



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE
HIDALGO

INSTITUTO DE FISICA Y MATEMATICAS

COSMOLOGIA NUMERICA EN GRAVEDAD CUANTICA DE LAZOS

TESIS

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias en el Área de Física

Presenta

Edison Alejandro Montoya Gomez

Director de Tesis

Ph.D. Alejandro Corichi Rodríguez-Gil

Morelia, Michoacán, septiembre de 2013

COSMOLOGÍA NUMÉRICA EN GRAVEDAD CUÁNTICA DE LAZOS

Tesis
para obtener el grado de

Doctor en Ciencias en el Área de Física

presenta

Edison Alejandro Montoya Gómez

Director de tesis
Dr. Alejandro Corichi Rodríguez-Gil



Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Morelia, Michoacán
2013

Agradezco a mi asesor, Alejandro Corichi.

El presente trabajo se realizó como parte de los estudios de doctorado de Edison Alejandro Montoya Gómez, con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por medio de una beca, con número (CVU/Becario): 301285/226872.

Resumen

El modelo cosmológico espacialmente plano de Friedman-Robertson-Walker (FRW) con un campo escalar sin masa en Cosmología Cuántica de Lazos (CCL) admite solución analítica. Esta solución ha sido utilizada para probar que: i) el rebote cuántico que reemplaza la singularidad clásica del big bang es genérico; ii) hay una cota superior para la densidad de energía de todos los estados y iii) los estados que son semiclásicos después del rebote deben venir de un estado semiclásico antes del rebote. En este trabajo se considera una familia exacta de soluciones de la teoría de CCL, que corresponde a estados coherentes Gaussianos y “apretados”. Se analiza el comportamiento de los observables físicos y se imponen restricciones sobre los estados. Esto resulta ser suficiente para seleccionar de entre todos los estados coherentes aquellos que se comportan de manera semiclásica a tiempos grandes. Se estudian las propiedades de estos estados cerca del rebote donde se espera que tengan un “comportamiento más cuántico”. Como resultado los estados permanecen semiclásicos en el rebote y la dinámica está bien aproximada por la teoría efectiva. Se comparan las propiedades de semiclasicalidad de los estados Gaussianos y los apretados, lo cual permite concluir que los estado Gaussianos tienen un mejor comportamiento semiclásico. En particular la asimetría en las fluctuaciones relativas antes y después del rebote es despreciable, lo cual descarta las afirmaciones del así llamado “olvido cósmico”. Por otro lado, se comentan las implicaciones de los resultados dependiendo de la topología del espacio. En particular se considera la simetría bajo reescalamiento y como recuperarla entre nuestra familia de estados a nivel cuántico. Esta simetría está presente en la descripción clásica del sistema cuando la topología espacial no es compacta.

Por otra parte se estudia la resolución de la singularidad del big bang para diferentes modelos homogéneos en CCL, estos modelos corresponden a FRW con $k = 0, 1$ y Bianchi I, II y IX. El contenido de materia es un campo escalar sin masa. Se presentan los resultados de las evoluciones numéricas de las ecuaciones efectivas para las cosmologías isotrópicas y anisotrópicas, con y sin curvatura espacial. Para resolver el problema de la resolución de la singularidad se estudia la evolución en el tiempo de los invariantes geométricos y la curvatura, que dan información de la geometría del espacio-tiempo semiclásico. Se discute de manera genérica los distintos comportamientos de las soluciones para una variedad de datos iniciales. Dado que Bianchi I, II y IX juegan un papel importante en la conjetura de Belinskii, Khalatnikov, Lifshitz (BKL), se espera que nuestros resultados pueda proveer una idea intuitiva sobre el comportamiento del universo en una vecindad de la singularidad, que es donde las correcciones debidas a la naturaleza cuántica de la geometría se hacen importantes.

De antemano pido disculpas al lector por la presentación un poco tosca de algunos nombres en español, esto es debido a una traducción obligada de los nombres en inglés, que aun siendo nuestra lengua tan rica, este humilde autor se queda corto en poder realizar una traducción estética.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	9
2.1. Sistemas Clásicos con Ligaduras	9
2.2. La descomposición $3 + 1$ en Relatividad General	19
2.3. Tríadas y Conexiones en Relatividad General	24
2.3.1. Nuevas Variables	27
2.4. Cuantización	29
2.4.1. Método General de Cuantización	34
3. Cosmología Cuántica de Lazos	41
3.1. Formulación Clásica	41
3.1.1. FRW con $k = 0$	43
3.1.2. $k = 1$ FRW	45
3.1.3. Bianchi I	46
3.1.4. Bianchi II	48
3.1.5. Bianchi IX	51
3.1.6. Observables	53
3.1.7. Singularidades Clásicas	56
3.2. Formulación Cuántica	57
3.2.1. FRW $k = 0$	60
3.3. Formulación Efectiva	63
3.3.1. FRW $k = 0$	65
3.3.2. FRW $k = 1$	66
3.3.3. Bianchi I and II	67
3.3.4. Bianchi IX	67
4. Universo Plano	69
4.1. Soluciones Clásicas	70
4.2. Teoría Cuántica	72

4.3.	Estados Iniciales Gaussianos *	77
4.3.1.	Valor Esperado de los Observables Básicos	78
4.3.2.	Operador de Volumen	81
4.4.	Condiciones de Semiclasicalidad *	84
4.4.1.	Volumen Asintótico	85
4.4.2.	¿Qué tan Semiclásico es el Rebote?	87
4.4.3.	Volumen y Densidad de Energía en el Rebote	89
4.4.4.	¿Dónde está la Región Clásica?	91
4.5.	Dependencia bajo Reescalamiento *	94
4.6.	Estados Apretados *	97
4.6.1.	Observables Elementales	99
4.6.2.	Volumen	100
4.6.3.	Condiciones de Semiclasicalidad	101
4.7.	Conclusiones *	105
5.	Universo Tipo Bianchi II	107
5.1.	Ecuaciones Efectivas	108
5.2.	Soluciones Numéricas *	110
5.2.1.	Comparación entre Soluciones Clásicas y Efectivas *	113
5.2.2.	Límite isotrópico *	113
5.2.3.	Límite de Bianchi I *	116
5.2.4.	Soluciones de Bianchi II Simétricas bajo Rotaciones Locales *	120
5.2.5.	Límite de Vacío *	124
5.3.	Conclusiones *	128
6.	Universo Tipo Bianchi IX	131
6.1.	Dinámica Clásica	132
6.2.	Dinámica Efectiva	135
6.3.	Soluciones Numéricas **	138
6.3.1.	Límite de Volumen Grande **	140
6.3.2.	Límite Clásico **	141
6.3.3.	Límite Isotrópico **	143
6.3.4.	Límite de Bianchi I **	146
6.4.	Conclusiones **	149
A.	Complementos	151
A.1.	Algunas Integrales	151
A.1.1.	Algunas Relaciones	152
A.2.	Errores	152
A.2.1.	Error en la Norma *	152

A.2.2. Error del Volumen *	153
A.3. Tablas *	155
A.4. Ecuaciones de Movimiento Efectivas	157
A.5. Convergencia y Conservación *	163
A.6. Clasificación de Bianchi	165
Bibliografía	168

Dedico todos mis esfuerzos a mis padres, Flor y Augusto.

Prefacio

“En primer lugar existió el Caos (el vacío sin orden), después Gea (la tierra), extensa y firme para todos los dioses, y en el fondo de la tierra el tenebroso Tártaro (las profundidades). Y Eros (el amor), el más hermoso entre los dioses inmortales, que cautiva el corazón de todos ellos y de todos los hombres. Del Caos surgieron Érebo (las tinieblas infernales) y la negra Noche. De la Noche, a su vez, nacieron el Éter y el Día. Gea dio a luz al estrellado Urano (el cielo), con sus mismas proporciones. También alumbró a las grandes Montañas, hogar de las Ninfas, diosas que habitan en los boscosos montes. Ella igualmente parió al Ponto, el estéril mar de agitadas olas.”

“En el principio creó Dios los cielos y la tierra. La tierra era caos y confusión y oscuridad por encima del abismo, y un viento de Dios aleteaba por encima de las aguas. Dijo Dios: haya luz, y hubo luz. Vio Dios que la luz estaba bien, y apartó Dios la luz de la oscuridad; y llamó Dios a la luz día, y a la oscuridad la llamó noche. Y atardeció y amaneció: día primero. ”

Desde tiempo inmemoriales la humanidad a buscado su origen, entender como surgió el universo y las maravillas que él alberga. Durante toda la historia hemos tratado de vislumbrar como fue el origen del universo y quien lo pudo haber creado. Han habido varias respuestas a estas preguntas, la mayoría basadas en argumentos religiosos, algunas basadas en argumentos filosóficos y algunas de carácter cercano a lo científico. En la opinión de este humilde servidor estas son las preguntas más relevantes que existen, por esa razón vale la pena entregarse en cuerpo y alma a tratar de vislumbrar una respuesta. Lejos de poder hallar una verdad, ya que la ciencia no puede verificar la verdad de las cosas, vale la pena explorar lo que nos puede decir la ciencia actual sobre el origen del universo. Es por esta razón que en este trabajo se presentan algunos resultados sobre lo que tiene para decirnos la cosmología cuántica de lazos sobre el origen del universo. Para no ser muy pretenciosos quiero aclarar que estos trabajos solo constituyen un escalón en la larga escalera que nos lleva a una mejor comprensión del universo.

Capítulo 1

Introducción

Uno de los problemas teóricos más complicados a los que se ha enfrentado la humanidad es tratar de construir una teoría cuántica de la gravedad. ¿Qué lo hace un problema teórico complicado? pocas veces la humanidad ha tenido tantas personas trabajando en una meta investigativa común durante tanto tiempo, ¿Qué tiene que ver la humanidad? por que es la humanidad la que patrocina con su esfuerzo la labor de los investigadores en búsqueda de un nuevo conocimiento, “*Answer to the ultimate question of life, the universe, and everything*” (*The Hitchhiker’s Guide to the Galaxy*). Y es que una de las razones que hace interesante la cuantización de la gravedad, es la posibilidad de responder con ella a una de las primeras preguntas y quizás la más fundamental, la pregunta por el origen del universo. Hasta ahora la mejor descripción de la historia del universo es la de la Relatividad General (RG) en conjunto con la física de partículas. Sin embargo, la Relatividad General deja de funcionar a escalas pequeñas, es decir, cuando nos acercamos al origen del universo. Esta dificultad infranqueable, motiva la construcción de una teoría cuántica de la gravedad con el fin de encontrar una descripción más completa que incluya el origen del universo.

En Relatividad General los teoremas de singularidades de Hawking, Penrose y Geroch enuncian que bajo suposiciones razonables las singularidades son genéricas. Un espacio-tiempo que tiene singularidades es geodésicamente incompleto, lo cual puede suceder si algunos de los invariantes de curvatura divergen. Se espera que cuantizando los grados de libertad gravitacionales las singularidades se resuelvan, es decir, construyendo una teoría que unifique la gravedad con la cuántica.

La Gravedad Cuántica de Lazos (GCL) ha surgido recientemente como un fuerte candidato a ser una teoría cuántica de la gravedad [12]. Una de las principales motivaciones para construir esta teoría es lograr resolver la singularidad del big bang. Aunque la teoría completa tiene poco que decir de las singularidades iniciales, la teoría reducida llamada Cosmología Cuántica de Lazos (CCL) [29, 4, 19] ha

sido muy exitosa en proveer respuestas precisas sobre la singularidad del big bang. Esta teoría es construida aplicando los métodos de GCL a un sector simétrico de la relatividad general.

La CCL ha mostrado que en los modelos isotrópicos del universo la singularidad del big bang es reemplazada por un rebote cuántico [15, 16, 17]. Estos resultados han sido obtenidos para universos plano [16], cerrado [68] y abierto [72] con y sin constante cosmológica [25]. Recientemente algunos de estos resultados han sido extendidos a universos anisotrópicos [41, 20, 21, 76] y algunos inhomogéneos [60]. En todos estos casos los efectos cuánticos de la gravedad ejercen una fuerza repulsiva y previenen el colapso del universo. Esta fuerza hace que el universo se expanda nuevamente pasando por una fase de superinflación antes de que los efectos cuánticos sean despreciables, para luego seguir la dinámica estandar de la relatividad general. La singularidad inicial es resuelta por medio de los valores esperados (o el espectro) de los observables, los cuales han mostrado ser acotados [8, 53, 65, 36]. Estos resultados están sustentados por la unicidad [37, 36] de la denominada: “dinámica mejorada” [17].

Dada una teoría cuántica que describe la física de un sistema, una pregunta relevante es la existencia de su límite semiclásico, en especial si la teoría cuántica proviene de la cuantización de un sistema clásico. En este caso sería bueno saber si es posible recuperar el sistema original en algún límite. Particularmente es interesante explorar la existencia de estados semiclásicos que exhiban las propiedades dinámicas del sistema clásico original. Cuando esto se puede completar se dice que el formalismo en cuestión es físicamente viable. Asumiendo que se puede mostrar la existencia de tal límite, la unicidad de tales estados semiclásicos es un problema que debe resolverse.

El primer sistema que vamos a investigar es un modelo cuántico cosmológico construido usando las técnicas de la cuantización de lazos sobre un modelo de Friedman-Robertson-Walker (FRW) para un universo plano con un campo escalar sin masa [29, 15, 17, 68, 72, 52, 25, 8, 38, 36]. Este sistema es de particular interés ya que puede ser solucionado analíticamente [8]. En primer lugar queremos investigar como construir estados semiclásicos dada una configuración clásica de los grados de libertad gravitacionales y de materia de nuestro modelo, es decir, evaluar si se pueden encontrar estados semiclásicos dada una configuración clásica. Además de esto, nos interesa saber si el carácter semiclásico de los estados se preserva cuando “cruzan el big bang”, el cual es reemplazado por un rebote. En otras palabras, si se utiliza la región de baja densidad (donde la relatividad general es válida) para especificar el estado semiclásico, ¿cuál es el comportamiento al otro lado del rebote? ¿continúa siendo semiclásico? ¿pierde la coherencia y se vuelve altamente cuántico? El propósito del primer trabajo que realizamos es responder estas pre-

guntas. Se mostrará que dentro de la familia de estados considerados, formados por estados Gaussianos y “apretados,”¹ se pueden especificar estados semiclásicos con las propiedades deseadas y poner a prueba la “teoría efectiva” del modelo cuántico. Como veremos, esta teoría será de gran utilidad en el siguiente trabajo.

Una característica interesante de los modelos en CCL es que la dinámica de los estados semiclásicos puede describirse mediante una *teoría efectiva* [17]. Esta teoría es el límite clásico de la dinámica cuántica, el cual no es relatividad general sino una teoría clásica definida por un *Hamiltoniano efectivo*. Para obtener este resultado, autores como Taveras consideran estados coherentes *cinemáticos* para obtener el Hamiltoniano efectivo como el valor esperado del Hamiltoniano cuántico en CCL [69]. Más recientemente, Ashtekar, Campiglia y Henderson, mostraron que al usar la descripción de integrales de trayectoria, las mayores contribuciones provienen de las trayectorias que satisfacen las ecuaciones efectivas y no de las trayectorias que satisfacen las ecuaciones clásicas de la relatividad general[7]. Todos estos resultados han sido obtenidos para los modelos isotrópicos y el modelo anisotrópico de Bianchi I [56].

Cabe preguntarse si estos resultados pueden extenderse a todos los modelos anisotrópicos en los cuales dada la falta de una teoría cuántica completamente soluble, se puede utilizar la existencia de la descripción efectiva para estudiar las principales propiedades cuánticas del sistema. En este trabajo se estudian las soluciones de estas teorías efectivas para una variedad de modelos cosmológicos anisotrópicos, con y sin curvatura espacial. Se mostrará que las singularidades se resuelven de manera genérica, donde por resolución de la singularidad se entiende que la evolución de los escalares geométricos es bien comportada en la región donde debería estar la singularidad clásica, es decir, el big bang es reemplazado por un rebote.

Para ambos modelos, isotrópicos y anisotrópicos, la descripción efectiva entendida como una “teoría clásica” (en el sentido que no contiene $\hbar$), es muy útil para estudiar la información de la geometría discreta del espacio-tiempo derivada de la GCL. En los modelos isotrópicos, las soluciones a las ecuaciones efectivas describen muy bien la dinámica de los estados semiclásicos de la teoría cuántica [17, 68, 72, 35]. En el caso anisotrópico, se espera que también las soluciones efectivas jueguen un papel importante para describir la evolución de los estados semiclásicos. Por lo tanto, dado que estamos interesados en entender la dinámica cuántica, es crucial para este trabajo estudiar la dinámica efectiva para los modelos cosmológicos anisotrópicos.

Para entrar en materia, comenzaremos describiendo detalladamente los estados

¹El nombre de estos estados proviene de “squeezed states”, que puede traducirse como “estados exprimidos”, “estados apretados”, “estados comprimidos”, “estados ajustados” o “estados apachurrados”, por una elección un poco arbitraria que obedece al sentido de estética del autor se toma la traducción “estados apretados”.

semiclásicos del modelo de FRW plano, para luego estudiar los modelos anisotrópicos de Bianchi II y Bianchi IX donde se describe como se estudiaron las soluciones efectivas.

Universo Plano

El modelo soluble para FRW plano ($k = 0$) con un campo escalar sin masa ha permitido probar analíticamente la naturaleza genérica del rebote cuántico [8]. En particular, se demostró que el rebote ocurre para todos los estados físicos y que la densidad de energía posee un límite superior. Con respecto a las fluctuaciones cuánticas, se ha demostrado que sus valores antes y después del rebote están acotados, lo cual implica que un estado semiclásico después del rebote proviene de un estado semiclásico antes del rebote [39]. Más recientemente Kaminski y Pawłowski impusieron unas cotas más fuertes sobre la asimetría en la dispersión relativa antes y después del rebote [54], lo cual descarta algunas de las afirmaciones sobre la periodicidad del carácter semiclásico al pasar por el rebote [27, 28]. Estos resultados están sustentados por el hecho de que entre el gran número de posibles “cuantizaciones tipo lazos,” se selecciona una única cuantización [38]. Esta cuantización es la introducida en [17].

El propósito de esta parte del trabajo es construir estados semiclásicos exactos para el modelo soluble [8]. La estrategia será definir una clase de estados iniciales coherentes y utilizar el control analítico que se tiene sobre las soluciones para producir un estado coherente físico. Luego se imponen restricciones físicas sobre el comportamiento de las dispersiones de los operadores físicos para seleccionar de entre todos los estados coherentes aquellos que presentan un comportamiento semiclásico. Estas condiciones son suficientes para fijar los parámetros y obtener estados centrados sobre un punto del espacio de fase físico. Luego de encontrar los estados semiclásicos se estudia el comportamiento de estos estados cerca al rebote donde se espera que el estado se comporte de manera más cuántica. Cuando se considera la dispersión relativa del volumen encontramos que está acotada por su valor asintótico para todos los estados durante toda la evolución, de hecho, el valor mínimo resulta estar en el rebote. El valor esperado del volumen y la densidad sobre los estados semiclásicos es muy bien aproximado por los valores dados en la teoría efectiva. Esto nos lleva a concluir que la descripción efectiva es muy buena aproximación a la dinámica de los estados *físicos* semiclásicos. Una pregunta natural que surge es si la familia de estados que consideramos es la más general. Para responder a esto se generalizaron los estados Gaussianos a estados “apretados”. La idea es explorar el espacio de parámetros cerca a los estados Gaussianos (que son estados semiclásicos bien comportados) y estudiar si los estados apretados

muestran mejores propiedades semiclásicas.

En particular es interesante estudiar la asimetría en la dispersión del operador de volumen. aunque se encontraron fuertes cotas [54], nuestro formalismo *exacto* es bastante adecuado para explorar esta asimetría. Imponiendo cotas sobre la dispersión relativa asintótica del volumen lejos de rebote, se pudo mostrar que el espacio permitido de parámetros para los estados apretados depende de los requerimientos físicos del estado, de tal manera que para “universos grandes”, el espacio de parámetros es muy pequeño. Esto impone grandes cotas sobre la asimetría de la dispersión del volumen, consistentes y mejores que en [54]. Por último se presenta una discusión sobre el problema de la dependencia del volumen auxiliar (presente en el modelo $k = 0$) y su papel en la construcción de los estados semiclásicos.

Dado que nuestros resultados demuestran que la teoría efectiva reproduce la dinámica de los estados semiclásicos y ya que esto ha sido demostrado para varios modelos isotrópicos [17, 68, 72, 35], está bien justificado asumir que lo mismo ocurre en el caso anisotrópico. Para Bianchi I ya se demostró que las ecuaciones efectivas son las que más contribuyen a la integral de trayectoria de la teoría [56]. Por lo tanto en lo que resta del trabajo se asume la validez de las ecuaciones efectivas en los casos anisotrópicos y se estudian sus soluciones. La forma en que se realizó este estudio se expone en la siguiente sección.

Universos Anisotrópicos

La cosmología cuántica de lazos ha sido extendida a modelos cosmológicos anisotrópicos, como son Bianchi I, II y IX [76, 20, 21]. Pero en ninguno de estos casos la teoría cuántica ha sido resuelta, ni siquiera numéricamente. Para estudiar estos modelos a nivel semiclásico se asume que la teoría efectiva reproduce la teoría cuántica cuando se consideran estados semiclásicos. Esta es nuestra hipótesis de trabajo, la cual está bien justificada por los resultados en los casos isotrópicos. Sería interesante saber si la evolución de los estados semiclásicos reproducen las soluciones que obtenemos de la teoría efectiva, desde este punto de vista este trabajo puede ser entendido como un primer paso en esa dirección.

Las nuevas preguntas a considerar en los modelos anisotrópicos son: ¿es el rebote genérico?, dado que ahora hay anisotropías y curvatura de Weyl, vale preguntar ¿cómo se comportan estas cantidades cerca del rebote? ¿se puede tener diferentes tipos de rebotes? por ejemplo, ¿dominados por la cizalladura σ^2 ? ¿están acotados los escalares dados por la expansión θ , la cizalladura σ^2 y la densidad ρ ? El objetivo de nuestra investigación es responder estas preguntas usando la teoría efectiva para Bianchi I que contiene anisotropías; Bianchi II que además de anisotropías tiene

curvatura espacial; Bianchi IX que tiene anisotropías, curvatura espacial y además es compacto espacialmente.

El propósito es estudiar de manera sistemática el espacio de soluciones de las ecuaciones efectivas. El contenido de materia que se considera es un campo escalar sin masa que juega el papel de tiempo interno. El objetivo es entender la resolución de las singularidades, el comportamiento asintótico y la relación entre los modelos de Bianchi I, II y IX. La estrategia será estudiar casos límites y comparar con soluciones conocidas. Esto permitirá entender las nuevas ideas que introducen Bianchi II y Bianchi IX. Toda la información que se obtiene proviene de los observables que se definen, los cuales son: los factores de escala direccionales; los parámetros de Hubble; la expansión; la densidad de materia; los parámetros de densidad, cizalladura y curvatura; el escalar de Ricci y los exponentes de Kasner.

La idea es adquirir suficiente intuición sobre la evolución de los estados semiclásicos en la teoría cuántica. La manera más natural de ganar intuición es realizar un estudio sistemático de las soluciones de las ecuaciones efectivas, tal como se realiza en este trabajo. Los dos modelos que se estudian son Bianchi II y Bianchi IX, en las siguientes secciones se presenta una explicación más detallada de la investigación que se realizó para cada uno de estos modelos.

Bianchi II

Hasta ahora el único modelo anisotrópico que ha sido explorado en detalle usando las ecuaciones efectivas es el modelo de Bianchi I en CCL [41]. Por lo tanto es natural explorar modelos más complicados anisotrópicos. En esta parte del trabajo se estudian las soluciones a las ecuaciones efectivas que provienen de la “dinámica mejorada” de CCL de Bianchi II [21].

La manera en que se realizará el estudio sistemático de las soluciones es comparar las soluciones clásicas con las soluciones efectivas; luego estudiar el límite isotrópico, que ofrece nuevas características de la dinámica de Bianchi II; después el límite de Bianchi I permite confirmar que las soluciones que obtenemos coinciden con los resultados previos [41]. El modelo reducido de Bianchi II con simetría rotacional local permite encontrar soluciones genéricas que alcanzan la densidad máxima en el rebote, con densidad mayor a la obtenida en los casos isotrópicos [17, 8] y de Bianchi I [41, 20]. Por último se estudia el límite de vacío que permite explorar las soluciones extremas en que casi toda la contribución dinámica proviene de las anisotropías.

El modelo cosmológico de Bianchi II es el caso más simple que posee curvatura espacial, además el modelo de Bianchi I puede ser recuperado cuando se hace cero el parámetro que mide la contribución de la curvatura espacial. Un modelo más

general es Bianchi IX, el cual además de ser anisotrópico y tener curvatura espacial es compacto espacialmente. Adicionalmente Bianchi I y II son casos límites de Bianchi IX, lo cual hace interesante estudiar este modelo. Los detalles del estudio de Bianchi IX se explican en la siguiente sección.

Bianchi IX

El modelo de Bianchi IX tiene una característica que lo hace muy interesante y es que se encuentra en el corazón de la conjetura BKL (Belinskii-Khalatnikov-Lifshitz) [23, 24, 10], la cual sugiere que la evolución de “cualquier” universo cerca a una singularidad espacial tipo big bang se puede describir localmente como un universo tipo Bianchi IX que pasa por fases de Bianchi I y transiciones de Bianchi II. Esto hace que sea interesante estudiar el modelo cuántico de Bianchi IX, ya que se podría obtener información que aplique de manera genérica a cualquier tipo de universo.

Debido a la compacidad del espacio, el modelo de Bianchi IX presenta nuevas propiedades interesantes, por ejemplo, un número infinito de rebotes y recolapsos, tal como ocurre en el modelo cerrado de FRW. Además las correcciones de las triadas inversas hacen que existan distintas teorías cuánticas de Bianchi IX. Entonces cabe preguntarse ¿existe algún criterio físico para escoger una teoría sobre la otra? tal como se hizo en el caso isotrópico [38]. Esta es una pregunta abierta, así que reformulamos la pregunta ¿puede el límite semiclásico servir para escoger una teoría sobre la otra? después de todo en el límite semiclásico es donde se tiene un contacto con la teoría clásica y esto puede servir para descartar alguna teoría. Asumiendo que el límite semiclásico de cada una de las teorías cuánticas está bien determinado por la teoría efectiva, nos dimos a la tarea de responder esta pregunta. La respuesta encontrada es que cada una de las teorías efectivas describen una dinámica distinta, pero debido a que ahora el universo es espacialmente compacto se puede medir el volumen total del espacio. Se muestra que en el límite de volumen grande todas las teorías efectivas describen la misma dinámica. Desde este punto de vista aunque hayan distintas teorías cuánticas con distintos límites semiclásicos, si el universo es grande entonces todas describen la misma física.

Dado que Bianchi I, II y FRW con $k = 0$ son casos límites de Bianchi IX, se estudia cada uno de estos límites de manera que se pueda comparar con los resultados ya conocidos y verificar que la implementación numérica es adecuada. Es importante resaltar que estos casos no están contenidos dentro de Bianchi IX sino que son límites. El caso isotrópico con $k = 1$ está contenido en Bianchi IX pero solo si las correcciones de las triadas inversas no se incluyen; si las correcciones se incluyen entonces $k = 1$ es un caso límite. Se muestra que el caso de universos grandes las teorías de Bianchi IX en el límite isotrópico coinciden con las teorías isotrópicas

con $k = 1$.

Una pregunta que permanece abierta es si el comportamiento BKL permanece en la dinámica efectiva de Bianchi IX, es decir, si las soluciones efectivas presentan fases de Bianchi I con transiciones de Bianchi II lejos de la región de Planck. También puede ocurrir que los efectos de la geometría cuántica prevengan las transiciones.

Dado que estos modelos anisotrópicos presentan un comportamiento no singular, sería interesante saber si también se presenta en modelos inhomogéneos, es decir, ¿estamos más cerca de una resolución cuántica genérica de las singularidades?

Finalmente, debido a que la mayor parte del estudio de las ecuaciones efectivas se hace numéricamente, se muestra que las soluciones convergen y evolucionan sobre la superficie de ligadura. La convergencia es un hecho que debe ser demostrado ya que se necesita estar seguro que los métodos numéricos están bien implementados y que las soluciones numéricas convergen a las soluciones analíticas.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se explican los elementos básicos para entender los métodos de cuantización de la gravedad en el acercamiento de lazos. Básicamente se muestra como la gravedad se estudia como un sistema Hamiltoniano con ligaduras y como se cuantiza este tipo de sistemas. Para lograr esto, primero se explica en que consisten los sistemas clásicos con ligaduras y como tratarlos. Luego se explica la descomposición 3+1 de la relatividad general con el fin de introducir el formalismo Hamiltoniano. Debido a que las variables métricas no son las adecuadas para cuantizar la gravedad, se introduce el formalismo de triadas y conexiones. Por último teniendo el formalismo clásico completo, se explica como es el proceso de cuantización y se muestran los principales resultados obtenidos en gravedad cuántica de lazos. Este capítulo está basado de las notas de clase del profesor Alejandro Corichi, las cuales estamos preparando en conjunto.

2.1. Sistemas Clásicos con Ligaduras

Si tenemos un sistema clásico, se dice que tiene ligaduras cuando:

- Las ecuaciones de movimiento son invariantes ante alguna transformación.
- La evolución no es únicamente determinada por las condiciones iniciales.

Dado que estamos interesados en cuantizar este tipo de sistemas, es entonces interesante estudiar su formulación Hamiltoniana, ya que es la única formulación en la que “sabemos” como cuantizar. Si se tiene una formulación Lagrangiana entonces se necesita transformar en una formulación Hamiltoniana. Esto se puede realizar de dos maneras, mediante una transformación de Legendre o mediante un Formalismo Hamiltoniano Covariante (estudio del espacio de soluciones).

En la manera usual usando transformaciones de Legendre (para un tratamiento más detallado de los sistemas clásicos con ligaduras se puede ver [42]), se tiene un espacio de configuración C con Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i)$ del cual se puede definir los momentos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Esto define n ecuaciones algebraicas. En caso de que sea posible despejar las $\dot{q}_i$ de estas n ecuaciones se dice que el sistema es regular y se puede definir $\dot{q}_i(p_i)$ de tal manera que se pueda construir el Hamiltoniano

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i(p_i) - L(q_i, \dot{q}_i). \quad (2.2)$$

Se pueden hallar las ecuaciones de movimiento usando

$$L(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i(p_i) - H(q_i, p_i),$$

las cuales son de la forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.3)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.4)$$

Este es un sistema regular si $\det\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0$ (llamada la condición Hessiana, [51]), si esto no se cumple entonces es singular. El comportamiento singular se puede deber a [42]

- La existencia de ligaduras $\phi_m(q_i, p_i) = 0$.
- Las ecuaciones de movimiento no están bien definidas (hay grados de libertad extras).

Para solucionar estos problemas existen varias versiones del *algoritmo de Dirac*, el cual permite hallar una descripción consistente del sistema. Para aplicar este algoritmo primero se clasifican las ligaduras como:

Primarias	Primera clase
Secundarias	Segunda clase

Las ligaduras que aparecen primero son llamadas *primarias* y se denotan como ϕ_j . Estas ligaduras surgen de la definición de los momentos p_i . Por lo tanto el Hamiltoniano $H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i(p_i) - L$ no es único, ya que hay otros Hamiltonianos $H^* = H + \phi_j$ (o cualquier combinación lineal de ϕ_j , con $j = 1, \dots, m$). Se puede considerar el caso especial

$$H_T = H + \sum_{j=1}^m U_j \phi_j$$

llamado *Hamiltoniano total*, el cual incluye la suma sobre todas las ligaduras primarias, donde las constantes U_j deben ser determinadas. Las ecuaciones de movimiento para el Hamiltoniano total son

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{j=1}^m U_j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}, \quad (2.5)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^m U_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}. \quad (2.6)$$

La dinámica de una función $f(q_i, p_i)$ esta dada por $\dot{f} = \{f, H_T\}$, por lo tanto por autoconsistencia las ligaduras deben satisfacer que $\dot{\phi}_j \approx 0$. El símbolo “ $\approx$ ” se llama igualdad débil y significa que la igualdad solo se cumple sobre la superficie definida por la ligadura, también conocida como superficie de ligadura. Las condiciones de consistencia son

$$\dot{\phi}_l = \{\phi_l, H_T\} \approx \{\phi_l, H + \sum_{j=1}^m U_j \phi_j\} \approx 0. \quad (2.7)$$

Las cuales pueden:

- Especificar las constantes U_j .
- Implicar nuevas ligaduras $\chi(q, p) \approx 0$, llamadas *secundarias*, que deben también satisfacer las condiciones de consistencia $\dot{\chi} \approx 0$ y pueden generar otras ligaduras (llamadas secundarias) que deben ser consistentes también y así sucesivamente.

Al final se obtiene un conjunto de ligaduras $\{\phi_l\}$, con $l = 1, \dots, m + k$, que es un conjunto de ligaduras primarias y secundarias (es de notar que la clasificación en primarias y secundarias después de este punto no es relevante). Entonces se puede construir el *Hamiltoniano extendido*

$$H_E = H + \sum_{l=1}^{m+k} \lambda_l \phi_l,$$

donde se podrían hallar algunos de los λ_l . Después de esto las ligaduras son clasificadas como:

- *Primera clase*, conjunto de ligaduras $\{\phi_\alpha\}$ para las cuales los corchetes de Poisson son combinaciones lineales de ellas mismas, $\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = \sum_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma \phi_\gamma \approx 0$.
- *Segunda clase*, conjunto de ligaduras $\{\phi_A, \phi_B, \dots\}$ para las cuales sus corchetes de Poisson son funciones, $\{\phi_A, \phi_B\} = Q_{AB}$, tal que la matriz Q_{AB} es invertible.

La clasificación de las ligaduras se puede entender también desde un punto de vista geométrico, el cual ayuda a comprender mejor la física de este tipo de sistemas. Con este fin, en la siguiente sección se explica la geometría de los sistemas con ligaduras.

Punto de Vista Geométrico

Una buena referencia para comprender geoméricamente los sistemas clásicos con ligaduras es el apéndice B de [3]. Primero se estudia el espacio de fase clásico (q_i, p_i) , el cual es un haz cotangente $2n$ -dimensional $\Gamma = T^*C$ con una estructura *simpléctica* correspondiente a una 2-forma Ω cerrada y no degenerada¹. El par (Γ, Ω) es llamado *espacio simpléctico*. Dado que Γ es un haz cotangente existe una manera natural de construir $\Omega = d\omega$, donde ω es una 1-forma llamada *potencial simpléctico*. Debido a la no degeneración de Ω , existe la inversa Ω^{-1} (2-vector), tal que $\Omega\Omega^{-1} = \Omega^{-1}\Omega = id$. Esto puede ser entendido como una transformación entre los espacios tangente y cotangente en cada punto

$$\Omega : T_p\Gamma \rightarrow T_p^*\Gamma, \quad \Omega^{-1} : T_p^*\Gamma \rightarrow T_p\Gamma. \quad (2.8)$$

Si existe un campo vectorial V tal que la derivada de Lie de la forma simpléctica a lo largo de este campo vectorial es cero ($\mathcal{L}_V\Omega = 0$), entonces V es llamado *Campo Vectorial Hamiltoniano* (CVH). Con este campo vectorial la forma simpléctica satisface que

$$\mathcal{L}_V\Omega = i_V d\Omega + d(i_V\Omega) = d(\Omega(V,)) = 0, \quad (2.9)$$

lo cual significa que localmente $\Omega(V,)$ es cerrada, i. e.,

$$\Omega(V,) = i_V\Omega = df, \quad (2.10)$$

¹La condición de no degeneración significa que, para todo $p \in M$ se tiene la propiedad que si $\Omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_pM$ entonces $X \in T_pM$ es cero. La condición de ser cerrada es que su derivada exterior es cero, $d\Omega = 0$.

para alguna función f sobre Γ . Esto puede ser usado para asociar un campo vectorial Hamiltoniano a cada función $f(q_i, p_i)$. En coordenadas, la ecuación (2.10) puede ser escrita como $\Omega_{ab}V^a = \nabla_b f$ o equivalentemente $V^b = \Omega^{ba}\nabla_a f$, este campo vectorial es llamado campo vectorial Hamiltoniano asociado a f y se denota como

$$X_f^b := \Omega^{ba}\nabla_a f. \quad (2.11)$$

El corchete de Poisson de dos funciones sobre el espacio de fase esta dado por

$$\{f, g\} = \Omega^{ab}\nabla_a f \nabla_b g = \Omega_{ab}X_f^a X_g^b. \quad (2.12)$$

La última igualdad define un isomorfismo local (puede ser global si el primer grupo de cohomología de Γ es cero), entre el álgebra de Lie de las funciones $(C^\infty(\Gamma), \{, \})$ y el algebra de Lie de los campos vectoriales $(\chi^\infty(\Gamma), [,])$, este isomorfismo es de la forma

$$X_{\{f, g\}}^a = -[X_f, X_g]^a. \quad (2.13)$$

Dada una función $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, se puede definir un *simpléctomorfismo* $\phi_f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ (que preserva la estructura simpléctica, $f^*\Omega = \Omega$), como el mapa integral de su CVH. Esto puede ser entendido como una transformación canónica. En particular, la evolución dinámica esta dada por una función preferida H (Hamiltoniano),

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = X_H^a \nabla_a f = \{f, H\}. \quad (2.14)$$

En este contexto las ligaduras pueden también ser interpretadas geométricamente, como se explica en las siguientes dos secciones.

Si las ligaduras son solo de segunda clase

En este caso $\{\phi_A, \phi_B\} = Q_{AB}$, con $\det(Q_{AB}) \neq 0$. Se tiene que:

El espacio de fase ligado (o superficie de ligadura), donde todas las ligaduras se satisfacen, $\phi_A \approx 0$, es una subvariedad $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$ con $\dim(\bar{\Gamma}) = 2N - k$. En este caso, la 2-forma $\Omega = \iota^ \bar{\Omega}$ (para $\iota : \bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ el embebimiento de $\bar{\Gamma}$ en Γ) inducida sobre $\bar{\Gamma}$ es no degenerada y por lo tanto $(\bar{\Gamma}, \bar{\Omega})$ es una variedad simpléctica.*

Entonces las ligaduras de segunda clase se pueden identificar como aquellas que definen una subvariedad simpléctica. En este caso se puede ignorar (en principio) el espacio de fase original (Γ, Ω) y trabajar en el espacio de fase restringido $(\bar{\Gamma}, \bar{\Omega})$. Las funciones (observables) son las restricciones sobre $\bar{\Gamma}$ de las funciones sobre Γ , i. e., $f = F|_{\bar{\Gamma}}$ con $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Se puede definir de forma natural un corchete sobre $(\bar{\Gamma}, \bar{\Omega})$ como

$$\{f, g\}^* = \bar{\Omega}^{ab}\nabla_a f \nabla_b g, \quad (2.15)$$

el cual es llamado *Corchete de Dirac*.

El hecho de restringirse a $(\bar{\Gamma}, \bar{\Omega})$ y usar funciones $f : \bar{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado *imponer fuertemente las ligaduras* o solucionar las ligaduras de segunda clase. Este es el objetivo que se persigue con estas ligaduras.

Ejemplo 1. Sea $\Gamma = \mathbb{R}^4$ con coordenadas (q_1, q_2, p_1, p_2) y la estructura simpléctica estandar $\Omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$, con ligaduras $\phi_1 = q_1 - 3$ y $\phi_2 = p_1 - 2$. Estas ligaduras son de segunda clase ya que $\{\phi_1, \phi_2\} = 1$, entonces se solucionan las ligaduras $\phi_i \approx 0$ y se trabaja en el espacio de fase reducido $\bar{\Gamma}$ con coordenadas $(3, q_2, 2, p_2)$ y estructura simpléctica $\bar{\Omega} = dp_2 \wedge dq_2$, las funciones sobre $\bar{\Gamma}$ son de la forma $f(q_2, p_2) = F(q_1, q_2, p_1, p_2)|_{\bar{\Gamma}} = F(3, q_2, 2, p_2)$.

Ahora que se ha explicado la geometría de las ligaduras de segunda clase, se procede a explicar la geometría de las ligaduras de primera clase.

Si las ligaduras son solo de primera clase

En este caso, cuando se hace la reducción al espacio ligado $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$ donde $\phi_i \approx 0$, con $i = 1, \dots, m$, $\bar{\Omega}$ es máximamente degenerada, i. e., $\bar{\Omega}$ tiene m direcciones degeneradas $V_j \in T_p \bar{\Gamma}$ tales que $\bar{\Omega}(V_j, X) = 0$ para todo $X \in T_p \bar{\Gamma}$. El espacio $\bar{\Gamma}$ es llamado *hiperespacio coisotrópico*. Hay tres resultados importantes en este caso:

- Los CVHs asociados a las ligaduras son tangentes a $\bar{\Gamma}$. **Prueba**, el CVH $X_i^a = \Omega^{ab} \nabla_b \phi_i$ es tangente a $\bar{\Gamma}$ si y solo si $X_i^a(\phi_j) = \Omega^{ab} \nabla_b \phi_i \nabla_a \phi_j = \{\phi_j, \phi_i\}|_{\bar{\Gamma}} = 0$ para todo i, j si y solo si $\{\phi_j, \phi_i\}|_{\bar{\Gamma}} = \sum_k C_{ji}^k \phi_k$.
- Los CVHs $X_i^a = \Omega^{ab} \nabla_b \phi_i$ son las direcciones degeneradas de $\bar{\Omega}$. **Prueba**, para todo $V \in T\bar{\Gamma}$ se tiene que $\bar{\Omega}(X_i, V) = \bar{\Omega}_{ab} X_i^a V^b = \Omega_{ab} X_i^a V^b = V^b \nabla_b \phi_i = V[\phi_i] = 0$.
- Los CVHs son “integrables”, esto significa que su álgebra es cerrada. **Prueba**

$$\begin{aligned}
 [X_i, X_j]^a &= -X_{\{\phi_i, \phi_j\}}^a \\
 &= -\Omega^{ab} \nabla_b (\{\phi_i, \phi_j\}) \\
 &= -\Omega^{ab} \nabla_b \left(\sum_k C_{ij}^k \phi_k \right) \\
 &= -\sum_k [\Omega^{ab} \nabla_b (C_{ij}^k) \phi_k + C_{ij}^k \Omega^{ab} \nabla_b (\phi_k)] \\
 &= -\sum_k C_{ij}^k \Omega^{ab} \nabla_b (\phi_k) |_{\bar{\Gamma}} \\
 &= -\sum_k C_{ij}^k X_k^a.
 \end{aligned}$$

Las superficies generadas por las direcciones degeneradas son llamadas *superficies nulas*.

Cuando nos restringimos a la superficie de ligadura no todas las funciones son relevantes físicamente. Aquí es donde entra la noción de observables, que son funciones bien definidas sobre la superficie de ligadura. Las características de estas funciones se explican a continuación.

Observables

En la superficie de ligadura se debe trabajar con las restricciones de las funciones $F, G : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ sobre $\bar{\Gamma}$, $f, g : \bar{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}$. Una función es llamada *función de primera clase* si $\{F, \phi_i\}|_{\bar{\Gamma}} = 0$ para toda ϕ_i ligadura de primera o segunda clase. De todas las posibles funciones sobre Γ las únicas físicamente aceptables son las que son de primera clase. **Prueba:** $\{F, \phi_i\} \approx \Omega^{ab} \nabla_b F \nabla_a \phi_i \approx X_F^a \nabla_a \phi_i \approx X_F(\phi_i) \approx 0$ si y solo si $X_F^a \in T\bar{\Gamma}$; X_F^a es tangente si y solo si F genera un simpléctomorfismo que preserva $\bar{\Gamma}$, i. e., la transformación canónica generada por F está siempre en $\bar{\Gamma}$, es decir, no genera una transformación que se sale del espacio. Cuando las ligaduras son de primera clase $0 \approx \{F, \phi_i\} \approx \Omega^{ab} \nabla_b F \nabla_a \phi_i \approx -X_i^b \nabla_b F \approx -X_i(F) \approx 0$ si y solo si $X_i(f) = 0$ en $\bar{\Gamma}$ para todo i , por lo tanto un observable es constante sobre las superficies nulas. Esto nos dice que no cualquier función f sobre $\bar{\Gamma}$ es aceptable, solo las que son constantes sobre las superficies nulas son aceptables.

En el caso de las ligaduras de primera clase $\bar{\Omega}$ es degenerada, por lo tanto no hay una única inversa $\bar{\Omega}^{-1}$ y tampoco hay un único CVH asociado a f , de hecho hay un número infinito de CVHs (esto es equivalente a una indeterminación en las ecuaciones de movimiento). Para ilustrar este hecho sean $\bar{\Omega}_{ab} X_f^b = \nabla_a f$ y $\tilde{X}_f^a = X_f^a + X_i^a$ dos CVHs con $\bar{\Omega}_{ab} X_i^b = \nabla_a \phi_i$, entonces

$$\bar{\Omega}_{ba} \tilde{X}_f^a = \bar{\Omega}_{ba} X_f^a + \bar{\Omega}_{ba} X_i^a = \nabla_b f + \nabla_b \phi_i = \nabla_b f$$

lo cual define una relación de equivalencia para los CVHs

$$X_f^a \sim \tilde{X}_f^a \quad \text{si} \quad X_f^a - \tilde{X}_f^a = \sum_i \lambda_i X_i^a. \quad (2.16)$$

El hecho de que dos puntos en la superficie nula sean físicamente indistinguibles es llamada la *conjetura de Dirac*: “Todas las ligaduras de primera clase generan una transformación de norma”. Esto sugiere que se debe tomar el cociente a lo largo de las superficies nulas (las cuales pueden ser entendidas como órbitas de norma). Las direcciones degeneradas de $\bar{\Omega}$ son debidas a la “degeneración” en las funciones cuando se hace la restricción a $\bar{\Gamma}$, por lo tanto no hay un CVH preferido sobre $\bar{\Gamma}$ para la función restringida. El espacio que esta bien definido (cuando existe)

es el *espacio de fase reducido* $\hat{\Gamma} = \bar{\Gamma} / \sim$, definido por la relación de equivalencia (2.16). Entonces en $\hat{\Gamma}$, una superficie nula se reduce a un punto y la 2-forma $\hat{\Omega}$ (proyección de $\bar{\Omega}$) es no degenerada, por lo tanto $\hat{\Gamma}$ es un espacio simpléctico con $\dim(\hat{\Gamma}) = 2N - M - M = 2(N - M)$, donde M es el número de ligaduras de primera clase.

Una manera alternativa de trabajar con las ligaduras de primera clase (sin hacer el cociente) es imponer M condiciones de norma $\chi_j = 0$ cuando hay M ligaduras ϕ_i , tal que el conjunto (ϕ_i, χ_j) es de ligaduras de segunda clase. Esto es llamado *fixar la norma*. El problema es que no siempre existen χ_j que funcionen globalmente (esto es llamado la ambigüedad de Gribov). La variedad $\hat{\Gamma}$ donde se satisface que $\phi_i = 0$ y $\chi_j = 0$ se obtiene por el mismo método usado para las ligaduras de segunda clase.

Ejemplo 2. (tomado de mi artículo [35])

Sea $\Gamma = \mathbb{R}^4$ el espacio de fase cinemático con coordenadas (β, V, ϕ, p_ϕ) . Donde ϕ es un campo escalar sin masa, p_ϕ es su momento canónico conjugado, V el volumen (de una celda auxiliar) y β su momento conjugado. La ligadura Hamiltoniana efectiva del sistema es [69]:

$$H_\lambda = \frac{3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} V^2 \sin(\lambda \beta)^2 - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0,$$

la cual está etiquetada por un parámetro real λ con dimensiones de longitud. La estructura simpléctica está dada por

$$\Omega_0 = \frac{1}{4\pi G \gamma} dV \wedge d\beta + dp_\phi \wedge d\phi \quad (2.17)$$

la cual induce los corchetes de Poisson

$$\{\beta, V\}_0 = 4\pi G \gamma, \quad \{\phi, p_\phi\}_0 = 1.$$

La ligadura Hamiltoniana define una hipersuperficie $\bar{\Gamma}$ en el espacio de fase, la cual puede ser tomada como la unión disyunta de hipersuperficies donde $\beta \in (n\frac{\pi}{\lambda}, (n+1)\frac{\pi}{\lambda})$ con $n \in \mathbb{Z}$. En lo que sigue se considera la componente conexa donde $\beta \in (-\frac{\pi}{\lambda}, 0)$. Notese que los puntos donde $\beta = n\frac{\pi}{\lambda}$, $n \in \mathbb{Z}$, no están sobre la superficie de ligadura. Estos puntos (hiperplanos) son puntos degenerados donde el sistema no tiene una dinámica bien definida. Más adelante se muestra que físicamente estos puntos deben ser excluidos.

Ahora se considera la función inducida contravariante² de la estructura simpléctica sobre la hipersuperficie $\bar{\Gamma}$, es decir, se debe encontrar $\bar{\Omega}$ tal que $\Omega_0 = \iota^* \bar{\Omega}$, para

²Lo que llamamos función inducida contravariante es lo que en inglés se entiende como *pull-back*.

$\iota : \bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ el embebimiento de $\bar{\Gamma}$ en Γ . Escribamos el Hamiltoniano efectivo como

$$H_\lambda = \eta^2 V^2 \sin(\lambda\beta)^2 - p_\phi^2 \approx 0, \text{ con } \eta^2 = \frac{3}{4\pi G\gamma^2 \lambda^2}.$$

Entonces sobre la superficie de ligadura se tiene que

$$p_\phi \approx \pm \eta V \sin(\lambda\beta). \quad (2.18)$$

La función inducida contravariante del gradiente de H_λ sobre $\bar{\Gamma}$ es

$$\begin{aligned} \eta^2 2V dV \sin(\lambda\beta)^2 + 2\eta^2 V^2 \sin(\lambda\beta) \cos(\lambda\beta) \lambda d\beta &\approx 2p_\phi dp_\phi \\ \pm \eta [\sin(\lambda\beta) dV + V \cos(\lambda\beta) \lambda d\beta] &\approx dp_\phi, \end{aligned}$$

que puede ser usado para solucionar dp_ϕ , dV ó $d\beta$ y ponerlo de regreso en la ecuación (2.17). Cada una de estas elecciones dependerá de las coordenadas que se elijan sobre la superficie de ligadura. Si se considera la parametrización en la cual se resuelve p_ϕ , es decir, usar (V, β, ϕ) como coordenadas. Entonces

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{1}{4\pi G\gamma} dV \wedge d\beta \pm \eta [\sin(\lambda\beta) dV + V \cos(\lambda\beta) \lambda d\beta] \wedge d\phi,$$

es la estructura presimpléctica para dos hipersuperficies desconexas, parametrizadas por los valores positivos y negativos de p_ϕ . El valor $p_\phi = 0$ se excluye si $\beta \neq n\frac{\pi}{\lambda}$ ($n \in \mathbb{Z}$) ó $V \neq 0$. Si se toma $p_\phi > 0$, se obtiene

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{1}{4\pi G\gamma} dV \wedge d\beta + \eta \sin(\lambda\beta) dV \wedge d\phi + \eta \lambda V \cos(\lambda\beta) d\beta \wedge d\phi.$$

Si solucionamos para dV se obtiene la expresión para la estructura presimpléctica en la parametrización (β, ϕ, p_ϕ) , la cual esta dada por

$$\bar{\Omega}_2 = \pm \frac{1}{4\pi G\gamma} \frac{1}{\sin(\lambda\beta)\eta} dp_\phi \wedge d\beta + dp_\phi \wedge d\phi.$$

Si nos restringimos a $p_\phi > 0$ se obtiene

$$\bar{\Omega}_2 = \frac{1}{4\pi G\gamma\eta} \frac{1}{\sin(\lambda\beta)} dp_\phi \wedge d\beta + dp_\phi \wedge d\phi$$

sobre la correspondiente componente conexas.

Independientemente de la parametrización, la forma presimpléctica $\bar{\Omega}$ tiene una dirección degenerada correspondiente al CVH de la ligadura Hamiltoniana X_{H_λ} .

Físicamente las curvas integrales de este CVH representan las direcciones de norma a lo largo de las cuales los puntos son físicamente indistinguibles. Se puede encontrar el gradiente de la ligadura

$$\nabla_a H_\lambda = 2\eta^2 V \sin(\lambda\beta)^2 \nabla_a V + 2\eta^2 \lambda V^2 \sin(\lambda\beta) \cos(\lambda\beta) \nabla_a \beta - 2p_\phi \nabla_a p_\phi.$$

Usando que $X_{H_\lambda}^a = \Omega^{ab} \nabla_b H_\lambda$ y

$$\Omega^{ab} = 2 \left(4\pi G \gamma \frac{\partial^{[a} \partial^{b]}}{\partial \beta \partial V} + \frac{\partial^{[a} \partial^{b]}}{\partial \phi \partial p_\phi} \right)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} X_H^a|_{\bar{\Gamma}} &= 16\pi G \gamma \eta^2 V \sin(\lambda\beta)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^a \\ &\quad - 16\pi G \gamma \eta^2 \lambda V^2 \sin(\lambda\beta) \cos(\lambda\beta) \left(\frac{\partial}{\partial V} \right)^a - 4p_\phi \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a \end{aligned}$$

que es la restricción del campo vectorial a la hipersuperficie de ligadura con coordenadas (V, β, ϕ) . Es fácil verificar que esta es la dirección degenerada de $\bar{\Omega}_1$, es decir, $\bar{\Omega}_1(X_H, \cdot) = 0$.

Si se quiere entender de manera cualitativa la estructura del espacio de fase reducido se debe tomar el cociente de $\bar{\Gamma}$ respecto a las direcciones generadas por X_H . En este caso es más fácil fijar una norma que este bien definida sobre toda la hipersuperficie. Sea $\mathcal{C} = \phi - c$, con $c = \text{constante}$. Esta ligadura junto con H_λ forman un par de segunda clase

$$\{H_\lambda, \mathcal{C}\}_0 = \{H_\lambda, \phi\}_0 = \{\eta^2 V^2 \sin(\lambda\beta)^2 - p_\phi^2, \phi\}_0 = -\{p_\phi^2, \phi\}_0 = 2p_\phi,$$

con $p_\phi \neq 0$, que es la condición que se había impuesto antes. El espacio de fase con la norma fija $\hat{\Gamma}$ esta parametrizado por (β, p_ϕ) (ó (V, β)) con $\phi = \text{constante}$, $p_\phi > 0$ ó $p_\phi < 0$ y $\beta \in (-\frac{\pi}{\lambda}, 0)$. Las estructuras simplécticas en cada una de estas dos parametrizaciones son

$$\hat{\Omega}_1 = \frac{1}{4\pi G \gamma} dV \wedge d\beta, \quad \hat{\Omega}_2 = \pm \frac{1}{4\pi G \gamma \eta \sin(\lambda\beta)} dp_\phi \wedge d\beta.$$

Si introducimos una nueva variable

$$x = \frac{1}{\sqrt{12\pi G}} \ln \left| \tan \left(\frac{\lambda\beta}{2} \right) \right|$$

entonces la forma simpléctica $\hat{\Omega}_2$ toma la forma

$$\hat{\Omega}_2 = \pm dp_\phi \wedge dx$$

lo cual indica que (x, p_ϕ) pueden ser vistas como variables conjugadas en la teoría reducida. Esto se usará más adelante para justificar la definición del operador asociado a la variable x conjugada a p_ϕ .

Una vez entendido el tratamiento de sistema Hamiltoniano con ligaduras, el paso siguiente es escribir la relatividad general en su forma Hamiltoniana. Para lograr esto se realiza la descomposición 3+1 tal como se explica en la siguiente sección.

2.2. La descomposición 3 + 1 en Relatividad General

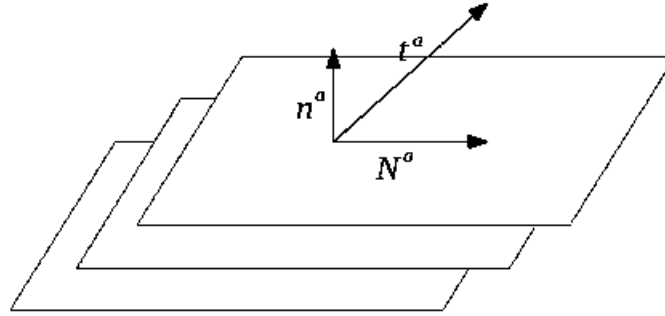


Figura 2.1: Descomposición 3+1.

Para hacer la descomposición 3 + 1 es necesario restringirse a una variedad M que es globalmente hiperbólica, es decir, donde existe una hipersuperficie de datos iniciales con la cual se puede generar la variedad completa, conocida como superficie de Cauchy.

Un resultado importante es que si (M, g) es globalmente hiperbólica entonces $M = \Sigma \times \mathbb{R}$. Otro elemento que se necesita son las congruencias tipo tiempo, las cuales son un conjunto de curvas que cubren toda la variedad M , cruzan cada punto de la misma una sola vez y son tales que tienen:

- Un campo vectorial t^a tangente a la congruencia.
- Una función $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sea un parámetro afín de la congruencia, función que se escoge para definir el campo vectorial t^a , es decir, $t^a \nabla_a t = 1$.

Con estos elementos se puede entender t como un parámetro de tiempo donde para cada valor se obtiene una hipersuperficie Σ_t y en cada punto el vector tangente t^a se puede descomponer como $t^a = Nn^a + N^a$, siendo N la *función de lapso*, N^a el *vector de corrimiento* y n^a el vector normal en la dirección del tiempo (relacionado con la 1-forma $n_a = -N\nabla_a t$), como se ilustra en la figura 2.1. Si se toma una base $\{e^a_i\}_{i=1,2,3}$ de $T_p\Sigma$ con $p \in \Sigma$, se satisface que $n_a e^a_i = 0$, $N^a = N^j e^a_j$. Si se tienen coordenadas $x^\mu = (t, y^i)$ entonces $dx^a = t^a dt + e^a_i dy^i$, y usando que $t^a = Nn^a + N^a$ se obtiene que

$$dx^a = (Nn^a + N^a)dt + e^a_i dy^i = (Ndt)n^a + (dy^i + N^i dt)e^a_i, \quad (2.19)$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ab} dx^a dx^b \\ &= g_{ab} (Ndt)^2 n^a n^b + (dy^i + N^i dt)(dy^j + N^j dt) e^a_i e^b_j g_{ab} \\ &= -N^2 (dt)^2 + (dy^i + N^i dt)(dy^j + N^j dt) q_{ij}. \end{aligned}$$

Entonces $g_{tt} = -N^2$, $g_{ti} = N^j q_{ji}$, $g_{ij} = q_{ij}$ y $\sqrt{-\det g} = N\sqrt{\det q}$. La métrica inducida en Σ_t es $q_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$, la cual es una métrica de Riemann y satisface que $q_{ab} n^b = g_{ab} n^b + n_a (n \cdot n) = n_a - n_a = 0$. El proyector sobre Σ_t se define como $q^a_b = g^a_b + n^a n_b$.

La acción de una teoría sobre un espacio-tiempo curvo se puede escribir como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int dt L,$$

con $L = \int d^3x N \sqrt{q} \mathcal{L}$. El funcional $\mathcal{L}$ depende de los campos que se quieren estudiar $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \dot{\phi}_i)$. Para definir una teoría Hamiltoniana de estos campos, es posible utilizar como derivada temporal la derivada de Lie a lo largo de t^a . Para ilustrar el procedimiento, supongamos que solo hay un campo ϕ . La derivada temporal para un solo campo es de la forma $\dot{\phi} = \mathcal{L}_t \phi$ y su momento canónico conjugado es

$$\pi_\phi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (2.20)$$

La densidad Hamiltoniana se define como $\mathcal{H} = \dot{\phi} \pi_\phi - \mathcal{L}$, por lo tanto la acción se puede escribir como

$$S[\phi, p_\phi] = \int dt \int_\Sigma d^3x N \sqrt{q} (\pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{H}). \quad (2.21)$$

El espacio de fase Γ se construye de los datos iniciales $(\phi, \pi)_{\Sigma_0}$ sobre Σ_0 . La estructura simpléctica es de la forma

$$\Omega((\delta\phi_1, \delta\pi_1), (\delta\phi_2, \delta\pi_2)) = \int_{\Sigma_0} d^3x (\delta\pi_1 \delta\phi_2 - \delta\pi_2 \delta\phi_1), \quad (2.22)$$

donde $(\delta\phi, \delta\pi)$ denota el vector tangente al punto (ϕ, π) . Aun cuando Σ_0 aparece de manera explícita en la definición de Ω , es independiente de la elección de Σ_0 . Cuando Σ_0 es no compacta es necesario imponer condiciones de decaimiento

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi^0 + o\left(\frac{1}{r^n}\right) \\ \pi(x) &\rightarrow \pi^0 + o\left(\frac{1}{r^m}\right).\end{aligned}$$

El corchete de Poisson para dos funcionales F y G esta dado por

$$\{F, G\} = \int_{\Sigma_0} d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta \phi} \frac{\delta G}{\delta \pi} - \frac{\delta F}{\delta \pi} \frac{\delta G}{\delta \phi} \right]. \quad (2.23)$$

Además, se define un conjunto de observables lineales

$$\phi[g] = \int_{\Sigma_0} d^3x g \phi, \quad \pi[f] = \int_{\Sigma_0} d^3x \pi f. \quad (2.24)$$

La derivada respecto al tiempo de estos observables se escribe como

$$\begin{aligned}\dot{\phi}[g] &= \{\phi[g], \mathcal{H}[N, N^a]\}, \\ \dot{\pi}[f] &= \{\pi[f], \mathcal{H}[N, N^a]\}.\end{aligned}$$

Los campos básicos satisfacen la relación

$$\{\phi[g], \pi[f]\} = \int_{\Sigma_0} d^3x \left[\frac{\delta \phi[g]}{\delta \phi} \frac{\delta \pi[f]}{\delta \pi} \right] = \int_{\Sigma_0} d^3x g f. \quad (2.25)$$

Notese que si $g \rightarrow \delta(x)$ y $f \rightarrow \delta(y)$ entonces $\{, \} \rightarrow \delta(x, y)$. Cuando se cuantiza se tiene que $\phi[g] \rightarrow \hat{\phi}[g]$ y $\pi[f] \rightarrow \hat{\pi}[f]$ tal que $[\hat{\phi}[g], \hat{\pi}[f]] = i\hbar(\int_{\Sigma_0} d^3x g f)\hat{1}$.

