



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

El régimen infrarrojo en la teoría de Yang-Mills

Tesis
que para obtener el título de

Maestro en Ciencias en el área de Física

presenta:

Pietro Dall'Olio

Asesor:
Dr. Axel Weber
Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH.

Morelia, Michoacán. Julio de 2011

Dedicado a mis padres y a sus padres

Índice general

Introducción	6
1. Teoría de Yang Mills	8
1.1. Teoría de norma no Abeliiana	8
1.2. Cuantización	10
1.3. Copias de Gribov y condición de horizonte	13
2. Grupo de renormalización funcional	16
2.1. Teoría efectiva y grupo de renormalización	16
2.2. Ecuaciones de flujo	19
3. Ecuaciones de flujo en la teoría de Yang-Mills	24
3.1. Flujo de la acción efectiva	24
3.2. Flujo de los propagadores	29
3.3. Truncamientos y aproximaciones	31
3.4. Optimización	36
4. Solución numérica	38
Conclusiones	45
A. Transversalidad del propagador de gluón	47
B. Ecuaciones de flujo para las funciones de dos puntos	51
C. Renormalización finita del vértice gluón-fantasma	55
D. Código fuente	58

Introducción

Hace más de 50 años, C.N. Yang y R.L. Mills propusieron en [1] una explicación para la conservación del espín isotópico de sistema protón-neutrón, basada en la simetría del grupo $SU(2)$. En los años siguientes, el entendimiento de la renormalización y de la cuantización de la teoría de Yang-Mills, la llevó a constituir el modelo principal para describir todas las interacciones fundamentales conocidas (con la excepción de la gravedad).

La *Cromodinámica Cuántica* (QCD), en particular, que describe la interacción fuerte, es una teoría de Yang-Mills invariante bajo la acción del grupo no Abelianiano $SU(3)$. Las teorías de Yang-Mills cuánticas no Abelianas contienen varias complicaciones respecto al caso Abelianiano. La más seria, probablemente, es la negatividad de la función beta $\beta(g)$, que mide la variación de la constante de acoplamiento renormalizada $g(\mu)$ con la escala corriente de renormalización μ .

Para una teoría de Yang-Mills invariante bajo la simetría local de norma $SU(N)$, cálculos perturbativos a una lazo dan la siguiente expresión para $\beta(g)$ ¹[2]:

$$\beta(g) \equiv \frac{dg(\mu)}{d \ln \mu} = -\frac{11}{3} N \frac{g^3}{16\pi^2}, \quad (1)$$

integrando la cual se obtiene:

$$g(\mu) = \frac{8\pi^2}{\frac{11}{3} N \ln(\frac{\mu^2}{\Lambda^2})}. \quad (2)$$

Se ve, por lo tanto, que a escalas de momentos muy grandes (o a distancias pequeñas), la constante de acoplamiento tiende a cero (libertad asintótica), y los cálculos perturbativos describen con gran precisión los procesos de dispersión para momentos transferidos muy grandes. Parece, por lo tanto, que la negatividad de la función beta constituya una ventaja, por el poder predictivo de la teoría a altas energías; sin embargo, aumentando la distancia, se llega a una escala de momentos Λ (llamada polo de Landau), donde la constante de acoplamiento diverge, comprometiendo la validez de la teoría perturbativa.

En QCD, una investigación del comportamiento de las funciones de correlación en la región infrarroja, resulta ser fundamental para el entendimiento del mecanismo de confinamiento y del proceso de hadronización. Se necesita, para este propósito, recurrir a métodos no perturbativos, como los cálculos en la red, donde las funciones de correlación se aproximan a través de una discretización del espacio euclideo, que permite calcular numéricamente las integrales funcionales.

¹Aquí se está considerando una teoría de Yang-Mills pura (o *quenched*), sin incluir los campos fermiónicos, o de manera equivalente, en la aproximación de masas fermiónicas muy grandes, que hacen que los propagadores fermiónicos no contribuyan a las correcciones cuánticas. La negatividad de la función beta, sin embargo, sigue valiendo para QCD, si los quarks tienen un número de sabor $n_F \leq 16$.

Sin embargo, los cálculos en la red están limitados por el carácter finito del volumen considerado, lo cual no permite confiar demasiado en las extrapolaciones a escalas de momento muy pequeñas. Por eso es bueno respaldar los cálculos en la red con resultados obtenidos por medio de métodos analíticos, como las ecuaciones de Dyson Schwinger (DSE). Éstas constituyen una torre infinita de relaciones entre las funciones de correlación, y necesitan, por lo tanto, ser truncadas para formar un sistema de ecuaciones cerradas, accesible a la resolución numérica.

En el presente trabajo se investiga un método funcional alternativo a las DSE, conocido como Grupo de renormalización funcional (FRG), introducido por Wilson y aplicado al análisis de los fenómenos críticos en mecánica estadística.

La característica principal de este método es la de integrar las fluctuaciones cuánticas de las funciones de correlación poco a poco, sobre cáscaras infinitesimales de momento. Esto permite construir ecuaciones de flujo, sobre la escala de corte corriente, para las funciones de correlaciones; es decir, si se conoce la teoría a una cierta escala ultravioleta, aproximada por la supresión de las fluctuaciones por debajo de esta escala, en principio se puede conocer la teoría completa, resolviendo las ecuaciones de flujo. En la práctica, como en el caso de las DSE, es necesario implementar, bajo ciertas justificaciones, un esquema de truncamientos para llegar a un sistema de ecuaciones cerrado.

Aquí, en particular, se derivan las ecuaciones de flujo para el propagador del gluón, la partícula descrita por el campo vectorial de norma que media la interacción fuerte, y para el propagador de fantasma, la partícula ficticia que se introduce en el proceso de cuantización. Después de efectuar unos truncamientos y aproximaciones, utilizando una condición de frontera para el propagador del fantasma motivada por Gribov, las ecuaciones se reducen a un sistema cerrado. En el presente trabajo no se han calculado las soluciones de estas ecuaciones de flujo, que contienen la dependencia en la escala de corte (se pospone este cálculo para un trabajo futuro); sin embargo, al final, se ha implementado una última aproximación, que permite efectuar analíticamente la integración sobre la escala de corte, volviendo las ecuaciones equivalentes a un sistema de DSE, que se han resuelto numéricamente. Se ha encontrado que los propagadores fluyen en el infrarrojo hacia un punto fijo del grupo de renormalización. En principio, se podría utilizar el FRG para investigar la estabilidad de este punto fijo, analizando su grado de atracción para varias direcciones del espacio de teorías.

En el aspecto técnico, este trabajo se basa en la análisis desarrollada en [3], donde se encuentran las soluciones para las ecuaciones de flujo de los propagadores en el formalismo Hamiltoniano, utilizando la norma de Coulomb. Aquí, sin embargo, se utiliza el formalismo Lagrangiano, adecuado para la norma covariante de Landau. La transversalidad de las normas de Coulomb y de Landau, permite, además, de calcular el flujo de la constante de acoplamiento renormalizada.

Capítulo 1

Teoría de Yang Mills

1.1. Teoría de norma no Abelianas

La teoría que actualmente describe con mayor éxito la fenomenología de las interacciones fuertes, llamada QCD (*Cromodinámica Cuántica*), es una teoría de Yang-Mills, es decir, una teoría descrita por un Lagrangiano invariante bajo una transformación local de norma, cuyos generadores satisfacen un álgebra de Lie no conmutativa. Las teorías de Yang-Mills constituyen entonces la generalización de la electrodinámica cuántica (QED) al caso no Abeliano.

El grupo subyacente a la simetría de una teoría de campos coherentemente definida tiene que ser compacto (como $SU(N)$ o $SO(N)$, el grupo de las transformaciones ortogonales especiales), es decir, la métrica de Cartan en el espacio de los generadores tiene que ser positiva definida, para que el Hamiltoniano sea acotado por debajo y sea posible definir un estado de vacío [2].

QCD, en particular, satisface la simetría realizada por el grupo de transformaciones unitarias y especiales $SU(3)$, que agrega a los fermiones (quarks) un nuevo número cuántico llamado color, y reproduce la correcta estadística de los bariones¹; sin embargo, para resumir las principales características de estas teorías, se hará referencia al grupo más general $SU(N)$.

Para construir una teoría de norma, se consideran por lo tanto N campos ϕ_i (sean esos espinoriales o escalares) que se transforman bajo la simetría de norma de la manera siguiente:

$$\phi_i(x) \rightarrow U_{ij}(x)\phi_j(x), \quad (1.1)$$

donde U es una matriz que pertenece al grupo $SU(N)$ y que en un entorno conectado de la identidad, se puede expresar por la parametrización exponencial:

$$U(x) = \exp[-ig\alpha^a(x)T^a]. \quad (1.2)$$

Aquí, T^a son los generadores del álgebra de Lie, en la representación fundamental matrices hermitianas $N \times N$ de traza nula, para que U sea unitaria con determinante uno. Estos generadores satisfacen el álgebra:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad a = 1, \dots, N^2 - 1, \quad (1.3)$$

¹El hecho que hay que considerar $SU(3)$ y no $SO(3)$ es para reproducir otros resultados experimentales, como la realización de la libertad asintótica para un número de sabor mayor de dos [4].

donde f^{abc} son las constantes de estructuras, reales y totalmente antisimétricas para los grupos compactos que tienen una representación unitaria [5].

Dado que la transformación es local, un término cinético en el Lagrangiano que contenga derivadas ordinarias del campo no está bien definido, porque no es invariante bajo la transformación de norma y porque no tiene sentido geométrico comparar valores del campo en dos posiciones distintas, dado que están sujetos a distintas transformaciones. Por lo tanto, hay que introducir una conexión que genera una derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ a través de la cual el campo vectorial de norma es introducido de manera natural (la constante g es la misma que aparece en la definición de $U(x)$). Bajo la transformación de norma, se requiere que la acción de la derivada covariante sobre el campo se transforme como el campo mismo:

$$D_\mu \rightarrow U(x)D_\mu U^\dagger(x). \quad (1.4)$$

De esta manera, el término cinético de los campos escalares $((D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi)$ o espinoriales $(\bar{\Psi} \not{D}\Psi)$ es invariante bajo la simetría de norma.

Dada (1.4), la transformación del campo de norma se lee:

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x)A_\mu U^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x). \quad (1.5)$$

Para construir el término cinético del campo de norma, que en QCD representa el campo de la partícula de gluón (el análogo del fotón en QED), se define el tensor de fuerza (o de curvatura) $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (1.6)$$

que se transforma como la derivada covariante:

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow U(x)F_{\mu\nu}(x)U^\dagger(x). \quad (1.7)$$

A diferencia del caso electrodinámico ($U(1)$), el último término en (1.6) no desaparece en caso de simetría no Abeliana; geoméricamente el campo de norma es un campo de 1-formas con valores en el álgebra del grupo [6], por lo tanto se puede escribir como combinación lineal de los generadores, $A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a$. Considerando una descomposición análoga para $F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a(x)T^a$, las componentes están dadas por:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.8)$$

donde se ha utilizado (1.3) y la ortogonalidad de los generadores con respecto a la métrica de Cartan (véase más adelante).

Dado que el campo de fuerza ahora no es invariante bajo la transformación de norma, se construye el Lagrangiano, de manera que sea una cantidad escalar bajo la acción del grupo de Lorentz y de norma, de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{ym} = \frac{1}{2}\text{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a. \quad (1.9)$$

Sustituyendo la expresión para el campo $F_{\mu\nu}^a$ (1.8) en (1.9), se ve cómo una teoría de Yang-Mills no describe una partícula libre, sino contiene términos de auto-interacción (cúbicos y cuárticos en los campos), porque en el caso no Abeliano el campo de norma lleva carga de color.

La última igualdad de (1.9) se debe a la definición de la métrica en el espacio de los generadores, que para la representación fundamental de un grupo compacto, se puede siempre escoger de la forma [5]:

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (1.10)$$

y para una representación general R se convierte en:

$$\text{Tr}(T_R^a T_R^b) = T(R) \delta^{ab}, \quad (1.11)$$

donde la constante $T(R)$ depende de la representación. En particular para la representación adjunta, donde $(T_A^a)^{bc} = -i f^{abc}$, se puede comprobar [2] para $SU(N)$ que $T(A) = N^2$, y por lo tanto (1.11) se lee explícitamente:

$$f^{acd} f^{bcd} = N \delta^{ab}. \quad (1.12)$$

Esta relación, como se verá más adelante, aparece con frecuencia en los cálculos de los diagramas de Feynman, debido a la contracción de dos vértices.

1.2. Cuantización

La libertad debida a la simetría de norma lleva a algunas complicaciones en el proceso de cuantización de la teoría, que se resuelven más fácilmente utilizando un enfoque funcional. Recuerdese, por lo tanto, que una teoría cuántica está descrita por la funcional generatriz $\mathcal{Z}[J]$, que en el espacio Euclideo (después de una rotación de Wick)³ está dada, en caso de campo vectorial y hasta una constante de normalización irrelevante para el cálculo de las funciones de correlación, por:

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}A e^{-S[A] + \int d^4x J_\mu(x) A_\mu(x)}, \quad (1.13)$$

donde $S[A]$ es la funcional de acción clásica. $\mathcal{Z}[J]$ contiene toda la información de la teoría, porque genera las funciones de correlaciones de n puntos (valores de expectación en el estado de vacío de n campos):

$$\langle A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}[J]} \frac{\delta^n \mathcal{Z}[J]}{\delta J_{\mu_1}(x_1) \cdots \delta J_{\mu_n}(x_n)} \Big|_{J_{\mu_i}=0}. \quad (1.14)$$

Considérese ahora una teoría de Yang-Mills, donde la acción está dada por la integral de (1.9):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[A] = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = \int d^4x \left[\frac{1}{2} A_\mu^a(x) (-\partial^2 \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu^a(x) \right. \\ \left. + g f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a(x) A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) + \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) A_\mu^d(x) A_\nu^e(x) \right] \end{aligned} \quad (1.15)$$

²La demostración se basa en el hecho que la representación fundamental F de $SU(N)$ es compleja y junta a la representación compleja conjugada \bar{F} satisface: $F \otimes \bar{F} = 1 \oplus A$, donde 1 es la representación trivial y A la representación adjunta. Además hay que considerar que el operador $T^a T^a$ conmuta con todos los generadores y por lo tanto es proporcional a la identidad (lema de Schur).

³Nótese que ahora no se hace distinción entre los índices de Lorentz de arriba y de abajo, para evidenciar que en la métrica Euclidea las componentes covariantes y contravariantes son equivalentes.

Dada la invariancia de la acción bajo una transformación local de norma,

$$\mathcal{S}[A^\alpha] = \mathcal{S}[A], \quad A_\mu^\alpha = U_\alpha A_\mu U_\alpha^\dagger + \frac{i}{g} U_\alpha \partial_\mu U_\alpha^\dagger, \quad (1.16)$$

la integral funcional

$$\int \mathcal{D}A e^{-\mathcal{S}[A]} \quad (1.17)$$

está mal definida, porque se está integrando sobre configuraciones redundantes de los campos que corresponden a los mismos valores de la acción. Esto implica, por ejemplo, la imposibilidad de definir el propagador (o función de correlación de dos puntos a nivel de árbol) para el campo de norma, porque el operador cinético que aparece en (1.15) es singular, siendo un operador de proyección. Es entonces necesario seleccionar un único representante para cada órbita de configuraciones equivalentes A^α , y para eso se fija una condición de norma siguiendo la prescripción de Faddeev-Popov [7].

Se fija por lo tanto una condición de norma lineal y covariante $G(A) = 0$ y se introduce en la integral funcional la identidad:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right). \quad (1.18)$$

Siendo la acción y la medida de integración invariantes bajo transformaciones de norma⁴, se puede hacer un cambio de variables ($A^\alpha \rightarrow A$) y escribir:

$$\int \mathcal{D}A e^{-\mathcal{S}[A]} = \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{-\mathcal{S}[A]} \delta(G(A)) \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}. \quad (1.19)$$

Si la constricción de norma es lineal, el determinante bajo la integral (llamado determinante de Faddeev-Popov) no depende de la función de norma $\alpha(x)$. El infinito generado por la integral sobre α , que contiene la redundancia de la libertad de norma, se puede por lo tanto factorizar en la constante de normalización de la funcional generatriz.

Se considera en particular la norma de Landau:

$$G(A) = \partial_\mu A_\mu^a(x), \quad \forall a = 1, \dots, N^2 - 1. \quad (1.20)$$

Bajo una transformación de norma infinitesimal $U(x) = 1 - ig\alpha(x)$, el campo $A_\mu(x)$ se vuelve:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow (1 - ig\alpha)A_\mu(x)(1 + ig\alpha) + \frac{i}{g}(1 - ig\alpha)\partial_\mu(1 + ig\alpha) \\ &= A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), \alpha(x)] - \partial_\mu\alpha(x), \end{aligned} \quad (1.21)$$

y para las componentes $A_\mu^a(x)$:

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &\rightarrow A_\mu^a(x) - gf^{abc}A_\mu^b(x)\alpha^c(x) - \partial_\mu\alpha^c(x) \\ &= A_\mu^a(x) - [\delta^{ac}\partial_\mu - igA_\mu^b(T_A^b)^{ac}]\alpha^c(x) \\ &= A_\mu^a(x) - D_\mu^{ac}\alpha^c(x), \end{aligned} \quad (1.22)$$

⁴La medida de integración es invariante porque la transformación de norma es canónica.

donde la primera línea se deriva de (1.21) usando la relación de conmutación entre los generadores y sus ortogonalidad para sacar la transformación de cada componente. En la última línea de (1.22), el operador D_μ^{ac} es la derivada covariante en la representación adjunta:

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c. \quad (1.23)$$

Sustituyendo la transformación (1.22) en el determinante de Faddeev-Popov en (1.19), la integral funcional se vuelve:

$$\int \mathcal{D}A e^{-S[A]} \delta(\partial_\mu A_\mu^a(x)) \det(-\partial_\mu D_\mu^{ab}). \quad (1.24)$$

La presencia de la delta de Dirac restringe la integración a las componentes transversales del campo, es decir, a las componentes que en el espacio de momentos satisfacen $p_\mu A_\mu(p) = 0$. En este subespacio el operador correspondiente al término cinético es invertible y define el propagador a nivel de árbol:

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-q) \rangle_0 = \frac{\delta^{ab}}{p^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) (2\pi)^4 \delta^4(q-p). \quad (1.25)$$

En el caso no Abelian, el determinante de Faddeev-Popov no se puede factorizar de la integral funcional, porque depende del campo de norma, y se representa como una integral funcional sobre campos de Grassmann⁵ (que anticonmutan) independientes $c^a(x)$ y $\bar{c}^a(x)$ [2]:

$$\det(-\partial_\mu D_\mu^{ab}) \propto \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp \left[- \int d^4x \bar{c}^a(x) (-\partial_\mu D_\mu)^{ab} c^b(x) \right]. \quad (1.26)$$

Estos nuevos campos que se introducen en la teoría, llamados campos de fantasma, violan el teorema de espín-estadística (son campos escalares que satisfacen la estadística de Fermi-Dirac) y por lo tanto, los estados asintóticos de estas partículas no deben ser generados en los procesos de interacción. Esto está garantizado por la construcción del espacio de Fock⁶ que identifica como estados físicos los que viven en el espacio cociente $\mathcal{Ker}(Q_B)/\mathcal{Im}(Q_B)$ (cohomología de Q_B), donde Q_B es el generador de la simetría BRST, la simetría residual de la acción después de haber fijado la norma [2]. Los estados fantasma y los estados de polarización longitudinal y temporal del gluón forman un cuarteto que no vive en la cohomología, y dado que el Hamiltoniano conmuta con Q_B , se tiene que los estados físicos no pueden evolucionar en estados no físicos.

Resumiendo, la fijación de la norma en el proceso de cuantización modifica la funcional generatriz de la siguiente manera:

$$\mathcal{Z}[J, \sigma, \bar{\sigma}] \propto \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-S[A, \bar{c}, c] + \int d^4x [J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\sigma}^a c^a + \bar{c}^a \sigma^a]}, \quad (1.27)$$

donde se han introducido los términos de fuentes (los campos de Grassmann σ y $\bar{\sigma}$) asociados a los campos fantasma. En la norma de Landau que se está considerando, la integración sobre el campo de norma debe de considerarse restringida a las componentes transversales, y la acción está dada por:

$$S[A, \bar{c}, c] = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \bar{c}^a(x) (-\partial_\mu D_\mu)^{ab} c^b(x) \right]. \quad (1.28)$$

⁵Si fueran campos ordinarios, su integral funcional daría el inverso del determinante.

⁶De manera análoga al formalismo de Gupta-Bleuler para la cuantización del campo electromagnético.

