



Universidad Nacional Autónoma de  
México y Universidad Michoacana  
de San Nicolás de Hidalgo



Instituto de Física y Matemáticas

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas  
UMSNH-UNAM

---

**Sobre cubrientes ramificados entre Superficies de  
Riemann**

---

T E S I N A

que para obtener el grado de

*Maestro en Ciencias Matemáticas*

presenta

Gilberto González Arroyo

Asesor:

Dr. Jesús R. Muciño Raymundo

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM Campus Morelia

Morelia, Michoacán, México.

Abril, 2021

# Índice general

Resumen	ii
Abstract	iii
Introducción	1
<b>1 Conceptos básicos de topología y estructuras complejas</b>	<b>4</b>
1.1 Cubrientes topológicos y cubrientes ramificados . . . . .	6
<b>2 Algunas propiedades de las superficies de Riemann</b>	<b>9</b>
2.1 La característica de Euler de una superficie . . . . .	9
2.2 Teorema de Riemann-Hurwitz . . . . .	10
<b>3 Cubrientes de la esfera de Riemann</b>	<b>15</b>
3.1 Teorema de existencia de Riemann . . . . .	15
3.2 Cubrientes ramificados de la esfera . . . . .	19
3.2.1 Cubrientes de Galois de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ . . . . .	21
<b>4 Monodromía</b>	<b>23</b>
4.1 Visualización de una función afortunada . . . . .	24
4.1.1 Cálculo de monodromía de una función afortunada . . . . .	25

# Resumen

Se dice que la teoría de cubrientes topológicos fue introducida por Schwarz en su camino por demostrar el Teorema de Uniformización [1], pero seguramente esta noción topológica era bien entendida por Riemann, pues surge naturalmente en el estudio de funciones holomorfas multivaluadas. Conociendo esta idea, Riemann pudo extender el dominio de la función  $\sqrt{z^2} : U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  de manera continua (continuación analítica) a un dominio maximal, este dominio al cual se extendió dicha función se obtuvo del pegado apropiado de dos copias de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  y la función extendida es un cubriente topológico, este hecho marcó el comienzo de la teoría de Superficies de Riemann.

En este trabajo se estudian los cubrientes ramificados, una generalización de los cubrientes topológicos; así como su relación con las funciones holomorfas entre dos Superficies de Riemann y los puntos críticos de estas. En particular toda función holomorfa entre Superficies de Riemann da lugar a un cubriente ramificado, veremos que se puede decir, sobre el recíproco de este enunciado. Además estudiamos los posibles cubrientes ramificados de la esfera de Riemann, así como sus cubrientes de Galois, los cuales son un subconjunto particular de cubrientes ramificados. Después definimos la representación de monodromía de un cubriente ramificado, dicha representación provee información cualitativa acerca del comportamiento del cubriente ramificado cerca de sus puntos y valores críticos, finalmente damos una forma explícita de como calcular la representación de monodromía para un subconjunto particular de funciones holomorfas.

Palabras clave: Superficie de Riemann, cubriente topológico, cubriente ramificado, monodromía, función holomorfa.

# Abstract

It is said that the theory of topological coverings was introduced by Schwarz on his way to prove the Uniformization Theorem [1], but surely this topological notion was well understood by Riemann, since it arises naturally in the study of multivalued holomorphic functions. Knowing this idea, Riemann was able to extend the domain of the function  $\sqrt{z^2} : U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  continuously (analytical continuation) to a maximal domain, this domain to which this function was extended was obtained from the proper pasting of two copies of  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  and the extended function is a topological covering, this fact marked the beginning of the theory of Riemann Surfaces.

In this work we study the branched coverings, a generalization of the topological coverings; as well as their relationship with the holomorphic functions between two Riemann Surfaces and their critical points. In particular, every holomorphic function between Riemann Surfaces gives rise to a branched covering, we will see what can be said, about the converse of this statement. In addition, we study the possible branched coverings of the Riemann sphere, as well as its Galois coverings, which are a particular subset of branched coverings. After, we define the monodromy representation of a branched cover, the said representation provides qualitative information about the behavior of the branched cover near its critical points and values, finally we give an explicit way of how to calculate the monodromy representation for a particular subset of holomorphic functions.

Keywords: Riemann surface, topological covering, branched covering, monodromy, holomorphic function

# Introducción

Consideramos un espacio topológico  $X$ . Un cubriente topológico de  $X$ , es un segundo espacio topológico  $Y$  junto con una función  $f : Y \rightarrow X$ , de tal suerte que cada punto de  $X$  este *cubierto parejamente*, esto es, cada punto de  $X$  tiene una vecindad abierta  $V \subset X$ , tal que  $f^{-1}(V)$  es la unión de subconjuntos abiertos disjuntos de  $Y$  y cada uno de estos subconjuntos es enviado de manera homeomorfa a  $V$  mediante la función  $f$ . Los cubrientes topológicos tienen una relación natural con el grupo fundamental del espacio base  $X$ , en particular, se tiene la siguiente correspondencia biyectiva dada por el teorema fundamental de espacios cubrientes (Teorema 54).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{clases de isomorfia de cubrientes} \\ \text{topológicos de } X \\ f : Y \rightarrow X \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{clases de conjugación de} \\ \text{subgrupos de } \pi_1(X) \end{array} \right\}.$$

Un caso especial es el *cubriente universal* de  $X$ , denotado  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow X$  el cual corresponde a la clase de conjugación del subgrupo trivial  $[e] \leq \pi_1(X)$ , que se caracteriza porque  $\tilde{X}$  es simplemente conexo.

De manera similar a la idea anterior existe la noción de cubriente ramificado, pero con una diferencia importante; para un cubriente ramificado hay algunos puntos en  $X$  que no están cubiertos parejamente, dichos puntos son el conjunto de valores críticos del cubriente ramificado, el cual es un subconjunto nunca denso de  $X$ . En particular un cubriente topológico puede pensarse como un caso especial de cubriente ramificado. Las funciones holomorfas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  son ejemplos de cubrientes ramificados (Teorema 42), cuyo lugar singular consta de los valores críticos de  $f$ , es decir, puntos que son imágenes de puntos críticos, siendo estos últimos los puntos donde la derivada de  $f$  se anula.

Una pregunta natural es ¿existen ejemplos de cubrientes ramificados de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$  que no esten dados por una función holomorfa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ? La respuesta esta dada por el Teorema de existencia de Riemann (Teorema 57), salvo un homeomorfismo del dominio, las funciones holomorfas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  coinciden con todos los cubrientes ramificados de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ .

En el Capítulo 3 estudiamos los cubrientes ramificados que tiene la esfera, en particular aquellos que van de la esfera en la esfera y además cumplen con la propiedad

---

adicional de ser Galois (Definición 62). Por lo anterior como estudiar cubrientes ramificados de la esfera de Riemann está fuertemente relacionado con estudiar funciones holomorfas sobre la esfera, para conocer todos los cubrientes ramificados de la esfera por la esfera, basta conocer todas las funciones holomorfas que hay entre dos esferas de Riemann. Un resultado de la teoría de funciones meromorfas dice que todas estas funciones coinciden con las funciones racionales, que son las dadas por el cociente de dos polinomios (Teorema 60).

Dado que un cubriente ramificado  $f : Y \rightarrow X$  entre superficies de Riemann se puede restringir a un cubriente topológico cuando se define fuera de los puntos singulares de la función, nos interesa comprender el comportamiento de la función alrededor de dichos puntos; para ello, en el Capítulo 4 definimos la representación de monodromía asociada a la función  $f$ , que proporciona información cualitativa de la función cerca de los puntos singulares. Por último en este mismo capítulo explicamos un algoritmo sencillo para calcular dicha representación para una familia particular de funciones.

