de este trabajo de investigación.

Al profesor Daniel Juan Pineda y a mi mesa de sinodales conformada por los profesores Abel Castorena, Claudia Reynoso, Gerardo Raggi, Alexis García

Zamora, Xavier Gómez Mont, Ferrán Valdez y Jorge Luis López, muchas gracias por sus correcciones e interesantes comentarios sobre esta tesis.

Quiero agradecer al Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas y a sus instituciones participantes. A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por todo el apoyo que he recibido a lo largo de estos años de su personal académico, administrativo y técnico.

Por último, quisiera agradecer al CONACyT por su apoyo durante mis estudios de doctorado con la beca nacional con número 316865.

Índice general

Resumen	I
Introducción	III
ESTRUCTURA DE LA TESIS	IX
1. Preliminares	1
1.1. Extensiones de haces lineales	1
1.2. Las variedades W_t	3
1.3. El espacio global de extensiones	7
2. La geometría de $B(2, K_C, r)$	11
2.1. Construcción Bertram-Feinberg-Mukai	14
2.2. Existencia de componentes regulares	18
2.2.1. Haces globalmente generados en $B(2, K_C, 3)$	18
2.2.2. Haces globalmente generados en $B(2, K_C, 4)$	23
2.2.3. Haces con pocas secciones y extensiones de haces lineales	29
3. Construcción y comparación de componentes	37
3.1. Haces con cuatro secciones	37
3.2. Comparación de componentes irreducibles	48
3.2.1. Haces con tres secciones	48
3.2.2. Haces con cuatro secciones	52

4. Apéndice	55
4.1. Algunos resultados geométricos	55
4.2. Superficies geoméricamente regladas	57
4.3. El esquema de Hilbert de unisecantes	59
4.4. Deformaciones	61
Bibliografía	63

Resumen.

Sobre una curva general C de género $g \geq 8$ construimos una componente irreducible regular de la variedad de Brill-Noether $B(2, K_C, 4)$ que parametriza haces estables de rango dos con determinante canónico y al menos cuatro secciones globales linealmente independientes. Esta componente tiene la dimensión esperada $\rho = 3g - 13$ y satisface que su elemento general $[E]$ puede ser expresado como una extensión de la forma $0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0$, donde D es un divisor general efectivo de grado 3 sobre C .

Palabras clave: Teoría de Brill-Noether; Haces vectoriales sobre curvas; Superficies regladas.

Abstract.

Over the general curve C of genus $g \geq 8$ we construct a regular irreducible component of the Brill-Noether locus $B(2, K_C, 4)$ which parametrizes stable rank two vector bundles with canonical determinant and at least four linearly independent global sections. Such component has the expected dimension $\rho = 3g - 13$ and satisfies that its general element $[E]$ fits in an extension of the form $0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0$, where D is a general effective divisor of degree 3 over C .

Keywords: Brill-Noether theory; Vector bundles on curves; Ruled surfaces.

Introducción

El objetivo de este trabajo de tesis es estudiar las variedades de Brill-Noether $B(2, K_C, r)$. Como introducción y motivación mencionamos algunas de las conjeturas sobre el comportamiento geométrico esperado de estas variedades. Así mismo, enunciaremos los principales resultados de existencia, descripción de sus espacios tangentes y las construcciones de componentes irreducibles que existen en la literatura.

En particular, enunciaremos los resultados dados en [7], donde los autores encuentran componentes regulares de $B(2, K_C, r)$ con $r \leq 3$. Estas construcciones dadas por C. Ciliberto y F. Flamini fueron la principal motivación para el tema de esta tesis. De hecho, siguiendo algunas de sus ideas y construcciones encontramos una componente regular de $B(2, K_C, 4)$, el resultado principal aquí expuesto es en cierto modo una generalización para el caso $r = 4$.

La geometría de $B(2, K_C, r)$.

Sea C una curva compleja suave proyectiva irreducible de género g y $U(n, d)$ el espacio moduli de haces estables de rango n y grado d sobre C . Podemos considerar el morfismo determinante

$$\begin{aligned} \wedge^n : U(n, d) &\rightarrow \text{Pic}^d(C) \\ E &\mapsto \wedge^n E; \end{aligned}$$

la fibra de este morfismo en un punto $L \in \text{Pic}^d(C)$, denotada $U(n, L)$, consiste en todos los haces estables de rango n que tienen determinante L .

Sea K_C el haz canónico sobre C y \mathcal{O}_C su haz trivial. Consideremos el espacio moduli

$$U(2, K_C) \subset U(2, 2g - 2),$$

de haces con determinante canónico. $U(2, K_C)$ es suave, irreducible y de dimensión $3g - 3$ (ver [12]), además existe una estratificación dada por las subvariedades de Brill-Noether, definidas como

$$B(2, K_C, r) := \{E \in U(2, K_C) \mid h^0(E) \geq r\}.$$

Estas variedades parametrizan haces con al menos r secciones globales linealmente independientes.

Las variedades $B(2, K_C, r)$ han sido estudiadas por diversos autores, desde su mención en 1992 por S. Mukai en [17] (ver por ejemplo [5], [7], [12], [21], [18], [19] y [22]). Sin embargo, muchas preguntas sobre la geometría de estos objetos siguen teniendo sólo respuestas parciales.

Preguntas tan básicas como la no vacuidad, irreducibilidad, lugar singular y dimensión de $B(2, K_C, r)$, permanecen abiertas en general y las pocas descripciones completas que se conocen de estas variedades son sobre una curva con moduli general de género $g \leq 12$ (ver [3], [5], [16], [7]). En el caso de curvas especiales o curvas hiperelípticas se sabe muy poco de estos objetos.

Las conjeturas dadas por S. Mukai en [17] sobre el comportamiento geométrico de estas variedades de Brill-Noether son las siguientes:

1. Dimensión. La dimensión (pura) esperada de $B(2, K_C, r)$ es el número de Brill-Noether

$$\rho = 3g - 3 - \binom{r+1}{2},$$

en el siguiente sentido: se espera que $B(2, K_C, r)$ sea no vacío y de dimensión ρ cuando $\rho \geq 0$ (y vacío cuando $\rho < 0$).

2. Lugar singular. El lugar singular esperado de $B(2, K_C, r)$ es

$$\text{Sing}(B(2, K_C, r)) = B(2, K_C, r+1).$$

3. Secciones. Se espera que existan componentes irreducibles de $B(2, K_C, r)$ cuyo elemento general tiene exactamente r secciones globales linealmente independientes.

Los pocos ejemplos conocidos motivan a pensar que al menos sobre una curva general existe una componente irreducible que satisface estas tres propiedades .

Una componente irreducible $B \subset B(2, K_C, r)$ será llamada **regular** si satisface lo siguiente:

- i) $\dim(B) = \rho$;
- ii) $\text{Sing}(B) = B \cap B(2, K_C, r + 1)$;
- iii) el elemento general $E \in B$ es tal que $h^0(E) = r$.

Entonces la primer pregunta natural que surge es: sobre una curva general, ¿cuándo existen componentes regulares de $B(2, K_C, r)$?

Las variedades de Brill-Noether en la literatura.

El primer problema que aparece al estudiar las variedades de Brill-Noether $B(2, K_C, r)$ es la no vacuidad. Esto fue resuelto en el año 2004, cuando M. Teixidor i Bigas demostró que sobre una curva con moduli general $B(2, K_C, r)$ es no vacío y posee una componente de la dimensión esperada ρ ([21]). Este resultado fue probado utilizando herramientas tales como deformaciones y series lineales límite sobre curvas reducibles (ver [23]) y si bien prueba la existencia de una componente irreducible de la dimensión esperada, su construcción no dice mucho sobre el elemento general E en dicha componente.

En [12], las autoras dan estructura de variedad a $B(2, K_C, r)$ y prueban que su espacio tangente en un punto $[E]$ se identifica naturalmente con el espacio ortogonal a la aplicación simétrica de Petri

$$\mu_E : S^2 H^0(E) \rightarrow H^0(S^2 E).$$

En [22], se prueba que sobre una curva general μ_E es inyectivo, por lo que el espacio tangente a $B(2, K_C, r)$ en un punto $[E]$ tal que $h^0(E) = r$ tiene dimensión ρ , lo que nos da una cota superior para la dimensión de $B(2, K_C, r)$.

Otra construcción interesante es la dada en [13], donde los autores demuestran que sobre una curva general existe una componente irreducible de $B(2, K_C, 3)$ que contiene a todos los haces globalmente generados. Esta construcción es muy importante ya que motiva a pensar que los haces en una misma componente de $B(2, K_C, r)$ comparten propiedades geométricas (como

la generación global). Sería muy interesante ver qué otro tipo de propiedades pueden compartir o preguntarse si siempre existe una componente conteniendo a los haces globalmente generados. De ser así, deberíamos de intentar describir explícitamente sus elementos. Estas son algunas de las preguntas que resolvemos en este trabajo de tesis para el caso de haces con tres secciones y también ilustramos el trabajo en proceso para responder estas preguntas para haces con cuatro secciones.

La motivación para esta tesis.

En [7], C. Ciliberto y F. Flamini construyen sobre una curva con moduli general C de género g , componentes de $B(2, K_C, r)$ de la dimensión esperada para $1 \leq r \leq 3$ este resultado es interesante porque aporta una “buena” descripción del elemento general E en tal componente irreducible.

Sean $L, N \in \text{Pic}(C)$ y sea $\text{Ext}^1(L, N)$ el espacio que parametriza extensiones de la forma

$$u : 0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0;$$

la construcción en [7] proviene de estudiar la estratificación de $\text{Ext}^1(L, N)$ en las variedades W_t definidas como:

$$W_t := \{u \in \text{Ext}^1(L, N) \mid \text{cork}(\partial_u) \geq t\},$$

donde $\partial_u : H^0(L) \rightarrow H^0(N)$ denota el morfismo cofrontera y $\text{cork}(\partial_u)$ la dimensión de su Cokernel.

El resultado que obtienen es el siguiente:

Sobre una curva con moduli general C de género g , para $r = 1, 2, 3$ existe una componente irreducible de $B(2, K_C, r)$ que satisface que su elemento general puede ser expresado como una extensión de la forma

$$u_E : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0,$$

donde D es un divisor general efectivo de grado $\text{deg}(D) = r - 1$.

Si bien todo elemento $E \in B(2, K_C, r)$ puede ser expresado como una extensión u_E para algún divisor D efectivo, el resultado anterior motiva a pensar

que al menos para $r < g$ existe una componente irreducible donde el divisor que define la extensión u_E es general y de grado fijo $\deg(D) = r - 1$; esta fue la pregunta que motivó el tema de este trabajo de tesis y el principal resultado aquí expuesto es el caso de cuatro secciones.

Resultados principales de este trabajo de tesis.

El resultado principal de este trabajo es el siguiente:

Teorema. Sea C una curva con moduli general de género $g \geq 8$. Entonces $B(2, K_C, 4)$ es no vacío. Más aún, existe una componente irreducible regular B cuyo elemento general $[E] \in B$ proviene de una sucesión

$$u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0;$$

donde D es un divisor general efectivo de grado 3 sobre C y la extensión u es tal que $u \in W_3 \subset \text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D))$ es general en una componente irreducible Λ de W_3 .

La idea de la prueba es estudiar la variedad $W_3 \subset \text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D))$ y construir una componente irreducible de W_3 caracterizada por la propiedad de que el Cokernel de su morfismo cofrontera es general en la variedad Grassmanniana $G(3, H^0(K_C(-D)))$. Una vez hecho esto, estudiamos el morfismo global al moduli de haces $u_E \mapsto E$ y demostramos que su imagen da una componente regular de $B(2, K_C, 4)$.

Otro resultado de este trabajo es el siguiente: demostramos que la componente de la variedad $B(2, K_C, 3)$ construida en [13] que contiene a todos los haces globalmente generados es precisamente la construida en [7] mediante extensiones. Esto describe explícitamente los haces globalmente generados con tres secciones.

Por último, ilustramos el trabajo en proceso de cómo generalizar esta construcción para los haces con cuatro secciones: conjeturamos que la componente de $B(2, K_C, 4)$ construida en esta tesis satisface que su elemento general es generado por sus secciones globales y conjeturamos además que, de manera

análoga al resultado para haces con tres secciones, esta componente es birracional a las cuádricas de rango seis que contienen a la curva canónica.

ESTRUCTURA DE LA TESIS

Capítulo 1: Preliminares.

En este capítulo estudiamos los resultados de [7], sobre extensiones de haces lineales y las variedades W_t que estratifican a $Ext^1(L, N)$. Estudiamos también el morfismo global al moduli de haces vectoriales $u_E \mapsto E$ cuando L y N varían en $Pic(C)$.

Capítulo 2: La geometría de $B(2, K_C, r)$.

Sea

$$\mu_E : S^2H^0(E) \rightarrow H^0(S^2E)$$

la aplicación simétrica de Petri del haz E , la cual es inducida por el producto “cup” de secciones y la proyección $p : H^0(E \otimes E) \rightarrow H^0(S^2E)$.

En la sección 2.1, estudiamos la identificación

$$T_E B(2, K_C, r) \cong \text{Im}(\mu_E)^\perp$$

dada en [12] y la construcción dada en [5] para calcular la dimensión esperada ρ de cualquier componente irreducible de $B(2, K_C, r)$ donde el elemento general acepta una sección nunca nula.

En la sección 2.2, siguiendo las ideas en [7], construimos componentes regulares de $B(2, K, r)$ para $r \leq 3$ y estudiamos la componente $B^{gg}(2, K_C, 3)$ dada en [13], que contiene a todos los haces globalmente generados. También estudiamos el morfismo dado en [6], que asigna a cada haz $E \in B(2, K_C, 4)$ generado

por un subespacio de secciones $V \in G(4, H^0(E))$, una cuádrica $Q_E \subset \mathbb{P}^{g-1}$ que contiene a la curva canónica.

Capítulo 3: Construcción y comparación de componentes.

En este capítulo demostramos los resultados principales de este trabajo de tesis.

En la sección 3.1, construimos sobre una curva general una componente irreducible regular de la variedad $B(2, K_C, 4)$ cuyo punto general E está en una extensión de la forma

$$u_E : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0,$$

donde D es un divisor general efectivo de grado 3.

En la sección 3.2, comparamos las dos componentes irreducibles de la variedad $B(2, K_C, 3)$ construidas en 2.2 y probamos que son la misma.

En la sección 3.3, siguiendo las mismas ideas de la sección anterior conjeturamos que la identificación de las componentes de $B(2, K_C, 3)$ puede ser generalizada al caso de cuatro secciones, en el siguiente sentido: ilustramos el trabajo en proceso para probar que la componente de $B(2, K_C, 4)$ construida en esta tesis es birracional al espacio $I_6(C)$ de cuádricas de rango seis que contienen a la curva canónica.

Capítulo 4: Apéndice.

Incluimos algunos de los resultados clásicos utilizados a lo largo de este trabajo de tesis, como superficies regladas y algunos resultados de teoría de deformaciones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo estableceremos gran parte de la notación utilizada a lo largo de este trabajo de tesis, estudiaremos los principales resultados sobre extensiones de haces lineales dados en [7] y definiremos las variedades W_t .

A una curva compleja suave proyectiva irreducible no hiperelíptica de género g , le llamaremos simplemente **curva**. Si E es un haz vectorial sobre una curva C , denotaremos por $\text{rank}(E)$ el rango de E , por $\det(E) := \wedge^{\text{rank}(E)} E$ su haz determinante y por $\text{deg}(E) := \text{deg}(\det(E))$ el grado de E .

Sea X una variedad proyectiva, decimos que una propiedad P **se cumple para el elemento general de X** si existe un abierto (de Zariski) $U \neq \emptyset$ tal que los elementos $x \in U$ satisfacen la propiedad P . Un elemento $x \in X$ es **muy general (o genérico)** si existe una colección numerable $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subvariedades cerradas propias tales que $x \notin \cup_i X_i$.

1.1. Extensiones de haces lineales

En esta sección enunciaremos algunos de los resultados clásicos sobre haces lineales y sus extensiones, dados en [7] y [15].

Si $L, N \in \text{Pic}(C)$ son dos haces lineales sobre una curva C y D es un divisor en C , denotaremos por $-L := L^*$ el haz dual a L y denotaremos

$$L - N := L \otimes N^*, L(D) := L \otimes \mathcal{O}_C(D), L(-D) := L \otimes \mathcal{O}_C(D)^*.$$

NOTACIÓN 1.1.1 Sea C una curva de género $g \geq 3$ y $L, N \in \text{Pic}(C)$. Consideremos el espacio $\text{Ext}^1(L, N)$ que parametriza extensiones de la forma

$$u : 0 \rightarrow N \rightarrow E_u \rightarrow L \rightarrow 0.$$

Denotemos: $\deg(N) = d - \delta$, $\deg(E_u) = d$, $\deg(L) = \delta$, $h^0(N) = n$, $h^0(L) = l$, $h^1(N) = k$, $h^1(L) = j$. Dado que $\text{Ext}^1(L, N) \cong H^1(N - L)$, denotaremos $m := \dim(\text{Ext}^1(L, N)) = h^1(N - L)$ y $\mathbb{P} := \mathbb{P}(H^1(N - L))$.

Utilizaremos la notación anterior a lo largo de todo este trabajo de tesis.

DEFINICIÓN 1.1.2 Un haz vectorial $E \rightarrow C$ se dice **semiestable** si para todo subhaz $F \subset E$ se satisface

$$\frac{\deg(F)}{\text{rank}(F)} \leq \frac{\deg(E)}{\text{rank}(E)},$$

E se dice **estable** si la desigualdad anterior es estricta.

Los siguientes resultados dan un criterio para determinar la estabilidad de un elemento en $\text{Ext}^1(L, N)$:

OBSERVACIÓN 1.1.3

Si $\deg(L - N) = 2\delta - d \geq 2$, entonces $\dim(\mathbb{P}) \geq g \geq 3$ y el haz lineal $K_C + L - N$ es globalmente generado, por lo que el sistema lineal $|K_C + L - N|$ define un morfismo $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}$. Sea $X := \text{Im}(\phi)$. Para todo entero positivo h denotamos $\text{Sec}_h(X)$ la h -ésima variedad secante de X (ver [14]), que se define como la cerradura de la unión de todos los subespacios lineales $\langle \phi(D) \rangle \subset \mathbb{P}$, donde D es un divisor general efectivo de grado h (ver [4]). Se tiene que

$$\dim(\text{Sec}_h(X)) = \min\{\dim(\mathbb{P}), 2h - 1\}.$$

Si E es un haz estable, entonces $E \otimes M$ es un haz estable para todo $M \in \text{Pic}(C)$ (ver apéndice, sección 4.1), por lo que un haz E_u de la forma:

$$u : 0 \rightarrow N \rightarrow E_u \rightarrow L \rightarrow 0,$$

es estable si y sólo el haz $E_u \otimes N^*$ en la extensión $e := u \otimes N^*$

$$e : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E_u \otimes N^* \rightarrow L \otimes N^* \rightarrow 0,$$

es estable.

PROPOSICIÓN 1.1.4 (Ver [15].) Sea $2\delta - d \geq 2$ y σ un entero tal que $\sigma \equiv 2\delta - d \pmod{2}$ y $4 + d - 2\delta \leq \sigma \leq 2\delta - d$, entonces

$$s(E_u \otimes N^*) \geq \sigma \Leftrightarrow e \notin \text{Sec}_{\frac{1}{2}(2\delta-d+\sigma-2)}(X)$$

donde $s(E_u \otimes N^*)$ denota el invariante de Segre de $E_u \otimes N^*$.