En el análisis del problema de cuantización no fue necesario tomar en cuenta la parte fermiónica de la acción; haciéndolo, se podrían reproducir los mismos argumentos, siendo la acción completa y la medida de integración fermiónica ambas invariantes bajo una transformación local de norma. En la continuación de este trabajo se seguirá despreciando la dinámica de los quarks, restringiendo el estudio al sector de Yang-Mills puro.

1.3. Copias de Gribov y condición de horizonte

La naturaleza no Abeliada de la simetría de norma lleva a una nueva complicación en las teorías de Yang-Mills, aclarada por la primera vez en el estudio de Gribov [8]. La fijación de la norma, en realidad, no selecciona un único representante para cada órbita A^α . En la norma de Landau, por ejemplo, eso quiere decir que una órbita A^α intercepta la superficie definida por $\partial_\mu A_\mu = 0$ en más de un punto, dejando copias del campo espurias, llamadas copias de Gribov. Esto claramente compromete todo el proceso de cuantización de Fadeev-Popov; en particular, (1.18) deja de cumplirse.

Para convencerse de la existencia de las copias de Gribov, aquí se considera la transformación de norma infinitesimal (1.22). Si el campo inicial satisface la norma de Landau, la satisface también el campo transformado, si se cumple:

$$-\partial_\mu D_\mu^{ab}[A] \alpha^b(x) = 0, \quad (1.29)$$

es decir, en el caso que el operador de Fadeev-Popov tenga algunos eigenvalores nulos⁷ existen copias de Gribov. La ecuación de eigenvalores:

$$-\partial_\mu D_\mu^{ab}[A] \alpha^b(x) = \epsilon(A) \alpha^a(x) \quad (1.30)$$

se puede ver como una especie de ecuación de Schrödinger, donde el campo $A(x)$ juega el papel del potencial, de la manera que aumentando la intensidad de los campos se llega a un punto donde los eigenvalores dejan de ser todos positivos y se encuentra el primer eigenvalor nulo. El espacio de configuraciones del campo resulta así dividido en regiones (las regiones de Gribov) numeradas según el número de eigenvalores nulos del operador de Fadeev-Popov (nótese que tal operador es hermitiano, así que sus eigenvalores son reales).

Gribov ha mostrado la existencia de copias entre la primera y la segunda región cerca de la frontera (llamada horizonte de Gribov) [8] [9], donde se encuentra el primer eigenvalor nulo. Parece entonces razonable conjeturar para la funcional generatriz la restricción de integrar sólo sobre las configuraciones que pertenecen a la primera región de Gribov⁸ Ω definida por:

$$\Omega \equiv \{ A_\mu^a, \partial_\mu A_\mu^a = 0, -\partial_\mu D_\mu^{ab} > 0 \}. \quad (1.31)$$

La ventaja de utilizar métodos funcionales como las ecuaciones de Dyson-Schwinger (DSE) o el grupo de renormalización funcional (FRG) es que no hace falta preocuparse por las complicaciones topológicas generadas por esta restricción, porque no hay ninguna contribución del integrando

⁷Nótese que en el caso Abeliado esta condición se reduce a $-\partial^2 \alpha(x) = 0$ que tiene solución nula si se impone a las funciones $\alpha(x)$ de anularse al infinito, así que no surge el problema de las copias.

⁸Recientemente, Zwanziger ha argumentado que [10], a pesar de que la primera región de Gribov tampoco está libre de copias, estas últimas no influyen sobre los resultados para los valores de expectación.

de la funcional generatriz en la frontera de Ω , siendo ahí el determinante de Fadeev-Popov nulo por definición.

La restricción a la primera región de Gribov impone, sin embargo, fuertes condiciones de tipo no-perturbativo a los propagadores completos (vestidos) del fantasma y del gluón. En [8] [9] se argumenta que imponer la positividad del operador de Fadeev-Popov implica la no existencia de polos distintos de cero para el propagador de fantasma (*condición de no polo*). En la norma de Landau, además, esta condición parece corroborar la hipótesis que ve al propagador de fantasma completo diverger más fuertemente que su contraparte a nivel de árbol, en el límite de momento tendiente a cero (límite de extremo infrarrojo), mientras que el del gluón se anula en este límite. La divergencia del propagador de fantasma se debe a la influencia del horizonte de Gribov donde el operador de Fadeev-Popov se vuelve singular, y por lo tanto se designa como la *condición de horizonte*.

Parametrizando entonces los propagadores en el espacio de momentos de la siguiente forma⁹:

$$\langle \bar{c}^a(p) c^b(-q) \rangle = \frac{d(p)}{p^2} \delta^{ab} (2\pi)^4 \delta^4(p - q), \quad (1.32)$$

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-q) \rangle = \frac{P_{\mu\nu}^T(p)}{\omega(p)} \delta^{ab} (2\pi)^4 \delta^4(p - q),$$

donde $P_{\mu\nu}^T(p) = \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2$ es el operador de proyección transversal en el espacio de momentos, las condiciones de horizonte sobre las funciones incógnitas $d(p)$ y $\omega(p)$ se leen:

$$\lim_{p \rightarrow 0} d(p) = \infty, \quad \lim_{p \rightarrow 0} \omega(p) = \infty. \quad (1.33)$$

La condición de horizonte, que ve el propagador gluónico suprimido por el del fantasma se basa en cálculos perturbativos hasta el segundo orden de la función de dos puntos de fantasma, considerando el campo gluónico como campo externo. Recientemente, cálculos más elaborados, a ordenes más altos, han llevado a conjeturar una distinta condición de horizonte, conocida como el escenario refinado de Gribov-Zwanziger, que vería a los propagadores del gluón y del fantasma ir el primero hacia un límite finito para momentos nulos, y el segundo diverger como el propagador desnudo. Sin embargo, la cuestión no parece aún resuelta, y en este trabajo se considerará válida la condición de horizonte original de Gribov (1.33). Más adelante se utilizará la primera de estas constricciones para calcular $d(p)$ y $\omega(p)$ (la condición sobre $\omega(p)$ se cumplirá consecuentemente).

El comportamiento divergente del propagador de fantasma para momento tendiente a cero es condición suficiente para el cumplimiento del criterio de Kugo-Ojima [11], [12] para obtener confinamiento, es decir, para inferir que los estados de singulete de color son los únicos estados físicos, lo que explicaría por qué no se observan experimentalmente quarks o gluones aislados. Hay que evidenciar, sin embargo, que el criterio de Kugo-Ojima es aparentemente incompatible con la prescripción de Gribov, dado que el primero se basa en la invariancia bajo la simetría BRST que se rompe explícitamente, restringiendo la integral funcional a la primera región de Gribov.

⁹La estructura de los índices de color y la dependencia escalar del momento están garantizadas por la simetría global de norma y por la simetría de Lorentz; el factor $\delta(p - q)$ por la invariancia bajo translaciones

La ruptura de la simetría BRST pone en duda la suposición, en la norma de Landau, de la transversalidad del propagador completo del gluón, dado que a rigor, dejan de ser válidas las identidades de Slavnov-Taylor (la generalización de las identidades de Ward-Takahashi al caso no Abelian), que se usan para demostrar la ausencia de correcciones cuánticas a la parte longitudinal del propagador del vector de norma. Sin embargo, considerando el formalismo de Nakanishi-Lautrup, se puede mostrar que el propagador sigue siendo transversal, mientras deja de serlo la función de dos puntos generada por la acción efectiva (véase el apéndice A).

Capítulo 2

Grupo de renormalización funcional

2.1. Teoría efectiva y grupo de renormalización

En el intento de investigar el régimen infrarrojo del sector de Yang-Mills, inaccesible al método perturbativo, se explotará una herramienta desarrollada por Kenneth Wilson [13] con el fin de estudiar el comportamiento de sistemas físicos cerca de un punto crítico, correspondiente para sistemas estadísticos al fenómeno conocido como transición de fase. El problema de los sistemas en estas configuraciones es que la longitud de correlación se vuelve infinita, implicando un número infinito de grados de libertad que interactúan entre sí. En materiales ferromagnéticos esto corresponde a la formación de dominios magnéticos de dimensión a cualquier escala, por falta en el punto crítico de una longitud característica del sistema.

En el contexto de sistemas estadísticos, si se enfoca la atención a las funciones de correlación a ‘grandes’ distancias (o en el espacio de momentos para momentos ‘pequeños’) con respecto a la longitud mínima de fluctuación, del orden de la distancia interatómica a , se puede describir el sistema por la misma teoría integrando sobre las fluctuaciones con longitud de onda del orden $a \lesssim \lambda \lesssim sa$, con $s > 1$ un factor de dilatación. Tomando como unidad de medida la nueva longitud mínima de fluctuación sa , las longitudes, en particular la longitud de correlación, se ven rescaladas de un factor s .

El espacio de momentos de un sistema estadístico está acotado por arriba por la escala $\Lambda \sim 1/a$, y el promedio de las fluctuaciones considerado anteriormente corresponde a integrar sobre escalas de momento del orden $\Lambda/s \lesssim k \lesssim \Lambda$. En la teoría cuántica de campos, el espacio de momento no está acotado de forma natural, a menos que se discretice el espacio-tiempo, y por eso surgen las divergencias ultravioletas en los cálculos de las correcciones cuánticas. Sin embargo, la actitud moderna, inspirada por el trabajo de Wilson, es de considerar una teoría de campos no como un teoría fundamental, sino como una teoría *efectiva* válida sólo a escalas inferiores a un cierto orden de magnitud de energía; parece por lo tanto justificable introducir una escala máxima también para estas teorías, escala que eventualmente se podrá considerar grande de manera arbitraria¹.

A continuación, se considera la teoría de un campo escalar $\varphi(x)$ descrita, para momentos menores de una escala inicial Λ_0 , por una acción $\mathcal{S}[\varphi]$. La operación de promediar sobre los

¹Si se quiere estudiar la física de una teoría de campos a muy bajas energías, no hace realmente diferencia mandar la cota a infinito.

modos de alta energía genera una nueva acción² $\mathcal{S}'[\varphi, s]$, dada, salvo por una constante de normalización, por:

$$e^{-\mathcal{S}'[\varphi]} = \int \prod_{\Lambda \leq |k| \leq \Lambda_0} d\varphi(k) e^{-\mathcal{S}[\varphi]}, \quad (2.1)$$

donde $\Lambda = \Lambda_0/s$ con $s > 1$. La nueva acción ahora está definida para $k < \Lambda_0/s$, y después de rescalar la unidad de momento $k \rightarrow k' = sk$, sigue siendo acotada por el momento inicial Λ_0 .

La transformación dada por la integración en la cáscara de momento y posterior reescalamiento satisface las propiedades de grupo y, por lo tanto, se le llama *grupo de renormalización*. La acción sucesiva de dos transformaciones R_{s_1} y R_{s_2} relativas a dos factores de dilatación s_1 y s_2 es igual a la acción de la transformación relativa al producto de los factores, $R_{s_1}R_{s_2} = R_{s_1s_2}$, mientras la transformación identidad corresponde por supuesto al factor $s = 1$. Sin embargo, no existe la transformación inversa, la operación de integración es unidireccional, así que rigurosamente se debería hablar de *semigrupo*.

El grupo de renormalización está estrictamente relacionado con el procedimiento usual de renormalización en teoría cuántica de campos, donde las divergencias de las correcciones cuánticas se absorben en un número finito de parámetros no físicos. Ahora, los parámetros que describen la teoría se transforman (renormalizan) bajo la acción del grupo; en caso de una teoría escalar en cuatro dimensiones, si se empieza con un Lagrangiano que contiene un término de interacción del tipo $\varphi^4(x)$:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4, \quad (2.2)$$

el Lagrangiano transformado $\mathcal{L}'(\varphi, s)$ toma la forma [2]:

$$\mathcal{L}'(\varphi, s) = \frac{1}{2}Z(s)\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \frac{1}{2}m^2(s)\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda(s)\varphi^4 + \sum_{d \geq 6} \sum_i c_{d,i}(s)\mathcal{O}_{d,i}, \quad (2.3)$$

donde el último término incluye todos los operadores $\mathcal{O}_{d,i}$ de dimensión d (en unidad de masa) mayor o igual a seis que respectan la simetría de la teoría original, es decir, que son invariantes bajo la transformación $\varphi \rightarrow -\varphi$, que se generan por la integración (2.1) (el índice i distingue entre operadores de la misma dimensión inequivalentes por distinta estructura de derivadas parciales o por potencias diferentes de φ).

Los parámetros del Lagrangiano transformado dependen de los parámetros del Lagrangiano inicial y del factor de escala s . Definiendo el *espacio de teorías* como el espacio vectorial infinito dimensional generado por los parámetros relativos a distintos operadores, se puede identificar una teoría con un vector en este espacio $\mu = \{Z, m^2, \lambda, c_1, c_2 \dots\}$ y ver la acción del grupo de renormalización como un mapeo en este espacio que a un vector μ asocia otro vector $\mu'(\mu, s)$. En caso de transformaciones infinitesimales ($s = 1 + \delta$, $\delta \rightarrow 0$), iteraciones sucesivas de éstas forman trayectorias continuas, llamadas *flujos* en el espacio de teorías.

Un interés físico particular lo tienen aquellos vectores invariantes bajo la acción del grupo, llamados *puntos fijos*, es decir, puntos μ^* para los cuales $\mu'(\mu^*, s) = \mu^*$. Sin embargo, para que una teoría eventualmente llegue, a lo largo de su flujo, a encontrar un punto fijo, es necesario incluir también, en la transformación del grupo de renormalización, un rescalamiento de los

²Se intenta de evitar de llamarla acción efectiva para no confundirla con la acción cuántica, generatriz de los diagramas una partícula irreducibles.

campos [14]. Para convencerse de esto, considérese la transformación en la acción del término cinético (ahora en dimensiones arbitrarias d). Después de la integración (2.1), este término tendrá la forma:

$$\int d^d x \frac{1}{2} Z(s, \mu) \partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) = \int d^d x' s^{d-2} \frac{1}{2} Z(s, \mu) \partial'_\mu \varphi(x') \partial'_\mu \varphi(x'), \quad (2.4)$$

donde se han rescalado las coordenadas $x' = x/s$. En el hipotético punto fijo μ^* debe por lo tanto satisfacerse:

$$s^{d-2} Z(s, \mu^*) = \text{const.} \quad \forall s > 1. \quad (2.5)$$

La propiedad de grupo de la transformación, $R_{s_1} R_{s_2} = R_{s_1 s_2}$, implica:

$$\begin{aligned} s_1^{d-2} s_2^{d-2} Z(s_1, \mu^*) Z(s_2, \mu^*) &= (s_1 s_2)^{d-2} Z(s_1 s_2, \mu^*) \\ \Rightarrow Z(s_1, \mu^*) Z(s_2, \mu^*) &= Z(s_1 s_2, \mu^*), \end{aligned} \quad (2.6)$$

la cual se satisface sólo si, en el punto fijo, $Z(s, \mu^*) \propto s^{-\eta}$, con algún exponente η . Está claro, entonces, que en general (2.5) no puede ser válida (nada asegura que $\eta = d - 2$). La manera de encontrar el punto fijo es, por lo tanto, introducir una ley de transformación para el campo de la forma:

$$\varphi'(x') = s^{d_\varphi} \varphi(x) \quad d_\varphi = \frac{d - 2 + \eta}{2}, \quad (2.7)$$

de manera que la acción del grupo (2.4) ahora se lee:

$$\int d^d x' s^{d-2} \frac{1}{2} Z(s, \mu) \partial'_\mu \varphi(x') \partial'_\mu \varphi(x') = \int d^d x' s^{-\eta} \frac{1}{2} Z(s, \mu) \partial'_\mu \varphi'(x') \partial'_\mu \varphi'(x'), \quad (2.8)$$

y la condición necesaria para la existencia del punto fijo ahora se satisface trivialmente:

$$s^{-\eta} Z(s, \mu^*) = \text{const.} \quad \forall s > 1. \quad (2.9)$$

Estudiando la evolución de los parámetros alrededor del punto fijo, se puede establecer su grado de atracción o repulsión en base al número de parámetros que se dilatan (*relevantes*) o se restringen (*irrelevantes*) o quedan invariantes en aproximación lineal (*marginales*) bajo la acción del grupo. Si el punto fijo es fuertemente atractivo, es decir, si es atractivo en todas las direcciones, o en todas excepto un número finito (sólo en este caso mixto, de direcciones atractivas y algunas repulsivas se habla de punto crítico, donde la longitud de correlación, o el inverso de la masa renormalizada, se vuelve infinita [15]) es probable que después de un número muy grande de iteraciones el flujo se encuentre cerca del punto fijo, independientemente del punto inicial³. Esto significa que a bajas energías, la teoría efectiva parecerá la misma prescindiendo de los detalles de las interacciones que describen la teoría fundamental subyacente, y contendrá unos pocos términos marginales y relevantes, es decir, tendrá las características de una teoría renormalizable. Esta propiedad se le conoce con el nombre de *universalidad*.

Vale la pena evidenciar que en el punto fijo, la función de correlación de dos puntos obedece a una ley de potencias. Se denota a la función de correlación (o propagador vestido) en el espacio de momentos con:

$$\langle \varphi(p) \varphi(-q) \rangle = G_2(p, \mu) (2\pi)^d \delta^d(p - q), \quad (2.10)$$

³Para un punto crítico, donde hay al menos una dirección relevante, generalmente correspondiente al parámetro de masa, es necesario hacer un ajuste fino de este parámetro en la región ultravioleta para que la teoría fluya hacia el punto fijo.

donde se le ha puesto la dependencia explícita de la teoría μ . Para momentos p menores del corte $\Lambda = \Lambda_0/s$, la integración de la transformación del grupo no afecta la función de correlación, porque no afecta los modos de momento $k < \Lambda$; por lo tanto, la teoría μ genera el mismo propagador que la teoría μ' , salvo por los factores de reescalamiento:

$$\begin{aligned} G_2(p, \mu) (2\pi)^d \delta^d(p - q) \Big|_{p < \Lambda} &= \int \mathcal{D}\varphi \varphi(p) \varphi(-q) e^{-S(\mu)} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi_{k < \Lambda} \varphi(p) \varphi(-q) e^{-S'(\mu')} = s^{2(d-d_\varphi)} G_2(sp, \mu') (2\pi)^d \delta^d(p - q), \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde se ha usado la transformación de reescalamiento del campo en espacio de momentos $\varphi(p) \rightarrow s^{d_\varphi - d} \varphi(p)$. Si la teoría se encuentra en un punto fijo ($\mu = \mu' = \mu^*$) resulta entonces:

$$G_2(p, \mu^*) = s^{2(d-d_\varphi)} G_2(sp, \mu^*). \quad (2.12)$$

Si ahora se pone $s = \Lambda_0/p$, que corresponde a integrar sobre todas las fluctuaciones entre Λ_0 y p , se encuentra la dependencia de tipo potencia exhibida por el propagador en el punto fijo:

$$G_2(p, \mu^*) \propto p^{2(d_\varphi - d)}. \quad (2.13)$$

En el próximo capítulo se encontrarán para los propagadores de gluón y de fantasma leyes de tipo potencia en el extremo infrarrojo (conocidas como soluciones de *escalamiento*), y por lo tanto, se deduce que la teoría de Yang-Mills a muy bajas energías se encuentra en un punto fijo. Para este propósito, se utilizará una versión más práctica del grupo de renormalización de Wilson, conocida con el nombre de *grupo de renormalización funcional*, donde la escala de corte ahora es una variable continua (en lugar de ser mantenida fija por el rescalamiento de la unidad de momento) derivando respecto a la cual, se construyen ecuaciones de flujo para la acción efectiva y las funciones de correlación de n puntos.

2.2. Ecuaciones de flujo

Para describir las características principales del grupo de renormalización funcional y de las ecuaciones de flujo que se derivan, no es necesario especificar los detalles de la teoría, así que se considerará por el momento la teoría de un único campo escalar φ , cuya funcional generatriz está dada por:

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi} \equiv e^{W[J]}, \quad (2.14)$$

donde $W[J]$ es la funcional de Schwinger, generatriz de los diagramas conexos [2]. Nótese que se ha introducido la notación compacta para el producto interno:

$$J \cdot \varphi \equiv \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} J(p) \varphi(-p). \quad (2.15)$$

Más adelante, en la teoría de Yang-Mills, se entenderá contenido en esta convención cualquier tipo de índice interno también.