# Notación

$\mathbb{N}$	el conjunto de los números enteros no negativos
$\mathbb{Z}$	el conjunto de los números enteros
$\mathbb{R}$	el campo de los números reales
$\mathbb{C}$	el campo de los números complejos
$\hat{\mathbb{C}}$	la esfera de Riemann
$\mathbb{D}$	el disco abierto unitario en $\mathbb{C}$
$\mathbb{S}^1$	la circunferencia, frontera topológica de $\mathbb{D}$
$\mathbb{T}$	el toro complejo
$X, Y$	espacios topológicos o superficies de Riemann
$ X $	cardinalidad del conjunto $X$
$\pi_1(X)$	el grupo fundamental de $X$
$\pi_1(X, x_0)$	el grupo fundamental de $X$ basado en el punto $x_0$
$\chi(X)$	la característica de Euler de $X$
$(U, \phi)$	carta compleja de $X$ como superficie de Riemann
$f : Y \rightarrow X$	función holomorfa de $Y$ sobre $X$
$f^{-1}(x)$	fibra del punto $x \in X$ bajo $f$
$R$	conjunto de puntos críticos de $f$ en $Y$
$B$	conjunto de valores críticos de $f$ en $X$
$\mathbb{C}(X)$	el campo de funciones racionales de $X$ sobre el campo $\mathbb{C}$
$\Phi$	representación de monodromía de la función $f : Y \rightarrow X$

# Capítulo 1

## Conceptos básicos de topología y estructuras complejas

Con el fin de fijar notación, en este capítulo definimos los objetos básicos de nuestro estudio, las definiciones topológicas se pueden consultar en el texto general [2]; nuestra referencia principal para la teoría de superficies de Riemann es [3]. Un lector avezado en la teoría compleja puede pasar sin dificultad al siguiente capítulo.

**Definición 1.** Dado  $X$  un conjunto, una *topología* en  $X$  es una colección  $\tau$  de subconjuntos de  $X$ , que satisface lo siguiente

- i) el conjunto vacío  $\emptyset$  y  $X$  están en  $\tau$ ,
- ii) la unión de los elementos de cualquier subcolección de  $\tau$  esta en  $\tau$ ,
- iii) la intersección de cualquier subcolección finita de  $\tau$  esta en  $\tau$ .

Un conjunto  $X$  provisto de una topología  $\tau$  se denomina *espacio topológico*; por simplicidad en nuestra notación, en lo sucesivo omitiremos  $\tau$ .

**Definición 2.** Dado  $X$  un espacio topológico, una *carta* (respectivamente *carta compleja*) para  $X$  es una pareja  $(U, \phi)$ , donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$ ,

$$\phi : U \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{resp. } \phi : U \rightarrow D \subset \mathbb{C}^n)$$

es un homeomorfismo y  $D$  un subconjunto homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ). Al conjunto abierto  $U$  se le denomina dominio de la carta. Decimos que la carta  $\phi$  esta centrada en  $x \in U$  si  $\phi(x) = 0$ .

**Definición 3.** Dado  $X$  un espacio topológico. Un *atlas real* (resp. *complejo*) para  $X$  es una colección de cartas (resp. *cartas complejas*)  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$  tal que

- i) la unión de los dominios de las cartas cubren a  $X$ , *i.e.*  $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$ ,
- ii) si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces la función
$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$
es homeomorfismo (resp. holomorfa). Si dos carta  $\phi_\beta$  y  $\phi_\alpha$  cumplen esta condición se dicen que son compatibles entre sí.

Algunas veces, nos referimos a las cartas por uno solo de sus dos componentes, el conjunto abierto o la función, pero el otro estará implícito. En lo que sigue supondremos que nuestro espacio topológico  $X$  admite un atlas real o incluso complejo.

**Observación 4.** Dados dos atlas  $\mathfrak{A}_1$  y  $\mathfrak{A}_2$  para  $X$ , tales que las cartas de uno sean compatibles con las del otro, se sigue que  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$  es otro atlas que contiene a ambos, de este modo la contención define un orden parcial en el conjunto de todos los atlas; luego, por el Lema de Zorn se garantiza la existencia de un atlas maximal con respecto al orden dado por la contención.

**Definición 5.** Una *estructura compleja* para  $X$  es un atlas complejo maximal.

**Definición 6.** Una *variedad real* (resp. *compleja*) de dimensión real (resp. compleja)  $n$  es un espacio topológico  $X$ , Hausdorff y segundo numerable, provisto con un atlas real (resp. complejo) maximal  $\mathfrak{U}$  tal que sus cartas tienen dominios homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  (resp. abiertos  $D \subset \mathbb{C}^n$  para el caso de variedades complejas). En lo sucesivo al referirnos a una variedad, por simplicidad omitiremos el atlas dado.

**Observación 7.** Puesto que  $\mathbb{C}^n$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^{2n}$ , se sigue que, toda variedad compleja de dimensión compleja  $n$  es una variedad real de dimensión real  $2n$ .

**Ejemplo 8.** El círculo  $\mathbb{S}^1 = \{z \mid |z| = 1\}$  es una variedad real de dimensión real 1 si se le provee de un atlas adecuado.

**Ejemplo 9.** El espacio  $\mathbb{C}^n$ , provisto con un atlas que contenga a la carta  $(\mathbb{C}^n, \phi)$  donde  $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  es la identidad (o cualquier otro homeomorfismo) es una variedad compleja de dimensión  $n$ .

De nuestro especial interés son las superficies, en particular superficies de Riemann.

**Definición 10.** Una *superficie de Riemann* es una variedad compleja conexa de dimensión compleja 1. Una *superficie topológica* es una variedad real de dimensión real 2.

**Ejemplo 11.** La *esfera de Riemann*  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  es una superficie de Riemann junto con un atlas que contenga a las cartas  $(\mathbb{C}, \phi)$  y  $((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}, \psi)$  donde  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es la identidad, y  $\psi : \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$  es la función dada por  $z \mapsto 1/z$  conviniendo  $1/\infty = 0$ .

**Ejemplo 12.** Dados dos números complejos  $\omega_1, \omega_2$  linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , el *toro complejo*  $\mathbb{T}$  (que definen estos números) esta dado por el cociente:

$$\mathbb{C}/\Gamma$$

donde  $\Gamma := \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ . El toro complejo es otro ejemplo de superficie de Riemann al proveerle un atlas adecuado que depende de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

**Definición 13.** Una función  $f : Y \rightarrow X$  entre dos variedades complejas  $X$  y  $Y$  es *holomorfa en el punto*  $y \in Y$  si para cada par de cartas  $\phi : U \subset X \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $\psi : V \subset Y \rightarrow \mathbb{C}^m$  con  $y \in V$ , entonces el cambio de coordenadas

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{C}^m$$

es holomorfo. Una función  $f : Y \rightarrow X$  es *holomorfa*, si lo es en cada punto  $y \in Y$ .

---

**Ejemplo 14.** Cualquier polinomio  $p : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , dado por  $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ ,  $p(\infty) = \infty$  es una función holomorfa de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

## 1.1 Cubrientes topológicos y cubrientes ramificados

Empezamos esta sección definiendo los cubrientes topológicos, los cuales son funciones entre espacios topológicos  $f : Y \rightarrow X$  con ciertas propiedades, intuitivamente son funciones que “enrollan” un espacio sobre otro. Posteriormente definimos los cubrientes ramificados, estos últimos difieren a los primeros en que ahora existe un conjunto de puntos en el codominio que no cumplen con la propiedad de estar *cubiertos parejamente*; en otras palabras, si removemos tal conjunto y su preimagen bajo  $f$ , la función que se obtiene es un cubriente topológico.

**Definición 15.** Un *cubriente topológico* (sin ramificación) de un espacio topológico  $X$  es una función continua suprayectiva

$$f : Y \rightarrow X,$$

tal que todo punto  $x \in X$  tiene una vecindad abierta  $U \subset X$  *cubierta parejamente* por  $f$ , esto es,  $f^{-1}(U) = \{W_\alpha\}_{\alpha \in J}$  es la unión disjunta de abiertos en  $Y$  y la función restringida  $f|_{W_\alpha} : W_\alpha \subset Y \rightarrow U$  es un homeomorfismo para toda  $\alpha$ .

A lo largo del texto consideramos siempre cubrientes topológicos  $f$  tal que su dominio  $Y$  es conexo y algunas veces por simplicidad los llamamos solo cubrientes, pero se debe entender que nos referimos a cubrientes topológicos.

**Ejemplo 16.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $t \mapsto e^{it}$  es un cubriente topológico. Cada arco abierto  $U \subsetneq \mathbb{S}^1$  tiene como preimagen un número infinito de segmentos abiertos  $\{W_\alpha\} \subset \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 17.** La función  $z^m : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  dada por  $z \mapsto z^m$ , donde  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , es un cubriente finito pues por el teorema de la función implícita,  $z^m$  es localmente un homeomorfismo y por el teorema fundamental del álgebra cada punto  $w \in \mathbb{C}^*$  tiene exactamente  $m$  preimágenes.

Ahora consideraremos un tipo más general de cubrientes, los cubrientes ramificados. Siguiendo a Ralph H. Fox [4], un cubriente ramificado puede pensarse como “la completación” de un cubriente topológico. Es por ello que ambos conceptos comparten varias propiedades, en particular un cubriente topológico será un caso especial de cubriente ramificado. Daremos una definición general de cubriente ramificado basada en la teoría de [4], pero con un tratamiento moderno como se explica en [5] y [6]; no obstante, más adelante usaremos la teoría de superficies de Riemann y de funciones holomorfas que nos brindaran una familia sustancial de ejemplos concretos de cubrientes ramificados.