LEMA 1.1.5 (Ver [7], sección 4.1) Sean L, N como en 1.1.1 y tales que $h^0(N - L) = 0$. Sean $u, u' \in \text{Ext}^1(L, N)$ extensiones que satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $E_u, E_{u'}$ son haces estables;
- ii) existe un isomorfismo $\phi : E_{u'} \rightarrow E_u$ tal que si $i_1 : N \hookrightarrow E_{u'}$ y $i_2 : N \hookrightarrow E_u$ son las secciones que determinan las extensiones u' y u respectivamente, se tiene $\phi \circ i_1 = \lambda i_2$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Entonces $E_u = E_{u'}$, es decir, las extensiones u, u' son vectores proporcionales en $\text{Ext}^1(L, N)$.

1.2. Las variedades W_t

Sea $u \in \text{Ext}^1(L, N)$ una extensión y denotemos $\partial_u : H^0(L) \rightarrow H^1(N)$ el morfismo cofrontera y $\text{cork}(\partial_u)$ el corango de ∂_u (es decir, la dimensión del Cokernel de ∂_u). Para un entero $t > 0$ consideremos el lugar geométrico

$$W_t := \{u \in \text{Ext}^1(L, N) \mid \text{cork}(\partial_u) \geq t\}, \quad (1.2.1)$$

que puede ser dotado con una estructura de variedad determinantal (ver [1], capítulo 2) de codimensión esperada

$$c(l, k, t) := t(l - k + t);$$

de hecho, si $W_t \neq \emptyset$ entonces cada componente irreducible $\Lambda \subset W_t$ es tal que

$$\dim(\Lambda) \geq \min\{m, m - c(l, k, t)\}.$$

Notemos que si $u \in \text{Ext}^1(L, N)$ entonces $h^1(E_u) = j + \text{cork}(\partial_u)$, por lo que si $u \in W_t$ y $\det(E_u) = K_C$, entonces $h^0(E_u) \geq j + \text{cork}(\partial_u)$.

El morfismo cofrontera ∂_u puede ser interpretado en términos del morfismo multiplicación de secciones globales, de la siguiente manera:

supongamos que $k \geq t$ y $l \geq \max\{1, k - t\}$ y consideremos el morfismo que asigna a cada extensión $u \in \text{Ext}^1(L, N)$ su morfismo cofrontera,

$$\begin{aligned} \partial : \text{Ext}^1(L, N) = H^1(N - L) &\rightarrow H^0(L)^* \otimes H^1(N) = \text{Hom}(H^0(L), H^1(N)) \\ u &\mapsto \partial_u; \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \partial_u : H^0(L) &\rightarrow H^1(N) \\ s &\mapsto s \cup u; \end{aligned}$$

y \cup denota el morfismo “cup” de secciones $\cup : H^0(L) \otimes H^1(N - L) \rightarrow H^1(N)$.

Por dualidad de Serre, es equivalente considerar el morfismo multiplicación de secciones

$$\mu : H^0(L) \otimes H^0(K_C - N) \rightarrow H^0(K_C - N + L);$$

Si $V \subset H^0(K_C - N)$ es un subespacio vectorial, podemos definir el morfismo restricción

$$\mu_V : H^0(L) \otimes V \rightarrow H^0(K_C - N + L), \quad (1.2.2)$$

y tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^0(L) \otimes V & \xrightarrow{\mu_V} & H^0(K_C + L - N) \\ \downarrow i & \nearrow \mu & \\ H^0(L) \otimes H^0(K_C - N) & & \end{array}$$

donde $i : H^0(L) \otimes V \hookrightarrow H^0(L) \otimes H^0(K_C - N)$ es la inclusión natural. Dualizando obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^0(L)^* \otimes V^* & \longleftarrow & H^1(N - L) \\ \uparrow i^* & \nwarrow \partial & \\ H^0(L)^* \otimes H^1(N) & & \end{array}$$

donde el morfismo i^* es la proyección a $H^0(L)^* \otimes V^*$. Si $\{u = 0\} \subset H^0(K_C + L - N)$ denota el hiperplano definido por

$$u \in H^1(N - L) = H^0(K_C + L - N)^*$$

y $V \subset H^0(K_C - D)$ es tal que $Im(\mu_V) \subset \{u = 0\}$ entonces $\partial_u \in H^0(L)^* \otimes V^*$ por lo que

$$\dim(Im(\partial_u)) \leq \dim(V^*) = k - \dim(V) \text{ y } \text{cork}(\partial_u) \geq \dim(V).$$

Por la discusión anterior, si $u \in Ext^1(L, N)$ es una extensión, tal que existe un $V \subset H^0(K_C - N)$ de dimensión $v := \dim(V)$ con $Im(\mu_V) \subset \{u = 0\}$ entonces

$$\text{cork}(\partial_u) \geq v.$$

Por otro lado, si $u \in Ext^1(L, N)$ es tal que $\text{cork}(\partial_u) \geq t$ entonces

$$V = \text{cork}(\partial_u)^* \subset H^0(K_C - N),$$

satisface $Im(\mu_V) \subset \{u = 0\}$. Por lo tanto, podemos definir W_t como:

$$W_t = \{u \in Ext^1(L, N) \mid \exists V_t \subset H^0(K_C - N) \text{ t. q. } \dim(V) \geq t \text{ y } Im(\mu_V) \subset \{u = 0\}\} \quad (1.2.3)$$

DEFINICIÓN 1.2.1 *Supongamos $l \geq k \geq t \geq 1$. Una componente irreducible Λ_t de W_t se dice **buena componente** si satisface las siguientes dos propiedades:*

- i) Λ_t tiene la dimensión esperada, es decir $\dim(\Lambda_t) = m - t(l - k + t)$;
- ii) el elemento general $u \in \Lambda_t$ satisface $\text{cork}(\partial_u) = t$.

PROPOSICIÓN 1.2.2 *Sea C una curva de género $g \geq 3$ y $L, N \in Pic(C)$. Si $k \geq 1$, $l \geq \max\{1, k - 1\}$, $m \geq l + 1$, entonces:*

- i) $c(l, k, 1) = l - k + 1 \geq 0$;
- ii) W_1 es irreducible de la dimensión esperada $\dim(W_1) = m - c(l, k, 1) \geq k$.

Demostración.

- i) Claramente $c(l, k, 1) = l - k + 1$ es no negativo ya que $l \geq k - 1$.

ii) Como $l, k \geq 1$ entonces $L, K_C - N$ son efectivos y existe una sección nunca nula en $K_C - N$, que induce un morfismo inyectivo de la forma $0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow K_C - N$, que al hacer producto tensorial por L se convierte en

$$0 \rightarrow L \rightarrow K_C + L - N.$$

Por otro lado, si $V \in G(1, H^0(K_C - N))$ entonces el morfismo μ_V como en (1.2.2) es inyectivo. Como $m \geq l + 1$ entonces

$$\dim(\text{Im}(\mu_V)) = l \leq m - 1,$$

por lo que $\text{Im}(\mu_V)$ está contenida en algún hiperplano $\{u = 0\}$ de $H^0(K_C + L - N)$.

Sea $\mathbb{G} := G(l, H^0(L) \otimes H^0(K_C - N))$ y consideremos

$$\Sigma := \{\sigma = H^0(L) \otimes V \in \mathbb{G} \mid V \in G(1, H^0(K_C - N))\},$$

es claro ver que $\Sigma \cong G(1, H^0(K_C - N)) \cong \mathbb{P}(H^0(K_C - N))$, por lo que es irreducible y $\dim(\Sigma) = k - 1$. Definamos la variedad de incidencia

$$J := \{(\sigma, u) \in \Sigma \times \mathbb{P} \mid \text{Im}(\mu|_\sigma) \subset \{u = 0\}\},$$

donde $\mathbb{P} := \mathbb{P}(H^1(N - L))$ denota el conjunto de hiperplanos de la forma

$$\{u = 0\} \subset H^0(K_C + L - N)$$

donde $u \in H^1(N - L)$. Sean $p_1 : J \rightarrow \Sigma$ y $p_2 : J \rightarrow \mathbb{P}$ las proyecciones al primer y segundo factor respectivamente. Como p_1 es sobreyectiva, en particular $J \neq \emptyset$ y para cada $\sigma \in \Sigma$ tenemos que la fibra de p_1 es

$$p_1^{-1}(\sigma) = \{u \in \mathbb{P} \mid \text{Im}(\mu|_\sigma) \subset \{u = 0\}\},$$

es decir, la fibra es isomorfa a los hiperplanos de $H^0(K_C + L - N)$ que contienen a $\text{Im}(\mu|_\sigma)$, por lo que es irreducible de dimensión

$$\dim(p_1^{-1}(\sigma)) = m - 1 - l \geq 0.$$

Por lo tanto, J es irreducible y

$$\dim(J) = m - 1 - l + k - 1 = m - c(l, k, 1) - 1 \leq m - 1.$$

Debido a la definición alternativa de W_t como en (1.2.3), $Im(p_2) \subset \mathbb{P}(W_1)$ y $p_2 : J \rightarrow \mathbb{P}(W_1)$ es sobreyectiva, de donde se concluye que $\mathbb{P}(W_1)$ es irreducible. Más aún, esto implica que

$$\dim(\mathbb{P}(W_1)) = m - c(l, k, 1) - 1,$$

por lo que W_1 es irreducible de dimensión $\dim(W_1) = m - c(l, k, 1)$.

□

El siguiente resultado muestra la existencia de buenas componentes de W_1 .

COROLARIO 1.2.3 *Con las hipótesis como en la proposición 1.2.2, si $l \geq k$ entonces la inclusión de $W_1 \subset Ext^1(L, N)$ es estricta. Más aún, el elemento general $u \in W_1$ satisface $cork(\partial_u) = 1$.*

Demostración. Como $l \geq k$ entonces $m - c(l, k, 1) \leq m$ y $\dim(W_1) < m$, por lo que la inclusión es estricta. Por otro lado $p_2 : J \rightarrow \mathbb{P}(W_1)$ es sobreyectiva y $\dim(J) = \dim(\mathbb{P}(W_1))$ por lo que la fibra genérica de p_2 es cero-dimensional. Para todo $u \in \mathbb{P}(W_1)$ es claro ver que

$$\mathbb{P}(cork(\partial_u)) = G(1, cork(\partial_u)) \subset p_2^{-1}(u),$$

por lo tanto, si para el u general $cork(\partial_u) \geq 2$, entonces $\dim(p_2^{-1}(u)) \geq cork(\partial_u) - 1 \geq 1$ contradiciendo que p_2 es genéricamente inyectivo. □

1.3. El espacio global de extensiones

Para más detalle sobre la construcción dada en esta sección ver [1] y [7]. Sea C una curva de género $g \geq 3$ con moduli general y sean $L, N \in Pic(C)$, consideremos las extensiones de la forma

$$u : 0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0,$$

en $Ext^1(L, N)$.

Supongamos $j > 0, \ell > 0, n > 0$ y denotemos por $\rho(L), \rho(N)$ los números de Brill-Noether de L, N respectivamente. Definimos

$$W_L := \begin{cases} W_\delta^{l-1}(C) & \text{si } \rho(L) > 0 \\ \{L\} & \text{si } \rho(L) = 0 \end{cases}$$

$$W_N := \begin{cases} W_{d-\delta}^{n-1}(C) & \text{si } \rho(N) > 0 \\ \{N\} & \text{si } \rho(N) = 0 \end{cases}$$

Por la teoría de Brill-Noether para haces lineales (ver [1], capítulo 4), las variedades W_L y W_N son irreducibles y genéricamente suaves de dimensión $\rho(L)$ y $\rho(N)$ respectivamente. Consideremos

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow C \times \text{Pic}^d(C) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}_0 \rightarrow C \times \text{Pic}^{d-\delta}(C),$$

los haces lineales de Poincaré (ver [1]) y denotemos por \mathcal{L}, \mathcal{N} sus restricciones a W_L y W_N respectivamente.

Definimos los objetos

$$Y_\delta := \text{Pic}^{d-\delta}(C) \times W_L, \quad Z := W_N \times W_L \subset Y_\delta,$$

ambos son irreducible y tienen dimensión

$$\dim(Y_\delta) = g + \rho(L), \quad \dim(Z) = \rho(N) + \rho(L).$$

Consideremos las proyecciones

$$\pi_{12} : C \times Y_\delta \rightarrow C \times \text{Pic}^{d-\delta}(C),$$

$$\pi_{13} : C \times Y_\delta \rightarrow C \times W_L,$$

$$\pi_{23} : C \times Y_\delta \rightarrow Y_\delta.$$

Definimos el siguiente haz sobre Y_δ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\delta := R^1(\pi_{23})_*(\pi_{12}^*(\mathcal{N}) \otimes \pi_{13}^*(\mathcal{L}^*)).$$

Cuando $2\delta - d \geq 1$, \mathcal{E} es un haz vectorial de rango $m = 2\delta - d + g - 1$ (ver [1]). Cuando $d = 2\delta$, \mathcal{E} es un haz vectorial de rango $g - 1$ sobre $Y_\delta - \Delta_\delta$, donde

$$\Delta_\delta = \{(M, M) : M \in W_L\} \cong W_L.$$

Sea

$$\mathcal{U} := \begin{cases} Y_\delta & \text{si } 2\delta - d \geq 1 \\ Y_\delta - \Delta_\delta & \text{si } d = 2\delta \end{cases}$$

Consideremos el morfismo proyectivo $\gamma : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{U}$, cuya fibra en cada par $y = (N, L)$ es

$$\gamma^{-1}(y) = \mathbb{P}(\text{Ext}^1(L, N)) =: \mathbb{P}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{P}(\mathcal{E})) &= g + \rho(L) + m - 1, \\ \dim(\mathbb{P}(\mathcal{E})|_Z) &= \rho(N) + \rho(L) + m - 1. \end{aligned}$$

Ya que la semiestabilidad es una condición abierta, con las condiciones impuestas en g, d y δ existe un abierto denso $\mathbb{P}(\mathcal{E})^0 \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ y un morfismo

$$\pi_{d,\delta} : \mathbb{P}(\mathcal{E})^0 \rightarrow U_C(d).$$

Sea $\mathcal{V}_d^{\delta,j} := \text{Im}(\pi_{d,\delta})$ y $v_d^{\delta,j} = \dim(\mathcal{V}_d^{\delta,j})$. Para un $y = (N, L) \in Z$ general donde L, N son haces especiales, denotamos

$$\mathbb{P}(y) := \gamma^{-1}(y) \cong \mathbb{P}\text{Ext}^1(L, N).$$

Si N es efectivo, $d \geq \delta + g - k$. Por otro lado, la desigualdad $\rho(N) \geq 0$ implica $d \leq \delta + g - 1 + \frac{g}{k} - k$, entonces

$$\begin{aligned} g - 1 - j + k &\leq \delta \leq \min\left\{\frac{g}{j}, \frac{g - \epsilon}{t} + k - t - 1\right\}, \\ g + \delta - k &\leq d \leq \delta + g - 1 + \frac{g}{k} - k, \\ 2\delta - d &\geq \max\{2, g - t[\ell - k + t] - \epsilon\}, \end{aligned}$$

donde $\epsilon \in \{0, 1\}$ es tal que $d + g - t[\ell - k + t] \equiv \epsilon \pmod{2}$. Con estas condiciones numéricas para toda “buena componente” (en el sentido de [7]) de la forma

$$\mathbb{P}\Lambda_t(y) \subseteq \mathbb{P}W_t(y) \subset \mathbb{P}(y)$$

existe $\emptyset \neq \mathbb{P}W_t^{\text{Tot}} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$, donde un punto en $\mathbb{P}W_t^{\text{Tot}}$ se corresponde con los datos de un par $y = (N, L)$ y $u \in \mathbb{P}W_t(y)$.

Cualquier componente irreducible de $\mathbb{P}W_t^{\text{Tot}}$ tiene dimensión al menos

$$m - 1 + \rho(N) + \rho(L).$$

De la generalidad de y , para cualquier buena componente $\mathbb{P}\Lambda_t(y)$, existe una componente irreducible

$$\mathbb{P}\Lambda_t^{Tot} \subseteq \mathbb{P}\mathcal{W}_t^{Tot} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

tal que:

- i) $\mathbb{P}\Lambda_t^{Tot}$ domina Z ;
- ii) $\dim(\mathbb{P}\Lambda_t^{Tot}) = \dim(\mathbb{P}(\mathcal{E})) - t[l - n + t]$;
- iii) Si $(y, u) \in \mathbb{P}\Lambda_t^{Tot}$ es general, $\text{cork}(\partial_u) = t$;
- iv) Si $\lambda_\delta := \gamma|_{\mathbb{P}\Lambda_t^{Tot}}$, para y general entonces $\lambda_\delta^{-1}(y) = \mathbb{P}\Lambda_t^{Tot}$

DEFINICIÓN 1.3.1 Una componente $\mathbb{P}\Lambda_t^{Tot}$ que satisface las propiedades i)-iv) anteriores será llamada **buena componente total** de $\mathbb{P}\mathcal{W}_t^{Tot}$.

Capítulo 2

La geometría de $B(2, K_C, r)$

En este capítulo estudiamos los resultados clásicos de la teoría de Brill-Noether para haces de rango dos con determinante canónico. Empezamos por la relación entre el espacio tangente a $B(2, K_C, r)$ y la aplicación simétrica de Petri. En la primera sección calculamos la dimensión esperada de $B(2, K_C, r)$ y en la segunda sección estudiamos la construcción de las componentes regulares dadas en [13], [7] y [6].

Dada una curva C de género g , denotamos K_C su haz canónico y \mathcal{O}_C su haz trivial; Denotaremos por $U(n, d)$ el espacio moduli que parametriza haces estables de rango n y grado d sobre C ; dado $L \in \text{Pic}(C)$ denotaremos por $U(n, L)$ el moduli de haces estables de rango n con determinante L sobre C .

El espacio moduli $U(2, K_C) \subset U(2, 2g-2)$ que consiste de haces estables de rango 2 con determinante canónico, se define como la fibra en K_C del morfismo determinante:

$$\begin{aligned} \Delta : U(2, 2g-2) &\rightarrow \text{Pic}^{2g-2}(C) \\ E &\mapsto \wedge^2 E; \end{aligned}$$

$U(2, K_C)$ es una variedad irreducible, suave y de dimensión $3g-3$ (ver [12]). Definimos las variedades de Brill-Noether como

$$B(2, K_C, r) = \{E \in U(2, K_C) \mid h^0(E) \geq r\},$$

estas variedades parametrizan haces en $U(2, K_C)$ con al menos r secciones linealmente independientes y pueden ser dotadas de manera natural con una

estructura de esquema.

Consideremos la aplicación natural de Petri

$$P_E : H^0(E) \otimes H^0(E) \rightarrow H^0(E \otimes E).$$

Como $\wedge^2 E = K_C$ y $E^* \otimes K_C \cong \text{Hom}(E, K_C)$ existe un morfismo

$$\begin{aligned} \phi : E &\rightarrow E^* \otimes K_C \\ e &\mapsto \phi(e) \end{aligned}$$

que asigna a un elemento e el morfismo $\phi(e)$, donde

$$\begin{aligned} \phi(e) : E &\rightarrow K_C \\ v &\mapsto e \wedge v. \end{aligned}$$

el morfismo ϕ da una identificación $E \cong K_C \otimes E^*$.