Como antes, se genera la teoría efectiva integrando los modos de alta energía, ahora acotados por una escala arbitraria k :

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\varphi_{|p|<k} e^{-S_{eff}[\varphi,k]+J\cdot\varphi}, \quad (2.16)$$

donde:

$$e^{-S_{eff}[\varphi,k]+J\cdot\varphi} = \int \mathcal{D}\varphi_{|p|>k} e^{-S[\varphi]+J\cdot\varphi}. \quad (2.17)$$

Los modos infrarrojos se pueden cortar de manera suave agregando a la acción clásica un término cuadrático en los campos ΔS_k que contiene una oportuna función regularizadora, dependiente del momento y de la escala de corte:

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}\varphi \cdot R_k \cdot \varphi \equiv \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \varphi(-p) R_k(p) \varphi(p), \quad (2.18)$$

donde se requiere que la función regularizadora $R_k(p)$ satisfaga las dos siguientes propiedades:

$$\lim_{p/k \rightarrow 0} R_k(p) = \infty, \quad \lim_{k/p \rightarrow 0} R_k(p) = 0. \quad (2.19)$$

La primera condición es necesaria para que el término regulador suprima en la funcional generatriz los modos correspondientes a $p \lesssim k$. La segunda, por otro lado, permite recuperar la teoría completa mandando $k \rightarrow 0$. Además, para k finito, los modos de momento $p \gg k$ no resultan afectados por el regulador, de manera que en la región ultravioleta, la teoría completa sigue siendo válida. Esta característica, que hace que esta formulación difiera de la de Wilson, encaja bien en el análisis de la teoría de Yang-Mills, donde, a grandes escalas de energía, se puede tratar la teoría de manera perturbativa, debido a la libertad asintótica (la función beta perturbativa es negativa [2]).

Se define entonces la funcional generatriz regularizada con el corte a la escala k como:

$$\mathcal{Z}_k[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]-\Delta S_k[\varphi]+J\cdot\varphi} \equiv e^{W_k[J]}. \quad (2.20)$$

Variando la escala k , se puede estudiar la evolución de $Z_k[J]$ y de las funciones de correlación. Se define el parámetro $t = \log(k/k_0)$, donde k_0 es una escala de referencia arbitraria introducida para que t sea una variable adimensional. Tomando la derivada de $Z_k[J]$ con respecto a t , se obtiene la ecuación de flujo para la funcional generatriz:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{Z}_k[J] &= \int \mathcal{D}\varphi \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \varphi(-p) \partial_t R_k(p) \varphi(p) \right) e^{-S[\varphi]-\Delta S_k[\varphi]+J\cdot\varphi} \\ &= \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (2\pi)^{2d} \frac{\delta}{\delta J(p)} \partial_t R_k(p) \frac{\delta}{\delta J(-p)} \right) \mathcal{Z}_k[J] \\ &= \left(-\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta J} \cdot \dot{R}_k \cdot \frac{\delta}{\delta J} \right) \mathcal{Z}_k[J], \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde en la última línea se ha usado la notación compacta (2.15). Aquí debe entenderse $\delta/\delta J(p) \equiv (2\pi)^d \delta/\delta J(-p)$ y $\dot{R}_k \equiv \partial_t R_k$.

Escribiendo $Z_k[J]$ en términos de la funcional generatriz de los diagramas conexos $W_k[J]$, se deriva para esta la ecuación de flujo:

$$\partial_t W_k[J] = -\frac{1}{2} \frac{\delta W_k}{\delta J} \cdot \dot{R}_k \cdot \frac{\delta W_k}{\delta J} - \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_k \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J}, \quad (2.22)$$

aquí con el término de traza se entiende:

$$\text{Tr} \dot{R}_k \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} \equiv \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \dot{R}_k(p) (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J(-p) \delta J(p)}. \quad (2.23)$$

Tomando derivadas con respecto a las fuentes J de (2.22), se pueden derivar las ecuaciones de flujo para las funciones de correlación conexas. Sin embargo, resulta más práctico trabajar con la ecuación de flujo para la acción efectiva (o acción cuántica). Esta se define como la transformada de Legendre de $W[J]$ con respecto a su argumento J . El valor de expectación del campo ϕ en presencia de la fuente J , también llamado el campo clásico, está dado por:

$$\phi \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J}, \quad (2.24)$$

invirtiendo la cual se define, en notación compacta, la acción efectiva $\Gamma[\phi]$:

$$\Gamma[\phi] = -W[J] + J \cdot \phi \Big|_{J=J(\phi)}, \quad (2.25)$$

que satisface:

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} = -\frac{\delta J}{\delta \phi} \cdot \frac{\delta W[J]}{\delta J} + \frac{\delta J}{\delta \phi} \cdot \phi + J = J, \quad (2.26)$$

donde se ha utilizado la definición de ϕ (2.24). Tomando otra derivada con respecto a ϕ y poniendo ϕ igual a su valor correspondiente a $J = 0$ (o sea al valor de expectación de campo en ausencia de fuente, que es igual a cero si no hay ruptura espontánea de simetría), se obtiene la función de dos puntos, dada por el inverso del propagador vestido:

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi \delta \phi} \right|_{\phi=\langle \varphi \rangle} = \left(\frac{\delta \phi}{\delta J} \right)_{J=0}^{-1} = \left(\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J \delta J} \right)_{J=0}^{-1}. \quad (2.27)$$

Se puede mostrar [2], tomando otras derivadas, que la acción efectiva genera los vértices propios, o diagramas una partícula irreducibles (1PI), es decir, diagramas que no se pueden separar en dos piezas cortando un solo propagador (los vértices propios, en particular, no incluyen los propagadores de las piernas externas). Para una teoría escalar con interacción tipo $\varphi^4(x)$, la acción efectiva en espacio de momentos se puede entonces escribir:

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi] &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (\phi(-p) - \langle \varphi(-p) \rangle) (p^2 + m^2 - \Pi(p^2)) (\phi(p) - \langle \varphi(p) \rangle) \\ &+ \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{d^d p_n}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(p_1 + \dots + p_n) \mathbf{V}_n(p_1, \dots, p_n) \\ &\times (\phi(p_1) - \langle \varphi(p_1) \rangle) \cdots (\phi(p_n) - \langle \varphi(p_n) \rangle), \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde $\mathbf{V}_n(p_1, \dots, p_n)$ son los vértices propios de n puntos, y $\Pi(p^2)$ es la función de auto-energía. Nótese que la acción efectiva está definida de manera que coincida con la acción clásica a nivel de árbol.

Considerando ahora $W_k[J]$, que depende de la escala de corte k , se define $\Gamma_k[\phi]$ a través de la transformada de Legendre modificada:

$$\Gamma_k[\phi] = (-W_k[J] + J \cdot \phi)_{J=J_k(\phi)} - \frac{1}{2} \phi \cdot R_k \cdot \phi, \quad (2.29)$$

donde $J_k(\phi)$ se obtiene invirtiendo:

$$\phi = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J}. \quad (2.30)$$

Las eqs. (2.26) y (2.27) ahora se leen:

$$\frac{\delta(\Gamma_k[\phi] + \Delta S_k[\phi])}{\delta \phi} = J, \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right) = \left(\frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J \delta J} \right)^{-1}. \quad (2.32)$$

La ecuación de flujo para la acción efectiva está dada por:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\phi] &= -\partial_t W_k[J] - \partial_t J \cdot \frac{\delta W_k[J]}{\delta J} + \partial_t J \cdot \phi - \frac{1}{2} \phi \cdot \dot{R}_k \cdot \phi \\ &= \frac{1}{2} \frac{\delta W_k}{\delta J} \cdot \dot{R}_k \cdot \frac{\delta W_k}{\delta J} + \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_k \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} - \frac{1}{2} \phi \cdot \dot{R}_k \cdot \phi \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_k \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde se han utilizado (2.22), (2.30) y (2.32).

Tomando derivadas funcionales de (2.33) con respecto a los campos clásicos, se generan las ecuaciones de flujo para las funciones de n puntos. Utilizando la propiedad:

$$\frac{\delta(A^{-1}[\phi])}{\delta \phi} = -A^{-1}[\phi] \frac{\delta A[\phi]}{\delta \phi} A^{-1}[\phi], \quad (2.34)$$

con $A[\phi]$ una funcional arbitraria de ϕ , se obtiene, para la ecuación de flujo de la función de dos puntos:

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_k \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \phi_1 \delta \phi \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \phi_2 \delta \phi \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_k \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \phi_2 \delta \phi \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \phi_1 \delta \phi \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \\ &- \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_k \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \frac{\delta^4 \Gamma_k}{\delta \phi_1 \delta \phi_2 \delta \phi \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

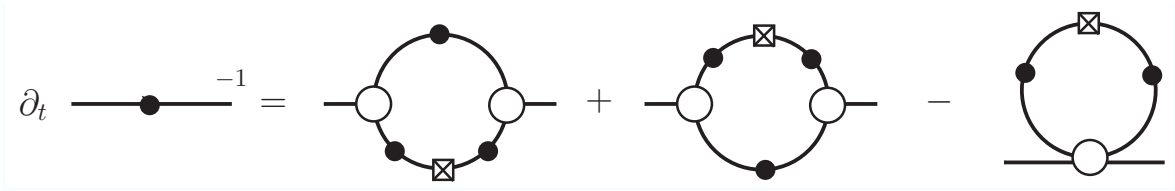


Figura 2.1: Ecuación de flujo para la función de dos puntos (inverso del propagador). Las líneas con los círculos negros representan $\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k\right)^{-1}$ en el lado derecho y $\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi}\right)^{-1}$ en el lado izquierdo. Los círculos blancos representan los vértices propios $\Gamma_k^{(n)}$ y el cuadrado con la cruz una inserción del regulador \hat{R}_k .

ilustrada en diagramas en Fig. 2.1. En la derivación de las ecuaciones de flujo, no ha sido necesario especificar los detalles de la acción clásica. En el caso de la teoría escalar φ^4 , por ejemplo, los vértices de tres puntos en (2.35) se anulan cuando se ponen los campos clásicos igual a cero (si no hay ruptura de simetría). La ecuación de flujo es una ecuación diferencial del primer orden en la escala t , así que para resolverla, hay que especificar unas condiciones iniciales, condiciones que en el caso de Yang-Mills estarán dadas por la aproximación de los propagadores en el ultravioleta con los propagadores desnudos, y por la condición de horizonte.

Capítulo 3

Ecuaciones de flujo en la teoría de Yang-Mills

3.1. Flujo de la acción efectiva

Para la teoría de Yang-Mills, la funcional generatriz regularizada a la escala de corte k está dada por:

$$\mathcal{Z}_k[J, \sigma, \bar{\sigma}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-S - \Delta S_k + J \cdot A + \bar{\sigma} \cdot c + \bar{c} \cdot \sigma} \equiv e^{W_k[J, \sigma, \bar{\sigma}]}, \quad (3.1)$$

con la acción modificada por el término regulador ΔS_k :

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} A \cdot R_{A,k} \cdot A + \bar{c} \cdot R_{C,k} \cdot c. \quad (3.2)$$

La falta del factor $1/2$ en frente del regulador de fantasma es debido a la independencia de los campos c y \bar{c} (no se deben considerar uno el complejo conjugado del otro).

Los productos escalares en la notación abreviada (como $J \cdot A$) ahora incluyen también sumas sobre los índices de Lorentz y de color, i.e.

$$J \cdot A = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} J_\mu^a(-p) A_\mu^a(p), \quad (3.3)$$

$$A \cdot R_{A,k} \cdot A = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} A_\mu^a(-p) R_{A,k}^{ab}(p) A_\mu^b(p). \quad (3.4)$$

Las funciones regulatrices se escogen diagonales en los índices de color, para conservar la simetría global de norma (la simetría local se rompe en la acción regularizada) y dependientes sólo del módulo del momento, para respetar la simetría de Lorentz. En el lenguaje del grupo de renormalización de Wilson, se está, por lo tanto, limitando la atención al flujo de las teorías que viven en el subespacio donde estas simetrías no se rompen:

$$R_{A,k}^{ab}(p) = R_{A,k}(p) \delta^{ab}, \quad R_{C,k}^{ab}(p) = R_{C,k}(p) \delta^{ab}. \quad (3.5)$$

La ecuación de flujo para \mathcal{Z} ahora está dada por:

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{Z}_k[J, \sigma, \bar{\sigma}] &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \partial_t e^{-S - \Delta S_k + J \cdot A + \bar{\sigma} \cdot c + \bar{c} \cdot \sigma} \\
&= - \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \left[\frac{1}{2} A \cdot \dot{R}_{A,k} \cdot A + \bar{c} \cdot \dot{R}_{C,k} \cdot c \right] e^{-S - \Delta S_k + J \cdot A + \bar{\sigma} \cdot c + \bar{c} \cdot \sigma} \\
&= \left(-\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta J} \cdot \dot{R}_{A,k} \cdot \frac{\delta}{\delta J} + \frac{\delta}{\delta \sigma} \cdot \dot{R}_{C,k} \cdot \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}} \right) \mathcal{Z}_k[J, \sigma, \bar{\sigma}],
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde en notación abreviada debe de entenderse:

$$\frac{\delta}{\delta J} \cdot \dot{R}_{A,k} \cdot \frac{\delta}{\delta J} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (2\pi)^{2d} \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(p)} \dot{R}_{A,k}^{ab}(p) \frac{\delta}{\delta J_\mu^b(-p)}. \tag{3.7}$$

La diferencia de signos en los dos términos de la última equivalencia en la ecuación (3.6) se debe a un signo menos extra que aparece al escribir los campos de fantasma como derivadas funcionales de las fuentes, causado por la propiedad de anticonmutación de las variables de Grassman.

Para la funcional generatriz de los diagramas conexos $W_k[J, \sigma, \bar{\sigma}] \equiv \ln Z_k[J, \sigma, \bar{\sigma}]$, se obtiene la siguiente ecuación de flujo:

$$\begin{aligned}
\partial_t W_k &= -\frac{1}{2} \frac{\delta W_k}{\delta J} \cdot \dot{R}_{A,k} \cdot \frac{\delta W_k}{\delta J} - \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} \\
&\quad + \frac{\delta W_k}{\delta \sigma} \cdot \dot{R}_{C,k} \cdot \frac{\delta W_k}{\delta \bar{\sigma}} - \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta \sigma}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Nótese que el último término tiene el mismo signo que el correspondiente gluónico. Eso porque se ha invertido el orden de las derivadas funcionales respecto a σ y $\bar{\sigma}$.

Como antes, se define la traza de la manera siguiente:

$$\text{Tr} \dot{R}_{A,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} \equiv \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (2\pi)^{2d} \dot{R}_{A,k}^{ab}(p) \frac{\delta^2 W_k}{\delta J_\mu^a(-p) \delta J_\mu^b(p)}. \tag{3.9}$$

Los valores de expectación de vacío de los campos en presencia de las fuentes externas, que para no recargar la notación ahora se escribirán con los mismos símbolos de los campos, están dados por

$$\begin{aligned}
A_\mu^a(p) &= \frac{(2\pi)^d}{\mathcal{Z}_k} \frac{\delta \mathcal{Z}_k}{\delta J_\mu^a(-p)} = (2\pi)^d \frac{\delta W_k}{\delta J_\mu^a(-p)}, \\
c^a(p) &= \frac{(2\pi)^d}{\mathcal{Z}_k} \frac{\delta \mathcal{Z}_k}{\delta \bar{\sigma}^a(-p)} = (2\pi)^d \frac{\delta W_k}{\delta \bar{\sigma}^a(-p)}, \\
\bar{c}^a(p) &= -\frac{(2\pi)^d}{\mathcal{Z}_k} \frac{\delta \mathcal{Z}_k}{\delta \sigma^a(-p)} = -(2\pi)^d \frac{\delta W_k}{\delta \sigma^a(-p)},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

y en notación abreviada:

$$A = \frac{\delta W_k}{\delta J}, \quad c = \frac{\delta W_k}{\delta \bar{\sigma}}, \quad \bar{c} = -\frac{\delta W_k}{\delta \sigma}. \tag{3.11}$$

Invirtiendo las ecuaciones (3.10) se pueden expresar las fuentes en función de los campos (y de la escala k) y definir la acción efectiva a través de la transformada de Legendre modificada:

$$\Gamma_k[A, \bar{c}, c] \equiv -W_k[J_k, \sigma_k, \bar{\sigma}_k] + J_k \cdot A + \bar{\sigma}_k \cdot c + \bar{c} \cdot \sigma_k - \frac{1}{2} A \cdot R_{A,k} \cdot A - \bar{c} \cdot R_{C,k} \cdot c. \quad (3.12)$$

Las derivadas con respecto a los campos de la acción efectiva están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma_k}{\delta A} &= -\frac{\delta J_k}{\delta A} \cdot \frac{\delta W_k}{\delta J_k} - \frac{\delta \sigma_k}{\delta A} \cdot \frac{\delta W_k}{\delta \sigma_k} - \frac{\delta \bar{\sigma}_k}{\delta A} \cdot \frac{\delta W_k}{\delta \bar{\sigma}_k} \\ &\quad + \frac{\delta J_k}{\delta A} \cdot A + J_k + \frac{\delta \bar{\sigma}_k}{\delta A} \cdot c - \frac{\delta \sigma_k}{\delta A} \cdot \bar{c} - R_{A,k} \cdot A \\ &= J_k - R_{A,k} \cdot A, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde en la primera línea se ha usado la regla de la cadena, en la segunda la propiedad de anticomutación de los campos de fantasma y el hecho que $R_{A,k}$ es una matriz simétrica (dado que es diagonal), y en la tercera se han substituydo las expresiones (3.11).

Las derivadas con respecto a los campos de fantasma, después de unas análogas manipulaciones, se leen:

$$\frac{\delta \Gamma_k}{\delta c} = -\bar{\sigma}_k + \bar{c} \cdot R_{C,k}, \quad \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \bar{c}} = \sigma_k - R_{C,k} \cdot c. \quad (3.14)$$

Moviendo los términos con los reguladores a la izquierda y tomando otra derivada con respecto a los campos se obtienen las siguientes identidades matriciales:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} &= \frac{\delta}{\delta A} J, \\ -\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} &= \frac{\delta}{\delta \bar{c}} \bar{\sigma}, \\ \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta \bar{c}} + R_{C,k} &= \frac{\delta}{\delta c} \sigma, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde se ha omitido la dependencia explícita en las fuentes de la escala k . Nótese que en la última ecuación se ha utilizado la propiedad de simetría de la matriz $R_{C,k}$.

La ecuación de flujo para la acción efectiva está dada por:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k &= -\partial_t W_k - \partial_t J_k \cdot \frac{\delta W_k}{\delta J} - \partial_t \sigma_k \cdot \frac{\delta W_k}{\delta \sigma} - \partial_t \bar{\sigma}_k \cdot \frac{\delta W_k}{\delta \bar{\sigma}} \\ &\quad + A \cdot \partial_t J_k + \partial_t \bar{\sigma}_k \cdot c - \partial_t \sigma_k \cdot \bar{c} - \frac{1}{2} A \cdot \dot{R}_{A,k} \cdot A \\ &\quad - \bar{c} \cdot \dot{R}_{C,k} \cdot c \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} + \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta \sigma}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde en la primera línea se ha usado la regla de la cadena (recuérdese que las fuentes dependen de k). La igualdad final se obtiene substituyendo la expresión (3.8) para $\partial_t W_k$ y las expresiones (3.11) para los campos.

Con la finalidad de tener una ecuación de flujo para la acción efectiva donde aparezcan explícitamente las derivadas de la acción efectiva misma (véase (2.33)), es oportuno introducir una notación más compacta. Por lo tanto, se organizan los campos y las fuentes en vectores que se llamarán *supercampos*:

$$\varphi \equiv (A, c, \bar{c}), \quad \bar{\varphi} \equiv (A, -\bar{c}, c), \quad (3.17)$$

y *superfuentes*:

$$I \equiv (J, \sigma, \bar{\sigma}), \quad \bar{I} \equiv (J, -\bar{\sigma}, \sigma). \quad (3.18)$$

Se trata entonces de vectores a tres componentes, que incluyen los usuales índices internos (de color, de Lorentz y la dependencia continua del momento)¹.

Se introducen además las *supermatrices*

$$\mathcal{R}_k \equiv \text{diag}(R_{A,k}, R_{C,k}, R_{C,k}), \quad \mathcal{M} \equiv \text{diag}(\mathbf{1}, -\mathbf{1}, -\mathbf{1}). \quad (3.19)$$

La matriz \mathcal{M} juega el papel de una métrica en este ‘superespacio’, por medio de la cual se define la *supertraza*:

$$\text{STr}(\cdots) \equiv \text{Tr}(\mathcal{M}\cdots). \quad (3.20)$$

Con esta nueva notación se pueden escribir las expresiones (3.11) en forma compacta:

$$\bar{\phi} = \frac{\delta W_k[I]}{\delta I}, \quad (3.21)$$

donde con ϕ se distinguen los campos clásicos ($\phi = \langle \varphi \rangle_I$); sin embargo, se seguirán indicando sus componentes con los mismos símbolos de los campos ($\phi = (A, c, \bar{c})$).