Dado  $X$  un espacio topológico y  $x \in X$ , denotamos al conjunto de vecindades abiertas de  $x$  como  $N(x)$ .

---

**Definición 18.** Dada una función  $f : Y \rightarrow X$ . Una *cuerda sobre  $x$*  denotada  $c_x$  es una segunda función dada por  $U_\alpha \mapsto c_x(U_\alpha)$  donde  $U_\alpha \in N(x)$  y  $c_x(U_\alpha)$  es una componente conexa de  $f^{-1}(U_\alpha)$ , que cumple que

$$\text{si } U_\alpha \subset U_\beta, \text{ entonces } c_x(U_\alpha) \subset c_x(U_\beta)$$

para todas  $U_\alpha, U_\beta \in N(x)$ .

**Ejemplo 19.** Consideremos la función  $z^m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $z \mapsto z^m$  y el punto  $1 \in \mathbb{C}$ . La fibra de 1 bajo  $z^m$  es el conjunto  $(z^m)^{-1}(1) = \{e^{\frac{2\pi ik}{m}} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq k \leq m-1\}$ . Para una vecindad abierta  $U$  de 1 lo suficientemente pequeña se tiene que  $(z^m)^{-1}(U)$  consta de  $m$  componentes conexas disjuntas, y cada una ellas contiene un único punto de la fibra de 1; por lo que, una cuerda sobre el punto  $1 \in \mathbb{C}$  es una función  $c_1$  que asocia a  $U$  con una de estas  $m$  componentes. Por ejemplo aquella que contiene al punto  $e^{\frac{2\pi i}{m}}$ . Si  $U_1 \subset U$  es otra vecindad de 1, entonces  $(z^m)^{-1}(U_1)$  consta también de  $m$  componentes; y por la condición en la definición de cuerda,  $c_1(U_1)$  debe ser la componente que también contiene al punto  $e^{\frac{2\pi i}{m}}$ .

Para la función  $z^m$  una cuerda sobre 1, puede pensarse como la elección de un punto particular en el conjunto  $(z^m)^{-1}(1)$ .

Recordemos que un espacio topológico  $X$  se dice que cumple el *primer axioma de separación  $T_1$* , si dados  $x_1, x_2 \in X$ , entonces existe  $U \subset X$  abierto tal que  $x \in U$  y  $y \notin U$  o existe  $U \subset X$  tal que  $y \in U$  y  $x \notin U$ .

**Definición 20.** Un *cubriente ramificado* es una función continua  $f : Y \rightarrow X$  entre espacios, conexos, localmente conexos y  $T_1$  tal que:

- i) Las componentes conexas de las preimágenes de abiertos de  $X$  forman una base para la topología de  $Y$ .
- ii) El conjunto de puntos cubiertos parejamente  $X_0$ , es un subconjunto conexo, localmente conexo y denso en  $X$ .
- iii) El conjunto  $f^{-1}(X_0)$  es un subconjunto conexo, localmente conexo y denso en  $Y$ .
- iv) Para cada  $x \in X$  y cada cuerda  $c_x$  sobre  $x$ , la intersección:

$$\bigcap_{W \in N(x)} c_x(W)$$

es no vacía (y por lo tanto cuenta con un solo punto).

**Observación 21.** Como se mencionó al inicio de la sección si  $f : Y \rightarrow X$  es un cubriente ramificado, entonces podemos obtener un cubriente sin ramificación a partir de  $f$ . En concreto la función restringida  $f|_{f^{-1}(X_0)} : f^{-1}(X_0) \rightarrow X_0$  es un cubriente topológico.

**Ejemplo 22.** La función  $z^m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un cubriente ramificado y se restringe al cubriente topológico  $z^m|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  donde  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Verificaremos i)-iv) de la

---

Definición 20. La condición i), se sigue puesto que  $z^m$  es una función abierta y suprayectiva. Las condiciones ii)-iii), se siguen del hecho que  $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$  es conexo, localmente conexo y denso en  $\mathbb{C}$ . Finalmente el Ejemplo 19 muestra que para cada punto  $x \in \mathbb{C}$  y cada cuerda  $c_x$  la intersección

$$\bigcap_{W \in N(x)} c_x(W)$$

cuenta con un punto en  $(z^m)^{-1}(x)$ .

**Definición 23.** Dado un cubriente topológico  $f : Y \rightarrow X$ . Denotamos  $|f^{-1}(x)|$  a la cardinalidad de la preimagen de un punto  $x \in X$  bajo  $f$ .

**Proposición 24.** Consideramos  $f : Y \rightarrow X$  un cubriente ramificado donde  $X$  es un espacio topológico conexo. Dados  $x_0, x_1 \in X_0 \subset X$  puntos cubiertos parejamente, entonces

$$|f^{-1}(x_0)| = |f^{-1}(x_1)|.$$

*Demostración.* La cardinalidad de  $f^{-1}(x)$  es constante mientras  $x$  varia en una vecindad cubierta parejamente, esto hace a  $|f^{-1}(x)|$  una función localmente constante; luego, como  $X_0$  es conexo se sigue que  $|f^{-1}(x_0)| = |f^{-1}(x_1)|$  para todo  $x_0, x_1 \in X_0$ .  $\square$

La proposición anterior motiva la siguiente.

**Definición 25.** El grado de un cubriente ramificado  $f : Y \rightarrow X$  es el número  $m = |f^{-1}(x_0)|$  donde  $x_0$  es cualquier punto en  $X_0 \subset X$  el conjunto de puntos cubiertos parejamente.

**Ejemplo 26.** Si de nuevo consideramos la función  $z^m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , entonces cada punto distinto de 0 tiene exactamente  $m$  preimágenes; por lo que,  $m$  es el grado de  $z^m$  como cubriente ramificado.

# Capítulo 2

## Algunas propiedades de las superficies de Riemann

La característica de Euler  $\chi(X)$  de una superficie de Riemann compacta  $X$  es un número entero derivado únicamente de su topología. Dicha característica  $\chi(X)$  es más fácil de definir en términos básicos cuando  $X$  es una variedad (real o compleja), pero puede ser definida para espacios topológico más generales, por ejemplo vea la pág. 146 de [7]. Para superficies topológicas compactas, orientables y sin frontera uno de los hechos más importantes relacionados con la característica de Euler es que esta es un invariante completo, esto es, dos superficies compactas, orientables y sin frontera  $X$  y  $Y$  son homeomorfas entre sí, si y solamente si  $\chi(X) = \chi(Y)$ .

En la segunda sección de este capítulo estudiamos la fórmula de Riemann-Hurwitz que establece una relación entre las características de Euler de dos superficies de Riemann  $X$  y  $Y$ , cuando existe una función holomorfa de grado finito  $f : Y \rightarrow X$ , además, en esta misma sección mostramos que toda función holomorfa  $f : Y \rightarrow X$  es también un cubriente ramificado finito (Teorema 42).

### 2.1 La característica de Euler de una superficie

Para los fines de este texto solo definimos la característica de Euler para una superficie topológica compacta. En esta sección seguimos de cerca [3].

**Definición 27.** Una *triangulación de una superficie*  $X$ , denotada  $T$ , es una descomposición de  $X$  en conjuntos cerrados, cada uno homeomorfo a un triángulo, de tal manera que cualesquiera dos triángulos sean: ajenos, se intersecan en un vértice o se intersecan a lo largo de una única arista.

El teorema siguiente permite definir en términos de triangulaciones la característica de Euler de una superficie topológica compacta. La demostración puede ser consultada en la pág. 126 de [8].

**Teorema 28.** *Toda superficie topológica compacta admite una triangulación.*

---

**Definición 29.** Dada una triangulación  $T$  de  $X$ . La *característica de Euler* de la superficie  $X$  se define como el número  $\chi(X) = v - a + t$ . Donde  $v$ ,  $a$  y  $t$  es el número de vértices, aristas y triángulos de la triangulación  $T$  respectivamente.