Sea $\text{Trl}(E)$ la gavilla de endomorfismos de traza cero de E . Existe una descomposición natural de $E \otimes E^*$ en suma directa, dada por

$$\begin{aligned} E \otimes E^* &\rightarrow \mathcal{O}_C \oplus \text{Trl}(E) \\ \phi &\mapsto \left(\frac{\text{Tr}(\phi)}{2} \text{Id}, \phi - \frac{\text{Tr}(\phi)}{2} \text{Id} \right), \end{aligned}$$

donde $\text{Tr}(\phi)$ denota la traza del morfismo ϕ , Id denota el morfismo identidad y el morfismo inverso está dado por las dos inclusiones naturales. Entonces podemos identificar

$$E \otimes E \cong K_C \otimes E \otimes E^* \cong K_C \otimes (\mathcal{O}_C \oplus \text{Trl}(E)) \cong K_C \oplus (K_C \otimes \text{Trl}(E)),$$

además $S^2 E = K_C \otimes \text{Trl}(E)$. Por otro lado, existe una descomposición natural de $H^0(E) \otimes H^0(E)$ en suma directa

$$H^0(E) \otimes H^0(E) \cong \wedge^2 H^0(E) \oplus S^2 H^0(E)$$

Consideremos la composición de la aplicación de Petri con la proyección al sumando directo $H^0(S^2 E)$

$$H^0(E) \otimes H^0(E) \rightarrow H^0(E \otimes E) \rightarrow H^0(S^2 E).$$

La restricción de esta composición a $S^2 H^0(E)$ es llamada **la aplicación simétrica de Petri** de E y denotada

$$\mu_E : S^2 H^0(E) \rightarrow H^0(S^2 E).$$

PROPOSICIÓN 2.0.2 *El espacio tangente a $B(2, K_C, r)$ en un punto E se identifica con el espacio ortogonal a la imagen de la aplicación simétrica de Petri μ_E .*

Demostración. El espacio tangente a $U(2, 2g - 2)$ en un punto E se identifica con $H^1(E \otimes E^*)$ (ver [12]), por lo que primero debemos identificar el espacio tangente a $U(2, K)$ como subespacio de $H^1(E \otimes E^*)$, es decir, estudiar las deformaciones \mathcal{E}_ϵ del haz E que preservan el determinante (ver [20]). Sea ϕ_{ij} un representante de un elemento en $H^1(E \otimes E^*)$ y sea e_1, e_2 una base local para la fibra de E en el abierto U_i . Entonces $e_1 \wedge e_2$ es una base para $\wedge^2 E$ en U_i . Notemos que $e_1 \wedge e_2$ se pega en U_j con

$$(e_1 + \epsilon\phi_{ij}(e_1)) \wedge (e_2 + \epsilon\phi_{ij}(e_2)) = e_1 \wedge e_2 + \epsilon(\phi_{ij}(e_1) \wedge e_2 + e_1 \wedge \phi_{ij}(e_2)); \quad (2.0.1)$$

considerando ϕ_{ij} como una matriz (de 2×2) en terminos de la base e_1, e_2

$$\phi_{ij} = (a_{ij}),$$

podemos calcular explícitamente el último sumando de 2.0.1:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(e_1) \wedge e_2 + e_1 \wedge \phi_{ij}(e_2) &= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2) \wedge e_2 + e_1 \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (a_{11} + a_{22})(e_1 \wedge e_2) \\ &= \text{Tr}(\phi_{ij})(e_1 \wedge e_2). \end{aligned}$$

Por lo anterior, el pegado $(e_1 + \epsilon\phi_{ij}(e_1)) \wedge (e_2 + \epsilon\phi_{ij}(e_2))$ preserva el determinante si y sólo si la traza es cero, es decir las deformaciones que preservan el determinante son aquellas de traza cero y el espacio tangente $T_E U(2, K_C)$ como subespacio de $T_E U(2, 2g - 2) \cong H^1(E \otimes E)$ se identifica con el subespacio

$$T_E U(2, K_C) \cong H^1(\text{Trl}(E)),$$

mediante $E \otimes E^* \cong \mathcal{O}_C \oplus \text{Trl}(E)$.

Hemos calculado el espacio tangente a $U(2, K_C)$, ahora necesitamos estudiar $T_E B(2, K_C, r)$ como subespacio de $T_E U(2, K_C)$. Por [12] las deformaciones que preservan cierto número de secciones se identifican con el ortogonal a la imagen de la aplicación de Petri P_E , por lo que debemos calcular la intersección de este ortogonal con $T_E U(2, K_C) \cong H^1(\text{Trl}(E))$.

Por el teorema de Riemann-Roch y las identificaciones anteriores tenemos

$$H^1(\mathrm{Tr}l(E)) = H^0(K \otimes \mathrm{Tr}l(E))^* = H^0(S^2E)$$

y debido a que $P_E(\wedge^2 H^0(E)) \subset H^0(K_C)$, podemos concluir

$$\mathrm{Im}(P_E)^\perp \cap H^1(\mathrm{Tr}l(E)) = \mathrm{Im}(P_E|_{S^2H^0(E)})^\perp \cap H^1(\mathrm{Tr}l(E)) = \mathrm{Im}(\mu_E)^\perp;$$

por lo que el espacio tangente a $B(2, K_C, r)$ se identifica con el espacio ortogonal a la imagen de la aplicación simétrica de Petri

$$T_E B(2, K_C, r) \cong \mathrm{Im}(\mu_E)^\perp.$$

□

El siguiente teorema fue conjeturado por S. Mukai en [17], por A. Bertram y B. Feinberg en [5] y probado por M. Teixidor en [22]:

TEOREMA 2.0.3 *Sea C una curva general y $E \in B(2, K_C, r)$. Entonces la aplicación simétrica de Petri $\mu_E : S^2 H^0(E) \rightarrow H^0(S^2 E)$ es inyectiva.*

2.1. Construcción Bertram-Feinberg-Mukai

La siguiente construcción fue dada en [5] y calcula la dimensión esperada de cualquier componente de $B(2, K_C, r)$ cuyo elemento general posee una sección nunca nula. Ver [18] para una manera diferente de obtener la dimensión esperada (por medio de stacks).

PROPOSICIÓN 2.1.1 *Sea C una curva de género $g \geq 3$. Si $B \subset B(2, K_C, r)$ es una componente irreducible tal que el elemento general $E \in B$ acepta una sección nunca nula entonces la dimensión esperada de B es el número de Brill-Noether ρ definido como*

$$\rho := 3g - 3 - \binom{r+1}{2},$$

es decir, $\dim(B) \geq \rho$.

Demostración. Sea $\mathbb{P}(Ext^1(K_C, \mathcal{O}_C)) = \mathbb{P}H^0(2K_C)^*$ el espacio proyectivo que parametriza extensiones de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow K_C \rightarrow 0.$$

Para cada elemento $E \in B$ que acepta una sección nunca nula existe una inclusión de la forma

$$\mathcal{O}_C \hookrightarrow E,$$

por lo que existe una sucesión $\xi \in Ext^1(K_C, \mathcal{O}_C)$ tal que

$$\xi : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow K_C \rightarrow 0.$$

Por otro lado, consideremos el morfismo racional de extensiones

$$\phi : \mathbb{P}(Ext^1(K_C, \mathcal{O}_C)) \dashrightarrow \Theta,$$

donde $\Theta = \{E \in U(2, 2g - 2) | h^0(E) > 0\}$ (ver [4]). Si $\xi \in Ext^1(K_C, \mathcal{O}_C)$ y E es un haz estable, entonces tiene una sección nunca nula (la que se corresponde con $\mathcal{O}_C \hookrightarrow E$) y $E \in \Theta$.

La sucesión exacta $\xi : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow K_C \rightarrow 0$, da lugar a una sucesión exacta en la cohomología de la forma:

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H^0(E) \rightarrow H^0(K_C) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(E) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0.$$

Denotemos ∂_E el morfismo cofrontera $\partial_E : H^0(K_C) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_C)$. Notemos que por dualidad de Serre $H^0(K_C)^* = H^1(\mathcal{O}_C)$ y además tenemos que

$$Hom(H^0(K_C), H^1(\mathcal{O}_C)) = H^0(K_C)^* \otimes H^0(K_C)^*.$$

Entonces el morfismo

$$\partial : Ext^1(K_C, \mathcal{O}_C) \rightarrow Hom(H^0(K_C), H^1(\mathcal{O}_C)) = H^0(K_C)^* \otimes H^1(\mathcal{O}_C),$$

que asigna a cada extensión $\xi : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow K_C \rightarrow 0$ su morfismo cofrontera ∂_E , es exactamente el morfismo

$$H^0(2K_C)^* \rightarrow H^0(K_C)^* \otimes H^0(K_C)^*,$$

que es dual al morfismo multiplicación

$$H^0(K_C) \otimes H^0(K_C) \rightarrow H^0(2K_C).$$

Por otro lado, como C no es hiperelíptica por el teorema de Noether ([1], capítulo 3.2) el morfismo multiplicación $S^2H^0(K_C) \rightarrow H^0(2K_C)$ es sobreyectivo, por lo que su dual

$$H^0(2K_C)^* \rightarrow S^2H^0(K_C)^*,$$

es inyectivo, es decir,

$$\mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C)) \cong \mathbb{P}H^0(2K_C)^* \hookrightarrow \mathbb{P}(S^2H^0(K_C)^*) \subset \mathbb{P}(H^0(K_C)^* \otimes H^0(K_C)^*)$$

y ∂_E es simétrico para todas las clases de extensiones $\xi \in \mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C))$.

De la sucesión en la cohomología tenemos

$$h^0(E) = 1 + \dim(\text{Ker}(\partial_E)),$$

por lo que $h^0(E) \geq r$ si y sólo si $\dim(\text{Ker}(\partial_E)) \geq r - 1$. Denotemos D_{r-1} el lugar geométrico de elementos en $\mathbb{P}(S^2H^0(K_C)^*)$ cuyo Kernel del morfismo cofrontera tiene dimensión al menos $r - 1$. Como $\mathbb{P}(S^2H^0(K_C)^*)$ es isomorfo a la proyectivización del espacio vectorial de matrices simétricas de $g \times g$, D_{r-1} es el subespacio de matrices simétricas con Kernel de dimensión al menos $r - 1$, por lo que de la teoría de variedades determinantaes tenemos que $\text{codim}(D_{r-1}) = \binom{r}{2}$. Entonces los elementos en $\mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C)) \cap D_{r-1}$ que definen haces mediante ϕ , están en una componente de $B(2, K_C, r)$ y se corresponden con haces con una sección nunca nula.

Si $E \in \Theta$ es un haz estable con una sección nunca nula su fibra en

$$\mathbb{P}(\text{Ext}^1(K, \mathcal{O}_C),$$

mediante ϕ tiene dimensión menor o igual que $r - 1$ (ver [4], lema 4.1). De todo lo anterior, la restricción del morfismo racional ϕ a

$$\mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C) \cap D_{r-1},$$

se factoriza mediante

$$\hat{\phi} : \mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C)) \cap D_{r-1} \dashrightarrow B(2, K_C, r),$$

y su imagen tiene dimensión:

$$\begin{aligned}
\dim(\text{Im}\hat{\phi}) &\geq \dim(\mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C) \cap D_{r-1}) - (r-1)) \\
&\geq \dim(\mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C))) + \dim(D_{r-1}) - \dim(\mathbb{P}(S^2H^0(K_C)^*)) - (r-1) \\
&= 3g - 4 - \text{codim}(D_{r-1}) - (r-1) \\
&= 3g - 3 - \binom{r+1}{2}.
\end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 2.1.2 Una componente irreducible B de $B(2, K_C, r)$ se dice **regular** si satisface las siguientes condiciones:

- i) $\dim(B) = \rho$ (tiene la dimensión esperada);
- ii) $B \cap \text{Sing}(B(2, K_C, r)) = B \cap B(2, K_C, r+1)$ (tiene el lugar singular esperado);
- iii) el elemento general $E \in B$ satisface $h^0(E) = r$ (el elemento general tiene las secciones esperadas).

Por 2.0.3, si $E \in B(2, K_C, r)$ es un haz que satisface $h^0(E) = r$ entonces μ_E es inyectivo. Por el teorema de Riemann-Roch tenemos $h^0(E \otimes E^*) - h^1(E \otimes E^*) = 4 - 4g$; como E es estable entonces $h^0(E \otimes E^*) = 1$ y de la identificación $K_C \otimes E^* = E$ tenemos $h^0(E \otimes E) = h^1(E \otimes E^*) = 4g - 3$; debido a la descomposición en suma directa $E \otimes E = K_C \oplus S^2E$ obtenemos $h^0(S^2E) = 3g - 3$ y

$$\begin{aligned}
\dim(T_E B(2, K_C, r)) &= \dim(\text{Im}(\mu_E)^\perp) \\
&= \dim(H^0(S^2E)) - \dim(S^2H^0(E)) \\
&= 3g - 3 - (r^2 - \binom{r}{2}) \\
&= 3g - 3 - \binom{r+1}{2} \\
&= \rho
\end{aligned}$$

por lo anterior el lugar singular $\text{Sing}(B(2, K_C, r))$ esperado de $B(2, K_C, r)$ es $B(2, K_C, r+1)$ y tenemos la siguiente:

OBSERVACIÓN 2.1.3

Notemos que la proposición 2.1.1 implica que si $B \subset B(2, K_C, r)$ es una componente irreducible donde el elemento general acepta una sección nunca nula y donde existe un elemento $E \in B$ que satisface $h^0(E) = r$ entonces $\dim(B) = \rho$ y B es una componente regular. Por otro lado, también implica que si $B \subset B(2, K_C, r)$ es una componente donde el elemento general $E \in B$ satisface $h^0(E) = r$ y acepta una sección nunca nula entonces B es regular.

2.2. Existencia de componentes regulares

El siguiente teorema, demostrado en [21], muestra que sobre una curva general C , la variedad $B(2, K_C, r)$ tiene una componente de la dimensión esperada:

TEOREMA 2.2.1 *Sea C una curva general de género g . Si $r = 2k_1$ es par, entonces $B(2, K_C, r)$ es no vacío cuando*

$$\begin{aligned} g &\geq k_1^2 \text{ si } k_1 > 2; \\ g &\geq 5 \text{ si } k_1 = 2; \\ g &\geq 3 \text{ si } k_1 = 1. \end{aligned}$$

Más aún, bajo estas condiciones tiene una componente de la dimensión esperada ρ . Si $r = 2k_1 + 1$ es impar, entonces $B(2, K_C, r)$ es no vacío cuando $g \geq (k_1)^2 + k_1 + 1$. Más aún, bajo estas condiciones tiene una componente de la dimensión esperada.

2.2.1. Haces globalmente generados en $B(2, K_C, 3)$

A continuación estudiaremos la construcción dada en [13], donde los autores utilizando variedades Grassmannianas encuentran una componente regular de $B(2, K_C, 3)$ que contiene a todos los haces globalmente generados.

Sea E un haz de rango 2 generado por sus secciones globales tal que $h^0(E) = 3$ y $\wedge^2 E = K_C$ (no necesariamente estable), entonces el morfismo evaluación de secciones

$$e_E : H^0(E) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow 0,$$

es sobreyectivo y tenemos una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \rightarrow K_C^* \rightarrow H^0(E) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow 0;$$

dualizando obtenemos

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow H^0(E)^* \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow K_C \rightarrow 0;$$

que induce un morfismo en la cohomología $\pi : H^0(E)^* \rightarrow H^0(K_C)$ denotemos $W_E := \text{Im}(\pi)$. El espacio $\wedge^2 H^0(E)$ tiene dimensión 3. Consideremos el morfismo natural,

$$\alpha : \wedge^2 H^0(E) \rightarrow H^0(\wedge^2 E) = H^0(K_C)$$

LEMA 2.2.2 *Sea C una curva general de género $g \geq 4$ y E un haz sobre C , de rango 2 globalmente generado y con determinante canónico, tal que $h^0(E) = 3$. Entonces, en la notación anterior:*

- i) π es inyectivo y entonces $\dim(W_E) = 3$;
- ii) α es inyectivo y $\text{Im}(\alpha) = W_E$;
- iii) para todo subhaz lineal $L \subset E$, $h^0(L) \leq 1$;
- iv) E es estable.

Demostración.

- i) Es suficiente probar que $H^0(E^*) = 0$. Supongamos que existe una sección no cero $s \in H^0(E^*)$, sea L la subgavilla de E^* generada por s , entonces $h^0(L) \geq 1$ por lo que $\deg(L) \geq 0$ y $\deg(L \otimes K_C) \geq 2g - 2$, y concluimos que $h^0(L \otimes K_C) \geq g - 1$. Por otro lado $L \otimes K_C$ es una subgavilla de $E^* \otimes K_C = E$ por lo que $h^0(E) \geq g - 1$. Si $g > 4$, esto contradice $h^0(E) = 3$. Si $g = 4$, esto contradice la generación global de E .
- ii) Sea $p \in C$ un punto general, como E es globalmente generado el morfismo evaluación en la fibra $(H^0(E) \otimes \mathcal{O}_C)_p \rightarrow E_p$ es sobreyectivo, denotemos por s_p una base del Kernel de este morfismo. Sea $V_p \subset H^0(E)^*$ el espacio dual a $\langle s_p \rangle$, entonces su imagen bajo π es el espacio de dimensión 2,

$$\pi(V_p) = \{w \in W_E \mid w(p) = 0\}.$$

El morfismo que asigna $p \mapsto \pi(V_p)$ es la composición del encaje canónico

$$\begin{aligned} \phi_{K_C} : C &\rightarrow \mathbb{P}^{g-1} \\ p &\mapsto \{t \in H^0(K_C) | t(p) = 0\}, \end{aligned}$$

seguido de la proyección a W_E . Como la curva canónica genera al sistema canónico, entonces $\langle \{s_p | p \in C\} \rangle = H^0(E)$. Si $p, q \in C$ son dos puntos generales $\alpha(s_p \wedge s_q) \neq 0$, de otro modo $\alpha(s_p \wedge s_q) = 0$ para todo p, q por lo que sus imágenes son linealmente dependientes y generan linealmente una subgavilla de rango 1 de E , pero $\langle \{s_p | p \in C\} \rangle = H^0(E)$ contradiciendo que E es globalmente generado. Sean $p, q \in C$ puntos generales, entonces $\dim(V_p \cap V_q) = 1$, denotemos por w_{pq} una base de

$$\pi(V_p \cap V_q) = \{w \in W_E | w(p) = w(q) = 0\}.$$

A continuación demostraremos que

$$w_{pq} = \alpha(s_p \wedge s_q),$$

de aquí se seguirá que $W_E \subset \text{Im}(\alpha)$ y por lo tanto

$$3 = \dim(W_E) \leq \dim(\text{Im}(\alpha)) \leq \dim(\wedge^2 H^0(E)) = 3,$$

por lo que todas son igualdades y $W_E = \text{Im}(\alpha)$, que además implica que α es inyectivo. Sea $r \in C$ un zero de w_{pq} , entonces $w_{pq} \in \pi(V_r)$ y podemos considerar $w_{pq} \in V_p \cap V_q \cap V_r$ por lo que $\{s_p, s_q, s_r\}$ son linealmente dependientes, por hipótesis $\{s_p, s_q\}$ son linealmente independientes por lo que $s_r = as_p + bs_q$ para ciertos $a, b \in \mathbb{C}$, de este modo $0 = s_p(r) \wedge s_r(r) = bs_p \wedge s_q(r)$ y $s_p \wedge s_q$ se anula en r , en particular la forma diferencial $\alpha(s_p \wedge s_q)$ es cero en r . Esto prueba que todo cero de w_{pq} es también un cero de $\alpha(s_p \wedge s_q)$ y debido a la posición general de p y q podemos concluir que las diferenciales son la misma.

- iii) Si $L \subset E$ es un subhaz lineal con $h^0(L) \geq 2$, entonces existen secciones linealmente independientes $s, t \in H^0(L)$; mediante el morfismo

$$H^0(L) \hookrightarrow H^0(E),$$

podemos considerar $s, t \in H^0(E)$. Como $s, t \in H^0(L)$ entonces para todo punto $p \in C$, las evaluaciones $s(p)$ y $t(p)$ son linealmente dependientes en la fibra E_p . Entonces

$$s \wedge t \neq 0 \text{ y } \alpha(s \wedge t) = 0,$$

contradiendo la inyectividad de α .