La definición de la acción efectiva dada en (3.12) ahora toma la forma:

$$\Gamma_k[\phi] = -W_k[I_k] + I_k \cdot \bar{\phi} - \frac{1}{2} \bar{\phi} \cdot \mathcal{R}_k \mathcal{M} \cdot \phi. \quad (3.22)$$

Está claro que ahora los productos matriciales involucran los nuevos índices del ‘superespacio’.

Considérense las ecuaciones (3.15). Incluyendo también las derivadas mixtas con respecto a los campos gluónicos y de fantasma, obtenidas derivando las (3.13) y (3.14), y organizando los términos en matriz, se lee:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} & \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta c} & \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta \bar{c}} \\ -\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta A} & -\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} & -\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta \bar{c}} \\ \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta A} & \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta c} & \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta \bar{c}} + R_{C,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta J}{\delta A} & -\frac{\delta \bar{\sigma}}{\delta A} & \frac{\delta \sigma}{\delta A} \\ -\frac{\delta J}{\delta \bar{c}} & \frac{\delta \bar{\sigma}}{\delta \bar{c}} & -\frac{\delta \sigma}{\delta \bar{c}} \\ \frac{\delta J}{\delta c} & -\frac{\delta \bar{\sigma}}{\delta c} & \frac{\delta \sigma}{\delta c} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

que en el formalismo de las supermatrices se puede escribir de forma compacta como:

¹Queriendo ser rigurosos, habría que definir estos objetos como elementos de productos cartesianos de oportunos espacios vectoriales, uno para cada grado de libertad.

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k = \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}} \bar{I}, \quad (3.24)$$

donde, indicando con i y j los índices de supercampos, se define:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)_{ij} &\equiv \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi}_i \delta \phi_j} + (\mathcal{R}_k)_{ij}, \\ \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\phi}} \bar{I} \right)_{ij} &\equiv \frac{\delta \bar{I}_j}{\delta \bar{\phi}_i}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Se pueden ahora relacionar elegantemente las segundas derivadas de W_k con las de Γ_k :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta W_k}{\delta \bar{I} \delta I} \right)_{ij} &\equiv \frac{\delta W_k}{\delta \bar{I}_i \delta I_j} = \frac{\delta \bar{\phi}_j}{\delta \bar{I}_i} = \left(\frac{\delta \bar{I}_j}{\delta \bar{\phi}_i} \right)^{-1} = \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\phi}} \bar{I} \right)_{ij}^{-1} \\ &= \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)_{ij}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Mediante esta igualdad, se puede escribir la ecuación de flujo para la acción efectiva de la forma:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \dot{\mathcal{R}}_k \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{I} \delta I} = \frac{1}{2} \text{STr} \dot{\mathcal{R}}_k \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1}. \quad (3.27)$$

La primera equivalencia en (3.27) se verifica fácilmente, recordando la expresión final para la ecuación de flujo (3.16):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{STr} \dot{\mathcal{R}}_k \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{I} \delta I} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\mathcal{M} \dot{\mathcal{R}}_k \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{I} \delta I} \right) \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} \dot{R}_{A,k} & & \\ & -\dot{R}_{C,k} & \\ & & -\dot{R}_{C,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} & \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta \sigma} & \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta \bar{\sigma}} \\ -\frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta J} & -\frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta \sigma} & -\frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta \bar{\sigma}} \\ \frac{\delta^2 W_k}{\delta \sigma \delta J} & \frac{\delta^2 W_k}{\delta \sigma \delta \sigma} & \frac{\delta^2 W_k}{\delta \sigma \delta \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} \dot{R}_{A,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} & \dot{R}_{A,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta \sigma} & \dot{R}_{A,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta \bar{\sigma}} \\ \dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta J} & \dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta \sigma} & \dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta \bar{\sigma}} \\ -\dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \sigma \delta J} & -\dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \sigma \delta \sigma} & -\dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \sigma \delta \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \tag{3.28} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} + \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta \sigma} - \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \sigma \delta \bar{\sigma}} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} + \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta \sigma}.
\end{aligned}$$

En la última línea se ha usado la propiedad de la traza por la cual, dadas dos matrices A y B , $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(A^T B^T)$. Siendo la matriz $\dot{R}_{C,k}$ simétrica y la matriz $\frac{\delta^2 W_k}{\delta \bar{\sigma} \delta \sigma}$ antisimétrica, debido a la anticomutación de los campos $\bar{\sigma}$ y σ , los últimos dos términos de la penúltima línea resultan iguales.

3.2. Flujo de los propagadores

Dada la ecuación de flujo para la acción efectiva (3.27), se pueden generar los flujos de los vértices propios, tomando derivadas con respecto a los campos y al final poniendo los campos igual a sus valores de expectación en ausencia de fuente (cero, si no hay ruptura espontánea de simetría). En esta sección se estudiarán los flujos de los propagadores del fantasma y del gluón, cuyos inversos se obtienen derivando dos veces la acción efectiva. La deducción de tales expresiones es mecánica. Sin embargo, involucra una serie de tediosos pasajes algebraicos que se prefieren destinar para el apéndice B.

Aquí se da la expresión final para el flujo del propagador del gluón (o mejor dicho de su

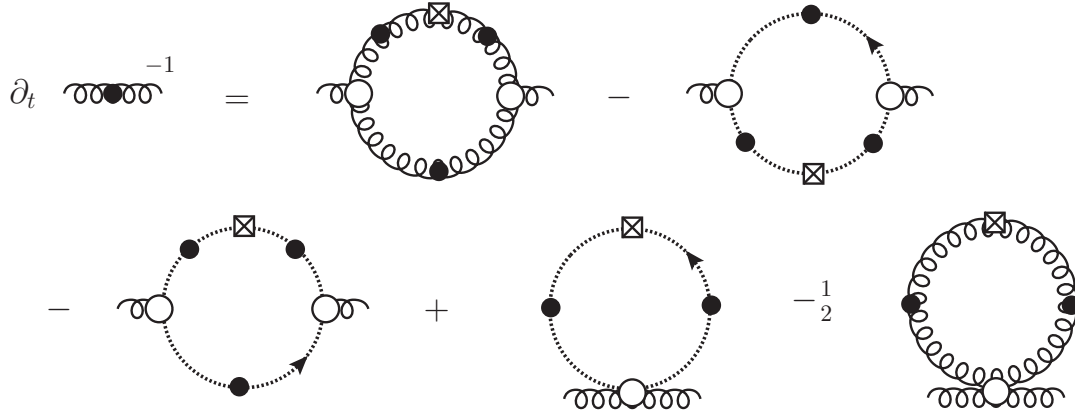


Figura 3.1: Ecuación de flujo para el propagador del gluón, Eq. (3.29). Aquí y en los siguientes diagramas las líneas espirales con el círculo negro representan el propagador de gluón regularizado a la escala k , mientras las líneas discontinuas el propagador del fantasma. Los círculos blancos denotan los vértices propios a la escala k , y el cuadrado con la cruz el regulador \dot{R}_k .

inverso):

$$\begin{aligned}
\partial_t \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A_j \delta A_i} &= \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A_j \delta A \delta A} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
&\times \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A_i \delta A \delta A} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
&- \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \left(-\frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A_j \delta \bar{c} \delta c} \right) \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \\
&\times \left(-\frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A_i \delta \bar{c} \delta c} \right) \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \\
&- \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \left(-\frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A_i \delta \bar{c} \delta c} \right) \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \\
&\times \left(-\frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A_j \delta \bar{c} \delta c} \right) \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \\
&+ \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \left(-\frac{\delta^4 \Gamma}{\delta A_j \delta A_i \delta \bar{c} \delta c} \right) \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \\
&- \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta A_j \delta A_i \delta A \delta A} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

y del propagador del fantasma:

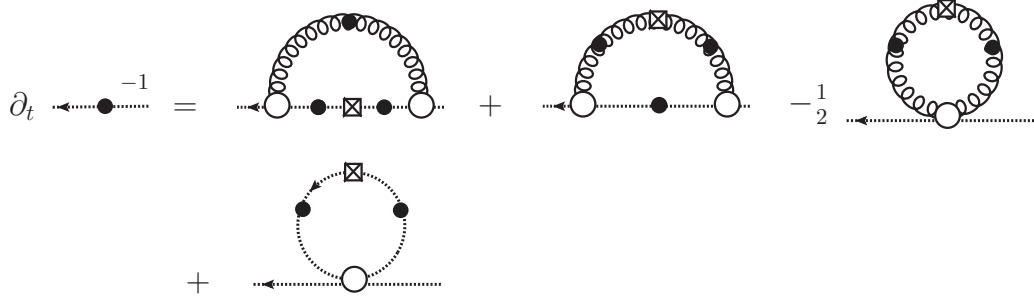


Figura 3.2: Ecuación de flujo para el propagador del fantasma, Eq. (3.30)

$$\begin{aligned}
-\partial_t \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta c_i} &= \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \left(-\frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta c_i \delta A} \right) \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
&\quad \times \left(-\frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta A \delta c} \right) \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \\
&+ \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \left(-\frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta A \delta c} \right) \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \\
&\quad \times \left(-\frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c_i \delta A} \right) \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
&- \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \left(-\frac{\delta^4 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta c_i \delta A \delta A} \right) \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
&+ \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \frac{\delta^4 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta c_i \delta \bar{c} \delta c} \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

donde en los índices i y j se entiende contenido cualquier tipo de índice externo (en el sentido que no es de los índices contraídos en las trazas), sea eso de color, de momento, o para el caso gluónico, índice vectorial. Nótese que en las reglas de Feynman para los diagramas, se ha incluido un signo menos en cada vértice que tenga dos líneas de fantasma, debido a la anticonmutación de los campos de Grassmann.

3.3. Truncamientos y aproximaciones

Como en el estudio de DSE, para resolver el sistema de ecuaciones (3.29) y (3.30) se truncarán los diagramas de lazos gluónicos, lo cual parece razonable si se enfoca el interés en el comportamiento de las soluciones en el infrarrojo, donde los propagadores gluónicos están suprimidos, relativamente a los del fantasma. Además, se usa la aproximación de despreciar la contribución de los diagramas con los vértices de cuatro puntos (diagramas de *tadpole*). En

realidad, no se tiene una justificación adecuada para este truncamiento; a este nivel representa una mera simplificación para resolver el sistema, probablemente mejorable introduciendo un *ansatz* oportuno para la estructura del vértice, o aproximándolo por sus contribuciones a nivel perturbativo.

Los diagramas que quedan, después de estos truncamientos, involucran solamente los propagadores regularizados y el vértice gluón-fantasma a la escala k . Este último se aproximará con el vértice desnudo, dado que, en la norma de Landau, las correcciones perturbativas del vértice no llevan divergencias ultravioletas, y, por lo tanto, la parte transversal del vértice vestido, en el punto simétrico, coincide con el vértice desnudo (véase el apéndice C), salvo por una constante multiplicativa independiente de la escala del punto simétrico (la renormalización del vértice es, por lo tanto, finita), que se puede absorber en la constante de acoplamiento desnuda:

$$\begin{aligned} & -P_{\mu\nu}^T(k)(2\pi)^{3d} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{c}^a(p)\delta c^b(q)\delta A_\nu^c(k)} \Big|_{p^2=q^2=k^2=\mu^2} \\ & = -ZP_{\mu\nu}^T(k)(2\pi)^{3d} \frac{\delta^3 S}{\delta\bar{c}^a(p)\delta c^b(q)\delta A_\nu^c(k)} = -iZgf^{abc}p_\nu P_{\mu\nu}^T(k)(2\pi)^d \delta^d(p+q+k), \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde el signo menos se debe a la anticonmutación de las derivadas fermiónicas (y donde está sobrentendido poner los campos igual a cero después de tomar las derivadas). Z es una constante multiplicativa, y $P_{\mu\nu}(k)$ es el proyector transversal (véase (1.32)). La renormalización finita del vértice se debe al hecho que, en la norma de Landau, la transversalidad de los propagadores del gluón permite factorizar un vector de momento externo adicional en las integrales de lazo, que se vuelven convergentes en cuatro dimensiones (ésta representa probablemente la ventaja más grande de escoger esta norma). La sustitución del vértice vestido con el vértice desnudo está estrictamente justificada sólo en el punto simétrico, mientras aquí se aplica, dentro de los lazos, para distintas configuraciones de momentos, aún en la región infrarroja donde no está válido el argumento perturbativo. Hay argumentos no perturbativos para inferir la no-renormalización del vértice en el caso del momento del fantasma entrante tendiente a cero [16], [4]. Sin embargo, estos argumentos se basan en las identidades de Slavnov-Taylor, las cuales, como se ha mencionado anteriormente, no son de confiar, dada la rotura de la simetría BRST debida a la restricción a la primera región de Gribov. Es, por lo tanto, mejor contar con los resultados numéricos de los cálculos en la red [17], los cuales indican que esta aproximación sigue siendo válida también en el infrarrojo.

En las ecuaciones de flujo, se considerará sólo la parte transversal del vértice, dada por (3.31); ésto no constituye una limitación: en la ecuación de flujo del fantasma los vértices están pegados a los propagadores internos del gluón, los cuales son transversales (apéndice A), así que una eventual parte longitudinal del vértice estaría anulada por los proyectores transversales de los propagadores. En la ecuación de flujo gluónica, sin embargo, habría una contribución a la parte longitudinal de la función de dos puntos del gluón, la cual se desprecia, siendo el propagador transversal y determinado unicamente por la parte transversal de la función de dos puntos (a la parte longitudinal de la función de dos puntos no se le atribuye significado físico).

Con estas aproximaciones las ecuaciones de flujo se reducen al sistema de diagramas truncados representado en Fig. (3.3). En los miembros izquierdos de estas ecuaciones aparecen los inversos de los propagadores a la escala k , parametrizados por²:

²Nótese que para la función de dos puntos del gluón, se desprecia la parte longitudinal, pegándole el operador

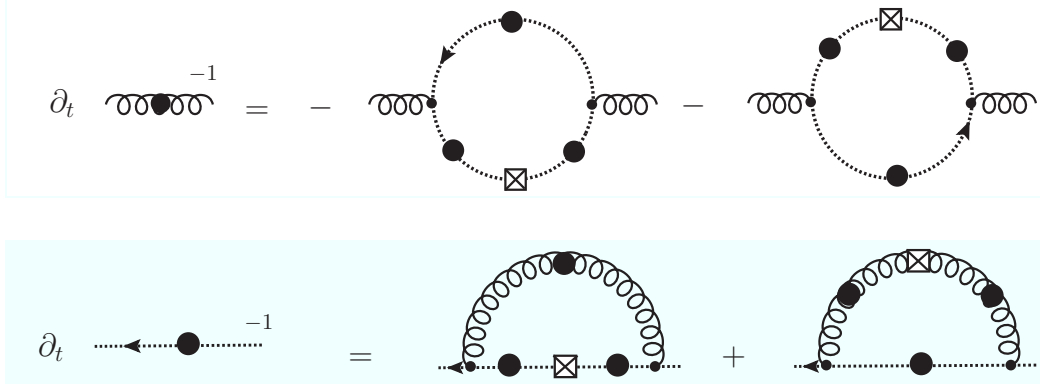


Figura 3.3: Ecuaciones de flujo truncadas para los propagadores de gluón y de fantasma. Los círculos negros chicos representan los vértices gluón-fantasma desnudos.

$$(2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A_\mu^a(p) \delta A_\nu^b(q)} = \delta^{ab} P_{\mu\nu}^T(p) \omega_k(p) (2\pi)^d \delta^d(p+q), \quad (3.32)$$

$$-(2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c}^a(p) \delta c^b(q)} = \delta^{ab} \frac{p^2}{d_k(p)} (2\pi)^d \delta^d(p+q). \quad (3.33)$$

Dentro de los lazos se encuentran los propagadores regularizados, que se obtienen fácilmente invirtiendo las (3.32) y (3.33), después de agregarles los reguladores (éstos se han escogido diagonales en los índices de color, así que la inversión es trivial):

$$\left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \right]_{\mu\nu pq}^{ab} = \delta^{ab} P_{\mu\nu}^T(p) G_{A,k}(p) (2\pi)^d \delta^d(p+q), \quad (3.34)$$

donde

$$G_{A,k}(p) = \frac{1}{\omega_k(p) + R_{A,k}(p)}, \quad (3.35)$$

$$\left[\left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \right]_{pq}^{ab} = \delta^{ab} G_{C,k}(p) (2\pi)^d \delta^d(p+q), \quad (3.36)$$

$$G_{C,k}(p) = \frac{1}{p^2/d_k(p) + R_{C,k}(p)}. \quad (3.37)$$

Se ha, por lo tanto, reducido el número de funciones incógnitas a las dos funciones $\omega_k(p)$ y $d_k(p)$. La ecuación de flujo para el propagador gluónico ahora se lee:

de proyección transversal.

$$\begin{aligned}
\delta^{ab} P_{\mu\nu}^T(p) \partial_t \omega_k(p) &= - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \dot{R}_{C,k}(q) G_{C,k}(q) i g f^{cda} (p+q)_\sigma P_{\mu\sigma}^T(p) G_{C,k}(|p+q|) \\
&\quad \times i g f^{dcb} P_{\nu\rho}^T(p) q_\rho G_{C,k}(q) + (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= -\delta^{ab} P_{\mu\nu}^T(p) g^2 \frac{2N}{(d-1)} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G_{C,k}(q) \dot{R}_{C,k}(q) G_{C,k}(q) G_{C,k}(|p+q|) \\
&\quad \times q^2 (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Los pasajes requieren algunas explicaciones. En la primera ecuación se ha simplemente traducido en fórmulas el primer diagrama de Fig. (3.3), sustituyendo a cada elemento del diagrama su expresión dada por las eqs. (3.31) – (3.37), e imponiendo de una vez la conservación del momento y del color. Nótese que se han considerado como entrantes los momentos de las líneas externas del gluón, y que los vértices tienen signo opuesto respecto a la definición de eq. (3.31), porque allá se habían considerados los momentos de los fantasmas ambos entrantes, mientras en el lazo hay siempre un línea de fantasma entrante y una saliente (sígase el flujo fermiónico representado por la flecha). Nótese, además, que no se ha escrito el factor multiplicativo Z para el vértice vestido, considerado absorbido en la constante de acoplamiento desnuda.

En la segunda ecuación se ha utilizado (1.12), con un signo menos debido al orden de los índices de color en las constantes de estructura. Además, se ha proyectado la ecuación en la parte transversal del propagador externo, o sea, dentro de la integral, se ha hecho la sustitución:

$$(p+q)_\sigma q_\rho P_{\mu\sigma}^T(p) P_{\nu\rho}^T(p) = q_\sigma q_\rho P_{\mu\sigma}^T(p) P_{\nu\rho}^T(p) \equiv f(p, q) P_{\mu\nu}^T(p). \tag{3.39}$$

En la primera ecuación el momento p está eliminado por su proyector ortogonal. La última equivalencia debe de entenderse en el sentido que esta sustitución lleva al mismo resultado de la función integranda original, si después de evaluar la integral, se desprecia la contribución de la parte longitudinal. La función incógnita $f(p, q)$ se encuentra fácilmente sacando la traza de los dos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned}
q_\rho q_\sigma P_{\mu\sigma}^T(p) P_{\mu\rho}^T(p) &= q_\rho q_\sigma P_{\rho\sigma}^T(p) = q^2 - \frac{(q \cdot p)^2}{p^2} \equiv (d-1) f(p, q) \\
\Rightarrow f(p, q) &= \frac{q^2 (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)}{d-1},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

donde se ha utilizado $P^T(p) P^T(p) = P^T(p)$ y $P_{\mu\mu}^T(p) = d-1$. Con esta proyección, el segundo término del miembro derecho de (3.38), obtenido invirtiendo los índices μ y ν , resulta ser igual al primero (de aquí el factor 2 multiplicativo).