Ejemplo 3 (Campo Escalar).

$$\begin{aligned}S &= \int L dt = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} (\nabla_a \phi \nabla^a \phi - m^2 \phi^2) d^4x \\ &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} (g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - m^2 \phi^2) d^4x \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} [(n^a \nabla_a)^2 - q^{ab} \phi \nabla_a \phi \nabla_b \phi - m^2 \phi^2] d^4x \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{q} N \left[\frac{1}{N^2} [(t^a - N^a) \nabla_a]^2 - q^{ab} \phi \nabla_a \phi \nabla_b \phi - m^2 \phi^2 \right] dt d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int dt \int d^3x \sqrt{q} N \left[\left(\frac{\dot{\phi}}{N} - \frac{N^a}{N} \nabla_a \right)^2 - q^{ab} \phi \nabla_a \phi \nabla_b \phi - m^2 \phi^2 \right]\end{aligned}$$

de la última ecuación se puede calcular el momento conjugado

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \sqrt{q} N \left(\frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - 2 \frac{N^a}{N^2} \nabla_a \phi \dot{\phi} + \dots \right) \quad (2.26)$$

$$= \frac{\sqrt{q} N}{2} \left(2 \frac{\dot{\phi}}{N^2} - 2 \frac{N^a}{N^2} \nabla_a \phi \right) \quad (2.27)$$

$$= \frac{\sqrt{q}}{N} (t^a \nabla_a \phi - N^a \nabla_a \phi) \quad (2.28)$$

$$= \sqrt{q} n^a \nabla_a \phi \quad (2.29)$$

de la ecuación (2.27) se obtiene

$$\dot{\phi} = \frac{N \pi}{\sqrt{q}} + N^a \nabla_a \phi$$

y usando que la densidad Lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L} = \frac{N}{2} \sqrt{q} \left[\left(\frac{\pi}{\sqrt{q}} \right)^2 - |\nabla \phi|^2 - m^2 \phi^2 \right]$$

se tiene que la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$ es de la forma

$$\mathcal{H} = \frac{N}{\sqrt{q}} \pi^2 + \pi N^a \nabla_a \phi - \frac{N}{2\sqrt{q}} \pi^2 + \frac{1}{2} N \sqrt{q} |\nabla \phi|^2 + \frac{N \sqrt{q}}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.30)$$

$$= \frac{N}{2\sqrt{q}} \pi^2 + \pi N^a \nabla_a \phi - \frac{1}{2} N \sqrt{q} |\nabla \phi|^2 + \frac{N \sqrt{q}}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.31)$$

Ahora queremos encontrar un tensor espacial que tenga información de la derivada de q_{ab} . Esto se puede obtener de la *segunda forma fundamental*, también llamada curvatura extrínseca

$$K_{ab} := \nabla_a n_b, \quad (2.32)$$

la cual mide la curvatura de la superficie embebida en el espacio total. Esta curvatura se mide comparando el vector normal a la superficie en varias direcciones y se puede escribir también como

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{ab}. \quad (2.33)$$

Dado que $n^a = (t^a - N^a)/N$ entonces

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2N} (\mathcal{L}_{\vec{t}} q_{ab} - \mathcal{L}_{\vec{N}} q_{ab}) \\ &= \frac{1}{2N} (\mathcal{L}_{\vec{t}} q_{ab} - 2D_{(a} N_{b)}) \end{aligned}$$

donde D_a es el operador de derivada en Σ , compatible con q_{ab} . De la ecuación anterior se despeja $\dot{q}_{ab}$,

$$\mathcal{L}_{\vec{t}} q_{ab} = 2NK_{ab} + 2D_{(a}N_{b)}. \quad (2.34)$$

El objetivo es reescribir la acción de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \text{Términos de frontera} \quad (2.35)$$

en función de objetos espaciales. Al realizar las proyecciones y usar identidades geométricas [63] se obtiene la acción

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int dt \int d^3x N \sqrt{q} [^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2], \quad (2.36)$$

la cual difiere de la acción de Einstein-Hilbert solo por derivadas totales. Si consideramos la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = N \sqrt{q} [^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2] \quad (2.37)$$

entonces los momentos están dados por

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}^{ab} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_{ab}} = \sqrt{q} (K^{ab} - K q^{ab}) \\ \tilde{\pi}_N &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}} = 0 \\ \tilde{\pi}_{N_a} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}_a} = 0, \quad (3 \text{ ligaduras}) \end{aligned}$$

De la primera ecuación se puede solucionar $\dot{q}_{ab}$ en función de $\tilde{\pi}^{ab}$ y de las dos últimas ecuaciones se obtienen cuatro ligaduras primarias de primera clase. El Hamiltoniano canónico esta dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \tilde{\pi}^{ab} \dot{q}_{ab} - \mathcal{L} \\ &= \sqrt{q} N \left[-^{(3)}R + \frac{1}{q} \left(\tilde{\pi}^{ab} \tilde{\pi}_{ab} - \frac{\tilde{\pi}^2}{2} \right) \right] - 2\sqrt{q} N_b \left[D_a \left(\frac{\tilde{\pi}^{ab}}{\sqrt{q}} \right) \right] \\ &\quad + \text{Término de frontera.} \end{aligned}$$

de donde, si exigimos consistencia con $\tilde{\pi}_N$ y $\tilde{\pi}_{N_a}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \{\tilde{\pi}_N, \mathcal{H}\} &= -\sqrt{q} \left[^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\tilde{\pi}^{ab} \tilde{\pi}_{ab} - \frac{\tilde{\pi}^2}{2} \right) \right] \approx 0 \\ \{\tilde{\pi}_{N_a}, \mathcal{H}\} &= -\frac{2}{\sqrt{q}} D_a (\tilde{\pi}^{ab}) \approx 0, \quad (3 \text{ ligaduras}) \end{aligned}$$

El resultado anterior genera otras 4 ligaduras

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_N &= -\sqrt{q} {}^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\tilde{\pi}^{ab} \tilde{\pi}_{ab} - \frac{\tilde{\pi}^2}{2} \right) \\ \mathcal{H}^b &= -2D_a \tilde{\pi}^{ab}.\end{aligned}$$

La primera es llamada ligadura escalar o *ligadura Hamiltoniana* y la segunda es llamada *ligadura de difeomorfismos (espaciales)*. Por lo tanto el número total de ligaduras es 8, todas de primera clase. Las 4 ligaduras primarias $(\tilde{\pi}_N, \tilde{\pi}_{N_a})$ se solucionan, lo cual hace que N y N^a sean funciones arbitrarias que se tratan como multiplicadores de Lagrange. La densidad Hamiltoniana queda proporcional a las ligaduras

$$\mathcal{H} = N_a \mathcal{H}^a + N \mathcal{H}_N + \text{Término de frontera}.$$

El sistema es totalmente ligado si Σ es compacto ya que el término de frontera se anula. Para las 4 ligaduras restantes se pueden definir los funcionales

$$\begin{aligned}H(N^a) &= \int d^3x N^a q_{ab} \mathcal{H}^b \\ H(N) &= \int d^3x N \mathcal{H}_N.\end{aligned}$$

Estos funcionales satisfacen que

$$\begin{aligned}\{H(N^a), H(M^b)\} &= H([N, M]^a) \\ \{H(N^a), H(M)\} &= H(\mathcal{L}_{\vec{N}} M) \\ \{H(N), H(M)\} &= H(q^{ab}(ND_a M - MD_a N))\end{aligned}$$

Las anteriores ecuaciones forman el álgebra de las ligaduras, mejor conocida como “álgebra de Dirac” o “álgebra de deformación de superficie”. Con estos funcionales completamos la formulación Hamiltoniana de la relatividad general. ahora lo que nos interesa es cambiar de las variables métricas a las variables de tríadas y conexiones con el fin de hacer la cuantización en estas variables.

2.3. Tríadas y Conexiones en Relatividad General

Cuando se quiere construir una teoría del campo gravitacional surgen dos preguntas, la primera es acerca de cómo describir la gravitación matemáticamente. A esta pregunta, la respuesta es usar una variedad, es decir, describir el espacio-tiempo usando una variedad de Lorentz, que en nuestro caso tiene signatura $(-+++)$. La segunda pregunta a la que nos enfrentamos es acerca de qué objeto describe mejor el campo gravitacional. Esta pregunta se puede abordar de dos maneras:

- La elección usual de la métrica g_{ab} .
- La conexión ∇_a (o equivalentemente el “potencial” A), que define la derivada covariante sobre los campos tensoriales y el transporte paralelo de los vectores.

En la descripción con conexiones se tiene otro campo fundamental llamado *forma de soldadura*, definida como

$$\begin{aligned} e_a^I : T_p M &\rightarrow V^4 \\ V^a &\rightarrow V^I := e_a^I V^a \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} e_I^b : V^4 &\rightarrow T_p M \\ V^I &\rightarrow V^b := e_I^b V^I, \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde V^4 es isomorfo al espacio de Minkowski (i. e. tiene una métrica η_{IJ}). Las formas de soldadura satisfacen la relación $g_{ab} = \eta_{IJ} e_a^I e_b^J$.

Si la conexión es libre de torsión ($T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$) entonces existe una única métrica g_{ab} tal que $\nabla_a g_{bc} = 0$, lo cual hace que la descripción del campo gravitacional sea equivalente para las variables métricas y las de conexión. Por lo tanto, hay dos cinemáticas para la relatividad general; la primera es una variedad M^4 con métrica g_{ab} tal que $\nabla_a g_{bc} = 0$ y la segunda es una variedad M^4 con (e, A) compatibles, es decir, sin torsión.

Con el fin de usar el formalismo de conexiones, mostraremos como quedan las ecuaciones de Einstein y algunas relaciones geométricas en este formalismo. La notación que se usa es e_a^I para las cotetradas, ω para la conexión y ω_{aJ}^I para el transporte paralelo de vectores internos $v^I \in V^4$.

El uso de ω y ω_{aJ}^I es análogo a trabajar en dos haces fibrados diferentes TM y $M \times V^4$ respectivamente. ω_{aJ}^I es una 1-forma valuada sobre el álgebra de Lie de $SO(1, 3)$, esta conexión define una derivada covariante que actúa sobre los objetos internos, por ejemplo, la derivada covariante de una 1-forma interna u^I esta dada por

$$Du^I = du^I + \omega_J^I \wedge u^J. \quad (2.40)$$

También se suele usar en la literatura una notación con los índices de espacio-tiempo explícitos

$$D_a v^I = \partial_a v^I + \omega_a^I{}_J v^J, \quad (2.41)$$

la cual es similar a la derivada covariante $D_a v^b = \partial_a v^b - \Gamma_{ac}^b v^c$, pero ahora en el espacio interno.

La 2-forma de *torsión* se define como

$$T^I := De^I = de^I + \omega_J^I \wedge e^J. \quad (2.42)$$

Dado e_a^I , hay solo una derivada covariante que es libre de torsión ($T^I = 0$). La conexión $\omega[e]$ asociada a esta derivada es llamada *conexión de espín* o “compatible con e ”.

La *curvatura* de ω es una 2-forma valuada en el álgebra de Lorentz

$$R_J^I = R_{J\mu\nu}^I dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \text{con} \quad R_J^I = d\omega_J^I + \omega_K^I \wedge \omega_J^K. \quad (2.43)$$

Esta definición es equivalente a $[D, D]v^I = R_J^I v^J$, pero no a $R_J^I = D\omega_J^I$. Las ecuaciones (2.42) y (2.43) son llamadas las ecuaciones de estructura de Cartan.

Cuando se usa la conexión de espín $D^2 e^J = 0$, entonces $R_J^I \wedge e^J = 0$ (usando que $D^2 u^I = R_J^I \wedge u^J$). Si $R_J^I = 0$ se dice que ω es una *conexión plana*.

Las ecuaciones de Einstein en el vacío son

$$\epsilon_{IJKL}(e^I \wedge R^{JK} - \frac{2}{3}\Lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K) = 0, \quad (2.44)$$

donde ϵ_{IJKL} es una 3-forma con un índice interno libre y Λ es la constante cosmológica.

El tensor de *Ricci* es

$$R_a^I = R^{IJ}_{ab} e_J^b \implies R_{ab} = R_a^I e_b^J \eta_{IJ} \quad (2.45)$$

y el *escalar de Ricci* es

$$R = R_a^I e_I^a. \quad (2.46)$$

Usando estas definiciones, las ecuaciones de Einstein en el vacío se escriben como

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0 \quad (2.47)$$

$$(R_a^I - \frac{1}{2}R e_a^I + \Lambda e_a^I) e_b^J \eta_{IJ} = 0 \quad (2.48)$$

$$R_a^I - \frac{1}{2}R e_a^I + \Lambda e_a^I = 0 \quad (2.49)$$

La ecuación (2.44) se derivada con el principio variacional sobre la acción de primer orden dada por

$$S[e, \omega] = \frac{1}{16\pi G} \int \epsilon_{IJKL} \left(e^I \wedge e^J \wedge R^{KL} - \frac{1}{12} \Lambda e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L \right). \quad (2.50)$$

Esta ecuación es llamada *acción de Palatini*. La variación respecto a la cotetrada (δe) con $\Lambda = 0$ da la ecuación $e^I \wedge R^{KL} = 0$, equivalente a $T^I = 0$, lo cual dice que ω es compatible con e_I . La segunda ecuación que se deriva es para la variación respecto a la conexión $(\delta \omega)$, la cual corresponde a la ecuación de Einstein si ω es la conexión de espín.

La acción (2.50) esta bien definida cuando hay fronteras. Existen otras acciones que incluyen términos topológicos, como las de Holst, Euler y Pontryagin.

Ahora la idea es construir un nuevo conjunto de variables que permita realizar la cuantización al estilo lazos de la relatividad general. Para lograr esto primero se hace una extensión del espacio de fase $(q_{ab}, \tilde{\pi}^{ab}) \rightarrow (e_i^a, K_a^i)$ y luego se hace una transformación canónica $(e_i^a, K_a^i) \rightarrow (A_a^i, \tilde{E}_i^a)$.

2.3.1. Nuevas Variables

Una vez se tienen la relatividad general en la formulación de tríadas y conexiones se hace la descomposición 3+1 y se fija una de las tríadas en la dirección ortogonal a la hipersuperficie espacial (ver [26]). Luego, en lugar de usar la métrica espacial q_{ab} como variable fundamental se usan las tríadas e_i^a espaciales de las cuales se deriva la métrica $q^{ab} = e_i^a e_j^b \delta^{ij}$, $q_{ab} = e_a^i e_b^j \delta_{ij}$. La métrica q_{ab} tiene 6 grados de libertad mientras que las tríadas e_i^a tienen 9 grados de libertad, es decir, que contienen tres simetrías adicionales correspondientes a las rotaciones $SO(3)$. Esto significa que se pueden realizar rotaciones locales del grupo $SO(3)$ sobre las tríadas y se obtiene la misma métrica. Usando las nuevas variables se define la tríada de densidad

$$\tilde{E}_i^a := \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \tilde{\eta}^{abc} e_b^j e_c^k, \quad (2.51)$$

donde $\tilde{\eta}^{abc}$ es la densidad de Levi-Civita. Usando esta tríada de densidad, la métrica se puede recuperar como

$$\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \delta^{ij} = q^{ab}. \quad (2.52)$$

La variable canónica conjugada de $\tilde{E}_i^a$ esta dada por [62]

$$K_a^i = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{E}|}} \delta^{ij} \tilde{E}_i^b K_{ab}, \quad (2.53)$$

la cual tiene estructura de índices de una conexión. Por lo tanto el nuevo espacio de fase tiene coordenadas $(\tilde{E}_i^a, K_a^i)$. Ahora la idea es realizar una transformación canónica para obtener las nuevas variables. Para hacer esto se suma a K_a^i , la conexión de espín compatible, con e_a^i

$$\partial_{[a} e_{b]}^i + \epsilon_{jk}^i \Gamma_a^j e_b^k = 0. \quad (2.54)$$

De donde la nueva conexión que podemos construir es

$$\gamma A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i. \quad (2.55)$$

Esta conexión es llamada la *conexión de Ashtekar-Barbero* y γ en principio es una constante arbitraria que para nuestros fines se toma real y positiva. Con esta elección, γ es llamado el *parámetro de Barbero-Immirzi* [22, 49]. La variable canónica conjugada a la nueva conexión es

$$\gamma \tilde{E}_i^a = \frac{\tilde{E}_i^a}{\gamma}. \quad (2.56)$$

Las nuevas coordenadas en estas variables del espacio de fase son $(\gamma A_a^i, \gamma \tilde{E}_i^a)$. El corchete de Poisson de las nuevas variables esta dado por

$$\{\gamma A_a^i(x), \gamma \tilde{E}_j^b(y)\} = \kappa \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x, y), \quad (2.57)$$

con $\kappa = 8\pi G$. Por convención se usa $\tilde{E}_i^a$ y γA_a^i como variables básicas. Adicionalmente se denota γA_a^i como A_a^i (de ahora en adelante esta será la notación), con lo cual los corchetes de Poisson quedan como

$$\{A_a^i(x), \tilde{E}_j^b(y)\} = \gamma \kappa \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x, y) \quad (2.58)$$

$$\{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = \{\tilde{E}_i^a(x), \tilde{E}_j^b(y)\} = 0. \quad (2.59)$$

Las tres simetrías adicionales que surgen al usar las tríadas agregan tres ligaduras que corresponden a la simetría de la curvatura extrínseca $K_{[ab]} = 0$, de donde se obtiene la ligadura [62]

$$G_i = D_a \tilde{E}_i^a \approx 0, \quad (2.60)$$

llamada *ligadura de Gauss*, ya que tiene la forma de la ley de Gauss para una teoría de Yang-Mills. D_a es la derivada covariante definida por A_a^i ,

$$G_i = D_a \tilde{E}_i^a = \partial_a \tilde{E}_i^a + \epsilon_{ij}^k A_a^j \tilde{E}_k^a \approx 0. \quad (2.61)$$

Ahora solo queda reescribir las ligaduras $\mathcal{H}_N$ y $\mathcal{H}_a$ en términos de las nuevas variables, las cuales toman la forma [29] (con $\Lambda = 0$)

$$V_a = F_{ab}^i \tilde{E}_i^b - (1 + \gamma^2) K_a^i G_i \approx 0 \quad (2.62)$$

$$\mathcal{S} = \frac{\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b}{\sqrt{|\det(\tilde{E})|}} \left[\epsilon^{ij}_k F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right] \approx 0 \quad (2.63)$$

con

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k \quad (2.64)$$

curvatura de la conexión A_a^i . Para obtener el álgebra de las ligaduras se definen los funcionales

$$G(\alpha) := \int_{\Sigma} d^3x \alpha^i G_i, \quad (2.65)$$

$$S(N) := \int_{\Sigma} d^3x N \mathcal{S}, \quad (2.66)$$

$$V(N^a) := \int_{\Sigma} d^3x N^a V_a. \quad (2.67)$$

El álgebra de las ligaduras queda de la forma [29]

$$\{G(\alpha), G(\beta)\} = G([\alpha, \beta]) \quad (2.68)$$

$$\{G(\alpha), V(N^a)\} = -G(\mathcal{L}_{\vec{N}}\alpha) \quad (2.69)$$

$$\{G(\alpha), S(N)\} = 0 \quad (2.70)$$

$$\{V(N^a), V(M^b)\} = V([N, M]^a) \quad (2.71)$$

$$\{V(N^a), S(M)\} = -S(\mathcal{L}_{\vec{N}}M) \quad (2.72)$$

$$\{S(N), S(M)\} = V(S^a) \quad (2.73)$$

donde ignoramos términos proporcionales a la ligadura de Gauss [29] y

$$S^a = \frac{E_i^a E_j^b \delta^{ij}}{|\det E|} (N D_b M - M D_b N).$$

Las relaciones de conmutación entre las ligaduras muestran que son de primera clase ya que quedan en términos de las demás ligaduras.

Algunos comentarios:

- Hay una fijación parcial de la norma cuando se pasa de la descripción del espacio-tiempo a la descripción sobre Σ .
- Las diferentes descripciones de la relatividad general para distintos valores de γ son equivalentes clásicamente aunque no lo son cuánticamente.

Ahora que se tiene la formulación clásica completa en las variables que deseamos, se procede a cuantizar el sistema, proceso que explicaremos en la próxima sección.

2.4. Cuantización

En esta sección explicaremos como es el proceso de cuantización para sistemas que tienen ligaduras de primera y segunda clase.

Las diferentes formas que hay para cuantizar un sistema dependiendo del tipo de ligaduras que se tenga son:

Ligaduras de segunda clase

1. Si clásicamente se solucionan las ligaduras de segunda clase, se tiene un espacio simpléctico bien definido $(\bar{\Gamma}, \bar{\Omega})$ y se puede cuantizar el sistema de la manera usual.

Ejemplo 4. Sea $\Gamma = \mathbb{R}^6$ con coordenadas $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$, estructura simpléctica estandar $\Omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 + dp_3 \wedge dq_3$ y ligaduras $\phi_1 = q_1 = 0$ y $\phi_2 = p_1 = 0$. La superficie de ligadura esta dada por $\bar{\Gamma} = \Gamma|_{\phi_i=0} = (q_2, q_3, p_2, p_3)$ y $\bar{\Omega} = dp_2 \wedge dq_2 + dp_3 \wedge dq_3$. Entonces el sistema cuantizado es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}^2$ con funciones de onda $\Psi(q_2, q_3)$ y operadores $\hat{p}_2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_2}$, $\hat{p}_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_3}$.

2. Además de esto, se pueden imponer las ligaduras como operadores.

Ejemplo 5. En el último ejemplo no se reduce el espacio de fase clásico y en su lugar se imponen las ecuaciones $\hat{q}_1\Psi = 0$, $\hat{p}_1\Psi = 0$ para todo $\Psi(q_1, q_2, q_3)$.

3. Se puede usar una combinación de las dos propuestas. En la dirección (q_1, p_1) construir un “estado de vacío” Ψ^0 tal que $\Psi(q_1, q_2, q_3) = \Psi^0(q_1)\Phi(q_2, q_3)$, donde Ψ^0 es una Gaussiana centrada en cero.

En los procedimientos 1 y 2 la condición $[\hat{q}_1, \hat{p}_1] = i\hbar$ no se satisface, mientras que en 3 si lo hace. Para solucionar el problema con los procedimientos 1 y 2 se usa el corchete de Dirac, el cual clásicamente es $\{q_1, p_1\}^* = 0$ y se promueve a $[\hat{q}_1, \hat{p}_1]^* = \hat{0}$, el cual se satisface para 1 y 2.

Ligaduras de primera clase

1. Para estas ligaduras, el primer método es tomar el espacio de fase reducido $(\hat{\Gamma}, \hat{\Omega})$ y cuantizarlo. El problema es que en la práctica es muy difícil construir el espacio de fase reducido o es intratable.
2. El segundo método de cuantización es el método de Dirac, el cual consiste en cuantizar primero y luego reducir. Los pasos básicos son:
 - Definir el espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{H}_{\text{kin}}$.
 - Representar las ligaduras C_i como operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}_{\text{kin}}$.

- Imponer sobre los estados físicos la condición $\hat{C}_i \Psi_{\text{phy}} = 0$.
- Encontrar el producto interno del espacio físico de estados $\mathcal{H}_{\text{phy}}$.
- Representar los observables como operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}_{\text{phy}}$.

Ejemplo 6. Sea $\Gamma = \mathbb{R}^6 = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$, $\Omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 + dp_3 \wedge dq_3$ y la ligadura $C_1 = p_1 = 0$. El espacio de Hilbert cinemático es $\mathcal{H}_{\text{kin}} = L^2(\mathbb{R}^3)$ con estados $\Psi(q_1, q_2, q_3)$ y la ligadura es representada como $\hat{C}_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1}$. Al imponer la condición de Dirac

$$\hat{C}_1 \Psi_{\text{phy}} = -i\hbar \frac{\partial \Psi(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} = 0,$$

se obtiene que $\Psi_{\text{phy}} = \Psi(q_2, q_3) \in \mathcal{H}_{\text{phy}} = L^2(\mathbb{R}^2, dq_2 dq_3)$. Los observables son representaciones de las funciones $f(q_2, q_3, p_2, p_3)$ por que las funciones $g(q_1, \dots)$ no son observables ($\{g, C_1\} \neq 0$).

Cuando los simpléctomorfismos a lo largo de las superficies nulas (movimientos de norma) forman un grupo, existe en procedimiento general para construir los estados físicos y su producto interno conocido com promedio de grupo, el cual expondremos en la siguiente sección.

Promedio de Grupo

Este procedimiento funciona cuando las ligaduras forman un álgebra de Lie

$$\{C_i, C_j\} = \Gamma_{ij}^k C_k, \quad (2.74)$$

con Γ_{ij}^k constantes de estructura. Esto genera un grupo dado por las transformaciones canónicas a lo largo de las orbitas de norma. La idea es construir estados invariantes bajo la acción de los movimientos generados por las ligaduras, es decir,

$$e^{i\lambda^J \hat{C}_J} \Psi_{\text{phy}} = \Psi_{\text{phy}}, \quad (2.75)$$

donde en general $\Psi_{\text{phy}} \notin \mathcal{H}_{\text{kin}}$. Para encontrar estos estados se construye una representación unitaria del grupo de norma G sobre $\mathcal{H}_{\text{kin}}$. Por ejemplo, si solo hay una ligadura $\hat{C}$ entonces $\hat{U}(\lambda) = e^{i\lambda \hat{C}}$ es una representación de $U(1)$ sobre $\mathcal{H}_{\text{kin}}$. En este caso se puede definir el estado físico como

$$\Psi_{\text{phy}} := \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda d\lambda e^{-i\lambda \hat{C}} \Psi, \quad (2.76)$$

donde Λ es el volumen del grupo, $d\lambda$ es la medida, $e^{i\Lambda} = 1$ y $\Psi \in S \subset \mathcal{H}_{\text{kin}}$, S es un subespacio denso de $\mathcal{H}_{\text{kin}}$. Esto permite definir el estado físico para cualquier grupo G como

$$\Psi_{\text{phy}} := \frac{1}{\text{Vol}(G)} \int_G dg \hat{U}(g) \Psi, \quad (2.77)$$

donde $\hat{U}(g)$ es una representación unitaria de G sobre $\mathcal{H}_{\text{kin}}$. Esta acción sobre Ψ puede ser entendida como la acción de un proyector (o “extractor”) que da el estado físico $\Psi_{\text{phy}} := \hat{P}\Psi$. Para ver que realmente actúa como un proyector se puede considerar el siguiente ejemplo:

$$\hat{U}(\lambda') \Psi_{\text{phy}} = \hat{U}(\lambda') \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda d\lambda e^{-i\lambda \hat{C}} \Psi = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda d\lambda e^{-i(\lambda - \lambda') \hat{C}} \Psi = \Psi_{\text{phy}}. \quad (2.78)$$

La última igualdad se satisface si la medida $d\lambda$ es homogénea.

El producto interno entre dos estados físicos se puede definir como

$$\langle \Psi_{\text{phy}} | \Phi_{\text{phy}} \rangle := \langle \hat{P}\Psi | \hat{P}\Phi \rangle = \langle \hat{P}^2 \Psi | \Phi \rangle = \langle \hat{P}\Psi | \Phi \rangle \quad (2.79)$$

$$= \frac{1}{\text{Vol}(G)} \int_G dg \langle \hat{U}(g) \Psi | \Phi \rangle. \quad (2.80)$$

lo cual muestra que el estado físico está en el espacio dual. Si se denota S^* el dual de S entonces se tiene el triplete $S \subset \mathcal{H}_{\text{kin}} \subset S^*$. Si $G = \mathbb{R}$ se define

$$(\Psi_{\text{phy}} | := \frac{1}{K} \int_V d\lambda \langle e^{-i\lambda \hat{C}} \Psi | \quad (2.81)$$

con $K = \text{Vol}(V)$. Entonces el producto interno entre un estado $|\Phi\rangle \in S$ y $(\Psi_{\text{phy}} | \in S^*$ está dado por

$$(\Psi_{\text{phy}} | \Phi \rangle = \frac{1}{K} \int_V d\lambda \langle e^{-i\lambda \hat{C}} \Psi | \Phi \rangle. \quad (2.82)$$

Es importante hacer una buena elección de S ya que esta integral puede estar mal definida. Además de esto, es necesaria la convergencia de la integral y que el producto interno $(\Psi_{\text{phy}} | \Phi_{\text{phy}} \rangle = (\Psi_{\text{phy}} | \Phi \rangle$ sea positivo definido. La norma de un estado físico es

$$||\Psi_{\text{phy}}||^2 = \frac{1}{K} \int_V d\lambda \langle e^{-i\lambda \hat{C}} \Psi | \Psi \rangle. \quad (2.83)$$

Si se tiene un observable $\hat{O}$ entonces

$$\langle \hat{O} \rangle_{\text{phy}} := \frac{(\Psi_{\text{phy}} | \hat{O} \Psi \rangle}{(\Psi_{\text{phy}} | \Psi \rangle}. \quad (2.84)$$

Ejemplo 7. Sea $\Gamma = \mathbb{R}^6$ con coordenadas $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ y ligadura $C = p_1 = 0$. El espacio de Hilbert cinemático es $\mathcal{H}_{\text{kin}} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3q)$ con estados $\Psi(q_1, q_2, q_3)$ y una representación unitaria de la ligadura esta dada por

$$e^{-i\lambda\hat{C}}\Psi(q_1, q_2, q_3) = \Psi(q_1 - \lambda, q_2, q_3). \quad (2.85)$$

Los estados físicos son

$$\Psi_{\text{phy}} = \frac{1}{K} \int d\lambda e^{-i\lambda\hat{C}} \Psi(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{K} \int d\lambda \Psi(q_1 - \lambda, q_2, q_3). \quad (2.86)$$

Si S es el espacio de las funciones suaves con soporte compacto, entonces S es denso en $\mathcal{H}_{\text{kin}}$ y K es finito, por lo tanto la dependencia de q_1 desaparece y $\Psi_{\text{phy}} = \Psi_{\text{phy}}(q_2, q_3)$. El producto interno es

$$(\Psi_{\text{phy}}|\Phi) = \frac{1}{K} \int d\lambda \langle e^{-i\lambda\hat{C}} \Psi | \Phi \rangle \quad (2.87)$$

$$= \frac{1}{K} \int d\lambda \int d^3q \bar{\Psi}(q_1 - \lambda, q_2, q_3) \Phi(q_1, q_2, q_3), \quad (2.88)$$

el cual es independiente de K , al igual que los valores esperados de los observables.

Ejemplo 8. Este ejemplo es similar al anterior pero ahora la ligadura es en q_1 . Sea $\Gamma = \mathbb{R}^6$ con coordenadas $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ y ligadura $C = q_1 = 0$. El espacio de Hilbert cinemático es $\mathcal{H}_{\text{kin}} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3q)$

- Si se usa el método de Dirac imponiendo la ecuación de ligadura

$$\hat{C}\Psi = \hat{q}_1\Psi(q_i) = q_1\Psi(q_i) = 0 \quad (2.89)$$

sobre los estado físicos. Esta ecuación tiene como solución

$$\Psi_{\text{phy}}(q_i) = \delta(q_1)\psi(q_2, q_3). \quad (2.90)$$

Este estado no es un elemento de $\mathcal{H}_{\text{kin}} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3q)$ y se espera que sus grados de libertad sean $\psi(q_2, q_3)$.

- Usando el promedio de grupo el estado físico es

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{phy}}(q_i) &= \frac{1}{K} \int d\lambda e^{-i\lambda\hat{C}} \Psi(q_1, q_2, q_3) \\ &= \frac{1}{K} \int d\lambda e^{-i\lambda q_1} \Psi(q_1, q_2, q_3) \\ &= \frac{1}{K'} \delta(q_1) \Psi(q_1, q_2, q_3) \\ &= \frac{1}{K'} \delta(q_1) \psi(q_2, q_3) \end{aligned}$$

donde la dependencia de q_1 es solo en la delta de Dirac. El producto interno es

$$\begin{aligned}
(\Psi_{\text{phy}}|\Phi_{\text{phy}}) &= (\Psi_{\text{phy}}|\Phi) \\
&= \frac{1}{K} \int d\lambda \langle e^{-i\lambda\hat{C}} \Psi | \Phi \rangle \\
&= \frac{1}{K} \int d\lambda \int d^3q e^{i\lambda q_1} \bar{\Psi}(q_1, q_2, q_3) \Phi(q_1, q_2, q_3) \\
&= \frac{1}{K'} \int d^3q \delta(q_1) \bar{\Psi}(q_1, q_2, q_3) \Phi(q_1, q_2, q_3) \\
&= \frac{1}{K'} \int dq_2 dq_3 \bar{\Psi}(q_1 = 0, q_2, q_3) \Phi(q_1 = 0, q_2, q_3) \\
&= \frac{1}{K'} \int dq_2 dq_3 \bar{\psi}(q_2, q_3) \phi(q_2, q_3)
\end{aligned}$$

donde se muestra que los grados de libertad reales son (q_2, q_3) .

Una vez mostrados los elementos necesarios para cuantizar un sistema clásico con ligaduras, podemos proceder a explicar en forma general como se realiza la cuantización de la gravedad.

2.4.1. Método General de Cuantización

El propósito de esta sección es mostrar los pasos de cuantización para una teoría clásica (variedad simpléctica Γ) con ligaduras ($C_i \approx 0$). Estos pasos son los mismos que se pueden aplicar a la gravedad cuántica de lazos [13].

1. Tomar un conjunto $\mathcal{S}$ de variables elementales. $\mathcal{S}$ debe ser suficientemente grande para que separe puntos en Γ (si $p \neq q \in \Gamma$ entonces $\exists f \in \mathcal{S}$ tal que $f(p) \neq f(q)$), pero a su vez $\mathcal{S}$ debe ser suficientemente pequeño para ser de utilidad. En particular, $\mathcal{S}$ debe ser cerrado bajo el corchete de Poisson clásico. Por último, los gradientes de los elementos de $\mathcal{S}$ deben generar $T_p^*\Gamma$ en cada punto $p \in \Gamma$.
2. Se introduce un operador de involución $*$: $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S}$ es cerrado bajo esta operación.

Ejemplo 9. Sea $\Gamma = \mathbb{R}^6$, con coordenadas (q^i, p_i) , $i = 1, 2, 3$. Entonces $\mathcal{S} =$ generado $\{1, q^i, p_i\}$, con $(q^i)^* = q^i$ y $(p_i)^* = p_i$. Donde generado significa que es combinaciones lineales de las funciones básicas.

3. Construir una *-álgebra cuántica abstracta $\mathcal{U}$. Se toma el álgebra tensorial libre generada por $\mathcal{S}$

$$T(\mathcal{S}) = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{S}$$

y se impone sobre esta álgebra las relaciones de conmutación canónicas $[\hat{a}, \hat{b}] = i\hbar \widehat{\{a, b\}}$.

4. Una cuantización es una *-representación del álgebra cuántica $\mathcal{U}$. Es decir, existe $\Pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{kin})$ tal que

$$\begin{aligned} \Pi(1) &= \mathbb{I} \\ \Pi(\alpha a + \beta b) &= \alpha \Pi(a) + \beta \Pi(b) \\ \Pi(ab) &= \Pi(a)\Pi(b) \\ \Pi(a^*) &= \Pi(a)^\dagger \end{aligned}$$

5. Se impone la condición de Dirac, $\hat{C}_i \Psi_{phy} = 0$. Aquí es donde se construye el espacio de Hilbert físico usando, por ejemplo, el método de promedio de grupo.

Si se siguen estos pasos empezando con un espacio de fase clásico de una teoría de norma entonces el resultado es una teoría cuántica tal como gravedad cuántica de lazos. Estos pasos se hicieron históricamente de la siguiente manera (aunque aun no se han completado todos):

- 1988, Rovelli y Smolin [64], construyeron de manera heurística la “representación de lazos”.
- 1993, Ashtekar y Lewandowski [11], construyeron el espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{H}_{kin}$.
- 1995, ALM²T (Ashtekar, Lewandowski, Marolf, Mourão, Thiemann) [13], procuraron describir los pasos uno al cuatro.
- 1997, ACZ (Ashtekar, Corichi, Zapata) [9], construyeron $\mathcal{S}$ y $\mathcal{U}$.
- 2004, Fleischhack [44] y LOST (Lewandowski, Okolow, Sahlmann, Thiemann) [57], demostraron la unicidad de la representación de $\mathcal{U}$. Básicamente este teorema demuestra que la cinemática de la gravedad cuántica de lazos es única.

En la siguiente sección se da una somera revisión de los principales resultados de la cuantización de la gravedad a la lazos.

Gravedad Cuántica de Lazos

Los resultados que se muestran en esta sección están basados en [32, 62, 12].

Primero es importante resaltar que de ahora en adelante se va a trabajar con el grupo $SU(2)$ en lugar de $SO(3)$. Esto es motivado en primer lugar para poder incorporar espinores a la teoría y en segundo lugar, para que el grupo de estructura sea el mismo en el caso de γ real y el caso medio-plano (el cual no es de interés para nosotros).

El espacio de fase clásico $(A_a^i, \tilde{E}_i^a)$ está conformado por conexiones valuadas en el álgebra de Lie de $SU(2)$ y tríadas-densidad valuadas en el dual del álgebra de Lie de $SU(2)$. Las variables elementales que se consideran son las *holonomías*

$$h_\alpha(A) = \mathcal{P}\exp\left(\oint_\alpha A_a ds^a\right) \quad (2.91)$$

y los *flujos*

$$E[S, f] = \int_S E_{abi} f^i dS^{ab} \quad (2.92)$$

donde f^i es una función valuada en el álgebra de Lie de $SU(2)$, S es una dos superficie y

$$E_{abi} = \frac{1}{2} \eta_{abc} \tilde{E}_i^c \quad (2.93)$$

es una 2-forma valuada en el dual del álgebra de Lie. Estas variables forman el *álgebra de holonomías y flujos*, la cual se quiere representar como operadores sobre el espacio de Hilbert cinemático. Este espacio corresponde a las funciones de cuadrado integrable definidas sobre una extensión del espacio de configuración clásico $\mathcal{A}$ (espacio de conexiones). La extensión se puede hacer entendiendo las conexiones como operadores que actúan sobre objetos 1-dimensionales (aristas) y dan un elemento del grupo (esto se puede hacer usando las holonomías). Se define una conexión generalizada como cualquier mapa que actúa sobre una arista y da un elemento del grupo (satisfaciendo algunas condiciones habituales). El espacio de las conexiones generalizadas se llama *espacio de configuración cuántico* y se denota como $\bar{\mathcal{A}}$. Por lo tanto el espacio de Hilbert cinemático es de la forma

$$\mathcal{H}_{kin} = L^2(\bar{\mathcal{A}}, d\mu_{AL}), \quad (2.94)$$

donde $d\mu_{AL}$ es la medida de Ashtekar-Lewandowski [11]. Este espacio de Hilbert se puede descomponer como

$$\mathcal{H}_{kin} = \oplus_\gamma \mathcal{H}_\gamma \quad (2.95)$$

donde γ es cualquier gráfico en Σ con N aristas. Cada uno de estos espacios de Hilbert es de la forma

$$\mathcal{H}_\gamma = L^2(\mathcal{A}_\gamma, d\mu_\gamma), \quad (2.96)$$

donde $\mathcal{A}_\gamma$ es el espacio de configuración dado por las conexiones restringidas al gráfico γ , este espacio es homeomorfo a N copias del grupo, es decir, $\mathcal{A}_\gamma = (SU(2))^N$. La medida $d\mu_\gamma$ es la medida de Haar sobre las N copias del grupo. Las funciones de onda del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\gamma$ se pueden escribir como

$$\Psi_\gamma[A] = \psi(h_{e_1}(A), \dots, h_{e_N}(A)), \quad (2.97)$$

con e_i arista del gráfico γ , $h_{e_1}(A)$ holonomía de la conexión A a lo largo de e_i y

$$\psi : (SU(2))^N \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.98)$$

es llamada *función cilíndrica*.

Las holonomías y los flujos se pueden representar como

$$\hat{h}_{e_i} \cdot \Psi_\gamma(A) = h_{e_i}(A) \Psi_\gamma(A) \quad (2.99)$$

$$\hat{E}[S, f] \cdot \Psi_\gamma(A) = i4\pi G\hbar \sum_p \sum_{I_p} \iota(I_p) f^i(p) X_{I_p}^i \cdot \psi \quad (2.100)$$

donde la primera suma es sobre los vértices p del gráfico γ que viven en la superficie S , la segunda suma es sobre las aristas I_p que empiezan o terminan en p y $\iota(I_p) = \pm 1$ es el signo asociado a la orientación de I_p . Si la arista I_p está en la dirección saliente (entrante) de la superficie S entonces $X_{I_p}^i \cdot \psi$ es el resultado de la acción del i ésimo campo vectorial invariante a izquierda (derecha) sobre la i ésima copia del grupo.

Las funciones definidas sobre el grupo $SU(2)$ admiten una descomposición tipo Fourier dada por la descomposición de Peter-Weyl,

$$f(g) = \sum_j \sqrt{j(j+1)} f_j^{mn} \Pi_{mn}^j(g) \quad (2.101)$$

donde f_j^{mn} son los coeficientes de la descomposición (análogos a los coeficientes de Fourier), $\Pi_{mn}^j(g)$ son las funciones base (análogas a la base de Fourier) que corresponden a las representaciones unitarias del grupo y la etiqueta j es para cada representación irreducible. De manera similar las funciones de onda del espacio $\mathcal{H}_\gamma$ se pueden descomponer como

$$\Psi_\gamma[A] = \sum_{j_1 \dots j_N} f_{j_1 \dots j_N}^{m_1 \dots m_N, n_1 \dots n_N} \phi_{m_1 n_1}^{j_1}(h_{e_1}(A)) \cdots \phi_{m_N n_N}^{j_N}(h_{e_N}(A)), \quad (2.102)$$

donde $\phi_{mn}^j(g) = \sqrt{j(j+1)} \Pi_{mn}^j(g)$. Por lo tanto el espacio de Hilbert cinemático se puede escribir de la forma

$$\mathcal{H}_{kin} = \oplus_{\gamma, \vec{j}} \mathcal{H}_{\gamma, \vec{j}} \quad (2.103)$$

donde el vector $\vec{j}$ contiene las etiquetas que se asignan a cada arista, en el caso de $SU(2)$ estas etiquetas son semienteros. Cada espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\gamma, \vec{j}}$ es de dimensión finita y su dimensión esta midiendo los grados de libertad extra contenidos en los vértices. Entonces el espacio de Hilbert cinemático se puede descomponer como

$$\mathcal{H}_{kin} = \oplus_{\gamma, \vec{j}, \vec{l}} \mathcal{H}_{\gamma, \vec{j}, \vec{l}} \quad (2.104)$$

donde el vector $\vec{l}$ denota las asignaciones a los vértices de las representaciones irreducibles de $SU(2)$, los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_{\gamma, \vec{j}, \vec{l}}$ son de dimensión uno. El gráfico γ con las asignaciones a las aristas y los vértices es conocido como *red de espín*.

Ahora que se tiene el espacio de Hilbert cinemático y una base adecuada para las funciones de onda la idea es implementar las ligaduras para obtener el espacio de Hilbert físico:

- Ligadura de Gauss, $\hat{G} \cdot \Psi_{\gamma}(A) = 0$. Esta ligadura impone la condición

$$\sum_p \sum_{I_p} X_{I_p}^i \cdot \psi(\gamma, \vec{j}, \vec{l}) = 0. \quad (2.105)$$

Los estados que satisfacen esta ecuación se llaman *redes de espín invariantes de norma* y se denotan como $\mathcal{N}(\gamma, \vec{j})$. Nótese que el vector $\vec{l}$ no aparece ya que la ligadura impone condiciones sobre los vértices. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{kin}^G$ formado por las redes de espín invariantes de norma es un subespacio del espacio cinemático, con estos elementos se puede calcular los autovalores del operador de area,

$$a_S = \gamma 8\pi G \hbar \sum_v \sqrt{j_v(j_v + 1)} \quad (2.106)$$

donde la suma es sobre los vértices (de un gráfico γ) que interceptan la superficie S . Para obtener este resultado se asume que no hay aristas en la superficie S . El menor autovalor distinto de cero es cuando $j_v = 1/2$ y está dado por

$$\Delta = 4\pi G \gamma \sqrt{3} \hbar. \quad (2.107)$$

Este valor será de utilidad cuando estemos construyendo la cosmología cuántica de lazos.

- Ligadura de difeomorfismos, $\hat{V} \cdot \Psi_{\gamma}(A) = 0$. Esta es la representación cuántica que se quiere de la ligadura clásica que genera transformaciones canónicas infinitesimales. El problema es que este operador no puede ser representado

como un operador autoadjunto. Para solucionar este problema se considera el operador asociado a un difeomorfismo ϕ finito y se impone que los estados sean invariantes bajo difeomorfismos, es decir, se impone la condición $\hat{U}[\phi]\Psi = \Psi$. Para construir estos estados se utiliza el método de promedio de grupo. Primero denotemos el grupo de difeomorfismos sobre Σ como $Diff(\Sigma)$, entonces el operador $\hat{U}[\phi]$ con $\phi \in Diff(\Sigma)$ puede ser representado sobre las funciones cilíndricas como

$$\hat{U}[\phi]\Psi_\gamma(A) = \Psi_{\phi^{-1}\gamma}(A). \quad (2.108)$$

Usando este hecho se puede construir el estado físico como

$$(\Psi_\gamma^D| = \sum_{\phi \in Diff(\Sigma)} \langle \Psi_\gamma | \hat{U}[\phi] = \sum_{\phi \in Diff(\Sigma)} \langle \Psi_{\phi\gamma} | \quad (2.109)$$

donde la suma es sobre todos los difeomorfismos. Estos estados son invariantes bajo difeomorfismos

$$(\Psi_\gamma^D| \hat{U}[\phi] = (\Psi_\gamma^D| \quad (2.110)$$

Además pertenecen al espacio dual de las funciones cilíndricas $(\Psi_\gamma^D| \in Cyl^*$, es decir, son operadores lineales que actúan sobre las funciones cilíndricas $|\Psi_\gamma\rangle$ y su acción es finita. El producto interno entre los estados invariantes bajo difeomorfismos se define como

$$(\Psi_\gamma^D| \Psi_\beta^D) = (\Psi_\gamma^D| \Psi_\beta), \quad (2.111)$$

el cual esta bien definido ya que la acción de $(\Psi_\gamma^D|$ es invariante bajo difeomorfismos

$$(\Psi_\gamma^D| \Psi_\beta) = (\Psi_\gamma^D| \hat{U}[\phi] \Psi_\beta). \quad (2.112)$$

- Ligadura Hamiltoniana. Usando las ecuaciones (2.63, 2.66), se obtiene la ligadura clásica que hay que promover a operador

$$S(N) = \int_\Sigma d^3x N \mathcal{S} \quad (2.113)$$

$$= \int_\Sigma d^3x N \frac{\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b}{\sqrt{|\det(\tilde{E})|}} \left[\epsilon^{ij}_k F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right] \quad (2.114)$$

$$= \int_\Sigma d^3x N \frac{\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b}{\sqrt{|\det(\tilde{E})|}} \epsilon^{ij}_k [F_{ab}^k - (1 + \gamma^2) \Omega_{ab}^k], \quad (2.115)$$

donde F_{ab}^k es la curvatura de la conexión A_a^i y Ω_{ab}^k es la curvatura de la conexión de espín Γ_a^i . La propuesta estándar de Thiemann [12] es reescribir

esta ligadura en función de las holonomías, el volumen y sus conmutadores, los cuales pueden ser promovidos a operadores cuánticos. De manera somera y esquemática, la idea es usar que la curvatura se puede aproximar como [62]

$$h_{\alpha_{ab}}[A] - h_{\alpha_{ab}}^{-1}[A] \approx \epsilon^2 F_{ab}^i \tau_i + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (2.116)$$

con α_{ab} un lazo infinitesimal con área ϵ^2 en el plano formado por los vectores e_a y e_b . Análogamente se puede aproximar Ω_{ab}^k usando la conexión de espín Γ_a^i . El otro término en el Hamiltoniano se aproxima como

$$h_{e_a}^{-1}[A] \{h_{e_a}[A], V\} \approx \epsilon \alpha \frac{\tilde{E}_i^b \tilde{E}_j^c}{\sqrt{|\det(\tilde{E})|}} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.117)$$

con α una constante. Esto permite reescribir el Hamiltoniano en términos de las holonomías, el volumen y sus conmutadores. Luego se promueve a un operador cuántico y se puede definir su acción sobre los estados. Existen varios problemas que surgen con esta propuesta. En primer lugar, hay ambigüedades en la representación de $SU(2)$ que se puede tomar, además de las que hay en la regularización (ϵ) y en la normalización del producto interno físico. Adicionalmente, hay ambigüedad en el ordenamiento de los factores, la cual está siempre presente en las teorías cuánticas. Por lo tanto en lugar de una sola teoría se obtiene un número infinito de teorías matemáticamente consistentes. El problema es que trabajar con estas teorías es extremadamente difícil y no se ha podido mostrar si alguna de estas teorías reproduce la relatividad general en el límite clásico continuo. Adicionalmente el álgebra de ligaduras se satisface, por así decirlo, de manera trivial y por lo tanto no se puede verificar de manera explícita que el álgebra total de las ligaduras se satisface. Por estas razones se considera aún como un problema abierto la implementación de la ligadura Hamiltoniana a nivel cuántico. La ventaja de la cosmología cuántica de lazos es que permite solucionar esta ligadura para sistemas reducidos, tales como los modelos cosmológicos. Lo cual, por cierto no garantiza que será el caso en el sistema completo.

Capítulo 3

Cosmología Cuántica de Lazos

En este capítulo se resumen los principales resultados de la cosmología cuántica de lazos (CCL) para los modelos cosmológicos homogéneos. En particular los modelos de FRW con $k = 0$, $k = 1$ y los modelos anisotrópicos de Bianchi I, II y IX (la clasificación de Bianchi de los universos homogéneos y anisotrópicos se explica en el apéndice A.6). Este capítulo está dividido en tres secciones. En la primera sección resumimos la formulación Hamiltoniana clásica para los modelos homogéneos en CCL. Adicionalmente, mostramos la forma del Hamiltoniano clásico y las ecuaciones de movimiento en las variables de tríadas y conexiones, para cada uno de los modelos cosmológicos en consideración. En la segunda sección mostramos como reescribir el Hamiltoniano clásico en términos de las variables que se van a cuantizar, las cuales son las holonomías y los flujos. Luego mostramos como es el proceso de cuantización para el modelo de FRW con $k = 0$. Finalmente, en la última sección damos una explicación global de como se obtienen las teorías efectivas para los distintos modelos. También mencionamos los distintos métodos que existen para llegar a estos resultados y damos las referencias de donde encontrar la construcción de cada una de las teorías cuánticas de las cuales se derivan las ecuaciones efectivas. Todo esto para mostrar los Hamiltonianos efectivos.

3.1. Formulación Clásica

Sea $M = \Sigma \times \mathbb{R}$ un espacio-tiempo globalmente hiperbólico con Σ una variedad espacial que puede ser identificada con el grupo de simetría del modelo que se está estudiando. Sobre esta variedad tomemos una métrica auxiliar ${}^o q_{ab}$ y sus bases asociadas de 1-formas ${}^o \omega_a^i$ y vectores ${}^o e_i^a$ auxiliares. Si Σ es no compacta entonces tomamos una celda auxiliar $\mathcal{V}$ adaptada a las tríadas auxiliares y con volumen V_o . También se define la longitud L_i del lado i -ésimo de la celda a lo largo de ${}^o e_i$, con

$V_o = L_1 L_2 L_3$. Cuando Σ es compacta tomamos $L_i = V_o^{1/3}$. En la sección 3.1.1 se muestra explícitamente el papel que juegan las cantidades auxiliares.

En nuestro caso las coordenadas del espacio de fase para la relatividad general consisten en los pares (A_a^i, E_i^a) sobre Σ , donde $A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i$ es una conexión de $SU(2)$ y E_i^a una tríada densidad, las cuales satisfacen el corchete de Poisson

$$\{A_a^i, E_j^b\} = 8\pi G \gamma \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x, y), \quad (3.1)$$

donde γ es el parámetro de Barbero-Immirzi. Dado que estamos interesados en modelos homogéneos, podemos fijar la ligadura de Gauss y la de difeomorfismos si se toma la siguiente forma de las variables [5]

$$A_a^i = \frac{c^i}{L_i} \circ \omega_a^i, \quad E_i^a = \frac{p_i L_i}{V_o} \sqrt{o} q \circ e_i^a, \quad (3.2)$$

donde las variables (c^i, p_i) no dependen de las coordenadas espaciales (por ser homogéneo), solo dependen del tiempo. Los p_i pueden ser escritos en términos de los factores de escala a_i como

$$|p_i| = L_j L_k a_j a_k, \quad i \neq j \neq k.$$

El corchete de Poisson ahora es de la forma

$$\{c^i, p_j\} = 8\pi G \gamma \delta_j^i.$$

Para los casos isotrópicos solo hay dos componentes independientes (c, p) y satisfacen que

$$\{c, p\} = \frac{8\pi G \gamma}{3}.$$

La única ligadura que queda por resolver es la Hamiltoniana

$$\mathcal{C}_H = \int_{\mathcal{V}} N \left[-\frac{\epsilon^{ij} E_i^a E_j^b}{16\pi G \gamma^2 \sqrt{|\det E|}} (F_{ab}^k - (1 + \gamma^2) \Omega_{ab}^k) + \mathcal{H}_{\text{matter}} \right] d^3x, \quad (3.3)$$

con N la función de lapso, $\mathcal{H}_{\text{matter}} = p_\phi^2/2V$ el Hamiltoniano de materia, F_{ab}^k y Ω_{ab}^k las curvaturas de la conexión A_a^i y la conexión de espín Γ_a^i (compatible con las tríadas), respectivamente. Nótese que en la parte de materia nos estamos restringiendo a un campo escalar sin masa ya que con el campo escalar se tiene una cuantización satisfactoria de los modelos cosmológicos, puesto que se puede definir los observables relacionales de la teoría.

Ahora mostraremos el formalismo Hamiltoniano clásico en las nuevas variables (c^i, p_i) para los modelos cosmológicos a estudiar, empezando con el modelo de FRW con $k = 0$.

3.1.1. FRW con $k = 0$

En esta sección además de mostrar la forma del Hamiltoniano gravitacional en las nuevas variables (c^i, p_i) también se definen otros conjuntos de variables que serán de utilidad a la hora de estudiar los modelos cuánticos. También se muestra el Hamiltoniano para el campo escalar sin masa. Además, en esta sección todos los calculos contienen el volumen auxiliar de forma explícita, ya que este juega un papel importante en nuestro análisis del modelo cuántico para FRW con $k = 0$. Empecemos por escribir de nuevo la métrica pero ahora poniendo explícitamente los elementos auxiliares

$$ds^2 = -dt^2 + q_{ab}dx^a dx^b = -dt^2 + a^2(t) {}^\circ q_{ab}dx^a dx^b, \quad (3.4)$$

donde q_{ab} es la métrica física sobre la hipersuperficie espacial Σ y ${}^\circ q_{ab}$ es la métrica auxiliar, estas métricas estan relacionadas por medio del factor de escala $q_{ab} = a^2 {}^\circ q_{ab}$. Por lo tanto el volumen físico y el volumen auxiliar satisfacen que $V = a^3 V_0$. La acción de la teoría es

$$S = -\frac{1}{2} \int g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi \sqrt{g} d^4x + \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{g} d^4x, \quad (3.5)$$

entonces el Lagrangiano esta dado por

$$L = -\frac{1}{2} \int g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi a^3 d^3x + \frac{1}{16\pi G} \int a^3 R d^3x. \quad (3.6)$$

El momento canónico conjugado de ϕ es

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (3.7)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(-\frac{1}{2} \int g^{tt} \nabla_t \phi \nabla_t \phi a^3 d^3x \right) \quad (3.8)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{1}{2} \int a^3 \dot{\phi}^2 d^3x \right) \quad (3.9)$$

$$= a^3 \dot{\phi} V_0. \quad (3.10)$$

Para calcular el momento canónico conjugado del factor de escala (a) se utiliza el escalar de curvatura

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (3.11)$$

El Lagrangiano gravitacional integrando por partes queda de la forma

$$L_G = -\frac{3}{8\pi G} \int a \dot{a}^2 d^3x = -\frac{3V_0}{8\pi G} a \dot{a}^2, \quad (3.12)$$

entonces el momento canónico conjugado de a es

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \quad (3.13)$$

$$= -\frac{3V_0}{4\pi G} a \dot{a}. \quad (3.14)$$

Ahora podemos calcular el Hamiltoniano gravitacional como

$$H_G = p_a \dot{a} - L_G \quad (3.15)$$

$$= -\frac{2\pi G}{3V_0} \frac{p_a^2}{a}. \quad (3.16)$$

El Hamiltoniano para la parte de materia ya fue calculado en el ejemplo 3 del capítulo 2. Si usamos la ecuación (2.31) haciendo $N = 1, m = 0, \sqrt{q} = a^3$ y teniendo en cuenta que el campo escalar $\phi(t)$ solo depende del tiempo, se obtiene

$$H_M = \frac{p_\phi^2}{2a^3 V_0}. \quad (3.17)$$

El espacio de fase cinemático Γ consiste de los grados de libertad gravitacionales (a, p_a) y los grados de libertad de la materia (ϕ, p_ϕ) y toda la dinámica del sistema es capturada por la ligadura Hamiltoniana

$$\mathcal{C}_H = -\frac{2\pi G}{3V_0} \frac{p_a^2}{a} + \frac{p_\phi^2}{2a^3 V_0} \approx 0. \quad (3.18)$$

Los corchetes de Poisson son

$$\{a, p_a\} = 1, \quad \{\phi, p_\phi\} = 1. \quad (3.19)$$

La relación entre las variables métricas y (c, p) es

$$p = V_0^{2/3} a^2, \quad c = V_0^{1/3} \gamma \dot{a}, \quad (3.20)$$

entonces el Hamiltoniano queda como

$$\mathcal{C}_H = -\frac{3}{8\pi G \gamma^2} \sqrt{p} c^2 + \frac{p_\phi^2}{2p^{3/2}} \approx 0 \quad (3.21)$$

y los corchetes de Poisson son

$$\{c, p\} = \frac{8\pi G \gamma}{3}, \quad \{\phi, p_\phi\} = 1. \quad (3.22)$$

Otras variables que son de utilidad para el modelo cuántico son el volumen físico y su variable conjugada

$$V := V_0 a^3, \quad \beta := \gamma \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.23)$$

las cuales dan el Hamiltoniano

$$\mathcal{C}_H = -\frac{3}{8\pi G \gamma^2} \beta^2 V + \frac{p_\phi^2}{2V} \approx 0 \quad (3.24)$$

y los corchetes de Poisson

$$\{\beta, V\} = 4\pi G \gamma, \quad \{\phi, p_\phi\} = 1. \quad (3.25)$$

Las ecuaciones de movimiento en las variables (V, β) estan dadas por

$$\dot{V} = \{V, \mathcal{C}_H\} = -\frac{3}{4\pi G \gamma^2} \beta V \quad (3.26)$$

$$\dot{\beta} = \{\beta, \mathcal{C}_H\} = -\frac{3}{8\pi G \gamma^2} \beta^2 - \frac{p_\phi^2}{2V^2}. \quad (3.27)$$

Otras variables que serán de utilidad a la hora de estudiar el modelo soluble son

$$\nu := \frac{p^{3/2}}{2\pi G \gamma \hbar} = \frac{V}{2\pi G \gamma \hbar}, \quad b := \frac{c}{\sqrt{p}} = \beta, \quad (3.28)$$

que satisfacen el corchete de Poisson

$$\{b, \nu\} = \frac{2}{\hbar}. \quad (3.29)$$

Ya que el contenido de materia es el mismo para todos los modelos, en el resto de secciones solo mostramos la forma del Hamiltoniano gravitacional.

3.1.2. $k = 1$ FRW

La variedad espacial Σ que vamos a considerar tiene la topología de la tres esfera $\mathbb{S}^3$. La métrica auxiliar sobre Σ es ${}^o q_{ab} := {}^o \omega_a^i {}^o \omega_b^j k_{ij}$, con k_{ij} la métrica de Killing-cartan sobre $SU(2)$. El radio de la tres esfera medido con la métrica auxiliar es a_0 , por lo tanto el volumen respecto a la métrica auxiliar esta dado por $V_0 = 2\pi^2 a_0^3$. Se define la longitud auxiliar $\ell_0 := V_0^{1/3}$, que se puede escribir como $\ell_0 =: \vartheta a_0$, con $\vartheta := (2\pi^2)^{1/3}$. Las tríadas y conexiones son de la forma

$$A_a^i = \frac{c}{\ell_0} {}^o \omega_a^i, \quad E_i^a = \frac{p}{\ell_0^2} \sqrt{{}^o q} {}^o e_i^a. \quad (3.30)$$

La ligadura Hamiltoniana con lapso $N = 1$ es [33]

$$\mathcal{C}_G = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2} \sqrt{|p|} [(c - \vartheta)^2 + \gamma^2 \vartheta^2] + \frac{p_\phi^2}{2V^2}. \quad (3.31)$$

Es conveniente definir las variables $V = p^{3/2}$ y $\beta := c/|p|^{1/2}$ como se hizo para el modelo con $k = 0$, donde V es el volumen de Σ y β su variable conjugada. Las ecuaciones de movimiento estan dadas por los corchetes de Poisson de V y β con el Hamiltoniano

$$\dot{V} = \frac{3}{\gamma} (\beta V - \vartheta V^{2/3}) \quad (3.32)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{3}{2\gamma} \left(\beta^2 - \frac{4}{3} \sigma \beta V^{-1/3} + \frac{1}{3} (1 + \gamma^2) \sigma^2 V^{-2/3} \right) - 2\pi G \gamma \frac{p_\phi^2}{V^2}. \quad (3.33)$$

Estas ecuaciones se implementaron numéricamente con el fin de comparar con las soluciones de las ecuaciones efectivas. Para más detalles sobre la formulación clásica de este modelo en las variables de tríadas y conexiones se puede consultar [33]. Ahora procedemos a mostrar la formulación clásica para los modelos anisotrópicos.