**Proposición 30.** *La característica de Euler  $\chi(X)$  no depende de la triangulación dada.*

*Idea de la prueba.* Dadas dos triangulaciones de  $X$ , denotadas  $T_1$  y  $T_2$  ambas pueden “refinarse” a otra triangulación  $T$ . De tal manera que cada triángulo de  $T$  es obtenido al subdividir triángulos adecuados de  $T_1$  o  $T_2$  según sea el caso. El proceso inverso que se logra es que cada triángulo de  $T_1$  o  $T_2$  es un triángulo que puede ser formado al unir ciertos triángulos de  $T$ . Finalmente se observa que la suma  $v - a + c$  queda invariante cada vez que se refina un triángulo y como  $T$  es una refinación tanto de  $T_1$  como de  $T_2$ , se sigue que la característica de Euler no depende de la triangulación.  $\square$

**Ejemplo 31.** La característica de Euler de la esfera de Riemann  $\chi(\widehat{\mathbb{C}})$  es igual a dos, podemos observar esto del hecho que un tetraedro es topológicamente una esfera triangulada, en cuyo caso el número de vértices es igual 64; el de aristas es igual a 6 y el de caras es igual a 4.

## 2.2 Teorema de Riemann-Hurwitz

**Definición 32.** Dada una función holomorfa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $f(z_0) = 0$ . El *orden del cero* en  $z_0$  de la función  $f$ , es el primer número  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0} =: f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

y lo denotamos  $ord_{z_0}(f(z))$ .

**Definición 33.** Dada una función holomorfa no constante  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $z_0 \in \mathbb{C}$ , la *multiplicidad de  $f$  en el punto  $z_0$*  es el número

$$mult_{z_0}(f) := ord_{z_0}(f(z) - f(z_0)).$$

Un problema crucial de nuestra teoría es identificar claramente el comportamiento local de funciones holomorfas  $f : Y \rightarrow X$ . El siguiente lema resuelve este problema en el supuesto de que  $X$  y  $Y$  sean superficies de Riemann. En este caso las funciones holomorfa  $f : Y \rightarrow X$  no constantes, alrededor de cada punto  $y \in Y$  se comportan como funciones  $z \mapsto z^{n(y)}$ , donde  $n(y) \in \mathbb{N}$  es una función con valores enteros positivos que depende solo del punto  $y$ . Damos una demostración del lema obtenida de [9].

**Lema 34.** (*Forma local normal*) Si  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa no constante y  $z_0 \in D$ , entonces:

- i) (*Existencia*). Existe una bola suficientemente pequeña  $B_\epsilon(z_0) \subset D$  centrada en el punto  $z_0$  y un biholomorfismo  $h : B_\epsilon(z_0) \rightarrow h(B_\epsilon(z_0))$  tal que

$$f|_{B_\epsilon(z_0)}(z) = f(z_0) + h(z)^n$$

donde  $n$  es la multiplicidad de la función  $f$  en el punto  $z_0$ .

ii) (Unicidad). Si  $B_{\epsilon'}(z_0) \subset D$  es otra bola centrada en  $z_0$  y  $\tilde{h}$  un holomorfismo definido en  $B_{\epsilon'}(z_0)$  con  $\tilde{h}(c) \neq 0$  tal que

$$f|_{B_{\epsilon'}(z_0)}(z) = f(z_0) + \tilde{h}(z)^m,$$

entonces  $n = m$ .

*Demostración.* Para i), al expandir la función  $f$  en su serie de Taylor alrededor del punto  $z_0$  tenemos

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^j f^{(j)}(z_0)}{j!}.$$

Si  $n$  es el primer número natural tal que  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ , entonces podemos escribir la ecuación anterior como

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n \left( \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)(z - z_0)}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(z_0)(z - z_0)^2}{(n+2)!} + \dots \right).$$

Ahora definimos  $g(z) := \left( \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)(z - z_0)}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(z_0)(z - z_0)^2}{(n+2)!} + \dots \right)$ . Como  $g$  es holomorfa y  $g(z_0) = f^{(n)}(z_0)/n! \neq 0$ , se sigue que alrededor de  $z_0$ ,  $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n g(z)$  y podemos encontrar una bola  $B_r(z_0)$  suficientemente pequeña, en la que  $g$  nunca se anule. Por lo tanto existe una función  $q(z)$  definida en una bola posiblemente más pequeña  $B_\epsilon(z_0)$ , tal que  $q(z)^n = g(z)$ . Luego si definimos  $h(z) := (z - z_0)q(z)$ , entonces tenemos el resultado deseado.

Prueba de ii). Si suponemos que  $\epsilon < \epsilon'$ , entonces  $\tilde{h}(z)^m = h(z)^n$  en la bola abierta correspondiente a  $\epsilon$ . Además,  $h(c) = \tilde{h}(c) = 0$  y  $\tilde{h}(c) \neq 0 \neq h(c)$ , por lo que la multiplicidad en  $c$  es 1 en ambos casos. De aquí concluimos que  $n = \text{ord}_c(h(z)^n) = \text{ord}_c(\tilde{h}(z)^m) = m$ .  $\square$

**Observación 35.** La proposición anterior es de carácter local, es decir, describe el comportamiento de las funciones holomorfas no constantes  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , en una vecindad pequeña, por lo que se generaliza fácilmente a cualquier función holomorfa no constante  $f : Y \rightarrow X$  entre superficies de Riemann. Dadas dos cartas  $(U, \psi)$ ,  $(V, \phi)$  centradas alrededor de  $y$  y  $f(y)$  respectivamente, entonces  $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$  es una función holomorfa definida en un dominio  $D \supset \{0\}$ , en la cual aplica la proposición anterior, por lo que alrededor de 0, tenemos que  $\phi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = h(z)^n$  y se verifica que el número  $n = \text{mult}_y(f)$  no depende de la cartas elegidas.

**Observación 36.** Para funciones  $f : Y \rightarrow X$  entre superficies de Riemann, dado  $y \in Y$ , existen cartas  $(U, \psi)$  y  $(V, \phi)$  tal que la función  $\phi \circ f \circ \psi^{-1}(z)$  alrededor de  $y$  es igual a  $h(z)^n$ , esto implica que la función  $f$  alrededor de cada punto es un cubriente; es ramificado si  $\text{mult}_y(f) > 1$  y sin ramificación si  $\text{mult}_y(f) = 1$ .

**Proposición 37.** Consideremos una función holomorfa no constante  $f : Y \rightarrow X$  entre superficies de Riemann compactas. Si para cada  $x \in X$  definimos el grado de  $f$  sobre  $x$  como

$$d_x(f) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \text{mult}_y(f),$$

entonces  $d_x(f)$  no depende de  $x$ .

*Demostración.* Usando el lema de la forma local normal (Lema 34) para los puntos en una vecindad adecuada de cada punto de la fibra de  $x$ , se verifica que la función  $d_{(\cdot)}(f) : X \rightarrow \mathbb{Z}^+$  dada por  $d_{(x)}(f) = d_x(f)$  es localmente constante; por lo tanto, como  $X$  es conexo, la función  $d_{(\cdot)}(f)$  es constante en  $X$ .  $\square$

La proposición anterior nos permite enunciar la siguiente.

**Definición 38.** El *grado de una función holomorfa*  $f : Y \rightarrow X$  entre superficies de Riemann compactas es el número  $\deg(f) := d_x(f)$  para cualquier  $x \in X$ .

**Definición 39.** Dada una función holomorfa de grado finito  $f : Y \rightarrow X$ .

- i) Decimos que un punto  $y \in Y$  es *punto de ramificación* o *punto crítico* si  $\text{mult}_y(f) \geq 2$ . Denotamos con  $R = \{y \in Y \mid \text{mult}_y(f) \geq 2\}$  al conjunto de puntos críticos.
- ii) Un *valor crítico* de  $f : Y \rightarrow X$  es un punto  $x = f(y)$ , donde  $y$  es un punto crítico, el conjunto de valores críticos es  $B = \{x \in X \mid x = f(y) \wedge \text{mult}_y(f) \geq 2\}$ .
- iii) Un *punto cocrítico* de  $f$  es un punto  $y \in f^{-1}(B)$ , tal que no es un punto crítico. Es decir, un punto  $y_0 \in Y$  es cocrítico si tiene como imagen un valor crítico pero el punto  $y_0$  no es crítico.

**Proposición 40.** Dada  $f : Y \rightarrow X$  una función holomorfa y un punto  $y \in Y$ , son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- i)  $y$  es un punto de ramificación de  $f$
- ii) existen coordenadas locales  $(V, \phi)$  y  $(U, \psi)$  alrededor de  $y_0$  y  $f(y_0)$  tal que:
$$\left. \frac{d(\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z))}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

*Demostración.* ( $i \Rightarrow ii$ ). Si  $y$  es un punto de ramificación, entonces existen coordenadas locales tales que  $f$  alrededor de  $y$  se ve como  $z \mapsto z^n$  con  $n > 1$ , por lo tanto su derivada se anula en dicho punto.