Considérense ahora la ecuación de flujo para el propagador del fantasma:

$$\begin{aligned}
\delta^{ab} p^2 \partial_t d_k^{-1}(p) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \dot{R}_{C,k}(q) G_{C,k}(q) i g f^{acd} p_\sigma P_{\sigma\mu}^T(p+q) G_{A,k}(|p+q|) P_{\mu\nu}^T(p+q) \\
&\quad \times i g f^{cbd} q_\rho P_{\rho\nu}^T(p+q) G_{C,k}(q) \\
&\quad + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \dot{R}_{A,k}(q) G_{A,k}(q) P_{\mu\nu}^T(q) i g f^{acd} p_\sigma P_{\sigma\mu}^T(q) G_{C,k}(|p+q|) \\
&\quad \times i g f^{cbd}(p+q)_\rho P_{\rho\lambda}^T(q) G_{A,k}(q) P_{\lambda\nu}^T(q) \\
&= \delta^{ab} p^2 g^2 N \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G_{C,k}(q) \dot{R}_{C,k}(q) G_{C,k}(q) G_{A,k}(|p+q|) q^2 \frac{1-(p \cdot q)^2}{(p+q)^2} \\
&\quad + \delta^{ab} p^2 g^2 N \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G_{A,k}(q) \dot{R}_{A,k}(q) G_{A,k}(q) G_{C,k}(|p+q|) (1-(p \cdot q)^2),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

donde se han usado las mismas propiedades de los proyectores transversales y de la contracción de las constantes de estructura, utilizadas para la ecuación del gluón. En particular, en el primer término del miembro derecho se calcula:

$$\begin{aligned}
P_{\rho\sigma}^T(p+q) p_\sigma q_\rho &= p \cdot q - \frac{(p_\sigma + q_\sigma)(p_\rho + q_\rho) p_\sigma q_\rho}{(p+q)^2} \\
&= p \cdot q - \frac{p^2 p \cdot q + p^2 q^2 + (p \cdot q)^2 + q^2 p \cdot q}{(p+q)^2} \\
&= \frac{p^2 q^2 (1 - (p \cdot q)^2)}{(p+q)^2}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Las eqs. (3.38) y (3.41) constituyen un sistema de ecuaciones integro-diferenciales ordinarias, para resolver las cuales, insertando oportunas condiciones iniciales, es más conveniente convertirlas en ecuaciones integrales, en la variable de corte k ($k = k_0 e^t$):

$$\begin{aligned}
\omega_k(p) - \omega_\Lambda(p) &= -g^2 \frac{2N}{(d-1)} \int_\Lambda^k \frac{dk'}{k'} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(G_{C,k'} \dot{R}_{C,k'} G_{C,k'} \right) (q) G_{C,k'}(|p+q|) \\
&\quad \times q^2 (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2),
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
d_k^{-1}(p) - d_\Lambda^{-1}(p) &= g^2 N \int_\Lambda^k \frac{dk'}{k'} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[\left(G_{A,k'} \dot{R}_{A,k'} G_{A,k'} \right) (q) G_{C,k'}(|p+q|) \right. \\
&\quad \left. + \left(G_{C,k'} \dot{R}_{C,k'} G_{C,k'} \right) (q) G_{A,k'}(|p+q|) \frac{q^2}{(p+q)^2} \right] (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Aquí Λ es la escala en la cual se imponen las condiciones iniciales, y, por lo tanto, hay que considerarla perteneciente a la región ultravioleta, donde se tiene la teoría bajo control, debido a la libertad asintótica.

3.4. Optimización

Si bien las ecuaciones (3.43) y (3.44) se pueden resolver numericamente, en el presente trabajo se han encontrado soluciones para una versión más simple, obtenida a partir de las (3.43) y (3.44) utilizando una aproximación adicional: dentro de los propagadores regularizados $G_{A,k}(p)$ y $G_{C,k}(p)$ se han sustituido las funciones $\omega_k(p)$ y $d_k(p)$ dependientes de la escala de corte k , con las soluciones completas $\omega_0(p)$ y $d_0(p)$, lo cual simplifica considerablemente el sistema, porque permite deshacerse de la integral sobre k . Para convencerse de eso, se considera, por ejemplo, la ecuación de flujo para el gluón (3.43). Adentro de la integral aparece ahora el factor:

$$\begin{aligned} G_{A,k}(q)\partial_t R_{A,k}(q)G_{A,k}(q) &= \frac{1}{\omega_0(q) + R_{A,k}(q)} k \partial_k R_{A,k}(q) \frac{1}{\omega_0(q) + R_{A,k}(q)} \\ &= -k \partial_k G_{A,k}(q). \end{aligned} \quad (3.45)$$

La última expresión resulta porque ahora se ha puesto ω_0 , independiente de k . Por lo tanto, la integral sobre el momento se vuelve:

$$\begin{aligned} &-k \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_k G_{C,k}(q) G_{C,k}(|p+q|) q^2 (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2) = \\ &= -k \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_k (G_{C,k}(q) G_{C,k}(|p+q|)) q^2 (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2) \\ &\quad + k \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G_{C,k}(q) \partial_k G_{C,k}(|p+q|) q^2 (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Considerando el último término, haciendo el cambio de variable $q_\mu \rightarrow -q_\mu - p_\mu$, se demuestra que es igual al miembro izquierdo:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G_{C,k}(q) \partial_k G_{C,k}(|p+q|) q^2 (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2) = \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G_{C,k}(|p+q|) \partial_k G_{C,k}(q) (p+q)^2 \left(1 - \frac{(p \cdot (q+p))^2}{p^2(q+p)^2}\right) \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_k G_{C,k}(q) G_{C,k}(|p+q|) q^2 (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Se puede, por lo tanto, integrar la ecuación de flujo desde la escala inicial Λ hasta la escala final $k = 0$, donde se recupera la solución completa $\omega_0(p)$:

$$\begin{aligned} \omega_0(p) - \omega_\Lambda(p) &= g^2 \frac{N}{(d-1)} \int_\Lambda^0 \frac{dk'}{k'} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} k' \partial_{k'} (G_{C,k'}(q) G_{C,k'}(|p+q|)) q^2 (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2) \\ &= g^2 \frac{N_c}{(d-1)} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{q^2 d_0^{-1}(q) + R_{C,k}(q)} \frac{(1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)}{(p+q)^2 d_0^{-1}(|p+q|) + R_{C,k}(|p+q|)} \Bigg|_{k=\Lambda}^{k=0}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Manipulaciones análogas permiten efectuar la integración sobre la escala de corte para la ecuación de fantasma. El resultado final es:

$$d_0^{-1}(p) - d_\Lambda^{-1}(p) = -g^2 N \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega_0(q) + R_{A,k}(q)} \frac{(1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)}{(p+q)^2 d_0^{-1}(|p+q|) + R_{C,k}(|p+q|)} \Bigg|_{k=\Lambda}^{k=0} . \quad (3.49)$$

Estas ecuaciones ahora coinciden con las DSE truncadas en un esquema de regularización de corte (para el caso de fantasma véase, por ejemplo, [18]). No es difícil convencerse de eso, considerando que en las ecuaciones de Dyson-Schwinger, los inversos de los propagadores del gluón y del fantasma están dados por sus propagadores desnudos (aquí representados por las condiciones iniciales $\omega_\Lambda(p)$ y $d_\Lambda^{-1}(p)$; véase el próximo capítulo), más los diagramas de lazo, representados en Fig. 3.3, sin la inserción de los reguladores. Las integrales en los miembros derechos de (3.48) y (3.49) coincidirían, por lo tanto, con estos diagramas a un lazo, para las DSE, si dentro de la integral se considerara sólo el término con $k = 0$, dado que en este término las funciones regularizadoras desaparecen (acuerdese de las condiciones (2.19)). El otro término, con los reguladores a la escala de corte $k = \Lambda$, juega el papel de una regularización en el ultravioleta para la integral: para valores del momento interno $q \ll \Lambda$ este término no influye, porque el factor $R_\Lambda(q)$ diverge, mientras para $q \gg \Lambda$ las funciones regularizadoras desaparecen de nuevo, y el segundo término se vuelve igual al primero, así que las funciones integradas van hacia cero, mimando un corte ultravioleto, para la integral, a la escala Λ .

El hecho de haber recuperado las ecuaciones de Dyson-Schwinger no es casual: incorporando en las ecuaciones de flujo los diagramas de *tadpole* que se han despreciado, se puede argumentar que las ecuaciones de flujo aproximadas coinciden con las DSE, y por lo tanto, haber insertado en las ecuaciones de flujo los propagadores completos, resulta en recuperar los diagramas de *tadpole*. Por eso, a esta aproximación se le da el nombre de *optimización*. Además, las soluciones así calculadas, como se ha verificado numericamente, no dependen de la forma de las funciones regularizadoras, a diferencia de las soluciones de las ecuaciones con los propagadores internos cortados. Esto le da más confiabilidad a la versión optimizada, porque la solución física no debería depender del esquema de regularización, o, para decirlo según el criterio de *universalidad*, porque el punto fijo no debería depender de la particular teoría inicial a grandes escalas.

Capítulo 4

Solución numérica

Las ecuaciones (3.48) y (3.49), en las incógnitas $\omega_0(p)$ y $d_0^{-1}(p)$, se han resuelto numericamente de manera iterativa, es decir, se ha empezado con unas funciones de prueba iniciales adentro de las integrales en los miembros derechos de las ecuaciones, se han calculado las funciones fijando oportunas condiciones iniciales para $\omega_\Lambda(p)$ y $d_\Lambda^{-1}(p)$, y se han reinsertado las funciones así calculadas adentro de las integrales, iterando el procedimiento hasta que las funciones converjan a un punto fijo, correspondiente a la solución (o a una de las soluciones) de las ecuaciones.

Las integrales han sido calculadas en coordenadas esféricas, que las reducen a integrales bidimensionales, en el módulo del momento y en el ángulo polar. En estas coordenadas las (3.48) y (3.49) se leen:

$$\begin{aligned} \omega_0(p) - \omega_\Lambda(p) = & g^2 \frac{\pi^{-(d+1)/2} N}{2^{d-1} \Gamma(\frac{d-1}{2})(d-1)} \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{q^{d+1}}{q^2 d_0^{-1}(q) + R_{C,k}(q)} \\ & \times \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{(d-1)/2}}{(p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta) d_0^{-1}((p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta)^{1/2}) + R_{C,k}((p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta)^{1/2})} \Bigg|_{k=\Lambda}^{k=0}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} d_0^{-1}(p) - d_\Lambda^{-1}(p) = & -g^2 \frac{\pi^{-(d+1)/2} N}{2^{d-1} \Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{q^{d-1}}{\omega_0(q) + R_{A,k}(q)} \\ & \times \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{(d-1)/2}}{(p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta) d_0^{-1}((p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta)^{1/2}) + R_{C,k}((p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta)^{1/2})} \Bigg|_{k=\Lambda}^{k=0}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Los factores multiplicativos en frente de las integrales vienen de la integración sobre los $d - 2$ ángulos, cuya expresión se puede obtener dividiendo el área de la esfera unitaria en d dimensiones $\int \Omega_d$, por la integral, que queda, sobre el ángulo polar $\int d\theta \sin^{d-2} \theta$:

$$\begin{aligned}
\frac{\int \Omega_d}{\int_0^\pi d\theta \sin^{d-2} \theta} &= \frac{\int \Omega_d}{\int_{-1}^1 d \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^{(d-3)/2}} \\
&= \frac{2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((d-1)/2) / \Gamma(d/2)} \\
&= \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Las funciones regulatrices, que satisfacen las condiciones (2.19), se han escogido de la siguiente forma:

$$R_{A,k}(p) = R_{C,k}(p) = p^2 \exp \left[\frac{k^2}{p^2} - \frac{p^2}{k^2} \right], \tag{4.4}$$

donde el factor de p^2 en frente se le pone por razones dimensionales. Se han realizado, además, pruebas numéricas con distintos reguladores, que tuviesen, por ejemplo, una dependencia de tipo potencia en los momentos, en lugar de la exponencial, y no se han encontrado diferencias en los resultados finales.

Las integrales han sido calculadas con el método de Gauss-Legendre, que permite aproximar la integral de una función a valores reales, definida en el rango $[a, b]$, de la siguiente manera:

$$\int_a^b dx f(x) \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right), \tag{4.5}$$

donde los $x_i (i = 1 \dots n)$ son las raíces de $P_n(x)$, el polinomio de Legendre de grado n , y los w_i son los pesos, dados por:

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_n(x_i)]^2}. \tag{4.6}$$

La aproximación de Gauss es tal que la (4.5) se vuelve una ecuación exacta si la función integranda es un polinomio de grado $m \leq 2n - 1$ y, por lo tanto, constituye una aproximación más precisa que las formulas de Newton-Cotes. Además, las raíces de los polinomios de Legendre están distribuidas de manera simétrica, así que, realmente, hay que calcular sólo la mitad de ellas.

El algoritmo para calcular las raíces y los pesos, se encuentra en [19]; para el cálculo de las presentes integrales, se ha usado una aproximación correspondiente al número de nodos $n = 160$. Se han, además, calculado las integrales en la variable del momento, en escala logarítmica, para tener una distribución de las abscisas más concentrada en la región de interés infrarroja.

Las integrales no han sido calculadas para valores del momento externo p arbitrarios, sino para valores correspondientes a las raíces de los polinomios de Chebyshev. De esta manera, se pueden aproximar las funciones en los otros puntos, requeridos por la rutina que efectúa la integración, por interpolación, a través de la aproximación de Chebyshev. Dada una función $f(x)$, definida en el intervalo $[-1, 1]$, ésta se puede aproximar de la siguiente manera:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{N-1} c_k T_k(x) - \frac{1}{2}c_0, \tag{4.7}$$

donde $T_n(x)$ son los polinomios de Chebyshev de grado n , oscilantes entre -1 y 1 , cuya expresión explícita es $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Los coeficientes c_k son tales que la aproximación (4.7) se vuelve exacta en los valores x_i correspondientes a las N raíces del polinomio $T_N(x)$, dadas por:

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi(i - \frac{1}{2})}{N}\right), \quad i = 1 \dots N. \quad (4.8)$$

Los coeficientes se pueden evaluar utilizando una relación de ortogonalidad discreta entre los polinomios de Chebyshev:

$$\sum_{k=1}^m T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m/2 & i = j \neq 0 \\ m & i = j = 0 \end{cases}. \quad (4.9)$$

Aquí $i, j < m$ y $x_k (k = 1 \dots m)$ son los ceros del polinomio $T_m(x)$. Se puede, por lo tanto, mostrar que los coeficientes c_k están dados por:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)T_k(x_i) \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f\left[\cos\left(\frac{\pi(i - \frac{1}{2})}{N}\right)\right] \cos\left(\frac{\pi k(i - \frac{1}{2})}{N}\right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si la función, como en el presente caso, debe ser aproximada en un intervalo más general $[A, B]$, sólo hace falta desplazar de manera oportuna las abscisas en eqs. (4.7) y (4.10), como se ha hecho en la aproximación de Gauss-Legendre (4.5). Las rutinas para el cálculo de los coeficientes y para la evaluación de la función en los puntos diferentes de los nodos de Chebyshev, también se encuentran en [19].

Los argumentos de las funciones incógnitas $\omega(p)$ y $d^{-1}(p)$ se han puesto en escala logarítmica, compatiblemente con la variable de integración. Además, los valores de las funciones, también han sido aproximados en escala logarítmica. Esto porque, en el extremo infrarrojo, se espera obtener soluciones de escalamiento para los propagadores, correspondientes al punto fijo, según el grupo de renormalización de Wilson (véase la Sección 2.1):

$$\omega(p)_{p \rightarrow 0} \sim p^{-\alpha}, \quad d(p)_{p \rightarrow 0} \sim p^{-\beta}. \quad (4.11)$$

En escala logarítmica, por lo tanto, la dependencia de tipo potencia se vuelve una dependencia lineal, y las dimensiones anómalas α y β se pueden evaluar fácilmente, implementando un ajuste lineal en la región infrarroja.

La aproximación de Chebyshev ha sido efectuada para un rango de momentos $[A, B]$, con $A \sim 10^{-7}\Lambda$ y $B \sim 10\Lambda$, utilizando un número de nodos $N = 120$. Un valor físico para la escala ultravioleta Λ se obtiene, en principio, de la comparación del valor de la constante de acoplamiento renormalizada (véase más adelante), para un cierto valor del momento $p < \Lambda$, con los resultados experimentales para la dispersión profundamente inelástica con un momento transferido p . Sin embargo, debido a las aproximaciones utilizadas en los presentes cálculos, la función beta no tiene el valor correcto en el ultravioleta, y la comparación referida solamente podría dar un valor aproximado para el orden de magnitud de Λ . De todas formas, los resultados

para las dimensiones anómalas no dependen del valor de Λ mientras se encuentre en la región de la libertad asintótica de la teoría (por virtud de la universalidad).

Las integrales sobre el módulo del momento se han calculadas para un rango $[a, b]$ que incluye el rango $[A, B]$ de la aproximación de Chebyshev. En particular, se ha puesto $a \sim 10^{-2}A$ y $b \sim 10B$. Por lo tanto, la rutina que realiza la integral, necesita evaluar las funciones también en puntos que quedan afuera del intervalo donde se efectúa la aproximación de Chebyshev. Para valores de $p < A$ se han estimado las funciones mediante una extrapolación lineal, en escala logarítmica, de los primeros valores de las funciones mismas, compatiblemente con la hipótesis de encontrar soluciones de escalamiento. Para valores de $p > B$ se han aproximado $\omega(p)$ y $d^{-1}(p)$, respectivamente, con $\omega_\Lambda(p)$ y $d_\Lambda^{-1}(p)$, dado que los miembros derechos de las eqs. (4.1), (4.2), se anulan para $p \gg \Lambda$, debido a la presencia de las funciones regulatrices en los denominadores.

A cada paso del cálculo iterativo, se necesita sumar a los resultados de las integrales, las condiciones iniciales $\omega_\Lambda(p)$ y $d_\Lambda^{-1}(p)$, para entonces obtener $\omega(p)$ y $d^{-1}(p)$, y insertarlas en las integrales para la siguiente iteración. La función $\omega_\Lambda(p)$ se aproxima con el inverso del propagador desnudo:

$$\omega_\Lambda(p) = ap^2 + m^2, \quad (4.12)$$

donde se considera un término de masa, debido a la presencia, en la acción modificada, de los términos cuadráticos en los campos que contienen las funciones regularizadoras, que rompen la simetría local de norma. Los parámetros a y m^2 se encuentran implementando un ajuste parabólico, con el método de los mínimos cuadrados, del resultado de la integral en (4.1), es decir de $\omega(p) - \omega_\Lambda(p)$, para una región de valores de p abajo de Λ , de manera que en esta región $\omega(p) \sim p^2$. En el cálculo numérico, se han encontrado valores de la constante de renormalización a muy cerca de 1, así que en realidad, un ajuste de tipo constante sería suficiente.

Esta elección de la condición inicial para la ecuación de flujo del propagador gluónico, se elige, entonces, de manera que, a altas energías, en la región de libertad asintótica, el propagador completo coincida con el propagador calculado perturbativamente, salvo por correcciones del orden de $\ln(p^2/\Lambda^2)$. Sin embargo, si se enfoca el interés sólo en la evaluación de las dimensiones anómalas, sin preocuparse por recuperar la teoría completa en el ultravioleta, se podrían, probablemente, considerar condiciones iniciales distintas, y encontrar igualmente, según el criterio de universalidad, el mismo resultado en el infrarrojo.

Para la ecuación del fantasma, aproximar el propagador, a altas energías, con el propagador desnudo, equivale a poner la condición inicial $d_\Lambda(p)$ igual a una constante d_Λ . Para el propagador del fantasma no se genera un término de masa, como en el caso gluónico, debido a la naturaleza transversal del vértice, en la norma de Landau, que factoriza momentos externos a todos los órdenes perturbativos. La constante d_Λ se evalúa implementando la condición de horizonte $d^{-1}(p \rightarrow 0) = 0$, que implica, por lo tanto:

$$d_\Lambda = - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} I(q, p = 0), \quad (4.13)$$

donde con $I(q, p)$ se denota la función integranda (incluyendo las constantes multiplicativas) en (3.49).

En el proceso de iteración, además, a cada paso, no se han insertado en las integrales directamente los resultados para $\omega(p)$ y $d^{-1}(p)$. Estos valores se han guardado en variables temporales

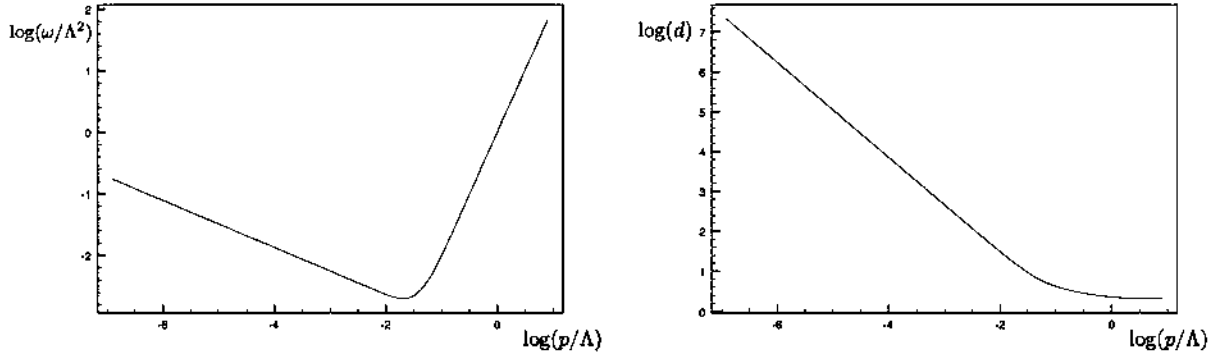


Figura 4.1: Las funciones $\omega(p)$ y $d(p)$, en escala logarítmica, en $d=4$.