3.1.3. Bianchi I

Las soluciones para los universos tipo Bianchi I son de interés para nosotros ya que dan información del comportamiento asintótico de los universos tipo Bianchi II. Adicionalmente, estas representan las fases de evolución de los universos tipo Bianchi IX cuando están cerca de la singularidad del big bang.

La métrica para el modelo de Bianchi I es de la forma

$$ds^2 = -N(\tau)^2 d\tau^2 + a_1(\tau)^2 dx^2 + a_2(\tau)^2 dy^2 + a_3(\tau)^2 dz^2. \quad (3.34)$$

La idea es reescribir la teoría clásica en términos de tríadas y conexiones de tal manera que sea fácil comparar con la teoría efectiva que proviene de la teoría cuántica. Las nuevas variables del espacio de fase son

$$E_i^a = p_i L_i V_0^{-1} \sqrt{|q|} {}^o e_i^a \quad \text{y} \quad A_a^i = c_i L_i^{-1} {}^o \omega_a^i, \quad (3.35)$$

con $V_0 = L_1 L_2 L_3$ volumen auxiliar y L_i las longitudes auxiliares respecto a la métrica auxiliar ${}^o q_{ab} := \delta_{ij} {}^o \omega_a^i {}^o \omega_b^j$, donde

$${}^o \omega_a^1 = (dx)_a, \quad {}^o \omega_a^2 = (dy)_a, \quad {}^o \omega_a^3 = (dz)_a \quad (3.36)$$

y

$${}^o e_1^a = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \quad {}^o e_2^a = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^a, \quad {}^o e_3^a = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a. \quad (3.37)$$

Un punto en el espacio de fase esta representado por ocho coordenadas reales (p_i, c_i, ϕ, p_ϕ) . Los corchetes de Poisson estan dados por

$$\{c_i, p_j\} = 8\pi G\gamma \delta_{ij} \quad \{\phi, p_\phi\} = 1. \quad (3.38)$$

La formulación Hamiltoniana queda completa con la ligadura Hamiltoniana que para el lapso $N = V = \sqrt{|p_1 p_2 p_3|}$, toma la forma [21]

$$\mathcal{C}_H = \frac{1}{8\pi G\gamma^2} (p_1 c_1 p_2 c_2 + p_2 c_2 p_3 c_3 + p_1 c_1 p_3 c_3) - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0. \quad (3.39)$$

Las ecuaciones de movimiento estan dadas por los corchetes de Poisson con el Hamiltoniano y son de la forma

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \gamma^{-1} (p_1 p_2 c_2 + p_1 p_3 c_3), \\ \dot{p}_2 &= \gamma^{-1} (p_2 p_1 c_1 + p_2 p_3 c_3), \\ \dot{p}_3 &= \gamma^{-1} (p_3 p_1 c_1 + p_3 p_2 c_2), \\ \dot{c}_1 &= -\gamma^{-1} (c_1 p_2 c_2 + c_1 p_3 c_3), \\ \dot{c}_2 &= -\gamma^{-1} (c_2 p_1 c_1 + c_2 p_3 c_3), \\ \dot{c}_3 &= -\gamma^{-1} (c_3 p_1 c_1 + c_3 p_2 c_2), \\ \dot{p}_\phi &= 0 \quad \Rightarrow p_\phi = \text{constante}, \\ \dot{\phi} &= -p_\phi \quad \Rightarrow \phi = -p_\phi \tau. \end{aligned}$$

La última ecuación muestra que el campo ϕ puede ser usado como un tiempo interno ya que es una función monótona sobre todas las soluciones clásicas. τ es llamado el tiempo armónico el cual corresponde a un lapso $N = \sqrt{|p_1 p_2 p_3|}$. Este tiempo está relacionado con el tiempo cósmico t con lapso $N = 1$ por medio de la ecuación

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\sqrt{|p_1 p_2 p_3|}} \frac{d}{d\tau}. \quad (3.40)$$

Los observables serán definidos respecto al tiempo cósmico.

De las ecuaciones de movimiento se puede mostrar de manera directa que las soluciones clásicas poseen las siguientes constantes de movimiento

$$c_1 p_1 =: \alpha_1, \quad (3.41)$$

$$c_2 p_2 =: \alpha_2, \quad (3.42)$$

$$c_3 p_3 =: \alpha_3. \quad (3.43)$$

Estas constantes se utilizan para solucionar clásicamente Bianchi I con un campo escalar sin masa [41]. La solución se puede escribir como [50]

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2k_1} dx^2 + t^{2k_2} dy^2 + t^{2k_3} dz^2, \quad (3.44)$$

llamada la *solución de Jacobs* para un fluido perfecto duro.¹ Los parámetros k_i son llamados *exponentes de Kasner* los cuales satisfacen que

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_\phi^2 = 1, \quad \text{y} \quad k_1 + k_2 + k_3 = \pm 1. \quad (3.45)$$

El signo menos se agrega para tener en cuenta el cambio de dirección de la expansión cuando se estudien las soluciones no singulares. En la literatura cuando el contenido de materia es un campo escalar sin masa es equivalente a lo que se suele llamar “materia dura”² y satisface la ecuación de estado $P = \rho$, donde P es la presión y ρ es la densidad de energía.

Estas soluciones analíticas se pueden comparar con las soluciones numéricas para verificar que durante la evolución los exponentes de Kasner permanecen constantes.

Las soluciones de Jacobs también van a ser útiles para estudiar el pasado y futuro asintótico de Bianchi II que corresponde a Bianchi I³ (Jacobs). Esto se puede ver en [73, 59] y la sección 9.3 de [74]. Además las ecuaciones clásicas de Bianchi II son un caso límite para las ecuaciones efectivas de Bianchi II que vienen de cuantizar en el marco de la cosmología cuántica de lazos el modelo de Bianchi II [21]. Por lo tanto, en la región clásica las soluciones de Bianchi I (Jacobs) serán casos límites de las soluciones a las ecuaciones efectivas.

Para completar el cuadro clásico daremos las relaciones entre las variables del espacio de fase y las variables métricas,

$$p_1 = a_2 a_3 L_2 L_3, \quad p_2 = a_1 a_3 L_1 L_3, \quad p_3 = a_1 a_2 L_1 L_2, \quad (3.46)$$

$$c_1 = \gamma L_1 a_1 H_1, \quad c_2 = \gamma L_2 a_2 H_2, \quad c_3 = \gamma L_3 a_3 H_3, \quad (3.47)$$

asumiendo $a_i > 0, p_i > 0$. Las relaciones (3.46) se satisfacen a nivel cinemático, mientras que las ecuaciones (3.47) se satisfacen a nivel dinámico, es decir, en el espacio de soluciones. Estas relaciones se demuestran en la próxima sección, donde se describe la formulación clásica para Bianchi II.

3.1.4. Bianchi II

La métrica para el modelo de Bianchi II puede ser escrita como

$$ds^2 = -N(\tau)^2 d\tau^2 + a_1(\tau)^2 (dx - \alpha z dy)^2 + a_2(\tau)^2 dy^2 + a_3(\tau)^2 dz^2, \quad (3.48)$$

¹La forma de la métrica (3.44) es tomada de [47], donde se puede encontrar un gran número de soluciones analíticas clásicas para modelos cosmológicos espacialmente homogéneos.

²En el artículo original de Jacobs [50], la solución con este tipo de materia es llamada “Zel’dovich universe”.

³Esto es cierto cuando la materia es un campo escalar sin masa. Para otro tipo de materia el comportamiento asintótico es diferente.

donde el parámetro α nos permite distinguir entre Bianchi I ($\alpha = 0$) y Bianchi II ($\alpha = 1$). Recordemos que las tríadas y conexiones se pueden escribir como $E_i^a = p_i L_i V_0^{-1} \sqrt{|q|} {}^0e_i^a$ y $A_a^i = c_i L_i^{-1} {}^0\omega_a^i$, con $V_0 = L_1 L_2 L_3$ el volumen auxiliar respecto a la métrica auxiliar ${}^0q_{ab} := \delta_{ij} {}^0\omega_a^i {}^0\omega_b^j$, donde [21]:

$${}^0\omega_a^1 = (dx)_a - \alpha z (dy)_a, \quad {}^0\omega_a^2 = (dy)_a, \quad {}^0\omega_a^3 = (dz)_a \quad (3.49)$$

$${}^0e_1^a = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \quad {}^0e_2^a = \alpha z \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^a, \quad {}^0e_3^a = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a, \quad (3.50)$$

con corchete de Lie ⁴, $[{}^0e_2, {}^0e_3] = -{}^0e_1$, con $\alpha = 1$. La ligadura Hamiltoniana para el lapso $N = V = \sqrt{|p_1 p_2 p_3|}$ es de la forma [21]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_H &= \frac{1}{8\pi G \gamma^2} \left[p_1 c_1 p_2 c_2 + p_2 c_2 p_3 c_3 + p_1 c_1 p_3 c_3 + \alpha \epsilon p_2 p_3 c_1 - (1 + \gamma^2) \left(\frac{\alpha p_2 p_3}{2p_1} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0 \end{aligned}$$

donde de nuevo α hace la distinción entre Bianchi I y Bianchi II. El valor de $\epsilon = \pm 1$ depende de si el marco de referencia dado por ${}^0e_i^a$ está orientado con la regla de la mano derecha o no (en nuestras soluciones asumimos $\epsilon = 1$, i. e., $p_i > 0$). Las ecuaciones de movimiento están dadas por los corchetes de Poisson con el Hamiltoniano y son de la forma

$$\dot{p}_1 = \gamma^{-1} (p_1 p_2 c_2 + p_1 p_3 c_3 + \alpha \epsilon p_2 p_3), \quad (3.51)$$

$$\dot{p}_2 = \gamma^{-1} (p_2 p_1 c_1 + p_2 p_3 c_3), \quad (3.52)$$

$$\dot{p}_3 = \gamma^{-1} (p_3 p_1 c_1 + p_3 p_2 c_2), \quad (3.53)$$

$$\dot{c}_1 = -\gamma^{-1} \left[c_1 p_2 c_2 + c_1 p_3 c_3 + \frac{1}{2p_1} (1 + \gamma^2) \left(\frac{\alpha p_2 p_3}{p_1} \right)^2 \right], \quad (3.54)$$

$$\dot{c}_2 = -\gamma^{-1} \left[c_2 p_1 c_1 + c_2 p_3 c_3 + \alpha \epsilon p_3 c_1 - \frac{1}{2p_2} (1 + \gamma^2) \left(\frac{\alpha p_2 p_3}{p_1} \right)^2 \right], \quad (3.55)$$

$$\dot{c}_3 = -\gamma^{-1} \left[c_3 p_1 c_1 + c_3 p_2 c_2 + \alpha \epsilon p_2 c_1 - \frac{1}{2p_3} (1 + \gamma^2) \left(\frac{\alpha p_2 p_3}{p_1} \right)^2 \right], \quad (3.56)$$

$$\dot{p}_\phi = 0 \quad \Rightarrow p_\phi = \text{constante}, \quad (3.57)$$

$$\dot{\phi} = -p_\phi \quad \Rightarrow \phi = -p_\phi \tau. \quad (3.58)$$

⁴Estamos usando la notación de [21] y el capítulo 11 de [46]. Nótese que esta no es la elección típica ($[{}^0e_2, {}^0e_3] = {}^0e_1$) para Bianchi II. Esta elección solo implica un cambio de un conjunto invariante ($n_1 = 1$) de Bianchi II a otro conjunto invariante ($n_1 = -1$), dando lugar a las mismas propiedades físicas ya que las ecuaciones de movimiento tienen esta simetría discreta. Para más detalles ver [74, 43, 46].

Estas ecuaciones se implementaron numéricamente, incluyendo el “interruptor” α para pasar de las ecuaciones de Bianchi II a las de Bianchi I. De las ecuaciones de movimiento se puede mostrar de manera directa que las soluciones clásicas poseen las siguientes constantes de movimiento

$$c_1 p_1 + c_2 p_2 =: \alpha_{12}, \quad (3.59)$$

$$c_1 p_1 + c_3 p_3 =: \alpha_{13}, \quad (3.60)$$

$$c_3 p_3 - c_2 p_2 =: \alpha_{32} = \alpha_{13} - \alpha_{12}, \quad (3.61)$$

Esto nos permite solucionar analíticamente las ecuaciones (3.52) y (3.53),

$$\dot{p}_2 = \gamma^{-1} p_2 \alpha_{13} \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_2^0 \exp\left(\frac{\alpha_{13} \tau}{\gamma}\right), \quad (3.62)$$

$$\dot{p}_3 = \gamma^{-1} p_3 \alpha_{12} \quad \Rightarrow \quad p_3 = p_3^0 \exp\left(\frac{\alpha_{12} \tau}{\gamma}\right). \quad (3.63)$$

La existencia de estas soluciones permite comparar las soluciones numéricas con las analíticas para las variables p_2 y p_3 . Además se puede verificar durante la evolución numérica que α_{12} y α_{13} permanezcan constantes.

Las relaciones entre las variables del espacio de fase y las variables métricas están dadas por,

$$p_1 = a_2 a_3 L_2 L_3, \quad p_2 = a_1 a_3 L_1 L_3, \quad p_3 = a_1 a_2 L_1 L_2, \quad (3.64)$$

y

$$c_1 = \gamma L_1 a_1 H_1 + \frac{\alpha}{2} \frac{a_1^2 L_1^2}{a_2 a_3 L_2 L_3}, \quad (3.65)$$

$$c_2 = \gamma L_2 a_2 H_2 - \frac{\alpha}{2} \frac{a_1 L_1}{a_3 L_3}, \quad (3.66)$$

$$c_3 = \gamma L_3 a_3 H_3 - \frac{\alpha}{2} \frac{a_1 L_1}{a_2 L_2}, \quad (3.67)$$

asumiendo $a_i > 0, p_i > 0$ y $\epsilon = 1$. Las relaciones (3.64) se satisfacen a nivel cinemático, mientras que las ecuaciones (3.65, 3.66, 3.67) se satisfacen a nivel dinámico. Estas relaciones pueden ser demostradas usando los parámetros de Hubble (las longitudes auxiliares se ponen explícitamente)

$$H_i = \frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2 p_3}} \left(\frac{\dot{p}_j}{p_j} + \frac{\dot{p}_k}{p_k} - \frac{\dot{p}_i}{p_i} \right) \quad (3.68)$$

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{1}{2p_i L_i} \left(\frac{\dot{p}_j}{p_j} + \frac{\dot{p}_k}{p_k} - \frac{\dot{p}_i}{p_i} \right), \quad (3.69)$$

con $i \neq j \neq k \neq i$. Si ponemos las ecuaciones de movimiento (3.51, 3.52, 3.53) en la expresión anterior se obtiene

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{c_i}{\gamma L_i} + \text{fsign}(i) \frac{1}{2p_i L_i} \frac{\alpha}{\gamma} \frac{p_2 p_3}{p_1}, \quad (3.70)$$

donde

$$\text{fsign}(i) = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 1 \\ 1, & \text{si } i = 2, 3 \end{cases} \quad (3.71)$$

Usando la relación entre a_i y p_i (ecuación (3.64)) y la definición del parámetro de Hubble se obtiene que

$$c_i = \gamma L_i \frac{da_i}{dt} - \text{fsign}(i) \frac{1}{2p_i} \alpha L_1^2 a_1^2 \quad (3.72)$$

$$= \gamma L_i a_i H_i - \text{fsign}(i) \frac{\alpha}{2} \frac{L_1^2 a_1^2}{L_j L_k a_j a_k}. \quad (3.73)$$

Estas son precisamente las ecuaciones (3.65, 3.66, 3.67). Para $\alpha = 0$ se reducen a las ecuaciones (3.47) de la sección de Bianchi I, que también se querían mostrar. Ahora solo nos queda estudiar la dinámica clásica del modelo de Bianchi IX para completar la descripción clásica de los modelos anisotrópicos.

3.1.5. Bianchi IX

En el modelo de Bianchi IX al igual que en FRW con $k = 1$, la variedad espacial Σ tiene la topología de la tres esfera $\mathbb{S}^3$. La métrica física sobre Σ es $q_{ab} := \omega_a^i \omega_b^j \delta_{ij}$, donde las formas físicas son $\omega_a^i = a^i(t) \varrho \omega_a^i$ y las formas auxiliares son

$$\begin{aligned} \varrho \omega_a^1 &= \sin \beta \sin \gamma (d\alpha)_a + \cos \gamma (d\beta)_a, \\ \varrho \omega_a^2 &= -\sin \beta \cos \gamma (d\alpha)_a + \sin \gamma (d\beta)_a, \\ \varrho \omega_a^3 &= \cos \beta (d\alpha)_a + (d\gamma)_a \end{aligned}$$

El radio de la tres esfera medido con la métrica auxiliar es a_0 , por lo tanto el volumen respecto a la métrica auxiliar es $V_0 = 2\pi^2 a_0^3$. Se define la longitud auxiliar $\ell_0 := V_0^{1/3}$, que se puede escribir como $\ell_0 =: \vartheta a_0$, con $\vartheta := (2\pi^2)^{1/3}$. Recordemos que las tríadas y conexiones son de la forma $A_a^i = c \ell_0^{-1} \varrho \omega_a^i$ y $E_i^a = p \ell_0^{-2} \sqrt{\varrho q} \varrho e_i^a$. Usando estas definiciones y el lapso $N = V = \sqrt{p_1 p_2 p_3}$ (con $p_i > 0$), la ligadura

Hamiltoniana es [76]

$$\begin{aligned}
C_H = & -\frac{1}{8\pi G\gamma^2} \left[p_1 c_1 p_2 c_2 + p_2 c_2 p_3 c_3 + p_1 c_1 p_3 c_3 + 2\vartheta(p_1 p_2 c_3 + p_3 p_1 c_2 + p_2 p_3 c_1) \right. \\
& \left. + \vartheta^2(1 + \gamma^2) \left(2p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2 - \left(\frac{p_1 p_2}{p_3} \right)^2 - \left(\frac{p_3 p_1}{p_2} \right)^2 - \left(\frac{p_2 p_3}{p_1} \right)^2 \right) \right] \\
& + \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= \gamma^{-1} (p_1 p_2 c_2 + p_1 p_3 c_3 + \vartheta p_2 p_3), \\
\dot{p}_2 &= \gamma^{-1} (p_2 p_3 c_3 + p_2 p_1 c_1 + \vartheta p_1 p_3), \\
\dot{p}_3 &= \gamma^{-1} (p_3 p_1 c_1 + p_3 p_2 c_2 + \vartheta p_1 p_2), \\
\dot{c}_1 &= -\gamma^{-1} \left[c_1 p_2 c_2 + c_1 p_3 c_3 + 2\vartheta(p_2 c_3 + p_3 c_2) \right. \\
& \quad \left. + 4\vartheta^2(1 + \gamma^2) \left(p_1 - \frac{p_1 p_2^2}{2p_3^2} - \frac{p_1 p_3^2}{2p_2^2} + \frac{p_2^2 p_3^2}{2p_1^3} \right) \right], \\
\dot{c}_2 &= -\gamma^{-1} \left[c_2 p_1 c_1 + c_2 p_3 c_3 + 2\vartheta(p_1 c_3 + p_3 c_1) \right. \\
& \quad \left. + 4\vartheta^2(1 + \gamma^2) \left(p_2 - \frac{p_2 p_1^2}{2p_3^2} - \frac{p_2 p_3^2}{2p_1^2} + \frac{p_1^2 p_3^2}{2p_2^3} \right) \right], \\
\dot{c}_3 &= -\gamma^{-1} \left[c_3 p_2 c_2 + c_3 p_1 c_1 + 2\vartheta(p_2 c_1 + p_1 c_2) \right. \\
& \quad \left. + 4\vartheta^2(1 + \gamma^2) \left(p_3 - \frac{p_3 p_2^2}{2p_1^2} - \frac{p_3 p_1^2}{2p_2^2} + \frac{p_2^2 p_1^2}{2p_3^3} \right) \right].
\end{aligned}$$

Cuando se toma el lapso $N = 1$, la ligadura Hamiltoniana toma la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_H = & -\frac{1}{8\pi G\gamma^2} \left[\sqrt{\frac{p_1 p_2}{p_3}} c_1 c_2 + \sqrt{\frac{p_1 p_3}{p_2}} c_1 c_3 + \sqrt{\frac{p_2 p_3}{p_1}} c_2 c_3 \right. \\
 & + 2\vartheta \left(\frac{p_2 p_3}{p_1} c_1 + \frac{p_1 p_3}{p_2} c_2 + \frac{p_1 p_2}{p_3} c_3 \right) \\
 & - \vartheta^2 (1 + \gamma^2) \left(2 \frac{p_1}{\sqrt{p_2 p_3}} + 2 \frac{p_2}{\sqrt{p_1 p_3}} + 2 \frac{p_3}{\sqrt{p_1 p_2}} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(p_2 p_3)^{3/2}}{p_1^{5/2}} - \frac{(p_1 p_3)^{3/2}}{p_2^{5/2}} - \frac{(p_1 p_2)^{3/2}}{p_3^{5/2}} \right) \right] + \frac{p_\phi^2}{2V} \approx 0.
 \end{aligned}$$

Nótese que este Hamiltoniano contiene muchas más potencias negativas de los p_i que su equivalente con $N = V$, ecuación (3.74). A nivel clásico las dos teorías derivadas de estos dos Hamiltonianos solo difieren en el tiempo que se utiliza para describir la dinámica, pero su espacio de soluciones es el mismo. En el caso cuántico cada uno de estos Hamiltonianos da una teoría distinta y por lo tanto sus teorías efectivas serán distintas [55].

3.1.6. Observables

En el estudio de cada uno de los modelos cosmológicos se han incluido dos tiempos de interés, τ el tiempo armónico (lapso $N = V = \sqrt{p_1 p_2 p_3}$) y el tiempo cósmico t (con lapso $N = 1$), los cuales se relacionan por medio de la ecuación

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} \frac{d}{d\tau}. \quad (3.75)$$

Es respecto al tiempo cósmico que definiremos los observables. La derivada respecto al tiempo cósmico se denota como $dO/dt = O'$, por lo tanto $O' = \dot{O}/\sqrt{p_1 p_2 p_3}$. Para determinar como se resuelven las singularidades y como evolucionan las soluciones clásicas y efectivas estudiamos los siguientes observables

1. Los *factores de escala direccionales*

$$a_i = \frac{1}{L_i} \sqrt{\frac{p_j p_k}{p_i}},$$

con $i \neq j \neq k \neq i$ y $p_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Estas funciones hacen fácil la comparación entre las soluciones clásicas y efectivas.

2. Los *parámetros de Hubble direccionales*

$$H_i = \frac{a'_i}{a_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{p'_j}{p_j} + \frac{p'_k}{p_k} - \frac{p'_i}{p_i} \right),$$

con $i \neq j \neq k \neq i$. Estas funciones nos dan la información de cuando ocurren los rebotes direccionales ($H_i = 0$) y si las direcciones se están contrayendo ($H_i < 0$) o expandiendo ($H_i > 0$).

3. La *expansión*

$$\theta = \frac{V'}{V} = H_1 + H_2 + H_3.$$

Esta función contiene la información de la expansión total y determina cuando sucede el rebote global del universo ($\theta = 0$). Una función equivalente es el *parámetro de Hubble promedio*

$$H = \frac{\theta}{3} = \frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3).$$

4. La *densidad de materia*

$$\rho = \frac{p_\phi^2}{2V^2} = \frac{p_\phi^2}{2p_1 p_2 p_3}.$$

Si las singularidades son resueltas entonces esta cantidad debe permanecer finita durante la evolución. La cantidad que mide la importancia dinámica del contenido de materia es el *parámetro de densidad* Ω , definido como

$$\Omega := \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho}{H^2}. \quad (3.76)$$

Este parámetro está relacionado con los exponentes de Kasner en Bianchi I por medio de la ecuación $\Omega = \frac{3}{2}k_\phi^2 = \frac{3}{2}(1 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)$ (ver [50]).

5. La *cizalladura*

$$\sigma^2 = \sigma_{ab}\sigma^{ab} = \frac{1}{3}[(H_1 - H_2)^2 + (H_1 - H_3)^2 + (H_2 - H_3)^2] = \sum_{i=1}^3 H_i^2 - \frac{1}{3}\theta^2.$$

Nótese que esta definición de σ^2 difiere de la definición estándar $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab}$. Otra cantidad importante es el *parámetro de cizalladura*

$$\Sigma^2 := \frac{3\sigma^2}{2\theta^2} = \frac{\sigma^2}{6H^2}, \quad (3.77)$$

que mide la razón entre la cizalladura (i.e. anisotropía) y la expansión. En Bianchi I la expansión satisface que $\theta = t^{-1}$ (usando el hecho que $V = a_1 a_2 a_3 = t^{k_1 + k_2 + k_3} = t$), por lo tanto el parámetro de cizalladura satisface la relación $\Sigma^2 = \frac{3}{2}t^2\sigma^2 = \frac{3}{2}V^2\sigma^2 = \frac{3}{2}a^6\sigma^2 = 9\Sigma_{\text{BI}}^2$, donde $\Sigma_{\text{BI}}^2 := \frac{1}{6}\sigma^2 a^6$ era el parámetro de cizalladura usado en Bianchi I [41, 20], con $a := (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$ el factor de escala promedio.

6. El *escalar de Ricci* es de la forma

$$R = \left(\frac{p'_1}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{p'_2}{p_2}\right)^2 + \left(\frac{p'_3}{p_3}\right)^2 + 2\theta'. \quad (3.78)$$

Esta relación otorga una manera simple de calcular el escalar de Ricci numéricamente, ya que los p'_i se pueden calcular de las ecuaciones de movimiento y θ' esta dado por la ecuación de Raychaudhuri (para las soluciones clásicas)

$$\theta' = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^2 - 16\pi G\rho. \quad (3.79)$$

Para las soluciones efectivas, θ' se calcula usando las ecuaciones de movimiento de cada uno de los modelos que estamos considerando.

Una característica importante de Bianchi II y IX es que la curvatura espacial es diferente de cero, por lo cual se puede introducir otra cantidad que da información sobre la contribución dinámica de la curvatura extrínseca, esta cantidad es el *parámetro de curvatura*

$$K = \frac{3}{4\theta^2} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)], \quad (3.80)$$

donde

$$x_1 = \alpha_1 \sqrt{\frac{p_2 p_3}{p_1^3}}, \quad x_2 = \alpha_2 \sqrt{\frac{p_1 p_3}{p_2^3}}, \quad x_3 = \alpha_3 \sqrt{\frac{p_1 p_2}{p_3^3}}. \quad (3.81)$$

Los valores de los α_i son: para Bianchi I $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; para Bianchi II $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$; para Bianchi IX $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = l_0^2$, donde $l_0 = V_0^{1/3}$. Para el caso de FRW con $k = 1$, simplemente se toma Bianchi IX y se hace $x_1 = x_2 = x_3$.

La forma que hemos tomado de Ω, Σ^2 y K es motivada por el hecho que las soluciones clásicas de Bianchi I, II y IX satisfacen la relación

$$\Omega + \Sigma^2 + K = 1. \quad (3.82)$$

Estos parámetros tienen el “problema” de tener un valor infinito en el rebote ($\theta = 0$) por definición. Por lo tanto no son útiles para explorar la región cercana al rebote pero son de gran ayuda si estamos interesados en el comportamiento asintótico para tiempos muy grandes. La patología que presentan estas cantidades en el rebote no es importante y no refleja ningún problema con la resolución de la singularidad.

7. Los exponentes de Kasner

$$k_i = \frac{H_i}{|\theta|}. \quad (3.83)$$

Estos parámetros son útiles para determinar cuando las soluciones tienen un comportamiento tipo Bianchi I. Tomamos el valor absoluto de θ por que queremos que el signo de H_i especifique si la dirección a_i se esta expandiendo ($k_i > 0$) o contrayendo ($k_i < 0$). Para probar la ecuación (3.83) se usa que en Bianchi I $a_i = t^{k_i}$, entonces

$$k_i = a'_i t^{1-k_i} = \frac{a'_i t}{t^{k_i}} = \frac{a'_i t}{a_i} = \frac{a'_i V_0 t}{a_i V_0} = \frac{a'_i V}{a_i V_0} = \frac{a'_i V}{a_i V'} = \frac{H_i}{\theta}, \quad (3.84)$$

con $V = V_0 a_1 a_2 a_3 = V_0 t$.

Valga resaltar que todas las expresiones anteriores para calcular las cantidades observables aplican también a las soluciones efectivas, la única diferencia es el cálculo de θ' en la teoría efectiva.

Un hecho general de todos los modelos clásicos que estamos considerando es que presentan una singularidad inicial, pero esta singularidad puede ser de distintos tipos dependiendo de las propiedades del espacio-tiempo. Por esta razón realizamos a continuación una pequeña discusión sobre los tipos de singularidades que pueden ocurrir clásicamente.

3.1.7. Singularidades Clásicas

Para ilustrar cada tipo de singularidad vamos a suponer que las soluciones presentan la singularidad inicial en el tiempo $t = 0$. Mostraremos como obtener cada una de estas singularidades en la solución de Jacobs para Bianchi I [50].

1. Singularidad tipo *Punto*: significa que $a_1, a_2, a_3 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. Esto pasa en la solución de Jacobs cuando $k_1, k_2, k_3 > 0$.
2. Singularidad tipo *Cigarrillo*: significa que $a_1, a_2 \rightarrow 0$ y $a_3 \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 0$. Esto pasa cuando $k_1, k_2 > 0$ y $k_3 < 0$ (y permutaciones en 1,2,3).
3. Singularidad tipo *Barril*: significa que $a_1, a_2 \rightarrow 0$ y a_3 se acerca a un valor finito cuando $t \rightarrow 0$. Esto ocurre cuando $k_1, k_2 > 0$ y $k_3 = 0$ (y permutaciones en 1,2,3).
4. Singularidad tipo *Tortilla*: en este caso $a_1 \rightarrow 0$ y a_2, a_3 se acercan a un valor finito cuando $t \rightarrow 0$ (permutaciones en 1,2,3). Este tipo de singularidad *no* se presenta en las soluciones de Jacobs ni en las soluciones clásicas de Bianchi

II con un campo escalar sin masa [31]. Esto es comprensible ya que esta singularidad ocurre en Bianchi I cuando $k_1 > 0$ y $k_2 = k_3 = 0$, pero las ecuaciones de ligadura $k_1 + k_2 + k_3 = \pm 1$ y $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_\phi^2 = 1$ implican que $k_\phi = 0$, lo cual quiere decir que no hay materia, por lo tanto esta singularidad no es posible si hay materia dura presente.

Los nombres dados a los diferentes tipos de singularidades fueron introducidos por Thorne en [70], los cuales se refieren al cambio de forma de un elemento esférico de volumen cuando la evolución se aproxima a la singularidad.

Una vez construida la formulación Hamiltoniana de los modelos clásicos, el siguiente paso es cuantizar estos modelos. En la siguiente sección mostraremos como reescribir el Hamiltoniano en términos de las variables que se van a cuantizar y qué son las holonomías y los flujos. Luego mostraremos como es el proceso de cuantización para el modelo de FRW plano.

3.2. Formulación Cuántica

Para construir la cinemática cuántica se selecciona un conjunto de observables elementales clásicos a los cuales se les pueda asociar un operador. En la gravedad cuántica de lazos estas variables son las holonomías h_e definidas sobre una conexión A_a^i a lo largo de una arista e ; y los flujos de las tríadas densidad E_i^a a través de una superficie. En el caso de los modelos homogéneos en CCL las integrales de los flujos resultan ser proporcionales a las tríadas p_i [5]. Entonces se toman como variables elementales las holonomías y las tríadas p_i . Para poder promover el Hamiltoniano a un operador se debe expresar en términos de las funciones del espacio de fase que vamos a cuantizar (h_e, p_i) . Recordemos que el Hamiltoniano es de la forma

$$\mathcal{C}_H = \int_{\mathcal{V}} N \left[-\frac{\epsilon^{ij}_k E_i^a E_j^b}{16\pi G \gamma^2 \sqrt{|\det E|}} (F_{ab}^k - (1 + \gamma^2) \Omega_{ab}^k) + \mathcal{H}_{\text{matter}} \right] d^3x. \quad (3.85)$$

El primer término del Hamiltoniano es

$$\frac{\epsilon^{ij}_k E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} \quad (3.86)$$

el cual se puede reescribir en términos de las holonomías y tríadas usando la estrategia de Thiemann [71], tal como se hace en gravedad cuántica de lazos

$$\epsilon_{ijk} \frac{E^{ai} E^{bj}}{\sqrt{|\det E|}} = \sum_i \frac{1}{2\pi\gamma G \mu} {}^o\epsilon^{abc} {}^o\omega_c^i \text{Tr}(h_i^{(\mu)} \{h_i^{(\mu)-1}, V\} \tau_k) \quad (3.87)$$

donde $h_i^{(\mu)}$ es la holonomía a lo largo de la arista paralela al i -ésimo vector base con longitud μ (notese que μ es arbitrario), $V = \sqrt{|p_1 p_2 p_3|}$ es el volumen. El lado derecho de la ecuación (3.87) se puede utilizar para cuantizar este término, donde los corchetes de Poisson se promueven a conmutadores.

Para definir las curvaturas F_{ab}^k y Ω_{ab}^k en términos de las variables de fase (h_e, p_i) se siguen dos métodos distintos dependiendo del modelo que se considera. Para los universos isotrópicos y Bianchi I se considera un cuadrado $\square_{ij}$ en el plano $i - j$ expandido por dos de las tríadas auxiliares, donde cada uno de los lados del cuadrado tiene longitud μ'_i , por lo tanto la curvatura esta dada por [71]

$$F_{ab}^k = 2 \lim_{Area_{\square} \rightarrow 0} \epsilon_{ij} {}^k \text{Tr} \left(\frac{h_{\square_{ij}}^{\mu'} - \mathbb{I}}{\mu'_i \mu'_j} \tau^k \right) {}^o \omega_a^i {}^o \omega_b^j. \quad (3.88)$$

con

$$h_{\square_{ij}}^{(\lambda_c)} = h_i^{(\lambda_c)} h_j^{(\lambda_c)} (h_i^{(\lambda_c)})^{-1} (h_j^{(\lambda_c)})^{-1}. \quad (3.89)$$

De manera análoga se puede definir la curvatura Ω_{ab}^k utilizando las holonomías de la conexión de espín Γ_a^i . Clásicamente el límite debe tender a cero, pero a la hora de cuantizar se debe tener en cuenta que el operador de area tiene un autovalor mínimo dado por

$$\lambda^2 = 4\sqrt{3}\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2,$$

por lo tanto en lugar tomar el límite a cero se toma a λ^2 . Usando este hecho se obtiene que la longitud mínima esta dada por $\mu'_i a_i = \lambda$, tomando $\mu'_i = \bar{\mu}_i L_i$ se obtiene que

$$\bar{\mu}_1 = \lambda \sqrt{\frac{p_1}{p_2 p_3}}, \quad \bar{\mu}_2 = \lambda \sqrt{\frac{p_2}{p_1 p_3}}, \quad \bar{\mu}_3 = \lambda \sqrt{\frac{p_3}{p_1 p_2}},$$

con $\bar{\mu}_i$ parámetro adimensional. Para Bianchi II and IX no se puede utilizar este método para cuantizar ya que el operador de curvatura que se obtiene no está bien definido sobre el espacio de Hilbert cinemático [21, 76]. Por lo tanto se calculan las curvaturas a partir de las conexiones

$$F_{ab}^k = 2\partial_{[a} A_{b]}^k + \epsilon_{ij}^k A_a^i A_b^j \quad (3.90)$$

$$\Omega_{ab}^k = 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^k + \epsilon_{ij}^k \Gamma_a^i \Gamma_b^j \quad (3.91)$$

y las conexiones se escriben en términos de las holonomías [21]

$$A_a = \lim_{l_k \rightarrow 2\bar{\mu}_k} \sum_k \frac{1}{2l_k L_k} \left(h_k^{(l_k)} - (h_k^{(l_k)})^{-1} \right) \Rightarrow A_a^k = \frac{\sin(\bar{\mu}_k C_k)}{\bar{\mu}_k L_k} {}^o \omega_a^k. \quad (3.92)$$

De manera análoga se puede hacer para Γ_a^k . El límite $l_k \rightarrow 2\bar{\mu}_k$ se toma para obtener los mismos resultados en los dos métodos de cuantización para Bianchi I [21]. Para el caso de FRW con $k = 0$ los dos métodos de cuantización también dan los mismo resultados pero para FRW con $k = 1$ se obtienen resultados distintos.

En el primer método de cuantización se escribe la curvatura en términos de las holonomías, ec. (3.88), y es llamado *cuantización basada en la curvatura*. En el segundo método se escribe la curvatura en términos de la conexión, ecs. (3.90, 3.91), la cual se escribe en función de las holonomías (ec. (3.92)), este método es llamado *cuantización basada en la conexión*.

Para los modelos de Bianchi II y IX los términos relacionados con las curvaturas F_{ab}^k y Ω_{ab}^k contienen potencias negativas de los p_i , las cuales no tienen un operador asociado bien definido. Para solucionar este problema se utiliza la misma idea de Thiemann [71]

$$|p_i|^{(\ell-1)/2} = -\frac{\sqrt{|p_i|}L_i}{4\pi G\gamma j(j+1)\tilde{\mu}_i\ell}\text{Tr}(\tau_i h_i^{(\tilde{\mu}_i)}\{h_i^{(\tilde{\mu}_i)-1}, |p_i|^{\ell/2}\}), \quad (3.93)$$

donde $\tilde{\mu}_i$ es la longitud de la curva, $\ell \in (0, 1)$ y $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ es para la representación. Por simplicidad se toma $j = 1/2$ y dado que la potencia negativa más grande es $-1/4$ se toma $\ell = 1/2$ para obtener $p^{-1/4}$ directamente de la ecuación (3.93). Las otras potencias negativas se obtienen como productos de este operador, por ejemplo, $p^{-2} = (p^{-1/4})^8$.

Para los tres operadores (3.87, 3.88, 3.93) se tienen tres longitudes distintas $(\mu, \mu', \tilde{\mu})$ donde μ y $\tilde{\mu}$ pueden ser también funciones de los p_i . La forma más simple de definir las longitudes μ y $\tilde{\mu}$ es que sean iguales a μ' .

Para construir las ecuaciones efectivas se necesitan los autovalores de los operadores que contengan potencias negativas de los p_i . El primer operador es

$$\frac{\epsilon^{ij}_k E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} \quad (3.94)$$

cuyos autovalores son proporcionales a la función [55]

$$A(V) = \frac{1}{2V_c}(V + V_c - |V - V_c|) = \begin{cases} V/V_c & V < V_c \\ 1 & V \geq V_c \end{cases} \quad (3.95)$$

con $V_c = 2\pi\gamma\lambda\ell_{Pl}^2$. El operador $\hat{A}$ viene de la traza en la ecuación (3.87) y sus autovalores se definen como $\hat{A}\Psi(p) = A(V)\Psi(p)$.

Los operadores de curvatura también contienen potencias negativas de las tríadas, que se pueden expresar como productos del operador

$$\widehat{|p_i|^{-1/4}}$$

cuyos autovalores estan dados por [55]

$$J_i(V, p_1, p_2, p_3) = \frac{h(V)}{V_c} \prod_{j \neq i} p_j^{1/4}, \quad (3.96)$$

con

$$h(V) = \sqrt{V + V_c} - \sqrt{|V - V_c|}, \quad y \quad V_c = 2\pi\gamma\lambda\ell_{\text{Pl}}^2. \quad (3.97)$$

Usando estos resultados y tomando un factor de ordenamiento se puede construir el operador Hamiltoniano. Luego solucionando la ligadura $\hat{\mathcal{H}} \cdot \Psi = 0$ se pueden obtener los estados físicos y el espacio de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{phys}}$. Por último se definen los observables físicos que van a corresponder a observables relacionales en función del tiempo interno ϕ . Para ilustrar como se realiza este procedimiento, en la próxima sección se muestran estos pasos para el modelo de FRW con $k = 0$. Para los demás modelos se pueden consultar las referencias. FRW con $k = 1$ [68, 33], Bianchi I [20], Bianchi II [21] y Bianchi IX [76, 55].

3.2.1. FRW $k = 0$

Los resultados mostrados en esta sección esta basados en [2, 19, 67]. Como se habia mencionado anteriormente las variables básicas para la cuantización serán las holonomías y las tríadas. Para simplificar los calculos se toman las longitudes auxiliares $L_i = 1$. Entonces el volumen de la celda auxiliar es $V_0 = 1$. Para calcular las variables básicas consideremos una arista con longitud $\bar{\mu}$ en la dirección dada por e_k^a . Como estamos considerando un caso isotrópico entonces $\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_3 = \lambda/\sqrt{p}$. Por lo tanto la holonomía de la conexión es

$$h_k^{(\bar{\mu})} = \cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right) \mathbb{I} - 2i \sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right) \frac{\sigma_k}{2}, \quad (3.98)$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de 2×2 y σ_i son las matrices de Pauli. Estas holonomías generan el álgebra de las funciones casi-periódicas cuyos elementos son de la forma $e^{i\bar{\mu}c/2}$. Estas funciones junto con las tríadas p serán las variables básicas que se van a promover a operadores. El espacio de Hilbert cinemático es de la forma $\mathcal{H}_{\text{kin}} = \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}}$, donde $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ se construye usando la representación del álgebra de holonomías y flujos. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}}$ para la parte de materia, se construye utilizando el método de Fock. El espacio cinemático gravitacional resulta ser el espacio de funciones de cuadrado integrable sobre la compactificación de Bohr de la linea recta $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} = L^2(\mathbb{R}_{\text{Bohr}}, d\mu_{\text{Bohr}})$ [5]. En este espacio los autovectores del operador $\hat{p}$ pueden ser denotados como $|\mu\rangle$ y satisfacen que $\langle\mu_1|\mu_2\rangle = \delta_{\mu_1,\mu_2}$, donde $\mu_i \in \mathbb{R}$ y δ_{μ_1,μ_2} es una delta de Kronecker pero sobre los reales. Las funciones

básicas son representadas como

$$\hat{p}|\mu\rangle = \frac{8\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2}{6}\mu|\mu\rangle \quad \text{y} \quad \widehat{\exp(i\bar{\mu}c/2)}|\mu\rangle = |\mu + \bar{\mu}\rangle. \quad (3.99)$$

Para construir la parte gravitacional del operador Hamiltoniano, primero consideramos el Hamiltoniano clásico del modelo, ecuación (3.3),

$$\mathcal{C}_H = \int_{\mathcal{V}} N \left[-\frac{\epsilon^{ij}_k E_i^a E_j^b}{16\pi G \gamma^2 \sqrt{|\det E|}} F_{ab}^k \right] d^3x, \quad (3.100)$$

si tomamos el lapso $N = V$

$$\mathcal{C}_H = -\frac{1}{16\pi G \gamma^2} \int_{\mathcal{V}} \epsilon^{ij}_k E_i^a E_j^b F_{ab}^k d^3x. \quad (3.101)$$

La única función que falta por representar es la curvatura. Utilizando el método explicado en la sección anterior se obtiene que el operador de curvatura esta dado por [67]

$$\hat{F}_{ab}^k \Psi(\mu) = \epsilon_{ij}^k \omega_a^i \omega_b^j \left(\frac{\widehat{\sin^2(\bar{\mu}c)}}{\bar{\mu}^2} \right) \Psi(\mu). \quad (3.102)$$

Ahora se puede proceder a cuantizar. Pero es mejor primero simplificar la acción del operador exponencial y de la curvatura. Para esto es conveniente trabajar en la base del volumen, dada por las variables

$$b := \frac{c}{\sqrt{p}}, \quad \nu := \frac{p^{3/2}}{2\pi G \gamma \hbar} = \frac{V}{2\pi G \gamma \hbar} \quad (3.103)$$

que satisfacen el corchete de Poisson

$$\{b, \nu\} = \frac{2}{\hbar}. \quad (3.104)$$

En esta base las funciones básicas se representan como

$$\hat{\nu}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle \quad \text{y} \quad \widehat{\exp(i\lambda b/2)}|\nu\rangle = |\nu + \lambda\rangle. \quad (3.105)$$

La acción del operador de volumen es

$$\hat{V}|\nu\rangle = 2\pi\gamma\lambda_p^2|\nu||\nu\rangle. \quad (3.106)$$

Usando estos resultados, el operador Hamiltoniano se puede escribir como [2]

$$\begin{aligned}
\partial_\phi^2 \Psi(\nu, \phi) &= 3\pi G \widehat{\nu} \frac{\widehat{\sin \lambda b}}{\lambda} \widehat{\nu} \frac{\widehat{\sin \lambda b}}{\lambda} \Psi(\nu, \phi) \\
&= \frac{3\pi G}{4\lambda^2} \nu [(\nu + 2\lambda)\Psi(\nu + 4\lambda) - 2\nu\Psi(\nu) + (\nu - 2\lambda)\Psi(\nu - 4\lambda)] \\
&=: \Theta_{(\nu)} \Psi(\nu, \phi)
\end{aligned}$$

donde se toma la representación de Fock para la materia ($\hat{p}_\phi := -i\hbar\partial_\phi$). Los estados físicos $\Psi(\nu, \phi)$ son simétricos bajo el cambio de orientación de las tríadas, $\Psi(\nu, \phi) = \Psi(-\nu, \phi)$, ya que no se consideran fermiones en el modelo. El producto interno físico esta dado por

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \sum_{\nu} \bar{\Psi}_1(\nu, \phi_o) |\nu|^{-1} \Psi_2(\nu, \phi_o). \quad (3.107)$$

Para completar la teoría definimos el observable relacional

$$\hat{V}|_{\phi_o} \Psi(\nu, \phi) = 2\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2 e^{i\sqrt{\Theta}(\phi-\phi_o)} |\nu| \Psi(\nu, \phi_o), \quad (3.108)$$

que corresponde al volumen cuando el campo escalar toma el valor ϕ_o . El campo escalar ϕ juega el papel de tiempo interno (o relacional). La acción del observable $\hat{V}|_{\phi_o}$ se puede entender como la acción del operador de volumen V sobre un estado al tiempo ϕ_o y luego evolucionar el estado al tiempo ϕ .

Resulta que se puede hacer una transformada de Fourier de las funciones de onda definidas sobre la variable ν , para pasarlas a funciones sobre la variable b . La teoría resultante puede ser solucionada analíticamente [8], esta teoría es la que se denomina como “modelo soluble”.

Vamos a ilustrar como es la transformada de Fourier y la ligadura resultante. Para empezar, notemos que la función de onda $\Psi(\nu, \phi)$ tiene soporte sobre una “malla” $\nu = 4n\lambda$, con $n \in \mathbb{Z}$, entonces la transformada de Fourier $\tilde{\Psi}(b, \phi)$ tiene soporte sobre el intervalo continuo $(0, \pi/\lambda)$ y esta dada por

$$\tilde{\Psi}(b, \phi) := \sum_{\nu=4n\lambda} e^{\frac{i}{2}\nu b} \Psi(\nu, \phi), \quad \text{con} \quad \Psi(\nu, \phi) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\pi/\lambda} db e^{-\frac{i}{2}\nu b} \tilde{\Psi}(b, \phi). \quad (3.109)$$

Si definimos las funciones

$$\chi(\nu, \phi) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\Psi(\nu, \phi)}{\nu}, \quad (3.110)$$

las cuales satisfacen la relación de antisimetría $\chi(-\nu, \phi) = -\chi(\nu, \phi)$. Con estas nuevas funciones y tomando la transformada de Fourier se obtienen las funciones

$\tilde{\chi}(b, \phi)$ [8], que satisfacen la ecuación de ligadura

$$\partial_\phi^2 \tilde{\chi}(b, \phi) = \alpha^2 \left(\frac{\sin \lambda b}{\lambda} \partial_b \right)^2 \tilde{\chi}(b, \phi), \quad (3.111)$$

con $\alpha = \sqrt{12\pi G}$. Esta ecuación será el punto de partida para el estudio de los estados semiclásicos en el siguiente capítulo. Donde se explica mejor las soluciones y como actúan los operadores físicos sobre las nuevas funciones $\tilde{\chi}(b, \phi)$.

Dado que trabajar con la teoría cuántica completa es difícil y se ha mostrado que en algunos modelos la teoría efectiva describe correctamente la evolución de los estados semiclásicos, entonces en los modelos anisotrópicos se estudiarán las soluciones a las ecuaciones efectivas. También para los modelos isotrópicos se estudian las ecuaciones efectivas con el fin de comparar con los modelos anisotrópicos. En la próxima sección se explica como se obtienen las teorías efectivas y se muestran los Hamiltonianos para todos los modelos cinemáticos de interés.

3.3. Formulación Efectiva

En esta sección justificamos el uso de las ecuaciones efectivas, empezando por una reseña histórica de como se obtuvieron las ecuaciones.

Cuando estudiamos las soluciones numéricas para FRW con $k = 0$ [17] se observó que los estados semiclásicos evolucionaban cerca de las trayectorias dadas por unas ecuaciones efectivas. Estas ecuaciones podían derivarse de un Hamiltoniano efectivo definido en un espacio de fase clásico. Luego observamos que lo mismo ocurría para los modelos de FRW con $k = 1, -1$ [68, 72]. Además, se logró mostrar que el modelo de FRW con $k = 0$ admitía solución analítica, en la cual la evolución de los observables tenía la misma forma funcional de la teoría efectiva. Al mismo tiempo, el autor de [69] muestra que para el caso de FRW con $k = 0$ el Hamiltoniano efectivo se puede derivar de la teoría cuántica considerando una formulación geométrica de la mecánica cuántica [18] y estados Gaussianos cinemáticos. Este es el método utilizado para derivar las ecuaciones efectivas de los modelos isotrópicos y anisotrópicos. Vamos a presentar un breve resumen de las ideas principales de este procedimiento; los detalles pueden verse en [69].

Se considera la formulación geométrica de la mecánica cuántica [18] en la cual el espacio de estados puros se representa como una variedad simpléctica infinito dimensional Γ_Q , este espacio tiene la estructura de un haz fibrado, donde la variedad base es el espacio de fase clásico Γ y las fibras sobre cada punto (q, p) son un espacio infinito dimensional de estados cuánticos para los cuales el valor esperado de los operadores $(\hat{q}, \hat{p})$ son (q, p) . Lo interesante de la dinámica cuántica es que

esta descrita por un flujo Hamiltoniano en la variedad simpléctica Γ_Q , donde el Hamiltoniano está dado por el valor esperado del operador cuántico Hamiltoniano como función de los estados. Para obtener las correcciones cuánticas (que estamos llamando ecuaciones efectivas), se toma una sección trasversal $\bar{\Gamma}$ que corresponda a un encaje de Γ en Γ_Q , tal que el flujo Hamiltoniano es aproximadamente tangencial a $\bar{\Gamma}$. Este flujo Hamiltoniano cuántico puede ser proyectado sobre $\bar{\Gamma}$ y provee las correcciones cuánticas a las ecuaciones clásicas. Lo complicado del asunto es escoger el encaje adecuado. Para definir este encaje en el modelo de FRW con $k = 0$ para un campo escalar sin masa, el autor de [69] considera estados Gaussianos cinemáticos centrados sobre puntos del espacio de fase clásico correspondientes a volúmenes grandes donde el campo gravitacional es débil, el ancho de las Gaussianas se toma de tal manera que la dispersión relativa sea pequeña, para que los estados estén concentrados alrededor de los puntos clásicos que corresponden a los grados de libertad gravitacionales y de materia. Utilizando estos estados se puede calcular el valor esperado del Hamiltoniano cuántico y de los operadores correspondientes a las variables básicas, con lo cual se puede definir el embebimiento ($\bar{\Gamma}$) de Γ en Γ_Q . Luego se muestra que el campo vectorial del Hamiltoniano cuántico es tangencial a $\bar{\Gamma}$, lo cual permite definir el Hamiltoniano efectivo como el valor esperado del Hamiltoniano cuántico sobre la subvariedad $\bar{\Gamma}$. Este Hamiltoniano resulta ser el mismo Hamiltoniano efectivo que se había encontrado anteriormente de manera empírica.

Este es el método utilizado para construir las teorías efectivas en los demás modelos isotrópicos y anisotrópicos. En este trabajo nos enfocamos en dos direcciones. La primera es estudiar las propiedades físicas de una familia de estados semiclásicos, entre estas propiedades se demuestra que las ecuaciones efectivas son una buena aproximación a los estados dinámicos. Se debe recordar que el método que explicamos anteriormente aplica solo para estados cinemáticos, es decir, que no necesariamente satisfacen las ligaduras. En nuestro caso mostramos que la dinámica de los estados físicos (que satisfacen las ligaduras), está bien descrita por las ecuaciones efectivas. El segundo enfoque corresponde a estudiar el espacio de soluciones de las ecuaciones efectivas para los modelos anisotrópicos de Bianchi II y IX. Para esto también debemos reproducir los resultados conocidos de Bianchi I.

Por último, queremos mencionar que hay otros resultados que justifican el estudio de las ecuaciones efectivas. Estos corresponden a la formulación de integrales de trayectoria para la cosmología cuántica de lazos [7], donde se ha demostrado que el Hamiltoniano que se deriva de las integrales de trayectoria es el mismo Hamiltoniano efectivo para los modelos de FRW con $k = -1, 0, 1$ [48] y por consiguiente satisfacen las mismas ecuaciones de movimiento. Esto también se demostró para Bianchi I [56] usando el mismo método de integrales de trayectoria.

Los resultados anteriores dan una buena justificación para estudiar las ecuaciones efectivas, ya que pueden dar información de la dinámica cuántica de los estados semiclásicos. En las siguientes secciones mostramos los Hamiltonianos efectivos para cada uno de los modelos que estamos considerando. También se comentan algunos de los resultados principales de cada modelo.

3.3.1. FRW $k = 0$

En el modelo FRW para un universo plano con contenido de materia un campo escalar sin masa, el Hamiltoniano efectivo es de la forma

$$\mathcal{C}_H = \frac{3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} V^2 \sin(\lambda\beta)^2 - \frac{p_\phi^2}{2}, \quad (3.112)$$

donde se toma el lapso $N = V$, con V el volumen físico y β su momento conjugado. Los corchetes de Poisson son $\{\beta, V\} = 4\pi G \gamma$ y $\{\phi, p_\phi\} = 1$. Las variables (V, β) estan relacionadas con las variables (c, p) como

$$V = p^{3/2}, \quad \beta = \frac{c}{\sqrt{p}}. \quad (3.113)$$

La ecuación de Friedmann efectiva esta dada por

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}\right), \quad (3.114)$$

la cual captura de manera muy precisa la dinámica de los estados semiclásicos [17]. $H = \dot{V}/3V$ es el parámetro de Hubble, $\rho = p_\phi^2/2V^2$ es la densidad y

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} \approx 0,41 \rho_p \quad (3.115)$$

es la densidad crítica, con ρ_p la densidad de Planck. De la ecuación de Friedmann efectiva (3.114) se puede demostrar que todas las trayectorias tienen un rebote cuando la densidad es igual a la densidad crítica ρ_{crit} , es decir, la densidad esta acotada para todas las soluciones, al igual que la expansión. Además la relatividad general se recupera cuando la densidad es mucho menor a la densidad crítica. Las soluciones analíticas de este modelo efectivo se muestran en [40] donde también se estudia el “límite continuo” $\lambda \rightarrow 0$.

3.3.2. FRW $k = 1$

Para el modelo de FRW cerrado existen dos teorías cuánticas distintas dependiendo del método de cuantización que se utilice para la curvatura F_{ab}^k . En la teoría cuántica donde la curvatura se calcula a partir de las holonomías y con el lapso $N = V$ se obtiene el Hamiltoniano efectivo [33]

$$\mathcal{C}_H^{(1)} = \frac{3V^2}{8\pi G\gamma^2\lambda^2} [\sin^2(\lambda\beta - D) - \sin^2 D + (1 + \gamma^2)D^2] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \quad (3.116)$$

con $D = \lambda\vartheta/V^{-1/3}$ y $\vartheta = (2\pi^2)^{1/3}$. En la otra teoría cuántica la curvatura se calcula a partir de la conexión, la cual se obtiene usando las holonomías (esta es la única forma de cuantizar los modelos de Bianchi II y IX). El Hamiltoniano efectivo con lapso $N = V$ es de la forma

$$\mathcal{C}_H^{(2)} = \frac{3V^2}{8\pi G\gamma^2\lambda^2} [\sin^2 \lambda\beta - 2D \sin \lambda\beta + (1 + \gamma^2)D^2] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0. \quad (3.117)$$

En ambas teorías (V, β) son iguales a las definidas en el modelo de FRW con $k = 0$ ($V = p^{3/2}$, $\beta = \frac{c}{\sqrt{p}}$, $\{\beta, V\} = 4\pi G\gamma$), solo que ahora V corresponde al volumen físico de todo el espacio.

Además de estas dos teorías efectivas, se pueden obtener otras dos teorías tomando el lapso $N = 1$ ya que esto lleva a dos teorías cuánticas que incluyen más potencias negativas del volumen (lo que se denomina correcciones de las tríadas inversas). El Hamiltoniano efectivo para el método de cuantización basado en la curvatura con lapso $N = 1$ es

$$\mathcal{C}_H^{(3)} = \frac{3A(V)V}{8\pi G\gamma^2\lambda^2} [\sin^2(\lambda\beta - D) - \sin^2 D + (1 + \gamma^2)D^2] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0. \quad (3.118)$$

El Hamiltoniano efectivo para el método de cuantización basado en la conexión con lapso $N = 1$ es

$$\mathcal{C}_H^{(4)} = \frac{3A(V)V}{8\pi G\gamma^2\lambda^2} [\sin^2 \lambda\beta - 2D \sin \lambda\beta + (1 + \gamma^2)D^2] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \quad (3.119)$$

con

$$A(V) = \frac{1}{2V_c}(V + V_c - |V - V_c|) = \begin{cases} V/V_c & V < V_c \\ 1 & V \geq V_c \end{cases} \quad (3.120)$$

Una discusión detallada sobre las cuantizaciones y las soluciones de las ecuaciones efectivas se puede encontrar en [33, 55].

Las ecuaciones de movimiento de las cuatro teorías efectivas se implementaron numéricamente con el fin de comparar entre sí la dinámica de las teorías. Además en el último capítulo se muestra la comparación con las soluciones de Bianchi IX cercanas a las soluciones isotrópicas.

3.3.3. Bianchi I and II

Los Hamiltonianos efectivos para Bianchi I y II se pueden escribir en una sola expresión como [76]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_{\text{BII}}} = & \frac{p_1 p_2 p_3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} \left[\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_3 c_3 \sin \bar{\mu}_1 c_1 \right] \\ & + \frac{1}{8\pi G \gamma^2} \left[\frac{\alpha (p_2 p_3)^{3/2}}{\lambda \sqrt{p_1}} \sin \bar{\mu}_1 c_1 - (1 + \gamma^2) \left(\frac{\alpha p_2 p_3}{2 p_1} \right)^2 \right] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \end{aligned}$$

donde el parámetro α permite distinguir entre Bianchi I ($\alpha = 0$) y Bianchi II ($\alpha = 1$). Con este Hamiltoniano y los corchetes de Poisson $\{c^i, p_j\} = 8\pi G \gamma \delta_j^i$ y $\{\phi, p_\phi\} = 1$, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento [76].

Uno de los objetivos es estudiar el espacio de soluciones de la teoría efectiva de Bianchi II, por esta razón las ecuaciones de movimiento y la discusión de sus soluciones se postergan.

3.3.4. Bianchi IX

Para el caso de Bianchi IX solo hay un método de cuantización de la curvatura que funciona. Este consiste en calcular la curvatura a partir de la conexión, la cual es calculada con las holonomías. Aun así, se pueden plantear dos teorías cuánticas distintas, una para el lapso $N = V$ que tiene el Hamiltoniano efectivo [76]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_{\text{BIX}}}^{(2)} = & -\frac{p_1 p_2 p_3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_3 c_3 \sin \bar{\mu}_1 c_1) \\ & - \frac{\vartheta}{4\pi G \gamma^2 \lambda} \left(\frac{(p_1 p_2)^{3/2}}{\sqrt{p_3}} \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \frac{(p_2 p_3)^{3/2}}{\sqrt{p_1}} \sin \bar{\mu}_1 c_1 + \frac{(p_3 p_1)^{3/2}}{\sqrt{p_2}} \sin \bar{\mu}_2 c_2 \right) \\ & - \frac{\vartheta^2 (1 + \gamma^2)}{8\pi G \gamma^2} \left[2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \left(\frac{p_1 p_2}{p_3} \right)^2 - \left(\frac{p_2 p_3}{p_1} \right)^2 - \left(\frac{p_3 p_1}{p_2} \right)^2 \right] \\ & + \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \end{aligned}$$

donde la etiqueta $^{(2)}$ significa que es la generalización a Bianchi IX del Hamiltoniano efectivo $\mathcal{C}_H^{(2)}$ de FRW con $k = 1$, es decir, cuando se considera el caso isotrópico de Bianchi IX ($p_1 = p_2 = p_3$ y $c_1 = c_2 = c_3$), se cumple que $\mathcal{C}_{H_{\text{BIX}}}^{(2)} = \mathcal{C}_H^{(2)}$.