( $ii \Rightarrow i$ ). Ahora, si  $\left. \frac{d(\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z))}{dz} \right|_{z=0} = 0$ , entonces  $\text{ord}_0(\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z)) > 1$  y por lo tanto  $\text{mult}_y(f) > 1$ .  $\square$

**Lema 41.** Si  $f : Y \rightarrow X$  es una función holomorfa entre superficies de Riemann compactas, entonces el conjunto de puntos de ramificación  $R \subset Y$  es finito.

*Demostración.* Como  $Y$  es compacta, basta demostrar que el conjunto  $R$  de puntos de ramificación es discreto. Para ello, si  $R$  no es un conjunto discreto, entonces existe un punto  $y_0 \in R$  tal que cualquier vecindad de  $y_0$  contiene otros puntos de ramificación, pero por el Lema 34,  $y_0$  tiene una vecindad  $V$  para el cual  $f(y) = f(y_0) + h(y)_0^n$  siendo  $n_0 \geq 2$  la multiplicidad de  $y_0$  y  $h : V \rightarrow h(V)$  un biholomorfismo, por lo tanto en dicha vecindad el único punto de ramificación es  $y_0$ .  $\square$

---

**Teorema 42.** *Dadas dos superficies de Riemann conexas  $X$  y  $Y$ . Si  $f : Y \rightarrow X$  es una función holomorfa suprayectiva de grado finito con al menos un punto crítico, entonces  $f : Y \rightarrow X$  es un cubriente ramificado de  $X$ .*

*Demostración.* Por el Lema 41 los puntos de críticos forman un conjunto discreto de  $Y$ , de igual forma son los puntos cocríticos y el conjunto  $B \subset X$  de valores críticos de  $f$ , por lo que  $X_0 := X \setminus B$  es un conjunto denso en  $X$  y consta de los puntos cubiertos parejamente, esto verifica los puntos *iii*) y *ii*) de la Definición 20. El Ejemplo 22 y la Observación 36 muestran que  $f$  es localmente un cubriente ramificado en cada punto, esto es suficiente para verificar *i*) y *iv*) de la Definición 20.  $\square$

**Observación 43.** Por el Teorema 42 una función holomorfa suprayectiva de grado finito  $f : Y \rightarrow X$  entre superficies de Riemann es también un cubriente ramificado de grado finito. Por el Lema 34 puede concluirse que el grado de este cubriente ramificado coincide con  $\deg(f)$ , el grado de  $f$  como función holomorfa.

**Ejemplo 44.** La función  $z^m : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , para  $m \geq 2$  es una función holomorfa de grado  $m$ . Además,  $z^m$  tiene exactamente dos puntos de ramificación  $0, \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$  y valores singulares  $0$  y  $\infty$  respectivamente, también se cumple que  $\text{mult}_0(f) = m = \text{mult}_\infty(f)$  y se observa que cualquier punto en el codominio distinto de  $0$  e  $\infty$  tiene exactamente  $m$  preimágenes, mientras que  $0$  e  $\infty$  solo una.

**Teorema 45.** (*Riemann-Hurwitz*). *Consideramos una aplicación holomorfa finita suprayectiva  $f : Y \rightarrow X$  entre dos superficies de Riemann compactas, si  $\chi(Y)$  y  $\chi(X)$  son las características de Euler de  $Y$  y  $X$  respectivamente, entonces*

$$\chi(Y) = \deg(f)\chi(X) - \sum_{y \in Y} (\text{mult}_y(f) - 1).$$

*Demostración.* Note que por el Lema 41 el conjunto de puntos  $y \in Y$  tal que  $\text{mult}_y(f) \geq 2$ , es un conjunto finito, por lo tanto la suma en la igualdad anterior es en realidad una suma finita.

Consideremos una triangulación en  $X$  tal que todos valores de ramificación  $B \subset X$  sean parte del conjunto de vértices, esto puede hacerse ya que  $B$  es finito. Supongamos que dicha triangulación tiene  $v$  vértices,  $a$  aristas y  $t$  triángulos, levantemos esta triangulación bajo  $f$ , para obtener una triangulación en  $Y$ , y supongamos que dicha triangulación tiene  $v'$  vértices,  $a'$  aristas y  $t'$  triángulos.

Exceptuando los vértices, un punto de un triángulo no es imagen de un punto de ramificación, por lo que cada triángulo, se levanta a  $\deg(f)$  triángulos, por lo tanto  $t' = \deg(f)t$ . De igual manera exceptuando los vértices de una arista, un punto de la arista se levanta a  $\deg(f)$  puntos distintos, por lo tanto  $a' = \deg(f)a$ . Luego, si  $x \in X$  es un vértice de la triangulación de  $X$ , el número de preimágenes de  $x$  es

$$|f^{-1}(x)| = \sum_{y \in f^{-1}(x)} 1 = \deg(f) + \sum_{y \in f^{-1}(x)} (1 - \text{mult}_y(f))$$

Si denotamos con  $V_X$  el conjunto de vértices de la triangulación en  $X$  y  $V_Y$  el conjunto de vértices de la triangulación en  $Y$ , entonces

---


$$v' = \sum_{x \in V_X} (\deg(f) + \sum_{y \in f^{-1}(x)} (1 - \text{mult}_y(f))) = \deg(f)v + \sum_{x \in V_X} \sum_{y \in f^{-1}(x)} (1 - \text{mult}_y(f))$$

cuya última parte podemos reescribir de tal manera que

$$v' = \deg(f)v - \sum_{y \in V_Y} (\text{mult}_y(f) - 1).$$

Entonces

$$\chi(Y) = v' - a' + t' = \deg(f)(v - a - t) - \sum_{y \in V_Y} (\text{mult}_y(f) - 1)$$

como todo punto de ramificación es un vértice podemos reescribir la igualdad anterior como

$$\chi(Y) = \deg(f)\chi(X) - \sum_{y \in Y} (\text{mult}_y(f) - 1).$$

□

**Ejemplo 46.** Como la característica de Euler del toro complejo  $\mathbb{T}$  es igual a 0 y la característica de la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  es 2, por Riemann-Hurwitz se sigue que no puede existir una función holomorfa no constante  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{T}$  de la esfera de Riemann en el toro complejo.

En el siguiente capítulo utilizamos una versión modificada del teorema anterior para estudiar los posibles cubrientes ramificados de Galois de la esfera de Riemann.

# Capítulo 3

## Cubrientes de la esfera de Riemann

### 3.1 Teorema de existencia de Riemann

El Teorema de existencia de Riemann (Teorema 57) es un resultado de particular importancia para nuestro estudio, liga la teoría de cubrientes ramificados con la teoría de funciones holomorfas, en particular, dada una superficie de Riemann compacta  $X$ , un subconjunto finito  $B \subset X$  y un cubriente topológico  $f : Y \rightarrow X \setminus B$ , existe una única estructura compleja en  $Y$  que hace a  $f$  una función holomorfa, más aún  $Y$  puede compactificarse a una superficie  $\bar{Y}$  y extender  $f$  a una función holomorfa  $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow X$  entre superficies de Riemann compactas, que por el Teorema 42 es un cubriente ramificado.

Empezamos esta sección estableciendo algunos resultados de topología algebraica necesarios para la demostración del Teorema de existencia de Riemann, de particular importancia es la relación del grupo fundamental de un espacio topológico  $X$  y sus posibles cubrientes topológicos. Para una referencia completa de los resultados topológicos de esta sección vea el Capítulo 1 de [7]; para la teoría de superficies de Riemann vea [10].

**Definición 47.** Dado  $X$  un espacio topológico, consideramos un punto  $x_0 \in X$ .

- i) Un *lazo* basado en  $x_0$  es una función continua  $\gamma : [0,1] \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ .
- ii) Decimos que dos lazos  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son *homotópicos* si existe una función continua  $H : [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$  de tal manera que  $H(0,t) = \gamma_0(t)$ ,  $H(1,t) = \gamma_1(t)$  y  $H(s,0) = H(s,1) = x_0$ .
- iii) Dados dos lazos  $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \rightarrow X$  basados en el mismo punto  $x_0$ . El *producto* de  $\gamma_1$  con  $\gamma_2$ , denotado  $\gamma_1 \bullet \gamma_2$  es un tercer lazo  $\gamma_1 \bullet \gamma_2 : [0,1] \rightarrow X$  dado por

$$\gamma_1 \bullet \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- iv) Dado que la propiedad de ser homotópicos induce una relación de equivalencia en el conjunto de lazos basados en el punto  $x_0$ , podemos definir  $\pi_1(X, x_0)$  *el grupo*

*fundamental* de un espacio topológico conexo por trayectorias<sup>1</sup> como el conjunto de clases de homotopía de lazos basados en  $x_0$ , con el producto de dos clases  $[\gamma_1], [\gamma_2]$  definido por  $[\gamma_1] \bullet [\gamma_2] := [\gamma_1 \bullet \gamma_2]$ . Es rutinario verificar que dicho producto esta bien definido, *i.e.* no depende de los representantes de la clase de homotopía.