- iv) La inclinación de E es $\mu(E) = \deg(E)/2 = g - 1$. Supongamos que $L \subset E$ es un subhaz lineal de grado maximal y supongamos $\deg(L) \geq g - 1$. Entonces, por el teorema de Riemann-Roch $h^0(L) \geq h^0(K_C - L)$. La sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow K_C - L \rightarrow 0,$$

muestra que $3 = h^0(E) \leq h^0(L) + h^0(K_C - L) \leq 2h^0(L)$ por lo que $h^0(L) \geq 2$, lo que contradice el inciso anterior.

□

Ahora veremos cómo se relacionan los haces globalmente generados en $B(2, K_C, 3)$ con la variedad Grassmanniana $G(3, H^0(K_C))$: utilizaremos el siguiente resultado.

LEMA 2.2.3 (Ver [9].) *Sea $V \in G(3, H^0(K_C))$ general. Entonces el morfismo evaluación $e_V : V \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow K_C$ es sobreyectivo.*

Por el lema anterior, el Kernel del morfismo evaluación e_V para un $V \in G(3, H^0(K_C))$ general es un haz de rango 2 y existe una sucesión exacta de la forma:

$$0 \rightarrow F_V \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow K_C \rightarrow 0;$$

dualizando esta sucesión y denotando $E_V := F_V^*$

$$0 \rightarrow K_C^* \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E_V \rightarrow 0;$$

que induce un morfismo inyectivo en la cohomología $V^* \rightarrow H^0(E)$ por lo que E_V es generado por secciones globales. Denotemos por

$$p : G(3, H^0(K_C)) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^3 H^0(K_C)),$$

el encaje de Plücker (ver [10], sección 1.5). Si $V \in G(3, H^0(K_C))$, denotemos por $\mu_V : V \otimes H^0(K_C) \rightarrow H^0(2K_C)$ el morfismo multiplicación de secciones. Para el elemento general $V \in G(3, H^0(K_C))$ el morfismo μ_V es sobreyectivo (ver [9]). Denotemos por $D_C \subset G(3, H^0(K_C))$ el lugar geométrico que consiste de elementos V tales que μ_V no es sobreyectivo.

Sea $B^{gg}(2, K_C, 3) \subset B(2, K_C, 3)$ el lugar geométrico que consiste de haces E globalmente generados con $h^0(E) = 3$.

PROPOSICIÓN 2.2.4 *El morfismo*

$$\begin{aligned} S : B^{gg}(2, K_C, 3) &\rightarrow G(3, H^0(K_C)) - D_C \\ E &\mapsto W_E; \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Su inversa es el morfismo

$$\begin{aligned} \beta : G(3, H^0(K_C)) - D_C &\rightarrow B^{gg}(3, K_C, 3) \\ V &\mapsto E_V; \end{aligned}$$

Demostración. Notemos que $Im(S) \subset G(3, H^0(K_C))$. De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_C^* \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E_V \rightarrow 0,$$

y el hecho de que $h^0(E) = 3$ induce en la cohomología el morfismo inyectivo $H^1(K_C^*) \rightarrow V^* \otimes H^1(\mathcal{O}_C)$, entonces el dual a este morfismo, que es la multiplicación de secciones μ_V es sobreyectivo. Por la discusión anterior, S está bien definido. Para ver que β está bien definido es suficiente ver que tales E_V son estables y $h^0(E_V) = 3$: de la sucesión

$$0 \rightarrow E_V^* \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow K_C \rightarrow 0;$$

al hacer producto tensorial por K_C y calcular la cohomología obtenemos:

$$0 \rightarrow H^0(E_V^* \otimes K_C) \rightarrow V \otimes H^0(K_C) \rightarrow H^0(2K_C);$$

por lo que $Ker(\mu_V) = H^0(E_V^* \otimes K_C)$. Por otro lado, como el determinante de E_V es canónico, existe un isomorfismo natural $E_V^* \otimes K_C = E_V$ y como μ_V es sobreyectivo, entonces $h^0(E_V) = 3$. Del lema 2.2.2 se sigue que E_V es estable y β está bien definido. Es claro que S y β son inversos uno del otro. \square

Del resultado anterior podemos concluir que el lugar geométrico

$$B^{gg} := \overline{B^{gg}(3, K_C, 3)} \subset B(2, K_C, 3),$$

es un cerrado irreducible de dimensión $3g - 9$ y por el teorema 2.0.3 su lugar singular satisface

$$\text{Sing}(B^{gg}) \subset B(2, K_C, 4).$$

Se sigue que existe una componente irreducible $B^{gg} \subset B(2, K_C, 3)$ que contiene a todos los haces estables globalmente generados.

2.2.2. Haces globalmente generados en $B(2, K_C, 4)$

En esta sección estudiamos la construcción dada en [6], del morfismo Q definido como $(E, V) \mapsto Q_E$ que asigna a cada par de la forma (E, V) donde $E \in B(2, K_C, 4)$ y $V \in G(4, H^0(E))$, una cuádrica Q_E que contiene a la curva canónica.

Consideremos los pares (E, V) donde $E \rightarrow C$ es un haz estable de rango dos con determinante canónico y al menos cuatro secciones globales linealmente independientes. Sea $V \in G(4, H^0(E))$ tal que el morfismo evaluación de secciones de V

$$e_V : V \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E,$$

es sobreyectivo. Diremos que dos pares (E_1, V_1) y (E_2, V_2) son equivalentes (o isomorfos) si existe un isomorfismo $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ tal que $V_2 = \phi(V_1)$.

Si (E, V) es un par, entonces existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \text{Coker}(e_V^*) \rightarrow 0,$$

donde $\text{Coker}(e_V^*)$ es un haz de rango dos con determinante canónico y $V^* \subset H^0(\text{Coker}(e_V^*))$ se identifica con un subespacio de secciones que generan a $E' := \text{Coker}(e_V^*)$, es decir, esto define otro par

$$(E', V') = (\text{Coker}(e_V^*), V^*).$$

DEFINICIÓN 2.2.5 (E', V') es el par dual a (E, V) .

Notemos que $(E, V) = ((E')', (V')')$. Consideremos el morfismo natural $\alpha : \wedge^2(E) \rightarrow H^0(K)$ y denotemos $\alpha_V := \alpha|_{\wedge^2 V} : \wedge^2 V \rightarrow H^0(K)$.

Sea $G(V) := G(2, V^*)$, notemos que $\dim(G) = 4$ y mediante el encaje de Plücker

$$\phi_{G(V)} : G(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^2 V^*) \cong \mathbb{P}^5,$$

podemos considerar $G(V)$ como los elementos indescomponibles en $\mathbb{P}(\wedge^2 V^*) \cong \mathbb{P}^5$, más aún, $\phi_{G(V)}(G(V)) \subset \mathbb{P}^5$ es una hipersuperficie cuádrica suave (ver [10], sección 1.5).

Como e_V es sobreyectivo, entonces existe una sucesión

$$0 \rightarrow \text{Ker}(e_V) \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow 0,$$

y el morfismo dual e_V^* induce un morfismo racional definido en los puntos $x \in C$ donde $V \otimes \mathcal{O}_x \rightarrow E_x$ es sobreyectivo:

$$\begin{aligned} g_V : C &\rightarrow G(V) \\ x &\mapsto \text{Im}(e_V^*), \end{aligned}$$

o bien, considerando $\phi_{G(V)}(G(V)) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V)$ y denotando $V_x^* = \text{Im}(e_V^*)$ la composición $G_V := \phi_{G(V)} \circ g_V$ es

$$\begin{aligned} G_V : C &\rightarrow \mathbb{P}(\wedge^2 V) \\ x &\mapsto \wedge^2 V_x^*. \end{aligned}$$

Sea δ_V la projectivización del morfismo dual $\alpha_V^* : H^0(K_C)^* \rightarrow \wedge^2 V^*$,

$$\delta_V : \mathbb{P}H^0(K_C)^* \rightarrow \mathbb{P} \wedge^2 V^*.$$

Sea $\phi_K : C \hookrightarrow \mathbb{P}H^0(K_C)^* \cong \mathbb{P}^{g-1}$ el encaje canónico, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{g-1} & \xrightarrow{\delta_V} & \mathbb{P}^5 \\ \uparrow \phi_K & & \uparrow \phi_{G(V)} \\ C & \xrightarrow{g_V} & G(V) \end{array}$$

Si p es una ecuación para la cuádrica $G(V) \subset \mathbb{P}^5$ y $q(E, V)$ es el polinomio definido en $H^0(K_C)^*$ mediante $q(E, V) := (\alpha_V^*)^* p$, entonces $\delta_V^*(G_V(C))$ (si es no vacío) define una cuádrica en \mathbb{P}^{g-1} que contiene a la curva canónica, es decir

$$\phi_K(C) \subset \delta_V^*(G_V(C));$$

denotaremos $Q_E := \delta_V^*(G_V(C))$.

LEMA 2.2.6 (Ver [6].) *Con la notación anterior, sea $K := \text{Ker}(\alpha_V^*)$ y $I := \text{Im}(\alpha_V^*)$ entonces la cuádrica Q_E puede ser considerada como un cono con eje $\mathbb{P}K$ sobre la cuádrica $\mathbb{P}I \cap G(V)$. En particular, $\mathbb{P}K \subset \text{Sing}(Q_E)$ y se satisfacen las siguientes propiedades:*

- i) $\mathbb{P}K = \text{Sing}(Q_E)$ si y sólo si $\mathbb{P}I$ es transversal a $G(V)$;
- ii) Si la cuádrica $q(E, V)$ tiene rango al menos 5 entonces $\mathbb{P}K = \text{Sing}(Q_E)$.

Sea (E, V) un par y sean \mathcal{U}_V el subhaz universal de $G(V)$ y \mathcal{Q}_V el haz cociente de $G(V)$, entonces de la definición de g_V existen isomorfismos

$$g_V^* \mathcal{U}_V \cong \text{Im}(e_V^*) \cong \text{Im}(e_V)^* \text{ y } g_V^* \mathcal{Q}_V \cong \text{Ker}(e_V^*) \cong \text{Ker}(e_V)^*.$$

Más aún, la sucesión

$$0 \rightarrow g_V^* \mathcal{U}_V^* \rightarrow E \rightarrow \text{Coker}(e_V) \rightarrow 0,$$

es exacta. En particular, los isomorfismos

$$E \cong g_V^* \mathcal{U}_V^* \text{ y } E' \cong g_V^* \mathcal{Q}_V,$$

se satisfacen si y sólo si V genera a E y en este caso la sucesión

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \text{Coker}(e_V^*) \rightarrow 0,$$

es el “pull-back” mediante g_V de la sucesión universal, es decir, es precisamente

$$0 \rightarrow g_V^* \mathcal{U}_V \rightarrow g_V^* V^* \otimes \mathcal{O}_{G(V)} \rightarrow g_V^* \mathcal{Q}_V \rightarrow 0.$$

LEMA 2.2.7 *Sea $(E_1, V_1), (E_2, V_2)$ dos pares que satisfacen las siguientes propiedades*

- i) $q(E_1, V_1) = q(E_2, V_2)$;
- ii) $\text{Ker}(\alpha_{V_1}^*) = \text{Ker}(\alpha_{V_2}^*)$;

entonces los pares (E_2, V_2) y (E_1, V_1) son isomorfos o duales.

Demostración. Es suficiente probar que existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow E_2^* \rightarrow V_1 \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E_1 \rightarrow 0,$$

que satisface que si $\pi_1 : V_1^* \rightarrow H^0(E_2)$ es el morfismo inducido en la cohomología de su sucesión dual, entonces $Im(\pi_1) = V_2$.

Sea $i = 1, 2$ y consideremos el morfismo $g_{V_i} : C \rightarrow G(V_i)$. Como V_i genera a E_i entonces $E_i^* = g_{V_i}^* \mathcal{U}_{V_i}$. Ya que $Ker(\alpha_{V_1}^*) = Ker(\alpha_{V_2}^*)$, existe un único isomorfismo $\phi : Im(\alpha_{V_1}^*) \rightarrow Im(\alpha_{V_2}^*)$ tal que

$$\alpha_{V_2}^* = \phi \circ \alpha_{V_1}^*;$$

sea $v \in \wedge^2 V_1^*$ un vector indescomponible y $v = \alpha_{V_1}^*(h)$ donde $h \in H^0(K_C)^*$, entonces el polinomio $q(E_1, V_1) = q(E_2, V_2)$ se anula en h por lo tanto $\alpha_{V_2}(h) = \phi(v)$ es irreducible. Por lo anterior ϕ preserva vectores indescomponibles y existe un isomorfismo $f : G(V_1) \rightarrow G(V_2)$ tal que

$$g_{V_2} = f \circ g_{V_1}.$$

Por las propiedades del haz cociente y del subhaz universal sobre la Grassmanniana $G(2, 4)$ (ver [10], sección 1.5), debe pasar uno de los siguientes dos casos:

caso 1) $f^* \mathcal{U}_{V_2} \cong \mathcal{U}_{V_1}$: como $g_{V_2}^* = g_{V_1}^* \circ f^*$ entonces existen isomorfismos $\mathcal{U}_{V_1}^* \cong f^* \mathcal{U}_{V_2}^*$ y $E_i \cong g_{V_i}^* \mathcal{U}_{V_i}^*$ para $i = 1, 2$, por lo tanto

$$E_1 \cong g_{V_1}^* \mathcal{U}_{V_1}^* \cong g_{V_1}^* f^* \mathcal{U}_{V_2}^* \cong g_{V_2}^* \mathcal{U}_{V_2}^* \cong E_2,$$

y los pares (E_1, V_1) y (E_2, V_2) deben ser isomorfismos.

caso 2) $f^* \mathcal{U}_{V_2} \cong \mathcal{Q}_{V_1}^*$: aplicando f^* a la sucesión universal de $G(V_2)$

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_{V_2} \rightarrow V_2^* \otimes \mathcal{O}_{G(V_2)^*} \rightarrow \mathcal{Q}_{V_2} \rightarrow 0,$$

e identificando $f^* \mathcal{Q}_{V_2} = \mathcal{U}_{V_1}^*$, obtenemos la sucesión

$$0 \rightarrow f^* \mathcal{U}_{V_2} \rightarrow V_1^* \otimes \mathcal{O}_{G(V_1)^*} \rightarrow \mathcal{U}_{V_1}^* \rightarrow 0.$$

Aplicando $g_{V_1}^*$ a esta sucesión e identificando $E_1 = g_{V_1}^* \mathcal{U}_{V_1}^*$ obtenemos

$$0 \rightarrow g_{V_1}^* \circ f^* \mathcal{U}_{V_2} \rightarrow V_1 \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E_1 \rightarrow 0,$$

y por la igualdad $g_{V_2}^* = g_{V_1}^* \circ f^*$ obtenemos la sucesión

$$0 \rightarrow E_2^* \rightarrow V_1 \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E_1 \rightarrow 0,$$

por lo que $(E_2, V_2) = (E_1, V_1)$, lo cual termina la prueba. \square

Denotemos por $I_6(C)$ el conjunto de cuádricas de rango menor o igual a 6 en \mathbb{P}^{g-1} que contienen a la curva canónica.

LEMA 2.2.8 *Si $Z \in I_6(C)$ tal que $\text{Sing}(Z) \cap C = \emptyset$ entonces existe un par (E, V) tal que $Z = Q_E$. Más aún, si $\text{rango}(Z) \geq 5$ y dos pares $(E_1, V_1), (E_2, V_2)$ satisfacen $Q_{E_1} = Q_{E_2} = Z$ entonces son equivalentes o duales.*

Demostración. Sea $Z \in I_6(C)$ y denotemos $r := \text{rango}(Z)$. Existen coordenadas de \mathbb{P}^{g-1} tales que $Z = Z(x_1^2 + \dots + x_r^2)$; en estas coordenadas

$$\text{Sing}(Z) = Z(2x_1, \dots, 2x_r) = Z(x_1, \dots, x_r),$$

por lo que podemos definir la proyección de Z a las coordenadas x_1, \dots, x_r ,

$$\pi : Z - \text{Sing}(Z) \rightarrow \mathbb{P}^{r-1} \subset \mathbb{P}^5,$$

esta es la proyección de Z con centro $\text{Sing}(Z)$. Además $\pi(Z - \text{Sing}(Z))$ es la cuádrica en \mathbb{P}^{r-1} definida por la ecuación $x_1^2 + \dots + x_r^2$. Como $C \cap \text{Sing}(Z) = \emptyset$ podemos considerar $\pi|_C : C \rightarrow \mathbb{P}^5$ y sea \mathcal{U} el haz universal de la Grassmanianna $G(2, 4) \subset \mathbb{P}^5$ donde la inclusión está dada por el encaje de Plücker, entonces

$$E := \pi|_C^* \mathcal{U}^*,$$

es un haz de rango dos con determinante $\wedge^2 E = \mathcal{O}_C(1) = K_C$ y $V := \pi|_C^* H^0(\mathcal{U}^*)$ es un subespacio cuatro-dimensional de secciones que genera al haz E (ver [10]), es decir (E, V) es un par. Del siguiente diagrama conmutativo podemos concluir que $Q_E = Z$ para este par,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{g-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}^5 \\ \uparrow \phi_K & \pi & \uparrow \phi_{G(V)} \\ C & \xrightarrow{g_V} & G(2, 4) \end{array}$$

Supongamos que $r \geq 5$. Entonces $\mathbb{P}Ker(\alpha_V^*) = Sing(Z)$ y como $Sing(Z) \cap C = \emptyset$ las secciones en V generan a E . Notemos que estas propiedades se satisfacen para todos los pares (E, V) tales que $Q_E = Z$. Supongamos que $(E_1, V_1), (E_2, V_2)$ satisfacen $Q_{E_1} = Q_{E_2} = Z$ entonces por el lema anterior estos pares deben ser isomorfos o duales. \square

Por lo anterior existe un morfismo (con fibra finita) de la forma.

$$Q : \{(E, V) | e_V \text{ es sobreyectivo}\} \rightarrow I_6(C)$$

$$(E, V) \mapsto Q_E.$$

LEMA 2.2.9 *Sea E un haz de rango 2 con determinante canónico y al menos cuatro secciones y $V \subset G(4, H^0(E))$ un subespacio de secciones de E . Sea $e_V : V \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E$ la restricción del morfismo evaluación a las secciones en V . Entonces e_V es genéricamente sobreyectivo si y sólo si $\alpha_V : \wedge^2 V \rightarrow H^0(K)$ no es el morfismo cero.*

Demostración. Sea $x \in C$ un punto general, si e_V es genéricamente sobreyectivo entonces existen dos secciones $s, t \in V$ tales que $\langle s(x), t(x) \rangle = E_x$ entonces $s(x) \wedge t(x) \neq 0$ y $\alpha_V(s \wedge t) \neq 0$. Por otro lado, supongamos que α_V no es el morfismo cero, sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V , entonces existe una sección no cero $f \in H^0(K)$ (en la imagen de α_V) y escalares $\{a_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 4}$ no todos cero, tales que para todo $x \in C$

$$f(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{ij} v_i(x) \wedge v_j(x);$$

sea $p \in C$ tal que $f(p) \neq 0$ entonces para al menos un subíndice ij se satisface $v_i(p) \wedge v_j(p) \neq 0$, es decir, los vectores $v_i(p), v_j(p) \in E_p$ son linealmente independientes por lo que $\langle v_i(p), v_j(p) \rangle = E_p$ y se sigue el resultado. \square

Por el lema anterior, el morfismo $(E, V) \mapsto Q_E$ puede extenderse a los pares (E, V) donde e_V es genéricamente sobreyectivo tales que $\delta_V^*(G_V(C))$ es no vacío.

Notemos que si $B \subset B(2, K_C, 4)$ es una componente irreducible regular donde el elemento general E es generado por sus secciones globales entonces

$(E, H^0(E))$ define un par y existe un morfismo de la forma

$$E \mapsto (E, H^0(E)) \mapsto Q_E.$$

2.2.3. Haces con pocas secciones y extensiones de haces lineales

En esta sección recordamos la construcción dada en [7] para obtener componentes de $B(2, K_C, 1)$, $B(2, K_C, 2)$, $B(2, K_C, 3)$ mediante extensiones de haces lineales en

$$\text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D)),$$

donde D es un divisor general efectivo.