Si se considera el lapso $N = 1$ entonces el Hamiltoniano clásico contiene más términos con potencias negativas de los p_i (como se muestra en la sección 3.1.5), lo cual lleva a que su equivalente cuántico contenga mas “correcciones” de las tríadas

inversas y por lo tanto su teoría efectiva es distinta, el Hamiltoniano efectivo esta dado por [55]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_{BIX}}^{(4)} = & -\frac{V^4 A(V) h^6(V)}{8\pi G V_c^6 \gamma^2 \lambda^2} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & -\frac{\vartheta A(V) h^4(V)}{4\pi G V_c^4 \gamma^2 \lambda} \left(p_1^2 p_2^2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + p_2^2 p_3^2 \sin \bar{\mu}_1 c_1 + p_1^2 p_3^2 \sin \bar{\mu}_2 c_2 \right) \\ & -\frac{\vartheta^2 (1 + \gamma^2) A(V) h^4(V)}{8\pi G V_c^4 \gamma^2} \times \\ & \quad \left(2V[p_1^2 + p_2^2 + p_3^2] - \left[(p_1 p_2)^4 + (p_1 p_3)^4 + (p_2 p_3)^4 \right] \frac{h^6(V)}{V_c^6} \right) \\ & + \frac{h^6(V) V^2}{2V_c^6} p_\phi^2 \approx 0 \end{aligned}$$

con $V_c = 2\pi\gamma\lambda\ell_{\text{Pl}}^2$, $\vartheta = (2\pi^2)^{1/3}$ y

$$\begin{aligned} h(V) &= \sqrt{V + V_c} - \sqrt{|V - V_c|}, \\ A(V) &= \frac{1}{2V_c} (V + V_c - |V - V_c|). \end{aligned}$$

La etiqueta ⁽⁴⁾ significa que es la generalización a Bianchi IX del Hamiltoniano efectivo $\mathcal{C}_H^{(4)}$ de FRW con $k = 1$. Aunque este Hamiltoniano en el caso isotrópico no se reduce al Hamiltoniano de FRW con $k = 1$, es decir, cuando se toma $p_1 = p_2 = p_3$ y $c_1 = c_2 = c_3$ en Bianchi IX entonces se obtiene que $\mathcal{C}_{H_{BIX}}^{(4)} \neq \mathcal{C}_H^{(4)}$. En el capítulo 6 se discute más al respecto. Para más detalles se puede consultar [55].

Al igual que en Bianchi I y II las ecuaciones de movimiento se obtiene del corchete de Poisson del Hamiltoniano con las variables básicas

$$\begin{aligned} p'_i &= \{p_i, \mathcal{C}_{H_{BIX}}\}, & c^{i'} &= \{c^i, \mathcal{C}_{H_{BIX}}\}, \\ \phi' &= \{\phi, \mathcal{C}_{H_{BIX}}\}, & p'_\phi &= \{p_\phi, \mathcal{C}_{H_{BIX}}\}, \end{aligned}$$

donde los corchetes de Poisson son $\{c^i, p_j\} = 8\pi G \gamma \delta_j^i$, $\{\phi, p_\phi\} = 1$. Las ecuaciones efectivas para estas dos teorías se implementaron numéricamente y son el objeto de estudio del capítulo 6.

Capítulo 4

Universo Plano

En este capítulo se estudia el modelo de Friedman-Robertson-Walker (FRW) con $k = 0$ en el contexto de la cosmología cuántica de lazos. El objetivo es explorar el límite semiclásico de la teoría. Este modelo es exactamente soluble y permite construir analíticamente estados coherentes (Gaussianos) para cada punto en el espacio clásico. De estos estados coherentes se seleccionan, a partir de algunos criterios físicos, aquellos que presentan un comportamiento semiclásico. Las propiedades de estos estados son estudiadas en la región clásica y cerca de la escala de energía de Planck. Además se consideran estados más generales que llamaremos “apretados” y se comparan con los estados Gaussianos. Se estudia la preservación de la semiclasicalidad a través del rebote y se muestra que es genérica para todos los estados estudiados. Finalmente se exploran las implicaciones que estos resultados tienen dependiendo de la topología del espacio, en particular se estudia como recuperar la simetría bajo reescalamiento presente en la teoría clásica cuando la topología del espacio es no compacta.

La estructura del capítulo es la siguiente: en la sección 4.1 se muestra la solución clásica del modelo; en la sección 4.2 se resumen los principales resultados del modelo soluble de cosmología cuántica de lazos; los estados Gaussianos se introducen en la sección 4.3, con los cuales se calculan los valores esperados y dispersiones de los operadores físicos; las condiciones de semiclasicalidad y el comportamiento cerca al rebote se muestran en la sección 4.4; en la sección 4.5 se estudia la dependencia bajo reescalamiento; la sección 4.6 esta dedicada a los estados apretados y su comparación con los estados Gaussianos y finalmente en la 4.7 se presentan las conclusiones.

4.1. Soluciones Clásicas

En esta sección se muestran las soluciones a la dinámica de un universo tipo FRW con $k = 0$, donde el contenido único de materia es un campo escalar sin masa y sin potencial de interacción.

El modelo que estamos considerando está descrito por el elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma^2, \quad (4.1)$$

donde $d\Sigma^2$ corresponde a una métrica plana sobre la 3-superficie Σ . El contenido de materia es un campo escalar sin masa ϕ que satisface la ecuación de Klein-Gordon. Las ecuaciones dinámicas de un universo homogéneo, isotrópico y espacialmente plano, cuyo único contenido de materia es un campo escalar sin masa como [30]

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi, \quad \text{con} \quad \dot{a} = \frac{da}{dt} \quad (4.2)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi), \quad \text{con} \quad \ddot{a} = \frac{d^2a}{dt^2}, \quad (4.3)$$

donde $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2$ y $p_\phi = \rho_\phi$ son el equivalente a una densidad y presión para el campo ϕ , el cual obedece la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = 0. \quad (4.4)$$

Para solucionar estas ecuaciones definamos la variable $\Psi = \dot{\phi}$, entonces la ecuación (4.4) toma la forma

$$\dot{\Psi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\Psi = 0. \quad (4.5)$$

La anterior es una ecuación separable que podemos solucionar fácilmente

$$\frac{\dot{\Psi}}{\Psi} = -3\frac{\dot{a}}{a} \implies \frac{dLn\Psi}{dt} = \frac{d(Ln|a^{-3}|)}{dt}, \quad (4.6)$$

cuya solución es

$$Ln\Psi = Ln|a^{-3}| + cte \implies \Psi(a) = \Psi_0 a^{-3}, \quad (4.7)$$

con Ψ_0 constante. Esta ecuación en términos de ϕ queda como

$$\dot{\phi}(a) = \frac{\Psi_0}{a^3}, \quad \text{con} \quad \Psi_0 = \dot{\phi}_0. \quad (4.8)$$

El tiempo $t = t_0$ es tomado cuando $a(t_0) = 1$.

Ahora hallemos el factor de escala en función del tiempo; para esto tomemos la ecuación (4.2) y reemplazemos el valor de la densidad $\rho_\phi = \dot{\phi}/2$ en ella

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\dot{\phi}^2}{2}. \quad (4.9)$$

Reemplazando la ecuación (4.8) en la ecuación anterior obtenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{6} \frac{\Psi_0^2}{a^6}. \quad (4.10)$$

Entonces

$$\frac{\dot{a}}{a} = \pm \frac{B}{a^3}, \text{ con } B^2 = \frac{8\pi G}{6} \Psi_0^2. \quad (4.11)$$

Esta ecuación se puede integrar como

$$\int_1^a \tilde{a}^2 d\tilde{a} = \pm \int_{t_0}^t B d\tilde{t} \implies \frac{1}{3}(a^3 - 1) = \pm B(t - t_0), \quad (4.12)$$

cuya solución es

$$a(t) = [1 \pm 3B(t - t_0)]^{1/3}. \quad (4.13)$$

Con el fin de comparar con las soluciones de la cosmología cuántica de lazos hallemos ϕ como función de a . Para este fin usamos la regla de la cadena sobre $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{da} \frac{da}{dt}. \quad (4.14)$$

Si reemplazamos la ecuación (4.8) en el lado izquierdo y la ecuación (4.11) en el derecho obtenemos

$$\frac{d\phi}{da} = \pm \frac{\Psi_0}{Ba}. \quad (4.15)$$

Integrando esta ecuación

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} = \pm \frac{\Psi_0}{B} \int_1^a \frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}} \implies \phi - \phi_0 = \pm \frac{\Psi_0}{B} \ln|a|. \quad (4.16)$$

Entonces la solución es

$$\phi(a) = \pm \frac{\Psi_0}{B} \ln|a| + \phi_0, \quad (4.17)$$

de esta ecuación se puede despejar $a(\phi)$ y queda de la forma

$$a(\phi) = e^{\pm B(\phi - \phi_0)/\Psi_0}. \quad (4.18)$$

Por lo tanto el volumen queda como

$$V(\phi) = V_0 e^{\pm C(\phi - \phi_0)}, \text{ con } C = \text{constante}. \quad (4.19)$$

La forma de esta ecuación se utiliza para mostrar que la teoría cuántica y la teoría efectiva reproducen la dinámica clásica.

4.2. Teoría Cuántica

En esta sección se quiere describir el modelo cuántico que estamos considerando, es decir, el modelo de FRW con $k = 0$ acoplado a un campo escalar sin masa en el contexto de cosmología cuántica de lazos. La forma en que se presenta la teoría es autocontenida en el contexto de la cosmología y un poco distinta a la original [8]. En términos de las variables del espacio de fase usado en gravedad cuántica de lazos [12], que son la conexión A_a^i y la tríada-densidad E_i^a , el sector homogéneo se puede expresar como

$$A_a^i = c V_0^{-(1/3)} {}^\circ\omega_a^i \quad E_i^a = p V_0^{-(2/3)} \sqrt{{}^\circ q} {}^\circ e_i^a, \quad (4.20)$$

donde $({}^\circ e_i^a, {}^\circ\omega_a^i)$ son un conjunto de tríadas y cotríadas ortonormales y compatibles con la métrica auxiliar (plana para $k = 0$) ${}^\circ q_{ab}$. V_o es el volumen de la celda auxiliar introducida para definir la estructura simpléctica con respecto a ${}^\circ q_{ab}$. El espacio de fase está caracterizado por las variables conjugadas (c, p) que satisfacen $\{c, p\} = (8\pi G\gamma)/3$, con γ el parámetro de Barbero-Immirzi. La tríada p esta relacionada con el volumen físico V de la celda auxiliar por medio de la relación $|p| = V^{2/3} = V_o^{2/3} a^2$, donde a es el factor de escala. Sobre el espacio de soluciones clásicas la variable c tiene la forma $c = \gamma\dot{a}$. Es conveniente introducir otro conjunto de variables [8]

$$\beta := \varepsilon c/p^{1/2} \quad V = \varepsilon p^{3/2} \quad (4.21)$$

donde $\{\beta, V\} = 4\pi G\gamma^{-1}$, $\varepsilon = \pm 1$ es la orientación de las tríadas respecto a ${}^\circ\omega_a^i$. La ligadura clásica con lapso $N = V$ esta dada por

$$\mathcal{C} = \frac{3}{8\pi G\gamma^2} \beta^2 V^2 - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \quad (4.22)$$

donde el contenido de materia consiste de un campo escalar sin masa ϕ con momento conjugado p_ϕ , entonces el espacio de fase cinemático puede ser visto como un espacio de cuatro dimensiones con coordenadas (β, V, ϕ, p_ϕ) . La estrategia para cuantizar es definir un operador asociado a $\hat{\mathcal{C}}$ y buscar estados que sean aniquilados por este operador de ligadura. En la representación (β, ϕ) los operadores básicos son representados como

$$\hat{\beta} \cdot \chi(\beta, \phi) = \beta \chi(\beta, \phi) \quad (4.23)$$

$$\hat{V} \cdot \chi(\beta, \phi) = -i4\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2 \frac{\partial}{\partial\beta} \chi(\beta, \phi) \quad (4.24)$$

$$\hat{p}_\phi \cdot \chi(\beta, \phi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \chi(\beta, \phi) \quad (4.25)$$

¹Aquí se adopta la notación para la variable β introducida en [38].

Sin embargo el operador $\hat{\beta}$ no está bien definido por que β es periódico con periodo $2\pi/\lambda$, entonces debe ser reemplazado por un operador bien definido $\hat{\tilde{\beta}} := \sin(\lambda\beta)/\lambda$ (ver [8] para los detalles). Por tanto la ligadura cuántica para el modelo soluble de cosmología cuántica de lazos es [8]

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \cdot \chi(\beta, \phi) = \alpha^2 \left(\frac{\sin(\lambda\beta)}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \beta} \right)^2 \cdot \chi(\beta, \phi), \quad (4.26)$$

con $\beta \in (0, \pi/\lambda)$, $\alpha := \sqrt{12\pi G}$. En la literatura de la CCL el valor de λ es tomado tal que $\lambda^2 = \Delta$ corresponde al valor del autovalor mínimo del operador de área de gravedad cuántica de lazos (correspondiente a un lado de espín 1/2). Con esta elección del parámetro libre se obtiene que $\lambda^2 = 4\sqrt{3}\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2$. Si definimos

$$x = \alpha^{-1} \ln |\tan(\lambda\beta/2)|, \quad (4.27)$$

la ligadura cuántica se puede reescribir en la forma de Klein-Gordon

$$\partial_\phi^2 \chi(x, \phi) = \partial_x^2 \chi(x, \phi). \quad (4.28)$$

Como es usual en este sistema, la evolución clásica del campo escalar ϕ es una función monótona y puede jugar el rol de reloj interno. En la teoría cuántica también se utiliza para caracterizar la evolución de un estado con respecto a ϕ . Una solución general $\chi(x, \phi)$ a la ecuación (4.28) se puede descomponer en una función que se mueve a la derecha y otra a la izquierda

$$\chi = \chi_+(\phi + x) + \chi_-(\phi - x) := \chi_+(x_+) + \chi_-(x_-). \quad (4.29)$$

Los estados físicos que vamos a considerar son las soluciones de frecuencia positiva de la ecuación (4.28). Dado que no hay fermiones en el modelo las orientaciones de las tríadas son indistinguibles y $\chi(x, \phi)$ satisface la relación $\chi(-x, \phi) = -\chi(x, \phi)$. Entonces se puede escribir $\chi(x, \phi) = (F(x_+) - F(x_-))/\sqrt{2}$, con F una función arbitraria que sea solución de frecuencia positiva ². El producto interno físico sobre las soluciones esta dado por [8]

$$(\chi_1, \chi_2)_{\text{phy}} = -i \int_{\phi=\phi_0} [\bar{\chi}_1(x, \phi) \partial_\phi \chi_2(x, \phi) - (\partial_\phi \bar{\chi}_1(x, \phi)) \chi_2(x, \phi)] dx \quad (4.30)$$

$$= i \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_x \bar{F}_1(x_+) F_2(x_+) - \partial_x \bar{F}_1(x_-) F_2(x_-)] dx. \quad (4.31)$$

²Para ser precisos, $F(x)$ es una función de momento positivo, i. e., con transformada de Fourier que tiene solo soporte sobre el eje positivo, con esta elección la solución a la ecuación de ligadura se hace de frecuencia positiva.

Ahora se puede calcular el valor esperado y las fluctuaciones de los operadores fundamentales tales como $\hat{V}|_\phi$, $\hat{x}$ y $\hat{p}_\phi$, donde $\hat{x}$ esta relacionado con el operador $\hat{\beta}$. Para cualquier estado sobre el espacio de Hilbert físico el valor esperado del operador de volumen a un tiempo ϕ es

$$\langle \hat{V} \rangle_\phi := (\chi, \hat{V}|_\phi \chi)_{\text{phy}} = 2\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2 (\chi, |\hat{\nu}|\chi)_{\text{phy}}, \quad (4.32)$$

donde $|\hat{\nu}|$ es el operador de valor absoluto que se obtiene de

$$\hat{\nu} = -\frac{2\lambda}{\alpha} \cosh(\alpha x) i \partial_x. \quad (4.33)$$

Usando el producto interno (4.31), el valor esperado de $|\hat{\nu}|$ esta dado por

$$\begin{aligned} (\chi, |\hat{\nu}|\chi)_{\text{phy}} &= i \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_x \bar{F}(x_+) (\hat{\nu} F(x_+)) - \partial_x \bar{F}(x_-) (-\hat{\nu} F(x_-))] dx \\ &= \frac{2\lambda}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_x \bar{F}(x_+) \cosh(\alpha x) \partial_x F(x_+) + \partial_x \bar{F}(x_-) \cosh(\alpha x) \partial_x F(x_-)] dx \\ &= \frac{4\lambda}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dF}{dx} \right|^2 \cosh(\alpha(x - \phi)) dx. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que $|\hat{\nu}| = |\hat{\nu}|^\dagger$. De estas expresiones se puede hallar el valor esperado de $\hat{V}^2$ y la dispersión del operador de volumen,

$$\langle \hat{V} \rangle_\phi = V_+ e^{\alpha\phi} + V_- e^{-\alpha\phi} \quad (4.34)$$

$$\langle \hat{V}^2 \rangle_\phi = W_0 + W_+ e^{2\alpha\phi} + W_- e^{-2\alpha\phi} \quad (4.35)$$

$$(\Delta \hat{V})_\phi^2 = Y_0 + Y_+ e^{2\alpha\phi} + Y_- e^{-2\alpha\phi}, \quad (4.36)$$

con $V_\pm$, W_0 , $W_\pm$, Y_0 y $Y_\pm$ reales y positivos, los cuales para estados normalizados tienen la forma

$$\begin{aligned} V_\pm &= \frac{4\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\lambda}{\alpha} \int \left| \frac{dF}{dx} \right|^2 e^{\mp\alpha x} dx \\ W_0 &= \frac{i2\pi\gamma^2\ell_{\text{Pl}}^4\lambda^2}{3G} \int \left[\frac{d^2\bar{F}}{dx^2} \frac{dF}{dx} - \frac{d\bar{F}}{dx} \frac{d^2F}{dx^2} \right] dx \\ W_\pm &= \frac{i\pi\gamma^2\ell_{\text{Pl}}^4\lambda^2}{3G} \int e^{\mp 2\alpha x} \left[\frac{d^2\bar{F}}{dx^2} \frac{dF}{dx} - \frac{d\bar{F}}{dx} \frac{d^2F}{dx^2} \right] dx, \end{aligned}$$

con $Y_0 = W_0 - 2V_+V_-$ y $Y_\pm = W_\pm - V_\pm^2$. Notese que las expresiones para W_0 y $W_\pm$ corrigen a las mostradas en [39]. De la ecuación (4.34) se sigue que el valor esperado del volumen $\hat{V}|_\phi$ es grande para tiempos muy tempranos o muy tardíos

y tiene un mínimo distinto de cero $V_{\min} = 2(V_+V_-)^{1/2}/||\chi||^2$. El rebote ocurre en un tiempo $\phi_b^V = (2\alpha)^{-1} \ln(V_-/V_+)$ [8]. Alrededor de $\phi = \phi_b^V$ el valor esperado del volumen $\langle \hat{V} \rangle_\phi$ es simétrico. Similarmente $\langle \hat{V}^2 \rangle_\phi$ es simétrico alrededor del valor $\phi_b^{V^2} = (4\alpha)^{-1} \ln(W_-/W_+)$. Una observación trivial es que si $\phi_b^V = \phi_b^{V^2}$ entonces la diferencia en los valores de la dispersión relativa asintótica que es

$$D := \lim_{\phi \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{(\Delta \hat{V})}{\langle \hat{V} \rangle} \right)_\phi^2 - \left(\frac{(\Delta \hat{V})}{\langle \hat{V} \rangle} \right)_{-\phi}^2 \right] = \frac{W_+}{V_+^2} - \frac{W_-}{V_-^2} \quad (4.37)$$

se hace cero. Se debe notar que esta cantidad mide el cambio en la semiclasicalidad al cruzar el rebote, como se explica en [39].

El otro observable que se debe considerar como fundamental es el observable conjugado a p_ϕ y dado que estamos tomando estados físicos, este no corresponde a ϕ como sucede en el caso cinemático. En su lugar la cantidad conjugada a p_ϕ es $x(\beta)$ como se ilustra en el ejemplo 2 del capítulo 2, por lo tanto es natural considerar la familia de operadores $\hat{x}_\phi$ correspondientes al observable x al tiempo ϕ . El valor esperado de $\hat{x}$ se define como

$$(\chi_1, \hat{x}\chi_2)_{\text{phy}} = \frac{1}{2}[(|\hat{x}|\chi_1, \chi_2)_{\text{phy}} + (\chi_1, |\hat{x}|\chi_2)_{\text{phy}}], \quad (4.38)$$

donde $|\hat{x}|F(x_+) = xF(x_+)$ y $|\hat{x}|F(x_-) = -xF(x_-)$. Los dos términos que se incluyen en la definición (4.38) son porque $|\hat{x}|$ no es simétrico. Ahora podemos calcular el valor esperado y las fluctuaciones de $\hat{x}$ sobre *cualquier* estado del espacio de Hilbert físico

$$\langle \hat{x} \rangle_\phi = \tilde{X}_1 - \phi \quad (4.39)$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_\phi = \tilde{X}_2 - 2\phi\tilde{X}_1 + \phi^2 \quad (4.40)$$

$$(\Delta \hat{x}) = \tilde{X}_2 - \tilde{X}_1^2, \quad (4.41)$$

con $\tilde{X}_1$ y $\tilde{X}_2$ reales (que dependen del estado) y constantes, dados por

$$\tilde{X}_1 = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(x) x \partial_x F(x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx \quad (4.42)$$

$$\tilde{X}_2 = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(x) x^2 \partial_x F(x) dx - 2i \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 x dx, \quad (4.43)$$

para estados normalizados. Es importante resaltar que $\langle \hat{x} \rangle_\phi \propto \phi$ y $\langle \hat{x}^2 \rangle_\phi \propto \phi^2$ pero la dispersión $\Delta \hat{x}$ es independiente de ϕ , esta propiedad soporta la idea de que $\hat{x}$ es conjugado a $\hat{p}_\phi$. Finalmente se calcula el valor esperado de p_ϕ , el cual es un

observable de Dirac

$$\hat{p}_\phi = -i\hbar\partial_\phi \longrightarrow \langle \hat{p}_\phi \rangle = 2\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dF}{dx} \right|^2 dx \quad (4.44)$$

$$\hat{p}_\phi^2 = -\hbar^2\partial_\phi^2 \longrightarrow \langle \hat{p}_\phi^2 \rangle = -2\hbar^2 i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{F}}{dx} \frac{d^2 F}{dx^2} dx, \quad (4.45)$$

para estados normalizados

En las siguientes secciones será conveniente considerar estados físicos generales escritos como

$$\chi(x, \phi) = \int_0^\infty \tilde{F}(k) e^{-ik(\phi+x)} dk - \int_0^\infty \tilde{F}(k) e^{-ik(\phi-x)} dk, \quad (4.46)$$

donde la transformada de Fourier $\tilde{F}(k)$ contiene toda la información del estado. Las soluciones de frecuencia positiva de la ecuación (4.28) son aquellas en las que $\tilde{F}(k)$ tiene soporte solo sobre los k positivos. Por lo tanto es suficiente con especificar $\tilde{F}(k)$ para calcular todas las cantidades de interés $V_\pm, W_0, W_\pm, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \langle \hat{p}_\phi \rangle$ y $\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle$.

Existen varias estrategias para definir los estados semiclásicos, las cuales pueden ser clasificadas en términos muy amplios [6] como:

- i) Estados semiclásicos cinemáticos, que están centrados en un punto de la superficie de ligadura $\bar{\Gamma}$.
- ii) Empezar con un estado semiclásico cinemático y proyectarlo a un estado semiclásico dinámico, por ejemplo usando el método de promedio de grupo.
- iii) Definir un estado semiclásico dinámico centrado en un punto del espacio de fase físico.
- iv) Si el sistema permite una parametrización entonces se define un estado inicial y se evoluciona para generar un estado físico.

Identificar cual de estos métodos es el más apropiado no es el propósito de este texto, el método elegido es el iv) dado que nuestro sistema admite una parametrización en términos del tiempo interno ϕ . Por consiguiente nuestra estrategia consiste en construir los estados iniciales adecuados y generar los estados físicos. Además se impondrán condiciones motivadas físicamente para seleccionar los estados que se comportan de manera semiclásica, esta clase de estados iniciales serán estados coherentes.

4.3. Estados Iniciales Gaussianos *

En esta sección queremos considerar estados físicos contruidos a partir de estados iniciales dados por *estados Gaussianos generalizados* definidos como

$$\tilde{F}(k) = \begin{cases} k^n e^{-(k-k_0)^2/\sigma^2} e^{ipk}, & \text{para } k > 0, \\ 0, & \text{para } k \leq 0, \end{cases} \quad (4.47)$$

con $\sigma > 0, k_0 > 0$ y $n = 0, 1, 2, \dots$. Por lo tanto estamos considerando estados centrados alrededor del punto k_0 con ‘dispersión’ σ .

Los estados físicos que se consideran son los que se hacen cero en el eje negativo de k , de manera que sean soluciones de frecuencia positiva. Sin embargo para tener control analítico sobre todas las cantidades se van a considerar estados Gaussianos para todos los valores de k , de manera que todas las cantidades que calculemos serán aproximaciones a las cantidades reales (como se mostrará en detalle), esta aproximación es justificada cuando los valores de k_0 y σ son tales que la función de onda tiene una contribución despreciable del eje negativo. Un análisis detallado de los errores introducidos por esta simplificación es presentado en el apéndice A.2; de tal manera que de ahora en adelante para obtener estados que son aproximadamente de frecuencia positiva imponemos la condición $k_0 \gg \sigma$.

La norma de un estado en el espacio k esta dada por

$$(\tilde{\chi}, \tilde{\chi})_{\text{phy}} = -2i \int_0^\infty \tilde{F}(k) i k \tilde{F}(k) dk = 2 \int_0^\infty k |\tilde{F}(k)|^2 dk.$$

Si se toma como estado inicial en el espacio k el estado Gaussiano (4.47) entonces

$$(\tilde{\chi}, \tilde{\chi})_{\text{phy}} = 2 \int_0^\infty k k^{2n} e^{-2(k-k_0)^2/\sigma^2} dk,$$

esta integral puede ser aproximada por, $(\tilde{\chi}, \tilde{\chi})_{\text{phy}} = 2 \int_{-\infty}^\infty k k^{2n} e^{-2(k-k_0)^2/\sigma^2} dk$, (ver apéndice A.2 para la justificación de esta aproximación); con el cambio de variables $u = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(k - k_0)$ la última integral toma la forma

$$\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2 = 2 \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right]^{2n+2} \int_{-\infty}^\infty \left[u + \frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma} \right]^{2n+1} e^{-u^2} du. \quad (4.48)$$

Ahora consideremos la norma del estado con $n = 0$

$$\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2 = 2 \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right]^2 \int_{-\infty}^\infty \left[u + \frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma} \right] e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi} k_0 \sigma. \quad (4.49)$$

El estado normalizado con $n = 0$ puede ser usado para calcular de forma explícita los valores esperados y dispersiones de varios operadores físicos de interés. Los resultados para otros valores de n se muestran en el apéndice A.3.

4.3.1. Valor Esperado de los Observables Básicos

Ahora calcularemos el valor esperado de los observables básicos para los estados Gaussianos de manera que podamos obtener una mejor comprensión de los parámetros libres (k_0, σ, p, n) que caracterizan el estado. El primer observable que vamos a considerar es p_ϕ , que es un observable de Dirac (y por lo tanto una constante de movimiento). Este operador es representado como $\hat{p}_\phi \cdot \chi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \chi$ y su valor esperado esta dado por

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle = \frac{2\hbar}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dF}{dx} \right|^2 dx.$$

Usando el teorema de Parseval se obtiene que

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle = \frac{2\hbar}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\tilde{F}(k)|^2 dk. \quad (4.50)$$

Si tomamos nuestro estado inicial $\tilde{F}(k) = k^n e^{-(k-k_0)^2/\sigma^2} e^{ipk}$, la integral anterior toma la forma

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle = \frac{2\hbar}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n+2} e^{-2(k-k_0)^2/\sigma^2} dk. \quad (4.51)$$

Con el cambio de variables $u = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(k - k_0)$ el valor esperado (4.51) esta dado por

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle = \frac{2\hbar}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right]^{2n+3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u + \frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma} \right]^{2n+2} e^{-u^2} du. \quad (4.52)$$

En el caso de un estado Gaussiano puro ($n = 0$) se obtiene

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle = \frac{2\hbar}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right]^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left[u + \frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma} \right]^2 e^{-u^2} du \quad (4.53)$$

$$= \hbar k_0 \left[1 + \frac{\sigma^2}{4k_0^2} \right]. \quad (4.54)$$

Lo cual nos dice que dada la aproximación que estamos considerando ($k_0 \gg \sigma$) se obtiene que $\langle \hat{p}_\phi \rangle \approx \hbar k_0$. Por lo tanto, como era de esperarse, el parámetro k_0 da en buena medida el valor esperado de p_ϕ , que puede ser entendido como la variable conjugada a x en el espacio de fase reducido (ver ejemplo 2 del capítulo 2). Estas observaciones también sugieren que podemos seleccionar la trayectoria clásica que será aproximada por el estado cuántico, esto se puede hacer especificando del par $(\bar{x}, \bar{p}_\phi)$ en el tiempo $\phi = 0$ y luego tomar los parámetros (p, k_0) apropiadamente tal

que el estado este centrado alrededor del punto clásico. Si fijamos un parámetro de tolerancia δ que acote que tan lejos del valor clásico $\bar{p}_\phi$ esta el valor esperado de los operadores, tal que $|\langle \hat{p}_\phi \rangle - \bar{p}_\phi| < \delta$, entonces existe un intervalo en el cual k_0 puede tomar valores. Para $\bar{p}_\phi \gg \hbar\sigma$ y $\bar{p}_\phi \gg \delta$ se tiene que el intervalo en el que k_0 puede tomar valores esta dado por $\bar{p}_\phi/\hbar - \delta/\hbar + (\delta^2 - \hbar^2\sigma^2)/4\hbar\bar{p}_\phi \leq k_0 \leq \bar{p}_\phi/\hbar + \delta/\hbar + (\delta^2 - \hbar^2\sigma^2)/4\hbar\bar{p}_\phi$.

Nótese que si estas condiciones se satisfacen entonces el intervalo es en buena aproximación de ancho $2\delta/\hbar$ y centrado alrededor de $\bar{p}_\phi/\hbar$.

Si queremos calcular la dispersión del operador p_ϕ podemos empezar por calcular

$$\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle = -\frac{2\hbar^2 i}{\|\chi\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{F}}{dx} \frac{d^2 F}{dx^2} dx = \frac{2\hbar^2}{\|\chi\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^3 |\tilde{F}(k)|^2 dk. \quad (4.55)$$

Usando los estados Gaussianos generalizados la integral toma la forma

$$\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle = \frac{2\hbar^2 i}{\|\chi\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n+3} e^{-2(k-k_0)^2/\sigma^2} dk. \quad (4.56)$$

La cual se puede reescribir como

$$\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle = \frac{2\hbar^2 i}{\|\chi\|_{\text{phy}}^2} \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right]^{2n+4} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u + \frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma} \right]^{2n+3} e^{-u^2} du.$$

Si tomamos $n = 0$

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}_\phi^2 \rangle &= \frac{2\hbar^2 i}{\|\chi\|_{\text{phy}}^2} \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right]^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left[u + \frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma} \right]^3 e^{-u^2} du \\ &= \hbar^2 k_0^2 \left[1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Nótese que para k_0 grande ($k_0 \gg \sigma$) se obtiene $\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle \approx \hbar^2 k_0^2$.

Ahora podemos calcular la dispersión del observable $\hat{p}_\phi$ como $(\Delta \hat{p}_\phi)^2 = \langle \hat{p}_\phi^2 \rangle - \langle \hat{p}_\phi \rangle^2$.

Para $n = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{p}_\phi)^2 &= \hbar^2 k_0^2 \left[1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2} \right] - \hbar^2 k_0^2 \left[1 + \frac{\sigma^2}{4k_0^2} \right]^2 \\ &= \frac{\hbar^2 \sigma^2}{4} \left[1 - \frac{\sigma^2}{4k_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Esta es una constante. Adviértase que para $k_0 \gg \sigma$ la dispersión es $\Delta p_\phi \approx \frac{\hbar\sigma}{2}$, lo que nos dice que el parámetro σ tiene la interpretación de ser la dispersión del observable asociado a la variable k , que para este caso corresponde a p_ϕ .

Recordemos que la cantidad conjugada a p_ϕ es $x(\beta)$ en el modelo reducido, por lo tanto es natural considerar la familia de operadores $\hat{x}_\phi$ que corresponden al observable x al tiempo ϕ . Aunque lo más natural es en realidad definir el operador simétrico que actúa sobre los estados iniciales $\tilde{F}$, el cual en la representación k es el operador definido en la ecuación (4.39), que puede escribirse como

$$\hat{x}\tilde{F} := \left(\frac{i\partial}{\partial k} + \frac{i}{2k} - \phi \right) \cdot \tilde{F}. \quad (4.59)$$

Los dos primeros términos vienen del reemplazo de la ecuación (4.39) en la ecuación (4.42). Ahora es directo calcular el valor esperado del operador $\hat{x}$ sobre los estados Gaussianos generalizados, que para todos los valores de n tiene la forma

$$\langle \hat{x} \rangle = -p - \phi, \quad (4.60)$$

lo cual confirma que el parámetro $-p$ representa el punto $\bar{x}$ en el espacio x donde esta centrada la Gaussiana (cuando $\phi = 0$). Este valor esperado también corresponde a la dinámica clásica (dada por la teoría efectiva) de la variable x (con $p_\phi > 0$). Ahora calculemos el valor esperado del operador $\hat{x}^2$, el cual está dado por

$$\hat{x}^2 = \left(\frac{i\partial}{\partial k} + \frac{i}{2k} - \phi \right)^2 = -\frac{\partial^2}{\partial k^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{1}{4k^2} - 2\phi \left(\frac{i\partial}{\partial k} + \frac{i}{2k} \right) + \phi^2.$$

Es importante resaltar dos problemas que surgen cuando se considera el operador definido en (4.59), el primero es el término de derivada y el segundo es el factor $1/k$ en el operador. El término de derivada implica que se necesita considerar con cuidado la condición de frontera en $k = 0$, tal que el término de frontera que surge (cuando se integra por partes) no contribuya, en particular; se debe tener para el operador $\hat{x}$ que $(\bar{g} f k)|_{k=0} = 0$, esta condición es naturalmente satisfecha por todos los estados con $n \geq 0$. El término $1/k$ impone algunas condiciones de decaimiento en el origen ($k = 0$) de manera que las integrales sean finitas. Por lo tanto aún cuando el valor esperado de $\hat{x}$ está bien definido para la Gaussiana $n = 0$, este estado no está en el dominio del operador, i. e., el estado que resulta de hacer actuar el operador $\hat{x}$ sobre el estado con $n = 0$ es no normalizable y por lo tanto no pertenece al espacio de Hilbert físico. Entonces se concluye que para tener al operador $\hat{x}$ en el conjunto de observables físicos se debe excluir el estado $n = 0$ y considerar solo $n \geq 1$.

En el caso $n = 1$ es directo (pero largo) calcular el valor esperado de x^2 , donde se obtiene que

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = p^2 + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{2k_0^2}\right)}{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2}\right)} + 2p\phi + \phi^2 \quad (4.61)$$

de esta forma se tiene que la dispersión esta dada por

$$(\Delta \hat{x})^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{2k_0^2}\right)}{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2}\right)}, \quad (4.62)$$

lo que nos dice que el parámetro σ tiene la interpretación esperada como el inverso de la dispersión del observable x . Esto se da cuando $k_0 \gg \sigma$ y por lo tanto el segundo término en la expresión anterior es muy cercano a uno.

Las relaciones de incertidumbre para los observables $\hat{p}_\phi$ y $\hat{x}$ (para $n = 1$) están dadas por

$$(\Delta \hat{p}_\phi)^2 (\Delta \hat{x})^2 = \frac{\hbar^2}{4} \frac{\left(1 + \frac{9\sigma^4}{16k_0^4} + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2} - \frac{9\sigma^6}{64k_0^6}\right) \left(1 + \frac{3\sigma^2}{2k_0^2}\right)}{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2}\right)^3}. \quad (4.63)$$

Nótese que si $k_0 \gg \sigma$ entonces la relación de incertidumbre

$$(\Delta \hat{p}_\phi)(\Delta \hat{x}) \geq \frac{\hbar}{2}$$

está muy cerca de ser saturada, como veremos en la siguiente sección estas condiciones son necesarias para que los estados Gaussianos generalizados representen un estado semiclásico aceptable.

Para resumir, dado un punto $(\bar{p}_\phi, \bar{\beta})$ sobre $\hat{\Gamma}$ se puede definir una familia de estados coherentes (etiquetados por n) con coeficientes (k_0, p) . Estos estados están centrados en el punto $(\bar{p}_\phi, \bar{\beta})$ tal que $k_0 = \bar{p}_\phi / \hbar$ y $-p = \bar{x} := \frac{1}{\alpha} \ln |\tan(\lambda \bar{\beta} / 2)|$. Todavía queda el parámetro σ libre, excepto por la condición intermedia de que debe ser pequeño comparado con k_0 . Además, se deben imponer condiciones adicionales sobre los estados Gaussianos para seleccionar los estados semiclásicos.

4.3.2. Operador de Volumen

Empecemos por considerar el operador $\hat{V}|_\phi$ que corresponde al volumen en el tiempo ϕ . El valor esperado de este operador esta dado por la ecuación (4.34), de manera que es suficiente con calcular las constantes $V_\pm$ dadas por

$$V_\pm = \frac{\kappa}{\alpha \|\chi\|_{\text{phy}}^2} \int \left| \frac{dF}{dx} \right|^2 e^{\mp \alpha x} dx, \quad \text{con} \quad \kappa = 4\pi \gamma \ell_{\text{Pl}}^2 \lambda,$$

Estas se pueden escribir como

$$V_\pm = \frac{\tilde{V}_\pm}{\|\chi\|_{\text{phy}}^2} = \frac{1}{\|\chi\|_{\text{phy}}^2} \frac{\kappa}{\alpha} \int k(k \mp i\alpha) \tilde{F}(k) \tilde{F}(k \mp i\alpha) dk. \quad (4.64)$$

Si tomamos el estado $\tilde{F}(k) = k^n e^{-(k-k_0)^2/\sigma^2} e^{ipk}$

$$\tilde{V}_{\pm} = \frac{\kappa}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} k k^n e^{-(k-k_0)^2/\sigma^2} e^{-ipk} [k \mp i\alpha] [k \mp i\alpha]^n e^{-(k \mp i\alpha - k_0)^2/\sigma^2} e^{ip(k \mp i\alpha)} dk,$$

que puede ser reescrito como

$$\tilde{V}_{\pm} = \frac{\kappa}{\alpha} e^{\pm p\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} [k(k \mp i\alpha)]^{n+1} e^{-(k-k_0)^2/\sigma^2} e^{-(k \mp i\alpha - k_0)^2/\sigma^2} dk, \quad (4.65)$$

es directo ver que al hacer el cambio de variables $u = \sqrt{2}k - \sqrt{2}k_0 \mp \frac{i\alpha}{\sqrt{2}}$ la integral (4.65) queda de la forma

$$\tilde{V}_{\pm} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}\alpha} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} [2u^2 + 4\sqrt{2}k_0 u + 4k_0^2 + \alpha^2]^{n+1} e^{-u^2/\sigma^2} du.$$

Si tomamos $n = 0$

$$\tilde{V}_{\pm} = \frac{\kappa}{\alpha\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4}\right) e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} [2u^2 + 4\sqrt{2}k_0 u + 4k_0^2 + \alpha^2] e^{-u^2/\sigma^2} du, \quad (4.66)$$

de donde se obtiene que

$$\tilde{V}_{\pm} = \frac{\kappa}{\alpha 4\sqrt{2}} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \sqrt{\pi} (\sigma^3 + 4k_0^2\sigma + \alpha^2\sigma).$$

Si tomamos un estado normalizado usando la ecuación (4.49) el resultado es

$$V_{\pm} = \frac{\tilde{V}_{\pm}}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} = \frac{\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\lambda}{2\alpha} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \left[4k_0 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{k_0}\right]. \quad (4.67)$$

Para calcular la dispersión del operador de volumen es necesario calcular tres integrales W_0, W_+, W_- . Empecemos por W_0

$$W_0 = \frac{i\alpha_2}{\|\chi\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^2\bar{F}}{dx^2} \frac{dF}{dx} - \frac{d\bar{F}}{dx} \frac{d^2F}{dx^2} \right] dx, \quad \text{con } \alpha_2 = \frac{2\pi\gamma^2\ell_{\text{Pl}}^4\lambda^2}{3G}, \quad (4.68)$$

que se puede reescribir como

$$W_0 = \frac{\tilde{W}_0}{\|\chi\|_{\text{phy}}^2} = \frac{2\alpha_2}{\|\chi\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^3 |\tilde{F}(k)|^2 dk. \quad (4.69)$$

Esta es la misma integral de la ecuación (4.55), por lo tanto para un estado normalizado con $n = 0$ solo se necesita reemplazar $\hbar^2$ por α_2 en (4.57) para obtener

$$W_0 = \alpha_2 k_0^2 \left[1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2} \right]. \quad (4.70)$$

Ahora calculemos $W_{\pm} = \tilde{W}_{\pm} / \|\chi\|_{\text{phy}}^2$, donde

$$\tilde{W}_{\pm} = i\alpha_3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp 2\alpha x} \left[\frac{d^2 \bar{F}}{dx^2} \frac{dF}{dx} - \frac{d\bar{F}}{dx} \frac{d^2 F}{dx^2} \right] dx, \quad \text{con } \alpha_3 = \frac{\pi \gamma^2 \ell_{\text{Pl}}^4 \lambda^2}{3G}, \quad (4.71)$$

se puede escribir como

$$\tilde{W}_{\pm} = \alpha_3 \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \left[\tilde{\bar{F}}(k)(k \mp 2i\alpha) \tilde{F}(k \mp 2i\alpha) + (k \pm 2i\alpha) \tilde{\bar{F}}(k \pm 2i\alpha) \tilde{F}(k) \right] dk.$$

Si tomamos como estado inicial $\tilde{F}(k) = k^n e^{-(k-k_0)^2/\sigma^2} e^{ipk}$ entonces

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\pm} &= \alpha_3 e^{\pm 2p\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} k^{n+2} e^{-(k-k_0)^2/\sigma^2} \\ &\quad [(k \mp 2i\alpha)^{n+1} e^{-(k \mp 2i\alpha - k_0)^2/\sigma^2} + (k \pm 2i\alpha)^{n+1} e^{-(k \pm 2i\alpha - k_0)^2/\sigma^2}] dk. \end{aligned}$$

Para hacer la integral

$$I(\pm) = \int_{-\infty}^{\infty} k^{n+2} e^{-(k-k_0)^2/\sigma^2} (k \pm 2i\alpha)^{n+1} e^{-(k \pm 2i\alpha - k_0)^2/\sigma^2} dk,$$

se usa el cambio de variables $u = \sqrt{2}(k - k_0 \pm i\alpha)$ y se obtiene

$$\begin{aligned} I(\pm) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + k_0 \mp i\alpha \right)^{n+2} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + k_0 \mp i\alpha \pm 2i\alpha \right)^{n+1} e^{-u^2/\sigma^2} e^{2\alpha^2/\sigma^2} \frac{du}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{e^{2\alpha^2/\sigma^2}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + k_0 \right)^2 + \alpha^2 \right]^{n+1} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + k_0 \mp i\alpha \right) e^{-u^2/\sigma^2} du. \end{aligned}$$

La parte real de $I(\pm)$ es

$$\text{Re}[I(\pm)] = \frac{e^{2\alpha^2/\sigma^2}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + k_0 \right)^2 + \alpha^2 \right]^{n+1} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + k_0 \right) e^{-u^2/\sigma^2} du. \quad (4.72)$$

Por lo tanto $\text{Re}[I(+)] = \text{Re}[I(-)]$ y la parte imaginaria de $I(\pm)$ es

$$\text{Im}[I(\pm)] = \mp \alpha \frac{e^{2\alpha^2/\sigma^2}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + k_0 \right)^2 + \alpha^2 \right]^{n+1} e^{-u^2/\sigma^2} du,$$

por lo que $\text{Im}[I(+)] = -\text{Im}[I(-)]$. Usando las partes reales e imaginarias se obtiene que la integral $\tilde{W}_{\pm}$ tiene la forma

$$\tilde{W}_{\pm} = \alpha_3 e^{\pm 2p\alpha} [I(+) + I(-)] = 2\alpha_3 e^{\pm 2p\alpha} \text{Re}[I(+)]. \quad (4.73)$$

Lo cual nos dice que $\tilde{W}_\pm$ es una cantidad real (como era de esperarse) y que solo es necesario calcular la parte real (4.72). Tomando $n = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbb{R}e[I(\pm)] &= \frac{e^{2\alpha^2/\sigma^2}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + k_0 \right)^2 + \alpha^2 \right] \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + k_0 \right) e^{-u^2/\sigma^2} du \\ &= \frac{e^{2\alpha^2/\sigma^2}}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{u^3}{2^{2/3}} + 3\frac{u^2}{2}k_0 + \frac{u}{\sqrt{2}}(3k_0^2 + \alpha^2) + (k_0^3 + \alpha^2 k_0) \right) e^{-u^2/\sigma^2} du.\end{aligned}$$

Si usamos las integrales del apéndice A.1 tenemos que

$$\mathbb{R}e[I(\pm)] = \frac{e^{2\alpha^2/\sigma^2} \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{4} k_0 \sigma^3 + k_0^3 \sigma + \alpha^2 k_0 \sigma \right), \quad (4.74)$$

de lo cual se obtiene que

$$\tilde{W}_\pm = \alpha_3 e^{\pm 2p\alpha} e^{2\alpha^2/\sigma^2} \sqrt{2\pi} \left(\frac{3}{4} k_0 \sigma^3 + k_0^3 \sigma + \alpha^2 k_0 \sigma \right). \quad (4.75)$$

Si se incluye la normalización del estado, el resultado es

$$W_\pm = \frac{\pi \gamma^2 \ell_{\text{Pl}}^4 \lambda^2}{3G} e^{\pm 2p\alpha} e^{2\alpha^2/\sigma^2} \left[k_0^2 + \frac{3}{4} \sigma^2 + \alpha^2 \right]. \quad (4.76)$$

De esta ecuación y de (4.67) se puede ver que la diferencia en la dispersión relativa asintótica (ecuación (4.37)) antes y después del rebote es cero, es decir, $D = 0$. Es importante resaltar que este resultado es general y aplica para cualquier estado Gaussiano que se defina como en (4.47) con $n = 0, 1, 2, \dots$.

4.4. Condiciones de Semiclasicalidad *

Hasta ahora hemos considerado estados Gaussianos generalizados como estados iniciales para los estados físicos en el modelo soluble con $k = 0$ y campo escalar sin masa en el contexto de la cosmología cuántica de lazos. Hemos visto que los parámetros que definen los estados tienen la interpretación esperada: el parámetro k_0 está relacionado con el valor esperado de $\hat{p}_\phi$; $-p$ con el valor esperado de $\hat{x}$ y $\hbar\sigma/2$ con la dispersión de $\hat{p}_\phi$. La única condición que se ha impuesto hasta el momento es $k_0 \gg \sigma$, la cual garantiza la validez de nuestra aproximación. También vimos que para los estados que satisfacen las condiciones de consistencia hay dos resultados: primero es que la dispersión relativa de p_ϕ es pequeña y segundo es que la relación de incertidumbre se satura ($\Delta \hat{p}_\phi)(\Delta \hat{x}) \approx \hbar/2$. Desde este punto de vista se puede afirmar que cualquier valor de k_0 y σ que satisfaga la relación $k_0 \gg \sigma$

es aceptable para definir un estado semiclásico. El propósito de esta sección es explorar esta cuestión y responder la siguiente pregunta: ¿Existen condiciones más restrictivas que se deban imponer sobre k_0 y σ para obtener estados semiclásicos? veremos que la respuesta es sí.

4.4.1. Volumen Asintótico

Para responder la pregunta anterior vamos a considerar el operador de volumen. Dado que todos los estados físicos tienen la propiedad que el valor esperado del operador de volumen $\hat{V}|_\phi$ a un tiempo ϕ tienen la misma forma funcional y por lo tanto para valores grandes de ϕ siguen la misma dinámica de las ecuaciones clásicas (i. e. las ecuaciones de Einstein) $V(\phi) \sim e^{\pm\alpha\phi}$, entonces se necesitan más criterios para seleccionar los estados que son semiclásicos. La estrategia es considerar la dispersión relativa $\left((\Delta\hat{V})/\langle\hat{V}\rangle\right)_\phi^2$ del operador de volumen a un tiempo ϕ . Se espera que los estados semiclásicos tengan una dispersión relativa muy pequeña “a tiempos largos”, cuando la dinámica se acerca a la dinámica clásica, por lo tanto es natural considerar la dispersión relativa asintótica dada por

$$\Delta_\pm := \lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\Delta\hat{V}}{\langle\hat{V}\rangle} \right)_\phi^2 = \frac{W_\pm}{V_\pm^2} - 1. \quad (4.77)$$

Es directo encontrar la expresión analítica de estas cantidades para nuestros estados (con $n = 0$)

$$\Delta_\pm = \frac{W_\pm}{V_\pm^2} - 1 = e^{\alpha^2/\sigma^2} \frac{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2} + \frac{\alpha^2}{k_0^2}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{4k_0^2}\right)^2} - 1. \quad (4.78)$$

Es importante resaltar que en la expresión previa hay una competencia entre el factor e^{α^2/σ^2} y la segunda parte. El exponencial se hace cercano a uno si σ es grande comparado con α pero puede hacerse muy grande si σ es muy pequeño. Entonces debe haber un valor óptimo $\tilde{\sigma}$ para el cual $\Delta_\pm$ tiene el valor menor. La forma de $\Delta_\pm$ puede ser vista en la figura 4.1. Otro aspecto importante para considerar es que no se ha impuesto ninguna condición sobre p_ϕ , es decir, no se ha dicho que tiene que ser “grande”, principalmente porque en la teoría clásica no hay una cantidad dimensional con respecto a la cual comparar. En la teoría cuántica con la introducción de $\hbar$ se tiene una escala, como se puede ver en la ecuación (4.78) y la expresión para $\langle\hat{p}_\phi\rangle$ la cantidad $\hbar\alpha$ tiene las mismas dimensiones de p_ϕ . Aún más, si se impone la condición $k_0 \gg \alpha$ todos los términos en paréntesis en la ecuación

(4.78) son pequeños. Entonces se puede tratar de encontrar el valor óptimo de σ . Nótese que la condición $k_0 \gg \alpha$ implica que $\langle \hat{p}_\phi \rangle \gg \hbar\alpha$.

La condición que la expresión (4.78) sea un extremo es una ecuación cúbica y la única solución físicamente interesante puede ser aproximada como

$$\tilde{\sigma}^2 \approx 2\alpha k_0 + \frac{2}{7}\alpha^2. \quad (4.79)$$

Dado que exigimos $k_0 \gg \alpha$ entonces el segundo término es muy pequeño comparado con el primero y se puede aproximar como $\tilde{\sigma} \approx \sqrt{2\alpha k_0}$. Es importante resaltar que esta condición selecciona un valor preferido de σ para el cual el estado es más semiclásico. Como se puede ver en la figura 4.1 si se hace σ ligeramente más pequeño (con el objetivo hacer la dispersión más pequeña) la dispersión relativa del volumen se hace más grande, haciendo que el estado no sea un buen candidato a ser semiclásico. Nótese también que la condición $k_0 \gg \alpha$ implica un valor grande del momento p_ϕ en la escala definida por $\hbar\alpha$.

Si introducimos el valor $\tilde{\sigma}$ en la dispersión relativa, entonces esta se puede aproximar como

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{(\Delta \hat{V})^2}{\langle \hat{V} \rangle^2} \right]_{\tilde{\sigma}} (k_0) \approx \frac{\alpha}{k_0}. \quad (4.80)$$

Esta aproximación tiene un error del 0,0002 % cuando $k_0 = 30000$ (en unidades de Planck) y se hace mejor la aproximación cuando k_0 se hace más grande. Esto nos da la relación precisa entre el parámetro k_0 que controla el valor esperado de p_ϕ y el valor mínimo de la dispersión relativa asintótica del operador de volumen. En la figura 4.1 se puede ver que para $\sigma^2 < \tilde{\sigma}^2$ la función es exponencial y para $\sigma^2 > \tilde{\sigma}^2$ la función tiene un comportamiento polinomial.

Para resumir, hemos visto que no cualquier estado Gaussiano sería un estado semiclásico aceptable. Con el fin de minimizar la dispersión relativa asintótica $\Delta_\pm$ se consideró el parámetro σ como función del otro parámetro relevante (k_0), es decir, tomar σ del orden de $\tilde{\sigma}^2 \sim 2\alpha k_0$. Los estados para los cuales esta condición no se satisface van a presentar en general grandes fluctuaciones cuánticas en la región donde se espera sean pequeñas (para tiempos largos antes y después del rebote), por lo cual no pueden ser considerados como semiclásicos.

Asumamos que se toma el valor $\tilde{\sigma}$ para σ , entonces surge la siguiente pregunta: ¿Se pueden reproducir algunas características de la “dinámica efectiva”? como se discutió antes, la ligadura Hamiltoniana “clásica” que se obtiene al reemplazar las cantidades clásicas como la conexión y la curvatura por sus correspondientes holonomias con un parámetro finito λ se puede ver como el punto de partida para la “cuantización polimérica” o el “límite clásico” de la teoría clásica cuantizada a la lazos. En cualquier caso se espera que los estados semiclásicos de la teoría cuántica

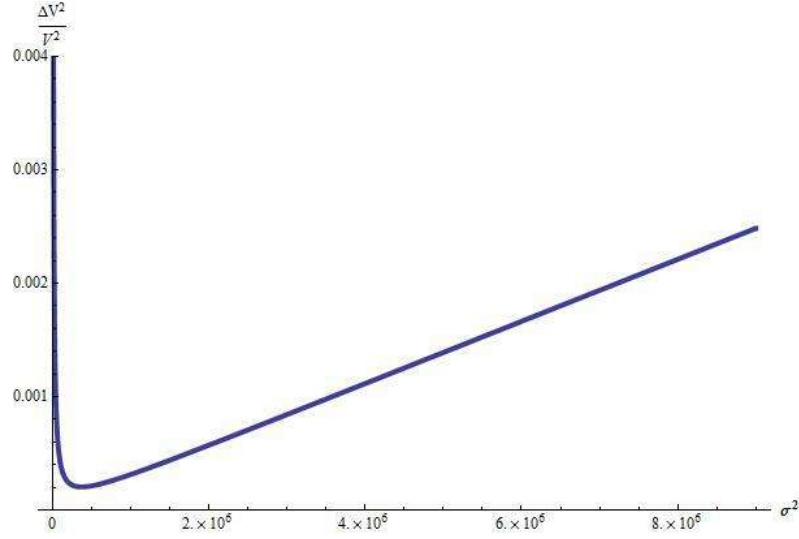


Figura 4.1: Dispersión relativa asintótica $\Delta_{\pm}$ como función de σ^2 , con $\alpha \approx 6,14$, $n = 0$, $p = 0$ y $k_0 = 30000$ en unidades de Planck. Esta función presenta dos comportamientos cerca al mínimo $\tilde{\sigma}$; la primera es que para $\sigma^2 < \tilde{\sigma}^2$ la función crece de forma exponencial; la segunda es que para $\sigma^2 > \tilde{\sigma}^2$ la función crece de forma polinomial.

describan de manera aproximada la “teoría clásica” en un regimen apropiado, en otras palabras, se quiere saber cuando la dinámica efectiva es una buena aproximación a la dinámica cuántica. Finalmente cabe hacerse la pregunta: ¿Se pueden tomar los parámetros de los estados Gaussianos de tal manera que la dinámica efectiva no sea una buena aproximación? La respuesta a esta pregunta se presenta en la siguiente sección.

4.4.2. ¿Qué tan Semiclásico es el Rebote?

Un problema importante es saber que tan semiclásico es el estado en el rebote, es decir, si el estado tiene una dispersión relativa asintótica $\Delta_{\pm}$ pequeña se quisiera saber cual es la dispersión relativa en el rebote y como es comparada con $\Delta_{\pm}$. Una gráfica de la dispersión relativa como función del tiempo interno ϕ se muestra en la figura 4.2, donde se puede apreciar que la dispersión relativa está acotada, tiene un valor mínimo en el rebote y tiende asintóticamente a $\Delta_{\pm}$. Por lo tanto, de manera sorpresiva el estado no se vuelve “más cuántico” en la escala de Planck sino que preserva su coherencia cuando cruza el rebote.

Tratemos de estimar un valor para la dispersión relativa comparando con su valor

asintótico. Se sabe que en el rebote para los estados Gaussianos $\phi_b = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{V_-}{V_+} \right| = \frac{1}{4\alpha} \ln \left| \frac{W_-}{W_+} \right|$ entonces $\langle \hat{V} \rangle_{\phi_b} = 2\sqrt{V_+ V_-}$ y

$$(\Delta \hat{V})_{\phi_b}^2 = W_0 - 4V_+ V_- + 2\sqrt{W_- W_+}. \quad (4.81)$$

Por lo tanto la dispersión relativa en el rebote es

$$\left. \frac{(\Delta \hat{V})^2}{\langle \hat{V} \rangle^2} \right|_{\phi_b} = \frac{W_0 + 2\sqrt{W_- W_+}}{4V_+ V_-} - 1. \quad (4.82)$$

Para $n = 0$ en el estado Gaussiano se obtiene

$$\left. \frac{(\Delta \hat{V})^2}{\langle \hat{V} \rangle^2} \right|_{\phi_b} - \frac{1}{2} \left. \frac{(\Delta \hat{V})^2}{\langle \hat{V} \rangle^2} \right|_{\phi \rightarrow \pm \infty} = \frac{e^{-\alpha^2/\sigma^2} \left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2} \right)}{2 \left(1 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{4k_0^2} \right)^2} - \frac{1}{2}. \quad (4.83)$$

Si se impone que $k_0 \gg \sigma \gg \alpha$, lo cual se satisface si tomamos $\sigma = \tilde{\sigma} = \sqrt{2\alpha k_0}$,

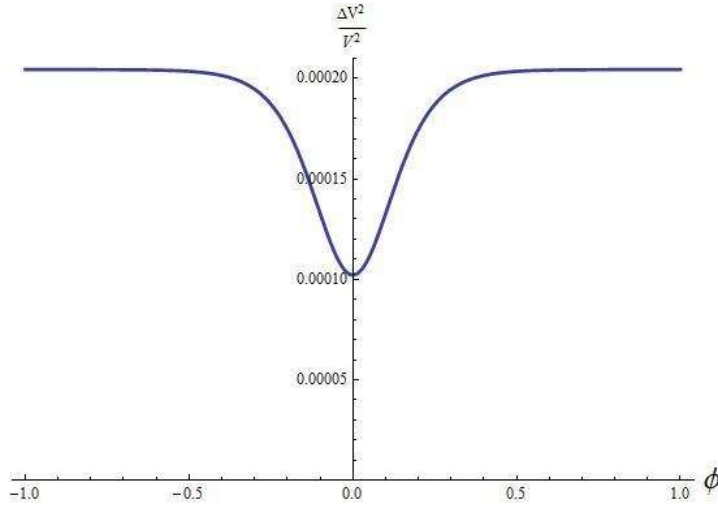


Figura 4.2: Dispersión relativa $(\Delta \hat{V})^2/\langle \hat{V} \rangle^2$ como función del tiempo interno ϕ con $\alpha \approx 6,14$ y $k_0 = 30000$ en unidades de Planck. Nótese que el mínimo está en el rebote (que corresponde a $\phi = 0$). El valor en el rebote es aproximadamente $1/2$ de su valor asintótico para todos los estados Gaussianos generalizados.

entonces la última ecuación toma la forma

$$\left. \frac{(\Delta \hat{V})^2}{\langle \hat{V} \rangle^2} \right|_{\phi_b} - \frac{1}{2} \left. \frac{(\Delta \hat{V})^2}{\langle \hat{V} \rangle^2} \right|_{\phi \rightarrow \pm \infty} = O(\alpha^2/\sigma^2) + O(\sigma^2/k_o^2).$$

Esto nos dice que cuando $k_0 \gg \sigma \gg \alpha$ la dispersión relativa del volumen en el rebote se hace

$$\left. \frac{(\Delta \hat{V})^2}{\langle \hat{V} \rangle^2} \right|_{\phi_b} \approx \frac{1}{2} \left. \frac{(\Delta \hat{V})^2}{\langle \hat{V} \rangle^2} \right|_{\phi \rightarrow \pm \infty} = \frac{1}{2} \Delta_{\pm}. \quad (4.84)$$

Esta aproximación tiene un error del 0,007 % para $k_0 = 30000$ y el error se hace más pequeño a medida que k_0 se hace más grande. Si se usan las ecuaciones (4.84) y (4.80) y se toma el valor de σ que minimiza la dispersión relativa, se obtiene

$$\left. \frac{(\Delta \hat{V})^2}{\langle \hat{V} \rangle^2} \right|_{\phi_b} \approx \frac{\alpha}{2k_0}.$$

Esta aproximación tiene un error del 0,01 % para $k_0 = 30000$ y el error se hace más pequeño a medida que k_0 se hace más grande. También se realizó una exploración numérica exhaustiva para $n \geq 1$ y se vió que la dispersión relativa igualmente se hace más pequeña en el rebote y es aproximadamente 1/2 de su valor asintótico. Por lo tanto se puede concluir que el estado que satisface la condición $k_0 \gg \sigma \gg \alpha$ exhibe también un comportamiento semiclásico en el rebote, aún más, la dispersión relativa en el rebote es aproximadamente 1/2 de su valor asintótico. Estos resultados analíticos dan soporte a las exploraciones numéricas reportadas en [16, 17].