Abusando de la notación escribiremos  $\gamma$  para referirnos a la clase de homotopía  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ .

El grupo fundamental de un espacio topológico  $X$  es importante para nuestro estudio porque impone restricciones sobre los posibles cubrientes topológicos de  $X$ . Además, si  $f : Y \rightarrow X$  es una función continua, entonces  $f$  induce un homomorfismo de grupos  $f_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$  entre los grupos fundamentales de  $Y$  y  $X$ , dicho homomorfismo esta dado por  $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ .

**Proposición 48.** *Si  $f : Y \rightarrow X$  es un cubriente topológico, entonces el homomorfismo  $f_*$  asociado a  $f$  es inyectivo.*

**Definición 49.** Un *isomorfismo entre cubrientes topológicos*  $f_1 : Y_1 \rightarrow X, f_2 : Y_2 \rightarrow X$  es un homeomorfismo  $\mu : Y_1 \rightarrow Y_2$  tal que  $f_1 = f_2 \circ \mu$ .

En el caso de que  $Y_1 = Y_2$  diremos que  $\mu$  es un *automorfismo de cubrientes*. Denotamos al grupo de automorfismos de un cubriente  $f : Y \rightarrow X$ , como  $Aut(f)$ .

**Teorema 50.** *Dado un cubriente topológico  $f : Y \rightarrow X$ , si definimos  $H := f_*(\pi_1(Y)) \leq \pi_1(X)$ , entonces:*

- i) El cubriente es normal si y sólo si  $H$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(X)$ .*
- ii) El grupo  $Aut(f)$  es isomorfo a  $N(H)/H$  donde  $N(H)$  es el normalizador de  $H$  en  $\pi_1(X)$ .*

**Observación 51.** En el caso en que  $f : \widetilde{X} \rightarrow X$  sea el cubriente universal, *i.e.*,  $\pi_1(\widetilde{X}) \cong \{e\}$ , se sigue que  $Aut(f) \cong \pi_1(X)$ .

**Proposición 52.** *El grado de un cubriente  $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  con  $Y$  y  $X$  conexos por trayectorias es igual al índice de  $f_*(\pi_1(Y, y_0))$  en  $\pi_1(X, X_0)$ .*

**Proposición 53.** *Consideramos  $X$  es un espacio conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Dos cubrientes  $f_1 : Y_1 \rightarrow X$  y  $f_2 : Y_2 \rightarrow X$  son isomorfos mediante un isomorfismo  $\mu : Y_1 \rightarrow Y_2$  que lleva el punto base  $y_1 \in f_1^{-1}(x_0)$  en el punto base  $x_2 \in f_2^{-1}(x_0)$  si y solo si  $f_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = f_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$ .*

**Teorema 54.** *Si  $X$  es un espacio conexo por trayectorias, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente simplemente conexo. Entonces existe una biyección entre el conjunto de clases de isomorfía de cubrientes conexos por trayectorias preservando los puntos base  $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  y el conjunto de subgrupos de  $\pi_1(X, x_0)$ , obtenida por asociar a cada cubriente  $(Y, y_0)$  el grupo  $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ .*

*Si los puntos base son ignorados esto da una biyección entre las clases de isomorfía de cubrientes conexos por trayectorias y clases de conjugación de subgrupos de  $\pi_1(Y, y_0)$ .*

<sup>1</sup>Un espacio topológico  $X$  es conexo por trayectorias si y solamente si para todo  $x, y \in X$ , existe  $f : [0, 1] \rightarrow X$ , tal que  $f(0) = x$ , y  $f(1) = y$ .

---

**Observación 55.** Las hipótesis del teorema anterior son algo técnicas, para detalles al respecto consulte la pág. 63 de [7], no obstante, toda superficie cumple dichas condiciones; por lo que, los cubrientes topológicos (sin ramificación) de superficies están clasificados enteramente por su grupo fundamental.

**Ejemplo 56.** Consideramos el espacio cociente de  $\mathbb{R}^2$  por la acción del grupo  $\langle (x, y) \mapsto (x + 1, -y) \rangle$ , dicho espacio es denominado, la banda de Moebius infinita  $\mathcal{B}$ . El grupo fundamental  $\pi_1(\mathcal{B})$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  por lo que la banda de Moebius infinita tiene una cantidad numerable de cubrientes topológicos, uno por cada subgrupo  $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Ahora si  $f : Y \rightarrow \mathcal{B}$  es un cubriente topológico de grado finito  $n$ , entonces  $Y$  es isomorfo a la banda de Moebius  $\mathcal{B}$  si  $n$  es impar y  $Y$  es isomorfo al cilindro  $\mathcal{C}$  si  $n$  es par.

Dada una cubierta ramificada  $f : Y \rightarrow X$  podemos fijarnos en su cubierta topológica asociada  $f : Y \setminus f^{-1}(B) \rightarrow X \setminus B$ , donde  $B$  es el conjunto de valores críticos. De manera inversa si empezamos con una cubierta topológica  $f : Y \rightarrow X \setminus B$  en ciertos casos podemos extender  $f$  a una cubierta ramificada  $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow X$ , con  $Y \subset \bar{Y}$ , como muestra el siguiente.

**Teorema 57.** *(De existencia de Riemann.) Consideramos  $X$  una superficie de Riemann compacta,  $Y$  una superficie topológica no compacta y  $f : Y \rightarrow X \setminus B$  un cubriente topológico de grado finito, donde  $B$  es un conjunto finito no vacío de puntos de  $X$ . Entonces existe una superficie de Riemann compacta  $\bar{Y}$  que contiene a  $Y$  y tal que  $f$  se extiende a una función holomorfa  $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow X$ .*

*Demostración.* Haremos la demostración en los siguientes pasos.

- Paso 1. Proveemos a  $Y$  de una estructura compleja de tal manera que  $f : Y \rightarrow X \setminus B$  sea una función holomorfa.

Si  $\{(V_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  es un atlas maximal para la estructura compleja de  $X$ , construiremos un atlas en  $Y$  como sigue: para cada  $y \in Y$  consideremos un abierto del atlas  $V_\alpha \subset X$  tal que  $f(y) \in V_\alpha$ , podemos suponer que la preimagen de dicho abierto  $f^{-1}(V_\alpha)$ , es la unión de  $n$  abiertos disjuntos  $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n} \subset Y$  que son enviados de manera homeomorfa en  $V_\alpha$  bajo  $f$ , siendo  $n$  el grado de  $f$ . Por simplicidad y abusando de la notación en adelante denotaremos simplemente como  $U_\alpha$  a un elemento de la colección  $\{U_{\alpha_i}\}_{i \leq n}$ , ya que para todos estos subconjuntos se puede proceder de manera similar.

La función  $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{D}$  definida por  $\psi_\alpha := \phi_\alpha \circ f$ , junto con el abierto  $U_\alpha$ , forman una carta compleja en  $Y$  y los cambios de coordenadas  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  son holomorfos. En conclusión, el conjunto  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$  es un atlas para  $Y$ .

Además, la función  $f : Y \rightarrow X$  con el atlas construido para  $Y$  es holomorfa, puesto que  $\phi_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} = \phi_\alpha \circ f \circ f^{-1} \circ \phi_\alpha^{-1}$  es la identidad, y entonces  $\phi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$  es una función holomorfa dado que  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  lo es.

- Paso 2. Agregamos un número finito de puntos a  $Y$  y cartas para dichos puntos compatibles con la estructura compleja de  $Y$  construida en el paso anterior.

Consideramos un punto  $b \in B$  y una carta  $(V_\alpha, \phi_\alpha)$  centrada en dicho punto ( $\phi_\alpha(k) = 0$ ), llamamos  $K$  a la preimagen bajo  $\phi_\alpha$  de una bola  $\mathbb{B}_\epsilon(0)$  lo suficientemente pequeña para que  $K$  no contenga otro punto de  $B$ .