PROPOSICIÓN 2.2.10 *Sea C una curva con moduli general de género $g \geq 5$. Entonces $B(2, K_C, 1) \neq \emptyset$. Más aún, existe una componente irreducible B de $B(2, K_C, 1)$ que satisface las siguientes condiciones:*

- i) *el elemento general $[E]$ en la componente B satisface $h^0(E) = 1$ y $\text{Sing}(B) \subset B(2, K_C, 2)$;*
- ii) *$\dim(B) = 3g - 4$;*
- iii) *el elemento general $[E]$ en la componente B puede expresarse como una extensión de la forma $u \in \text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C)$, es decir,*

$$u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow K_C \rightarrow 0.$$

Demostración. Sea $\{u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E_u \rightarrow K_C \rightarrow 0\} \in \text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C)$ general, con notación como en 1.1.1

$$l = k = g, m = 3g - 3 \geq l + 1;$$

entonces utilizando los resultados 1.2.2 y 1.2.3, W_1 es irreducible y propio en $\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C)$, por lo que

$$h^0(E_u) = h^1(E_u) = 1.$$

Sea $\epsilon \in \{0, 1\}$ tal que $g - \epsilon = 0 \pmod{2}$ y denotemos $\sigma := g - \epsilon > 0$. Entonces σ satisface las condiciones de la proposición 1.1.4 por lo tanto $s(E_u) \geq \sigma > 0$ si y sólo si $u \notin \text{Sec}_h(C)$ donde

$$h = \frac{1}{2}(2g - 4 + \sigma) = \frac{1}{2}(3g - 4 - \epsilon).$$

Para esta h la dimensión de $\text{Sec}_h(C)$ es

$$\begin{aligned} \dim(\text{Sec}_h(C)) &= \min\{\dim(\mathbb{P}, 2h - 1)\} \\ &= \min\{3g - 4, 3g - 5 - \epsilon\} \\ &= 3g - 5 - \epsilon < 3g - 4. \end{aligned}$$

Como $\dim(\mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C))) = 3g - 4$ entonces el elemento general $u \in \text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C)$ no está contenido en $\text{Sec}_h(C)$, por lo que E_u es un haz estable y $B(2, K_C, 1) \neq \emptyset$.

Consideremos el morfismo

$$\pi : \mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C)) \rightarrow B(2, K_C, 1)$$

que asigna a cada clase de la forma \bar{u} el haz vectorial E_u , su imagen es irreducible y está contenida en una componente irreducible B de $B(2, K_C, 1)$.

Sea $E \in \text{Im}(\pi)$ general, entonces la fibra $\pi^{-1}(E)$ es cero-dimensional, ya que una extensión en la fibra $\pi^{-1}(E)$ es de la forma

$$u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow K_C \rightarrow 0,$$

y está únicamente determinada por la inclusión $\mathcal{O} \hookrightarrow E$. Como $h^0(E_u) = 1$, sólo existe una de estas inclusiones (salvo multiplicación por escalar).

Entonces $\dim(\pi(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C))) = 3g - 4$. Por otro lado, el elemento general E en $\pi(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C))$ tiene exactamente una sección y por 2.0.3 su aplicación simétrica de Petri es inyectiva, entonces E es un punto suave de $B(2, K_C, 1)$ y su imagen está contenida en una componente regular B , es decir, $\dim(B) = 3g - 4$, por lo que

$$\overline{\pi(\text{Ext}^1(K_C, \mathcal{O}_C))} = B,$$

y podemos concluir el resultado. \square

PROPOSICIÓN 2.2.11 *Sea C una curva con moduli general de género $g \geq 3$. Entonces $B(2, K_C, 2) \neq \emptyset$ y es irreducible. Más aún, su única componente irreducible es regular y su punto general $[E]$ puede ser expresado como una extensión de la forma*

$$u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0;$$

donde D es un divisor general efectivo de grado 1 en C y la extensión $u \in W_1 \subset \text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D))$ es general.

Demostración. Sea D un divisor general efectivo de grado 1. La irreducibilidad se sigue de [18](teorema 1.3) y tenemos

$$l = k = g - 1, m = 3g - 5 \geq l + 1;$$

por lo que de los resultados 1.2.2 y 1.2.3 podemos concluir que $W_{1,D} := W_1 \subset \text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D))$, es irreducible de dimensión $\dim(W_{1,D}) = 3g - 6$ y el elemento general $u \in W_{1,D}$ es tal que $\text{cork}(\partial_u) = 1$.

Sea $\{u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E_u \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0\} \in W_{1,D}$ general, $\epsilon \in \{0, 1\}$ tal que

$$g - 1 - \epsilon = 0 \pmod{2},$$

y denotemos $\sigma = g - 1 - \epsilon$. Entonces $\sigma \equiv 0 \pmod{2}$ y σ satisface las condiciones de la proposición 1.1.4. Por lo tanto $s(E_u) \geq \sigma > 0$ si y sólo si $u \notin \text{Sec}_h(C)$ donde

$$h = \frac{1}{2}(2g - 6 + \sigma) = \frac{1}{2}(3g - 7 - \epsilon).$$

Para esta h la dimensión de la variedad secante es

$$\dim(\text{Sec}_h(C)) = \min\{\dim(\mathbb{P}, 2h - 1)\} = \min\{3g - 6, 3g - 8 - \epsilon\} = 3g - 8 - \epsilon.$$

Como $\dim(\mathbb{P}(W_{1,D})) = 3g - 7$ entonces el elemento general $u \in W_{1,D}$ no está contenido en $\text{Sec}_h(C)$, así que $s(E_u) > 0$ y E_u es estable.

Por otro lado, sea

$$\pi_D : \mathbb{P}(W_{1,D}) \rightarrow B(2, K_C, 2)$$

el morfismo que a cada extensión u le asigna el haz vectorial E_u , entonces $\text{Im}(\pi_D)$ esta contenida en una componente irreducible B de $B(2, K_C, 2)$ y el

elemento general en $Im(\pi_D)$ satisface $h^0(E_u) = 2$, entonces por el resultado 2.0.3 su aplicación simétrica de Petri es inyectiva por lo que es un punto suave de B y la componente B es regular.

Sea $\gamma_u : H^0(E_u) \rightarrow H^0(K_C(-D))$ el morfismo inducido en la cohomología de la extensión $u \in W_{1,D}$. Entonces

$$Im(\gamma_u) = Ker(\partial_u) \cong Coker(\partial_u),$$

y de la construcción de J dada en la prueba de la proposición 1.2.2 podemos concluir que para el elemento general $u \in W_{1,D}$ la imagen $Im(\gamma_u) \in G(1, H^0(K_C(-D))) \cong \mathbb{P}^{g-2}$ define un punto general en el sistema libre de puntos base $|K_C(-D)|$.

Supongamos que $h^0(E_u(-D)) > 1$ para el $u \in W_{1,D}$ general, entonces

$$h^0(E_u(-D)) = 2,$$

por lo que para todo elemento $v \in Im(\gamma_u)$ debe satisfacerse $v(D) = 0$, contradiciendo el argumento anterior, entonces $h^0(E_u(-D)) = 1$.

Sean $u, u' \in W_{1,D}$ y supongamos que satisfacen $E_u = \pi_D(u) = \pi_D(u')$ entonces las inclusiones definidas por u, u' , de la forma

$$i_u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E_u, \quad i_{u'} : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E_u$$

se corresponden con inclusiones

$$j_u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E_u(-D), \quad j_{u'} : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E_u(-D)$$

que a la vez definen dos secciones no nulas en $H^0(E_u(-D))$. Como $h^0(E_u(-D)) = 1$ estas secciones son linealmente dependientes, por lo que u y u' difieren en un escalar no cero, es decir existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $u = \lambda u'$. Esto prueba que el morfismo π_D es genéricamente finito y

$$dim(\pi_D(\mathbb{P}(W_{1,D}))) = 3g - 7.$$

Haciendo variar el divisor $D \in C^{(1)}$, obtenemos diferentes variedades $W_{1,D} \subset Ext^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D))$. Entonces mediante un cálculo de parámetros y utilizando los resultados de la sección 1.3 podemos concluir que las imágenes de

estas $W_{1,D}$ “lleanan” la componente B , es decir, el elemento general $E \in B$ está en una extensión

$$u \in \text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D)),$$

para algún $D \in C^{(1)}$ general, con $u \in W_{1,D}$ y se sigue el resultado. \square

LEMA 2.2.12 *Sea C una curva con moduli general de género $g \geq 3$ y D un divisor general efectivo de grado 2. Si $V \in G(2, H^0(K_C(-D)))$ es un punto general, entonces el morfismo multiplicación de secciones*

$$\mu_V : V \otimes H^0(K_C(-D)) \rightarrow H^0(2K_C - 2D);$$

satisface $\dim(\text{Ker}(\mu_V)) = 1$.

Demostración. Sea $V \in G(2, H^0(K_C(-D)))$ general. Como $H^0(K_C(-D))$ es libre de puntos base, entonces V es un pincel libre de puntos base (ya que si $p \in C$ es un punto base de V entonces $V \subset H^0(K_C(-D-p))$, contradiciendo la generalidad de V). Entoces por el “Base point free pencil trick” (ver apéndice 4.1.4 y [1] pág. 126) aplicado a V , $\text{Ker}(\text{Im}(\mu_V)) = H^0(\mathcal{O}_C)$ por lo que es 1-dimensional. \square

PROPOSICIÓN 2.2.13 *Sea C una curva con moduli general de género $g \geq 5$. Entonces $B(2, K_C, 3) \neq \emptyset$. Más aún, existe una componente irreducible regular B con la propiedad de que su elemento general $[E] \in B$ puede ser expresado como una extensión de la forma*

$$u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K(-D) \rightarrow 0;$$

donde D es un divisor general efectivo de grado 2 y $u \in W_2$ es general en una componente irreducible $\Lambda_D \subset W_2$ de dimensión $3g - 10$.

Demostración. Sea D un divisor general efectivo de grado dos y denotemos $G = G(2, H^0(K_C(-D)))$. Por el lema anterior existe un abierto de Zariski

$\Sigma \subset G$ donde para todo $V \in \Sigma$ se tiene $\dim(\text{Ker}(\mu_V)) = 1$. Entonces para todo $V \in \Sigma$ tenemos que

$$\dim(\text{Im}(\mu_V)) = \dim(V \otimes H^0(K_C(-D))) - \dim(\text{Ker}(\mu_V)) = 2g - 4 - 1 = 2g - 5,$$

por lo que siempre existe un hiperplano $\{u = 0\} \subset H^0(2K_C - 2D)$ que contiene a $\text{Im}(\mu_V)$.

Definamos la variedad de incidencia

$$J_G = \{(V, u) \in \Sigma \times \mathbb{P} \mid \text{Im}(\mu_V) \subset \{u = 0\}\},$$

donde $\mathbb{P} := \mathbb{P}((H^0(2K_C - 2D))^*) = \mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D)))$ denota el conjunto de hiperplanos de $H^0(2K_C - 2D)$.

Sean $p_1 : J_G \rightarrow \Sigma$ y $p_2 : J_G \rightarrow \mathbb{P}$ las proyecciones. Para el elemento general en la imagen de p_1 su fibra es isomorfa al sistema lineal de hiperplanos de $H^0(2K_C - 2D)$ que contienen a $\text{Im}(\mu_V)$, es decir, la fibra general de p_1 es irreducible de dimensión

$$3g - 8 - (2g - 5) = g - 3.$$

Entonces por el resultado 4.1.1 existe una única componente irreducible $J \subset J_G$ que domina Σ mediante p_1 , más aún,

$$\dim(J) = g - 2 + \dim(\Sigma) = g - 3 + 2g - 8 = 3g - 11.$$

Por otro lado, $p_2(J) \subset \mathbb{P}(W_2)$ y $p_2(J)$ domina una componente irreducible

$$\Lambda_D \subset \mathbb{P}(W_2),$$

entonces $\dim(\Lambda_D) \leq 3g - 11$.

Denotemos $p := p_2|_J : J \rightarrow \mathbb{P}(W_2)$, notemos que la fibra general de p en un punto u es isomorfa a $G(2, \text{Coker}(\partial_u))$, por lo que

$$\dim(\Lambda_D) = 3g - 11 - \dim(G(2, \text{Coker}(\partial_u))).$$

Supongamos que para el elemento general $u \in \Lambda_D$ se satisface $\text{cork}(\partial_u) \geq 3$, entonces

$$3g - 11 - \dim(G(2, \text{Coker}(\partial_u))) \leq 3g - 13,$$

lo que contradice que la codimensión esperada de Λ_D es 4 y $\dim(\Lambda_D) \geq 3g - 12$. Por lo anterior, el elemento general $u \in \Lambda_D$ satisface $\text{cork}(\partial_u) = 2$, entonces p es genéricamente inyectivo y $\dim(\Lambda_D) = 3g - 11$.

Sea $u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E_u \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0 \in \Lambda_D$ general, y sea

$$d = 2g - 2, \delta = 2g - 4, n = 1, l = g - 2, k = g - 2, j = 1, t = 2.$$

Sea $\epsilon \in \{0, 1\}$ tal que $g - 3 - \epsilon = 0 \pmod{2}$. Denotemos $\sigma := g - 3 - \epsilon > 0$ entonces $\sigma \equiv 0 \pmod{2}$ y satisface las condiciones de la proposición 1.1.4, de este modo $s(E_u) \geq \sigma > 0$ si y sólo si $u \notin \text{Sec}_h(C)$ donde

$$h = \frac{1}{2}(2g - 8 + \sigma) = \frac{1}{2}(3g - 11 - \epsilon).$$

Para esta h la dimensión de la variedad secante es

$$\dim(\text{Sec}_h(C)) = \min\{\dim(\mathbb{P}, 2h - 1)\} = \min\{3g - 8, 3g - 12 - \epsilon\} = 3g - 12 - \epsilon.$$

Como $\dim(\Lambda_D) = 3g - 11$, entonces el elemento general $u \in \Lambda_D$ no está contenido en la variedad secante, por lo que E_u es estable y $B(2, K_C, 3) \neq \emptyset$.

Sea $\pi_D : \mathbb{P}(\Lambda_D) \rightarrow B(2, K, 3)$ el morfismo al moduli de haces definido como $\pi_D(u) = E_u$. El elemento general E en la imagen $\text{Im}(\pi_D)$ satisface $h^0(E) = 3$, entonces por el teorema 2.0.3 $\text{Im}(\pi_D)$ está contenida en una componente $B \subset B(2, K_C, 3)$ de dimensión a lo más $3g - 9$. Mediante un cálculo de parámetros, utilizando los resultados en el hecho 7.6 y la proposición 7.13 de [7], se concluye que la componente B debe ser regular.

□

Capítulo 3

Construcción y comparación de componentes

Este capítulo contiene los resultados originales de este trabajo de tesis, en la primer sección encontramos una componente regular de $B(2, K_C, 4)$. En la segunda sección comparamos las componentes de $B(2, K_C, 3)$ construidas en las secciones 2.2.1 y 2.2.3 . Por último, mostramos algunas de las ideas del trabajo en proceso para relacionar la componente regular de $B(2, K_C, 4)$ aquí construida, con las cuádricas que contienen a la curva canónica.

3.1. Haces con cuatro secciones

En esta sección seguimos las ideas de [7], para construir sobre una curva general de género g (tal que $\rho \geq 0$), una componente regular $B \subset B(2, K_C, 4)$, con la propiedad de que el elemento general $[E] \in B$ es una extensión de haces lineales.

LEMA 3.1.1 *Sea C una curva de género $g \geq 8$ y D un divisor general efectivo de grado 3, entonces existe un haz E de rango dos, con las siguientes propiedades:*

- i) $h^0(E) = 3$;
- ii) E es generado por sus secciones globales;

iii) $\det(E) = K_C(-D)$;

iv) $h^0(E^*) = 0$.

Demostración. Sea $D_1 = p_1 + \dots + p_{g-5} \in C^{(g-5)}$ un divisor general efectivo de grado $g - 5$ sobre C y consideremos el haz lineal $A := K_C(-D_1)$ que define un sistema lineal g_{g+3}^4 libre de puntos base. Sea D un divisor general efectivo de grado 3, podemos asumir que la intersección de los soportes $\text{supp}(D_1) \cap \text{supp}(D) = \emptyset$. El haz $M_1 := \mathcal{O}_C(D_1)$ es tal que $h^0(M_1) = 1$ y todas las secciones en $H^0(M_1)$ se anulan únicamente en los puntos de $\text{supp}(D_1)$. Consideremos el haz $M_2 := A(-D)$, que define un g_g^1 libre de puntos base. Ahora utilizaremos un argumento similar al de Lazarsfeld utilizado por Gieseker en [9] (pág. 235). Consideremos el morfismo

$$e : \text{Ext}^1(M_2, M_1) \rightarrow \text{Hom}(H^0(M_2), H^1(M_1));$$

que envía una extensión $u : 0 \rightarrow M_1 \rightarrow E \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ a su morfismo cofrontera $\partial_u : H^0(M_2) \rightarrow H^1(M_1)$. Sea F el Kernel de e . Entonces toda extensión no trivial $u \in F$ satisface $h^0(E) = h^0(M_1) + h^0(M_2) = 3$ y $\det(E) = M_1 \otimes M_2 = K_C(-D)$. Además, e es dual al morfismo multiplicación de secciones

$$m : H^0(M_2) \otimes H^0(A) \rightarrow H^0(M_2 + A) = H^0(2A - D).$$

por el “Base point free pencil trick” (ver apéndice 4.1.4 y [1], pág. 126) $\text{Ker}(m) = H^0(\mathcal{O}_C(D))$, ya que $h^0(\mathcal{O}_C(D)) = 1$ entonces el Cokernel de m es de dimensión

$$\dim(\text{Coker}(m)) = h^0(2A - D) - h^0(M_2)h^0(A) + 1 = g + 4 - 2(5) + 1 = g - 5,$$

y $\dim(F) = g - 5$. Ahora probaremos que el lugar geométrico

$$\{u \in F \mid F_u \text{ no es globalmente generado} \},$$

tiene codimensión al menos 1 en F , de esto se seguirá que existe al menos una extensión $u \in F$ tal que E es globalmente generado, concluyendo así el resultado.

Notemos que si $q \in C - \text{supp}(D_1)$, $h^0(M_1(-q)) = 0$ y $h^0(M_2(-p)) = h^0(K_C - D_1 - D - p) = 1$ por lo que $h^0(E(-q)) \leq 1$. Por el teorema de Riemann-Roch, ya que $h^0(E) - h^1(E) = -3$ y $h^0(K_C \otimes E^*) = 6$, entonces

$$h^0(E(-q)) = h^0(K_C \otimes E^*(p)) + 2g - 7 - 2g + 2 \geq 6 - 5 = 1,$$

por lo que $h^0(E(-q)) = 1$ y la fibra E_q es generada por la evaluación de las secciones de $H^0(E)$ en q . Supongamos que existe un punto $x \in \text{supp}(D_1)$ donde la fibra E_x no es generada por la evaluación de las secciones, entonces existe una subgavilla $E_1 \subset E$ y una sucesión exacta

$$u_2 : 0 \rightarrow M_1(-x) \rightarrow E_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0;$$

pero estas sucesiones exactas son elementos en el Kernel del morfismo

$$\text{Ext}^1(M_2, M_1(-x)) \rightarrow \text{Hom}(H^0(M_2), H^1(M_1(-x))),$$

que envía u_2 a su morfismo cofrontera ∂_{u_2} . Este morfismo es dual al morfismo multiplicación de secciones

$$m_x : H^0(M_2) \otimes H^0(\mathcal{O}_C(A(x))) \rightarrow H^0(M_2 + A(x)) = H^0(2A(x) - D),$$

de nuevo, usando el “Base point free pencil trick” para el haz M_2 , $\text{Ker}(m_x) = H^0(\mathcal{O}_C(D(x)))$. Ya que $x \in \text{supp}(D_1)$ y $x \notin \text{supp}(D)$, se tiene

$$\text{cork}(m_x) = h^0(2A(x) - D) - h^0(M_2)h^0(A(x)) + 1 = (g + 5) - 2(6) + 1 = g - 6,$$

entonces las extensiones en F que no son globalmente generadas tienen codimensión al menos 1 en F .