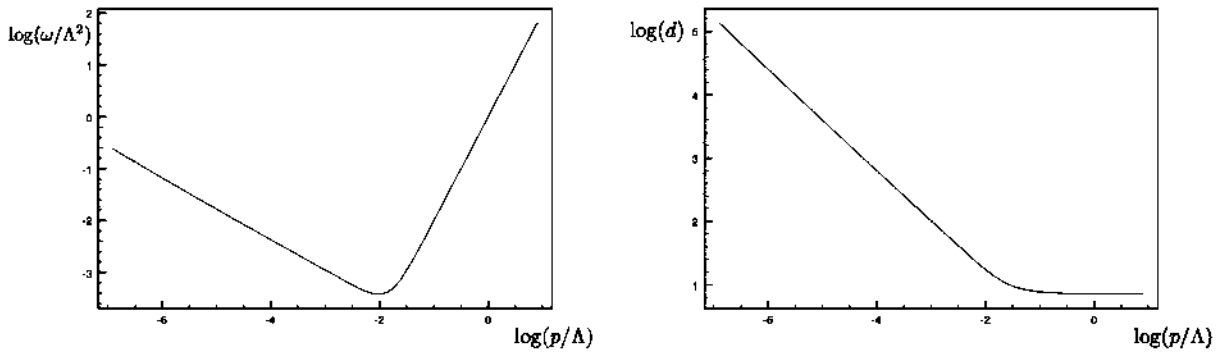


Figura 4.2: Las funciones $\omega(p)$ y $d(p)$, en escala logarítmica, en $d=3$.

$\omega^{temp}(p)$ (de manera igual para $d^{-1}(p)$), y para la n -ésima iteración se ha implementado un método de relajación, poniendo en las integrales $\omega^n(p) = r\omega^{temp}(p) + (1-r)\omega^{n-1}(p)$, con $r \in [0, 1]$. La constante de relajación r se ha variado dependiendo del cambio de las funciones, a cada paso de la iteración, con el fin de apoyar y estabilizar la convergencia hacia el punto fijo.

En fin, en los cálculos, se ha puesto la constante de acoplamiento desnuda $g = 1$, dado que ésta no tiene sentido físico, y no influye sobre el alcance del punto fijo y sobre los valores de las dimensiones anómalas. Se ha puesto, además, $N = 3$, el número de colores en *QCD*, lo cual, sin embargo, también es irrelevante para las dimensiones anómalas (en general, éstas no dependen de ningún factor constante multiplicativo que se podría poner en frente de ambas las integrales en (4.1) y (4.2)).

Los cálculos han sido realizados en dimensiones $d = 4$ y $d = 3$. Las funciones $\omega(p)$ y $d(p)$ están graficadas en las Fig.4.1 y Fig.4.2.

Dada la renormalización finita del vértice, las funciones $\omega(p)$ y $d(p)$ son suficientes para definir la constante de acoplamiento renormalizada $g_R(\mu)$, corriente con la escala de renormalización μ .

	$d = 4$	$d = 3$
α	0.38	0.60
β	1.19	0.80

Cuadro 4.1: Las dimensiones anómalas α y β en $d = 3, 4$. Debido a varias pruebas numéricas que se han corrido, se estima un error numérico de una unidad sobre el último dígito significativo.

Si los campos renormalizados se definen por:

$$A_{\mu R}^a(p) \equiv Z_A^{-1/2} A_\mu^a(p), \quad \bar{c}_R^a(p) \equiv Z_c^{-1/2} \bar{c}^a(p), \quad c_R^a(p) \equiv Z_c^{-1/2} c^a(p), \quad (4.14)$$

con las constantes de renormalización multiplicativa $Z_{A,c}$, para la escala de renormalización μ , dadas por (véase (1.32)):

$$Z_c = d(\mu), \quad Z_A = \frac{\mu^2}{\omega(\mu)}, \quad (4.15)$$

entonces la función del vértice gluón-fantasma renormalizada, en d dimensiones, se lee:

$$-(2\pi)^{3d} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \bar{c}_R^a(p) \delta c_R^b(q) \delta A_{\mu R}^c(k)} \Big|_{p^2=q^2=k^2=\mu^2} = -i f^{abc} g p_\mu Z_c Z_A^{1/2} (2\pi)^d \delta^d(p+q+k), \quad (4.16)$$

donde la constante de acoplamiento desnuda g , en d dimensiones, tiene la dimensión $[g] = \mu^{2-d/2}$. Se puede, por lo tanto, definir la constante de acoplamiento renormalizada de la siguiente manera:

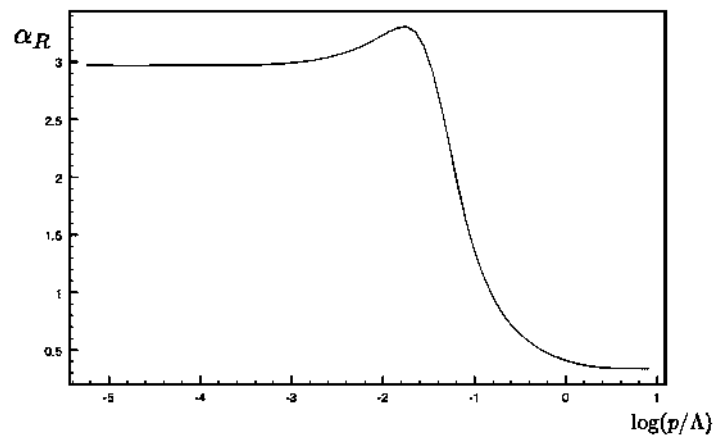
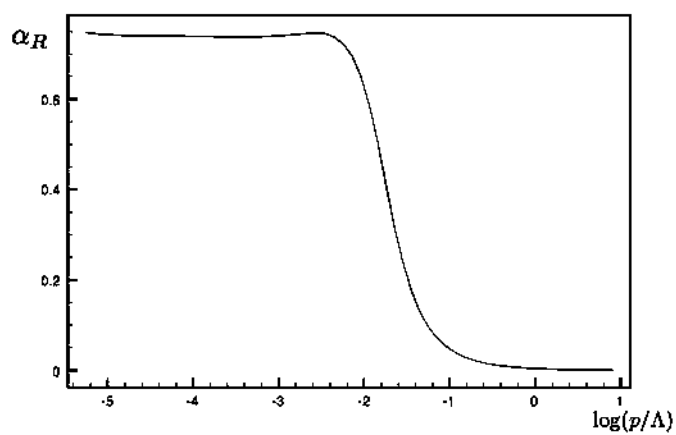
$$g_R(\mu) = Z_c(\mu) Z_A^{1/2}(\mu) \mu^{d/2-2} g = d(\mu) \frac{\mu^{d/2-1}}{\omega(\mu)^{1/2}} g, \quad (4.17)$$

donde se ha insertado el factor $\mu^{d/2-2}$, para que g_R sea adimensional.

Insertando las soluciones de escalamiento en las ecuaciones de Dyson-Schwinger truncadas, se puede deducir, por mero conteo de potencias, que las dimensiones anómalas α y β (véase (4.11)) tienen que satisfacer la siguiente regla de suma [20]:

$$\alpha - 2\beta + d - 2 = 0, \quad (4.18)$$

Si se satisface (4.18), se puede, además, deducir que $g_R(p)$ tiende a un valor constante para $p \rightarrow 0$, correspondiente al punto fijo. Las dimensiones anómalas calculadas numéricamente (Cuadro 4), satisfacen esta regla de suma, y como se puede ver en las gráficas de Fig. 4.3 y Fig. 4.4, $\alpha_R = g_R^2/4\pi$ tiende a un valor constante en la región infrarroja. Nótese como, en la gráfica de α_R en cuatro dimensiones, aparece un máximo a una escala de momentos intermedia, que correspondería a otro cero de la función beta. Es probable, sin embargo, que se trate de un extremo espurio, dado que, como se ha mencionado anteriormente, no se puede confiar demasiado en la expresión derivada para la función beta, para escalas de energías lejanas del infrarrojo, debido a los truncamientos efectuados.

Figura 4.3: $\alpha_R = g_R^2/4\pi$, en $d=4$.Figura 4.4: $\alpha_R = g_R^2/4\pi$, en $d=3$.

Conclusiones

En el presente trabajo se ha utilizado el formalismo del grupo de renormalización funcional, para construir un sistema de ecuaciones de flujo para los propagadores del gluón y del fantasma. La elección de la norma de Landau ha permitido, después de haber truncado las ecuaciones despreciando los diagramas con un lazo gluónico y los diagramas de tadpole, de llegar a un sistema de ecuaciones cerradas para los propagadores incógnitos. Esto se debe a la no-renormalización del vértice gluón-fantasma, en la norma de Landau, que justifica la sustitución del vértice vestido con el vértice desnudo. En esta norma, además, la restricción a la primera región de Gribov, ha provisto una condición de frontera (o condición inicial de la ecuación de flujo), conocida como condición de horizonte, para el propagador de fantasma: éste tiene que diverger más fuertemente que el propagador desnudo para momentos $p \rightarrow 0$.

Las ecuaciones han sido simplificadas al final, con una aproximación que se supone representa la inclusión de los diagramas de tadpole; con esta aproximación, las ecuaciones de flujo se han convertido en las ecuaciones de Dyson Schwinger truncadas, y sus soluciones no dependen de la elección de las funciones regulatrices.

Es interesante comparar los resultados numéricos aquí obtenidos, con los resultados de las DSE calculados, en la norma de Landau en cuatro dimensiones, en [21] y [22]. La primera diferencia relevante es que en ambos los artículos se incluye el diagrama de un lazo gluónico, que aparece en la ecuación del propagador del gluón, truncando así, sólo los diagramas de dos lazos y de tadpole. Se postulan, además, unos *ansatz* para los vértices de gluón-fantasma y de tres gluones, con una complicada estructura en los momentos externos, insertada *ad hoc* para recuperar en la región ultravioleta el correcto corrimiento perturbativo de los propagadores, por resuma del grupo de renormalización, y correspondientes dimensiones anómalas. La estructura de los núcleos de los vértices, está vinculada también por la demanda de minimizar las componentes longitudinales del gluón que se generan en los lazos, y eliminar las divergencias cuadráticas en el ultravioleta.

Los resultados para el punto fijo infrarrojo, es decir, los valores de las dimensiones anómalas y de la constante de acoplamiento renormalizada $\alpha_R(0)$ coinciden con los encontrados aquí, demostrando, como los mismos artículos evidencian, que el lazo gluónico y los detalles a altas energías, no modifican el comportamiento en el infrarrojo.

Vale la pena notar, además, que, en el infrarrojo, las soluciones para los propagadores, calculadas en tres dimensiones en la norma de Landau, coinciden con las soluciones para los propagadores estáticos, en la norma de Coulomb, obtenidas por las ecuaciones de flujo en el formalismo hamiltoniano [3]. Todos los argumentos, de hecho (transversalidad del propagador del gluón, no-renormalización del vértice, truncamientos), son los mismos en la norma de Coulomb. Las únicas diferencias, por razones dimensionales, son la forma de los reguladores, y del propagador desnudo del gluón, que constituye la condición inicial para su ecuación de flujo. Se supone que

estas diferencias no sean relevantes para que la teoría fluya hacia el punto fijo.

La implementación de la condición de horizonte ha llevado automáticamente al anularse el propagador gluónico en la región infrarroja, la cual constituye la otra condición de frontera conjeturada por Gribov; hay que notar como el anularse del propagador del gluón implica que éste no tenga una representación espectral de Källen-Lehmann [23], por la violación de la positividad de la densidad espectral, lo cual significa la no existencia de estados asintóticos de una partícula para el gluón, que está, por lo tanto, confinado.

La condición de horizonte parece jugar un papel fundamental para encontrar las soluciones de escalamiento, correspondientes al punto fijo, en el sentido de Wilson. Se han realizado, de hecho, pruebas numéricas donde no se ha implementado esta condición, sino la condición análoga a la del gluón; es decir, se ha puesto el propagador del fantasma, a grandes escalas, igual al propagador a nivel de árbol, haciendo un ajuste de función constante para $p \lesssim \Lambda$, de manera que en esta región $d(p) \simeq 1$. Las soluciones que así se han encontrado, ya no son las soluciones de escalamiento (se llega a un punto fijo diferente), sino las que se llaman soluciones de *decoplamiento*, que ven las funciones $\omega(p)$ y $d(p)$ ir ambos hacia límites finitos, para $p \rightarrow 0$ (es decir, el propagador de fantasma coincide con el propagador desnudo, en la región infrarroja).

Antes se había argumentado como las condiciones iniciales a grandes escalas, no deberían influir sobre el alcance del punto fijo. Sin embargo, para puntos críticos, usualmente se necesita hacer un ajuste fino de uno o más parámetros, en el espacio de teorías, asociados con algunos operadores relevantes, para llegar al punto fijo, exactamente como para un sistema estadístico hay que ajustar la temperatura para llegar al punto crítico correspondiente a una transición de fase del segundo orden. Parece entonces ser ésta la función de la condición de horizonte, reflejada en el ajuste de la constante d_Λ .

A esta altura, en realidad, no está muy clara la naturaleza del punto fijo que se ha encontrado, dado que está asociado con un propagador, el del gluón, que se anula en el infrarrojo, lo cual es típico de un punto fijo de alta temperatura, fuertemente atractivo [15], y con un propagador, el del fantasma, divergente, típico de un punto crítico. Para aclarar esta cuestión, se necesitaría investigar la estabilidad del punto fijo, analizando los flujos de varios operadores, correspondientes a distintas direcciones en el espacio de teorías, cerca del punto fijo.

Apéndice A

Transversalidad del propagador de gluón

Considerando la funcional generatriz (1.27) en la norma de Landau, se puede expresar la $\delta(\partial_\mu A_\mu)$, implícita en la integral funcional, introduciendo un campo auxiliar (campo de Nakanishi-Lautrup) $B^a(x)$ de la siguiente manera:

$$\delta(\partial_\mu A_\mu) \propto \int \mathcal{D}B e^{-i \int d^d x B^a(x) \partial_\mu A_\mu^a(x)}. \quad (\text{A.1})$$

Insertando este término en la integral de la funcional generatriz, esta última toma la forma:

$$\mathcal{Z}[J, \sigma, \bar{\sigma}, R] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-S - i \int d^d x B^a \partial_\mu A_\mu^a + \int d^d x [J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\sigma}^a c^a + \bar{c}^a \sigma^a + R^a B^a]}, \quad (\text{A.2})$$

donde se ha introducido el campo de fuente $R^a(x)$ acoplado al campo auxiliar. La ecuación de Dyson-Schwinger para el campo $B^a(x)$ está dada por:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}[A, B, \bar{c}, c] \frac{\delta}{\delta B^a(x)} e^{-S - i \int d^d y B^a \partial_\mu A_\mu^a + \int d^d x [J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\sigma}^a c^a + \bar{c}^a \sigma^a + R^a B^a]} \\ &= \left[-i \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(x)} + R^a(x) \right] \mathcal{Z}[J, \sigma, \bar{\sigma}, R] \\ &= \left[-i \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta J_\mu^a} + R^a \right] \mathcal{Z}[J, \sigma, \bar{\sigma}, R] \\ &\Rightarrow i \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta J_\mu^a} = R^a. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

En la penúltima línea se ha introducido la funcional de Schwinger $W = \ln Z$. Tomando otra derivada con respecto al campo de fuente J se obtiene, en espacio de momentos:

$$p^\mu \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu^a(-p) \delta J_\nu^b(q)} = 0, \quad (\text{A.4})$$

que implica la transversalidad del propagador completo del gluón:

$$(2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu^a(-p) \delta J_\nu^b(q)} \Big|_0 = A(q) \delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) (2\pi)^d \delta^d(p-q), \quad (\text{A.5})$$

con $A(p)$ una función incógnita (núcleo) del módulo del momento. El subíndice ‘0’ en el miembro izquierdo indica que después de tomar las derivadas hay que poner las fuentes iguales a cero. Tomando la derivada de (A.3), en espacio de momentos, con respecto a la fuente R^a se obtiene:

$$(2\pi)^{2d} p_\mu \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu^a(-p) \delta R^b(q)} = -\delta^{ab} (2\pi)^d \delta^d(p-q). \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto, si se parametriza la función de correlación:

$$(2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu^a(-p) \delta R^b(q)} \Big|_0 = \delta^{ab} p_\mu C(p) (2\pi)^d \delta^d(p-q), \quad (\text{A.7})$$

y se contrae con p_μ , utilizando (A.6), se obtiene:

$$C(p) = -\frac{1}{p^2} \quad (\text{A.8})$$

La ecuación de Dyson-Schwinger (A.3) para la acción efectiva se lee:

$$-i\partial_\mu A_\mu^a + \frac{\delta\Gamma}{\delta B^a} = 0, \quad (\text{A.9})$$

por la cual, tomando derivadas con respecto a los campos A y B , se obtienen las siguientes funciones de dos puntos en el espacio de momentos:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta B^a(-p) \delta B^b(q)} \Big|_0 &= 0, \\ (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu^a(-p) \delta B^b(q)} \Big|_0 &= p_\mu \delta^{ab} (2\pi)^d \delta^d(p-q). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Se parametrizan además las restantes funciones de dos puntos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^d \Gamma}{\delta A_\mu^a(-p) \delta A_\nu^b(q)} \Big|_0 &= \delta^{ab} \left[T(p) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + L(p) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] (2\pi)^d \delta^d(p-q), \\ (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 W}{\delta R^a(-p) \delta R^b(q)} \Big|_0 &= \delta^{ab} D(q) (2\pi)^d \delta^d(p-q), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Se utiliza ahora la propiedad que la matriz de las funciones de dos puntos $\delta^2 \Gamma / \delta \phi \delta \phi$ es la inversa de la matriz $\delta^2 W / \delta I \delta I$. Explícitamente se lee:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A \delta A} & \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A \delta B} \\ \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta B \delta A} & \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta B \delta B} \end{pmatrix}_0 \times \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J} & \frac{\delta^2 W}{\delta J \delta R} \\ \frac{\delta^2 W}{\delta R \delta J} & \frac{\delta^2 W}{\delta R \delta R} \end{pmatrix}_0 = \mathbf{1}. \quad (\text{A.12})$$

Nótese que no se han considerado las funciones de los campos de fantasma, dado que, cuando las fuentes se toman como cero, el bloque de derivadas correspondiente, en (A.12), es diagonal, por la ausencia en la acción clásica de términos que acoplan los campos de fantasma con el campo auxiliar.

Insertando las expresiones (A.5), (A.10) y (A.11) en (A.12) se obtienen cuatro equivalencias que vinculan los factores de forma incógnitos. La primera está dada por (se omiten los índices de color y el subíndice de fuentes nulas):

$$\begin{aligned}
\delta_{\mu\nu}(2\pi)^d \delta^d(p-q) &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(-p) \delta A_\rho(l)} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 W}{\delta J_\rho(-l) \delta J_\nu(q)} \\
&\quad + \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(-p) \delta B(l)} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 W}{\delta R_\rho(-l) \delta J_\nu(q)} \\
&= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \left[T(p) \left(\delta_{\mu\rho} - \frac{p_\mu p_\rho}{p^2} \right) + L(p) \frac{p_\mu p_\rho}{p^2} \right] (2\pi)^d \delta^d(p-l) \\
&\quad \times A(q) \left(\delta_{\rho\nu} - \frac{q_\rho q_\nu}{q^2} \right) (2\pi)^d \delta^d(l-q) \\
&\quad + \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} p_\mu (2\pi)^d \delta(p-l) (-q_\nu) \left(-\frac{1}{q^2} \right) (2\pi)^d \delta(l-q) \\
&= (2\pi)^d \delta(p-q) \left[T(p) A(p) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right].
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Por lo tanto, para que valga la identidad, debe de satisfacerse:

$$T(p) = \frac{1}{A(p)}, \tag{A.14}$$

donde se ve que el núcleo de la parte transversal de la función de dos puntos es el inverso del núcleo del propagador completo, como era de esperarse. La segunda equivalencia que se obtiene desde (A.12) se lee:

$$\begin{aligned}
0 &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(-p) \delta A_\rho(l)} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 W}{\delta J_\rho(-l) \delta R(q)} \\
&\quad + \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(-p) \delta B(l)} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2 W}{\delta R_\rho(-l) \delta R(q)} \\
&= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \left[T(p) \left(\delta_{\mu\rho} - \frac{p_\mu p_\rho}{p^2} \right) + L(p) \frac{p_\mu p_\rho}{p^2} \right] (2\pi)^d \delta^d(p-l) \\
&\quad \times q_\rho \left(-\frac{1}{q^2} \right) (2\pi)^d \delta^d(l-q) \\
&\quad + \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} p_\mu (2\pi)^d \delta(p-l) D(q) (2\pi)^d \delta(l-q) \\
&= (2\pi)^d \delta(p-q) \left[-p_\mu \frac{L(p)}{p^2} + p_\mu D(p) \right],
\end{aligned} \tag{A.15}$$

la cual muestra como, en general, la parte longitudinal de la función de dos puntos gluónica no es nula, sino que está relacionada con el núcleo del propagador del campo auxiliar:

$$L(p) = p^2 D(p). \tag{A.16}$$

Las otras dos equivalencias constituyen las identidades triviales $0 = 0$, $1 = 1$, y no aportan más informaciones sobre los factores de forma.