Si  $D_1, D_2, \dots, D_r$  son las componentes conexas de  $f^{-1}(K \setminus \{b\})$ , donde  $r$  debe satisfacer  $r \leq n$ , entonces notemos que  $f : D_i \rightarrow K \setminus \{b\}$  es un cubriente finito y, como  $K \setminus \{b\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ , cada  $D_i$  es también homeomorfo a  $\mathbb{D}^*$ , puesto que los únicos cubrientes de grado finito de  $\mathbb{D}^*$  son homeomorfos a  $\mathbb{D}^*$ . Ahora consideramos la componente conexa  $D_1$ . Por simplicidad denotamos con  $m$  a  $m = m_f(D_1)$  el grado del cubriente  $f : D_1 \rightarrow K \setminus \{b\}$ , que satisface  $m \leq n$ . Lo siguiente es agregar el punto faltante a  $D_1 \subset Y$  y dar una carta adecuada alrededor de dicho punto de tal manera que;  $f$  alrededor de dicho punto se vea como la función  $z^m$ , (esto hará a  $f$  una función holomorfa). Para ello utilizamos algunos resultados topológicos.

Si  $h : D_1 \rightarrow \mathbb{D}^*$  es un homeomorfismo y  $g : \mathbb{B}_\epsilon(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{D}^*$  es un biholomorfismo, entonces la función

$$\tau := g \circ \phi_\alpha \circ f \circ h^{-1} : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^*$$

es un cubriente topológico de grado  $m$ . Además, recordemos que el grupo fundamental de  $\mathbb{D}^*$  es  $\mathbb{Z}$ , cuyos únicos subgrupos de índice finito son  $l\mathbb{Z}$  para  $l \in \mathbb{Z}$ , con índice  $|l|$  respectivamente. Por la Proposición 52 podemos concluir que

$$z^{m*}(\pi_1(\mathbb{D}^*)) = m\mathbb{Z} = \tau_*(\pi_1(\mathbb{D}^*)).$$

Luego por el Teorema 54 concluimos que existe un homeomorfismo  $\mu : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^*$ , que hace a la composición  $\tau \circ \mu^{-1}(z) = z^m$  una función la cual es evidentemente holomorfa, vea el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 D_1 \subset Y & \xrightarrow{f} & K \setminus \{b\} \subset X \\
 \downarrow h & & \downarrow \phi_\alpha \\
 \mathbb{D}^* \subset \mathbb{D} & & \mathbb{B}_\epsilon(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{D} \\
 \downarrow \mu & \searrow \tau & \downarrow g \\
 \mathbb{D}^* & \xrightarrow{z^m} & \mathbb{D}^*
 \end{array}$$

$\psi_1$  (curved arrow from  $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{D}$  to  $\mathbb{D}^*$ )

Por lo tanto si definimos  $\psi_1 := h \circ \mu$  y consideramos el espacio  $Y_1 := Y \sqcup_{\psi_1} \mathbb{D}$ , entonces afirmamos que el conjunto  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$  junto con la nueva carta  $(V \sqcup_{\psi_1} \mathbb{D}, \psi_1)$  forman un atlas para  $Y_1$ . En efecto, puesto que  $g \circ \psi_\alpha \circ \psi_1^{-1} = g \circ \phi_\alpha \circ f \circ \psi_1^{-1} = z^m$  es una función holomorfa y se sigue que  $\psi_\alpha \circ \psi_1^{-1}$  es holomorfa. Luego si  $\psi_\beta$  es una carta con dominio  $U_\beta \subset D_1$ , entonces el cambio

de coordenadas  $\psi_\beta \circ \psi_1^{-1} = \phi_\beta \circ f \circ \psi_1^{-1}$  es holomorfo, dado que  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  es un cambio de coordenadas holomorfo.

Con lo anterior hemos finalizado el paso 2, pero notemos que  $Y_1 \setminus Y$  consta de un único punto  $y_1$ , el punto correspondiente a  $0 \in \mathbb{D}$  bajo  $\psi_1$ . Se verifica que  $f$  se extiende de manera continua y por lo tanto de manera holomorfa a la función  $f_1 : Y_1 \rightarrow X \setminus B \cup \{b\}$  dada por  $f_1(y_1) = b$  y  $f_1(y) = f(y)$  para cualquier otro punto  $y \in Y_1$ . También es evidente que  $Y_1$  es segundo numerable, lo único que se necesita verificar para que  $Y_1$  sea una superficie de Riemann, es que  $Y_1$  sea Hausdorff; para ello, bastará demostrar que  $y_1$  puede separarse de cualquier otro punto por abiertos disjuntos. Veremos esto a continuación, si consideremos cualquier otro punto  $y \in Y_1$ , entonces  $f(y) \neq b$ . Luego, como  $X$  es Hausdorff tenemos dos vecindades disjuntas  $Z, W \subset X$  de  $f(y)$  y  $b$  respectivamente, de esta manera  $f^{-1}(Z)$  y  $f^{-1}(W \setminus \{b\}) \cup \{y_1\}$  son vecindades abiertas disjuntas de  $y$  y  $y_1$  respectivamente, por lo que  $Y_1$  es Hausdorff.

- Paso 3. Repetimos el paso 2 para cada componente conexa  $D_2, D_3, \dots, D_r$  de  $f^{-1}(K \setminus \{b\})$  y cada punto  $b \in B$ , haciendo esto obtenemos una superficie de Riemann  $\bar{Y}$  en la cual  $Y$  es densa por construcción. Además, en cada paso obtenemos una extensión holomorfa de  $f$ , por lo tanto la extensión obtenida al final de este proceso finito  $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow X$ , es también una función holomorfa.

Finalmente se puede verificar que  $\bar{Y}$  es compacta, pues  $f$  es una función propia y  $\bar{Y}$  puede verse como unión finita conjuntos compactos (basta tomar la preimagen de pequeños discos compactos alrededor de cada punto  $b \in B$  y analizar su complemento).

□

**Observación 58.** Siguiendo la notación de la prueba anterior del Paso 2, de acuerdo al Lema 34, en el punto  $y_1 \in Y_1$ ,  $\bar{f}$  tiene una multiplicidad definida,  $mult_{y_1}(\bar{f})$ , esta multiplicidad es precisamente el grado del cubriente ramificado definido alrededor de dicho punto.

**Observación 59.** Hemos visto que si  $B$  es el conjunto de valores críticos de una función holomorfa  $f : Y \rightarrow X$  entre superficies de Riemann, entonces  $f : Y \setminus f^{-1}(B) \rightarrow X \setminus B$  es un cubriente topológico. El Teorema 57 da el converso, un cubriente topológico  $f : Y \rightarrow X \setminus B$ , donde  $X$  tiene una estructura compleja, se puede completar a una función holomorfa dotando a  $Y$  de una estructura compleja, agregando los puntos del conjunto  $B$  (los valores críticos) y sus respectivas preimágenes (los puntos críticos y cocríticos).

## 3.2 Cubrientes ramificados de la esfera

Dado que la esfera  $\mathbb{S}^2$  es simplemente conexa<sup>2</sup>, esta posee una única clase de equivalencia de cubrientes topológicos dada por cualquier homeomorfismo  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . En esta

<sup>2</sup>Un espacio  $X$  es simplemente conexo si su grupo fundamental  $\pi_1(X)$  es trivial.

sección estudiamos los posibles cubrientes ramificados de la esfera, que por la Observación 59 y el Teorema 42 es lo mismo que estudiar funciones holomorfas  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ .

El siguiente teorema caracteriza a las funciones holomorfas de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , es un resultado clásico de la teoría de funciones holomorfas, una demostración puede ser consultada en la pág 47 de [11].

**Teorema 60.** *Si  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una función holomorfa, entonces  $f$  es una función racional. Es decir, existen polinomios  $p(z)$  y  $q(z)$  tal que  $f(z) = p(z)/q(z)$ .*

Por todo lo anterior, cualquier cubriente ramificado de la esfera de Riemann por la esfera de Riemann es equivalente a una función racional. Dentro de toda esta familia de cubrientes ramificados nos interesa un tipo particular: los cubrientes de Galois dichos cubrientes destacan entre los demás por el hecho de tener más simetría, esto se traduce en que el grupo de automorfismos de un cubriente de Galois actúa de manera transitiva en la fibra un punto.

En lo subsecuente pensamos a un cubriente ramificado como una función holomorfa finita.

**Definición 61.** Consideramos  $Y_1, Y_2$ , y  $X$  superficies de Riemann. Un *morfismo de cubrientes ramificados*  $f : Y_1 \rightarrow X$   $g : Y_2 \rightarrow X$  es una función holomorfa suprayectiva  $h : Y_1 \rightarrow Y_2$  tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{h} & Y_2 \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & X \end{array}$$

En el caso en el que  $Y_1 = Y_2 = Y$  y  $h : Y_1 \rightarrow Y_2$  es un biholomorfismo decimos que  $h$  es un automorfismo del cubriente ramificado  $f : Y \rightarrow X$ .