Supongamos que $h^0(E^*) > 0$ entonces existe una sección $s \in H^0(E^*)$ no nula, sea $L \subset E^*$ la subgavilla generada por s , entonces $h^0(L) > 0$ por lo que $\text{deg}(L) \geq 0$. Entonces $\text{deg}(L \otimes K_C(-D)) \geq 2g - 5$ y por el teorema de Riemann-Roch $h^0(L \otimes K_C(-D)) \geq g - 4$. Por otro lado, del isomorfismo $E^* \otimes K_C(-D) \cong E$ obtenemos $H^0(L \otimes K_C(-D)) \hookrightarrow H^0(E)$ y $h^0(E) \geq g - 4$, como $h^0(E) = 3$, entonces esto da una contradicción para $g \geq 8$. Esto prueba que $h^0(E^*) = 0$ \square

PROPOSICIÓN 3.1.2 *Sea C una curva de género $g \geq 8$ con moduli general y D un divisor general efectivo de grado 3 en C . Entonces el elemento general $V \in G(3, H^0(K_C - D))$ satisface que el morfismo multiplicación de secciones*

$$\mu_V : V \otimes H^0(K_C - D) \rightarrow H^0(2K_C - 2D),$$

tiene Kernel 3-dimensional, más aún, $\text{Ker}(\mu_V) = \wedge^2 V$.

Demostración. Notemos que $\wedge^2 V \subset \text{Ker}(\mu_V)$ por lo que $\dim(\text{Ker}(\mu_V)) \geq 3$. Por otro lado, la función

$$\begin{aligned} \alpha : G(3, H^0(K - D)) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ V &\mapsto \dim(\text{Ker}(\mu_V)); \end{aligned}$$

es semicontinua por arriba (ver [11], pág. 287) por lo que el conjunto

$$\{V \in G(3, H^0(K - D)) \mid \dim(\text{Ker}(\mu_V)) = 3\}$$

es un abierto de Zariski en $G(3, H^0(K - D))$ (posiblemente vacío) y es suficiente probar que existe un elemento $V \in G(3, H^0(K_C - D))$ tal que $\dim(\text{Ker}(\mu_V)) = 3$.

Por el lema anterior podemos suponer que existe un haz E de rango 2 globalmente generado tal que $h^0(E) = 3$ y $\wedge^2 E = K_C(-D)$, entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_C^*(D) \rightarrow H^0(E) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow 0;$$

y dualizando obtenemos

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow H^0(E)^* \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0. \quad (3.1.1)$$

Esta sucesión induce en la cohomología

$$0 \rightarrow H^0(E^*) \rightarrow H^0(E)^* \rightarrow H^0(K_C - D);$$

ya que $h^0(E^*) = 0$ entonces la transformación lineal $i : H^0(E)^* \rightarrow H^0(K_C - D)$ es inyectiva.

Al hacer producto tensorial en la sucesión 3.1.1 por $K_C(-D)$ obtenemos

$$0 \rightarrow E^* \otimes K_C(-D) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow H^0(E)^* \otimes K_C(-D) \rightarrow 2K_C(-2D) \rightarrow 0;$$

ya que $\det(E) = K_C(-D)$ entonces $E^* \otimes K_C(-D) \cong E$, por lo que existe una sucesión en la cohomología de la forma

$$0 \rightarrow H^0(E) \rightarrow H^0(E)^* \otimes H^0(K_C - D) \rightarrow H^0(2K_C - 2D)$$

donde $\mu : H^0(E)^* \otimes H^0(K_C - D) \rightarrow H^0(2K_C - 2D)$ es el morfismo multiplicación de secciones mediante la identificación $H^0(E)^* \cong i(H^0(E)^*) \subset H^0(K_C - D)$. Por lo tanto $V := \text{Im}(i) \subset G(3, H^0(K_C - D))$ satisface $\dim(\text{Ker}(\mu_V)) = 3$. \square

El teorema principal de este trabajo de tesis es el siguiente:

TEOREMA 3.1.3 *Sea C una curva con moduli general de género $g \geq 8$. Entonces $B(2, K_C, 4)$ es no vacío. Más aún, existe una componente irreducible regular $B \subset B(2, K_C, 4)$, cuyo elemento general $[E] \in B$ puede ser expresado como una sucesión*

$$u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0;$$

donde D es un divisor general efectivo de grado 3 sobre C y la extensión u es tal que $u \in W_3 \subset \text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D))$ es general en una componente irreducible Λ_D de W_3 .

Demostración.

Paso 1: Existencia de la componente irreducible $\Lambda_D \subset W_3$.

Por la proposición anterior existe un abierto de Zariski $\Sigma \subset G(3, H^0(K_C - D))$ donde $\dim(\text{Ker}(\mu_V)) = 3$ o bien $\dim(\text{Im}(\mu_V)) = 3g - 12$, para todo $V \in \Sigma$. Sea

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D)))$$

de las identificaciones $\mathbb{P}H^1(K_C^*(2D)) = \mathbb{P}H^0(2K_C - 2D)^*$ podemos considerar que \mathbb{P} parametriza hiperplanos de $H^0(2K_C - 2D)$. Ya que $h^0(2K_C - 2D) = 3g - 9$, entonces para todo $V \in \Sigma$ existe un hiperplano $\{u = 0\}$ que contiene a $\text{Im}(\mu_V)$ por lo que podemos definir la variedad de incidencia

$$J_\Sigma := \{(V, u) \in \Sigma \times \mathbb{P} \mid \text{Im}(\mu_V) \subset u\}.$$

Denotemos por $p_1 : J_\Sigma \rightarrow \Sigma$ y $p_2 : J_\Sigma \rightarrow \mathbb{P}$ las proyecciones.

La fibra de p_1 de un elemento general $V \in \Sigma$ es isomorfa al sistema lineal de hiperplanos de $H^0(K_C - D)$ que contienen a $\text{Im}(\mu_V)$, por lo que es irreducible y de dimensión

$$(3g - 9) - (3g - 12) - 1 = 2.$$

Por otro lado p_1 es sobreyectivo y por el lema 4.1.1 existe una componente irreducible J que domina Σ mediante p_1 .

Por la definición de W_t como en (1.2.3), $\text{Im}(p_2) \subset W_3$, entonces la imagen de $p := p_2|_J : J \rightarrow W_3$ domina una componente irreducible $\Lambda_D \subset W_3$ y $\dim(\Lambda_D) = 3g - 15$ donde el elemento general $u \in \Lambda_D$ satisface $\text{cork}(\partial_u) = 3$.

Paso 2: El elemento general en Λ_D es estable.

Sea $\bar{u} \in \mathbb{P}(\text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D)))$, tenemos $d = 2g - 2, \delta = 2g - 5, n = 1, l = g - 3, r = g - 3, j = 1, t = 3$. Sea $\epsilon \in \{0, 1\}$ tal que

$$\epsilon = g(\text{mód } 2),$$

denotemos $\sigma := g - 6 - \epsilon > 0$, por lo tanto $\sigma \equiv 0(\text{mód } 2)$ y σ satisface las condiciones de la proposición 1.1.4. Entonces $s(F_u) \geq \sigma > 0$ y sólo si $u \notin \text{Sec}_h(C)$ donde

$$h = \frac{1}{2}(2g - 10 + \sigma) = \frac{1}{2}(3g - 16 - \epsilon),$$

para esta h la dimensión de la variedad secante es

$$\begin{aligned} \dim(\text{Sec}_h(C)) &= \text{mín}\{\dim(\mathbb{P}, 2h - 1)\} \\ &= \text{mín}\{3g - 10, 3g - 16 - \epsilon - 1\} \\ &= 3g - 17 - \epsilon \\ &\leq 3g - 17. \end{aligned}$$

Como $\dim(\mathbb{P}(\Lambda_D)) = 3g - 16$ entonces el elemento general $u \in \Lambda_D$ no está contenido en $\text{Sec}_h(C)$ por lo que E_u es estable. Esto prueba que $B(2, K_C, 4) \neq \emptyset$ y describe algunos de sus elementos.

Sea $\pi_D : \mathbb{P}(\Lambda_D) \rightarrow B(2, K, 4)$ el morfismo al moduli de haces definido como $\pi_D(u) = E_u$. En los pasos 3 y 4 probaremos que π_D es genéricamente finito:

Paso 3: Unisecantes no-obstruidas.

Sea $u \in \Lambda_D$ un elemento general en la fibra del haz $[E] \in \text{Im}(\pi_D)$, es decir

$$u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0.$$

Recordemos que el cociente $E \rightarrow K_C(D) \rightarrow 0$ se corresponde con una sección Γ de la superficie reglada $S := \mathbb{P}(E)$ (la sección correspondiente es la inducida por la inclusión $\mathcal{O}_C(D) \hookrightarrow E$, ver apéndice, observación 4.2.2). Debemos calcular la dimensión de la familia en la que varían las secciones Γ , es decir, debemos ver si las deformaciones del par (Γ, S) son no-obstruidas (o equivalentemente que $H^2(S, T_S \langle \Gamma \rangle) = 0$, ver apéndice, proposición 4.4.2).

Sea $p : S \rightarrow C$ el morfismo estructural de S y denotemos por f una fibra general de p y por c la clase de $\mathcal{O}_S(1)$ en $\text{Pic}(S)$, entonces

$$c \cdot f = 1, \quad f^2 = 0, \quad c^2 = \text{deg}(E) = 2g - 2.$$

Por otro lado, recordemos que existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow T_{S|C} \rightarrow T_S \rightarrow p^*T_C \rightarrow 0, \quad (3.1.2)$$

donde T_S, T_C denotan los haces tangentes a S y C , respectivamente y $T_{S|C}$ es la gavilla tangente relativa (ver [20]) $T_{S|C} = \omega_{S|C}^*$. Ya que $\omega_{S|C} = \mathcal{O}_S(-2c) \otimes p^*(\det(E))$ entonces

$$T_{S|C} = \mathcal{O}_S(2c) \otimes p^*(K_C),$$

y tenemos las intersecciones $T_{S|C} \cdot f = \deg(T_{S|C})|_f = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})(2) = 2$ y $p^*(T_C) \cdot f = 0$. Luego $T_{S|C}$ y $p^*(T_C)$ tienen grado no negativo sobre las fibras de p y

$$h^2(S, T_{S|C}) = h^2(S, p^*(T_C)) = h^2(S, T_S) = 0.$$

Por otro lado, si $g > 1$ entonces $h^0(S, T_{S|C}) = h^0(S, T_S) = h^0(S, p^*(T_C)) = 0$ y $h^1(S, p^*(T_C)) = 3g - 3$. Calculando la cohomología de la sucesión (3.1.2) y utilizando las igualdades anteriores y la igualdad $\chi(T_{S|C}) = 3 - 3g = h^1(T_{S|C})$, obtenemos

$$h^1(S, T_S) = h^1(S, T_{S|C}) + h^1(S, p^*T_C) = 6g - 6.$$

Por otro lado, la gavilla normal $\mathcal{N}_{\Gamma|S} \cong K_C(-2D)$ por lo que $\deg(\mathcal{N}_{\Gamma|S}) = \Gamma \cdot \Gamma = \deg(K_C - 2D) = 2g - 8$, utilizando el teorema de Riemann-Roch tenemos $h^0(\Gamma, \mathcal{N}_{\Gamma|S}) = h^0(C, K_C(-2D)) = g - 6$ y $h^1(\Gamma, \mathcal{N}_{\Gamma|S}) = 1$. Consideremos la sucesión exacta (ver apéndice, sección 4.4)

$$0 \rightarrow T_S(-\Gamma) \rightarrow T_S \langle \Gamma \rangle \rightarrow T_\Gamma \rightarrow 0. \quad (3.1.3)$$

Al hacer producto tensorial en la sucesión 3.1.2 por $\mathcal{O}_S(-\Gamma)$ obtenemos

$$0 \rightarrow T_{S|C}(-\Gamma) \rightarrow T_S(-\Gamma) \rightarrow p^*T_C \otimes \mathcal{O}_S(-\Gamma) \rightarrow 0. \quad (3.1.4)$$

Denotaremos por \sim equivalencia lineal y por \equiv equivalencia numérica de divisores en $Div(S)$. Notemos que $\Gamma \sim \mathcal{O}_S(1) - f_D$. Como

$$\omega_S \equiv -2c + (4g - 4)f,$$

(ver [2]) entonces $\omega_S(\Gamma) \equiv -c + a_0f$ para algún entero a_0 . Ya que $T_{S|C} \cong \mathcal{O}_S(2c) \otimes p^*T_C$, entonces

$$\omega_S(\Gamma) \otimes T_{S|C}^* \equiv -3c + af,$$

para algún número entero $a \in \mathbb{Z}$. $\omega_S(\Gamma) \otimes T_{S|C}^*$ es numéricamente equivalente a un divisor no efectivo por lo que no puede tener secciones globales y por dualidad de Serre tenemos

$$h^2(T_{S|C}(-\Gamma)) = h^0(\omega_S(\Gamma) \otimes (T_{S|C})^*) = 0.$$

Similarmente, $\omega_S(\Gamma) \otimes (p^*T_C)^* \equiv -c + bf$ para algún entero b y este divisor no es efectivo, por lo que

$$h^2(p^*T_C \otimes \mathcal{O}_S(-\Gamma)) = h^0(\omega_S(\Gamma) \otimes (p^*T_C)^*) = 0.$$

Entonces por las igualdades anteriores, calculando la cohomología de la sucesión (3.1.4) podemos concluir que $h^2(T_S(-\Gamma)) = 0$ y calculando la cohomología de la sucesión exacta (3.1.3) tenemos $h^2(T_S < \Gamma >) = 0$. Utilizando la proposición 4.4.2 podemos concluir que las deformaciones del par (Γ, S) son no-obstruidas (ver [20] y apéndice, sección 4.4). En particular, las deformaciones de la sección Γ son no-obstruidas si S es una superficie reglada fija y Γ varía en una familia de dimensión $h^0(\mathcal{N}_{\Gamma|S}) = g - 6$.

Paso 4: Secciones linealmente aisladas.

Sea E un elemento general en la imagen $Im(\pi_D)$. Sea

$$u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0,$$

un elemento en la fibra $\pi_D^{-1}(E)$. La extensión u define una sección especial Γ de la superficie reglada $S := \mathbb{P}(E)$ así como un cociente de la forma $E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0$. En este paso probaremos que Γ es linealmente aislada (ver apéndice, sección 4.3) en la familia de secciones asociadas a las extensiones en la fibra $\pi_D^{-1}(E)$.

Veamos que $h^0(E(-D)) = 1$ para el elemento general $E \in Im(\pi_D)$ o equivalentemente que $dim(|\mathcal{O}_S(\Gamma)|) = 0$ (ver apéndice, sección 4.3).

Consideremos la sucesión larga en la cohomología de la extensión u ,

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_C(D)) \longrightarrow H^0(E) \xrightarrow{\alpha} H^0(K_C(-D)) \xrightarrow{\partial_u} H^1(\mathcal{O}_C(D)).$$

Como el morfismo cofrontera ∂_u es simétrico, su Kernel y Cokernel deben ser isomorfos, es decir

$$Im(\alpha) = Ker(\partial_u) \cong Coker(\partial),$$

en particular, por el paso 1, $Ker(\partial_u)$ es un elemento general en la Grassmanniana

$$G(3, H^0(K_C(-D))).$$

Supongamos que $h^0(E(-D)) > 1$, entonces existe una sección no cero $s \in H^0(E)$ que se anula en los puntos del divisor D y $s \notin H^0(\mathcal{O}_C(D))$. La sección $\alpha(s) \in Ker(\partial_u)$ es no cero y se anula en los puntos de D , es decir

$$\alpha(s) \in Ker(\alpha) \cap H^0(K_C(-2D)),$$

por lo tanto, $dim(Ker(\alpha) \cap H^0(K_C(-2D))) \geq 1$ y $Ker(\alpha)$ está en el lugar geométrico

$$\phi := \{V \in G(3, H^0(K_C(-D))) \mid V \cap H^0(K_C(-2D)) \geq 1\}.$$

Notemos que ϕ define un ciclo de Schubert (ver [10], sección 1.5) y en este caso como las dimensiones $dim(V) = 3$ y $h^0(K_C(-2D)) = g-6$ son complementarias en $h^0(K_C(-D)) = g-3$, tenemos que ϕ es un cerrado de $G(3, H^0(K_C(-D)))$, lo que contradice la generalidad de $Ker(\partial_u)$. Esto prueba que $h^0(E(-D)) = 1$ (en particular las secciones generales Γ en la fibra general $\pi_D^{-1}(E)$ son linealmente aisladas).

Paso 5: El morfismo π_D es genéricamente finito.

Sean $u, u' \in \Lambda_D$ y supongamos que satisfacen $E_u = \pi_D(u) = \pi_D(u')$ donde E_u es general en $Im(\pi_D)$. Las inclusiones definidas por u, u' , de la forma

$$i_u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E_u, i_{u'} : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E_u$$

se corresponden con inclusiones

$$j_u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E_u(-D), i_{u'} : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E_u(-D)$$

que a la vez definen dos secciones no nulas en $H^0(E_u(-D))$.

Por el paso anterior, $h^0(E_u(-D)) = 1$ y utilizando el lema 1.1.5 estas secciones son linealmente dependientes, por lo que u y u' difieren en un escalar no cero, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $u = \lambda u'$. Entonces π_D es genéricamente finito y

$$dim(\pi_D(\mathbb{P}(\Lambda_D))) = 3g - 16.$$

Paso 6: Secciones especialmente aisladas.

Sea $W_d^{r-1}(C)$ la variedad de Brill-Noether de haces lineales de grado d con al menos r secciones linealmente independientes.

Sea $E \in \text{Im}(\pi_D)$ ahora debemos ver que las secciones definidas por diferentes extensiones en la fibra $\pi_D^{-1}(E)$ son de hecho especialmente aisladas. Por el paso 4, la sección $\Gamma_u = \Gamma$ se corresponde con un cociente de la forma $E = E_u \rightarrow K_C(-D)$. Estos cocientes varían en una familia de dimensión $g-6$. Para ver que Γ es especialmente aislada, debemos probar que dicha familia de cocientes no interseca en dimensión positiva a la familia 3-dimensional de haces lineales especiales, que por construcción es isomorfa a $W_{2g-5}^{g-4}(C) \cong W_3^0(C)$.