Apéndice B

Derivación de las ecuaciones de flujo para las funciones de dos puntos

Se considera la ecuación de flujo para la acción efectiva (3.27):

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} \dot{R}_{A,k} & & \\ & -\dot{R}_{C,k} & \\ & & -\dot{R}_{C,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} & \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta c} & \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta \bar{c}} \\ -\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta A} & -\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} & -\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta \bar{c}} \\ \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta A} & \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta c} & \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta \bar{c}} + R_{C,k} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Derivando esta ecuación con respecto a los campos y poniendo los campos igual a cero (se supone no haya ruptura de simetría) se obtienen las ecuaciones de flujo para los propagadores. En el caso del propagador de fantasma surge el problema de mover una variable de Grassmann a través de una supermatriz. Se considera una variable anticonmutativa η y una matriz que tenga la misma disposición de cantidades conmutativas (c) y anticonmutativas (a) de la matriz $(\delta^2 \Gamma_k / \delta \bar{\phi} \delta \phi + \mathcal{R}_k)^{-1}$. Se puede escribir:

$$\eta \begin{pmatrix} c & a & a \\ a & c & c \\ a & c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -a & -a \\ -a & c & c \\ -a & c & c \end{pmatrix} \eta = \mathcal{M} \begin{pmatrix} c & a & a \\ a & c & c \\ a & c & c \end{pmatrix} \mathcal{M} \eta. \quad (\text{B.2})$$

Queriendo expresar la derivada de $(\delta^2 \Gamma_k / \delta \bar{\phi} \delta \phi + \mathcal{R}_k)^{-1}$ con respecto al campo de fantasma c_i (aquí y en lo que sigue i y j deben de considerarse índices externos que incluyen cualquier tipo de grado de libertad) se obtiene por lo tanto:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta}{\delta \bar{c}_i} \left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right) \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_i \delta \bar{\phi} \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} + \mathcal{M} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right) \mathcal{M} \frac{\delta}{\delta \bar{c}_i} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

que implica:

$$\frac{\delta}{\delta c_i} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} = -\mathcal{M} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \mathcal{M} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta c_i \delta \bar{\phi} \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1}, \quad (\text{B.4})$$

donde se ha usado $\mathcal{M}\mathcal{M} = \mathbf{1}$. Tomando otra derivada con respecto a \bar{c}_j , la ecuación de flujo para la función de dos puntos (en presencia de fuentes externas) está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \dot{\Gamma}_k}{\delta \bar{c}_j \delta c_i} &= \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta \bar{c}_j \delta c_i} \text{STr} \left[\dot{\mathcal{R}}_k \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \bar{c}_j} \text{STr} \left[-\dot{\mathcal{R}}_k \mathcal{M} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \mathcal{M} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta c_i \delta \bar{\phi} \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{STr} \left[\dot{\mathcal{R}}_k \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \mathcal{M} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta \bar{\phi} \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \mathcal{M} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta c_i \delta \bar{\phi} \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{STr} \left[\dot{\mathcal{R}}_k \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \mathcal{M} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta c_i \delta \bar{\phi} \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \mathcal{M} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta \bar{\phi} \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{STr} \left[\dot{\mathcal{R}}_k \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \frac{\delta^4 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta c_i \delta \bar{\phi} \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En la segunda línea de la última equivalencia se ha movido la derivada del campo de fantasma a través del término $(\delta^3 \Gamma_k / \delta c_i \delta \bar{\phi} \delta \phi)$. Esto genera un signo menos por la anticonmutación de las derivadas fermiónicas, seguido por la ley de desplazamiento (B.2).

Poniendo ahora las fuentes igual a cero (correspondiente a poner los campos $A = c = \bar{c} = 0$, si se supone no hay ruptura espontánea de simetría) dentro las supermatrices sobreviven sólo los términos que contienen igual número de campos de fantasma y anti-fantasma. Esto está garantido por la conservación del número fermiónico, debido a la simetría de fase de la acción regularizada para los campos de fantasma. En particular, el término $(\delta^2 \Gamma_k / \delta \bar{\phi} \delta \phi + \mathcal{R}_k)^{-1}$ se reduce a:

$$\mathcal{G}_k \equiv \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{\phi} \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)_{\phi=0}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta \bar{c}} + R_{C,k} \right)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Por lo tanto, el primer término de (B.5) se reduce a:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} \dot{R}_{A,k} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{R}_{C,k} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{R}_{C,k} \end{pmatrix} \mathcal{G}_k \mathcal{M} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A \delta \bar{c}_j \delta c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta c \delta A} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}_k \mathcal{M} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A \delta c_i \delta \bar{c}} \\ -\frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta c_i \delta \bar{c} \delta A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}_k \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & \dot{R}_{A,k} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A \delta \bar{c}_j \delta c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{R}_{C,k} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta \bar{c}} + R_{C,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta c \delta A} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}_k \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A \delta c_i \delta \bar{c}} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta \bar{c}} + R_{C,k} \right)^{-1} \\ \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta c_i \delta \bar{c} \delta A} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A \delta \bar{c}_j \delta c} \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta c_i \delta \bar{c} \delta A} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta \bar{c}} + R_{C,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta c \delta A} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A \delta c_i \delta \bar{c}} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta \bar{c}} + R_{C,k} \right)^{-1}. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Realizando un proceso análogo, se obtiene para el segundo término en (B.5):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A \delta c_i \delta \bar{c}} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta c \delta \bar{c}} + R_{C,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \bar{c}_j \delta c \delta A} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta c_i \delta \bar{c} \delta A} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta A \delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta A \delta \bar{c}_j \delta c} \left(-\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{c} \delta c} + R_{C,k} \right)^{-1}. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Estos términos son iguales a los de (B.7) con la excepción de los vértices de tres puntos que están invertidos de lugar. En realidad las expresiones son iguales: si se considera que un término en (B.7) tiene la estructura $\text{Tr } ABCDEB$, vale:

$$\text{Tr } ABCDEB = \text{Tr } B^T E^T D^T C^T B^T A^T = \text{Tr } A^T B^T E^T D^T C^T B^T, \tag{B.9}$$

donde en el último miembro aparecen, en el justo orden, los bloques de (B.8), que son iguales a los transpuestos de los bloques de (B.7), y, por lo tanto, las expresiones resultan ser iguales. En la primera igualdad de (B.9) se ha usado la propiedad de la traza $\text{Tr } A = \text{Tr } A^T$ y en la última la propiedad de ciclicidad de la traza.

En fin, el tercer término en (B.5) se reduce a:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\text{Tr} \begin{pmatrix} \dot{R}_{A,k} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{R}_{C,k} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{R}_{C,k} \end{pmatrix} \mathcal{G}_k \begin{pmatrix} \frac{\delta^4\Gamma_k}{\delta\bar{c}_j\delta c_i\delta A\delta A} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta^4\Gamma_k}{\delta\bar{c}_j\delta c_i\delta\bar{c}\delta c} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta^4\Gamma_k}{\delta\bar{c}_j\delta c_i\delta c\delta\bar{c}} \end{pmatrix} \mathcal{G}_k \\
 & = -\frac{1}{2}\text{Tr} \dot{R}_{A,k} \left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta A\delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \frac{\delta^4\Gamma_k}{\delta\bar{c}_j\delta c_i\delta A\delta A} \left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta A\delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
 & \quad -\text{Tr} \dot{R}_{C,k} \left(-\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\bar{c}\delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \frac{\delta^4\Gamma_k}{\delta\bar{c}_j\delta c_i\delta c\delta\bar{c}} \left(-\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\bar{c}\delta c} + R_{C,k} \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Reagrupando los términos, la ecuación de flujo para la función de dos puntos para el fantasma (inverso del propagador) al final tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\bar{c}_j\delta c_i} & = \text{Tr} \dot{R}_{A,k} \left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta A\delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3\Gamma_k}{\delta\bar{c}_j\delta A\delta c} \left(-\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\bar{c}\delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \\
 & \quad \times \frac{\delta^3\Gamma_k}{\delta c_i\delta\bar{c}\delta A} \left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta A\delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
 & + \text{Tr} \dot{R}_{C,k} \left(-\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\bar{c}\delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \frac{\delta^3\Gamma_k}{\delta c_i\delta\bar{c}\delta A} \left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta A\delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
 & \quad \times \frac{\delta^3\Gamma_k}{\delta\bar{c}_j\delta c\delta A} \left(-\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\bar{c}\delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \\
 & -\frac{1}{2}\text{Tr} \dot{R}_{A,k} \left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta A\delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \frac{\delta^4\Gamma_k}{\delta\bar{c}_j\delta c_i\delta A\delta A} \left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta A\delta A} + R_{A,k} \right)^{-1} \\
 & -\text{Tr} \dot{R}_{C,k} \left(-\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\bar{c}\delta c} + R_{C,k} \right)^{-1} \frac{\delta^4\Gamma_k}{\delta\bar{c}_j\delta c_i\delta\bar{c}\delta c} \left(-\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\bar{c}\delta c} + R_{C,k} \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Manipulaciones análogas se aplican para el cálculo del flujo del propagador del gluón, con la simplificación que para las derivadas bosónicas vale la (B.4) sin la inserción de las matrices \mathcal{M} .

Apéndice C

Renormalización finita del vértice gluón-fantasma

En este apéndice se justifica la sustitución, en la norma de Landau, del vértice de gluón-fantasma con su contraparte a nivel de árbol. En particular, se argumenta como, por lo menos en la configuración de los momentos externos en el punto simétrico, no haya correcciones para el vértice, del orden de un lazo, salvo por una constante multiplicativa. Para este propósito se ocupan las expresiones de los vértices, a nivel de árbol, de gluón-fantasma y de tres gluones. Éstas se obtienen derivando con respecto a los campos, los términos correspondientes en la acción clásica. El término relativo al vértice gluón-fantasma, generado por la derivada covariante, en el espacio de momentos se lee:

$$-igf^{abc} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} p_\mu \bar{c}^a(p) c^b(q) A_\mu^c(k) (2\pi)^d \delta^d(p+q+k), \quad (\text{C.1})$$

lo cual genera el vértice a nivel de árbol, dado por:

$$-(2\pi)^{3d} \frac{\delta^3(-S)}{\delta \bar{c}^a(p) \delta c^b(q) \delta A_\mu^c(k)} \Big|_{\bar{c}=c=A=0} = igf^{abc} p_\mu (2\pi)^d \delta^d(p+q+k). \quad (\text{C.2})$$

Nótese que (C.1) es el término que aparece en (1.28), escrito para las transformadas de Fourier, después de haber efectuado una integración por partes. El término que contiene tres campos gluónicos y el vértice que éso genera están dados por (véase (1.15)):

$$igf^{abc} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} p_\nu A_\mu^a(p) A_\nu^b(q) A_\mu^c(k) (2\pi)^d \delta^d(p+q+k), \quad (\text{C.3})$$

$$(2\pi)^{3d} \frac{\delta^3(-S)}{\delta A_\mu^a(p) \delta A_\nu^b(q) \delta A_\rho^c(k)} \Big|_{\bar{c}=c=A=0} = -igf^{abc} [(q-p)_\rho \delta_{\mu\nu} + (p-k)_\nu \delta_{\mu\rho} + (k-q)_\mu \delta_{\rho\nu}]. \quad (\text{C.4})$$

Se consideran ahora las correcciones a un lazo del vértice gluón-fantasma $\Gamma_\mu^{abc}(p, k, p-k)$ (Fig. (C.2)). Siendo interesados sólo en su parte transversal, se le pega el operador de proyección

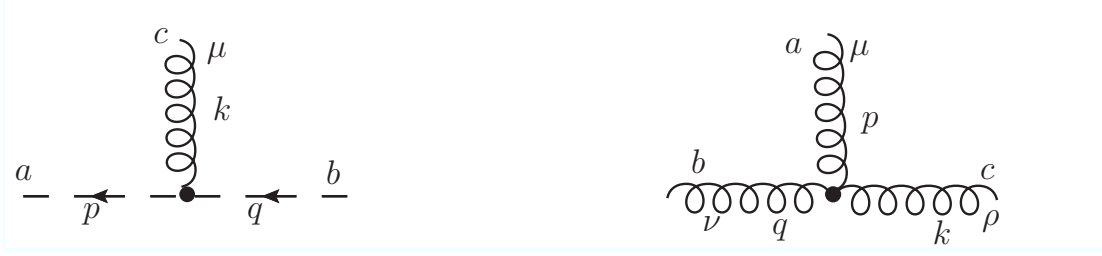


Figura C.1: Vértices, a nivel de árbol, de gluón-fantasma y de tres gluones.

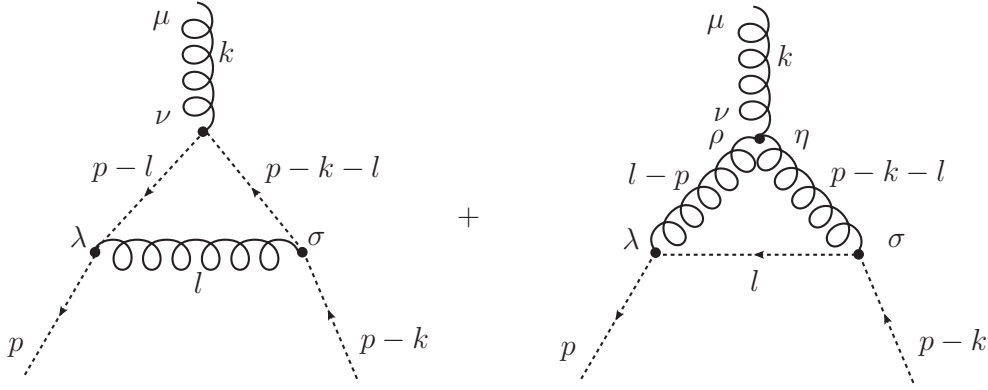


Figura C.2: Correcciones a un lazo del vértice gluón-fantasma.

ortogonal relativo al gluón externo:

$$\begin{aligned}
 P_{\mu\nu}^T(k)\Gamma_{\nu}^{abc}(p, k, p-k) &= igf^{abc}p_{\nu}P_{\mu\nu}^T(k) \\
 &+ P_{\mu\nu}^T(k) \int \frac{d^dl}{(2\pi)^d} \left\{ -\frac{igf^{ade}p_{\lambda}igf^{fbc}(p-k-l)_{\sigma}P_{\lambda\sigma}^T(l)igf^{dfc}(p-l)_{\nu}}{l^2(p-l)^2(p-k-l)^2} \right. \\
 &\quad \left. -\frac{igf^{cdf}[(l-p-k)_{\eta}\delta_{\nu\rho} + (2k-p+l)_{\rho}\delta_{\nu\eta} + (2p-2l-k)_{\nu}\delta_{\rho\eta}]}{l^2(p-l)^2(p-k-l)^2} \right. \\
 &\quad \left. \times P_{\lambda\rho}^T(l-p)igf^{aed}p_{\lambda}igf^{ebf}l_{\sigma}P_{\sigma\eta}^T(p-k-l) \right\} \\
 &= igf^{abc}p_{\nu}P_{\mu\nu}^T(k) \\
 &+ ig^3\frac{N}{2}f^{abc}P_{\mu\nu}^T(k)p_{\lambda}(p-k)_{\sigma} \int \frac{d^dl}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{P_{\lambda\sigma}^T(l)(l-p)_{\nu}}{l^2(p-l)^2(p-k-l)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{[2k_{\eta}\delta_{\nu\rho} + 2k_{\rho}\delta_{\nu\eta} + (2p-2l-k)_{\nu}\delta_{\rho\eta}]P_{\lambda\rho}^T(l-p)P_{\sigma\eta}^T(p-k-l)}{l^2(p-l)^2(p-k-l)^2} \right\}. \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

En la segunda equivalencia de (C.5) se ha usado $f^{aed}f^{bdf}f^{cfe} = N/2f^{abc}$, la cual se demuestra considerando que:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(T_A^a\{T_A^b, T_A^c\}) &= (T_A^a)^{de}(T_A^b)^{ef}(T_A^c)^{fd} + (T_A^a)^{de}(T_A^c)^{ef}(T_A^b)^{fd} \\
&= - \left[(T_A^d)^{be}(T_A^a)^{ef} + (T_A^b)^{ae}(T_A^d)^{ef} \right] (T_A^c)^{fd} - \left[(T_A^e)^{bd}(T_A^a)^{df} + (T_A^b)^{ad}(T_A^e)^{df} \right] (T_A^c)^{ef} \\
&= \text{Tr}(T_A^b T_A^a T_A^c) + (T_A^b)^{ae} \text{Tr}(T_A^e T_A^c) - \text{Tr}(T_A^b T_A^a T_A^c) - (T_A^b)^{ad} \text{Tr}(T_A^d T_A^c) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{C.6}$$

donde T_A^a son los generadores del algebra en la representación adjunta. En la segunda línea de (C.6) se ha usado la identidad de Jacobi, y en el ultimo pasaje la diagonalidad de la métrica (1.11). Esto implica:

$$\begin{aligned}
iNf^{abc} &= \text{Tr}([T_A^a, T_A^b]T_A^c) \\
&= \text{Tr}(2T_A^a T_A^b T_A^c - [T_A^a T_A^b + T_A^b T_A^a]T_A^c) \\
&= \text{Tr}(2T_A^a T_A^b T_A^c) \\
&= 2if^{aed}f^{bdf}f^{cfe}.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

La integral $I_{\lambda\sigma\nu}(p, k)$, en la última expresión de (C.5), inicialmente logarítmicamente divergente por conteo de potencias, en cuatro dimensiones, ahora es convergente, dado que los proyectores de los propagadores gluónicos han quitado una potencia del momento interno l . Sin necesidad de calcular explícitamente la integral, se puede deducir, por la invariancia de Lorentz, que la combinación $p_\lambda(p-k)_\sigma I_{\lambda\sigma\nu}(p, k)$ tiene que ser un vector en el índice no contraído ν ; dado que los únicos vectores disponibles son p y k , tiene, por lo tanto, que ser una combinación lineal de p_ν y k_ν . La contribución de este último, sin embargo, desaparece por la presencia del proyector externo $P_{\mu\nu}(k)$, así que vale:

$$P_{\mu\nu}^T(k)p_\lambda(p-k)_\sigma I_{\lambda\sigma\nu}(p, k) = P_{\mu\nu}^T(k)p_\nu A(p, k), \tag{C.8}$$

donde $A(p, k)$ es algún coeficiente escalar, adimensional, dependiente de los momentos p y k . En el punto simétrico, donde $p^2 = k^2 = (p-k)^2 = \mu^2$, la única cantidad escalar presente es μ^2 , así que el coeficiente A , teniendo que ser adimensional, y en ausencia de divergencias logarítmicas, no puede depender de esta escala, y, por lo tanto, se reduce a una constante:

$$P_{\mu\nu}^T(k)\Gamma_\nu^{abc}(p, k, p-k) \Big|_{p^2=k^2=(p-k)^2=\mu^2} = igf^{abc}p_\nu P_{\mu\nu}^T(k)(1 + g^2 \frac{N}{2} A). \tag{C.9}$$

El mismo argumento se puede aplicar a todos los órdenes perturbativos. Para un número arbitrario de contracciones de las constantes de estructura véase [24].