4.4.3. Volumen y Densidad de Energía en el Rebote

Habiendo mostrado que los estados semiclásicos también se comportan semiclásicos en el rebote es natural preguntarse si el estado produce observables (a través de sus valores esperados) que siguen alguna trayectoria clásica. La respuesta es sí, pero la “teoría clásica” a la que aproxima no es la teoría clásica estandar (Relatividad General + campo escalar sin masa) sino a una *teoría efectiva* definida por una ligadura Hamiltoniana $\mathcal{C}_\lambda$ efectiva [69], la cual contiene la escala geométrica cuántica λ . La dinámica efectiva es generada por la ligadura Hamiltoniana

$$H_\lambda = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2\lambda^2} V^2 \sin^2(\lambda\beta) + \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0$$

y contiene varias características importantes. La primera es que todas las trayectorias tienen un rebote que ocurre a la misma densidad crítica $\rho_{\text{crit}} = \frac{3}{8\pi G\gamma^2\lambda^2}$; la segunda es que el volumen alcanza su valor mínimo en el rebote y su valor depende del observable p_ϕ y esta dado por

$$V_{\text{min}} = \sqrt{\frac{8\pi G\gamma^2\lambda^2}{6}} p_\phi. \quad (4.85)$$

En la teoría cuántica se vió que todos los estados físicos tienen un rebote y el valor mínimo del volumen esta dado por $V_{\text{bounce}} = 2\sqrt{V_+ V_-}$. Es natural entonces buscar el volumen correspondiente en el rebote para nuestra familia de estados Gaussianos. Es fácil mostrar que el valor mínimo del volumen es (con $n = 0$)

$$V_{\text{bounce}} = \frac{4\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\lambda}{\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} k_0 \left[1 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{4k_0^2} \right]. \quad (4.86)$$

Se puede reescribir como

$$V_{\text{bounce}} = \frac{4\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\lambda}{\alpha} k_0 + O(\alpha^2/\sigma^2) + O(\sigma^2/k_0^2) + O(\alpha^2/k_0^2).$$

Si retomamos el resultado previo ($\langle \hat{p}_\phi \rangle = \hbar k_0 + O(\sigma^2/k_0^2)$) y asumimos las condiciones de semiclassicalidad encontradas de la sección anterior ($\sigma \gg \alpha$ y $k_0 \gg \sigma$), entonces de la ecuación (4.86) se tiene que $V_{\text{bounce}} \approx \frac{4\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\lambda}{\alpha} \frac{\langle \hat{p}_\phi \rangle}{\hbar}$, usando el valor de $\alpha = \sqrt{12\pi G}$ se concluye que

$$V_{\text{bounce}} \approx V_{\text{min}}, \quad (4.87)$$

que es lo que deseabamos mostrar. Nótese que mientras mayor sea el valor de k_0 mejor será la aproximación. En otras palabras, si k_0 no fuera lo suficientemente grande (comparado con α) entonces no solo la dispersión relativa asintótica del volumen sería grande sino que también las ecuaciones efectivas no serían una buena aproximación a la dinámica cuántica.

Otro resultado importante para este modelo soluble es que la densidad de energía ρ esta acotada por la densidad crítica ρ_{crit} [8], es natural entonces preguntarse ¿cómo es el comportamiento de la densidad de energía en el rebote para los estados semiclásicos que estamos estudiando? Uno se imaginaría que mientras más semiclásico sea el estado, mayor es la densidad en el rebote. Ahora queremos explorar la validez de esta afirmación por medio del estudio de varias cantidades que miden la densidad. La cantidad más simple que uno puede definir es $\tilde{\rho} = \frac{\langle \hat{p}_\phi \rangle^2}{2\langle \hat{V} \rangle^2}$, la cual se demostró que estaba acotada por ρ_{crit} [8], es directo calcular el valor de esta densidad para los estados con $n = 0$

$$\tilde{\rho} = \rho_{\text{crit}} \frac{e^{-\alpha^2/\sigma^2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{4k_0^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{4k_0^2} \right)^2}. \quad (4.88)$$

Nótese que $\tilde{\rho} < \rho_{\text{crit}}$ y cuando $k_0 \rightarrow \infty$ la densidad se acerca a su valor máximo ρ_{crit} . Se puede ver que al dejar fijo k_0 y libre a σ , cuando σ crece la densidad crece y se aproxima a ρ_{crit} . Por lo tanto imponer que la densidad en el rebote se aproxime a la

densidad crítica no impone condiciones muy restrictivas sobre σ , como si lo hace la dispersión relativa asintótica. Adviértase también que cuando k_0 es suficientemente pequeño para ser del orden de α , la densidad en el rebote estaría lejos de la densidad crítica, lo cual da otra indicación de que estados con k_0 pequeño no son semiclásicos. Las otras cantidades que pueden representar la densidad usando las expresiones para $\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle$ y $\langle \hat{V}^2 \rangle$, dan el mismo resultado cualitativo, que se aproximan a ρ_{crit} cuando k_0 se hace grande.

4.4.4. ¿Dónde está la Región Clásica?

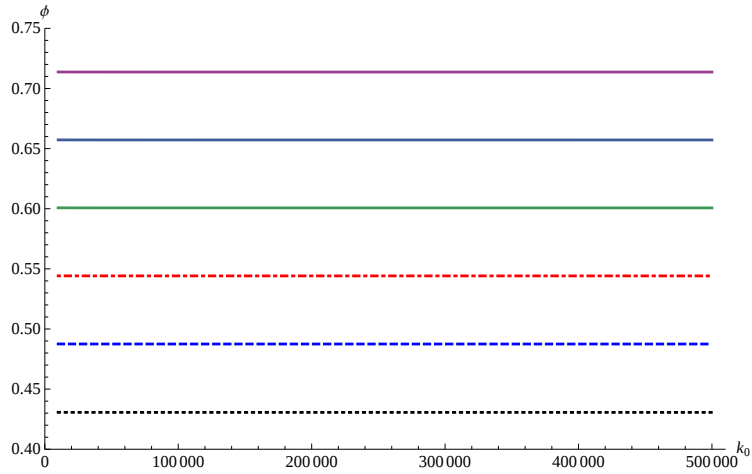


Figura 4.3: Valores $\tilde{\phi}$ de ϕ para los cuales alcanza la región clásica como función de k_0 . Las gráficas son: $\delta = 1$ puntos, $\delta = 0,5$ guiones, $\delta = 0,25$ puntos-guiones, $\delta = 0,125$ línea inferior, $\delta = 0,0625$ línea media y $\delta = 0,03125$ línea superior. Nótese que para valores grandes de k_0 el tiempo $\tilde{\phi}$ permanece constante.

En la descripción de la cosmología cuántica de lazos, cuando la dinámica es gobernada por las ecuaciones efectivas, se puede hacer sin ambigüedad la pregunta ¿cuándo se recupera la dinámica clásica de la Relatividad General? Una manera de medir esto puede ser en términos de la variable β (cuando $\lambda\beta \ll 1$) o en términos de la densidad de energía ($\rho \ll \rho_{\text{crit}}$). Sin embargo si se quiere hacer la misma pregunta en el contexto cuántico entonces se encuentra con el siguiente dilema: como se vió en las secciones anteriores, un estado Gaussiano permanece semiclásico cuando cruza el rebote, de hecho se hace más semiclásico en el rebote. Por lo tanto no podemos decir cuando el estado se vuelve semiclásico basándonos en el comportamiento de las dispersiones de los operadores relevantes. Aún así, nos

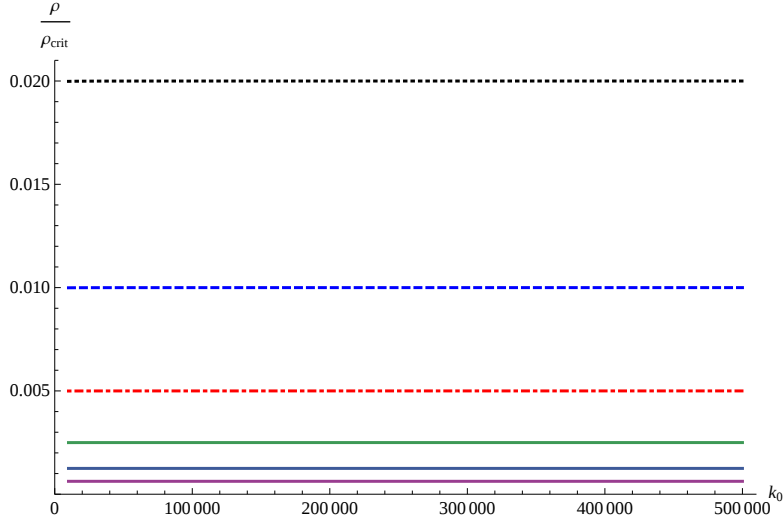


Figura 4.4: Valores de la densidad para distintos valores de $\delta(\tilde{\phi})$ como función de k_0 . Se toma $\rho_{1,2,3,4}/\rho_{\text{crit}}$, para los cuales $\delta = 1$ puntos, $\delta = 0,5$ guiones, $\delta = 0,25$ puntos-guiones, $\delta = 0,125$ línea superior, $\delta = 0,0625$ línea media y $\delta = 0,03125$ línea inferior.

gustaría tener una noción de transición del dominio de la gravedad cuántica al dominio de la gravedad clásica (donde los efectos cuánticos son pequeños). Con el fin de lograr esto proponemos un criterio por medio de la definición del error (porcentual) entre la dispersión relativa y la dispersión relativa asintótica

$$\delta(\phi) := \frac{\left. \frac{(\Delta V)^2}{\langle V \rangle^2} \right|_{\phi} - \Delta_+}{\Delta_+} \times 100. \quad (4.89)$$

Esperamos que este error sea pequeño a medida que se acerca a la región clásica. Ahora queremos motivar esta propuesta. Si bien no se puede definir una transición en términos de un cambio en la dispersión relativa de los operadores básicos, si se puede comparar con los valores del modelo de Wheeler DeWitt (WDW). Se sabe que el valor esperado de los observables en la teoría de WDW sigue de cerca la dinámica clásica de la relatividad general y dado que hay una manera canónica de mapear un estado en cosmología cuántica de lazos a un estado en WDW entonces la comparación entre los valores esperados está bien definida [8]. Esto se realizó para nuestros estados Gaussianos y calculamos las dispersiones relativas para el volumen, lo cual resultó para la dinámica de WDW que la dispersión relativa es una constante en el tiempo ϕ y su valor corresponde precisamente al valor de la dispersión relativa asintótica calculada de la cosmología cuántica de lazos (CCL).

Por lo tanto la dinámica de la CCL no solo se aproxima a la de WDW por medio del valor esperado de los observables, sino que también aproxima la dispersión relativa de los observables. Por lo cual está bien justificado medir la transición al “regimen clásico” en términos de que tan cerca esta la evolución en CCL a la evolución en WDW.

Con el fin de saber dónde empieza la región clásica se halla el valor de ϕ para el cual $\delta = 1/2^m$ con $m = 0, \dots, 5$, tomando $\phi = 0$ en el rebote. Los valores de ϕ que satisfacen esta condición se denotan como $\tilde{\phi}$ y se muestran en la figura 4.3. Luego se evalúan las densidades $\rho_1 = \frac{\langle \hat{p}_\phi \rangle^2}{2\langle \hat{V} \rangle^2}$, $\rho_2 = \frac{\langle \hat{p}_\phi \rangle^2}{2\langle \hat{V}^2 \rangle}$, $\rho_3 = \frac{\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle}{2\langle \hat{V} \rangle^2}$, $\rho_4 = \frac{\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle}{2\langle \hat{V}^2 \rangle}$ en los valores $\tilde{\phi}$. La densidad se muestra en la figura 4.4 (esta gráfica no depende de la densidad que se use $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$). De la figura 4.4 se puede ver que

$$\frac{\rho(\tilde{\phi})}{\rho_{\text{crit}}} \sim \frac{\delta(\tilde{\phi})}{5}, \quad (4.90)$$

con $k_0 \gg \alpha$, $\sigma = \tilde{\sigma} = \sqrt{2\alpha k_0}$, $p = 0$ y $n = 0$. Los resultados son similares si se considera $n > 0$. Aún más, si tomamos $p \neq 0$ lo único que cambia es el valor de ϕ en el rebote. Si se varia σ con k_0 fijo, entonces para valores grandes de σ (mayores que $\tilde{\sigma}$) el tiempo $\tilde{\phi}$ en que se llega a la región clásica es menor. Cuando esto ocurre el valor de la densidad es más cercano al valor crítico y en el límite en que σ es muy grande la región clásica empieza en el rebote, lo cual no tiene sentido. Esto muestra que es necesario tomar σ cerca del valor $\tilde{\sigma}$.

La relación dada en la ecuación (4.90) nos dice el orden de las correcciones cuánticas. Entonces si decimos que las correcciones son despreciables cuando, por ejemplo, $\delta \sim 10^{-10}$ entonces la densidad es del orden $\rho/\rho_{\text{crit}} \sim 2 \times 10^{-11}$. Por último es importante recordar que los estados Gaussianos generalizados son simétricos respecto al rebote, es decir, $\Delta_+ = \Delta_-$. Por lo tanto todas las conclusiones de esta sección aplican también a la región antes del rebote.

Para concluir queremos resumir esta sección. Se vió que imponer condiciones físicas apropiadas sobre el comportamiento de los observables físicos son suficientes para restringir los parámetros que caracterizan los estados Gaussianos generalizados (4.47) y obtener estados verdaderamente semiclásicos. De los tres parámetros continuos que caracterizan los estados (k_0, σ, p) , dos de ellos (k_0, σ) son fijados por las condiciones de semiclasicalidad, mientras que la elección del valor de p representa una elección real de las condiciones iniciales. Se vió que al exigir que la dispersión relativa asintótica de $\hat{p}_\phi$ fuera pequeña implica que $\sigma \ll k_0$ y que la dispersión relativa asintótica del volumen fuera pequeña implica que $k_0 \gg \sigma \gg \alpha$. Si estas condiciones se satisfacen se dice que los estados son semiclásicos y permanecen semiclásicos cuando cruzan el rebote, donde el volumen y la densidad estan muy bien aproximados por la teoría efectiva.

Hasta ahora se ha considerado el modelo de FRW espacialmente plano sin especificar la topología de la sección espacial Σ . Si la topología de Σ es la de un tres toro $\mathbb{T}^3$ la interpretación de las variables V y β es clara: V es el volumen del universo a un tiempo ϕ y β es su variable conjugada definida por la estructura simpléctica (y relacionada con el parámetro de Hubble en el límite de relatividad general). En este caso todos los resultados tienen una interpretación clara. Las condiciones de semiclassicalidad implican que la teoría solo puede tener un límite clásico si el universo rebota cuando el volumen es mucho más grande que el volumen de Planck. Por lo tanto no se pueden tener estados semiclásicos que reboten cerca al volumen de Planck, lo cual se debe a que las dispersiones relativas asintóticas del volumen (y de $\hat{x}$) no son pequeñas en este caso. Como fue mostrado anteriormente [17, 68], en el caso de un universo espacialmente cerrado la escala de Planck es definida por la densidad de energía que es cercana a la densidad de Planck y no por el volumen en el rebote, el cual puede tomar cualquier valor. Por otro lado si la topología de la sección espacial es $\mathbb{R}^3$ el universo es abierto y se debe introducir una celda auxiliar para que la formulación Hamiltoniana tenga sentido, esto introduce un grado de libertad extra que es físicamente irrelevante. En la siguiente sección se muestra que implicación tienen nuestros resultados en este escenario.

4.5. Dependencia bajo Reescalamiento *

Los resultados previos muestran que los estados Gaussianos con valores grandes de k_0 se comportan más semiclásicos, en contradicción con la intuición clásica que nos dice que “reescalar k_0 ” es físicamente irrelevante. Esto es debido a que el modelo de FRW con $k = 0$ tiene una simetría de reescalamiento de las ecuaciones de movimiento y de la métrica del espacio-tiempo, esta simetría está dada por $(V, \beta, \phi, p_\phi) \rightarrow (\ell V, \beta, \phi, \ell p_\phi)$ con ℓ constante. Esto puede ser entendido como una simetría que viene de la libertad en tomar la celda auxiliar con la que se hace la formulación de la teoría [38]. La dependencia en k_0 de la semiclassicalidad de los estados nos llevaría a concluir que la simetría bajo reescalamiento de la teoría clásica no está presente dentro de la familia de estados que estamos considerando cuando k_0 es del orden de α . Sin embargo cuando k_0 se hace grande todas las propiedades del estado permanecen invariantes (en el sentido de que aproximan bien la teoría efectiva). Esto nos lleva a pensar que posiblemente la simetría de reescalamiento se recupera de manera aproximada cuando p_ϕ es grande. El objetivo de esta sección es precisar esta afirmación y mostrar que es cierta. El primer problema importante que surge es la implementación de la “libertad de norma” de reescalamiento, que está presente tanto a nivel clásico como a nivel efectivo. Esta “libertad de norma” se puede entender a nivel clásico (y efectivo) como un mapeo

entre dos teorías en dos celdas distintas, lo cual puede ser reinterpretado como un mapeo en cada teoría definido sobre una celda auxiliar $\mathcal{V}$.

Para ser más precisos consideremos la celda $\mathcal{V}$ y la celda $\mathcal{V}'$ obtenida de la primera por medio de un reescalamiento constante dado por el factor ℓ , entonces existe un mapeo del espacio de fase $\Gamma_{\mathcal{V}}$ de la teoría en la celda $\mathcal{V}$ al espacio de fase $\Gamma_{\mathcal{V}'}$, donde este mapeo está dado por $(\beta, V, \phi, p_{\phi})_{\mathcal{V}} \rightarrow (\beta, \ell V, \phi, \ell p_{\phi})_{\mathcal{V}'}$, por lo tanto la arbitrariedad en la definición de la celda auxiliar (que debe dar descripciones físicas idénticas) puede ser reinterpretada como una transformación sobre $\Gamma_{\mathcal{V}}$ que debería conectar dos configuraciones físicas indistinguibles. Aunque esto parece una suposición razonable resulta no ser cierta ya que al analizar las transformaciones del espacio de fase resulta que no corresponde a una simetría del espacio de fase, es decir, la transformación no preserva la estructura simpléctica aún cuando conecta dos soluciones. Desde el punto de vista de los sistemas con ligadura esta transformación conecta dos órbitas de norma distintas lo cual tampoco es un simplectomorfismo en el espacio de fase físico. En este sentido esta simetría no puede ser considerada como una “libertad de norma” en el lenguaje Hamiltoniano estándar.

Dado que esta transformación *no* es canónica cabe preguntarse, ¿Se espera que su implementación cuántica sea unitaria? de hecho lo que uno quisiera tener es un mapeo tal que un estado $\psi_{\mathcal{V}}$ para la teoría en la celda $\mathcal{V}$ sea enviado a un estado $\psi'_{\mathcal{V}'}$ de tal manera que el valor esperado de $\hat{p}_{\phi}$ tenga las propiedades de transformación adecuadas: $\langle \hat{p}_{\phi} \rangle_{\mathcal{V}'} = \ell \langle \hat{p}_{\phi} \rangle_{\mathcal{V}}$. Si este mapeo también relaciona los valores esperados del volumen como $\langle \hat{V} |_{\phi} \rangle_{\mathcal{V}'} = \ell \langle \hat{V} |_{\phi} \rangle_{\mathcal{V}}$ entonces se tendría una implementación cuántica del reescalamiento ³.

Se mostrara que esto no se puede llevar a cabo en nuestro modelo para la familia de estados que estamos considerando. Se debe recordar que los estados están etiquetados por los parámetros $(k_0, p, \sigma)_n$ tal que para una configuración clásica $(\bar{p}_{\phi}, \bar{x})$ (al tiempo $\phi = 0$) hay una elección preferida de los parámetros $(k_0, p, \sigma)_n$ que selecciona un estado semiclásico *único* para un valor de n dado. Entonces cabe preguntarse como estos parámetros deben “transformar” de tal manera que se pueda implementar la simetría en el espacio de soluciones. La respuesta natural a esta pregunta es que la simetría de reescalamiento induce una transformación en el espacio de fase y por lo tanto en el espacio de etiquetas $(\bar{p}_{\phi}, \bar{x})$ que define la configuración clásica que es descrita por el estado cuántico. Por lo tanto hay una *única* implementación de la simetría clásica en el espacio de estados Gaussianos generalizados que estamos considerando. Ahora la pregunta es, ¿bajo que mapeo entre estados los valores esperados de los observables $\hat{p}_{\phi}$ y $\hat{V}_{\phi}$ escalan apropiadamente?

³Además se debe requerir que los momentos más altos transformen adecuadamente.

Exploremos esta pregunta con un poco más de detalle. De la ecuación (4.54) se puede ver que para implementar el reescalamiento en $\hat{p}_\phi$ el mapeo natural entre estados sería enviar un estado con etiquetas (k_0, p, σ) a un estado $(k'_0 = \ell k_0, p, \sigma' = \ell \sigma)$ y de esta manera obtener $\langle \hat{p}_\phi \rangle_{\mathcal{V}'} = \ell \langle \hat{p}_\phi \rangle_{\mathcal{V}}$. Pero aún cuando $\psi_{\mathcal{V}}$ se toma como estado semiclásico el nuevo estado $\psi_{\mathcal{V}'}$ no será semiclásico en general. Para ser más precisos, las condiciones de semiclasicalidad (para cualquier celda unitaria) nos dicen que σ debe ser del orden de $\sqrt{2\alpha k_0}$ entonces se puede asumir que $\psi_{\mathcal{V}}(k_0, p_0, \sigma)$ satisface esta condición, pero en el nuevo estado $\psi_{\mathcal{V}'}(k'_0, p'_0, \sigma')$ se tiene

$$\sigma' = \ell \sigma = \sqrt{2\ell^2 \alpha k_0} = \ell^{1/2} \sqrt{2\alpha k'_0}.$$

Por lo tanto σ' cumplirá con las condiciones de semiclasicalidad para la celda $\mathcal{V}'$ solo si $\ell^{1/2}$ no es muy diferente de uno. Si consideramos el mapeo canónico de las etiquetas de los estados que viene de la simetría clásica, tal que actúa entre el conjunto de estados semiclásicos con $\sigma = \tilde{\sigma}(k_0)$. En este caso incluso el valor esperado de $\hat{p}_\phi$ no será invariante sino que cambiará como

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle' = \hbar k'_0 \left(1 + \frac{\sigma'^2}{4k_0'^2} \right) = \ell \hbar k_0 \left(1 + \frac{1}{\ell} \frac{\sigma^2}{4k_0^2} \right).$$

La diferencia relativa respecto a los valores $\ell \langle \hat{p}_\phi \rangle$ reescalados es

$$\frac{|\langle \hat{p}_\phi \rangle' - \ell \langle \hat{p}_\phi \rangle|}{\ell \langle \hat{p}_\phi \rangle} = \frac{\alpha}{2k_0} \left| 1 - \frac{1}{\ell} \right| + O(\alpha^2/k_0^2). \quad (4.91)$$

Nótese que si el estado original era semiclásico ($k_0 \gg \alpha$) entonces la diferencia relativa será pequeña siempre que ℓ sea de orden uno o mayor. Entonces se puede decir que hay una invarianza de escala aproximada. Por otro lado si $\ell \ll 1$ entonces la diferencia relativa puede ser grande y en consecuencia la simetría de reescalamiento no se puede recobrar ni siquiera en forma aproximada. También se puede estudiar el valor esperado de la densidad en el rebote, el cual es un observable independiente de la celda. Es directo ver que los términos de la forma α^2/k_0^2 y α^2/σ^2 rompen la independencia bajo reescalamiento. Esto se puede ver de la expresión del volumen en el rebote (4.86) que posee tales términos.

Se puede concluir que solo en el límite de k_0 grande respecto a α la densidad en el rebote se aproxima a la densidad crítica y la independencia de la celda auxiliar se recupera aproximadamente para nuestra clase de estados semiclásicos. Por último queremos introducir una noción más débil para observables genéricos llamada *invarianza bajo reescalamiento aproximada* y definida de la siguiente manera: conservamos las condiciones de semiclasicalidad, para cada valor de k_0 tomamos $\sigma = \tilde{\sigma}(k_0)$ con $\sigma \gg \alpha$ y luego consideramos el comportamiento de las dispersiones.

Se dice que la invarianza bajo reescalamiento aproximada esta implementada si los valores esperados de los “observables verdaderos” $\hat{\mathcal{O}}_i$ que clasicamente son independientes de la celda (y por lo tanto relevantes observacionalmente, tales como la densidad de energía, la expansión y la curvatura) “convergen” a su valor clásico correspondiente para valores grandes de k_0 . Para ser más precisos, dado un $K > 0$ y para cualquier dos valores k_0 y k'_0 (ambos mayores que K) existe convergencia si la diferencia en los correspondientes valores esperados es más pequeña que cualquier tolerancia ϵ : $|\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle'| < \epsilon$ para todo $k_0, k'_0 > K$. De forma similar se pueden imponer condiciones de convergencia en las dispersiones de las cantidades independientes de la celda; de la expresión anterior se puede ver que en el modelo soluble de cosmología cuántica de lazos la invarianza bajo reescalamiento aproximada se satisface para nuestra clase de estados, es decir, para un K suficientemente grande y una elección del parámetro de tolerancia ϵ , las predicciones observables son indistinguibles para las teorías definidas en las celdas $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ para estados que satisfacen las condiciones de semiclasicalidad. Finalmente es importante notar que la simetría de reescalamiento es una cualidad del modelo abierto $k = 0$ y no de la cuantización en particular, por lo tanto este problema también esta presente en la teoría cuántica de Wheeler-De Witt del modelo plano y la discusión en este caso será muy similar a la que hemos realizado.

Los estados Gaussianos que hemos considerado no son los más generales que se pueden estudiar, por esta razón en la siguiente sección se estudiarán los *estados apretados*⁴ que son una generalización de los estados Gaussianos. Se quiere comparar las propiedades de semiclasicalidad de los estados apretados con los Gaussianos.

4.6. Estados Apretados *

En esta sección consideramos estados que generalizan a los estados Gaussianos. La estrategia a seguir será considerar estados apretados que están cercanos a los estados Gaussianos semiclásicos y comparar sus propiedades. En particular se quiere saber si los estados apretados pueden mejorar las propiedades de semiclasicalidad, tales como la dispersión relativa del volumen o que tanto aproxima la teoría efectiva.

Los estados Gaussianos generalizados que se han considerado hasta ahora tienen tres parámetros reales (p, k_0, σ) y un parámetro discreto (n) . Vimos que dado un punto en el espacio de fase clásico se puede aproximar la dinámica interna de la

⁴El nombre de estos estados viene de “squeezed states”, que puede traducirse como “estados exprimidos”, “estados apretados”, “estados comprimidos”, “estados ajustados” o “estados apachurrados”, por una elección un poco arbitraria que obedece al sentido de estética del autor se toma la traducción “estados apretados”.

teoría con una elección de p y de imponer las condiciones de semiclassicalidad sobre k_0 y σ .

Consideremos ahora los estados iniciales como

$$\tilde{F}(k) = \begin{cases} k^n e^{-\eta(k-\beta)^2}, & \text{para } k > 0, \quad \eta, \beta \in \mathbb{C} \\ 0, & \text{para } k \leq 0, \end{cases} \quad (4.92)$$

que dependen de dos parámetros complejos (η, β) . Los estados apretados se pueden reducir a los Gaussianos si hacemos

$$\text{Im}(\eta) =: \eta_I = 0, \quad \text{Re}(\eta) =: \eta_R = \frac{1}{\sigma^2}, \quad \text{Re}(\beta) =: \beta_R = k_0, \quad 2\eta_R \beta_I = p. \quad (4.93)$$

Esto nos muestra que el parámetro extra en la definición de los estados apretados es la parte imaginaria de η . La norma de estos estados en el espacio k está dada por

$$(\tilde{\chi}, \tilde{\chi})_{\text{phy}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} k k^{2n} e^{-\eta(k-\beta)^2} e^{-\bar{\eta}(k-\bar{\beta})^2} dk.$$

Usando la relación (A.9) con $t = 0$, la última integral queda como

$$\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2 = 2e^{2\eta_R(a^2 - \beta_R^2 + \beta_I^2)} e^{4\eta_I \beta_I \beta_R} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n+1} e^{-2\eta_R(k-a)^2} dk, \quad (4.94)$$

donde

$$a = \beta_R - \beta_I \frac{\eta_I}{\eta_R}. \quad (4.95)$$

Si queremos la convergencia de la integral entonces debemos imponer que $\eta_R > 0$ y se queremos seleccionar las frecuencias positivas entonces $a \gg \frac{1}{\sqrt{\eta_R}}$, i. e., $\beta_R - \beta_I \frac{\eta_I}{\eta_R} \gg \frac{1}{\sqrt{\eta_R}}$. Con estas suposiciones las integrales quedan bien definidas y el error es pequeño, como se muestra en el apéndice A.2.

Si tomamos $n = 0$ y con el cambio de variables $u = k - a$ se obtiene

$$\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2 = 2e^{2\eta_R(a^2 - \beta_R^2 + \beta_I^2)} e^{4\eta_I \beta_I \beta_R} \int_{-\infty}^{\infty} (u+a) e^{-2\eta_R u^2} dk, \quad (4.96)$$

entonces

$$\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2 = a \sqrt{\frac{2\pi}{\eta_R}} e^{2\eta_R(a^2 - \beta_R^2 + \beta_I^2)} e^{4\eta_I \beta_I \beta_R}. \quad (4.97)$$

4.6.1. Observables Elementales

Se puede calcular el valor esperado y la dispersión del observable

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle = \frac{2\hbar}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n+2} e^{-\bar{\eta}(k-\bar{\beta})^2} e^{-\eta(k-\beta)^2} dk. \quad (4.98)$$

Si se usa la ecuación (A.9) con $t = 0$, se obtiene

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle = \frac{2\hbar}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} e^{2\eta_R(a^2 - \beta_R^2 + \beta_I^2)} e^{4\eta_I \beta_I \beta_R} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n+2} e^{-2\eta_R(k-a)^2} dk. \quad (4.99)$$

Si tomamos $n = 0$ y hacemos el cambio de variables $u = k - a$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}_\phi \rangle &= \frac{2\hbar}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} e^{2\eta_R(a^2 - \beta_R^2 + \beta_I^2)} e^{4\eta_I \beta_I \beta_R} \int_{-\infty}^{\infty} (u+a)^2 e^{-2\eta_R u^2} du \\ &= \frac{2\hbar}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} e^{2\eta_R(a^2 - \beta_R^2 + \beta_I^2)} e^{4\eta_I \beta_I \beta_R} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\eta_R)^{-3/2} + a^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\eta_R}} \right]. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Si se usa la ecuación (4.97) se obtiene

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle = \frac{\hbar}{a} \left[\frac{1}{4\eta_R} + a^2 \right]. \quad (4.101)$$

Ahora queremos calcular el valor esperado de $\hat{p}_\phi^2$

$$\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle = \frac{2\hbar^2}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^3 |\tilde{F}(k)|^2 dk, \quad (4.102)$$

en el estado apretado (4.92) queda como

$$\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle = \frac{2\hbar^2}{\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n+3} e^{-\bar{\eta}(k-\bar{\beta})^2} e^{-\eta(k-\beta)^2} dk. \quad (4.103)$$

Si se usa la ecuación (4.97) y se toma $n = 0$ el resultado es

$$\langle \hat{p}_\phi^2 \rangle = \hbar^2 \left[\frac{3}{4\eta_R} + a^2 \right], \quad (4.104)$$

con esto se puede hallar la dispersión

$$(\Delta \hat{p}_\phi)^2 = \frac{\hbar^2}{4\eta_R} - \frac{\hbar^2}{16\eta_R^2 a^2}. \quad (4.105)$$

Si lo escribimos en términos de las variables originales queda como

$$(\Delta \hat{p}_\phi)^2 = \frac{\hbar^2}{4\eta_R} - \frac{\hbar^2}{16\eta_R^2} \left(\beta_R - \beta_I \frac{\eta_I}{\eta_R} \right)^{-2}. \quad (4.106)$$

4.6.2. Volumen

Debemos calcular las cantidades $V_{\pm}$ y $W_{0,\pm}$ de las cuales se puede hallar el valor esperado y la dispersión del operador de volumen. Los coeficientes relevantes son

$$\begin{aligned} V_{\pm} &= \frac{\kappa}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} (-ik) k^n e^{-\bar{\eta}(k-\bar{\beta})^2} i[k \mp i\alpha][k \mp i\alpha]^n e^{-\eta(k \mp i\alpha - \beta)^2} dk \\ &= \frac{\kappa}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} k^{n+1} [k \mp i\alpha]^{n+1} e^{-\bar{\eta}(k-\bar{\beta})^2} e^{-\eta(k \mp i\alpha - \beta)^2} dk. \end{aligned} \quad (4.107)$$

con $\kappa = 4\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\lambda$. Como en la sección anterior, solo se escribe explícitamente el caso $n = 0$. La expresión anterior se puede poner de la forma

$$V_{\pm} = \frac{\kappa}{\alpha\alpha} \exp \left[\left(\frac{\alpha^2\eta_R}{2} \pm 2\alpha\beta_I\eta_R \right) \left(1 + \frac{\eta_I^2}{\eta_R^2} \right) \right] \left[\frac{1}{8\eta_R} + \frac{b_{\pm}^2}{2} + \frac{\alpha^2}{8} \right], \quad (4.108)$$

donde $b_{\pm} = a \mp \frac{\alpha}{2} \frac{\eta_I}{\eta_R} = \beta_R - \frac{\eta_I}{\eta_R} (\beta_I \pm \frac{\alpha}{2})$. Si queremos escribir la expresión (4.108) en las variables Gaussianas se obtiene

$$\begin{aligned} V_{\pm} &= \frac{\kappa}{\alpha} \left(k_0 - \eta_I \frac{p\sigma^4}{2} \right)^{-1} \exp \left[\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \pm p\alpha \right) (1 + \eta_I^2\sigma^4) \right] \times \\ &\quad \left[\frac{\sigma^2}{8} + \frac{1}{2} \left(k_0 - \eta_I\sigma^2 \left(\frac{p\sigma^2}{2} \pm \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 + \frac{\alpha^2}{8} \right] \end{aligned} \quad (4.109)$$

lo cual se reduce al caso Gaussiano cuando $\eta_I = 0$.

Las siguientes cantidades que se necesitan calcular para obtener la dispersión del operador de volumen son los coeficientes $(W_0, W_{\pm})$, el primero está dado por

$$W_0 = 2\alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} k^3 |\tilde{F}(k)|^2 dk, \quad \text{con} \quad \alpha_2 = \frac{2\pi\gamma^2\ell_{\text{Pl}}^4\lambda^2}{3G}. \quad (4.110)$$

Esta es la misma integral de la ecuación (4.102). Entonces si tomamos $n = 0$ y se reemplaza $\hbar^2$ por α_2 en la ecuación (4.102) se obtiene que

$$W_0 = \alpha_2 \left[\frac{3}{4\eta_R} + \left(\beta_R - \beta_I \frac{\eta_I}{\eta_R} \right)^2 \right]. \quad (4.111)$$

Las otras cantidades estan dadas por la expresión

$$\begin{aligned} W_{\pm} &= \alpha_3 \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \left[\tilde{F}(k)(k \mp 2i\alpha) \tilde{F}(k \mp 2i\alpha) + \text{C.C.} \right] dk, \\ &= 2\alpha_3 \text{Re} [I_{\pm}], \end{aligned} \quad (4.112)$$

con $\alpha_3 = \frac{\pi\gamma^2\ell_{\text{Pl}}^4\lambda^2}{3G}$ y $I_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \tilde{F}(k)(k \mp 2i\alpha) \tilde{F}(k \mp 2i\alpha) dk$. Si tomamos $n = 0$ se obtiene

$$W_{\pm} = \alpha_3 \exp \left[(2\alpha^2\eta_R \pm 4\alpha\eta_R\beta_I) \left(1 + \frac{\eta_I^2}{\eta_R^2} \right) \right] \times \left[\frac{b'_{\pm}}{2\eta_R a} + \frac{1}{4\eta_R} + b'_{\pm} + \alpha^2 \right],$$

con $b'_{\pm} = a \mp \alpha \frac{\eta_I}{\eta_R} = \beta_R - \frac{\eta_I}{\eta_R} (\beta_I \pm \alpha)$.

Ahora es directo calcular la dispersión relativa asintótica del volumen

$$\Delta_{\pm} = \frac{a^2}{4} \exp \left[\alpha^2 \eta_R \left(1 + \frac{\eta_I^2}{\eta_R^2} \right) \right] \frac{\left[\frac{b'_{\pm}}{2\eta_R a} + \frac{1}{4\eta_R} + b'_{\pm} + \alpha^2 \right]}{\left[\frac{1}{8\eta_R} + \frac{b_{\pm}^2}{2} + \frac{\alpha^2}{8} \right]^2} - 1. \quad (4.113)$$

4.6.3. Condiciones de Semiclasicalidad

En esta sección queremos estudiar como se satisfacen las condiciones de semiclasicalidad cuando nos movemos a lo largo del parámetro η_I empezando en los estados Gaussianos (que corresponden a $\eta_I = 0$). En lugar de hacer un análisis exhaustivo (como se hizo con los estados Gaussianos) se calculan las cantidades relevantes y se grafican.

Anteriormente al imponer sobre los estados Gaussianos que la dispersión relativa asintótica del volumen fuera un mínimo se obtenía un ancho óptimo $\sigma = \tilde{\sigma} \approx \sqrt{2\alpha k_0}$ para las Gaussianas. Este valor tiene también la propiedad de que la densidad en el rebote es muy cercana a la densidad crítica ρ_{crit} . En la figura 4.5 se muestra la dispersión relativa asintótica y la densidad en el rebote como función de σ y η_I , donde el plano $\eta_I = 0$ corresponde a los valores de los estados Gaussianos. En la figura no se puede apreciar pero resulta que cuando se fija el valor de σ la dispersión relativa asintótica $\Delta_{\pm}$ como función de η_I no tiene su mínimo en el cero sino en un valor $\tilde{\eta}_I \neq 0$ para Δ_+ (y $\eta_I = -\tilde{\eta}_I$ para Δ_-). Por lo tanto si se toma $\eta_I = \tilde{\eta}_I$ se está mejorando la dispersión relativa asintótica *después* del rebote y al mismo tiempo se aumenta el valor de la dispersión relativa asintótica *antes* del rebote. Cuando se hace esta elección se introduce una asimetría en la dispersión relativa asintótica, lo cual se ha usado para sugerir la posibilidad de que la asimetría sea suficientemente grande para poder borrar las propiedades de semiclasicalidad cuando se cruza el rebote. Como se muestra luego, esto no ocurre en nuestro caso. También se puede apreciar en la figura 4.5 que lejos de las Gaussianas ($|\eta_I| > |\tilde{\eta}_I|$) la dispersión relativa asintótica aumenta abruptamente. Además se puede apreciar en la figura que la densidad en el rebote (gráfica azul) decrece rápidamente acercándose a valores mucho más pequeños que la densidad crítica cuando uno se aleja del plano $\eta_I = 0$.

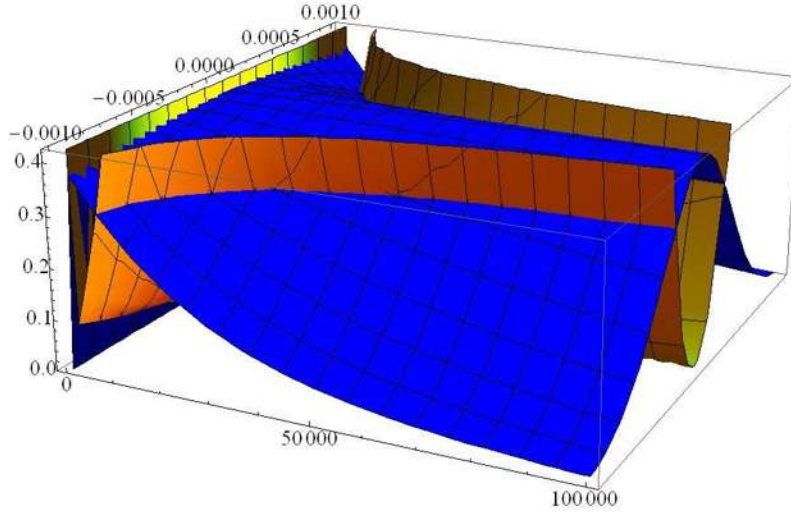


Figura 4.5: Densidad y dispersión relativa asintótica Δ_+ . En la gráfica $1/\eta_R = \sigma^2 : (0, 100000)$, $\eta_I : (-0,001, 0,001)$, $\beta_R = k_0 = 30000$, $\beta_I = 0$ y $n = 0$. El valor máximo de la densidad está en los estados Gaussianos. Se puede observar que los estados apretados cercanos a los Gaussianos tienen la densidad máxima cercana a ρ_{crit} .

Ambos fenómenos sugieren que se pueden considerar los estados apretados como estados semiclásicos *si se permanece muy cerca de los estados Gaussianos*. La pregunta es, ¿qué tan cerca de los estados Gaussianos debemos estar para obtener un comportamiento semiclásico similar al de los estados Gaussianos? Para responder a esta pregunta se muestra en la figura 4.6 el volumen en el rebote como función de σ y η_I , donde se puede apreciar que el mínimo está sobre los estados Gaussianos ($\eta_I = 0$). Usando el volumen relativo y la densidad en el rebote se puede definir un intervalo de los parámetros σ y η_I en el cual los estados pueden ser considerados como semiclásicos. Más precisamente, se define una tolerancia para la dispersión relativa asintótica $\Delta_+ = \tilde{\Delta}$ y con esto se halla el valor máximo η_I^{max} para el cual la dispersión relativa está por debajo de $\tilde{\Delta}$, luego se halla el valor de la densidad en el rebote cuando $\eta_I = \eta_I^{\text{max}}$.

Se realizó una exploración exhaustiva para diferentes valores de $\tilde{\Delta}$ y k_0 y se encontró que para un valor fijo de $\tilde{\Delta}$, mientras mayor sea el valor de k_0 menor es el intervalo permitido de η_I . Por ejemplo, para $\tilde{\Delta} = 0,01$ la dependencia de

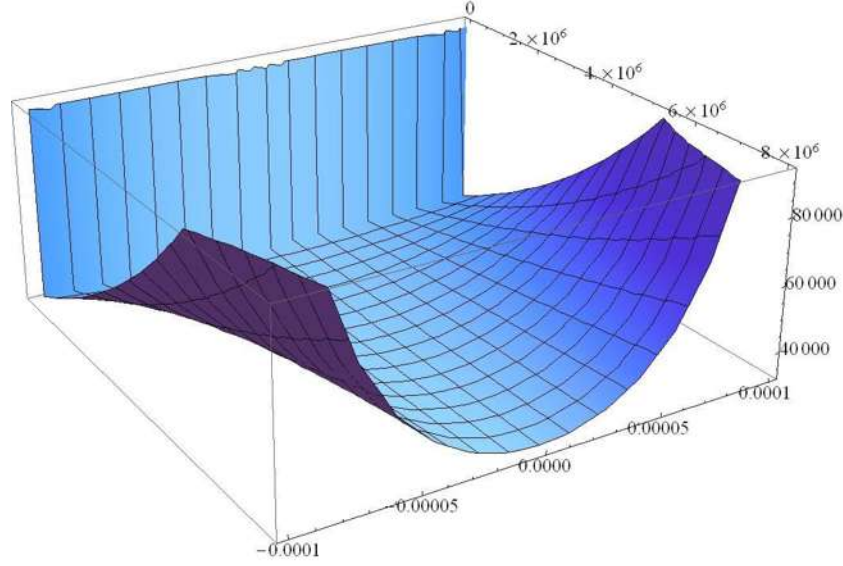


Figura 4.6: Volumen en el rebote. En la gráfica se toma $1/\eta_R = \sigma^2 : (0, 8 \times 10^6)$, $\eta_I : (-0,0001, 0,0001)$, $\beta_R = k_0 = 30000$, $\beta_I = 0$ y $n = 0$. El mínimo global está sobre los estados Gaussianos y crece exponencialmente a medida que uno se aleja de los estados Gaussianos o si σ^2 es mucho más pequeño que $\tilde{\sigma}^2 = 2\alpha k_0$.

$\eta_I^{\max}$ con k_0 se puede aproximar (para k_0 grande, $\sigma = \tilde{\sigma}$, $n = 0$ y $p = 0$) como $\eta_I^{\max} \sim 1/\sqrt{47000 k_0}$. Para $\tilde{\Delta} = 0,01$ el valor de la densidad en el rebote ρ_b es $\rho_b = 0,99\rho_{\text{crit}}$. Para $\tilde{\Delta} = 0,001$, $\eta_I^{\max} \sim 1/\sqrt{470000 k_0}$ y $\rho_b = 0,999\rho_{\text{crit}}$.

Regresemos por un momento al problema de la asimetría de la dispersión relativa asintótica a través del rebote. Como se mencionó antes, si no se tiene control sobre el espacio de parámetros se puede tener en principio una asimetría muy grande que se translada en pérdida de semiclasicalidad al cruzar el rebote. Este escenario fue sugerido en [28], donde se realiza un análisis sobre un formalismo efectivo no derivado directamente de la cosmología cuántica de lazos y con poco control sobre las condiciones de semiclasicalidad. En el estudio presente se cuenta con mejores herramientas para hacer afirmaciones precisas sobre la asimetría basados en el control de las expresiones analíticas y de la región de validez de los parámetros de los estados. En la figura 4.7 se muestra el error relativo $\Delta_+/\Delta_- - 1$ de la dispersión relativa asintótica como función de σ y η_I , se incluyen dos superficies verticales que delimitan la región de validez de los parámetros. La línea $\eta_I = 0$ corresponde a los estados Gaussianos donde $\Delta_+ = \Delta_-$, la segunda línea corresponde a $\sigma = \tilde{\sigma}$

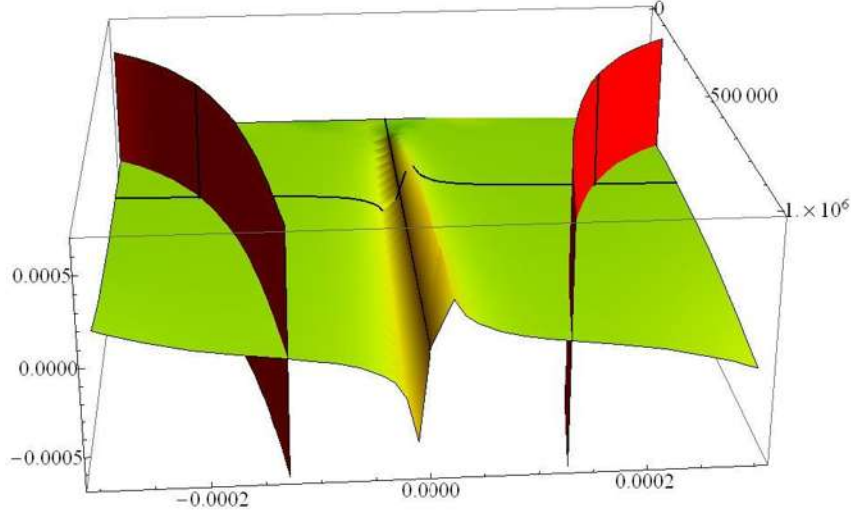


Figura 4.7: Error relativo de los valores de la dispersión relativa $\frac{\Delta_+ - \Delta_-}{\Delta_-}$. En la gráfica se toma $1/\eta_R = \sigma^2 : (0, 10^6)$, $\eta_I : (-0.0003, 0.0003)$, $\beta_R = k_0 = 30000$, $\beta_I = 0$ y $n = 0$. Fuera de los planos verticales los estados apretados tienen una dispersión relativa asintótica (Δ_+ y Δ_-) mayor a uno. Una de las líneas ($\eta_I = 0$) señala los estados Gaussianos que es justo donde la gráfica se hace cero y la otra línea son los estados con $\tilde{\sigma}^2 = 2\alpha k_0$.

la cual extiende el σ óptimo a $\eta_I \neq 0$. Nótese que esta segunda línea empieza en cero, aumenta (cuando $\eta_I > 0$), alcanza el máximo y luego decrece tendiendo a cero; esta curva es antisimétrica con respecto a η_I . Por lo tanto hay dos puntos para los cuales $|\Delta_+/\Delta_- - 1|$ alcanza su valor máximo. Lo que se observó tomando diferentes valores de k_0 es que el valor del máximo es muy pequeño, por ejemplo, para $k_0 = 10^5$ (el cual es un valor mucho más pequeño que el esperado para un universo realista, $k_0 \sim 10^{100}$) el valor del máximo es cercano a 10^{-4} y a medida que se aumenta k_0 el valor del máximo disminuye. Lo cual muestra que los estados semiclásicos son muy simétricos y que la semiclassicalidad se preserva a través del rebote.

Ahora queremos comparar nuestros resultados con los resultados de [54], donde los autores usan métodos generales de dispersión que no están ligados a una elección en particular de los estados, prueban que si los estados tienen una cúspide pronunciada

en uno de los lados del rebote entonces satisfacen que

$$|\sigma_+ - \sigma_-| \leq 2\sigma_*, \quad (4.114)$$

donde $\sigma_{\pm}$ es la dispersión asintótica del logaritmo de $\hat{V}$ antes y después del rebote; σ_* es la dispersión del logaritmo de $\hat{p}_{\phi}$. Si las dispersiones del estado son pequeñas se puede asumir para un observable $\hat{O}$ que $\langle \ln(\hat{O}) \rangle \approx \ln \langle \hat{O} \rangle$ y $\langle \Delta \ln(\hat{O}) \rangle \approx \langle \Delta \hat{O} \rangle / \langle \hat{O} \rangle$ con lo cual la cota (4.114) se puede aproximar bien como

$$|\Delta_+^{1/2} - \Delta_-^{1/2}| \leq 2 \frac{\Delta \hat{p}_{\phi}}{\langle \hat{p}_{\phi} \rangle}.$$

Se puede evaluar de manera exacta las cantidades en la última expresión para ver si la cota (4.114) está cerca de ser saturada por los estados apretados semiclásicos. Para hacer esto se considera un estado apretado con $\sigma = \tilde{\sigma}$ y se encuentra el máximo de

$$\mathcal{E} := \frac{|\Delta_+^{1/2} - \Delta_-^{1/2}|}{2(\langle \Delta \hat{p}_{\phi} \rangle / \langle \hat{p}_{\phi} \rangle)}, \quad (4.115)$$

para todos los valores posibles de η_I , con $\eta_R = 1/\tilde{\sigma}^2$, $\beta_I = 0$ y $\beta_R = k_0$ grande. Lo que queremos saber es si $\mathcal{E}$ es cercano a uno para estos estados. Lo que se obtuvo numéricamente es que $\mathcal{E}$ no solo es muy pequeño comparado con uno (para valores realistas de los parámetros) sino que decrece más rápido que C/k_0 , i. e., $\mathcal{E}$ se comporta como $\mathcal{E} < C/k_0$ con $C \approx 3$. Por lo tanto para valores realistas de k_0 del orden de $k_0 \approx 10^{120}$ correspondiente a un universo grande (en el caso espacialmente compacto) la cota esta muy lejos de ser saturada. La cota (4.114) es un resultado general que se cumple para un gran número de estados y asegura la conservación de la semiclasicalidad. Lo que nosotros hemos mostrado con nuestros resultados es que nuestra familia de estados satisface una cota más fuerte.

4.7. Conclusiones *

Ahora se presenta un resumen de los principales resultados obtenidos. Se definieron estados coherentes Gaussianos como candidatos para estados semiclásicos. Se impusieron condiciones de consistencia sobre estos estados, pidiendo que la dispersión relativa del volumen fuera pequeña para tiempos grandes lejos del rebote. Esta condición hace que uno de los parámetros (el momento del campo) sea grande y fija otro de los parámetros. Luego se pudo encontrar un estado Gaussiano para cada punto del espacio de fase clásico correspondiente a una solución clásica para tiempos grandes. Cuando se exploraron las propiedades de estos estados cerca del rebote se encontro que se comportan en forma semiclásica; la dispersión relativa

del volumen en la región cuántica es más pequeña que la dispersión asintótica. Además para los estados con dispersión pequeña se mostró que el valor esperado del volumen y la densidad de energía son bien aproximadas por la teoría efectiva, lo cual da soporte a la idea de que esta teoría es una buena aproximación a la teoría cuántica, incluso a la escala de Planck. Luego se introdujeron los estados apretados y se estudiaron sus propiedades en la vecindad de los estados Gaussianos semiclásicos. Se mostró que el rango del parámetro extra está severamente restringido si se quiere tener una dispersión relativa del volumen pequeña. Además si uno se aleja mucho de los estados Gaussianos el volumen y la densidad en el rebote se alejan rápidamente de los valores dados por los estados Gaussianos (y la teoría efectiva), lo cual conduce a concluir que los estados Gaussianos presentan un mejor comportamiento semiclásico. También se estudio la asimetría en la dispersión del volumen, la cual sobre los estados Gaussianos no esta presente y sobre los estados apretados si se presenta; incluso dependiendo del signo del parámetro extra de los estados apretados se puede obtener una dispersión menor antes o después del rebote, a su vez la dispersión al otro lado del rebote aumenta. La pregunta es ¿qué tan grande puede ser esta asimetría? Lo que se observó fue que la diferencia en la dispersión relativa antes y después del rebote era muy pequeña (del orden de 10^{-4}) y se hace menor para universos más “grandes”. Por lo tanto se puede concluir que si un estado es semiclásico a un lado del rebote entonces lo es al otro lado, es decir, el estado no pierde su coherencia.

Una característica particular de la descripción clásica es que posee una simetría de reescalamiento. Se puede entender el origen de esta simetría usando el hecho de que el modelo con $k = 0$ necesita un volumen auxiliar para su descripción Hamiltoniana y la elección de este volumen es totalmente arbitraria. Esto significa que no hay una escala con respecto a la cual comparar el momento p_ϕ , es decir, no se puede dar sentido a que “ p_ϕ es grande”. En la teoría cuántica al introducir la constante de Planck se introduce una escala que se manifiesta en el comportamiento de algunos observables, por ejemplo, una de las condiciones semiclásicas que se encontraron es que mientras mayor sea el valor esperado del operador de momento $\langle \hat{p}_\phi \rangle$ más semiclásico es el estado. Por último se observo que la simetría de reescalamiento solo se recupera de manera aproximada en el límite de $\langle \hat{p}_\phi \rangle$ grande, para la familia de estados que se estudiaron, este límite puede ser entendido como el límite clásico del sistema.

Capítulo 5

Universo Tipo Bianchi II

El modelo de Bianchi II juega un papel importante en las soluciones de Bianchi IX y la conjetura BKL (Belinskii, Khalatnikov, Lifshitz), que puede proveer una idea intuitiva del comportamiento del universo en una vecindad de cualquier singularidad tipo espacio, donde las correcciones de la geometría cuántica están presentes.

En este capítulo se investiga de forma numérica las soluciones de las ecuaciones efectivas del modelo Bianchi II en cosmología cuántica de lazos (CCL). El contenido de materia es un campo escalar sin masa. Se realiza un estudio sistemático de las soluciones, se hace énfasis en el comportamiento de los observables geométricos, con lo cual se logra mostrar que la singularidad del big bang es reemplazada por un rebote. Se indica como se resuelven los distintos tipos de singularidades y que características físicas tienen. Respecto a los observables geométricos se muestra que pueden haber hasta tres rebotes direccionales de los factores de escala. Además se presenta solo un rebote global del universo cuando la expansión se hace cero. La cizalladura presenta hasta cuatro máximos y puede ser cero en el rebote y distinta de cero en la región clásica, es decir, las soluciones efectivas conectan soluciones anisotrópicas incluso cuando la cizalladura es cero en el rebote. Esta propiedad de la cizalladura permite encontrar soluciones con densidad en el rebote mayor a la encontrada en los universos isotrópicos o tipo Bianchi I. Se muestra que el comportamiento asintótico es de Bianchi I. También se estudia el límite de vacío donde casi toda la contribución dinámica del universo viene de las anisotropías.

La estructura del capítulo es la siguiente: la teoría efectiva y sus ecuaciones de movimiento se muestran en la sección 5.1; las soluciones numéricas se estudian en la sección 5.2, donde se analiza de manera sistemática los límites clásico, isotrópico, Bianchi I, densidad máxima y vacío. Los principales resultados se discuten en la sección 5.3. En el apéndice A.1 se muestran los test de convergencia del programa.

5.1. Ecuaciones Efectivas

La teoría efectiva de Bianchi II fue construida a partir de la teoría cuántica de Bianchi II definida en la referencia [21].

Tomando el marco $\mathcal{e}_i^a$ con la orientación de mano derecha (i. e. $\epsilon = 1$) y la función lapso $N = \sqrt{p_1 p_2 p_3}$, la ligadura Hamiltoniana efectiva esta dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_H = & \frac{p_1 p_2 p_3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} \left[\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_3 c_3 \sin \bar{\mu}_1 c_1 \right] \\ & + \frac{1}{8\pi G \gamma^2} \left[\frac{\alpha (p_2 p_3)^{3/2}}{\lambda \sqrt{p_1}} \sin \bar{\mu}_1 c_1 - (1 + \gamma^2) \left(\frac{\alpha p_2 p_3}{2 p_1} \right)^2 \right] - \frac{p_\phi^2}{2} = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

con

$$\bar{\mu}_1 = \lambda \sqrt{\frac{p_1}{p_2 p_3}}, \quad \bar{\mu}_2 = \lambda \sqrt{\frac{p_2}{p_1 p_3}}, \quad \bar{\mu}_3 = \lambda \sqrt{\frac{p_3}{p_1 p_2}}. \quad (5.2)$$

El valor de λ es tal que $\lambda^2 = \Delta$ corresponde al mínimo autovalor del operador de área en gravedad cuántica de lazos (correspondiente a un lado de espín 1/2), que esta dado por $\Delta = 4\sqrt{3}\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2$. Dado que $\sin \bar{\mu}_i c_i \leq 1$ entonces la densidad de materia $\rho = \frac{p_\phi^2}{2V^2} = \frac{p_\phi^2}{2p_1 p_2 p_3}$ satisface la desigualdad

$$\rho \leq \frac{3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} + \frac{1}{8\pi G \gamma^2} \left[\frac{x}{\lambda} - \frac{(1 + \gamma^2)x^2}{4} \right], \quad \text{con } x = \alpha \sqrt{\frac{p_2 p_3}{p_1^3}}. \quad (5.3)$$

El máximo de la expresión entre corchetes se alcanza cuando $x = \frac{2}{(1+\gamma^2)\lambda} \approx 0,83$, entonces

$$\rho_{\text{matt}} \lesssim 1,315 \rho_{\text{crit}} \approx 0,54 \rho_{\text{Pl}}, \quad (5.4)$$

donde $\rho_{\text{crit}} = \frac{3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} \approx 0,41 \rho_{\text{Pl}}$ es la densidad crítica hallada en el caso isotrópico [16] y $\rho_{\text{Pl}} = m_{\text{Pl}}/\ell_{\text{Pl}}^3$ es la densidad de Planck. Esta cota superior es mayor a la encontrada en Bianchi I ($\rho_{\text{matt}} \lesssim 0,41 \rho_{\text{Pl}}$) o en el caso isotrópico ($\rho_{\text{matt}} \approx 0,41 \rho_{\text{Pl}}$). Aun más, la densidad en todas las soluciones de Bianchi I con cizalladura diferente de cero tiene un valor en el rebote menor a su valor en el caso isotrópico. Por lo tanto queda una pregunta abierta: ¿Hay soluciones genéricas en las cuales la densidad sea mayor a su valor en el caso isotrópico? Mostraremos que la respuesta es afirmativa, lo cual nos deja con otra pregunta: ¿Como se hallan las soluciones que saturan la densidad? Las soluciones de este tipo se mostraran en la sección 5.2.4.

Si hacemos $\alpha = 0$ en la ecuación (5.1) se obtiene la ligadura Hamiltoniana efectiva de Bianchi I [20]. Además, si consideramos Bianchi II ($\alpha = 1$) podemos recobrar Bianchi I como un caso límite cuando $x \rightarrow 0$, o equivalentemente $p_1^3 \gg p_2 p_3$ (en variables métricas esta condición se expresa como $a_2 a_3 \gg a_1$). Es importante tener

en cuenta que Bianchi I es un caso límite de Bianchi II y que no esta contenido dentro de Bianchi II.

Las ecuaciones de movimiento para la teoría efectiva se derivan de los corchetes de Poisson de las variables del espacio de fase con el Hamiltoniano, estas ecuaciones son

$$\dot{p}_1 = \frac{p_1^2}{\gamma \bar{\mu}_1} (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \lambda x) \cos \bar{\mu}_1 c_1, \quad (5.5)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{p_2^2}{\gamma \bar{\mu}_2} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) \cos \bar{\mu}_2 c_2, \quad (5.6)$$

$$\dot{p}_3 = \frac{p_3^2}{\gamma \bar{\mu}_3} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_2 c_2) \cos \bar{\mu}_3 c_3, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 = -\frac{p_2 p_3}{2\gamma \lambda^2} \Big[& 2(\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & + \bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) - \bar{\mu}_2 c_2 \cos \bar{\mu}_2 c_2 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & - \bar{\mu}_3 c_3 \cos \bar{\mu}_3 c_3 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_2 c_2) + \lambda^2 x^2 (1 + \gamma^2) \\ & + \lambda x (\bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 - \sin \bar{\mu}_1 c_1) \Big], \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_2 = -\frac{p_1 p_3}{2\gamma \lambda^2} \Big[& 2(\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & - \bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) + \bar{\mu}_2 c_2 \cos \bar{\mu}_2 c_2 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & - \bar{\mu}_3 c_3 \cos \bar{\mu}_3 c_3 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_2 c_2) \Big] - \lambda^2 x^2 (1 + \gamma^2) \\ & - \lambda x (\bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 - 3 \sin \bar{\mu}_1 c_1) \Big], \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_3 = -\frac{p_1 p_2}{2\gamma \lambda^2} \Big[& 2(\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & - \bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) - \bar{\mu}_2 c_2 \cos \bar{\mu}_2 c_2 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & + \bar{\mu}_3 c_3 \cos \bar{\mu}_3 c_3 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_2 c_2) \Big] - \lambda^2 x^2 (1 + \gamma^2) \\ & - \lambda x (\bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 - 3 \sin \bar{\mu}_1 c_1) \Big], \end{aligned} \quad (5.10)$$

Finalmente, para la materia tenemos

$$\dot{p}_\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\phi = \text{constante}, \quad (5.11)$$

$$\dot{\phi} = -p_\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = -p_\phi \tau. \quad (5.12)$$

Notese que las ecuaciones para la materia son iguales a las ecuaciones clásicas (3.57, 3.58), por lo tanto el campo escalar ϕ también juega el papel de tiempo interno. El momento del campo p_ϕ es conservado y su valor coincide con su valor clásico. De las ecuaciones para las tríadas ($\dot{p}_i$) se puede ver que el rebote en la dirección i ocurre cuando $\cos(\bar{\mu}_i c_i) = 0$, condición que en general se satisface a diferentes tiempo para cada dirección. Esta afirmación no implican que hay más de un rebote en la densidad; la densidad solo presenta un rebote que es cuando la expansión θ es cero, el cual es llamado rebote *global*.