Utilizaremos la notación dada en la sección 4.3 del apéndice. Sea $N := \mathcal{O}_C(D)$, por construcción N es general en $W_3^0(C)$, como $h^0(E(-D)) = 1$ entonces la fibra del morfismo

$$\pi_3 : Q_3(E) \rightarrow W_3(E),$$

en el punto $[N]$ es sólo un punto, al hacer producto tensorial por $N^* = \mathcal{O}_C(-D)$ en la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0,$$

y calcular su cohomología, obtenemos el morfismo inyectivo

$$\partial : H^0(K_C(-2D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_C),$$

que puede ser identificado con la diferencial del morfismo π_3 (ver [1], pág. 160), es decir

$$\partial(H^0(K_C(-2D))) = T_{[N]}(Q_3(E)) \cong T_{[N]}(W_3(E)) \subset H^1(\mathcal{O}_C).$$

Denotemos $V_1 := H^0(K_C(-2D))$, entonces para demostrar que las secciones son especialmente aisladas es suficiente ver que

$$T_{[N]}(W_3(E)) \cap T_{[N]}(W_3^0(C)) = (0).$$

Recordemos que $T_{[N]}W_3^0(C) \cong (\text{Im}(\mu_N))^\perp$ (ver [1], sección 4.4) donde μ_N es la aplicación de Petri (el morfismo multiplicación de secciones)

$$\mu_N : H^0(N) \otimes H^0(K_C - N) \rightarrow H^0(K_C).$$

Denotemos $2N := \mathcal{O}_C(2D)$ y consideremos la aplicación de Petri

$$\mu_{2N} : H^0(2N) \rightarrow H^0(K_C - 2N) \rightarrow H^0(K_C).$$

Entonces $V_1 = \text{Im}(\mu_{2N}) \subset H^0(K_C(-D)) = \text{Im}(\mu_N)$ y $(\text{Im}(\mu_N))^\perp \subset V_1^\perp$. Sea

$$\partial(w) \in T_{[N]}(W_3(E)) \cap T_{[N]}(W_3^0(C)) = \partial(V_1) \cap (\text{Im}(\mu_N))^\perp \subset \partial(V_1) \cap V_1^\perp,$$

entonces $\langle \partial(w), v \rangle = 0$ para todo $v \in V_1$ por lo que $\partial(w) \in \text{Ker}(\beta : V_1 \rightarrow V_1^*)$ donde

$$\beta(x) := \beta_x,$$

es la función definida como $\beta_x(v) = \langle x, v \rangle$, en particular, por dualidad de espacios vectoriales β es un isomorfismo y $\partial(w) = 0$, como ∂ es inyectiva $w = 0$ y $T_{[N]}(W_3(E)) \cap T_{[N]}(W_3^0(C)) = (0)$, por lo tanto las secciones son especialmente aisladas.

Paso 7: El morfismo global al moduli de haces.

En este paso estudiaremos que sucede al hacer variar el divisor D . Por la observación 2.1.3 la imagen $\text{Im}(\pi_D)$ está contenida en una componente irreducible regular $B \subset B(2, K_C, 4)$. Dado el haz lineal especial $L \in \text{Pic}(C)$ (en nuestro caso $L = K_C(-D)$), ya que estamos considerando haces con determinante canónico, el haz N , definido como el Kernel del cociente

$$E \rightarrow L \rightarrow 0,$$

debe ser isomorfo a $K_C \otimes L^* = \mathcal{O}_C(D)$, por lo que N está completamente determinado por L (y también completamente determinado por el divisor D). La familia de los haces L que estamos considerando al hacer variar el divisor D (que es general y efectivo de grado 3) depende de

$$\rho(L) := \rho(g, g - 4, 2g - 5) = 3$$

parámetros. Siguiendo la construcción dada en la sección 1.3, existe una componente irreducible

$$\mathbb{P}(\Lambda) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

de dimensión $3g - 16 + 3 = 3g - 13$, donde un punto en $\mathbb{P}(\Lambda)$ se corresponde con un par (y, u) tal que

$$y = (\mathcal{O}_C(D), K_C(-D)),$$

D es un divisor general efectivo de grado 3 y $u \in \Lambda_D$ es una extensión. Existe también un morfismo global al moduli de haces vectoriales

$$\pi_{2g-2, 2g-5}|_{\mathbb{P}(\Lambda)} : \mathbb{P}(\Lambda) \rightarrow B(2, K_C, 4).$$

Finalmente, ya que hemos probado que las deformaciones de la sección definida por el cociente son no-obstruidas y por el paso anterior las secciones son especialmente aisladas, podemos concluir que el morfismo

$$\pi_{2g-2, 2g-5}|_{\mathbb{P}(\Lambda)}$$

es genéricamente finito. Su imagen es una subvariedad irreducible de $B(2, K_C, 4)$ (de dimensión $3g - 13$). Como el elemento general en esta imagen tiene exactamente 4 secciones linealmente independientes, utilizando el teorema 2.0.3 podemos concluir que “llena” una componente irreducible $B \subset B(2, K_C, 4)$ de dimensión $\rho = 3g - 13$, en el sentido de que la imagen del morfismo $\pi_{2g-2, 2g-5}|_{\mathbb{P}(\Lambda)}$ es densa en una componente irreducible de $B(2, K_C, 4)$ y se sigue el resultado. \square

3.2. Comparación de componentes irreducibles

En esta sección probaremos que las componentes de $B(2, K_C, 3)$ construidas en el capítulo 2 de este trabajo de tesis (ver [13] , [7]) son de hecho la misma.

3.2.1. Haces con tres secciones

Sea C una curva de género $g \geq 3$ con moduli general. Sea D un divisor general efectivo de grado d y E un haz de rango dos tal que $\wedge^2 E = K_C$ con $h^0(E) = r \geq 2$. Supongamos que E puede ser expresado como una extensión de la forma

$$u : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0.$$

Denotaremos por $h : H^0(E) \rightarrow H^0(K_C(-D))$ el morfismo inducido en la cohomología de u y por $s \in H^0(E)$ la sección que satisface $\langle s \rangle = H^0(\mathcal{O}_C(D))$.

OBSERVACIÓN 3.2.1

Sean $\mathbb{P}h : \mathbb{P}H^0(E) \rightarrow \mathbb{P}H^0(K_C(-D))$, $\mathbb{P}s : \mathbb{P}H^0(E) \rightarrow \mathbb{P}H^0(K_C(-D))$ los morfismos que se obtienen de proyectivizar h y $\wedge s : H^0(E) \rightarrow H^0(K_C(-D))$, $t \mapsto s \wedge t$, respectivamente. Entonces

$$\mathbb{P}h = \mathbb{P}s.$$

Consideraremos $s \in H^0(E)$ como la única sección global que satisface

$$h(t) = s \wedge t \in H^0(K_C(-D)).$$

LEMA 3.2.2 Para el elemento general $V \in G(3, H^0(K_C))$ existe un divisor general efectivo de grado dos D tal que $\dim(V \cap H^0(K_C(-D))) = 2$.

Demostración. Como V es general $\dim(V \cap H^0(K_C(-D))) \leq 2$ para todo D efectivo de grado dos. Consideremos el encaje canónico

$$\phi_{|K|} : C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1} \cong \mathbb{P}(H^0(K_C)^*)$$

y los espacios ortogonales

$$V^\perp \subset H^0(K_C)^* \quad H^0(K_C(-D))^\perp \subset H^0(K_C)^*.$$

Si $D = p + q$ notemos que $\mathbb{P}(H^0(K_C(-D))^\perp)$ es la línea $l_D \subset \mathbb{P}(H^0(K_C)^*)$ que pasa por los puntos p, q . Si $l_D \cap \mathbb{P}V^\perp \neq \emptyset$ entonces $\dim(\text{span}\{l_D, \mathbb{P}V^\perp\}) \leq g-3$ y $\dim(V \cap H^0(K_C(-D))) \geq 2$, por lo que es suficiente probar que para el elemento general $V \in G(3, H^0(K_C))$ existe un divisor D tal que

$$l_D \cap \mathbb{P}V^\perp \neq \emptyset.$$

La variedad secante $\text{Sec}_2(C) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ parametriza líneas en \mathbb{P}^{g-1} que contienen dos puntos $p, q \in C$ (ver [14]), entonces $\dim(\text{Sec}_2(C)) = 3$ y para el elemento general $V \in G(3, H^0(K_C))$ se satisface

$$\dim(\text{Sec}_2(C) \cap \mathbb{P}V^\perp) \neq \emptyset,$$

por lo que existe D tal que $l_D \cap \mathbb{P}V^\perp \neq \emptyset$, lo que termina la prueba. \square

Denotemos por B_1 la componente de $B(2, K_C, 3)$ construida por Izadi y Van Geemen en [13] y por B_2 la construida por Ciliberto y Flamini en [7]. Tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN 3.2.3 $B_1 = B_2$.

Demostración. Sea $E \in B_1$ general, entonces

$$V_E := \text{Im}(\alpha) \in G(3, H^0(K_C)),$$

es general, donde α es el morfismo natural

$$\alpha : \wedge^2 H^0(E_V) \rightarrow H^0(K_C).$$

Por el lema anterior existe un divisor general efectivo de grado dos $D \in C^{(2)}$ tal que $\dim(V_E \cap H^0(K_C(-D))) = 2$. Como $E \in B_1$ es general entonces $h^0(E) = 3$ y E es generado por sus secciones globales, por lo que existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow K_C^* \rightarrow H^0(E) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow 0,$$

donde $H^0(E) \otimes \mathcal{O} \rightarrow E \rightarrow 0$ es el morfismo evaluación. Dualizando esta sucesión y al hacer producto tensorial por $K_C(-D)$ obtenemos

$$0 \rightarrow E^* \otimes (K_C(-D)) \rightarrow H^0(E)^* \otimes (K_C(-D)) \rightarrow 2K_C(-D) \rightarrow 0,$$

como $K_C \otimes E^* \cong E$, calculando la cohomología

$$0 \rightarrow H^0(E(-D)) \rightarrow H^0(E)^* \otimes H^0(K_C(-D)) \rightarrow H^0(2K_C(-D))$$

donde $H^0(E)^* = V_E$ y el último morfismo es la restricción $\mu_{E,D}$ del morfismo multiplicación de secciones

$$\mu_E : V_E \otimes H^0(K_C) \rightarrow H^0(2K_C)$$

al subespacio $V_E \otimes H^0(K_C(-D))$, es decir,

$$\mu_{E,D} := \mu_E|_{V_E \otimes H^0(K_C(-D))} : V_E \otimes H^0(K_C(-D)) \rightarrow H^0(2K_C(-D)).$$

De la sucesión en la cohomología podemos identificar $\text{Ker}(\mu_{E,D}) \cong H^0(E(-D))$. De nuevo, como $E \in B_1$ es general entonces μ_E es sobreyectivo y $\text{Ker}(\mu_E) = \wedge^2 V_E$, por lo que

$$H^0(E(-D)) \cong \text{Ker}(\mu_{E,D}) = \wedge^2(V_E \cap H^0(K_C(-D))),$$

y $h^0(E(-D)) = 1$, es decir, el haz $E(-D)$ admite una sección no nula. Entonces existe un morfismo inyectivo $0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E$ y una extensión $u_E \in \text{Ext}^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D))$ de la forma

$$u_E : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0.$$

Como $h^0(E) = 3$, el morfismo cofrontera $\partial_E : H^0(K_C(-D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_C(D))$ satisface $\text{cork}(\partial_E) = 2$. Calculando la cohomología de la extensión u_E obtenemos el morfismo

$$\phi : H^0(E) \rightarrow H^0(K_C(-D)) \text{ y } \text{Im}(\phi) = \text{Ker}(\partial_E) = \text{Coker}(\partial_E)^*.$$

Denotemos por $s \in H^0(E)$ la sección tal que $\langle s \rangle = H^0(\mathcal{O}_C(D))$, entonces $\phi(t) = \alpha(s \wedge t)$ para todo $t \in H^0(E)$ y $\text{Im}(\phi) \subset V_E \cap H^0(K_C(-D))$, ya que el morfismo α es inyectivo $\text{Im}(\phi) = V_E \cap H^0(K_C(-D))$ por lo que $\text{Coker}(\partial_E) \in G(2, H^0(K_C(-D)))$ es general. De lo anterior, se sigue que $E \in B_2$ y B_2 es una componente irreducible que contiene a B_1 , por lo que $B_1 = B_2$. \square

La proposición anterior nos dice que todos los haces globalmente generados en $B(2, K_C, 3)$ provienen de extensiones de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0,$$

para un divisor D efectivo de grado 2. De hecho, provienen de componentes “no buenas” de W_2 en el sentido de [7]. El caso se vuelve interesante ya que implica que incluso en las componentes “no buenas” hay información geométrica importante (como la generación global).

El lema 4.1.3 prueba que todos los elementos en $E \in B(2, K_C, r)$ ($r \geq 1$) provienen de una extensión de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D_E) \rightarrow E \rightarrow K_C(-D_E) \rightarrow 0,$$

donde D_E es un divisor efectivo. Si $B \subset B(2, K_C, r)$ es una componente irreducible, otra pregunta que resulta interesante es: ¿Cómo pueden ser los divisores D_E para todos los $E \in B$? La construcción previa implica que para el caso de tres secciones existe una componente donde estos divisores D_E son generales y efectivos de grado 2. ¿Será que existen componentes donde los divisores D_E

que aparecen son especiales? ¿De qué grados son los divisores D_E que pueden aparecer en una componente fija de $B(2, K_C, r)$?

En el caso de tres secciones, la proposición anterior dice algo muy interesante: existe una componente regular de $B(2, K_C, 3)$ que contiene a todos los haces globalmente generados y en esa componente aparecen como divisores D_E todos los divisores generales efectivos de grado 2.

Otras preguntas naturales son: en el caso de 4 secciones, ¿existirá una componente regular de $B(2, K_C, 4)$ donde el elemento general es globalmente generado? Si es que existe tal componente, ¿los divisores D_E que aparecen son todos los generales efectivos de grado 3? ¿Será única la componente?

Creemos que las respuestas a estas últimas preguntas son afirmativas y que de hecho esa componente de $B(2, K_C, 4)$ es justamente la construida al inicio de este capítulo. En la siguiente sección hablaremos un poco más sobre estas conjeturas y el trabajo en proceso en esta dirección.

3.2.2. Haces con cuatro secciones

En esta sección exponemos algo del trabajo (aún en proceso) derivado de la construcción de la componente de $B(2, K_C, 4)$. Conjeturamos cómo utilizar los resultados de la sección 2.2.2 para hacer una construcción análoga a la de la sección anterior donde se comparan las componentes de $B(2, K_C, 3)$. Utilizaremos la notación y resultados de la sección 2.2.2 .

NOTACIÓN 3.2.4 *Si E es un haz de rango dos con determinante canónico que satisface $h^0(E) = 4$ y que es generado por sus secciones globales. Entonces $(E, H^0(E))$ define un par, denotaremos*

$$q_E := q(E, H^0(E)), G_E := G(H^0(E)), \\ \alpha_E := \alpha_{H^0(E)}, \delta_E := \delta_{H^0(E)}.$$

Supondremos además que $\alpha_E := \alpha_{H^0(E)}$ es inyectivo.

Si E satisface la notación anterior, entonces $\delta_{H^0(E)}^*(G_{H^0(E)}(C))$ es una cuádrica de rango a lo más 6 que contiene a la curva canónica. Sea

$$I_6(C) = \{Q \subset \mathbb{P}^{g-1} \mid Q \text{ cuádrica de rango } \leq 6 \text{ conteniendo la curva canónica } \},$$

entonces $Q_E := \delta_{H^0(E)}^*(G_{H^0(E)}(C)) \in I_6(C)$.

Denotemos por $B^{gg}(2, K, 4)$ el lugar geométrico dentro de $B(2, K, 4)$ que consiste de haces globalmente generados con exactamente 4 secciones linealmente independientes. Por los resultados de la sección 2.2.2 existe un morfismo

$$\begin{aligned} \pi : B^{gg}(2, K, 4) &\rightarrow I_6(C) \\ E &\mapsto Q_E, \end{aligned}$$

que se puede definir incluso en los haces genéricamente generados. Denotemos por $B \subset B(2, K, 4)$ la componente irreducible construida en la sección 3.1 .

CONJETURA 3.2.5 *El elemento general $E \in B$ es globalmente generado.*

De la expresión del elemento general $E \in B$ como una extensión en

$$Ext^1(K_C(-D), \mathcal{O}_C(D)),$$

es fácil ver que el morfismo evaluación de secciones $H^0(E) \otimes \mathcal{O}_x \rightarrow E_x$ es sobreyectivo para cualquier punto $x \in C$ tal que $x \notin D$, por lo que sólo falta probar la sobreyectividad del morfismo evaluación de secciones en los tres puntos del divisor $D = p + q + r$.

Si la conjetura anterior es cierta, podemos restringir el morfismo ϕ a un morfismo (racional) sobre B :

$$\phi_B := \phi|_B : B \rightarrow I_6(C).$$

CONJETURA 3.2.6 *B y $I_6(C)$ son birracionales mediante el morfismo ϕ_B .*

De manera análoga al caso de la comparación de componentes de $B(2, K_C, 3)$, definimos los siguientes objetos: si $D \in C^{(3)}$ es un divisor general efectivo, sea Λ_D la componente irreducible de $W_3 \subset Ext^1(K - D, \mathcal{O}(D))$ construida en la sección anterior y sea

$$\pi_D : \Lambda_D \rightarrow B(2, K, 4),$$

el morfismo al moduli de haces. Definamos

$$W_D := \{E \in B \mid E \in \pi_D(\Lambda_D)\}.$$

Entonces $B = \overline{\sqcup_D W_D}$.

Por lo anterior, es suficiente demostrar la siguiente:

CONJETURA 3.2.7 *Sea $D = p + q + r$ un divisor general efectivo sobre C . Denotemos por P_D el plano dentro de \mathbb{P}^{g-1} que contiene a los puntos p, q, r . Consideremos*

$$S_D := \{Q \in I_6(C) \mid P_D \subset Q\}.$$

Entonces $I_6(C) = \overline{\sqcup_D S_D}$. Más aún, W_D y S_D son birracionales (mediante $\phi_B|_{W_D}$).

Capítulo 4

Apéndice

En esta sección incluimos los resultados clásicos de geometría que utilizamos en este trabajo de tesis.

4.1. Algunos resultados geométricos

LEMA 4.1.1 *Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un morfismo de variedades dominante, tal que Y es irreducible y la fibra general de ϕ es irreducible. Entonces existe una única componente irreducible $J \subset X$ que domina Y mediante ϕ .*

Demostración. Sean X_1, \dots, X_n las componentes irreducibles de X , luego $Y = \overline{\phi(X)} = \overline{\phi(X_1)} \cup \dots \cup \overline{\phi(X_n)}$ como Y es irreducible entonces $Y = \overline{\phi(X_k)}$ para algún $1 \leq k \leq n$.

Supongamos $Y = \overline{\phi(X_1)} = \dots = \overline{\phi(X_k)}$ para algún $2 \leq k \leq n$ y $\overline{\phi(X_j)} \subset Y$ es propio para $k \leq j \leq n$. Consideremos el abierto

$$U := X - \left\{ \bigcup_{i \neq j} X_i \cap X_j \right\},$$

entonces $\overline{\phi(U)}$ es tal que $\phi^{-1}(\overline{\phi(U)}) = X$ y $Y = \overline{\phi(U)}$, así que para un elemento general $p \in Y$ podemos asumir $p \in \phi(U)$ y tenemos que su fibra es

$$\phi^{-1}(p) = \bigcup_{i=1}^k (\phi^{-1}(p) \cap X_i) = \bigcup_{i=1}^k \overline{\phi^{-1}(p) \cap X_i},$$

como $p \in U$, todos estos cerrados son propios, lo que contradice la irreducibilidad de $\phi^{-1}(p)$. Esto prueba la unicidad de la componente dominante. \square

DEFINICIÓN 4.1.2 Sea C una curva y E un haz de rango 2 y grado d sobre C . El invariante de Segre de E denotado $s(E)$ se define como

$$s(E) := d - 2(\text{máx}\{\text{deg}(N) \mid N \subset E \text{ subhaz lineal}\}).$$

Notemos que E es estable (semiestable) cuando $s(E) > 0$ ($s(E) \geq 0$).

LEMA 4.1.3 Sea E un haz semiestable de rango 2 especial (es decir, con $h^1(E) > 0$) sobre una curva general C de género g , tal que $d := \text{deg}(E) \geq 2g - 2$. Entonces existen haces lineales $L, N \in \text{Pic}(C)$ tales que L es efectivo y especial, además de una extensión

$$u : 0 \rightarrow N \rightarrow E_u \rightarrow L \rightarrow 0;$$

tal que $E = E_u$ (son S -equivalentes).