Apéndice D

Código fuente

Aquí se da el código del programa que encuentra las soluciones de (4.1) y (4.2) en 4 dimensiones.

```
/* gauleh.h */

#ifndef GAULEG_H
#define GAULEG_H

#define PI 3.14159265359
#define GNODES 160
#define IN -13
#define FIN 10

double intgaus (double (*func)(double, double));

#endif

/* gauleg.c */

#include <math.h>
#include "gauleg.h"

#define EPS 3.0e-11 /* precisión relativa usada para aproximar
                    los ceros de los polinomios de Legendre */

static double (*nrfunc)(double,double);
static double qsav;
static int start=0;
static double x_ang[GNODES+1], w_ang[GNODES+1], x_mod[GNODES+1], w_mod[GNODES+1];
/* GNODES es el número de nodos para la integración de Gauss Legendre.
Está definido en gauleg.h */
```

```

void gauleg (double x1, double x2, double x[], double w[], int n)
/* dados los límites de integración x1, x2, el numero n de nodos, llena un array x[1..n]
con las abscisas y un array w[1..n] con los pesos para la integración de
Gauss Legendre */
{
int m,j,i;
double z1,z,xm,xl,pp,p3,p2,p1;

m=(n+1)/2;
xm=0.5*(x2+x1);
xl=0.5*(x2-x1);
for (i=1;i<=m;i++) {
z=cos(PI*(i-0.25)/(n+0.5)); /* valor inicial para la búsqueda de la i-esima raíz */
do {
p1=1.0;
p2=0.0;
for (j=1;j<=n;j++) {
p3=p2;
p2=p1;
p1=((2.0*j-1.0)*z*p2-(j-1.0)*p3)/j; /* al final del ciclo p1 tiene el valor del n-esimo
polinomio de Legendre en z; para calcularlo se utiliza una fórmula de recurrencia */
}
pp=n*(z*p1-p2)/(z*z-1.0); /* calcula la derivada del polinomio en z utilizando otra
formula de recurrencia */

z1=z;
z=z1-p1/pp; /* metodo de Newton para encontrar la raíz */
} while (fabs(z-z1) > EPS);
x[i]=xm-xl*z; /* rescala la raíz en el rango deseado y la pone en el correspondiente
elemento del array y en el elemento a eso simétrico */
x[n+1-i]=xm+xl*z;
w[i]=2.0*xl/((1.0-z*z)*pp*pp);
w[n+1-i]=w[i];
}
}

double gausang (double (*func)(double)) /* regresa el valor de la integral angular */
{
void gauleg (double, double, double [], double [], int);
if(start==0) /* si es la primera vez que se llama una función de integración
se llenan los arrays. La llamada a gauleg se hace sólo una vez */
{
gauleg(-1.0,1.0, x_ang, w_ang, GNODES);
gauleg(IN,FIN, x_mod, w_mod, GNODES);
}
}

```

```

start++;
}

int j;
double s=0.0;
for(j=1;j<=GNODES;j++)
s += w_ang[j]*(*func)(x_ang[j]);

return s;
}

double gausmod (double (*func)(double)) /* regresa el valor de la integral
sobre el módulo. Los extremos de integración IN y FIN (en escala
logarítmica) están definidos en gauleg.h */
{
void gauleg (double, double, double [], double [], int);
if(start==0)
{
gauleg(-1.0,1.0, x_ang, w_ang, GNODES);
gauleg(IN,FIN, x_mod, w_mod, GNODES);
start++;
}

int j;
double s=0.0;
for(j=1;j<=GNODES;j++)
s += w_mod[j]*(*func)(x_mod[j]);

return s;
}

double intgaus (double (*func)(double, double)) /* regresa el valor de la integral
bidimensional llamando recursivamente las rutinas de la integral sobre
el ángulo y sobre el módulo */
{
void gauleg (double, double, double [], double [], int);
double gausmod (double (*func)(double));
double f1 (double q);

if(start==0)
{
gauleg(-1.0,1.0, x_ang, w_ang, GNODES);
gauleg(IN,FIN, x_mod, w_mod, GNODES);
start++;
}
}

```

```
nrfunc=func;
return gausmod(f1);
}

double f1 (double q)
{
double gausang (double (*func)(double));
double f2 (double t);
qsav=q;

return gausang (f2);

}

double f2 (double t)
{
return (*nrfunc)(qsav,t);
}

/* cheb.h */

#ifndef CHEB_H
#define CHEB_H

#define CNODES 120

void chebfn (double a, double b, double f[], double (*func)(double));
void chebft (double c[], double f[]);
double chebev (double a, double b, double c[], double x);

#endif

/* cheb.c */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "cheb.h"

#define PI 3.14159265359
```

```

void chebfn (double a, double b, double f[], double (*func)(double))
/* dados los límites a y b del rango del aproximación y la función por aproximar, calcula
   los valores de la función en los nodos de Chebyshev */
{
int k;
double bpa,bma;

bma=0.5*(b-a);
bpa=0.5*(b+a);
for (k=0;k<CNODES;k++) {
double y=cos(PI*(k+0.5)/CNODES);
f[CNODES-k-1]=(*func)(y*bma+bpa);
}
}

void chebft (double c[], double f[])
/* dados los valores de la función en los nodos, calcula los coeficientes
   para la aproximación de Chebyshev */
{
int j,k;
double fac;

fac=2.0/CNODES;
for (j=0;j<CNODES;j++) {
double sum=0.0;
for (k=0;k<CNODES;k++)
sum += f[CNODES-k-1]*cos(PI*j*(k+0.5)/CNODES);
c[j]=fac*sum;
}

}

double chebev (double a, double b, double c[], double x)
/* dados los coeficientes y los límites a e b regresa el valor de la función
   aproximada en el punto x */
{
double d=0.0,dd=0.0,sv,y,y2;
int j;

if ((x-a)*(x-b)>0.0) {
printf("Error: %f is not in the range in routine chebev\n", x);
exit(1);
}
y2=2.0*(y=(2.0*x-a-b)/(b-a)); /* cambio de variable */
for(j=CNODES-1;j>=1;j--) {

```

```

sv=d;
d=y2*d-dd+c[j];          /* fórmula de recurrencia de Clenshaw */
dd=sv;
}
return y*d-dd+0.5*c[0];
}

/* ggprop.c */

#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include "gauleg.h"
#include "cheb.h"

#define L 1e3 /* escala de corte Lambda en escala lineal*/
#define A -9 /*extremos del rango del aproximación de Chebishev
en escala logarítmica natural*/
#define B 9

static long int iter=0; /* contador del número de iteraciones*/

static double cgl[CNODES]={0.0}, cgh[CNODES]={0.0}, cg11[CNODES]={0.0},
cgh1[CNODES]={0.0}, p[CNODES];
static double gl[CNODES], gh[CNODES], g11[CNODES],
gh1[CNODES], gh2[CNODES]={0.0}, g12[CNODES]={0.0};
static double psav,a,b,a1=0.0,a2=0.0,b1=0.0,b2=0.0,d11=0.0,d12=0.0,
r=0.6,s1=0.0,s2=0.0,t1=0.0,t2=0.0;

double d (double);
double w (double);
double dlog (double);
double wlog (double);
double dn (double);
double wn (double);
double regula (double, double);
double regulc (double, double);

double integrand_gl (double p, double q, double cost);
double integrand_gh (double p, double q, double cost);
double integr_gh (double q, double cost);
double integr_gl (double q, double cost);
void wtuning (int i,int n);
void rescaleh_gh (void);
void rescale_gl(void);

```

```

double extrir(double, double[]);
double gr (double p);

double gr (double p) /* constante de acoplamiento renormalizada en escala logarítmica*/
{
double s= -dlog(p)+ p- 0.5*wlog(p);
return s;
}

double integrand_gl (double p, double q, double cost)
/* función integranda de la ecuación para el gluón
  (los momentos están en escala logarítmica).
  La función d(p) en realidad es 1/d(p)*/
{

double num, den1, den2, x, y, z;
x=exp(q);
y=exp(2*p)+exp(2*q)+2*exp(p+q)*cost;
z=pow(y,0.5);
num= pow(1-cost*cost,1.5)*exp(6*q);
den1=exp(2*q)*d(x)*y*d(z); /* es el denominador con k=0 */
den2=(exp(2*q)*d(x)+regulc(L,x)) * (y*d(z)+regulc(L,z)); /* el denominador con k=L */

return (num/den1-num/den2)/(4*PI*PI*PI);
}

double integrand_gh (double p, double q, double cost)
/* función integranda de la ecuación para el fantasma*/
{

double num, den1, den2, x, y, z;
x=exp(q);
y=exp(2*p)+exp(2*q)+2*exp(p+q)*cost;
z=pow(y,0.5);
num= pow(1-cost*cost,1.5)*exp(4*q);
den1=w(x)*y*d(z);
den2=(w(x)+regula(L,x)) * (y*d(z)+regulc(L,z));

return -3*(num/den1-num/den2)/(4*PI*PI*PI);
}

double regulc (double k, double p)
{
return p*p*exp(k*k/(p*p)-p*p/(k*k)); /*regularizador*/
}

```

```

double regula (double k, double p)
{
    return p*p*exp(k*k/(p*p))-p*p/(k*k);
}

main()
{
    int i;
    double convl, convh, g[CNODES]={0.0};
    for(i=0;i<CNODES;i++)
    p[CNODES-i-1]=0.5*(B-A)*cos(PI*(i+0.5)/CNODES)+0.5*(B+A);
    /* array que contiene los nodos correspondientes al aproximación de Chebishev*/

    for(;iter<150;iter++) {
    convl=0; convh=0; /* parámetros que miden la distancia entre una iteración
    y la iteración siguiente */
    dl1=-dn(-15); /* fija la condición inicial para el fantasma con la condición de horizonte*/

    chebfn(A,B,gh1,dn);
    chebfn(A,B,gl1,wn);
    /* llena el array gh1 (gl1) con los valores de la integral,
    calculada por la rutina dn (wn), para cada nodo p[i] */

    for(i=0;i<CNODES;i++) {
    gh2[i]=gh[i]; gl2[i]=gl[i];
    gh[i]=gh1[i]; gl[i]=gl1[i];

    /* de los arrays que guardan los valores de w y d en los nodos, hay 3 copias
    (gh, gh1, gh2 para d y gl, gl1, gl2 para w), de manera que cuando
    las integrales son evaluadas en las rutinas chebfn para la (n+1) iteración
    y los valores guardados en gh1 (gl1), el array gh (gl) contiene los
    valores de d (w) relativos a la n iteración (ya después de haber sustraído
    la condición inicial y en escala logaritmica),
    y el array gh2 (gl2) los valores relativos a la (n-1)
    iteración (también después de la sustracción y en escala logaritmica) */
    }

    wtuning(75,15);
    /* hace el fit lineal en el UV y calcula los parametros a y b de la parábola (y= a*x^2 + b)
    que definen la condición inicial w_L */

    rescaleh_gh();
    rescale_gl();
    /*sustraee las condiciones iniciales para gh (gl)
    y pasa a la escala logaritmica */

```

```

for(i=0;i<CNODES;i++) {
cgl1[i]=cgl[i];
cgh1[i]=cgh[i];
/* cgh (cgl) y cgh1 (cgl1) contienen los valores de los coeficientes para
la aproximación de Chebyshev relativos a la iteración corriente y a la precedente */
}

chebft(cgl,gl); /* calcula los valores de los coeficientes y los pone en cgh (cgl) */
chebft(cgh,gh);

for (i=0;i<CNODES;i++) {
convl+=(cgl[i]-cgl1[i])*(cgl[i]-cgl1[i]);
convh+=(cgh[i]-cgh1[i])*(cgh[i]-cgh1[i]);
/* mide la distancia entre dos iteraciones consecutivas comparando
los coeficientes de Chebishev*/
}

}

chebfn(A,B,g,gr); /* llena el array g con los valores de la función gr
en los nodos de Chebyshev*/

for(i=0;i<CNODES;i++) /* se convierten los arrays a la escala logarítmica en base 10*/
{
p[i]=log10(exp(p[i])/L);
gl[i]=log10(exp(gl[i])/(L*L));
gh[i]=-log10(exp(gh[i]));
printf(" %f\t\t%f\t\t%f \n",p[i],gh[i],gl[i]);
}
printf("\n\n\n");

for(i=0;i<CNODES;i++) {
printf(" %f\t\t %f \n",p[i],exp(g[i])*exp(g[i])/(4*PI));
}

extrir(-10,gh);
printf("%f\n\n",a); /* a ahora contiene la dimensión anómala del fantasma */
extrir(-10,gl);
printf("%f\n\n",a); /* a ahora contiene la dimensión anómala del gluón*/

```

```

return 0;
}

double dn (double p) /* calcula la integral de la ecuación para el fantasma,
para un momento p fijo*/
{
psav=p;
double s=intgaus(integr_gh);
return s;
}

double wn (double p)
{
double s;
psav=p;
s=intgaus(integr_gl);
return s;
}

double integr_gh (double q, double cost)
/* devuelve el valor de la función integranda a p fijo */
{
return (integrand_gh (psav,q,cost));
}

double integr_gl (double q, double cost)
{
return integrand_gl (psav,q,cost);
}

void wtuning (int i,int n)
/* hace el fit parabólico, con el método de los mínimos cuadrados,
considerando los valores de gl relativos a los p[k], con k= i, i+1... i+n-1 */
{
double d,pp,y,sf=0.0,sp=0.0,sfp=0.0,spp=0.0;
int k;
b2=b1;
a2=a1;
for(k=i;k<i+n;k++) {
pp=exp(p[k])*exp(p[k]); /* devuelve a la escala lineal */
y=gl[k];
sp+=pp;
sf+=y;
}
}

```

```

spp+=pp*pp;
sfp+=pp*y;
}
d=n*spp-sp*sp;
b1=(spp*sf-sp*sfp)/d;
a1=(n*sfp-sp*sf)/d;

}

void rescaleh_gh (void) {
int i;
double norm;
dl2=dl1;
s2=s1;

s1=gh[0]+dl1;
for(i=1;i<CNODES;i++) {          /* calcula el valor minimo de gh+dl */
if ((gh[i]+dl1)<s1) s1=gh[i];
}
if (s1<0) {
for(i=0;i<CNODES;i++) {
gh[i]=log(gh[i]-2*s1+dl1);
/* si el valor minimo es negativo traslada todos los valores
de gh sumandole (-2*s) */
}
}

else {
for(i=0;i<CNODES;i++) {
gh[i]=log(gh[i]+dl1);
}
s1=0;
}
}

void rescale_gl (void)
{
t2=t1;
int i;
t1=(gl[0]+exp(2*p[0])*(1-a1)-b1);
for(i=1;i<CNODES;i++) {
if (gl[i]-b1+exp(2*p[i])*(1-a1)<t1) t1=gl[i]-b1+exp(2*p[i])*(1-a1);
}
if (t1<0) {

```

```

    for(i=0;i<CNODES;i++) {
        gl[i]=log(gl[i]-b1+exp(2*p[i])*(1-a1)-2*t1);
    }
}
else for(i=0;i<CNODES;i++) {
    gl[i]=log(gl[i]-b1+exp(2*p[i])*(1-a1));
    t1=0;
}

}

double w (double p) /* retorna el valor de omega, calculada en p, en escala lineal*/
{
    if(iter==0) return p*p+1/(p*p); /*función de prueba para la primera iteración*/
    double s=wlog(log(p));
    return exp(s);
}

double d (double p)
{
    if(iter==0) return p*p/(1+p*p);
    double s=dlog(log(p));
    return exp(s);
}

double wlog (double q) /*retorna el valor de omega en escala logarítmica*/

{
    double x,y;
    if (q>B) {
        if(iter==1) return log(r*(-2*t1+exp(2*q)*(1-a1)-b1)+(1-r)*(exp(2*q)+exp(-2*q)));
        else return log(r*(-2*t1+exp(2*q)*(1-a1)-b1)+(1-r)*(-2*t2+exp(2*q)*(1-a2)-b2));
    }
    /*extrapolación en el UV. r es el parámetro de relajación, que se hace en escala lineal*/

    if (q<A) {
        if(iter==1) return log(r*exp(extrir(q,gl1))+1-r)*exp(-2*q));
        else return log(r*exp(extrir(q,gl1))+1-r)*exp(extrir(q,gl2));
    }

    if(iter==1) {x=chebev(A,B,cgl,q); y=exp(2*q)+exp(-2*q); return log(r*exp(x)+(1-r)*y);}
    else {x=chebev(A,B,cgl,q); y=chebev(A,B,cgl1,q); return log(r*exp(x)+(1-r)*exp(y));}
    /* chebev evalua la función en p (en escala logarítmica) con la aproximación

```

```

de Chebishev (está definida en cheb.c) */
}

double dlog (double q)
{
double x,y;
if (q>B) {
if(iter==1) return -log(r/(-2*s1+d11)+(1-r)*(1+exp(-2*q)));
else return -log(r/(-2*s1+d11)+(1-r)/(-2*s2+d12));
/* hace la relajacion entre los valores de d (no d^-1) */
}
if(q<A) {
if(iter==1) return -log(r*exp(-extrir(q,gh))+(1-r)*(1+exp(-2*q)));
else return -log(r*exp(-extrir(q,gh))+(1-r)*exp(-extrir(q,gh2)));
}

if(iter==1) {x=chebev(A,B,cgh,q); y=(1+exp(-2*q)); return -log(r*exp(-x)+(1-r)*y);}
else {x=chebev(A,B,cgh1,q); y=chebev(A,B,cgh1,q); return -log(r*exp(-x)+(1-r)*exp(-y));}
}

double extrir (double q, double g[])
/* dado q (<A) y un array (gh o gl) regresa el valor de la función en ese punto
haciendo una extrapolacion lineal */
{
double d,y,sf=0.0,sp=0.0,sfp=0.0,spp=0.0;
int k,j, n=40;
j=5;
for(k=j;k<n+j;k++) {
y=g[k];
sp+=p[k];
sf+=y;
spp+=p[k]*p[k];
sfp+=p[k]*y;
}
d=n*spp-sp*sp;
b=(spp*sf-sp*sfp)/d;
a=(n*sfp-sp*sf)/d;

return a*q+b;
}

```

Bibliografía

- [1] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96(1):191–195, Oct 1954.
- [2] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge, 2007.
- [3] Markus Leder, Jan M. Pawłowski, Hugo Reinhardt, and Axel Weber. Hamiltonian Flow in Coulomb Gauge Yang-Mills Theory. *Phys. Rev.*, D83:025010, 2011.
- [4] William J. Marciano and Heinz Pagels. Quantum Chromodynamics: A Review. *Phys. Rept.*, 36:137, 1978.
- [5] Howard Georgi. *Lie Algebra In Particle Physics*. Perseus Books, 1999.
- [6] Reinhold A. Bertlmann. *Anomalies in Quantum Field Theory*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [7] Michael E. Peskin and Dan V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*. Westview Press, 1995.
- [8] V. N. Gribov. Quantization of non-Abelian gauge theories. *Nucl. Phys.*, B139:1, 1978.
- [9] R. F. Sobreiro and S. P. Sorella. Notas, Introduction to the Gribov ambiguities in Euclidean Yang- Mills theories. 2005.
- [10] Daniel Zwanziger. Non-perturbative Faddeev-Popov formula and infrared limit of QCD. *Phys. Rev.*, D69:016002, 2004.
- [11] Taichiro Kugo. The universal renormalization factors z_1/z_3 and color confinement condition in non-abelian gauge theory. 1995.
- [12] Reinhard Alkofer and Lorenz von Smekal. The infrared behavior of QCD Green’s functions: Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Phys. Rept.*, 353:281, 2001.
- [13] Kenneth Wilson. The renormalization group: Critical phenomena and the kondo problem. *Reviews of Modern Physics*, 47:773–840, 1975.
- [14] Michel Le Bellac. *Quantum and Statistical Field Theory*. Oxford University Press, USA, 1992.

- [15] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, and M. E. J. Newman. *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group*. 1992.
- [16] J. C. Taylor. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang- Mills Field. *Nucl. Phys.*, B33:436–444, 1971.
- [17] A. Cucchieri, T. Mendes, and A. Mihara. Numerical study of the ghost-gluon vertex in Landau gauge. *JHEP*, 12:012, 2004.
- [18] Olivier Pene et al. A Ghost Story: Ghosts and Gluons in the IR regime of QCD. *PoS, QCD-TNT09:035*, 2009.
- [19] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical recipes in C (2nd ed.): the art of scientific computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1992.
- [20] W. Schleifenbaum, M. Leder, and H. Reinhardt. Infrared analysis of propagators and vertices of Yang- Mills theory in Landau and Coulomb gauge. *Phys. Rev.*, D73:125019, 2006.
- [21] Christian S. Fischer, Axel Maas, and Jan M. Pawłowski. On the infrared behavior of Landau gauge Yang-Mills theory. *Annals Phys.*, 324:2408–2437, 2009.
- [22] C. S. Fischer and Reinhard Alkofer. Infrared exponents and running coupling of SU(N) Yang- Mills theories. *Phys. Lett.*, B536:177–184, 2002.
- [23] Reinhard Alkofer, W. Detmold, C. S. Fischer, and P. Maris. Analytic properties of the Landau gauge gluon and quark propagators. *Phys. Rev.*, D70:014014, 2004.
- [24] M.L. Metha, J.M. Normand, and V. Gupta. A property of the structure constants of finite dimensional compact simple lie algebras. *Commun. Math. Phys.*, 90:69–78, 1983.