Se pueden usar las ecuaciones de movimiento para obtener una forma explícita de θ' (derivada de la expansión con respecto al tiempo cósmico), la cual es necesaria para calcular el escalar de Ricci. Es directo mostrar que

$$\begin{aligned} \theta' = \frac{1}{2\gamma\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^3 [2 \sin \bar{\mu}_i c_i + \cos \bar{\mu}_i c_i (\sin' \bar{\mu}_j c_j + \sin' \bar{\mu}_k c_k)] \right. \\ \left. + \lambda x + \frac{\lambda x}{2} \cos \bar{\mu}_1 c_1 \left(\frac{p'_2}{p_2} + \frac{p'_3}{p_3} - \frac{3p'_1}{p_1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde $j \neq i \neq k \neq j$ y $\sin'(\bar{\mu}_i c_i) = \cos(\bar{\mu}_i c_i) [\bar{\mu}'_i c_i + \bar{\mu}_i c'_i]$ con $\bar{\mu}'_i = -\bar{\mu}_i H_i$. Sería interesante reescribir la ecuación (5.13) en términos de cantidades observables ($H_i, \theta, \rho, \sigma^2$), lo cual representaría una generalización de la ecuación de Raychaudhuri. Finalmente, de las ecuaciones para $\dot{p}_i$ y $\dot{c}_i$ se puede obtener que

$$c_3 p_3 - c_2 p_2 =: \alpha_{32} \quad (5.14)$$

es una cantidad conservada y su valor es el mismo que su equivalente clásico (3.61). Las cantidades conservadas (p_ϕ y α_{32}) pueden ser usadas para verificar que las soluciones numéricas estan evolucionando correctamente y permanecen sobre la superficie de ligadura.

5.2. Soluciones Numéricas *

En esta sección mostraremos las soluciones numéricas para Bianchi II. Estas soluciones admiten diferentes límites que pueden ser usados para comprobar su validez y explorar los nuevos resultados que Bianchi II ofrece. Para estudiar sistemáticamente las soluciones necesitaremos tener en cuenta los siguientes hechos:

1. Sobre todas las soluciones la ligadura (o equivalentemente p_ϕ) y $\alpha_{32} = c_3 p_3 - c_2 p_2$ se conservan.
2. En las soluciones clásicas α_{12} y α_{13} se conservan.

3. Cuando $\alpha = 0$ ó $x = \sqrt{p_2 p_3 / p_1^3} \rightarrow 0$ (con $\alpha = 1$), Bianchi II se reduce a Bianchi I.
4. Cuando $p_1 = p_2 = p_3$ y $c_1 = c_2 = c_3$, Bianchi I se reduce al caso isotrópico.
5. En el caso isotrópico todas las soluciones a las ecuaciones efectivas tienen una densidad máxima igual a la densidad crítica $\rho_{\text{crit}} = \frac{3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} \approx 0,41 \rho_{\text{Pl}}$.
6. En el límite de Bianchi I se espera obtener una densidad máxima menor que la densidad crítica.
7. Las soluciones clásicas y efectivas deben ser iguales lejos de la región del rebote, de hecho las soluciones efectivas de Bianchi I deben conectar dos soluciones clásicas con exponentes de Kasner que satisfacen la relación

$$k_1, k_2, k_3 \rightarrow k_1 - \frac{2}{3}, k_2 - \frac{2}{3}, k_3 - \frac{2}{3} \quad (5.15)$$

como fue mostrado en [41].

8. En Bianchi II se espera que la densidad máxima sobre cada solución sea menor a $1,315 \rho_{\text{crit}}$.
9. Las soluciones clásicas divergen.
10. Las soluciones numéricas deben converger.

Usando todos estos hechos podemos iniciar la exploración de las soluciones de Bianchi II. Empezaremos con el límite clásico con el fin de mostrar que lejos del rebote las soluciones a las ecuaciones efectivas se reducen a soluciones clásicas. Después se explora el límite isotrópico incluido dentro del límite de Bianchi I cuando la anisotropía es cero. Luego se agregan las anisotropías al límite de Bianchi I y se muestra que se reproducen las soluciones ya conocidas de Bianchi I [41]. Después pasaremos al modelo simétrico bajo rotaciones locales de Bianchi II para explorar como hallar soluciones con densidad en el rebote igual a la densidad máxima. Finalmente se estudian las soluciones en el límite de vacío donde se puede obtener el valor máximo de la cizalladura.

Para realizar el análisis de las soluciones todas las gráficas se presentan en el tiempo cósmico. La integración numérica de las ecuaciones fue realizada usando un metodo Runge-Kutta 4¹. Las unidades usadas son: $\hbar = 1, c = 1, G = 1, \gamma = 0,23753295796592, L_1 = 1, L_2 = 1, L_3 = 1, \epsilon = 1$, el paso de tiempo usado es $dt = 5 \times 10^{-6}$. En todas las figuras la densidad se grafica con la normalización ρ/ρ_{crit} .

¹El programa es de código abierto, se puede solicitar por correo electrónico al autor.

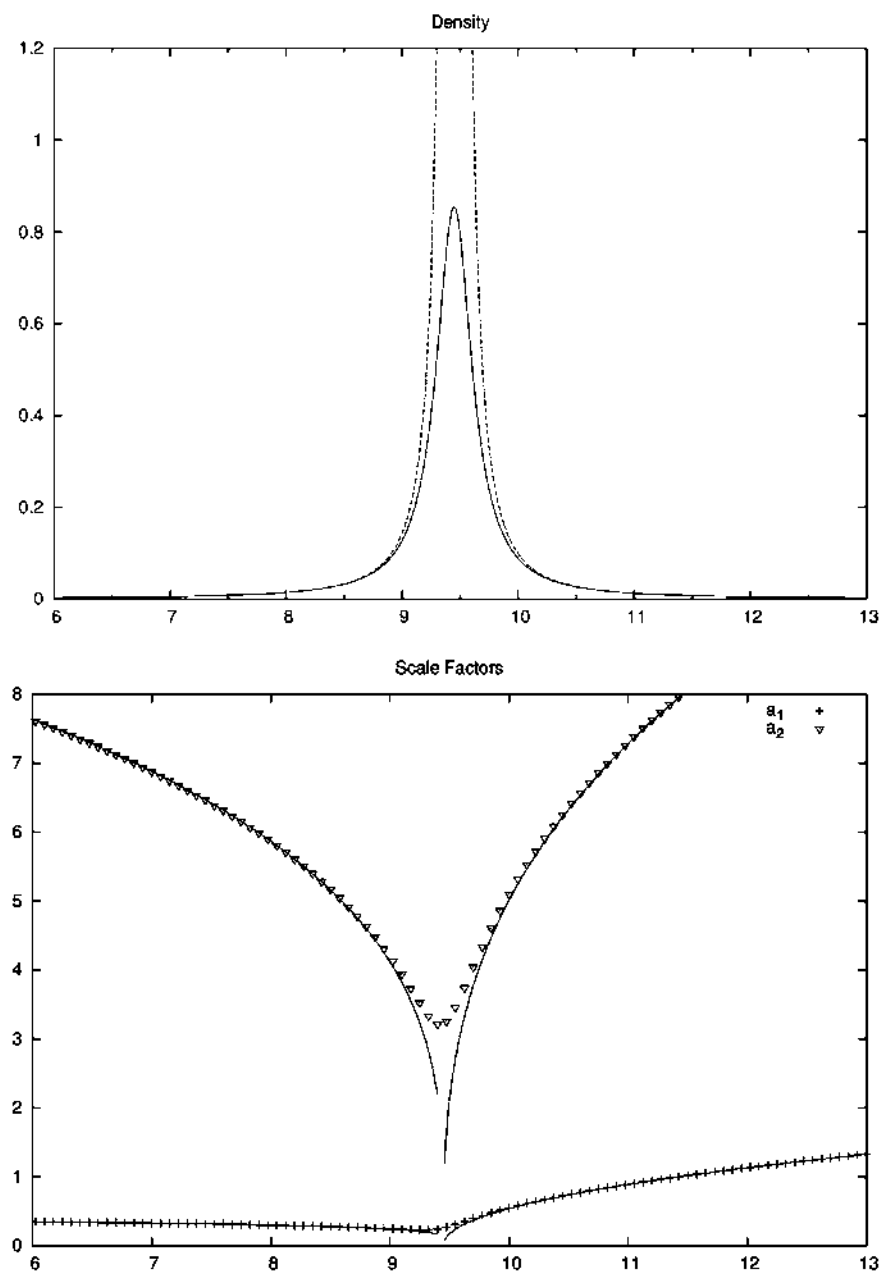


Figura 5.1: Comparación entre soluciones clásicas y efectivas. Se puede apreciar que cerca del big bang las soluciones clásicas presentan una densidad infinita debido a que los factores de escala se van a cero.

5.2.1. Comparación entre Soluciones Clásicas y Efectivas *

En la figura 5.1 la densidad y dos de los factores de escala (el tercero no se grafica por cuestiones de visualización) son comparados para las soluciones clásicas y efectivas. Se puede apreciar claramente que lejos del big bang las soluciones clásicas y efectivas coinciden. Cerca del big bang se observa que la densidad clásica diverge en un tiempo finito, mientras que en la solución efectiva presenta un rebote. Esto también le ocurre a la cizalladura (que no se muestra en la figura). El hecho de que estas cantidades permanezcan finitas es debido a que los factores de escala presentan un rebote y no tienden a cero en un tiempo finito (hay soluciones donde algunos de los factores de escala no rebotan y continúan acercándose a cero, pero necesitan de un tiempo infinito para llegar a cero). Esto ilustra la manera en la cual las singularidades son resueltas.

Entenderemos por resolución de la singularidad en el marco efectivo como la posibilidad de evolucionar las soluciones por tiempos arbitrariamente grandes y que estas soluciones permanezcan finitas, esto es una señal de que las geodésicas son inextensibles. Clásicamente para universos homogéneos e isotrópicos las singularidades se presentan cuando el factor de escala va a cero en un tiempo finito, lo cual hace la densidad (expansión y cizalladura) infinita e incompletas las geodésicas. Si la densidad, expansión y cizalladura permanecen finitas y pueden ser evolucionadas para cualquier intervalo de tiempo entonces se dice que las singularidades están resueltas, i. e., los factores de escala no son iguales a cero en un tiempo finito o equivalentemente las geodésicas son inextensibles [65, 36].

Las condiciones iniciales para las soluciones clásicas y efectivas se imponen en el tiempo $t = 100$ y están dadas por: $c_1 = 0,01$, $c_2 = 0,02$, $c_3 = 0,03$, $p_1 = 10000$, $p_2 = 2000$, $p_3 = 200$ (se evoluciona hacia atrás en el tiempo), el momento del campo escalar $p_\phi = 108,9$ se calcula de la ligadura Hamiltoniana. Las condiciones iniciales para la otra solución clásica en el tiempo $t = 0$ son: $c_1 = -1,920756 \times 10^{-3}$, $c_2 = -7,971627 \times 10^{-2}$, $c_3 = -19,61028$, $p_1 = 15864,53$, $p_2 = 635,5782$, $p_3 = 4,317425$ (se evoluciona hacia adelante en el tiempo).

5.2.2. Límite isotrópico *

Cuando $x \rightarrow 0$ Bianchi II se acerca al límite de Bianchi I, si además $p_1 = p_2 = p_3$ y $c_1 = c_2 = c_3$ entonces Bianchi I se reduce al caso isotrópico. Las soluciones de Bianchi II cerca al límite isotrópico son mostradas en las figuras 5.2 y 5.3, donde se puede apreciar que las soluciones efectivas presentan un valor máximo de la densidad igual a la densidad crítica ρ_{crit} [17, 8]. La cizalladura es cercana a cero (en este caso es menor a $1,2 \times 10^{-10}$ en unidades de Planck) y presenta un comportamiento no trivial debido a que presenta cuatro máximos y se hace cero cuando

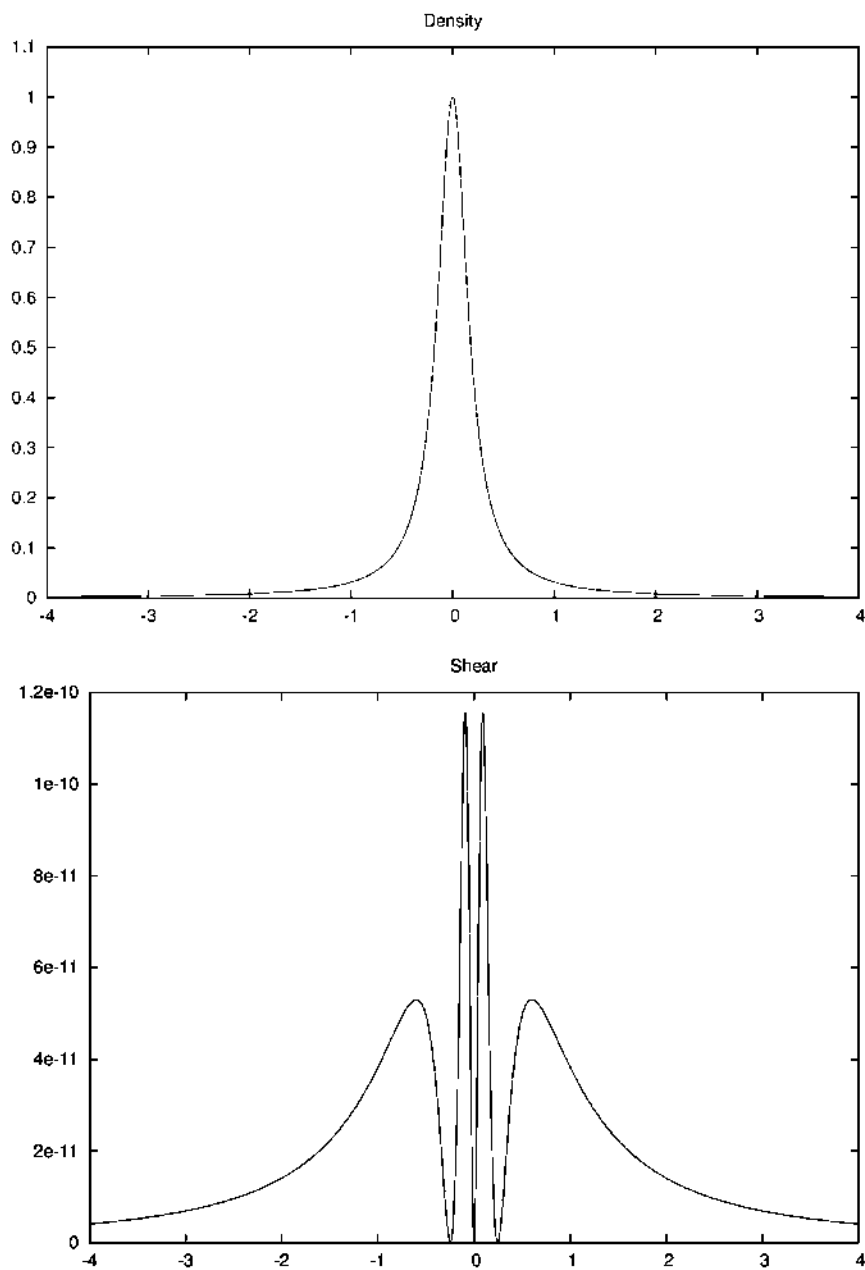


Figura 5.2: Límite isotrópico. La densidad en el rebote es $\rho/\rho_{\text{crit}} = 1$; la cizalladura es cercana a cero.

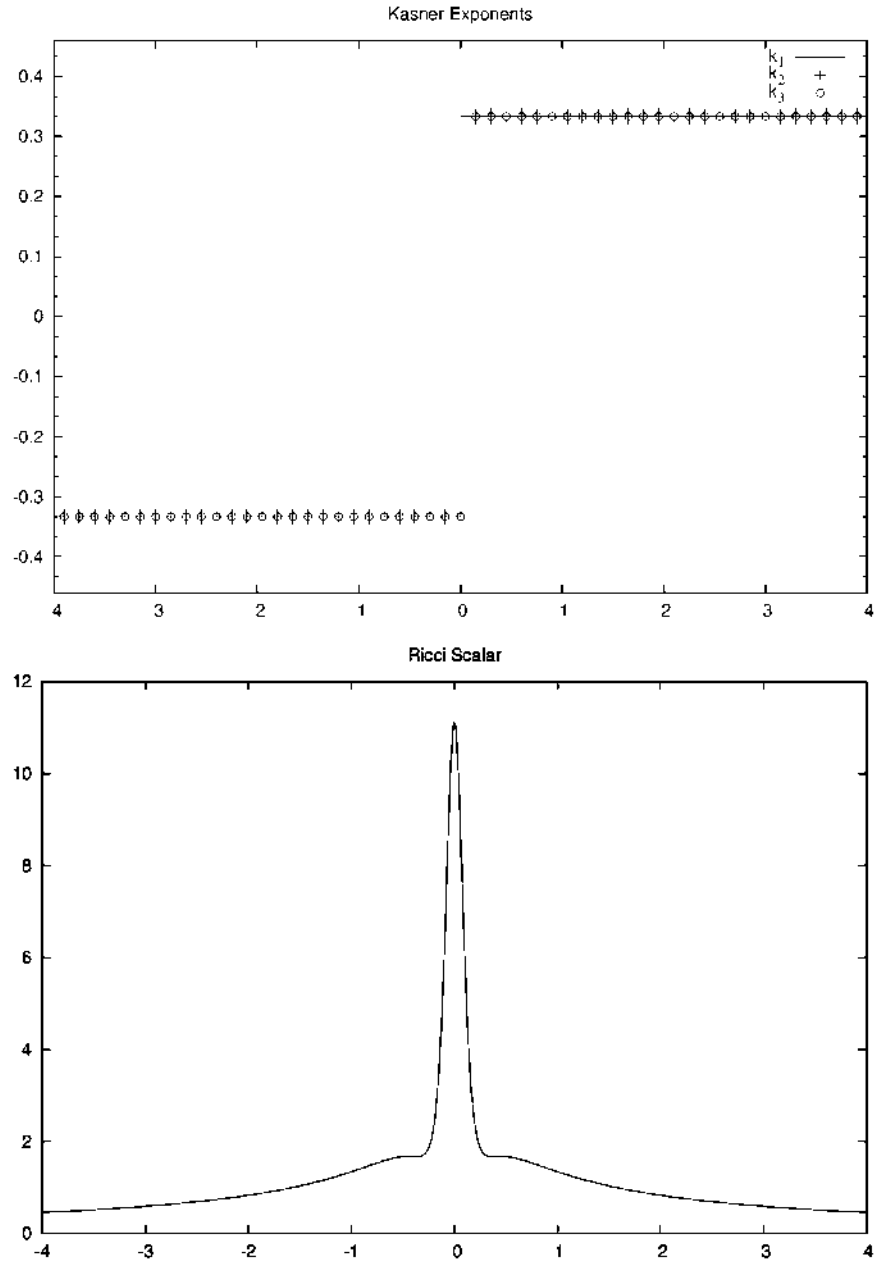


Figura 5.3: Límite isotrópico. Los exponentes de Kasner son iguales y cambian de $1/3$ de $1/3 - 2/3 = -1/3$ cuando se evoluciona hacia atrás en el tiempo; el escalar de Ricci cambia de manera drástica su comportamiento cerca del rebote y presenta su valor máximo en el rebote.

la densidad es máxima. Esta es la primera solución que es completamente distinta a las soluciones conocidas para el caso isotrópico y de Bianchi I. La cizalladura tiene un valor pequeño pero distinto de cero debido a que esta solución no es isotrópica sino que es cercana a una solución isotrópica. Se debe tener en cuenta que las soluciones para Bianchi I (y el caso isotrópico) no están contenidas dentro del espacio de soluciones de Bianchi II.

Las condiciones iniciales se imponen en el rebote con el fin de tener control sobre la isotropía, es decir, cuando $\bar{\mu}_1 c_1 = \bar{\mu}_2 c_2 = \bar{\mu}_3 c_3 = \pi/2$ (si la solución es isotrópica las tres direcciones rebotan al mismo tiempo, pero el recíproco no es cierto), luego se evoluciona hacia atrás y adelante en el tiempo. Con estas relaciones solo se necesitan tres valores iniciales que pueden ser impuestos en las variables (c_1, c_2, c_3) ó (p_1, p_2, p_3) o combinaciones de ellas. Nosotros consideramos $p_1 = 1 \times 10^5$, $p_2 = p_3 = 1 \times 10^3$ (lo cual satisface que $x \rightarrow 0$, i. e., $p_1^3 \gg p_2 p_3$) y los valores $c_1 = 2,185$, $c_2 = c_3 = 2,185 \times 10^2$ se calculan usando el hecho de que empezamos en el rebote ($\bar{\mu}_i c_i = \pi/2$), el momento del campo se obtiene del Hamiltoniano $p_\phi = 2,86 \times 10^5$.

Nótese que en este caso no es verdad que $p_1 = p_2 = p_3$ y $c_1 = c_2 = c_3$. Entonces uno se puede preguntar ¿Por qué esta solución es isotrópica? la respuesta es que c_1 y p_1 son reescalamientos de $c_{2,3}$ y $p_{2,3}$ que pueden ser vistos como reescalamientos de los factores de escala, tal que el criterio para decir que es isotrópico es que las relaciones $a_1/a_2, a_2/a_3, a_1/a_3$ y $H_1 = H_2 = H_3$ permanezcan constantes, las cuales satisfacen nuestras condiciones iniciales. Esto puede ser imaginado como un universo isotrópico descrito por la evolución de un paralelepípedo. La mejor manera de ver que esta solución es realmente isotrópica es estudiar los exponentes de Kasner (Figura 5.3), los cuales son iguales, $k_1 = k_2 = k_3 = \pm 1/3$. Los diferentes signos especifican cuando las direcciones se están expandiendo ($k_i > 0$) o contrayendo ($k_i < 0$).

5.2.3. Límite de Bianchi I *

Cuando $x \rightarrow 0$ Bianchi II tiene como límite Bianchi I, el cual ha sido estudiando de manera exhaustiva [41] y puede ser usado como punto de referencia. En el límite de Bianchi I se espera tener una densidad máxima menor a la densidad crítica ρ_{crit} y una cizalladura distinta de cero con valor máximo en el rebote, además Σ^2 y Ω deber ser cantidades conservadas en la región clásica (donde $\Sigma^2 + \Omega = 1$, dado que $K = 0$ en Bianchi I). Los exponentes de Kasner deben satisfacer la ligadura para las soluciones de Bianchi I ($k_1 + k_2 + k_3 = \pm 1$ y $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_\phi^2 = 1$) y deben de cambiar en la forma $k_i \rightarrow k_i - 2/3$ cuando se evoluciona hacia atrás en el tiempo, como fue mostrado en [41]. Todos estos hechos son mostrados en las figuras 5.4, 5.5 y 5.6, las cuales nos dicen que en el límite de Bianchi I las soluciones efectivas

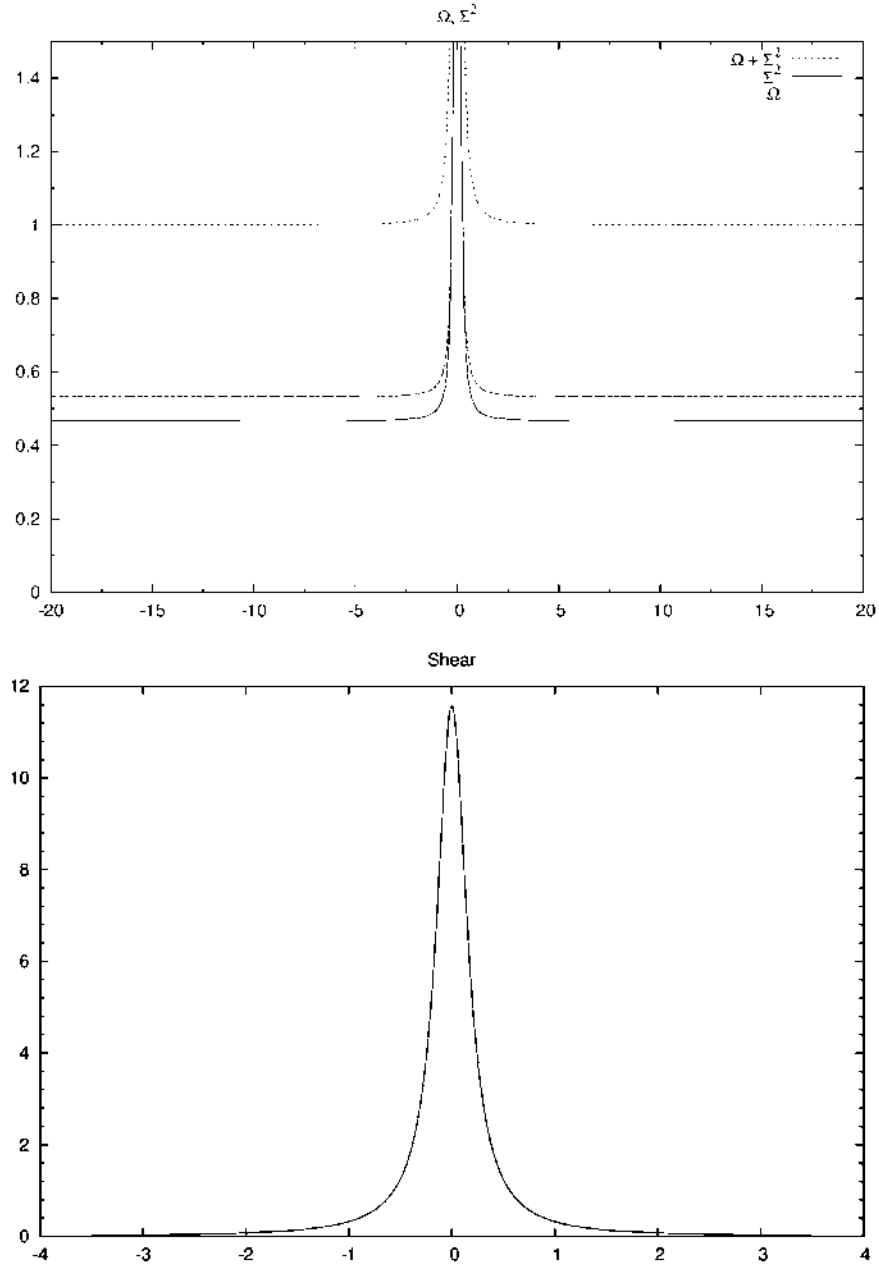


Figura 5.4: Límite de Bianchi I. La densidad y la cizalladura tienen una contribución dinámica ($\Omega \neq 0, \Sigma^2 \neq 0$); La cizalladura alcanza su máximo valor (para Bianchi I) en el rebote.

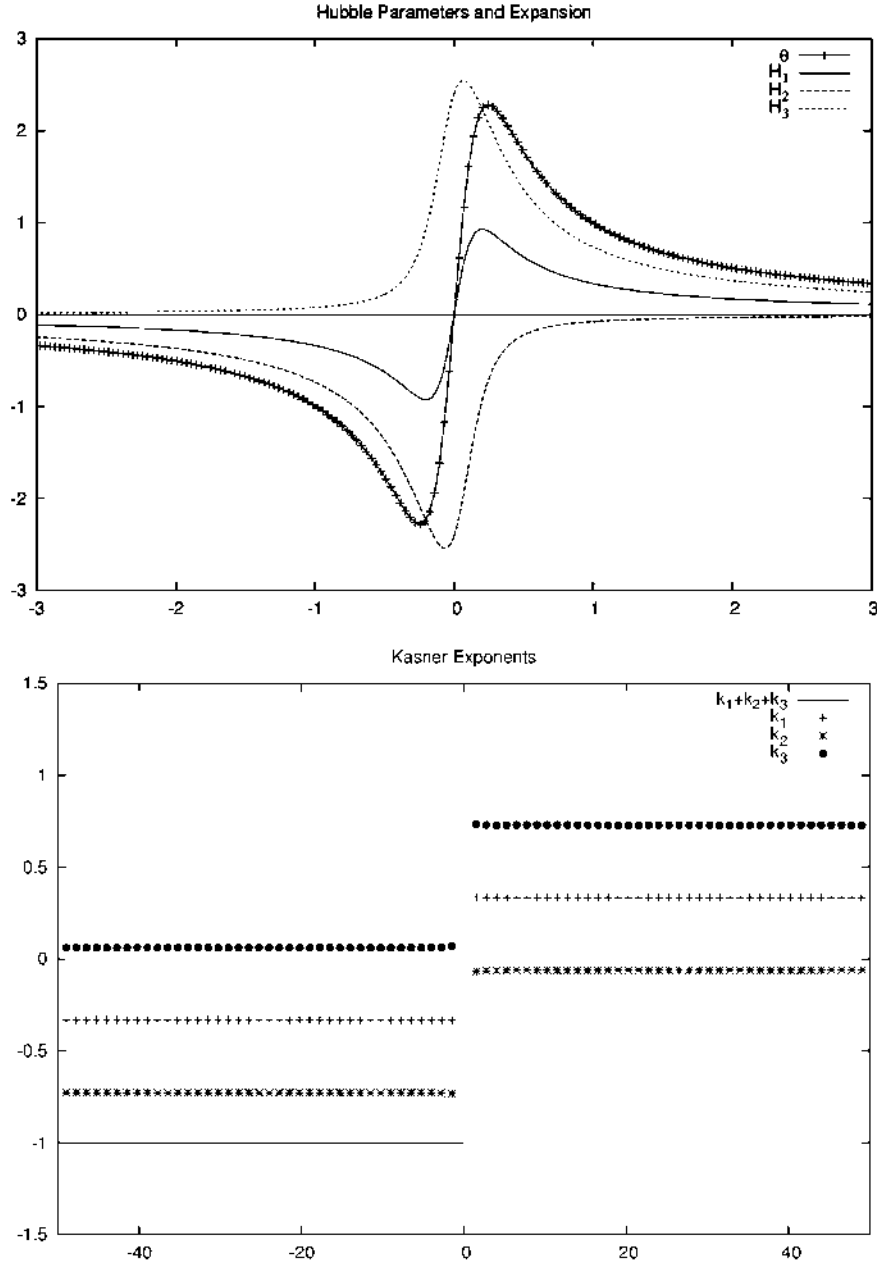


Figura 5.5: Límite de Bianchi I. Los exponentes de Kasner cambian de k_i a $k_i - 2/3$ cuando se evoluciona hacia atrás en el tiempo, como se demostró en [41]; una dirección se expande (a_3), una se contrae (a_2) y una rebota (a_1); la expansión tiene un solo cero (rebote global) y es finita todo el tiempo.

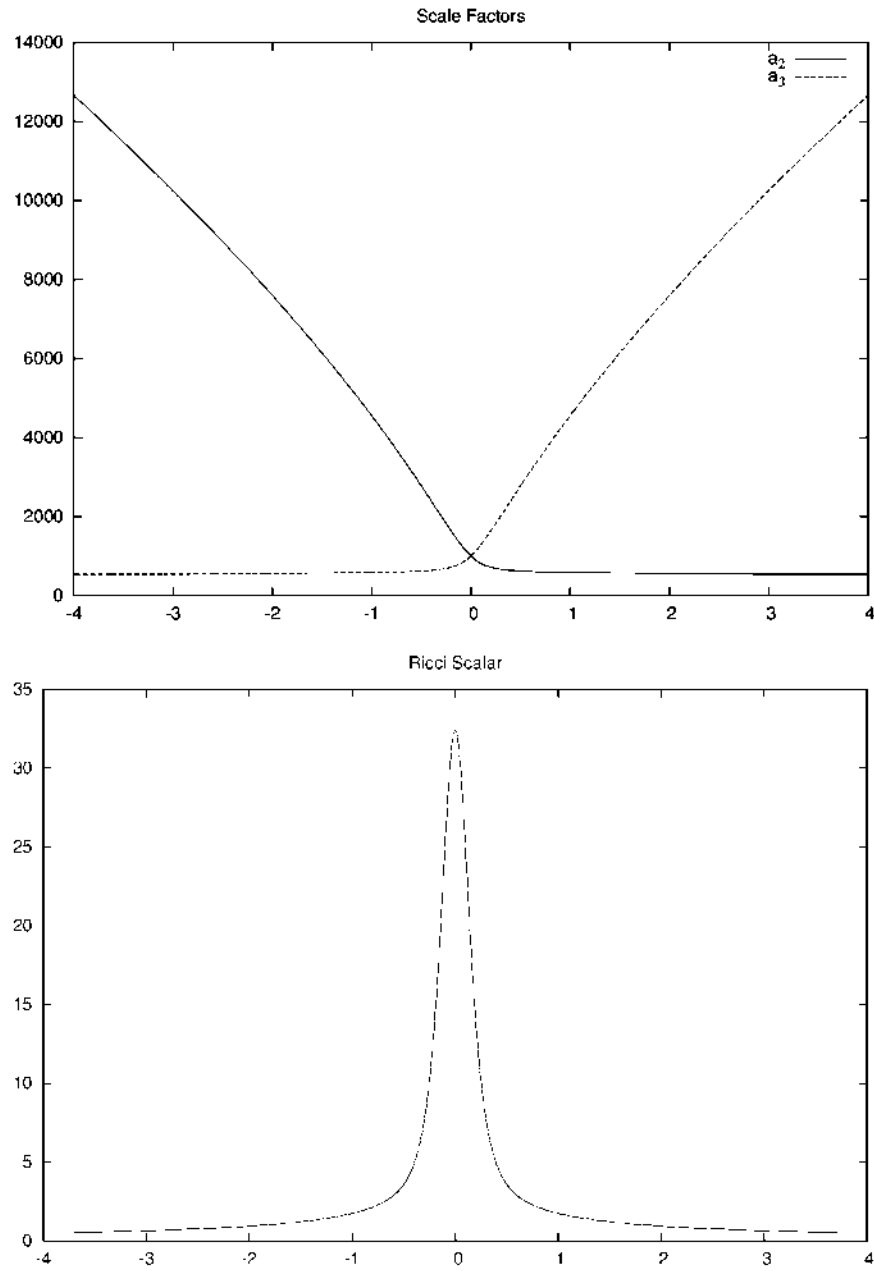


Figura 5.6: Límite de Bianchi I. Una dirección se expande (a_3) y una se contrae (a_2); el escalar de Ricci presenta cambios pequeños en su comportamiento en comparación con el caso isotrópico y es finito todo el tiempo.

de Bianchi II reproducen el comportamiento conocido de Bianchi I.

Una nueva característica de esta solución es que presenta el valor máximo de la cizalladura para Bianchi I, como se puede apreciar en la figura 5.4, donde el valor de la cizalladura en el rebote es $11,57 = \frac{10,125}{3\gamma^2\lambda^2}$, como fue reportado en [45]. Más aun, solo una dirección (a_1) rebota y las otras dos direcciones (a_2, a_3) no lo hacen, i. e., H_2, H_3 son diferente de cero para todo tiempo finito, esto implica que estas direcciones continúan tendiendo a cero (o infinito) pero ahora necesitan de un tiempo infinito para alcanzar estos valores. Nótese que en la región clásica no todas las direcciones se expanden (o contraen), esta clase de universos contiene también una singularidad pero es llamada tipo cigarrillo y es diferente de la singularidad donde todas las direcciones se expanden o contraen, la cual es llamada singularidad tipo punto. Por lo tanto nuestras simulaciones muestran que las singularidades tipo cigarrillo también se resuelven, usando la noción de resolución de singularidad explicada en la sección 5.2.1.

En este caso las condiciones iniciales que se tomaron fueron: $\bar{\mu}_1 c_1 = \pi/2$, $\bar{\mu}_2 c_2 = \pi/6$, $\bar{\mu}_3 c_3 = 5\pi/6$ y $p_1 = 1 \times 10^6$, $p_2 = 100$, $p_3 = 100$ (lo cual implica que $x = \sqrt{p_2 p_3 / p_1^3} \approx 0$). Con estas condiciones iniciales se obtiene que $c_1 = 0,069$, $c_2 = 230,28$, $c_3 = 1151,39$ y $p_\phi = 5,84 \times 10^4$. El tiempo inicial es tomado en el rebote global ($\theta = 0$) y se evoluciona hacia atrás y adelante en el tiempo.

5.2.4. Soluciones de Bianchi II Simétricas bajo Rotaciones Locales *

Esta subclase de modelos son caracterizados por los factores de escala a_1, a_2, a_3 que satisfacen que $a_2 = a_3$. Esto significa que cada punto del espacio-tiempo es invariante bajo rotaciones alrededor de un eje espacial preferencial. En nuestras variables esto se escribe como $p_2 = p_3$ y $c_2 = c_3$ (si estas igualdades se cumplen para las condiciones iniciales entonces se cumplirán durante toda la evolución). Este tipo de soluciones serán útiles para estudiar el límite cuando la densidad es igual al valor máximo permitido. En Bianchi II uno espera que la densidad sea estrictamente menor que $1,315\rho_{\text{crit}}$ debido a la presencia de anisotropías. Mostraremos que esto no es cierto y que el valor máximo de la densidad puede ser alcanzado como consecuencia de tener cizalladura cero en el rebote. Esto es un hecho bastante distinto a lo que ocurre en Bianchi I donde la presencia de anisotropías hacia la cizalladura siempre mayor a cero en el rebote.

Para obtener control sobre el valor máximo de la densidad se ponen las condiciones iniciales en el rebote, i. e., cuando $\bar{\mu}_1 c_1 = \bar{\mu}_2 c_2 = \bar{\mu}_3 c_3 = \pi/2$ y luego se evoluciona hacia adelante y atrás en el tiempo. También es necesario hacer $x = \frac{2}{(1+\gamma^2)\lambda} \approx 0,83$ que es el valor para el cual la densidad se hace máxima. Si tomamos $p_2 = p_3 = 1000$

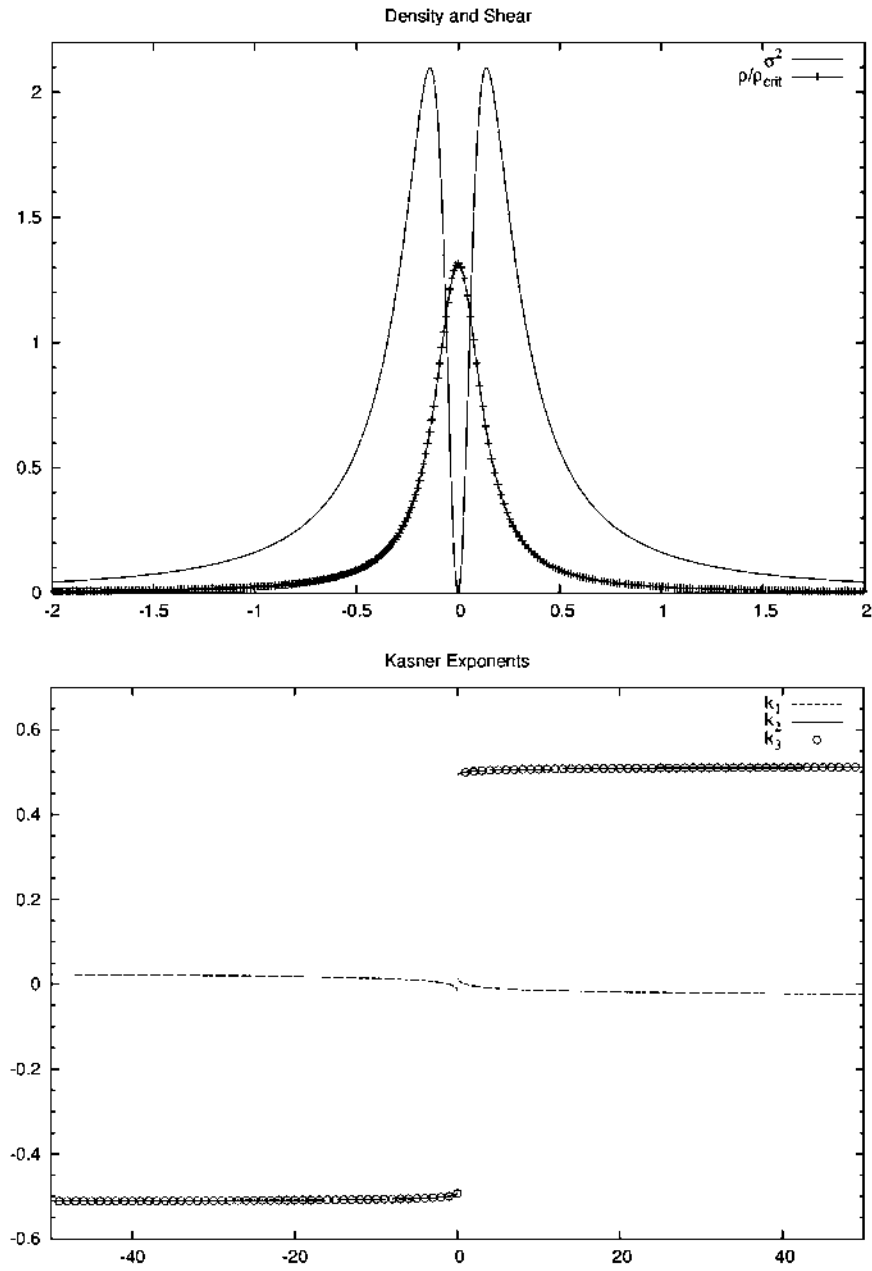


Figura 5.7: Solución simétrica bajo rotaciones locales. La densidad alcanza su valor máximo cuando la cizalladura se hace cero en el rebote, aunque la cizalladura sea diferente de cero en el resto de la evolución; los exponentes de Kasner k_i para las direcciones 2 y 3 son iguales, esto muestra la que solución si es simétrica bajo rotaciones locales.

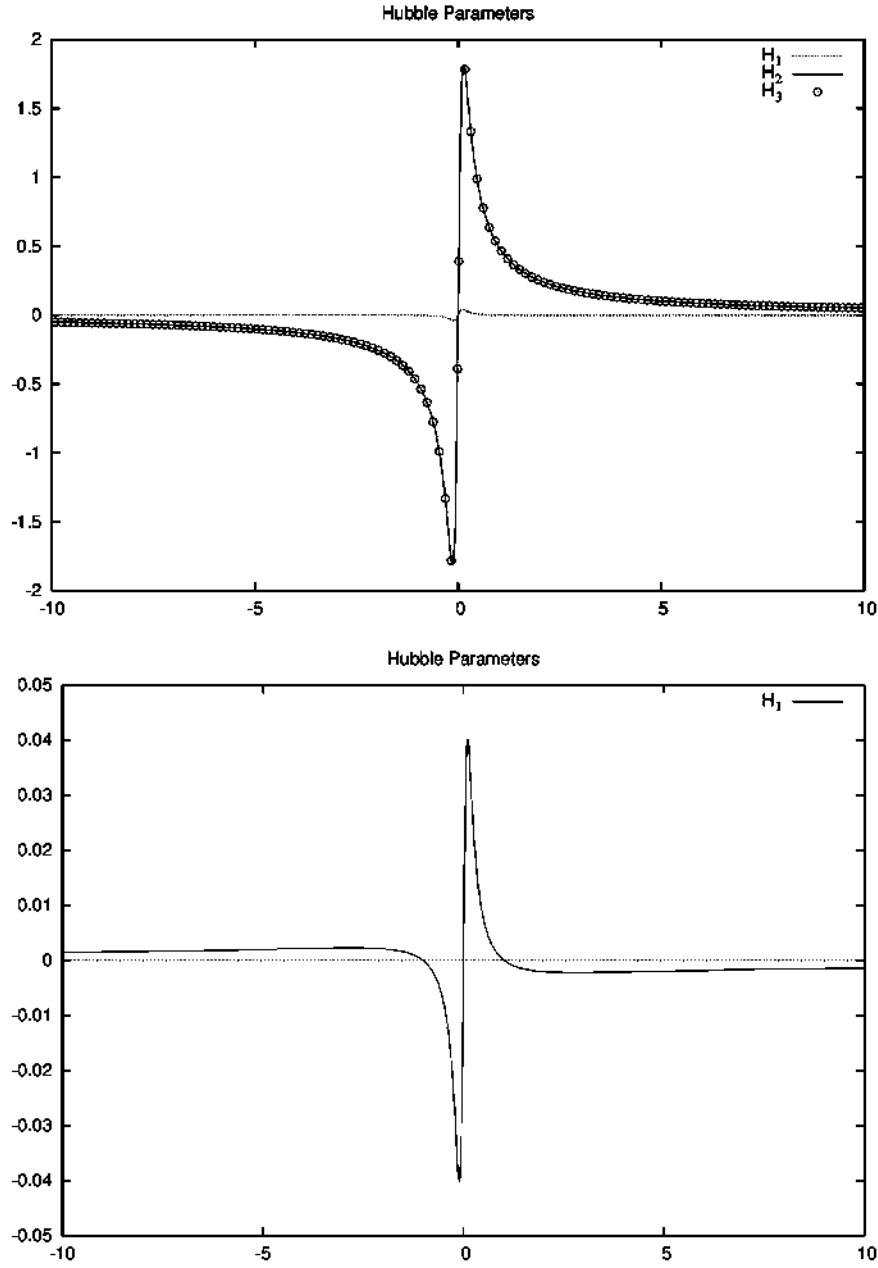


Figura 5.8: Solución simétrica bajo rotaciones locales. Los observables H_i para las direcciones 2 y 3 son iguales; el parámetro de Hubble H_1 presenta tres ceros.

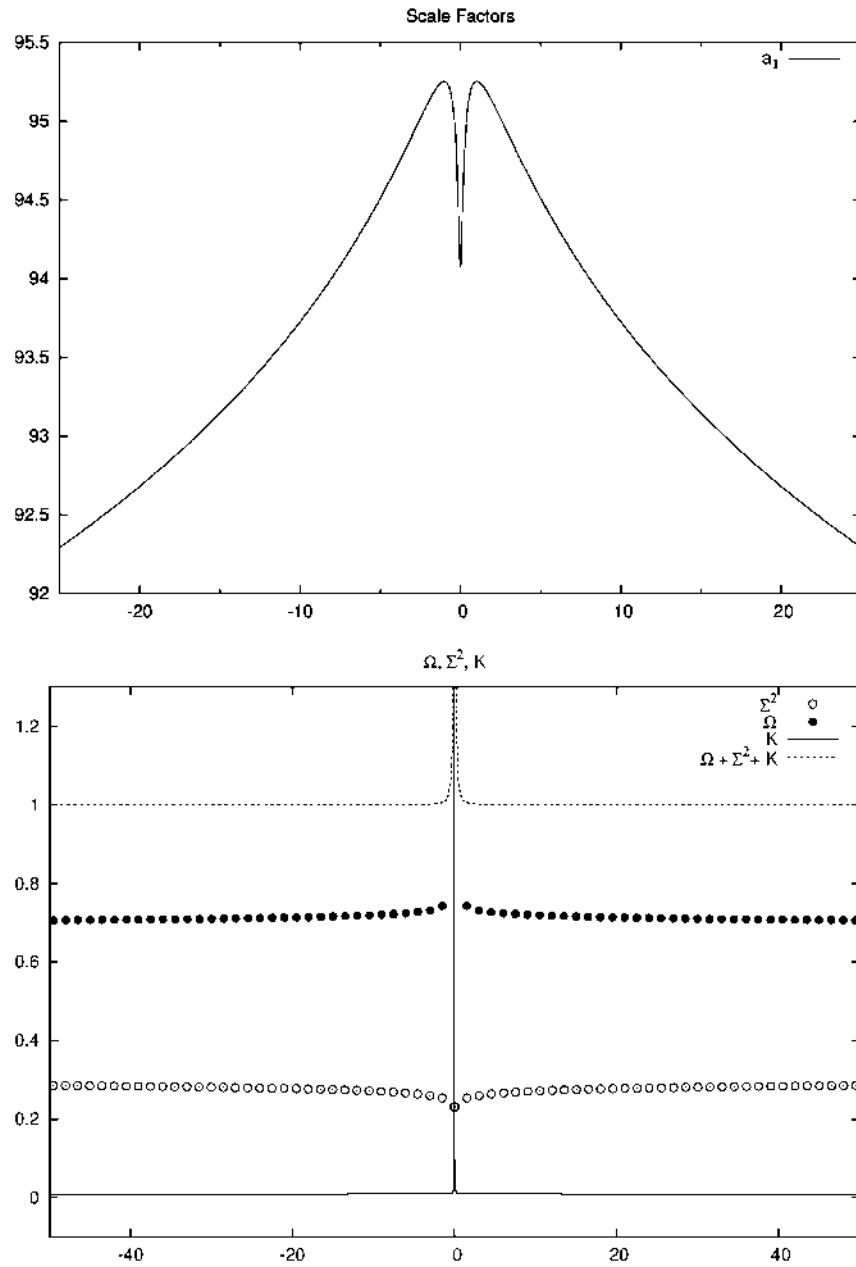


Figura 5.9: Solución simétrica bajo rotaciones locales. El factor de escala direccional a_1 rebota una vez y presenta dos puntos de retorno (máximos locales); el parámetro de curvatura K es diferente de cero y asintóticamente satisface que $\Omega + \Sigma^2 + K = 1$.

entonces $p_1 = 113$ y usando el hecho de que estamos iniciando en el rebote ($\bar{\mu}_i c_i = \pi/2$) se pueden calcular $c_1 = 64,98$, $c_2 = c_3 = 7,34$; de la ligadura Hamiltoniana se obtiene $p_\phi = 11029,97$.

La solución es graficada en la figura 5.7, donde se muestra que la solución alcanza el valor máximo de la densidad en el rebote. La cizalladura es cero en el rebote y presenta un comportamiento no trivial, tal como dos máximos. En la evolución de los exponentes de Kasner se puede observar (de izquierda a derecha) que dos direcciones (a_2, a_3) se contraen y una (a_1) se expande, además de que estos exponentes se asemejan a los exponentes de Bianchi I lejos del rebote. Esto es debido a que clásicamente Bianchi II se acerca a Bianchi I cuando el tiempo tiende a infinito [74, 73, 59], por lo tanto en la región clásica los exponentes de Kasner de Bianchi II tienen como límite (para tiempos muy grandes) los exponentes de Kasner de Bianchi I. En la figura 5.8 se grafica el parámetro de Hubble H_1 ya que este presenta un nuevo comportamiento, en la figura 5.9 se puede ver que la dirección a_1 tiene un rebote y dos puntos de retorno (máximos locales) los cuales muestran un nuevo comportamiento que no estaba presente en las soluciones isotrópicas o de Bianchi I. Las otras dos direcciones (a_2, a_3) presentan solo un rebote, para un total de tres rebotes direccionales y un rebote global ($\theta = 0$).

En este punto de la discusión se puede hacer la siguiente pregunta: ¿Por qué la densidad puede alcanzar su valor máximo en Bianchi II y no en Bianchi I? Esta pregunta surge del hecho de que ambos modelos presentan nuevos grados de libertad debidos a las anisotropías, entonces en principio deben tener un comportamiento similar respecto a la distribución de energía en ondas gravitacionales. Pero Bianchi II presenta una característica que no estaba presente en Bianchi I que es tener curvatura espacial. Esta curvatura da un nuevo grado de libertad con respecto a las posibles formas en que la densidad de energía se puede distribuir. En Bianchi II la contribución dinámica no solo viene de la densidad de materia y la cizalladura sino que también contribuye la curvatura espacial, esto puede ser entendido de manera cuantitativa del hecho de que el parámetro de curvatura K es diferente de cero (como se puede ver en la figura 5.9). Por lo tanto esto nos da una explicación cualitativa de la diferencia entre Bianchi I y II que pueden ser resumida en el hecho de que en Bianchi II el valor máximo de la densidad puede ser alcanzado por algunas soluciones. Este comportamiento debe estar presente en Bianchi IX [34] ya que también tiene curvatura espacial.

5.2.5. Límite de Vacío *

Finalmente estudiamos las soluciones en el límite de vacío donde la cizalladura es máxima. Al igual que en los límites estudiados anteriormente no se estudiará el

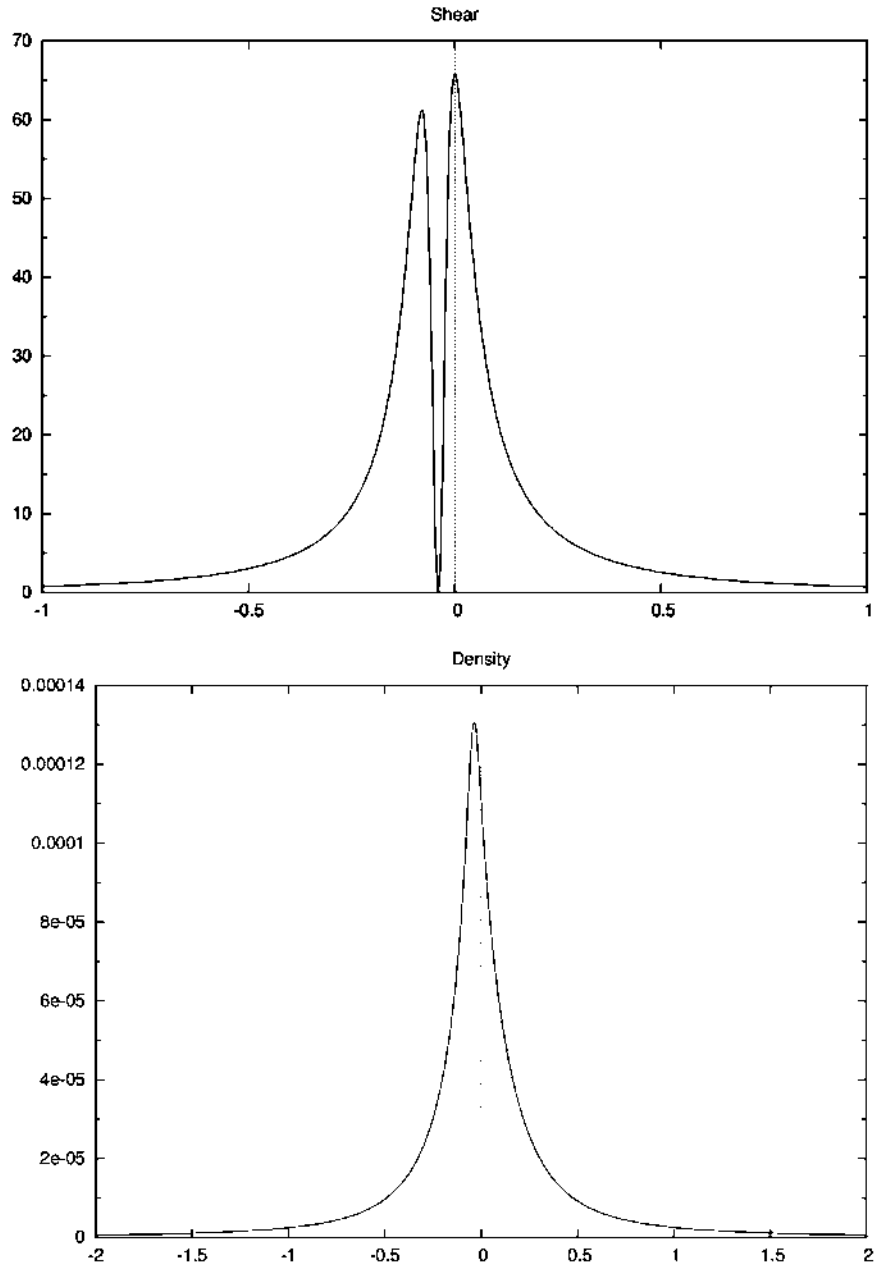


Figura 5.10: Límite de vacío. La cizalladura alcanza su valor máximo a un lado del rebote y alcanza el cero al otro lado del rebote; la densidad es diferente de cero pero tiene un valor pequeño (incluso en el rebote).

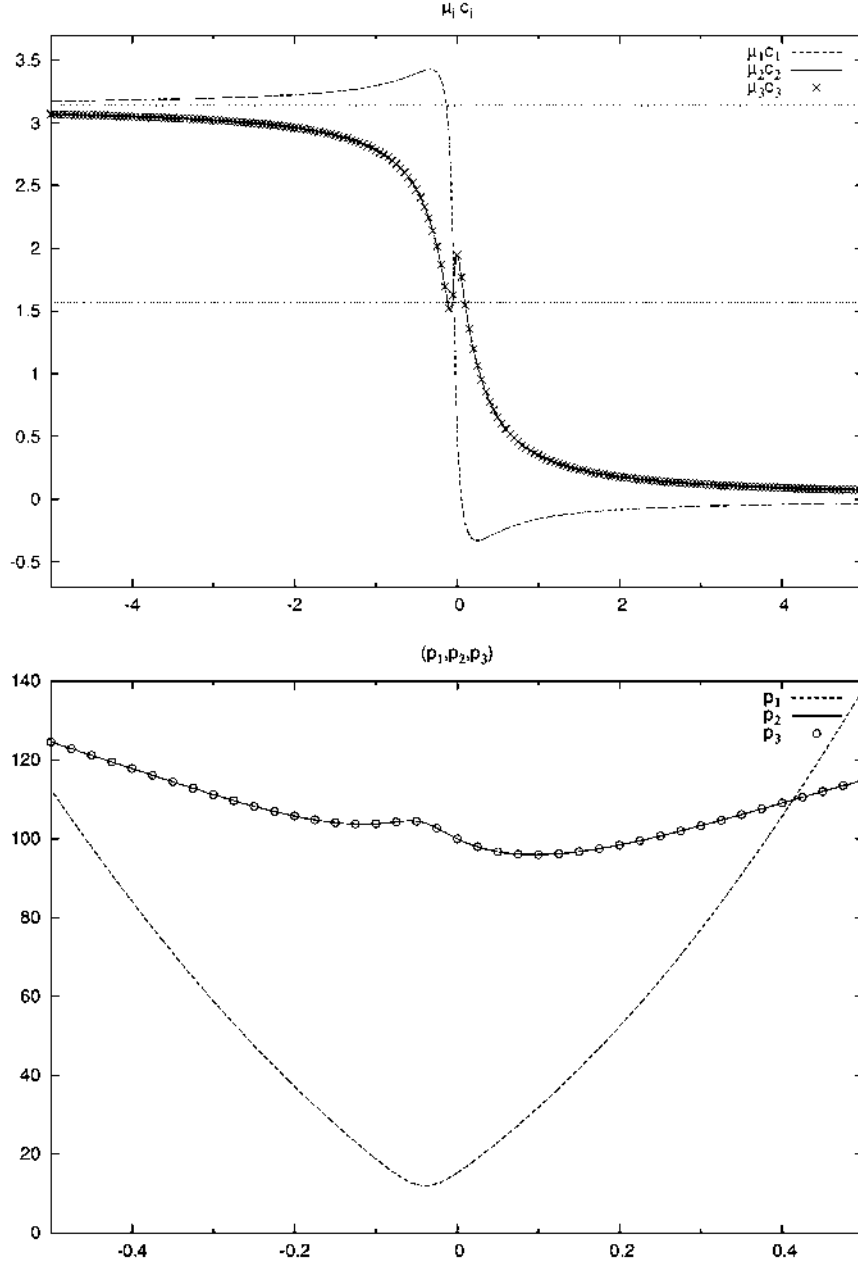


Figura 5.11: Límite de vacío. $\bar{\mu}_i c_i$ evoluciona desde una solución clásica ($\bar{\mu}_i c_i \approx 0$) a otra solución clásica ($\bar{\mu}_i c_i \approx \pi$); $\dot{p}_2$ y $\dot{p}_3$ se hacen cero tres veces.

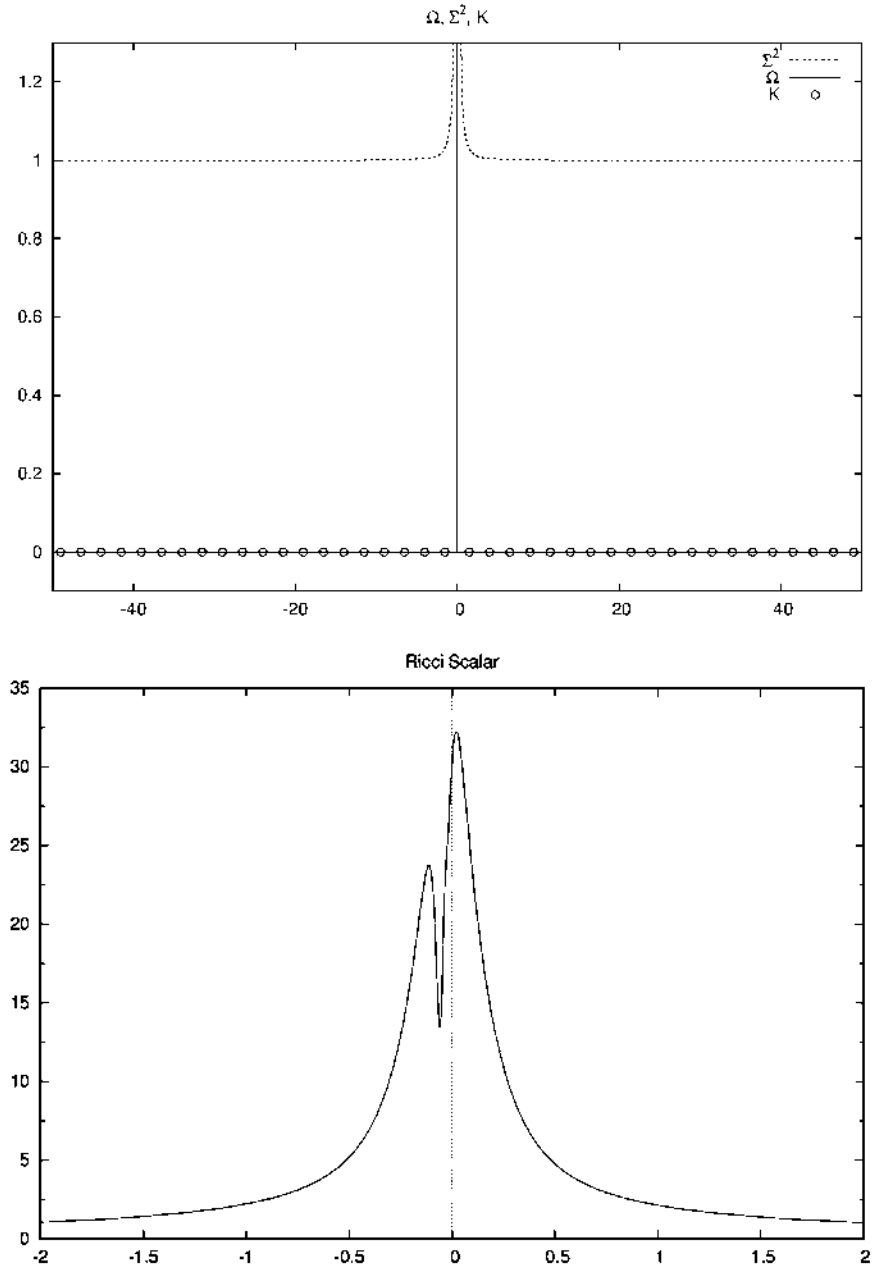


Figura 5.12: Límite de vacío. Toda la contribución dinámica viene de la cizalladura ($\Omega \approx 0$, $K \approx 0$, $\Sigma^2 \approx 1$); el escalar de Ricci alcanza su valor máximo a un lado del rebote y presenta un mínimo local en el otro lado.

caso de vacío ($\rho = 0$) sino el límite cuando $\rho \rightarrow 0$ (o equivalentemente $p_\phi \rightarrow 0$) El problema es que la densidad va a cero en todas las soluciones cuando el tiempo tiende a $\pm\infty$. Por lo tanto necesitamos aclarar que significa el límite de vacío, con el fin de hacer esto se hace necesario tener en cuenta que la densidad alcanza su máximo en el rebote, entonces estaremos interesados en alcanzar el límite de vacío en un tiempo finito (cerca al rebote), es decir, se quieren soluciones con densidad cercana a cero en el rebote o equivalentemente, soluciones en las cuales $\Omega \approx 0$ asintóticamente. Dentro de esta familia de soluciones seleccionaremos aquellas en las cuales la cizalladura alcance su valor máximo, lo cual permitirá estudiar las soluciones extremas donde toda la contribución dinámica viene de las anisotropías.