Demostración. Por dualidad de Serre, como $h^1(E) > 0$ entonces $h^1(E) = h^0(K_C \otimes E^*) > 0$ y existe un morfismo no zero $\sigma : E \rightarrow K_C$. El haz lineal $L := \text{Im}(\sigma) \subset K_C$ es especial. Sea $\delta := \text{deg}(L)$ como E es semiestable de grado $d \geq 2g - 2$ entonces $\delta \geq \frac{d}{2} \geq g - 1$ así que $h^0(L) - h^1(L) \geq 0$ y como es especial esto implica $h^0(L) \geq 0$ y L es efectivo. \square

PROPOSICIÓN 4.1.4 Base point free pencil trick. (Ver [1], pág. 126) Sea C una curva suave y L, N haces lineales sobre C . Sean s_1, s_2 secciones linealmente independientes en $H^0(L)$ y $V := \langle s_1, s_2 \rangle$ el espacio que generan. Entonces el Kernel del morfismo multiplicación

$$V \otimes H^0(N) \rightarrow H^0(L \otimes N),$$

es isomorfo a $H^0(N - L(B))$ donde B denota los puntos base del sistema lineal 1-dimensional (o bien, pincel) generado por s_1, s_2 . En particular si el pincel es libre de puntos base el Kernel es isomorfo a $H^0(N - L)$.

4.2. Superficies geoméricamente regladas

En esta sección recordamos algunos resultados sobre secciones en superficies regladas. Para más detalle recomendamos al lector ver [2].

DEFINICIÓN 4.2.1 *Sea C una curva suave. Una superficie geoméricamente reglada S sobre C es una superficie junto con un morfismo suave $p : S \rightarrow C$ cuyas fibras son isomorfas a \mathbb{P}^1 , que es llamado el morfismo estructural de S .*

Sea $E \rightarrow C$ un haz de rango dos sobre una curva C de género g tal que $h^0(E) > 0$. Consideremos el haz proyectivo asociado a E , $S := \mathbb{P}(E)$, S fibra sobre C y su fibra en cada punto $x \in C$ es la proyectivización de la fibra E_x , es decir, su fibra es isomorfa a \mathbb{P}^1 , por lo que S es una superficie geoméricamente reglada. Sea $S := \mathbb{P}(E)$ y $p : S \rightarrow C$ su morfismo estructural, el haz vectorial $p^*(E) \rightarrow S$ tiene un subhaz lineal N definido de la siguiente manera: sea $s \in S$, s se corresponde con una línea $l \subset E_{p(s)}$ y definimos $N_s := l$. Entonces existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow N \rightarrow p^*(E) \rightarrow \mathcal{O}_S(1) \rightarrow 0;$$

el haz $\mathcal{O}_S(1)$ es llamado el **haz tautológico de S** . Para todo $x \in C$ denotaremos por $f_x := p^{-1}(x)$ la fibra del morfismo p en el punto x y denotaremos por f una fibra general de p .

Sea $S := \mathbb{P}(E)$, T una variedad y $f : T \rightarrow C$ un morfismo de variedades. Un morfismo $g : T \rightarrow S$ se dice C -morfismo si el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & S \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & C. \end{array}$$

A cada C -morfismo $g : T \rightarrow S$ podemos asociarle el haz lineal $L := g^*(\mathcal{O}_S(1))$ sobre T y el morfismo sobreyectivo $g^*u : f^*(E) \rightarrow L$, donde u denota el cociente que define al haz tautológico $u : p^*(E) \rightarrow \mathcal{O}_S(1) \rightarrow 0$. Conversamente, dado un haz lineal $L \rightarrow T$ y un morfismo sobreyectivo $v : f^*(E) \rightarrow L$ podemos definir un C -morfismo $g : T \rightarrow S$ mediante asociar a cada punto $t \in T$ la línea $\text{Ker}(v_t) \subset E_{f(t)}$. Estas dos construcciones son inversas una de la otra. En particular, tenemos la siguiente:

OBSERVACIÓN 4.2.2

Existe una correspondencia 1 – 1 entre secciones $s : C \rightarrow S$ y cocientes de la forma $E \rightarrow L \rightarrow 0$.

PROPOSICIÓN 4.2.3 Sea C una curva suave de género g y $E \rightarrow C$ un haz de rango dos. Sea $S := \mathbb{P}(E)$ la superficie geoméricamente reglada asociada a E y $p : S \rightarrow C$ su morfismo estructural. Sea H la clase de $\mathcal{O}_S(1)$ en $\text{Pic}(S)$, entonces:

- i) $\text{Pic}(S) = p^*C \oplus \mathbb{Z}H$;
- ii) $\text{Pic}(S) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}f$, donde f es la clase de una fibra general y se satisface $H \cdot f = 1, f^2 = 0$;
- iii) $H^2 := H \cdot H = \text{deg}(E)$.

Sea $D \in \text{Pic}(C)$, denotaremos $f_D : p^*(D)$. Sea Γ un divisor en una superficie geoméricamente reglada $S := \mathbb{E}$ y sea $\text{deg}(\Gamma) := H \cdot \Gamma$ su grado. Por la proposición anterior, todo elemento en $\text{Pic}(S)$ se corresponde con un divisor de la forma $nH + f_B$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $B \in \text{Pic}(C)$, o bien mediante equivalencia numérica se corresponde con $nH + bf$ donde $b := \text{deg}(B)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $D \in \text{Div}(C)$. El sistema lineal $|nH + f_D|$ (si no es vacío) se dice que es **n-secante al morfismo estructural** $p : S \rightarrow C$, ya que el elemento general de este sistema interseca a f en n puntos. Un elemento $\Gamma \in |H + f_D|$ es llamado **curva unisecante a S** (o al morfismo estructural p). Las curvas unisecantes a S que son irreducibles (son además suaves e isomorfas a C) son llamadas **secciones de S** .

Denotemos por Div_S el esquema que parametriza divisores efectivos en S , para $n \in \mathbb{N}$ definimos el subesquema $\text{Div}_S^n \subset \text{Div}_S$ que consiste de divisores Γ tales que

$$\mathcal{O}_S(\Gamma) \cong \mathcal{O}_S(n) \otimes p^*(N^*),$$

donde $N \in \text{Pic}(C)$ está únicamente determinado, por lo que tenemos un morfismo natural de la forma:

$$\begin{aligned} \Phi_n : \text{Div}_S^n &\rightarrow \text{Pic}(C) \\ \Gamma &\mapsto N. \end{aligned}$$

Notemos que $\Gamma \in Div_S^n$ si y sólo si $\Gamma \sim nH - f_D$ para algún $D \in Div(C)$ y $deg(\Gamma) = ndeg(E) - deg(D)$, por lo que Div_S^1 consiste de las curvas unisecantes.

Denotaremos por \sim equivalencia lineal y por \equiv equivalencia numérica de divisores en $Div(S)$. Sea Γ una sección de S , por 4.2.2 Γ se corresponde con un cociente $E \rightarrow L \rightarrow 0$ y existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0,$$

donde $N \in Pic(C)$. La gavilla normal $\mathcal{N}_{\Gamma|S}$ satisface

$$\mathcal{N}_{\Gamma|S} = \mathcal{O}_{\Gamma}(\Gamma) = N^* \otimes L,$$

en particular $deg(\Gamma) = deg(L) - deg(N)$. Sea $\Gamma \in Div(S)$, definimos $\mathcal{O}_{\Gamma}(1) := \mathcal{O}_S(1) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma}$.

4.3. El esquema de Hilbert de unisecantes

Con la notación de la sección anterior, sea E un haz de rango dos sobre una curva C y $S := \mathbb{P}(E)$ la superficie reglada asociada a E . Sea $\delta \in \mathbb{N}$, el **esquema de Hilbert de unisecantes de grado δ (con respecto a H)** se define como:

$$Div_S^{1,\delta} := \{\Gamma \in Div_S^1 | deg(\Gamma) = \delta\}.$$

Los elementos en $Div_S^{1,\delta}$ se corresponden con cocientes de E , por lo que puede ser dotado con una estructura natural de esquema cociente (ver [20]).

Sea $\Gamma = \Gamma_0 + f_A$ una unisecante, donde Γ_0 es una sección en Div_S^1 que satisface $\mathcal{O}_S(\Gamma) \cong \mathcal{O}_S(n) \otimes p^*(N^*)$ y $A \in Div(C)$ es un divisor efectivo de grado $deg(A) = a$. Como en la sección anterior, la sección Γ_0 se corresponde con un haz cociente de E , por lo que existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow N(-A) \rightarrow E \rightarrow L \oplus \mathcal{O}_A \rightarrow 0.$$

Cuando $A = 0$, $\Gamma = \Gamma_0$ es una sección que se corresponde con un cociente de E de la forma $E \rightarrow L \rightarrow 0$ y existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0,$$

entonces $\Gamma^2 = \deg(L) - \deg(N) = 2\delta - d$. Consideremos la restricción

$$\Psi_{1,\delta} := \Psi_1|_{Div_S^{1,\delta}} : Div_S^{1,\delta} \rightarrow Pic^{d-\delta}(C),$$

que induce el isomorfismo (ver [7], sección 2.2)

$$\begin{aligned} \Phi_{1,\delta} : Div_S^{1,\delta} &\rightarrow Quot_{E,\delta+a-g+1}^C \\ \Gamma &\mapsto \{E \rightarrow L \oplus \mathcal{O}_A\}. \end{aligned}$$

El isomorfismo anterior nos permite identificar (ver [20])

$$\begin{aligned} H^0(\Gamma, N_{\Gamma|S}) &\cong T_{[\Gamma]}(Div_S^{1,\delta}) \cong Hom(N \otimes \mathcal{O}_C(-A), L \oplus \mathcal{O}_A), \\ H^1(\Gamma, N_{\Gamma|S}) &\cong Ext^1(N \otimes \mathcal{O}_C(-A), L \oplus \mathcal{O}_A). \end{aligned}$$

Para todo entero $t \leq \bar{n} := \lfloor \frac{d-g+1}{2} \rfloor$ podemos considerar el conjunto

$$Q_t(E) := \{N \subset E \mid N \text{ es una subgavilla invertible con } \deg(N) = t\},$$

que tiene una estructura natural como esquema cociente. Sea Γ una curva unisecante en S de grado t que se corresponde con la sucesión

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow L \oplus \mathcal{O}_A \rightarrow 0,$$

donde $\delta = \deg(L) + \deg(A)$ y $t = \deg(N) = d - \delta$, entonces existe un isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi_{\delta,t} : Div_S^{1,\delta} &\rightarrow Q_t(E), \\ \Gamma &\mapsto [N]. \end{aligned}$$

Consideremos el morfismo natural $\pi_t : Q_t(E) \rightarrow Pic^t(C)$ definido como $\pi(N) := [N]$ y denotemos su imagen por $W_t(E) := Im(\pi_t)$. Sea $N \in W_t(E)$, entonces $\pi_t^{-1}(N) = \mathbb{P}H^0(E \otimes N^*)$ (ver [8], pág. 199).

Sea $\mathcal{Q}_{1,\delta}$ el cociente universal (ver [20]). Por la estructura como esquema cociente de $Div_S^{1,\delta}$ existe un morfismo cociente universal $\mathcal{Q}_{1,\delta} \rightarrow Div_S^{1,\delta}$, que a su vez induce un morfismo

$$\pi : Proj(\mathcal{Q}_{1,\delta}) \rightarrow Div_S^{1,\delta}.$$

Definimos el esquema $\mathcal{S}_S^{1,\delta}$ que parametriza unisecantes especiales de grado δ sobre S como:

$$\mathcal{S}_S^{1,\delta} := \{\Gamma \in Div_S^{1,\delta} \mid R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{1,\delta}}(1))_\Gamma \neq 0\}.$$

La **especialidad** de una sección Γ se define como $i(\Gamma) := h^1(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(1))$ y una sección Γ se dice **especial** si $i(\Gamma) > 0$.

DEFINICIÓN 4.3.1 Sea $\Gamma \in \text{Div}_S^{1,\delta}$ una unisecante, decimos que:

i) es **linealmente aislada** si $\dim(|\mathcal{O}_S(\Gamma)|) = 0$;

ii) es **algebraicamente aislada** si $\dim(\text{Div}_S^{1,\delta}) = 0$;

iii) si Γ es especial y $\mathcal{F} \subset \text{Div}_S^{1,\delta}$ es un subesquema tal que $\Gamma \in \mathcal{F}$:

1) Γ se dice **especialmente única** en \mathcal{F} si Γ es la única unisecante especial de \mathcal{F} ;

2) Γ se dice **especialmente aislada** en \mathcal{F} si $\dim_\Gamma(\mathcal{F} \cap \mathcal{S}_S^{1,\delta}) = 0$.

OBSERVACIÓN 4.3.2

Si $\Gamma \sim H - f_D$ es una sección especialmente aislada $|\mathcal{O}_S(\Gamma)| \cong \mathbb{P}(H^0(E(-D)))$ y Γ es linealmente aislada.

4.4. Deformaciones

En esta sección recordamos algunas definiciones y resultados clásicos de la teoría de deformaciones que utilizamos a lo largo de este trabajo de tesis. Para las demostraciones de los resultados citados de esta sección ver la sección 3.4.4 de [20].

Sea Y una variedad suave y $j : X \hookrightarrow Y$ una inclusión (cerrada) de un divisor de Cartier. Sea

$$\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_X,$$

la gavilla de ideales de X . Existe una inclusión de espacios tangentes $T_X \subset T_{Y|X}$, donde $T_{Y|X}$ denota al espacio tangente relativo, que es el dual a la gavilla $\omega_{X|Y}$. Sea $t : T_Y \rightarrow T_{Y|X}$ el morfismo restricción.

$$T_Y \langle X \rangle := t^*T_X \subset T_Y,$$

es llamada la gavilla de gérmenes de vectores tangentes a Y que son tangentes a X , esta es una gavilla coherente sobre Y de rango $\dim(Y)$. Existe una inclusión de la forma

$$I_X T_Y \subset T_Y \langle X \rangle,$$

tal que $T_X = T_Y < X > / I_X T_Y$. Sea $\mathcal{N}_{X|Y}$ la gavilla normal de X en Y y denotemos $\mathcal{N}'_{X|Y}$ la gavilla normal equisingular de X en Y (ver [20], proposición 1.1.9). Si X es suave $\mathcal{N}_{X|Y} = \mathcal{N}'_{X|Y}$. Existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow T_Y < X > \rightarrow T_Y \rightarrow \mathcal{N}'_{X|Y} \rightarrow 0,$$

y el morfismo restricción $r : T_Y < X > \rightarrow T_X$ da lugar a una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow T_Y(-X) \rightarrow T_Y < X > \rightarrow T_X \rightarrow 0,$$

donde $T_Y(-X)$ denota el haz de vectores tangentes a Y que se anulan en X . Denotemos

$$H^1(r) : H^1(Y, T_Y < X >) \rightarrow H^1(X, T_X),$$

el morfismo inducido en la cohomología de la sucesión anterior.

TEOREMA 4.4.1 (Ver [20].) *Las deformaciones localmente triviales del par (Y, X) (o bien de la inclusión $j : X \rightarrow Y$) están “controladas” por la gavilla $T_Y < X >$, en el siguiente sentido:*

- i) *sus obstrucciones están en $H^2(Y, T_Y < X >)$;*
- ii) *las deformaciones localmente triviales de primer orden están parametrizadas por $H^1(Y, T_Y < X >)$;*
- iii) *el morfismo $H^1(r)$ asocia a cada deformación localmente trivial de primer orden del par (Y, X) , la correspondiente deformación de primer orden de X .*

PROPOSICIÓN 4.4.2 (Ver [20], sección 3.2.2) *Si las deformaciones del par (Y, X) inducido por la inclusión $j : X \hookrightarrow Y$ son no-obstruidas (es decir, en particular si $H^2(Y, T_Y < X >) = 0$), entonces las deformaciones de X considerando Y fijo varían en una familia de dimensión $h^0(\mathcal{N}_{X|Y})$.*

Bibliografía

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris: *Geometry of Algebraic Curves*. Vol. 1 SPRINGER-VERLAG (1985).
- [2] A. Beauville: *Complex Algebraic surfaces*. London Mathematical Society Texts, 34 (2nd ed.) Cambridge University Press (1996).
- [3] A. Beauville: *Vector bundles on curves and generalized theta functions: recent results and open problems*. Current topics in Complex Algebraic Geometry (Berkeley, CA, 1992/93), Math. Sci. Res. Inst. Publ., 28 (1995), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 17-33.
- [4] A. Bertram: *Moduli of rank-2 vector bundles, theta divisor, and the geometry of curves in projective space*. J. Differential Geometry 35 (1992), 429-269.
- [5] A. Bertram, B. Feinberg: *On stable rank two bundles with canonical determinant and many sections*. Algebraic Geometry, ed P.Newstead, Marcel Dekker 1998, 259-269
- [6] S. Brivio, A. Verra: *The theta divisors of $SU_C(2, 2d)^s$ is very ample if C is not hyperelliptic*. Duke Mathematical Journal 82 3(1996), 503-552.
- [7] C. Ciliberto, F. Flamini: *Extensions of line bundles and Brill-Noether loci of rank-two vector bundles on a general curve*. Arxiv: 1312.6239v2[math.AG] (27 Dec 2013), 1-32.

-
- [8] F. Ghione: *Un problème du type Brill-Noether pour les fibrés vectoriels*. Algebraic Geometry Open Problems, Lecture Notes in Math., vol. 997, Ravello 1982. Springer-Verlag, Berlin (1983), 197-209.
- [9] D. Gieseker: *A lattice version of the KP equation*. Acta Math. 168 3-4(1992), 219-248.
- [10] P. Griffiths, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Interscience (1978).
- [11] R. Hartshorne *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, New York (1977)
- [12] I. Grzegorczyk, M. Teixidor i Bigas: *Brill-Noether theory for stable vector bundles*. Moduli spaces and vector bundles, 29-50. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 359, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [13] E. Izadi, B. Van Geemen: *The tangent space to the moduli space of vector bundles on a curve and the singular locus of the theta divisor of the Jacobian*. J. Algebraic Geom. 10 (2001), no. 1, 133-177.
- [14] H. Lange: *Higher secant varieties of curves and the theorem of Nagata on ruled surfaces*. Manuscripta Mathematica 47, Issue 1-3 (1984), 263-269.
- [15] H. Lange, M.S. Narasimhan: *Maximal subbundles of rank-two vector bundles on curves*. Mat. Ann. 266(1983), 55-72.
- [16] H. Lange, P.E. Newstead, S.S. Park: *Non-emptiness of Brill-Noether loci in $M(2,K)$* arxiv:1311.5007v1 [math.AG] (20 Nov 2013), 121.
- [17] S. Mukai : *Vector bundles and Brill-Noether theory*. Current topics in Complex Algebraic Geometry, Berkeley, CA, (1992/93), 145-158.
- [18] B. Osserman: *Special determinants in higher rank Brill-Noether theory*. Int.J Math. 24 (2013), no 11, 1-20.
- [19] B. Osserman: *Brill-Noether loci with fixed determinant in rank two*. International Journal of Mathematics. Vol 24 (2013), no. 13 , 24.

-
- [20] E. Sernesi: *Deformations of Algebraic Schemes*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 334 (2006).
- [21] M. Teixidor i Bigas: *Rank two vector bundles with canonical determinant*. Math. Nachr. 265 (2004), 100-106.
- [22] M. Teixidor i Bigas: *Petri map for rank two bundles with canonical determinant* Compos. Math. 144 (2008), no.3, 705-720.
- [23] M. Teixidor i Bigas: *Vector bundles on reducible curves and applications*. Clay Mathematics Proceedings Volume 14 (2011).