Para obtener las condiciones iniciales se hallan numéricamente los valores de x y $-\pi/2 < \bar{\mu}_1 c_1, \bar{\mu}_2 c_2, \bar{\mu}_3 c_3 < 3\pi/2$ que hacen la cizalladura máxima imponiendo que la densidad sea cercana a cero. Para hacer esto se utiliza la expresión analítica de la cizalladura [45] y la ligadura Hamiltoniana (5.1). Los valores encontrados son: $x = 1,69, \bar{\mu}_1 c_1 = 0,5616, \bar{\mu}_2 c_2 = \bar{\mu}_3 c_3 = 1,94618$. Estos valores fijan 4 condiciones iniciales (p_1, c_1, c_2, c_3) como funciones de dos parámetros (p_2, p_3) que no son relevantes para estudiar el comportamiento que queremos. En las simulaciones se tomo $p_2 = 100$ y $p_3 = 100$. El tiempo inicial se tomo a $t = 0$ (línea vertical en las gráficas). La solución es mostrada en las figuras 5.10, 5.11 y 5.12. El primer comportamiento no esperado es que la cizalladura se hace cero a un lado del rebote y alcanza su valor máximo al otro lado del rebote. También p_2 y p_3 presentan un nuevo comportamiento ya que $\dot{p}_2$ y $\dot{p}_3$ se hacen cero tres veces, estos ceros se pueden ver en la gráfica de $\bar{\mu}_i c_i$ donde $\bar{\mu}_2 c_2$ y $\bar{\mu}_3 c_3$ cruzan la línea $\pi/2$ tres veces. Este comportamiento no estaba presente en las soluciones de Bianchi I ni en las de Bianchi II estudiadas previamente. De la gráfica 5.10 se puede apreciar que la densidad tiene un valor pequeño y de la gráfica 5.12 para Ω, Σ^2, K , se puede apreciar que toda la contribución dinámica viene de las anisotropías tal como se esperaba.

5.3. Conclusiones *

Se analizaron las soluciones de las ecuaciones efectivas del modelo cuántico de Bianchi II [21] en el contexto de CCL. La validez de las ecuaciones efectivas ha sido verificada en los modelos isotrópicos y se espera que de algunas pistas sobre la dinámica cuántica de los estados semiclásicos, esto se debe a que la teoría efectiva proviene de la construcción de la teoría cuántica completa.

Resumiendo los resultados obtenidos, se consideró el modelo de Bianchi II a nivel clásico y efectivo, usando los resultados previos para Bianchi I se pudo tener control sobre las soluciones del modelo. Se mostró que se recupera Bianchi I en el límite

de $x \rightarrow 0$ o equivalentemente $p_1^3 \gg p_2 p_3$. Es importante recordar que Bianchi I no está contenido en Bianchi II sino que es un caso límite. Adicionalmente Bianchi I aporta información sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de Bianchi II.

Para determinar si las singularidades clásicas son resueltas y como evolucionan las soluciones efectivas, se eligió un conjunto de observables (densidad, cizalladura, expansión, etc.) y se estudió su evolución numérica. Las ecuaciones de movimiento admiten distintos límites que pueden ser utilizados para verificar la validez de las soluciones y explorar las nuevas ideas que ofrece Bianchi II. Con el fin de estudiar sistemáticamente las soluciones se empezó estudiando el límite clásico para mostrar como las soluciones efectivas resuelven las singularidades y se acercan a las soluciones clásicas lejos del rebote. Luego se estudió el límite isotrópico que está contenido en el límite de Bianchi I cuando no hay anisotropías, se encontró que las soluciones presentan un máximo de la densidad igual a la densidad crítica ρ_{crit} ; la cizalladura es cercana a cero y muestra un comportamiento no trivial ya que presenta cuatro máximos y se hace cero en el rebote. Luego se agregaron las anisotropías y se estudió el límite de Bianchi I, mostrando que se reproducen las soluciones ya conocidas [41] y que las singularidades tipo cigarrillo también son resueltas, donde por resolución de la singularidad es entendido que los observables se comportan de manera adecuada (no divergen).

No se pudo mostrar numéricamente que las singularidades tipo barril también se resuelven, debido a que esto implica un ajuste muy fino en las condiciones iniciales. Pero se estudiaron como un límite y no se encontró nada que indicara que no son resueltas también. Luego se consideró el caso simétrico bajo rotaciones locales de Bianchi II y se exploraron las soluciones que hacían máxima la densidad en el rebote. Los exponentes de Kasner mostraron ser tipo Bianchi I lejos del rebote, lo cual es consistente con el hecho de que clásicamente Bianchi II se acerca a Bianchi I para tiempos grandes [74, 73, 59]. También se mostró que un factor de escala direccional puede cambiar su comportamiento hasta tres veces (un rebote y dos puntos de retorno) y las otras dos direcciones rebotan una vez, para un total de tres rebotes direccionales y un rebote global (cuando la expansión es cero).

Se estudio el límite de vacío con cizalladura máxima para obtener una solución extrema, en la cual toda la contribución dinámica proviene de las anisotropías. Estas soluciones presentan valores pequeños de la densidad en el rebote y un comportamiento inesperado de la cizalladura y el escalar de Ricci, ya que son asimétricos (respecto al rebote) y alcanzan su máximo a un lado del rebote. Se encontraron soluciones que presentan una densidad mayor en el rebote que las soluciones isotrópicas. Algunas de las soluciones más importantes fueron simétricas bajos rotaciones locales, tales como el límite de vacío y las soluciones que alcanzan

el valor máximo de la densidad.

Para tener control sobre las soluciones se encontró que la mejor manera es poner las condiciones iniciales en el rebote (o cercanas). También hay dos puntos importantes que necesitaron ser verificados en este trabajo: la convergencia de las soluciones y la evolución de las cantidades conservadas, las cuales se muestran en el apéndice A.1.

Estos resultados pueden ser usados como punto de partida para estudiar el modelo de Bianchi IX y saber si cerca a la singularidad clásica se presenta un comportamiento tipo Bianchi I con transiciones tipo Bianchi II, tal como ocurre en la teoría clásica y la conjetura BKL. En el caso de la dinámica completa en cosmología cuántica de lazos sería interesante saber si los estados semiclásicos reproducen todos los nuevos comportamientos que se obtienen en la teoría efectiva, desde este punto de vista este trabajo puede ser entendido como el primer paso en esta dirección, ya que se tiene un estudio sistemático de las soluciones de la teoría efectiva.

Capítulo 6

Universo Tipo Bianchi IX

La importancia del modelo de Bianchi IX radica en la conjetura BKL. Esta conjetura sugiere que la dinámica cerca de una singularidad espacial está dominada por las derivadas temporales, las cuales a su vez se hacen más importantes que las derivadas espaciales. Este hecho, hace que la dinámica local sea independiente y pueda ser aproximada por la dinámica de un universo homogéneo. En general, localmente la dinámica es descrita por un universo tipo Bianchi IX, el cual presenta un comportamiento oscilatorio entre soluciones de Bianchi I con transiciones tipo Bianchi II. Otro elemento importante sobre la conjetura BKL y la evolución cerca a cualquier singularidad inicial, es que la contribución dinámica de la materia se hace despreciable y el universo se puede describir como vacío. Si se juntan todos los elementos que conforman la conjetura BKL, decimos que la dinámica para cualquier universo cerca de la singularidad inicial se describe localmente como un universo homogéneo donde la contribución dinámica de la materia es despreciable, es decir, la dinámica puede ser descrita de manera aproximada por un universo tipo Bianchi IX vacío. Un hecho importante es que esto no es cierto cuando el contenido de materia es un campo escalar sin masa. En este caso la contribución dinámica de la materia es importante. Esto hace que estudiar el universo tipo Bianchi IX con un campo escalar sin masa sea importante. Primero, si existen distintos tipos de materia, la única que va a contribuir de manera significativa a la dinámica cerca de la singularidad será el campo escalar sin masa. Segundo, si no existe un campo escalar sin masa en el universo, la conjetura dice que su dinámica está bien aproximada por un universo vacío, el cual es un caso límite de un universo con campo escalar sin masa cuando el momento del campo escalar es cero. Para más detalles ver [74, 61].

Debido a que Bianchi I y II juegan un papel importante en el comportamiento clásico de las soluciones de Bianchi IX, en este capítulo consideramos también los modelos efectivos de Bianchi I y II con el fin de comprender la dinámica efectiva

de Bianchi IX. Adicionalmente, como el proceso de cuantización del modelo puede producir resultados inesperados, incluimos también el estudio de los modelos isotrópicos de FRW plano ($k = 0$) y cerrado ($k = 1$) con el fin de ilustrar algunos resultados nuevos en la dinámica efectiva de Bianchi IX. Finalmente, debido a que el estudio realizado es numérico, utilizamos los resultados ya conocidos de los modelos isotrópicos y de Bianchi I con el fin de comprobar la validez de la implementación numérica de las ecuaciones. Este capítulo está organizado de la siguiente manera: en la primera sección mostramos algunos resultados relevantes de la dinámica clásica de Bianchi IX y discutimos algunos observables que serán de gran utilidad para entender la dinámica efectiva; en la segunda sección resumimos todas las teorías efectivas involucradas en el estudio de Bianchi IX y en la tercera sección mostramos los resultados numéricos de las ecuaciones efectivas.

6.1. Dinámica Clásica

Dado que estamos estudiando el modelo de Bianchi IX en las variables de Ashtekar, escribiremos la teoría clásica en estas variables con el fin de poder comparar las soluciones efectivas con las soluciones clásicas y mostrar que la singularidad del big bang se resuelve. El Hamiltoniano clásico de Bianchi IX con el lapso $N = V$ está dado por [76]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_{\text{BIX}}}^{\text{Cla}} = & -\frac{1}{8\pi G\gamma^2} \left[p_1 c_1 p_2 c_2 + p_2 c_2 p_3 c_3 + p_3 c_3 p_1 c_1 + 2\vartheta (p_1 p_2 c_3 + p_2 p_3 c_1 + p_3 p_1 c_2) \right. \\ & \left. + \vartheta^2 (1 + \gamma^2) \left[2p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2 - \left(\frac{p_2 p_3}{p_1} \right)^2 - \left(\frac{p_3 p_1}{p_2} \right)^2 - \left(\frac{p_1 p_2}{p_3} \right)^2 \right] \right] \\ & + \frac{1}{2} p_\phi^2 \approx 0, \end{aligned}$$

con $\vartheta = (2\pi^2)^{1/3}$. Los corchetes de Poisson son $\{c^i, p_j\} = 8\pi G\gamma\delta_j^i$, $\{\phi, p_\phi\} = 1$. Las ecuaciones de movimiento se obtienen del corchete de Poisson del Hamiltoniano con las variables básicas

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \{p_i, \mathcal{C}_{H_{\text{BIX}}}\}, & \dot{c}^i &= \{c^i, \mathcal{C}_{H_{\text{BIX}}}\}, \\ \dot{\phi} &= \{\phi, \mathcal{C}_{H_{\text{BIX}}}\}, & \dot{p}_\phi &= \{p_\phi, \mathcal{C}_{H_{\text{BIX}}}\}, \end{aligned}$$

las cuales son de la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_\phi &= 0, \\
 \dot{\phi} &= p_\phi, \\
 \dot{p}_1 &= \frac{p_1}{\gamma} \left[p_2 c_2 + p_3 c_3 + 2\vartheta \frac{p_2 p_3}{p_1} \right], \\
 \dot{c}_1 &= -\frac{1}{\gamma} \left[p_2 c_1 c_2 + p_3 c_1 c_3 + 2\vartheta(p_2 c_3 + p_3 c_2) \right. \\
 &\quad \left. + 4\vartheta^2(1 + \gamma^2) \left(p_1 + \frac{p_2^2 p_3^2}{2p_1^3} - \frac{p_1 p_3^2}{2p_2^2} - \frac{p_1 p_2^2}{2p_3^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Las otras ecuaciones se pueden obtener por permutaciones.

Con el fin de estudiar las soluciones de Bianchi IX se deben utilizar los observables definidos en la sección 3.1.6. En este caso los observables más importantes son los parámetros que miden la contribución dinámica de la materia (parámetro de densidad)

$$\Omega := \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho}{H^2}, \quad (6.1)$$

la contribución dinámica de las anisotropías (parámetro de cizalladura)

$$\Sigma^2 := \frac{3\sigma^2}{2\theta^2} = \frac{\sigma^2}{6H^2} \quad (6.2)$$

y la contribución dinámica de la curvatura intrínseca (parámetro de curvatura)

$$K = -\frac{3^{(3)}R}{2\theta^2} = -\frac{{}^{(3)}R}{6H^2}. \quad (6.3)$$

Donde

$${}^{(3)}R = -\frac{1}{2} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)] \quad (6.4)$$

es la curvatura de la variedad espacial y

$$x_1 = \alpha_1 \sqrt{\frac{p_2 p_3}{p_1^3}}, \quad x_2 = \alpha_2 \sqrt{\frac{p_1 p_3}{p_2^3}}, \quad x_3 = \alpha_3 \sqrt{\frac{p_1 p_2}{p_3^3}}. \quad (6.5)$$

Los valores de los α_i son:

- Bianchi I, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
- Bianchi II, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ o permutaciones.
- Bianchi IX, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = l_0^2$, donde $l_0 = V_0^{1/3}$ y V_0 volumen de la hipersuperficie espacial.

- Para el caso de FRW con $k = 1$, simplemente se toma Bianchi IX y se hace $x_1 = x_2 = x_3$.

El modelo de Bianchi IX clásico no tiene una solución completa y solo se conocen algunos hechos generales sobre sus soluciones. Estos resultados se pueden obtener por distintas aproximaciones y se resumen en [74]. Entre estos hechos los que son de interés para nosotros son:

- Todas las soluciones de Bianchi IX presentan un recolapso si la materia satisface la condición de energía dominante y tiene presión promedio no negativa [58].
- Bianchi IX tiene como límite Bianchi I cuando $x_i \rightarrow 0$, con $i = 1, 2, 3$.
- Bianchi IX tiene como límite Bianchi II cuando $x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0$ y permutaciones de x_1, x_2, x_3 .
- Bianchi IX se reduce a FRW con $k = 1$ cuando $p_1 = p_2 = p_3$ y $c_1 = c_2 = c_3$.
- Bianchi IX tiene como límite FRW con $k = 0$ cuando $p_1 = p_2 = p_3, c_1 = c_2 = c_3$ y $x_i \rightarrow 0$, con $i = 1, 2, 3$.
- Para el caso de Bianchi IX en el vacío el hecho importante está relacionado con su evolución cerca a la singularidad, ya que se puede aproximar por fases de Bianchi I con transiciones de Bianchi II.
- Aunque no vamos a utilizar este hecho, es importante mencionar que Bianchi IX se reduce a Bianchi VII₀¹ cuando $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$ y es un caso límite cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = l_0^2$ y uno de los $x_i \rightarrow 0$, con $i = 1, 2, 3$.

Las variables x_i serán de gran importancia a la hora de estudiar la evolución de las soluciones efectivas de Bianchi IX por dan información sobre las transiciones que se pueden presentar en las soluciones de Bianchi IX. Para distinguir las transiciones que pueden tener las soluciones, se toma Bianchi IX ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = l_0^2$) y se estudia la evolución de las variables x_i . Los distintos límites a los que se pueden acercar las soluciones se clasifican como

- Bianchi I, $(x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0)$.
- Bianchi II, $(x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0)$ ó $(x_1 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0)$ ó $(x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0)$.
- Bianchi VII₀, $(x_1 \rightarrow 0)$ ó $(x_2 \rightarrow 0)$ ó $(x_3 \rightarrow 0)$.

¹Ver apéndice A.6 para la clasificación de Bianchi.

- Bianchi IX, $(x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0)$.

Nótese que Bianchi VII₀ está incluido en esta clasificación debido a que clásicamente es parte de la dinámica de Bianchi IX. A nivel efectivo no se sabe si esto sigue siendo cierto, así que lo más sano es incluir el caso cuando uno de los x_i tiende a cero. También es importante resaltar que no existe una teoría cuántica para Bianchi VII₀ y por lo tanto no existe su equivalente efectivo. Entonces Bianchi VII₀ se puede entender como una etiqueta para las soluciones en las cuales solo uno de los x_i está cerca de cero. Adicionalmente puede servir como motivación para cuantizar el modelo de Bianchi VII₀, obtener su dinámica efectiva y comparar con los resultados que se obtienen en Bianchi IX.

Observando la evolución de cada uno de los x_i se sabe cerca de que clase de universo está la evolución. Además el valor de las cantidades Ω , Σ^2 y K puede dar más información sobre como influye la contribución de la materia, la anisotropía y la curvatura intrínseca en la dinámica del sistema. Estas cantidades satisfacen sobre las soluciones clásicas que

$$\Omega + \Sigma^2 + K = 1. \quad (6.6)$$

Esto se puede utilizar para verificar la evolución numérica en la región clásica. Estos parámetros tienen el “problema” de tener por definición un valor infinito en el rebote y en el recolapso ($\theta = 0$), por lo tanto no serán de utilidad cerca de estas regiones. Otras cantidades que pueden ayudar a distinguir el tipo de solución que se obtiene son los exponentes de Kasner

$$k_i = \frac{H_i}{|\theta|}. \quad (6.7)$$

Estos parámetros son útiles para determinar que tipo de Bianchi I se obtiene.

Todos estos elementos serán de gran importancia a la hora de estudiar las soluciones a las ecuaciones efectivas. Aunque el objetivo es estudiar Bianchi IX, debido a su complejidad es necesario estudiar también los casos más simples de Bianchi I y los casos isotrópicos de FRW con $k = 0, 1$. Los Hamiltonianos efectivos para cada una de las teorías en consideración se muestran en la siguiente sección. Las ecuaciones de movimiento de estos Hamiltonianos se muestran en el apéndice A.4.

6.2. Dinámica Efectiva

Para Bianchi IX el método de cuantización de la curvatura consiste en calcular la conexión a partir de las holonomías y con la conexión definir la curvatura, la cual

se promueve a un operador. Adicionalmente existe libertad en tomar el lapso, esta libertad a nivel clásico no es importante físicamente pero a nivel cuántico define distintas teorías cuánticas. En este trabajo se van a considerar dos teorías efectivas de Bianchi IX derivadas de dos teorías cuánticas distintas. La primera es para el lapso $N = V$ y la segunda es para $N = 1$. Para $N = V$ el Hamiltoniano efectivo es [76]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_{\text{BIX}}}^{(2)} = & -\frac{p_1 p_2 p_3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_3 c_3 \sin \bar{\mu}_1 c_1) \\ & -\frac{\vartheta}{4\pi G \gamma^2 \lambda} \left(\frac{(p_1 p_2)^{3/2}}{\sqrt{p_3}} \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \frac{(p_2 p_3)^{3/2}}{\sqrt{p_1}} \sin \bar{\mu}_1 c_1 + \frac{(p_3 p_1)^{3/2}}{\sqrt{p_2}} \sin \bar{\mu}_2 c_2 \right) \\ & -\frac{\vartheta^2 (1 + \gamma^2)}{8\pi G \gamma^2} \left[2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \left(\frac{p_1 p_2}{p_3} \right)^2 - \left(\frac{p_2 p_3}{p_1} \right)^2 - \left(\frac{p_3 p_1}{p_2} \right)^2 \right] \\ & + \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

con $\vartheta = (2\pi^2)^{1/3}$. Recordemos que $\lambda^2 = 4\sqrt{3}\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2$ y

$$\bar{\mu}_1 = \lambda \sqrt{\frac{p_1}{p_2 p_3}}, \quad \bar{\mu}_2 = \lambda \sqrt{\frac{p_2}{p_1 p_3}}, \quad \bar{\mu}_3 = \lambda \sqrt{\frac{p_3}{p_1 p_2}}.$$

Para el lapso $N = 1$ el Hamiltoniano efectivo está dado por [55]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_{\text{BIX}}}^{(4)} = & -\frac{V^4 A(V) h^6(V)}{8\pi G V_c^6 \gamma^2 \lambda^2} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & -\frac{\vartheta A(V) h^4(V)}{4\pi G V_c^4 \gamma^2 \lambda} \left(p_1^2 p_2^2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + p_2^2 p_3^2 \sin \bar{\mu}_1 c_1 + p_1^2 p_3^2 \sin \bar{\mu}_2 c_2 \right) \\ & -\frac{\vartheta^2 (1 + \gamma^2) A(V) h^4(V)}{8\pi G V_c^4 \gamma^2} \times \\ & \quad \left(2V[p_1^2 + p_2^2 + p_3^2] - \left[(p_1 p_2)^4 + (p_1 p_3)^4 + (p_2 p_3)^4 \right] \frac{h^6(V)}{V_c^6} \right) \\ & + \frac{h^6(V) V^2}{2V_c^6} p_\phi^2 \approx 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

con $V_c = 2\pi\gamma\lambda\ell_{\text{Pl}}^2$ y

$$\begin{aligned} h(V) &= \sqrt{V + V_c} - \sqrt{|V - V_c|}, \\ A(V) &= \frac{1}{2V_c} (V + V_c - |V - V_c|). \end{aligned}$$

Los corchetes de Poisson son $\{c^i, p_j\} = 8\pi G\gamma\delta_j^i$, $\{\phi, p_\phi\} = 1$ y las ecuaciones de movimiento efectivas se muestran de manera explícita en el apéndice A.4.

Dado que clásicamente Bianchi IX presenta fases de Bianchi I con transiciones de Bianchi II [74], es importante estudiar si lo mismo ocurre a nivel efectivo. Por esta razón se consideran también las ecuaciones efectivas de Bianchi I y II. Los Hamiltonianos efectivos para Bianchi I y II se pueden escribir en una sola expresión como [21]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_{\text{BI}}}\!&= \frac{p_1 p_2 p_3}{8\pi G\gamma^2 \lambda^2} \left[\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_3 c_3 \sin \bar{\mu}_1 c_1 \right] \\ &+ \frac{1}{8\pi G\gamma^2} \left[\frac{\alpha(p_2 p_3)^{3/2}}{\lambda\sqrt{p_1}} \sin \bar{\mu}_1 c_1 - (1 + \gamma^2) \left(\frac{\alpha p_2 p_3}{2p_1} \right)^2 \right] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \end{aligned}$$

donde el parámetro α permite distinguir entre Bianchi I ($\alpha = 0$) y Bianchi II ($\alpha = 1$). Las soluciones para las ecuaciones de movimiento de este Hamiltoniano se estudiaron en el capítulo anterior, donde también se muestran las ecuaciones de movimiento de manera explícita. Con el fin de agrupar todas las ecuaciones efectivas en un solo lugar construimos el apéndice A.4.

Como se habia mencionado antes, los dos Hamiltonianos efectivos de Bianchi IX (6.8,6.9) se pueden ver como la generalización de las dos teorías efectivas para el modelo de FRW cerrado ($k = 1$), las cuales se obtienen usando el mismo método de cuantización para la curvatura y los mismos lapsos.

El Hamiltoniano efectivo que se obtiene de la cuantización de FRW cerrado con lapso $N = V$ es de la forma

$$\mathcal{C}_{H_{k=1}}^{(2)} = \frac{3V^2}{8\pi G\gamma^2 \lambda^2} [\sin^2 \lambda\beta - 2D \sin \lambda\beta + (1 + \gamma^2)D^2] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0. \quad (6.10)$$

con $D = \lambda\vartheta/V^{-1/3}$. El Hamiltoniano efectivo con lapso $N = 1$ es

$$\mathcal{C}_{H_{k=1}}^{(4)} = \frac{3A(V)V}{8\pi G\gamma^2 \lambda^2} [\sin^2 \lambda\beta - 2D \sin \lambda\beta + (1 + \gamma^2)D^2] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \quad (6.11)$$

con

$$A(V) = \frac{1}{2V_c}(V + V_c - |V - V_c|) = \begin{cases} V/V_c & V < V_c \\ 1 & V \geq V_c \end{cases} \quad (6.12)$$

La teoría cuántica de la cual proviene este Hamiltoniano efectivo incluye más potencias negativas del volumen, lo cual se denomina correcciones de las tríadas inversas. Una discusión detallada sobre las cuantizaciones y las soluciones de las ecuaciones efectivas se puede encontrar en [33, 55].

Las variables (V, β) están relacionadas con (c, p) por medio de la relación

$$V = p^{3/2}, \quad \beta = \frac{c}{\sqrt{p}}, \quad (6.13)$$

donde V corresponde al volumen físico de todo el espacio. Sus corchetes de Poisson son

$$\{\beta, V\} = 4\pi G\gamma, \quad \{\phi, p_\phi\} = 1. \quad (6.14)$$

Por último se muestra el Hamiltoniano efectivo del modelo FRW con $k = 0$, ya que las soluciones a sus ecuaciones de movimiento son límites de las soluciones de Bianchi IX y pueden ser de utilidad a la hora de comprobar la implementación numérica y entender como es la dinámica de Bianchi IX cerca de los universos isotrópicos. El Hamiltoniano efectivo es de la forma

$$\mathcal{C}_{H_{k=0}} = \frac{3}{8\pi G\gamma^2\lambda^2} V^2 \sin(\lambda\beta)^2 - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \quad (6.15)$$

con lapso $N = V$, donde V el volumen físico de la celda auxiliar y β su momento conjugado.

Una vez se tienen todas las teorías efectivas a considerar, el paso siguiente es estudiar numéricamente las soluciones efectivas de Bianchi IX con la ayuda de los resultados conocidos de Bianchi I, II y los modelos isotrópicos de FRW con $k = 0, 1$.

6.3. Soluciones Numéricas **

En esta sección estudiamos las soluciones efectivas de Bianchi IX. A continuación, consideramos dos teorías efectivas de Bianchi IX, una con lapso $N = V$ y otra con lapso $N = 1$. Debido a la dificultad de estudiar las soluciones de estas teorías tomaremos dos caminos para comprender las soluciones. El primero es discutir sobre las diferencias de las dos teorías efectivas de Bianchi IX desde el punto de vista analítico. El segundo es estudiar la región del espacio de soluciones en que las dos teorías describen la misma física y justificar la relevancia de esta región de soluciones. Luego dentro de esta región se considera el límite de Bianchi I y los modelos isotrópicos.

Pretendemos entonces dar respuesta a algunas preguntas acerca de las soluciones efectivas. Queremos saber en primer lugar si resuelven estas soluciones la singularidad del big bang y si se reducen a las soluciones clásicas lejos del rebote. En segundo lugar, nos interesa saber si todas las soluciones de Bianchi IX recolapsan cuando la materia satisface la condición de energía dominante y tiene presión promedio no negativa. Tercero, es importante saber si se reduce Bianchi IX a FRW

con $k = 1$ cuando $p_1 = p_2 = p_3$ y $c_1 = c_2 = c_3$. Cuarto, si Bianchi I tiene como límite a FRW con $k = 0$ cuando $p_1 = p_2 = p_3$, $c_1 = c_2 = c_3$ y $x_i \rightarrow 0$, con $i = 1, 2, 3$. Finalmente, indagaremos si Bianchi IX tiene como límite a Bianchi I cuando $x_i \rightarrow 0$, con $i = 1, 2, 3$.

Para responder la tercera pregunta se debe discutir sobre las diferencias entre las dos teorías efectivas de Bianchi IX desde el punto de vista analítico. Se puede mostrar [55] que el Hamiltoniano efectivo $\mathcal{C}_H^{(2)}$ para Bianchi IX con lapso $N = V$ se reduce al Hamiltoniano efectivo del modelo isotrópico de FRW cerrado con $N = V$ cuando $p_1 = p_2 = p_3$ y $c_1 = c_2 = c_3$, en este caso $\mathcal{C}_{HBIX}^{(2)} = \mathcal{C}_H^{(2)}$. Esto quiere decir que al cuantizar el modelo isotrópico y el anisotrópico, las soluciones efectivas del modelo anisotrópico contienen las soluciones efectivas del modelo isotrópico, lo cual hace más “consistente” las dos cuantizaciones, es decir, al cuantizar un modelo menos simétrico la cuantización del modelo reducido no se ve afectada [76, 33, 55]. Por otro lado cuando se considera el Hamiltoniano efectivo $\mathcal{C}_H^{(4)}$ para Bianchi IX con lapso $N = 1$, al tomar $p_1 = p_2 = p_3$ y $c_1 = c_2 = c_3$ no se reduce al modelo isotrópico de FRW cerrado con $N = 1$, es decir, $\mathcal{C}_{HBIX}^{(4)} \neq \mathcal{C}_H^{(4)}$, por lo tanto la dinámica que describen los dos Hamiltonianos para el caso isotrópico es distinta. Un análisis más detallado sobre la diferencia en los modelos cuánticos y efectivos de estas dos teorías se puede encontrar en [55].

Un hecho importante que encontramos en el estudio del modelo de FRW con $k = 1$ [33] para las distintas cuantizaciones es que sus teorías efectivas dan las mismas soluciones en el límite de volumen grande o momento del campo grande. Este es el hecho que utilizaremos para estudiar numéricamente las soluciones de Bianchi IX. La idea es tomar el límite en que el momento del campo es grande, es decir, cuando el volumen en el rebote es muy grande comparado con el volumen de Planck. Es importante recordar que en el modelo de Bianchi IX es lícito hablar de “volumen grande” dado que la variedad espacial es compacta y por lo tanto tiene un volumen físico bien definido, lo cual no ocurre en los modelos de Bianchi I, II y FRW plano donde el volumen corresponde a la celda auxiliar.

Esta sección se divide en cuatro partes. En la primera se muestra el límite de volumen grande o momento del campo grande, donde las dos teorías efectivas de Bianchi IX reproducen la misma dinámica; en la segunda parte se muestra el límite clásico donde se comparan las soluciones efectivas con las clásicas y se verifica que la singularidad del big bang se resuelve. Luego se muestra el límite de FRW cerrado y abierto en la región donde las dos teorías de Bianchi IX describen la misma dinámica lo cual permite verificar que las soluciones numéricas tienden a los resultados numéricos y analíticos ya conocidos para los universos isotrópicos. Por último, se muestra como se obtiene el límite de Bianchi I y como son las soluciones en este límite. Todas las soluciones se estudiaron en unidades de $c = 1$, $\hbar = 1$, $G =$

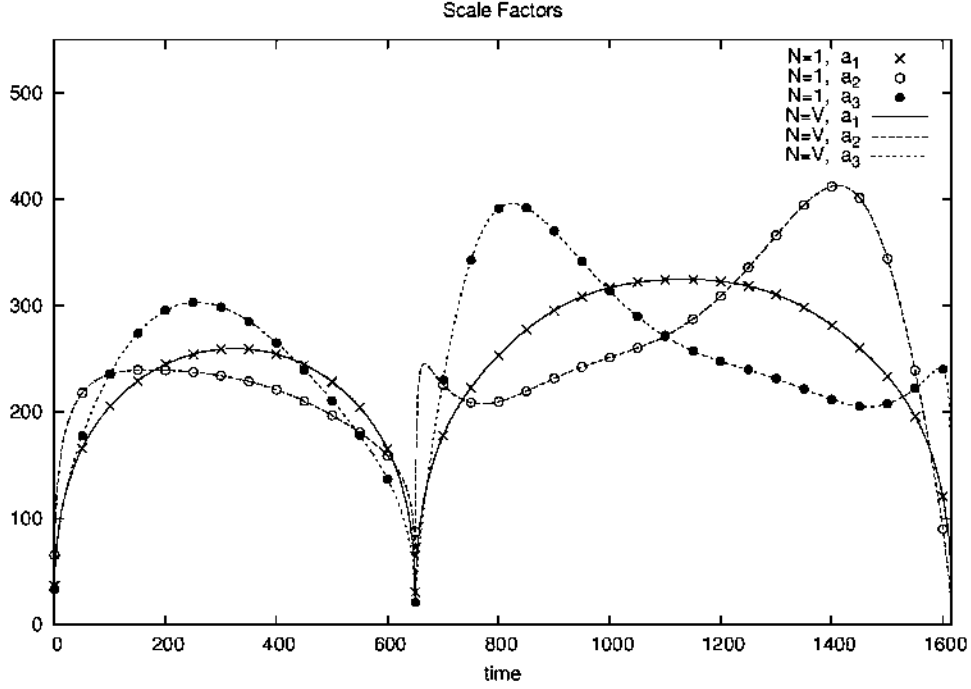


Figura 6.1: Comparación entre las soluciones de las dos ecuaciones efectivas con lapsos $N = V$ y $N = 1$.

1. El integrador numérico es el método de Runge-Kutta 4 y las gráficas están en función del tiempo cósmico (lapso $N = 1$).

6.3.1. Límite de Volumen Grande **

Primero vamos a estudiar la región del espacio de soluciones donde las dos ecuaciones efectivas dan los mismos resultados. Esta región corresponde a las soluciones con volumen grande en el rebote (grande comparado con el volumen de Planck) o momento del campo grande. En este límite se puede decir que las dos ecuaciones efectivas son iguales, en el sentido que dado un intervalo de tiempo $t_f - t_i < \infty$ y una tolerancia $\epsilon > 0$, siempre se puede encontrar datos iniciales para cada una de las teorías efectivas de tal manera que la diferencia en sus evoluciones está dentro de la tolerancia ϵ en el intervalo de tiempo $t_f - t_i$. Es importante resaltar que todas las afirmaciones que se hacen sobre las soluciones efectivas aplican para las soluciones numéricas estudiadas y no para todo el espacio de soluciones, sin embargo se espera que se puedan extender todos los resultados cualitativos, como por ejemplo, el reemplazo del big bang por un rebote.

En la figura 6.1 se aprecia la comparación en la evolución de las soluciones para las dos teorías efectivas de Bianchi IX. En la evolución de los tres factores de escala, se ve que las soluciones coinciden y presentan una dinámica efectiva similar. Mientras mayor sea el momento del campo escalar o mayor sea el volumen en el rebote más se acercan las dos soluciones efectivas. Los datos iniciales son: $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_3 = \pi/2$, $p_1 = 10000$, $p_2 = 20000$ y $p_3 = 30000$. El momento del campo es $p_\phi = 2,36 \times 10^6$, el cual se calcula de la ligadura Hamiltoniana. El volumen en el rebote es $V_b = 2,45 \times 10^6$ en unidades de Planck.

A partir de ahora todos los análisis se van a realizar en el límite de volumen grande, por lo tanto todas las conclusiones obtenidas aplican para las dos teorías efectivas de Bianchi IX. Lo primero es verificar que la singularidad del big bang se resuelve y que la dinámica clásica se recupera en algún intervalo de tiempo. Este es el objetivo de la próxima sección.

6.3.2. Límite Clásico **

Ahora queremos comprobar en primer lugar que las soluciones efectivas reproducen la dinámica clásica lejos de lo que sería la singularidad del big bang. En segundo lugar, se quiere mostrar que la singularidad se resuelve y es reemplazada por un rebote. Esto agrega consistencia física a la teoría efectiva, en el sentido de que contiene a la relatividad general lejos del rebote y que resuelve la singularidad del big bang incorporando lo que se espera sea la dinámica cuántica de los estados semiclásicos.

Para comparar las soluciones consideramos los datos iniciales en el rebote para las ecuaciones efectivas y se evoluciona hacia adelante y atrás en el tiempo. Las condiciones iniciales fueron: $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_3 = \pi/2$, $p_1 = 10000$, $p_2 = 20000$, $p_3 = 30000$. Para comparar con las soluciones clásicas tomamos los valores de las variables (c_i, p_i) de la evolución efectiva en el volumen máximo y se utilizan como condiciones iniciales para las ecuaciones clásicas. Estas soluciones clásicas tiene las siguientes condiciones iniciales: $\bar{\mu}_1 = -6,661253 \times 10^{-3}$, $\bar{\mu}_2 = -2,736483 \times 10^{-3}$, $\bar{\mu}_3 = -3,981829 \times 10^{-3}$, $p_1 = 2,207835 \times 10^6$, $p_2 = 1,745869 \times 10^6$, $p_3 = 1,983146 \times 10^6$. Para la solución clásica antes del rebote tomamos $t_i = -325,75$ y para la solución clásica después del rebote $t_i = 325,75$. Luego se evolucionan hacia atrás y adelante en el tiempo.

La comparación entre las soluciones clásicas y la efectiva se muestra en la figura 6.2, donde se aprecia la evolución del volumen y de los factores de escala. Notese que las soluciones efectivas y clásicas coinciden hasta muy cerca del rebote. Luego las soluciones clásicas presentan la singularidad del big bang y la solución efectiva

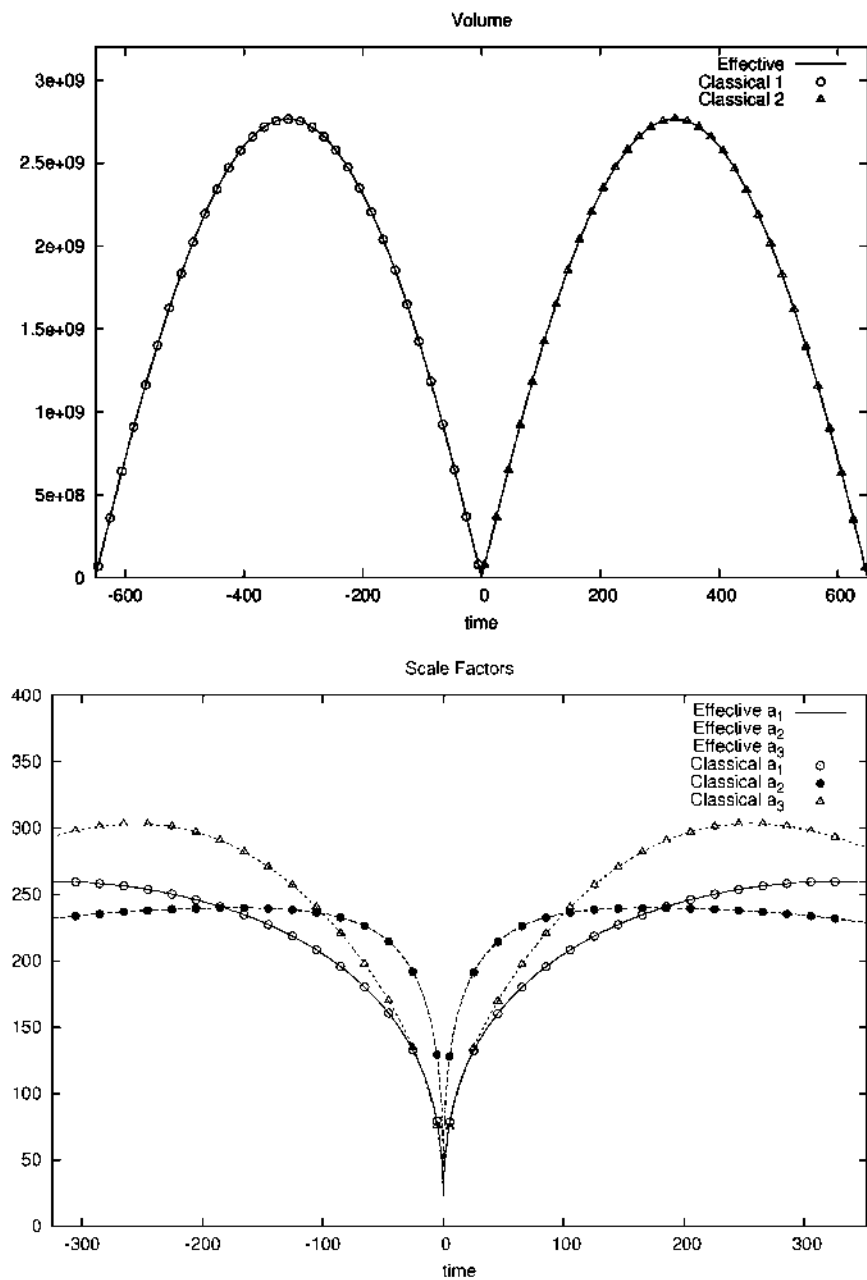


Figura 6.2: Comparación entre la solución efectiva y las dos soluciones clásicas antes y después del rebote.

presenta un rebote conectando dos soluciones clásicas antes y después. Es importante resaltar que debido a la compacidad de la variedad espacial se presentan recolapsos y debido a las ecuaciones efectivas se presentan rebotes, por lo tanto el universo continúa rebotando y recolapsando indefinidamente. Entre cada dos rebotes el universo pasa por una fase de universo clásico.

Una vez comprobamos que las ecuaciones efectivas reproducen las soluciones clásicas y que resuelven la singularidad del big bang, el siguiente paso es estudiar el espacio de soluciones de las ecuaciones efectivas. Dado que la dinámica de Bianchi IX es no trivial y no existen soluciones analíticas para su dinámica clásica, no se espera poder dar una descripción completa y detallada de las soluciones efectivas, pero se puede hacer un estudio cualitativo de las soluciones efectivas que nos permita tener un mayor control sobre el espacio de soluciones. Por esta razón se estudian distintos límites de las soluciones efectivas, empezando por el límite en que las soluciones son isotrópicas.

6.3.3. Límite Isotrópico **

Dentro de las soluciones de Bianchi IX, las soluciones isotrópicas son de gran importancia ya que cerca a estas soluciones se espera tener la dinámica de un universo realista, en el sentido de que nuestro universo es casi isotrópico y homogéneo a gran escala. Además, ya que se conocen las soluciones numéricas [15, 16, 17, 68] para los casos isotrópicos, se pueden utilizar para comprobar la validez de las soluciones efectivas de Bianchi IX.

En la figura 6.3, la primera gráfica muestra la evolución de los exponentes de Kasner k_1, k_2, k_3 y su suma total $k_1 + k_2 + k_3$. Se observa que todos los exponentes de Kasner tienen el mismo valor $k_i = 1/3$ y su suma es uno, hecho que demuestra que cada dirección se expande a la misma velocidad. El valor positivo o negativo de cada uno de los Kasner nos dice si cada dirección se está expandiendo o contrayendo $k_i = H_i/|\theta|$, mientras que el signo de la suma total ± 1 nos dice si la expansión total θ es positiva o negativa. Como se puede apreciar en la segunda gráfica de la figura 6.3, cuando $\theta > 0$ significa que el universo se expande, $\theta < 0$ significa que se contrae y $\theta = 0$ significa que el universo recolapsa o rebota. Esta dinámica se aprecia claramente en la gráfica del volumen que se presenta en la figura 6.4, donde se ven los rebotes y recolapsos del universo. Nótese que el volumen en el rebote no es el mismo para todos los casos sino que se presentan dos valores distintos del volumen en el rebote. Esto hecho fue estudiado en [33] y corresponde a la dinámica de un universo de FRW cerrado, lo cual nos permite verificar los resultados ya conocidos para el caso isotrópico con $k = 1$. Para este caso las condiciones iniciales fueron: $\bar{\mu}_i = \pi/2$, $p_i = 100$, con $i = 1, 2, 3$.

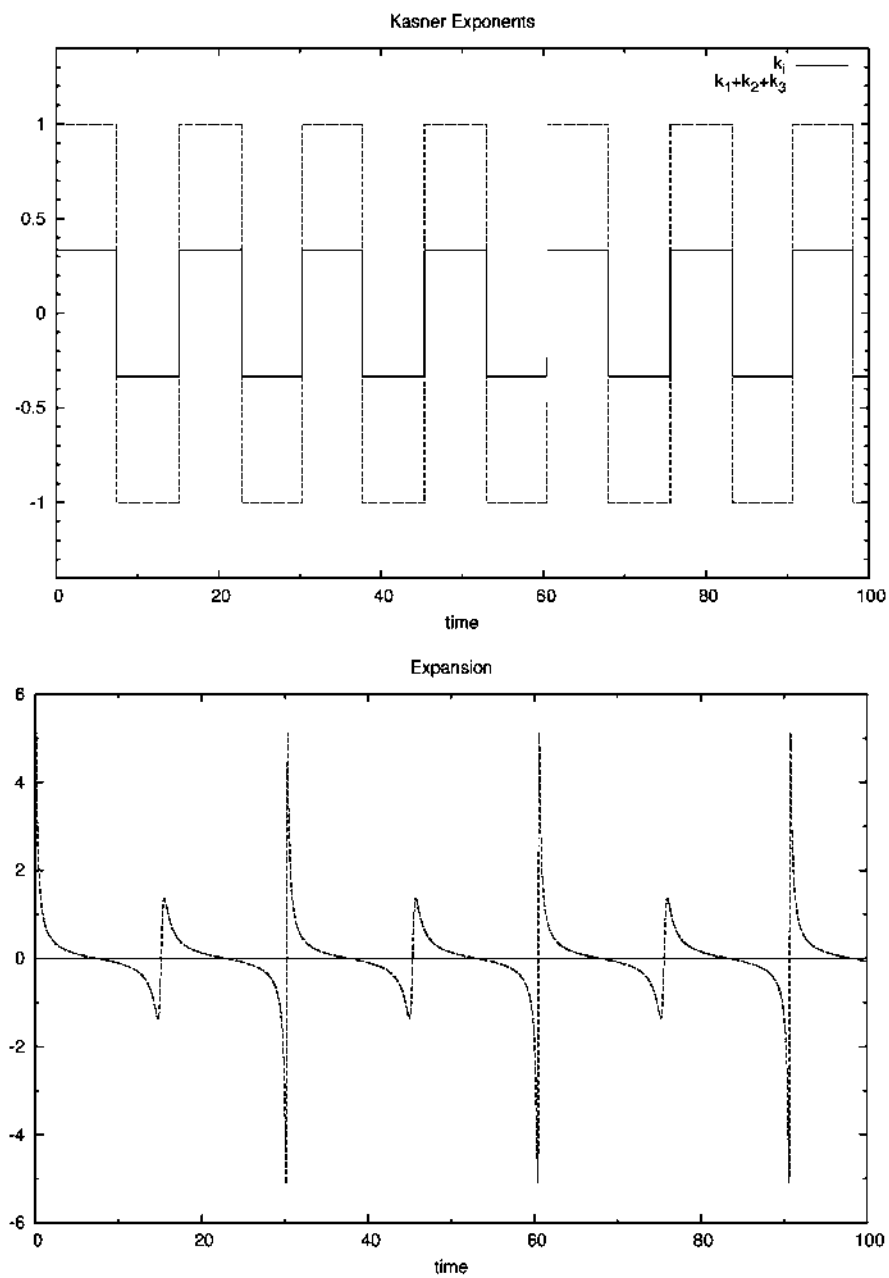


Figura 6.3: Evolución de los exponentes de Kasner (k_i) y la expansión.

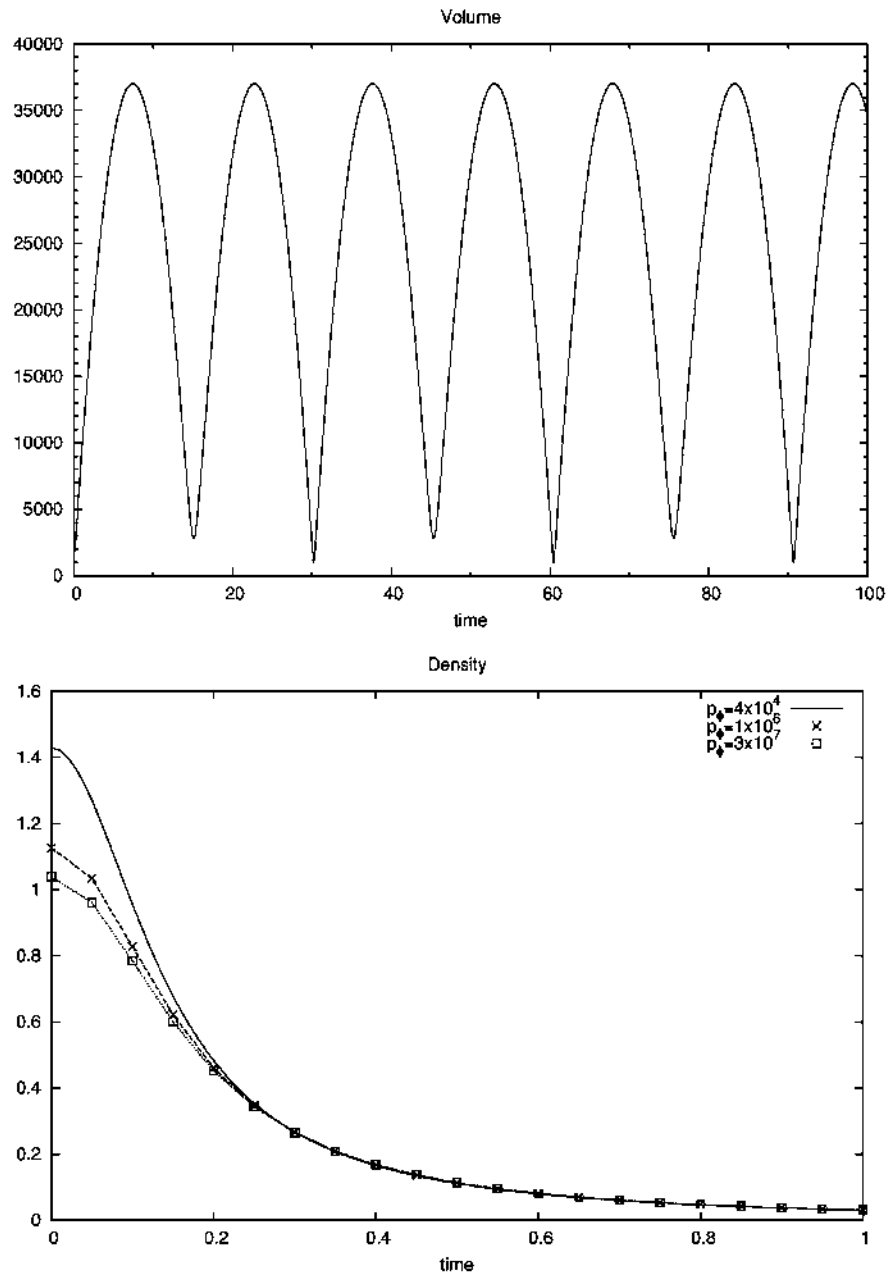


Figura 6.4: En la gráfica superior se muestra la evolución del volumen. En la gráfica inferior se muestra la comparación de la densidad en el rebote para soluciones con distintos valores del momento del campo p_ϕ .

En la figura 6.4 graficamos la densidad sobre la densidad crítica (ρ/ρ_{crit}). En este caso se ve como cambia el valor de la densidad en el rebote a medida que aumenta el momento del campo escalar p_ϕ , observamos que la densidad en el rebote tiende a ser igual a la densidad crítica. Adicionalmente, el tiempo entre cada rebote se hace más largo ya que a medida que aumenta el momento del campo el universo se hace más grande y tarda más tiempo en recolapsar. Esto significa que dentro del límite isotrópico cuando el momento del campo se hace grande se recupera la dinámica del universo de FRW con $k = 0$. Es de notar que el universo isotrópico plano no está contenido dentro del espacio de soluciones de Bianchi IX, sino que es un límite de las soluciones en el sentido de que uno puede aproximar la dinámica del universo plano tanto como quiera dentro de las soluciones de Bianchi IX. Las condiciones iniciales para cada una de las soluciones son: $\bar{\mu}_i = \pi/2$, $p_i = 1000$, con $p_\phi \approx 4 \times 10^4$; $\bar{\mu}_i = \pi/2$, $p_i = 10000$, con $p_\phi \approx 1 \times 10^6$ y $\bar{\mu}_i = \pi/2$, $p_i = 100000$, con $p_\phi \approx 3 \times 10^7$, donde $i = 1, 2, 3$.

Es importante resaltar que estrictamente hablando no se está estudiando el límite isotrópico para FRW con $k = 1$ dado que se toman condiciones iniciales exactamente isotrópicas y se evolucionan. En el caso de FRW con $k = 0$, sí es un límite ya que no pertenece al espacio de soluciones de Bianchi IX. Una vez se ha estudiado el límite isotrópico, el siguiente límite en nivel de dificultad es el límite de Bianchi I.

6.3.4. Límite de Bianchi I **

Para encontrar las soluciones efectivas de Bianchi IX cercanas a las soluciones efectivas de Bianchi I utilizamos el siguiente método:

- Imponer condiciones iniciales en el rebote para las ecuaciones efectivas de Bianchi I de tal manera que el campo escalar tenga un momento grande.
- Poner a evolucionar hacia adelante en el tiempo hasta la región clásica lejos del rebote.
- En la región clásica tomar los valores finales de la evolución de Bianchi I e introducir como valores iniciales para las ecuaciones de Bianchi IX.
- Finalmente evolucionar las ecuaciones efectivas de Bianchi IX hacia atrás en el tiempo obteniendo así una dinámica cercana a Bianchi I dentro de las soluciones de Bianchi IX.

En la figura 6.5 se aprecia que este método funciona ya que los exponentes de Kasner y los parámetros Ω, Σ^2, K permanecen casi constantes en la solución a la

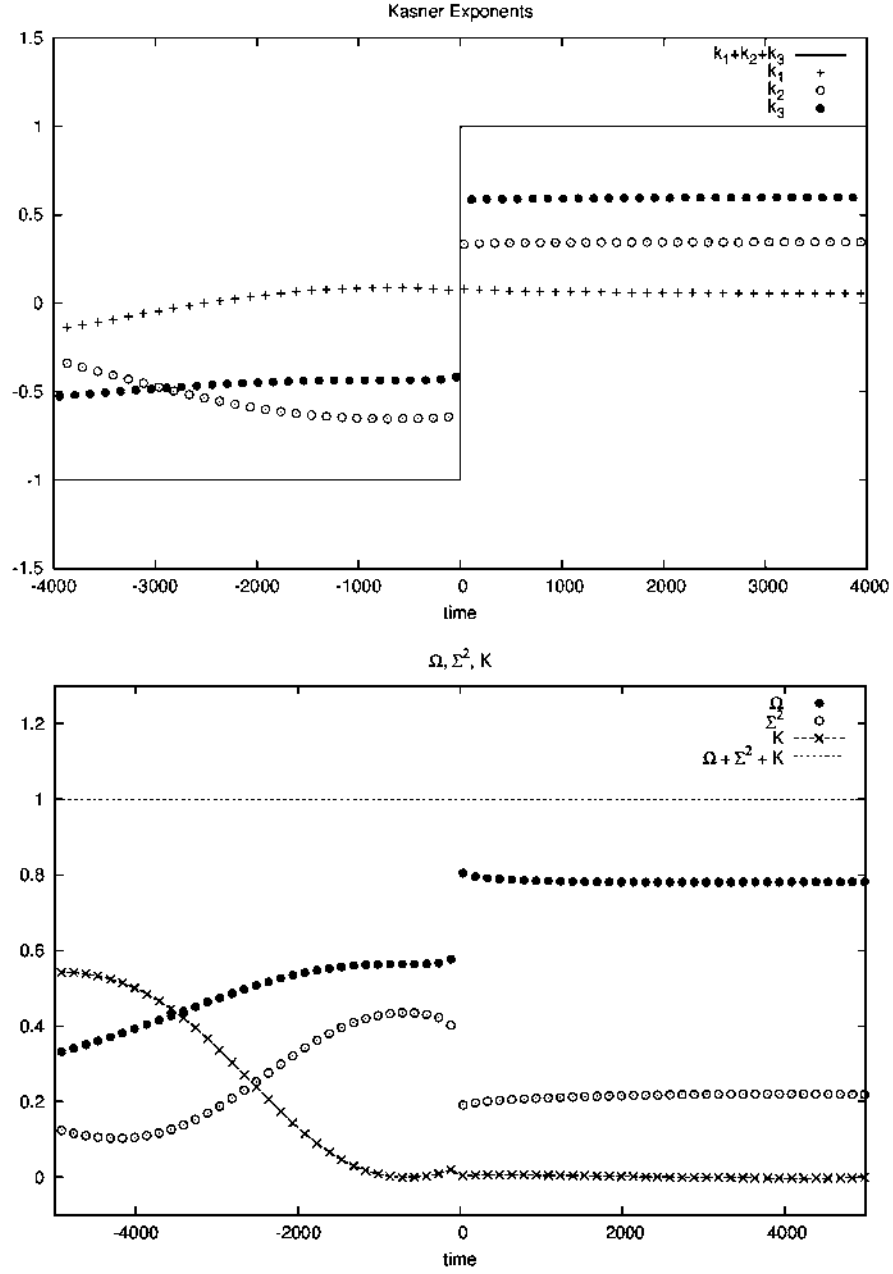


Figura 6.5: Evolución de los exponentes de Kasner y los parámetros que miden la contribución dinámica de la materia Ω , las anisotropías Σ^2 y la curvatura intrínseca K .

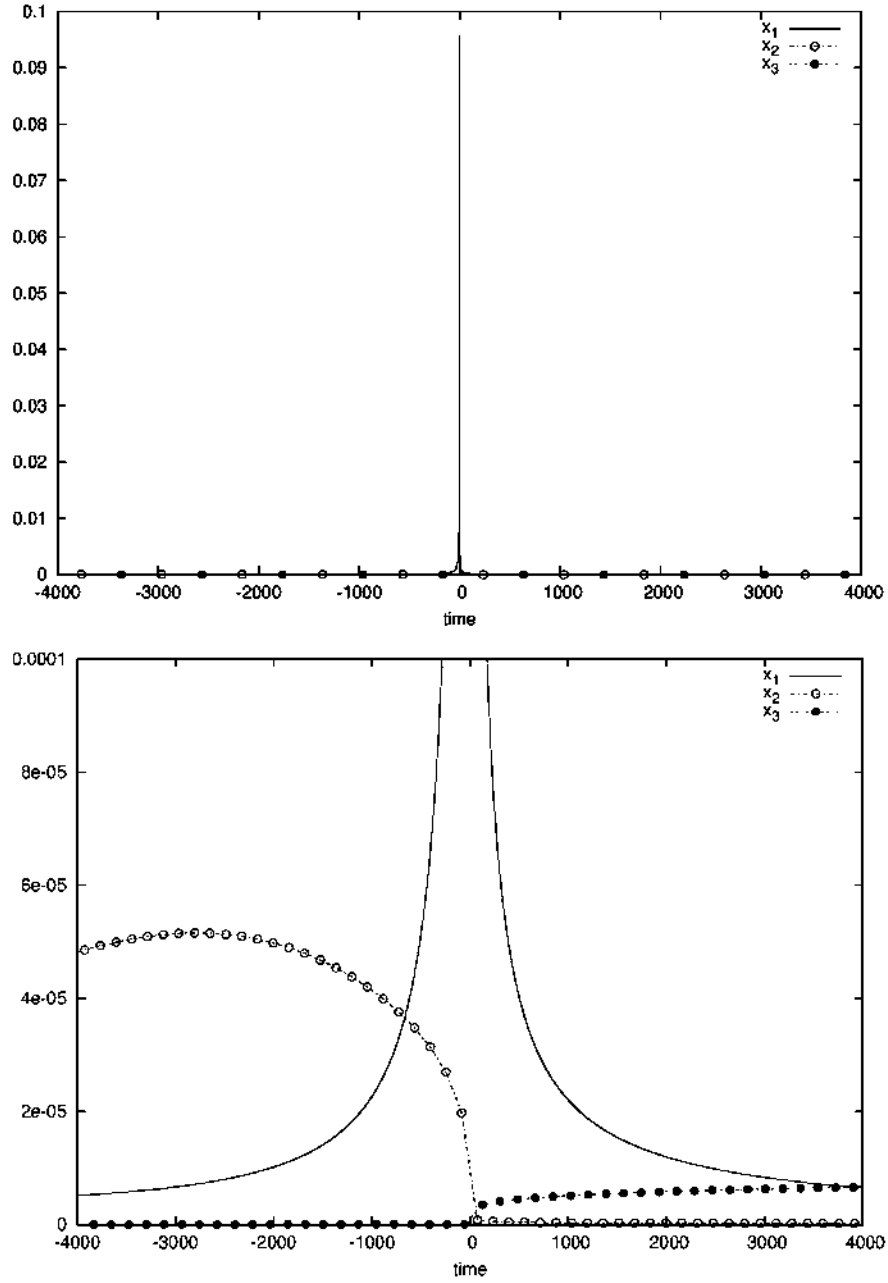


Figura 6.6: Evolución de los x_i que miden la curvatura intrínseca.

derecha del rebote. Esto es lo que se espera de una solución tipo Bianchi I. Además se observa que la contribución dinámica de la curvatura intrínseca es cercana a cero, $K \approx 0$, lo cual se cumple para Bianchi I ya que es espacialmente plano. Esto se puede verificar en la figura 6.6 donde mostramos la evolución de los x_i , ec. (6.5), que son los que contribuyen a la curvatura intrínseca ${}^{(3)}R$, ec. (6.4).

En la figura 6.6 se observa que en la evolución del universo a la derecha del rebote $x_i \approx 0$ y cerca al rebote x_1 se hace mayor alcanzando su valor máximo en el rebote, mientras que los otros dos permanecen cercanos a cero, $x_2, x_3 \approx 0$. Esto quiere decir que al evolucionar hacia atrás en el tiempo, el universo es cercano a Bianchi I en la región clásica y luego cuando se acerca al rebote la dinámica se vuelve tipo Bianchi II ($x_1 \neq 0$ y $x_2, x_3 \approx 0$). Una vez el universo cruza el rebote, este hace la transición a una dinámica no trivial de Bianchi IX. Esta dinámica representa resultados nuevos para las soluciones de las ecuaciones efectivas. Es interesante resaltar la transición que sufre el universo, el cual pasa de estar cerca a Bianchi I a la dinámica completa de Bianchi IX por medio de una transición tipo Bianchi II.

Adicionalmente, valga discutir la dinámica del universo una vez cruza el rebote. En la figura 6.5 se observa que la contribución dinámica a la izquierda del rebote va cambiando con el tiempo. Se puede ver que la contribución dinámica de las anisotropías Σ^2 se hace mayor al valor que tenía antes del rebote (evolucionando hacia atrás en el tiempo), mientras que la contribución dinámica de la materia Ω disminuye. La contribución dinámica de la curvatura intrínseca K se hace ligeramente negativa permitiendo que la anisotropía tenga mayor contribución dinámica. Por último, de esta gráfica se observa que la contribución dinámica de la curvatura K se hace cada vez mayor, mientras que la contribución dinámica de la materia Ω y las anisotropías Σ^2 disminuye.

Las condiciones iniciales que se extraen de las soluciones de Bianchi I y se introducen en las ecuaciones de Bianchi IX son: $\bar{\mu}_1 = 6,0 \times 10^{-5}$, $\bar{\mu}_2 = -1,1 \times 10^{-5}$, $\bar{\mu}_3 = 1,3 \times 10^{-4}$, $p_1 = 6,0 \times 10^{10}$, $p_2 = 4,0 \times 10^{11}$, $p_3 = 9,0 \times 10^{10}$. El tiempo inicial es $t = 1835$ y se evoluciona hacia adelante y atrás en el tiempo.

6.4. Conclusiones **

Las soluciones numéricas de las ecuaciones efectivas de Bianchi IX que realizamos en la sección anterior, nos permiten responder a las preguntas que motivaron nuestra discusión. Comenzando por la primera pregunta acerca de la resolución de la singularidad del big bang a través de las soluciones efectivas, hemos encontrado en las secciones 6.3.1 y 6.3.2 que las dos teorías efectivas (con lapsos $N = V$ y

$N = 1$) en el límite de volumen grande describen la misma dinámica, resuelven la singularidad del big bang y reproducen la dinámica clásica en la zona lejana al rebote.

Acerca del recolapso de todas las soluciones de Bianchi IX suponiendo que la materia satisface la condición de energía dominante y tiene presión promedio no negativa, encontramos que no es posible resolverlo sino de forma analítica ya que incluye todo el espacio de soluciones. Sin embargo, exploramos numéricamente las soluciones y encontramos que para el campo escalar sin masa todas las soluciones presentan un recolapso. Encontramos también que efectivamente Bianchi IX tiene como límite a FRW con $k = 1$ cuando $p_1 = p_2 = p_3$ y $c_1 = c_2 = c_3$, y a FRW con $k = 0$ cuando $p_1 = p_2 = p_3$, $c_1 = c_2 = c_3$ y $x_i \rightarrow 0$, con $i = 1, 2, 3$. Esto lo mostramos al encontrar que se reproduce la dinámica de FRW con $k = 1$ y se obtienen las soluciones de FRW con $k = 0$ en el límite isotrópico y momento del campo grande.

Además de estos límites, observamos al obtener las soluciones de Bianchi IX cercanas a Bianchi I ($x_i \approx 0$), que además de que Bianchi IX tiene como límite a Bianchi I cuando $x_i \rightarrow 0$ con $i = 1, 2, 3$, estas soluciones pueden presentar una transición tipo Bianchi II, para luego seguir la dinámica completa de Bianchi IX.

Todos estos resultados nos muestran que en el límite de volumen grande las dos teorías efectivas describen la misma dinámica. Si estas dos teorías realmente describen la dinámica cuántica de un estado semiclásico, entonces los resultados que hemos obtenido indican que la dinámica semiclásica de las dos teorías cuánticas es equivalente desde el punto de vista físico.

Apéndice A

Complementos

A.1. Algunas Integrales

Aquí se muestran algunas integrales que son de utilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-x_0}^{x_0} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = 0, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\eta x^2} dx = (-1)^n \frac{d^n}{d\eta^n} \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.3})$$

Algunas integrales de error

$$\int_z^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erfc}(z), \quad \text{con } z \in \mathbb{C} \quad (\text{A.4})$$

$$\int_z^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{z}{2} e^{-z^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \text{erfc}(z), \quad \text{con } z \in \mathbb{C} \quad (\text{A.5})$$

donde $\text{erfc}(z)$ es la Función de Error Complementaria

$$\text{erfc}(z) = 1 - \text{erf}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx \quad (\text{A.6})$$

la cual puede ser acotada usando la expansión asintótica [1]

$$|\text{erfc}(z)| < \frac{e^{-|z|^2}}{|z|\sqrt{\pi}} \quad (\text{A.7})$$

con $|\arg z| < \pi/4$ y $z \rightarrow \infty$. Cuando $z = x$ es real

$$\text{erfc}(x) < \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}. \quad (\text{A.8})$$

A.1.1. Algunas Relaciones

$$\begin{aligned}
-\bar{\eta}(k - \bar{\beta})^2 - \eta(k \mp it - \beta)^2 &= -2\eta_R \left(k - a \mp \frac{i\eta t}{2\eta_R} \right)^2 \\
&+ \left(\frac{t^2\eta_R}{2} \mp 2t\beta_I\eta_R \right) \left(1 + \frac{\eta_I^2}{\eta_R^2} \right) \\
&+ 2\eta_R(a^2 - \beta_R^2 + \beta_I^2) + 4\eta_I\beta_I\beta_R \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

$$\left[u + a \pm \frac{i\eta\alpha}{2\eta_R} \right] \left[u + a \pm \frac{i\eta\alpha}{2\eta_R} \mp i\alpha \right] = u^2 + 2ub_{\pm} + b_{\pm}^2 + \frac{\alpha^2}{4}. \quad (\text{A.10})$$

A.2. Errores

Se muestra de manera explícita los errores en el cálculo de la norma y el volumen. También se explica por que las aproximaciones hechas estan bien justificadas.

A.2.1. Error en la Norma *

La norma de un estado Gaussiano esta dada por

$$\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2 = 2 \int_0^\infty k k^{2n} e^{-2(k-k_0)^2/\sigma^2} dk \quad (\text{A.11})$$

$$= 2 \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right]^{2n+2} \int_{-\sqrt{2}k_0/\sigma}^\infty \left[u + \frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma} \right]^{2n+1} e^{-u^2} du \quad (\text{A.12})$$

el cual para $n = 0$ es

$$\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2 = 2 \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right]^2 \int_{-y}^\infty [u + y] e^{-u^2} du, \quad \text{con } y = \frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma}. \quad (\text{A.13})$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2 &= \sigma^2 \int_{-y}^\infty u e^{-u^2} du + \sigma^2 \int_{-y}^\infty y e^{-u^2} du \\
&= \frac{\sigma^2}{2} e^{-y^2} + \sigma^2 y \sqrt{\pi} - \sigma^2 y \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erfc}(y).
\end{aligned}$$

Usando la forma de y se obtiene

$$\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2 = \sqrt{2\pi}k_0\sigma + \frac{\sigma^2}{2} e^{-(\frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma})^2} - \sigma k_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erfc} \left(\frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma} \right). \quad (\text{A.14})$$

La norma usada en los cálculos fue

$$\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2 \approx \sqrt{2\pi} k_0 \sigma, \quad (\text{A.15})$$

por lo tanto el error en la aproximación es

$$\text{Error}(\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2) = \frac{\sigma^2}{2} e^{-(\frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma})^2} - \sigma k_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erfc}\left(\frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma}\right). \quad (\text{A.16})$$

Esto nos dice que el error en la norma (con $n = 0$) es el error en aproximar la función $\text{erfc}(x)$ por medio de la función $\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}$. Si se usa la ecuación (A.8) para acotar la función $\text{erfc}(y)$ entonces el error se puede acotar como

$$\text{Error}(\|\tilde{\chi}\|_{\text{phy}}^2) < \frac{\sigma^2}{2} e^{-(\frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma})^2}. \quad (\text{A.17})$$

Como vimos antes, la semiclasicalidad implica que se debe tomar $k_0 \gg \sigma > 0$ siendo así el error muy pequeño. Estos errores fueron también estudiados numéricamente para $n > 0$ y presentan un comportamiento similar de donde concluimos que la aproximación hecha para calcular la norma es muy buena.

A.2.2. Error del Volumen *

Los coeficientes del volumen son

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\pm} &= \frac{\kappa}{\alpha} e^{\pm p\alpha} \int_0^{\infty} [k(k \mp i\alpha)]^{n+1} e^{-(k-k_0)^2/\sigma^2} e^{-(k \mp i\alpha - k_0)^2/\sigma^2} dk \\ &= \frac{\kappa}{\sqrt{2}\alpha} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \int_{-u_0}^{\infty} \left[2u^2 + 4\sqrt{2}k_0 u + 4k_0^2 + \alpha^2\right]^{n+1} e^{-u^2/\sigma^2} du, \end{aligned}$$

con $u_0 = \sqrt{2}k_0 \pm i\alpha/\sqrt{2}$. Entonces para $n = 0$ son

$$\tilde{V}_{\pm} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}\alpha} \frac{1}{4} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \int_{-u_0}^{\infty} \left[2u^2 + 4\sqrt{2}k_0 u + 4k_0^2 + \alpha^2\right] e^{-u^2/\sigma^2} du. \quad (\text{A.18})$$

Si hacemos otro cambio de variables $t = \frac{u}{\sigma}$ la integral queda como

$$\tilde{V}_{\pm} = \frac{\kappa\sigma}{4\sqrt{2}\alpha} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \int_{-z}^{\infty} \left[2\sigma^2 t^2 + 4\sqrt{2}k_0 \sigma t + 4k_0^2 + \alpha^2\right] e^{-t^2} dt, \quad (\text{A.19})$$

con $z = x \pm iy = \frac{\sqrt{2}k_0}{\sigma} \pm i \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}$, donde la integral es

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{\pm} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\sigma^2 t^2 + 4\sqrt{2}k_0\sigma t + 4k_0^2 + \alpha^2 \right) e^{-t^2} dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^{-z} \left(2\sigma^2 t^2 + 4\sqrt{2}k_0\sigma t + 4k_0^2 + \alpha^2 \right) e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{\pi}k_0 \left[4k_0 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{k_0} - \frac{z\sigma^2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi}k_0} \operatorname{erfc}(z) \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{2}\sigma \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} - \left(2k_0 + \frac{\alpha^2}{2k_0} \right) \operatorname{erfc}(z) \right].\end{aligned}$$

Entonces $\tilde{V}_{\pm}$ es de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{\pm} &= \frac{\kappa}{8\alpha} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \sqrt{2\pi}\sigma k_0 \left[4k_0 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{k_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{z\sigma^2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi}k_0} \operatorname{erfc}(z) - 2\sqrt{2}\sigma \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} - \left(2k_0 + \frac{\alpha^2}{2k_0} \right) \operatorname{erfc}(z) \right].\end{aligned}$$

Si se normaliza usando la ecuación (A.15) obtenemos

$$\begin{aligned}V_{\pm} &= \frac{\kappa}{8\alpha} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \left[4k_0 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{k_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{z\sigma^2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi}k_0} \operatorname{erfc}(z) - 2\sqrt{2}\sigma \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} - \left(2k_0 + \frac{\alpha^2}{2k_0} \right) \operatorname{erfc}(z) \right]\end{aligned}$$

Los valores usados en los calculos fueron

$$V_{\pm} \approx \frac{\kappa k_0}{2\alpha} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \left[1 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{4k_0^2} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Entonces el error en la integración es

$$\begin{aligned}\text{Error}(V_{\pm}) &= -\frac{\kappa}{8\alpha} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \times \\ &\quad \left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} (z\sigma^2 + 2\sqrt{2}\sigma) + \operatorname{erfc}(z) \left(\frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi}k_0} + 2k_0 + \frac{\alpha^2}{2k_0} \right) \right].\end{aligned}$$

Usando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}|\text{Error}(V_{\pm})| &\leq \frac{\kappa}{8\alpha} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \times \\ &\quad \left[\frac{e^{-|z|^2}}{\sqrt{\pi}} (|z|\sigma^2 + 2\sqrt{2}\sigma) + |\operatorname{erfc}(z)| \left(\frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi}k_0} + 2k_0 + \frac{\alpha^2}{2k_0} \right) \right]\end{aligned}$$

y usando la relación (A.7) (donde $|\arg z| = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{\alpha}{k_0} < \frac{\pi}{4}$ porque $\alpha \ll k_0$)

$$\begin{aligned} |\text{Error}(V_{\pm})| &< \frac{\kappa}{8\sqrt{\pi}\alpha} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} e^{-|z|^2} \left[|z|\sigma^2 + 2\sqrt{2}\sigma + \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi}k_0|z|} + \frac{2k_0}{|z|} + \frac{\alpha^2}{2k_0|z|} \right] \\ &< \frac{\kappa}{8\sqrt{\pi}\alpha} 2\sqrt{2}\sigma^2 \alpha^2 k_0 |z| e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} e^{-|z|^2} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha^2 k_0} + \frac{1}{\alpha^2 \sigma k_0 |z|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}k_0^2 |z|^2 \alpha^2} + \frac{1}{|z|^2 \sqrt{2}\sigma^2 \alpha^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}k_0^2 |z|^2 \sigma^2} \right]. \end{aligned}$$

Como todas las cantidades en el corchete son positivas y menores que uno, se puede acotar el error como

$$|\text{Error}(V_{\pm})| < \frac{5\kappa\sigma^2\alpha k_0 |z|}{2\sqrt{2\pi}} e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} e^{-|z|^2}.$$

Dado que $V_{\pm}$ pueden ser muy pequeños o grandes entonces la cantidad que realmente mide el error es el error relativo $\frac{|\text{Error}(V_{\pm})|}{V_{\pm}}$. Usando la ecuación (A.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{|\text{Error}(V_{\pm})|}{V_{\pm}} &< \frac{5\alpha^2\sigma^2|z|}{\sqrt{2\pi}} e^{-|z|^2} \left(1 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{4k_0^2} \right)^{-1} \\ &< \frac{5\alpha^2 k_0 \sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-2k_0^2/\sigma^2} e^{-\alpha^2/2\sigma^2} \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2}{4k_0^2} \right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{4k_0^2} \right)}. \end{aligned}$$

La cantidad entre paréntesis es menor que uno, por lo tanto

$$\frac{|\text{Error}(V_{\pm})|}{V_{\pm}} < \frac{5\alpha^2 k_0 \sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-2k_0^2/\sigma^2} e^{-\alpha^2/2\sigma^2}.$$

Dado que $\sigma \gg \alpha$ entonces $e^{-\alpha^2/2\sigma^2} \approx 1$. Aun más, como $k_0 \gg \sigma \gg \alpha$ el exponencial negativo gana sobre el factor polinomial mostrando que el error es pequeño. Estos errores también fueron estudiados numericamente para $n > 0$ y presentan resultados similares.

A.3. Tablas *

En este apéndice se resumen las principales cantidades para los estados Gaussianos generalizados con $n = 0, 1$. Es importante resaltar que a medida que cambia n la estructura de los terminos sigue siendo similar y son de la forma $\left(\frac{\alpha}{k_0}\right)^m$ y $\left(\frac{\sigma}{k_0}\right)^l$.

	n=0	n=1
$\ \tilde{\chi}\ _{\text{phy}}^2$	$\sqrt{2\pi}k_0\sigma$	$\sqrt{2\pi}k_0\sigma \left(k_0^2 + \frac{3}{4}\sigma^2\right)$
$V_{\pm}$	$\alpha e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \left(\frac{1}{2}k_0 + \frac{\sigma^2+\alpha^2}{8k_0}\right)$	$\alpha e^{\pm p\alpha} e^{\alpha^2/2\sigma^2} \left(\frac{3\sigma^4+24k_0^2\sigma^2+2\alpha^2\sigma^2+16k_0^4+8k_0^2\alpha^2+\alpha^4}{24k_0\sigma^2+32k_0^3}\right)$
W_0	$\alpha_2 \left(k_0^2 + \frac{3\sigma^2}{4}\right)$	$\alpha_2 \left(\frac{15\sigma^4+40k_0^2\sigma^2+16k_0^4}{12\sigma^2+16k_0^2}\right)$
$W_{\pm}$	$\alpha_3 e^{\pm 2p\alpha} e^{2\alpha^2/\sigma^2} \left(k_0^2 + \frac{3}{4}\sigma^2 + \alpha^2\right)$	$\alpha_3 e^{\pm 2p\alpha} e^{2\alpha^2/\sigma^2} \left(\frac{15\sigma^4+40k_0^2\sigma^2+24\alpha^2\sigma^2+16k_0^4+32\alpha^2k_0^2+16\alpha^4}{12\sigma^2+16k_0^2}\right)$
$\langle\hat{p}_{\phi}\rangle$	$\hbar k_0 \left(1 + \frac{\sigma^2}{4k_0^2}\right)$	$\hbar k_0 \frac{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{2k_0^2} + \frac{3\sigma^4}{16k_0^4}\right)}{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2}\right)}$
$\langle\hat{p}_{\phi}^2\rangle$	$\hbar^2 k_0^2 \left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2}\right)$	$\hbar^2 k_0^2 \frac{\left(1 + \frac{5\sigma^2}{2k_0^2} + \frac{15\sigma^4}{16k_0^4}\right)}{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2}\right)}$
$(\Delta p_{\phi})^2$	$\frac{\hbar^2\sigma^2}{4} \left(1 - \frac{\sigma^2}{4k_0^2}\right)$	$\frac{\hbar^2\sigma^2}{4} \frac{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2} + \frac{9\sigma^4}{16k_0^4} - \frac{9\sigma^6}{64k_0^6}\right)}{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{2k_0^2} + \frac{9\sigma^4}{16k_0^4}\right)}$
V_{bounce}	$\alpha e^{\alpha^2/2\sigma^2} k_0 \left(1 + \frac{\sigma^2+\alpha^2}{4k_0^2}\right)$	$\alpha e^{\alpha^2/2\sigma^2} k_0 \left(\frac{1 + \frac{3\sigma^4}{16k_0^4} + \frac{3\sigma^2}{2k_0^2} + \frac{\alpha^2\sigma^2}{8k_0^4} + \frac{\alpha^2}{2k_0^2} + \frac{\alpha^4}{16k_0^4}}{1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2}}\right)$
$\frac{(\Delta V)^2}{\langle V \rangle^2}$	$e^{\alpha^2/\sigma^2} \frac{\left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2} + \frac{\alpha^2}{k_0^2}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma^2+\alpha^2}{4k_0^2}\right)^2} - 1$	$e^{\alpha^2/\sigma^2} \left(1 + \frac{3\sigma^2}{4k_0^2}\right) \frac{\left(1 + \frac{15\sigma^4}{16k_0^4} + \frac{5\sigma^2}{2k_0^2} + \frac{3\alpha^2\sigma^2}{2k_0^4} + \frac{2\alpha^2}{k_0^2} + \frac{\alpha^4}{k_0^4}\right)}{\left(1 + \frac{3\sigma^4}{16k_0^4} + \frac{3\sigma^2}{2k_0^2} + \frac{\alpha^2\sigma^2}{8k_0^4} + \frac{\alpha^2}{2k_0^2} + \frac{\alpha^4}{16k_0^4}\right)^2} - 1$

A.4. Ecuaciones de Movimiento Efectivas

En esta sección resumimos todas las ecuaciones de movimiento efectivas que usamos para hacer el estudio numérico de las soluciones. Algunas de las ecuaciones de movimiento mostradas en este apéndice son tomadas directamente de [55], el objetivo es resumir todas las ecuaciones efectivas en un solo lugar. En total todos los programas desarrollados para el trabajo de doctorado suman alrededor de 14000 líneas de código (si se imprimieran serían unas 200 páginas) en C y Fortran, algunos códigos en serie y otros en paralelo usando openMP o MPI. Los programas de los trabajos ya publicados se pueden encontrar en <http://github.com/eamonto>.

FRW $k = 0$

El Hamiltoniano efectivo es de la forma

$$\mathcal{C}_{H_{k=0}} = \frac{3}{8\pi G\gamma^2\lambda^2} V^2 \sin^2(\lambda\beta) - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \quad (\text{A.21})$$

donde se toma el lapso $N = V$, con V el volumen físico de la celda auxiliar y β su momento conjugado. Los corchetes de Poisson son $\{\beta, V\} = 4\pi G\gamma$ y $\{\phi, p_\phi\} = 1$. Las variables (V, β) están relacionadas con las variables (c, p) como

$$V = p^{3/2}, \quad \beta = \frac{c}{\sqrt{p}}. \quad (\text{A.22})$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{V} = \frac{3}{\gamma\lambda} V^2 \sin(\lambda\beta) \cos(\lambda\beta), \quad (\text{A.23})$$

$$\dot{\beta} = -\frac{3}{\gamma\lambda^2} V \sin^2(\lambda\beta). \quad (\text{A.24})$$

Las ecuaciones de movimiento para la materia son

$$\dot{p}_\phi = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\dot{\phi} = -p_\phi, \quad (\text{A.26})$$

las cuales serán iguales para todas las teorías efectivas.

FRW $k = 1$

Para el modelo de FRW cerrado existen dos teorías cuánticas distintas dependiendo del método de cuantización que se utilice para la curvatura. Para el estudio

que realizamos se utilizó el método en que la curvatura se calcula a partir de la conexión, la cual se obtiene usando las holonomías. El Hamiltoniano efectivo con lapso $N = V$ es de la forma [33, 55]

$$\mathcal{C}_{H_{k=1}}^{(2)} = \frac{3V^2}{8\pi G\gamma^2\lambda^2} [\sin^2 \lambda\beta - 2D \sin \lambda\beta + (1 + \gamma^2)D^2] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0. \quad (\text{A.27})$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{V} = \frac{3}{\gamma\lambda} V \cos(\lambda\beta) (\sin(\lambda\beta) - D), \quad (\text{A.28})$$

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{2\gamma\lambda^2} [3\sin^2 \lambda\beta - 4D \sin \lambda\beta + (1 + \gamma^2)D^2] - 2\pi G\gamma \frac{p_\phi^2}{V^2}. \quad (\text{A.29})$$

El Hamiltoniano efectivo con lapso $N = 1$ es [33, 55]

$$\mathcal{C}_{H_{k=1}}^{(4)} = \frac{3A(V)V}{8\pi G\gamma^2\lambda^2} [\sin^2 \lambda\beta - 2D \sin \lambda\beta + (1 + \gamma^2)D^2] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \quad (\text{A.30})$$

con

$$A(V) = \frac{1}{2V_c} (V + V_c - |V - V_c|) = \begin{cases} V/V_c & V < V_c \\ 1 & V \geq V_c \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

y $V_c = 2\pi\gamma\lambda\ell_{Pl}^2$. Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{3}{\gamma\lambda} A(V) \cos \lambda\beta (V \sin \lambda\beta - \lambda\vartheta V^{2/3}) \\ \dot{\beta} &= -\frac{3}{2\gamma\lambda^2} \left[\left(V A_{,V} + A(V) \right) \sin^2 \lambda\beta - 2\lambda\vartheta \sin \lambda\beta \left(\frac{2}{3} A(V) V^{-1/3} + A_{,V} V^{2/3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \vartheta^2 (1 + \gamma^2) \left(\frac{A(V) V^{-2/3}}{3} + A_{,V} V^{1/3} \right) \right] - 2\pi G\gamma \frac{p_\phi^2}{V^2} \end{aligned}$$

donde

$$A_{,V} = \frac{1}{2V_c} \left(1 - \frac{|V - V_c|}{V - V_c} \right) = \begin{cases} 1/V_c & V < V_c \\ 0 & V > V_c \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

En ambas teorías (V, β) son iguales a las definidas en el modelo de FRW con $k = 0$ ($V = p^{3/2}$, $\beta = c/\sqrt{p}$, $\{\beta, V\} = 4\pi G\gamma$), solo que ahora V corresponde al volumen físico de todo el espacio.

Bianchi I y II

Los Hamiltonianos efectivos para Bianchi I y II se pueden escribir en una sola expresión como [76]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_{\text{BII}}} = & \frac{p_1 p_2 p_3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} \left[\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_3 c_3 \sin \bar{\mu}_1 c_1 \right] \\ & + \frac{1}{8\pi G \gamma^2} \left[\frac{\alpha (p_2 p_3)^{3/2}}{\lambda \sqrt{p_1}} \sin \bar{\mu}_1 c_1 - (1 + \gamma^2) \left(\frac{\alpha p_2 p_3}{2 p_1} \right)^2 \right] - \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0, \end{aligned}$$

donde el parámetro α permite distinguir entre Bianchi I ($\alpha = 0$) y Bianchi II ($\alpha = 1$). Con este Hamiltoniano y los corchetes de Poisson $\{c^i, p_j\} = 8\pi G \gamma \delta_j^i$ y $\{\phi, p_\phi\} = 1$, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento [76].

$$\dot{p}_1 = \frac{p_1^2}{\gamma \bar{\mu}_1} (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \lambda x) \cos \bar{\mu}_1 c_1, \quad (\text{A.33})$$

$$\dot{p}_2 = \frac{p_2^2}{\gamma \bar{\mu}_2} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) \cos \bar{\mu}_2 c_2, \quad (\text{A.34})$$

$$\dot{p}_3 = \frac{p_3^2}{\gamma \bar{\mu}_3} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_2 c_2) \cos \bar{\mu}_3 c_3, \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 = & -\frac{p_2 p_3}{2\gamma \lambda^2} \left[2(\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3) \right. \\ & + \bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) - \bar{\mu}_2 c_2 \cos \bar{\mu}_2 c_2 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & - \bar{\mu}_3 c_3 \cos \bar{\mu}_3 c_3 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_2 c_2) + \lambda^2 x^2 (1 + \gamma^2) \\ & \left. + \lambda x (\bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 - \sin \bar{\mu}_1 c_1) \right], \quad (\text{A.36}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_2 = & -\frac{p_1 p_3}{2\gamma \lambda^2} \left[2(\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3) \right. \\ & - \bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) + \bar{\mu}_2 c_2 \cos \bar{\mu}_2 c_2 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & - \bar{\mu}_3 c_3 \cos \bar{\mu}_3 c_3 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_2 c_2) - \lambda^2 x^2 (1 + \gamma^2) \\ & \left. - \lambda x (\bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 - 3 \sin \bar{\mu}_1 c_1) \right], \quad (\text{A.37}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_3 = & -\frac{p_1 p_2}{2\gamma \lambda^2} \left[2(\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3) \right. \\ & - \bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) - \bar{\mu}_2 c_2 \cos \bar{\mu}_2 c_2 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & + \bar{\mu}_3 c_3 \cos \bar{\mu}_3 c_3 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_2 c_2) - \lambda^2 x^2 (1 + \gamma^2) \\ & \left. - \lambda x (\bar{\mu}_1 c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 - 3 \sin \bar{\mu}_1 c_1) \right], \quad (\text{A.38}) \end{aligned}$$

con

$$x = \alpha \sqrt{\frac{p_2 p_3}{p_1^3}}.$$

Bianchi IX

El Hamiltoniano efectivo para Bianchi IX con lapso $N = V$ es [76]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_{\text{BIK}}}^{(2)} = & -\frac{p_1 p_2 p_3}{8\pi G \gamma^2 \lambda^2} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_3 c_3 \sin \bar{\mu}_1 c_1) \\ & -\frac{\vartheta}{4\pi G \gamma^2 \lambda} \left(\frac{(p_1 p_2)^{3/2}}{\sqrt{p_3}} \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \frac{(p_2 p_3)^{3/2}}{\sqrt{p_1}} \sin \bar{\mu}_1 c_1 + \frac{(p_3 p_1)^{3/2}}{\sqrt{p_2}} \sin \bar{\mu}_2 c_2 \right) \\ & -\frac{\vartheta^2 (1 + \gamma^2)}{8\pi G \gamma^2} \left[2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \left(\frac{p_1 p_2}{p_3} \right)^2 - \left(\frac{p_2 p_3}{p_1} \right)^2 - \left(\frac{p_3 p_1}{p_2} \right)^2 \right] \\ & + \frac{p_\phi^2}{2} \approx 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento son de la forma

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{p_1^2}{\bar{\mu}_1} (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) + 2\vartheta p_2 p_3 \right] \cos \bar{\mu}_1 c_1, \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 = & -\frac{1}{\gamma} \left[\frac{p_2 p_3}{\lambda^2} \left(\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 \right. \right. \\ & + \frac{\bar{\mu}_1 c_1}{2} \cos \bar{\mu}_1 c_1 (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) - \frac{\bar{\mu}_2 c_2}{2} \cos \bar{\mu}_2 c_2 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) \\ & \left. \left. - \frac{\bar{\mu}_3 c_3}{2} \cos \bar{\mu}_3 c_3 (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_2 c_2) \right) + 2\vartheta \left(\frac{3}{2\bar{\mu}_1} \left[\frac{p_1 p_2}{p_3} \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \frac{p_1 p_3}{p_2} \sin \bar{\mu}_2 c_2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{p_2 p_3}{3p_1} \sin \bar{\mu}_1 c_1 \right] + \frac{1}{2} \frac{p_2 p_3}{p_1} c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1 - \frac{1}{2} p_2 c_3 \cos \bar{\mu}_3 c_3 - \frac{1}{2} p_3 c_2 \cos \bar{\mu}_2 c_2 \right) \\ & \left. + \vartheta^2 (1 + \gamma^2) \left(4p_1 - 2p_1 \left(\frac{p_2^2}{p_3^2} + \frac{p_3^2}{p_2^2} \right) + 2 \frac{p_2^2 p_3^2}{p_1^3} \right) \right]. \quad (\text{A.40}) \end{aligned}$$

Las otras ecuaciones se pueden obtener por permutaciones.

El Hamiltoniano efectivo con lapso $N = 1$ esta dado por [55]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{H_{BI X}}^{(4)} = & -\frac{V^4 A(V) h^6(V)}{8\pi G V_c^6 \gamma^2 \lambda^2} \left(\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 \right) \\
 & -\frac{\vartheta A(V) h^4(V)}{4\pi G V_c^4 \gamma^2 \lambda} \left(p_1^2 p_2^2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + p_2^2 p_3^2 \sin \bar{\mu}_1 c_1 + p_1^2 p_3^2 \sin \bar{\mu}_2 c_2 \right) \\
 & -\frac{\vartheta^2 (1 + \gamma^2) A(V) h^4(V)}{8\pi G V_c^4 \gamma^2} \times \\
 & \quad \left(2V[p_1^2 + p_2^2 + p_3^2] - \left[(p_1 p_2)^4 + (p_1 p_3)^4 + (p_2 p_3)^4 \right] \frac{h^6(V)}{V_c^6} \right) \\
 & + \frac{h^6(V) V^2}{2V_c^6} p_\phi^2 \approx 0
 \end{aligned}$$

con

$$h(V) = \sqrt{V + V_c} - \sqrt{|V - V_c|}.$$

Las derivadas de las funciones $h(V)$ y $A(V)$ estan dadas por

$$A_{,p_i} = \begin{cases} \frac{1}{V_c} \sqrt{\frac{p_j p_k}{p_i}} & V < V_c \\ 0 & V > V_c \end{cases}, \quad i \neq j \neq k \neq i \quad (\text{A.41})$$

y

$$h_{,p_i} = \frac{\sqrt{p_j p_k}}{4\sqrt{p_i}} \left[(V + V_c)^{-1/2} - \frac{\sqrt{|V - V_c|}}{V - V_c} \right], \quad i \neq j \neq k \neq i \quad (\text{A.42})$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{V_c^4 \gamma} A(V) V h^4(V) \cos \bar{\mu}_1 c_1 \left[\frac{V^2 h^2(V) p_1}{V_c^2 \lambda} (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) - 2\vartheta p_2 p_3 \right] \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned}
\dot{c}_1 = & -\frac{h^5(V)}{V_c^6 \gamma \lambda^2} \left(2p_2^2 p_3^2 p_1 A(V) h(V) + V^4 A_{,p_1} h(V) + 6V^4 A(V) h_{,p_1} \right) \\
& \times \left(\sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_1 c_1 \sin \bar{\mu}_3 c_3 + \sin \bar{\mu}_2 c_2 \sin \bar{\mu}_3 c_3 \right) \\
& + \frac{2\vartheta}{V_c^4 \gamma \lambda} h^3(V) \left[\left(2p_1 p_2^2 A(V) h(V) + p_1^2 p_2^2 A_{,p_1} h(V) + 4p_1^2 p_2^2 A(V) h_{,p_1} \right) \sin \bar{\mu}_3 c_3 \right. \\
& + \left(2p_1 p_3^2 A(V) h(V) + p_1^2 p_3^2 A_{,p_1} h(V) + 4p_1^2 p_3^2 A(V) h_{,p_1} \right) \sin \bar{\mu}_2 c_2 \\
& + \left. \left(p_2^2 p_3^2 A_{,p_1} h(V) + 4p_2^2 p_3^2 A(V) h_{,p_1} \right) \sin \bar{\mu}_1 c_1 \right] \\
& - A(V) h^4(V) \frac{c_1 \cos \bar{\mu}_1 c_1}{2V_c^4 \gamma} \left(\frac{V^3 h^2(V)}{V_c^2 \lambda} (\sin \bar{\mu}_2 c_2 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) - 2 \frac{p_2^{3/2} p_3^{3/2}}{p_1^{1/2}} \vartheta \right) \\
& + A(V) h^4(V) \frac{c_2 \cos \bar{\mu}_2 c_2}{2V_c^4 \gamma} \left(\frac{p_2^{5/2} p_3^{3/2} p_1^{1/2} h^2(V)}{V_c^2 \lambda} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_3 c_3) - 2\vartheta p_3 V \right) \\
& + A(V) h^4(V) \frac{c_3 \cos \bar{\mu}_3 c_3}{2V_c^4 \gamma} \left(\frac{p_3^{5/2} p_2^{3/2} p_1^{1/2} h^2(V)}{V_c^2 \lambda} (\sin \bar{\mu}_1 c_1 + \sin \bar{\mu}_2 c_2) - 2\vartheta p_2 V \right) \\
& - \frac{\vartheta^2 (1 + \gamma^2)}{V_c^4 \gamma} h^3(V) \left[4p_1 A(V) V h(V) \right. \\
& + (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \left(\sqrt{\frac{p_2 p_3}{p_1}} A(V) h(V) + 8A(V) V h_{,p_1} + 2A_{,p_1} V h(V) \right) \\
& - \frac{4}{V_c^6} p_1^3 h^6(V) A(V) (p_2^4 + p_3^4) \\
& - \left. \frac{1}{V_c^6} \left(10h^6(V) h_{,p_1} A(V) + h^7(V) A_{,p_1} \right) \left(p_1^4 p_2^4 + p_1^4 p_3^4 + p_2^4 p_3^4 \right) \right] \\
& + 4\pi G \gamma \left(V \frac{\partial \rho}{\partial p_1} + \rho \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p_2 p_3}{p_1}} \right)
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Las otras ecuaciones se pueden obtener por permutaciones.

A.5. Convergencia y Conservación *

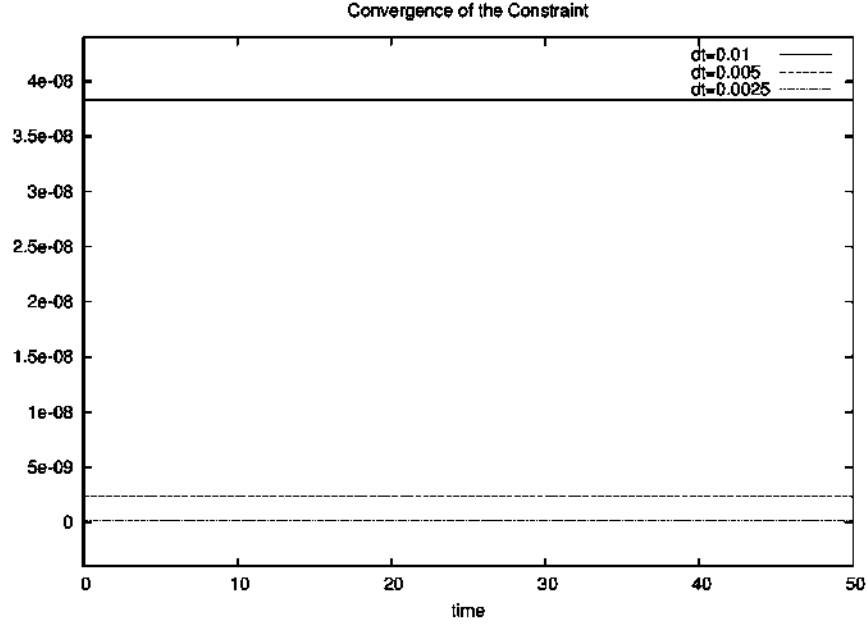


Figura A.1: Convergencia de la ligadura. Convergencia de las soluciones y la conservación de la ligadura.

Hay dos puntos importantes que necesitan ser cubiertos cuando se esta haciendo un trabajo numérico: la convergencia de las soluciones y la evolución de las cantidades conservadas. Esto significa que adicional a las pruebas de validez física que el programa debe pasar, también las soluciones deben presentar convergencia, i. e., que las soluciones numéricas se aproximen a la solución analítica cuando la precisión se aumenta. Es importante recordar que las soluciones numéricas (en general) no están sobre las soluciones analíticas, todo lo que se puede decir es que convergen a la solución analítica con un error relativo pequeño. Adicionalmente, las soluciones numéricas deben evolucionar sobre la superficie de ligadura y preservar las cantidades conservadas, lo cual asegura que estan evolucionando en el espacio de fase fisico. En la figura A.1 mostramos la convergencia de la ligadura Hamiltoniana ($\mathcal{C}_H \approx 0$) cuando el paso de tiempo disminuye. Esto demuestra que la ligadura (o equivalentemente p_ϕ) es conservada. La cantidad graficada en la figura A.1 es el error relativo de la ligadura

$$\frac{|(\mathcal{C}_H)_{\text{init}} - \mathcal{C}_H(t)|}{(\mathcal{C}_H)_{\text{init}}} \Leftrightarrow \frac{|(p_\phi)_{\text{init}} - p_\phi(t)|}{(p_\phi)_{\text{init}}}, \quad (\text{A.45})$$

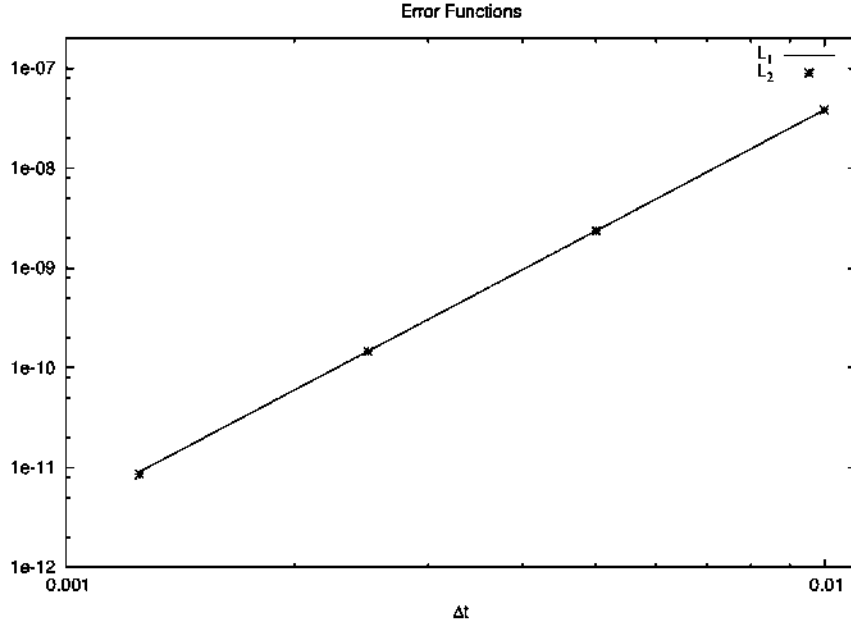


Figura A.2: Convergencia de la ligadura. Funciones de error versus la resolución mayor usada para calcularlas.

para diferentes resoluciones. En la figura A.2 mostramos las funciones de error

$$L_1 = \text{Max}|\mathcal{C}_H(t)_2 - \mathcal{C}_H(t)_1|, \quad L_2 = \text{Max}\sqrt{|\mathcal{C}_H^2(t)_2 - \mathcal{C}_H^2(t)_1|}, \quad (\text{A.46})$$

donde los subíndices en la ligadura Hamiltoniana significan resolución 2 (con dt_2) y resolución 1 (con $dt_1 = 2dt_2$). El método usado para integrar las ecuaciones de movimientos es un Runge-Kutta 4 (RK4) y las resoluciones usadas para las pruebas de convergencia son $dt = 0,01, 0,005, 0,0025, 0,00125, 0,000625$. Las funciones de error de (c_i, p_i) presentan comportamientos similares.

Se puede definir el orden de convergencia como

$$n = \frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_3}, \quad (\text{A.47})$$

donde f_i es cualquier función que se evoluciona con la resolución i , con $dt_i > dt_{i+1}$. El factor de convergencia n para un RK4 debe ser $n = 2^4 = 16$. En nuestras soluciones se obtuvo $n \approx 16,2$, lo cual dice que las soluciones convergen con la rapidez esperada.

A.6. Clasificación de Bianchi

Los modelos cosmológicos de Bianchi son aquellos que admiten un grupo de isometrías tres dimensional actuando transitivamente sobre las hipersuperficies espaciales, las cuales son las superficies homogéneas del espacio-tiempo. Por lo tanto las cosmologías de Bianchi admiten un álgebra de Lie de vectores de Killing (ξ_1, ξ_2, ξ_3) que satisfacen

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k, \quad (\text{A.48})$$

con C_{ij}^k constantes de estructura. La clasificación de Bianchi consiste en clasificar estas álgebras de Lie. Para ilustrar como es la clasificación, primero se utiliza que las constantes de estructura son antisimétricas ($C_{ij}^k = -C_{ji}^k$), por lo tanto se pueden descomponer como

$$C_{ij}^k = \epsilon_{ijl} n^{kl} + a_i \delta_j^k - a_j \delta_i^k, \quad (\text{A.49})$$

donde n^{kl} es una matriz simétrica, $n^{kl} = n^{lk}$. La identidad de Jacobi

$$[\xi_i, [\xi_j, \xi_k]] + \text{permutaciones} = 0 \quad (\text{A.50})$$

se traduce en la relación

$$n^{ij} a_j = 0. \quad (\text{A.51})$$

Esto permite hacer una primera clasificación de las álgebras de Lie tres dimensionales. Las de clase A son aquellas en las que $a_i = 0$ y las de clase B son aquellas en las que $a_i \neq 0$. Dentro de la clase B se puede introducir el escalar h como

$$a_i a_j = \frac{1}{2} h \epsilon_{ikl} \epsilon_{jpq} n^{kl} n^{pq}. \quad (\text{A.52})$$

La matriz n^{ij} se puede diagonalizar ya que es simétrica y dado que a_i es un autovector de n^{ij} con autovalor cero, entonces se pueden escribir como [74]

$$(n^{ij}) = \text{diag}(n_1, n_2, n_3), \quad (a_i) = (a, 0, 0). \quad (\text{A.53})$$

Por lo tanto, en la clase A se cumple que $a = 0$ y en la clase B, como $a \neq 0$ y $n^{ij} a_j = 0$, entonces $n_1 = 0$. Con esta elección de la base, la ecuación (A.52) se puede escribir como

$$a^2 = h n_2 n_3, \quad (\text{A.54})$$

donde h está bien definido solo si $n_2 n_3 \neq 0$ en la clase B. Los tres vectores que diagonalizan la matriz n^{ij} se pueden tomar de manera única a menos que algunos de los autovalores de n^{ij} sean iguales, en cuyo caso hay una libertad de rotación. Adicionalmente, hay una libertad en invertir los vectores que diagonalizan n^{ij} y en su norma. Usando estas libertades se puede tomar a positivo cuando es distinto de

cero y los autovalores $n_i = \pm 1$. Por lo tanto las álgebras de Lie se pueden clasificar por medio de los valores discretos de los tres n_i cuando $a = 0$; y por medio de los valores discretos de n_2, n_3 ($n_1 = 0$) y el parámetro continuo $h = a^2/n_2 n_3$. En la tabla A.6 se muestra la clasificación de estas álgebras, llamada clasificación de Bianchi.

Clase	Tipo	n_1	n_2	n_3
A ($a = 0$)	I	0	0	0
	II	1	0	0
	VI ₀	0	1	-1
	VII ₀	0	1	1
	VIII	1	1	-1
	IX	1	1	1
B ($a \neq 0$)	V	0	0	0
	VI	0	0	1
	III (VI ₋₁)	0	1	-1
	VI _h ($h < 0$)	0	1	-1
	VII _h ($h > 0$)	0	1	1

Cuadro A.1: Clasificación de Bianchi en términos de los autovalores de n^{ij} .

Los vectores de Killing están relacionados con las tríadas auxiliares ${}^e e_i$, que se utilizan en cosmología cuántica de lazos, por medio de la relación

$$[\xi_i, {}^e e_j] = 0, \quad (\text{A.55})$$

es decir, las triadas auxiliares conmutan con los vectores de Killing y satisfacen que

$$[{}^e e_i, {}^e e_j] = -C_{ij}^k {}^e e_k. \quad (\text{A.56})$$

Aquí estamos utilizando la notación de [21] y el capítulo 11 de [46]. Nótese que esta no es la elección típica ($[{}^e e_i, {}^e e_j] = C_{ij}^k {}^e e_k$), esta elección solo implica un cambio de un conjunto invariante a otro conjunto invariante, dando lugar a las mismas propiedades físicas. Un conjunto invariante en la clasificación de Bianchi es un conjunto en el cual la dinámica del sistema se encuentra restringida. Por ejemplo, un conjunto invariante de Bianchi II es ($n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$) pero también lo son ($n_1 = -1, n_2 = 0, n_3 = 0$) y ($n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1$), la dinámica está restringida a cada uno de estos conjuntos, los cuales son físicamente equivalentes. La noción de conjunto invariante utilizada aquí es la misma que se utiliza en sistemas dinámicos. Para más detalles ver [74, 43, 46].

Las cotriadas auxiliares ${}^o\omega^i$ duales a oe_i satisfacen la ecuación de estructura de Cartan

$$d{}^o\omega^k = \frac{1}{2}C_{ij}^k {}^o\omega^i \wedge {}^o\omega^j. \quad (\text{A.57})$$

La forma explícita de $\xi_i, {}^oe_i, {}^o\omega^i$ para cada uno de los Bianchi se puede encontrar en la tabla 11.2 de [46].

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover publications, Inc., New York).
- [2] I. Agullo and A. Corichi, “Loop Quantum Cosmology”, chapter contribution to *Handbook of Space-time*, edited by A. Ashtekar and V. Petkov, Springer-Verlag. arXiv:1302.3833v1 [gr-qc].
- [3] A. Ashtekar, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, (World Scientific Singapore, 1991).
- [4] A. Ashtekar, “Loop Quantum Cosmology: An Overview,” *Gen. Rel. Grav.* **41**, 707 (2009) arXiv:0812.0177 [gr-qc].
- [5] A. Ashtekar, M. Bojowald and J. Lewandowski, “Mathematical structure of loop quantum cosmology”, *Adv. Theo. Math. Phys.* **7** 233-268 (2003), arXiv:gr-qc/0304074v4.
- [6] A. Ashtekar, L. Bombelli and A. Corichi, “Semiclassical states for constrained systems,” *Phys. Rev. D* **72**, 025008 (2005) arXiv:gr-qc/0504052; B. Bolen, L. Bombelli and A. Corichi, “Semiclassical states in quantum cosmology: Bianchi I coherent states,” *Class. Quant. Grav.* **21**, 4087 (2004) arXiv:gr-qc/0404004.
- [7] A. Ashtekar, M. Campiglia and A. Henderson, “Path Integrals and the WKB approximation in Loop Quantum Cosmology,” *Phys. Rev. D* **82**, 124043 (2010) arXiv:1011.1024 [gr-qc].
- [8] A. Ashtekar, A. Corichi and P. Singh, “Robustness of key features of loop quantum cosmology,” *Phys. Rev. D* **77**, 024046 (2008). arXiv:0710.3565 [gr-qc].
- [9] A. Ashtekar, A. Corichi and J. A. Zapata, “Quantum Theory of Geometry III: Non-commutativity of Riemannian Structures”, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 2955-2972. arXiv:gr-qc/9806041.

- [10] A. Ashtekar, A. Henderson and D. Sloan, “A Hamiltonian Formulation of the BKL Conjecture,” *Phys. Rev. D* **83**, 084024 (2011) [arXiv:1102.3474 [gr-qc]].
- [11] A. Ashtekar and J. Lewandowski, “Representation Theory of Analytic Holonomy C^* Algebras”, *Knots and Quantum Gravity* (ed. J.Baez, Oxford U.Press), arXiv:gr-qc/9311010.
- [12] A. Ashtekar and J. Lewandowski “Background independent quantum gravity: A status report,” *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) R53 arXiv:gr-qc/0404018; C. Rovelli, *Quantum Gravity*, (Cambridge U. Press, 2004); T. Thiemann, *Modern canonical quantum general relativity*, (Cambridge U. Press, 2007).
- [13] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourão and T. Thiemann, “Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom”, *J. Math. Phys.* **36**: 6456-6493, 1995. arXiv:gr-qc/9504018.
- [14] A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, “Pre-inflationary phase in loop quantum cosmology,” (In preparation).
- [15] A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, “Quantum Nature of the Big Bang,” *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 141301 arXiv:gr-qc/0602086.
- [16] A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, “Quantum Nature of the Big Bang: An Analytical and Numerical Investigation,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 124038. arXiv:gr-qc/0604013.
- [17] A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, “Quantum nature of the big bang: Improved dynamics,” *Phys. Rev. D* **74**, 084003 (2006) arXiv:gr-qc/0607039.
- [18] A. Ashtekar and T. Schilling, *Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*, in *On Einstein’s Path*, edited by A. Harvey (Springer-Verlag, New York, 1998).
- [19] A. Ashtekar and P. Singh, “Loop Quantum Cosmology: A Status Report,” *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 213001 arXiv:1108.0893v2 [gr-qc].
- [20] A. Ashtekar and E. Wilson-Ewing, “Loop quantum cosmology of Bianchi I models,” *Phys. Rev. D* **79**, 083535 (2009). arXiv:0903.3397 [gr-qc].
- [21] A. Ashtekar and E. Wilson-Ewing, “Loop quantum cosmology of Bianchi type II models,” *Phys. Rev. D* **80**, 123532 (2009) arXiv:0910.1278 [gr-qc].
- [22] J. F. Barbero, “Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times”, *Phys. Rev. D* **51** 5507, arXiv:gr-qc/9410014.

- [23] V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz, “Oscillatory approach to a singular point in relativistic cosmology”, *Adv. Phys.* **19**, 525 (1970).
- [24] V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz, “A general solution of the Einstein equations with a time singularity”, *Adv. Phys.* **31**, 639 (1982).
- [25] E. Bentivegna and T. Pawłowski, “Anti-deSitter universe dynamics in LQC,” [arXiv:0803.4446 \[gr-qc\]](#).
- [26] M. Bojowald, *Canonical Gravity and Applications* (Cambridge University Press, 2011).
- [27] M. Bojowald, “What happened before the Big Bang?,” *Nature Phys.* **3N8**, 523 (2007); “Dynamical coherent states and physical solutions of quantum cosmological bounces,” *Phys. Rev. D* **75**, 123512 (2007) [arXiv:gr-qc/0703144](#).
- [28] M. Bojowald, “Harmonic cosmology: How much can we know about a universe before the big bang?,” [arXiv:0710.4919 \[gr-qc\]](#); “Quantum nature of cosmological bounces,” [arXiv:0801.4001 \[gr-qc\]](#).
- [29] M. Bojowald, “Loop quantum cosmology”, *Living Rev. Rel.* **8**, 11 (2005) [arXiv:gr-qc/0601085](#); A. Ashtekar, M. Bojowald and L. Lewandowski, “Mathematical structure of loop quantum cosmology” *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** 233 (2003) [arXiv:gr-qc/0304074](#).
- [30] Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, (Addison-Wesley, 2003).
- [31] C. B. Collins, “More Qualitative Cosmology”, *Commun. math. Phys.* **23**, 137-158 (1971).
- [32] A. Corichi, “Loop Quantum Geometry: A primer”, *J. Phys. Conf. Ser.* **24** (2005) 1-22, [arXiv:0507038v2 \[gr-qc\]](#).
- [33] A. Corichi and A. Karami, “Loop quantum cosmology of $k=1$ FRW: A tale of two bounces”, *Phys. Rev. D* **84**:044003 (2011), [arXiv:1105.3724 \[gr-qc\]](#).
- [34] A. Corichi, A. Karami and E. Montoya, “Loop Quantum Cosmology: Anisotropy and singularity resolution”, *Proceedings of the Relativity and Gravitation 100 Years after Einstein in Prague*, [arXiv:1210.7248 \[gr-qc\]](#).
- [35] A. Corichi and E. Montoya, “Coherent semiclassical states for loop quantum cosmology,” *Phys. Rev. D* **84**, 044021 (2011) [[arXiv:1105.5081 \[gr-qc\]](#)]; “On the Semiclassical Limit of Loop Quantum Cosmology,” [arXiv:1105.2804 \[gr-qc\]](#).

- [36] A. Corichi and P. Singh, “A geometric perspective on singularity resolution and uniqueness in loop quantum cosmology,” *Phys. Rev. D* **80**, 044024 (2009) [arXiv:0905.4949 [gr-qc]].
- [37] A. Corichi and P. Singh, “Is loop quantization in cosmology unique?,” *Phys. Rev. D* **78**, 024034 (2008) [arXiv:0805.0136 [gr-qc]].
- [38] A. Corichi and P. Singh, “Is loop quantization in cosmology unique?,” *Phys. Rev. D* **78**, 024034 (2008) arXiv:0805.0136 [gr-qc]; “A geometric perspective on singularity resolution and uniqueness in loop quantum cosmology,” *Phys. Rev. D* **80**, 044024 (2009) arXiv:0905.4949 [gr-qc].
- [39] A. Corichi and P. Singh, “Quantum bounce and cosmic recall,” *Phys. Rev. Lett.* **100**, 161302 (2008) arXiv:0710.4543 [gr-qc]; *Phys. Rev. Lett.* **101**, 209002 (2008) arXiv:0811.2983 [gr-qc].
- [40] A. Corichi and T. Vukasinac, “Effective constrained polymeric theories and their continuum limit”, *Phys. Rev. D* **86**, 064019 (2012), arXiv:1202.1846 [gr-qc].
- [41] D. W. Chiou and K. Vandersloot, “The behavior of non-linear anisotropies in bouncing Bianchi I models of loop quantum cosmology,” *Phys. Rev. D* **76**, 084015 (2007) arXiv:0707.2548 [gr-qc]; D. W. Chiou, “Effective Dynamics, Big Bounces and Scaling Symmetry in Bianchi Type I Loop Quantum Cosmology,” *Phys. Rev. D* **76**, 124037 (2007). arXiv:0710.0416 [gr-qc].
- [42] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, (New York: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964).
- [43] G. F. R. Ellis and M. A. H. MacCallum, “A Class of Homogeneous Cosmological Models,” *Commun. Math. Phys.* **12**, (1969) 108-141.
- [44] C. Fleischhack in *Quantum Gravity: Mathematical Models and Experimental Bounds*, edited by Fauser *et. al.*, Birkhauser Basel, 2007.
- [45] B. Gupt and P. Singh, “Contrasting features of anisotropic loop quantum cosmologies: the role of spatial curvature”, arXiv:1109.6636 [gr-qc].
- [46] S. W. Hawking and W. Israel, *General Relativity An Einstein centenary survey*, Cambridge University Press (1979).
- [47] L. Hsu and J. Wainwright, “Self-similar spatially homogeneous cosmologies: orthogonal perfect fluid and vacuum solutions,” *Class. Quant. Grav.* **3**, (1986) 1105-1124.

- [48] H. Huang, Y. Ma and L. Qin, “Path Integral and Effective Hamiltonian in Loop Quantum Cosmology”, *Gen. Rel. Grav.* **45** (2013) 1191-1210, arXiv:1102.4755v4 [gr-qc]
- [49] G. Immirzi, “Quantum gravity and Regge calculus”, *Nuc. Phys. Proc. Suppl.* **57** 65, arXiv:gr-qc/9701052.
- [50] K. C. Jacobs, “Spatially homogeneous and euclidean cosmological models with shear,” *Astrophys. J.* **153** (1968) 661.
- [51] J. V. José and E. J. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, (Cambridge University Press, 1998).
- [52] W. Kaminski and J. Lewandowski, “The flat FRW model in LQC: the self-adjointness”, *Class. Quant. Grav.* **25**, 035001 (2008); arXiv:0709.3120 [gr-qc].
- [53] W. Kaminski, J. Lewandowski and T. Pawłowski, “Quantum constraints, Dirac observables and evolution: group averaging versus Schroedinger picture in LQC,” *Class. Quant. Grav.* **26**, 245016 (2009) [arXiv:0907.4322 [gr-qc]].
- [54] W. Kaminski and T. Pawłowski, “Cosmic recall and the scattering picture of Loop Quantum Cosmology,” *Phys. Rev. D* **81**, 084027 (2010) arXiv:1001.2663 [gr-qc].
- [55] A. Karami, *Aspects of loop quantization in cosmological models*, Ph.D. Dissertation, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (2013).
- [56] Kazuya F. and Toshifumi F., “Behavior of Bianchi type I spacetime by path integral approach in LQC”, *Phys. Rev. D* **85**, 124002 (2012); Kazuya F. and Toshifumi F., “Solution space of Bianchi type I spacetime in loop quantum cosmology”, *Phys. Rev. D* **87**, 064013 (2013).
- [57] J. Lewandowski, A. Okolow, H. Sahlmann and T. Thiemann, “Uniqueness of diffeomorphism invariant states on holonomy-flux algebras”, *Commun. Math. Phys.* **267**: 703-733, 2006. arXiv:gr-qc/0504147.
- [58] X. Lin and R. M. Wald, “Proof of the closed-universe-recollapse conjecture for diagonal Bianchi type-IX cosmologies”, *Phys. Rev. D* **40**, 3280-6 (1989), *Phys. Rev. D* **41**, 2444-8 (1990).
- [59] M. A. H. MacCallum, “A Class of Homogeneous Cosmological Models III: Asymptotic Behaviour,” *Commun. Math. Phys.* **20**, (1971) 57-84.

- [60] M. Martin-Benito, G. A. M. Marugan and E. Wilson-Ewing, "Hybrid Quantization: From Bianchi I to the Gowdy Model," Phys. Rev. D **82**, 084012 (2010) arXiv:1006.2369 [gr-qc].
- [61] C. W. Misner, "Quantum Cosmology," Phys. Rev. **186**, 1319-1327 (1969). C. W. Misner, "Mixmaster Universe," Phys. Rev. Lett. **22**, Issue 20, 1071-1074 (1969).
- [62] A. Perez, "Introduction to loop quantum gravity and spin foams", II International Conference of Fundamental Interactions, Pedra Azul, Brazil, 2004. arXiv:gr-qc/0409061v3.
- [63] J. D. Romano, "Geometrodynamics vs. Connection Dynamics", Gen. Rel. Grav. **25** (1993) 759-854, arXiv:gr-qc/9303032v1.
- [64] C. Rovelli and L. Smolin, "Knot theory and quantum gravity", Phys. Rev. Lett. **61**, 1155 (1988).
- [65] P. Singh, "Are loop quantum cosmos never singular?," Class. Quant. Grav. **26**, 125005 (2009) arXiv:0901.2750 [gr-qc].
- [66] P. Singh, "Curvature invariants, geodesics and the strength of singularities in Bianchi-I loop quantum cosmology", Phys. Rev. D **85**, 104011, (2012).
- [67] P. Singh, "Numerical loop quantum cosmology: an overview", arXiv:1208.5456 [gr-qc].
- [68] L. Szulc, W. Kaminsk and J. Lewandowski, "Closed FRW model in Loop Quantum Cosmology," Class. Quant. Grav. **24** (2007) 2621.A. Ashtekar, T. Pawłowski, P. Singh, K. Vandersloot, "Loop quantum cosmology of k=1 FRW models," Phys. Rev. D **75** (2007) 024035.
- [69] V. Taveras, "Corrections to the Friedman equations from LQG for a Universe with a free scalar field", Phys. Rev. D **78**, 064072 (2008) arXiv:0807.3325 [gr-qc].
- [70] K. S. Thorne, "Primordial element formation, primordial magnetic fields, and the isotropy of the universe," Astrophys. J. **148**, 51-68.
- [71] T. Thiemann , *Modern Canonical Quantum General Relativity*, (Cambridge, 2007).
- [72] K. Vandersloot, "Loop quantum cosmology and the k = - 1 RW model," Phys.Rev. D **75** (2007) 023523; arXiv:gr-qc/0612070.

- [73] J. Wainwright and L. Hsu, “A dynamical system approach to Bianchi cosmologies: orthogonal models of class A,” *Class. Quant. Grav.* **6**, (1989) 1409-1431.
- [74] J. Wainwright, G. F. R. Ellis, *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press (1997).
- [75] Robert M. Wald, *General Relativity*, (The University of Chicago Press, 1984).
- [76] E. Wilson-Ewing, “Loop quantum cosmology of Bianchi type IX models,” *Phys. Rev. D* **82**, 043508 (2010) [arXiv:1005.5565 \[gr-qc\]](#).