**Definición 62.** Dado  $f : Y \rightarrow X$  un cubriente ramificado,  $f$  es un *cubriente de Galois* si el grupo de automorfismos de  $f$ ,  $Aut(f)$ , actúa de manera transitiva en cada fibra  $f^{-1}(x)$  para cada  $x \in X$ , en cuyo caso llamamos a  $Aut(f)$  el *grupo de Galois* del cubriente ramificado  $f$ .

**Ejemplo 63.** La función  $z^m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un cubriente de Galois. El grupo de automorfismos de  $z^m$  es el generado por la rotación del plano complejo por ángulo  $2\pi/m$ . Como las preimágenes de un punto arbitrario  $w \in \mathbb{C}$  son de la forma  $ze^{i\frac{2\pi k}{m}}$  con  $k$  corriendo de 1 a  $m$ , es claro que el grupo de automorfismos actúa de manera transitiva en las fibras de cada punto.

El ser cubriente de Galois tiene varias equivalencias, una de ellas es la siguiente.

**Teorema 64.** (*Caracterización de cubrientes de Galois*). *Si  $f : Y \rightarrow X$  es una función suprayectiva entre variedades proyectivas, entonces  $f : Y \rightarrow X$  es un cubriente de Galois, si y solo si la extensión de campos  $\mathbb{C}(Y)/\mathbb{C}(X)$  es de Galois.*

La demostración del teorema anterior va más allá de los alcances de este texto, el lector interesado puede consultarla en [12].

### 3.2.1 Cubrientes de Galois de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$

En esta sección estudiaremos los cubrientes de Galois de la esfera de Riemann. Resulta que si  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es un cubriente de Galois ramificado, entonces solo puede haber 2 o 3 valores de ramificación como explicamos a continuación. Necesitaremos la siguiente versión de la fórmula de Riemann-Hurwitz.

**Proposición 65.** *Si  $f : Y \rightarrow X$  es un cubriente finito de Galois ramificado con grupo de Galois  $G$ , entonces*

$$\chi(Y) = |G|\chi(X) - |G| \sum_{x \in B} \left(1 - \frac{1}{m_x}\right),$$

donde  $G_y$  es el estabilizador de  $y \in f^{-1}(x)$  en  $G$  y  $m_x := |G_y|$ .

Antes de proceder con la demostración del teorema hacemos la siguiente.

**Observación 66.** Es fácil observar que  $|G_y|$  es la multiplicidad de  $y$ . Hay que notar que  $m_x$  está bien definido puesto que si  $y_1, y_2$  son ambas preimágenes de  $x$  entonces  $y_1$  y  $y_2$  pertenecen a la misma órbita bajo  $G$  por lo que sus estabilizadores  $G_{y_1}, G_{y_2}$  son conjugados, y por lo tanto  $|G_{y_1}| = |G_{y_2}|$ .

*Demostración.* La idea de la prueba es la misma que la del Teorema 45. Como  $G$  actúa de manera transitiva en la fibra de cualquier punto, se sigue que el grado de  $f$  es  $|G|$ . Consideremos una triangulación en  $X$  tal que el conjunto de valores de críticos,  $B$ , sea subconjunto del conjunto vértices. Supongamos que dicha triangulación tiene  $v$  vértices,  $a$  aristas y  $t$  triángulos. Al levantar esta triangulación mediante  $f$ , obtenemos una triangulación con  $v'$  vértices,  $a'$  aristas y  $t'$  triángulos en  $Y$ .

Cada triángulo, se levanta a  $|G|$  triángulos, por lo tanto  $t' = |G|t$ . De igual manera  $a' = |G|a$ . Finalmente cada vértice  $x \in V$  de la triangulación se levanta a  $|yG|$  vértices, donde  $yG$  es la órbita de  $y \in f^{-1}(x)$  bajo la acción de  $G$ . Podemos pensar que cada vértice se levanta a  $|G|$  vértices, exceptuando los vértices que son valores de ramificación, por lo tanto

$$t' - a' + v' = |G|t - |G|a + |G|v' - \sum_{x \in V} (|G| - |yG|).$$

Como  $G$  es finito  $|yG| = \frac{|G|}{|G_y|}$ , entonces

$$\chi(Y) = |G|\chi(X) - |G| \sum_{x \in B} \left(1 - \frac{1}{m_x}\right).$$

□

Ahora bien, si  $f : Y \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es un cubriente finito de Galois con grupo de Galois  $G$ , queremos conocer la topología de  $Y$  en función del número de valores críticos, utilizamos el teorema anterior para tal propósito.

Denotemos con  $k$  al número de valores críticos, siendo  $x_1, x_2, \dots, x_k$  los respectivos puntos.

$(m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3})$	$ G $	$f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$
$(1, m, m)$	$m$	$z \mapsto z^m$
$(2, 2, m)$	$2m$	$z \mapsto z^m + \frac{1}{z^m}$
$(2, 3, 3)$	$12$	$z \mapsto -\frac{1}{2^6} \frac{z^3(z^3-8)^3}{(z^3+1)^3}$
$(2, 3, 4)$	$24$	$z \mapsto \frac{1}{2^2 3^3} \frac{(z^8+14z^4+1)^3}{z^4(z^4-1)^4}$
$(2, 3, 5)$	$60$	$z \mapsto \frac{1}{2^6 3^3} \frac{(z^{20}+228z^{15}+494z^{10}-228z^5+1)^3}{(z^{10}-11z^5-1)^5 z^5}$

Cuadro 3.1: Cubrientes de Galois de la esfera en la esfera

Si  $k = 1$ , entonces  $f : Y \setminus f^{-1}(x_1) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{x_1\}$  es un cubriente topológico sin ramificación y, como  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{x_1\} \cong \mathbb{C}$  es simplemente conexo, se tiene que  $Y \setminus f^{-1}(x_1) \cong \mathbb{C}$ . Por lo anterior  $Y \cong \widehat{\mathbb{C}}$  y  $y = f^{-1}(x_1)$ ; además, por Riemann-Hurwitz se tiene

$$\chi(Y) = |G|\chi(\widehat{\mathbb{C}}) - |G|(1 - \frac{1}{m_{x_1}})$$

de donde  $2 = \chi(Y) = |G|(1 + \frac{1}{m_{x_1}})$  concluimos que  $|G| = 1$  y  $m_{x_1} = 1$ . Esto corresponde a un cubriente topológico (no ramificado). Por lo tanto  $f$  no puede tener un único valor de ramificación.

Si  $k = 2$  y suponemos  $\chi(Y) = 2$  por Riemann-Hurwitz tenemos que  $2 = \chi(Y) = |G|(\frac{1}{m_{x_1}} + \frac{1}{m_{x_2}})$ , de donde  $|G| = \frac{2m_{x_1}m_{x_2}}{m_{x_1}+m_{x_2}}$ , la única posibilidad es  $m_{x_1} = m_{x_2} = m \in \mathbb{N}$ . Este caso corresponde a las funciones  $f$  que son equivalentes a  $z^m$ . Si  $\chi(Y) = 0$ , entonces  $Y$  es el toro. También note que los casos con  $\chi(Y) \leq 0$  son imposibles puesto que  $|G|(\frac{1}{m_{x_1}} + \frac{1}{m_{x_2}}) > 0$ .

Si  $k = 3$ , tenemos que  $\chi(Y) = |G|(\frac{1}{m_{x_1}} + \frac{1}{m_{x_2}} + \frac{1}{m_{x_3}} - 1)$ . Definamos  $s := \frac{1}{m_{x_1}} + \frac{1}{m_{x_2}} + \frac{1}{m_{x_3}}$ , si  $\chi(Y) = 2$  entonces  $|G| = \frac{2}{s-1}$  y  $s > 1$  (el caso  $s = 1$  implica que  $Y$  es el toro). Existen varios valores posibles para  $s$ , por ejemplo si  $(m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}) = (2, 2, m)$ , entonces  $s = 1 + \frac{1}{m}$  y por lo tanto  $|G| = 2m$ . Este caso corresponde a las funciones  $f$  equivalentes a la función  $z \mapsto z^m + \frac{1}{z^m}$  como se explica en [13]. Hay más casos posibles para la terna  $(m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3})$  como se ve muestra en la clasificación del Cuadro 3.1.

La clasificación anterior es debida a Klein (vea [13] y [14] para más detalles) y es una lista completa de los de todos los cubrientes de Galois  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ .

En el caso  $k = 4$  se tiene que  $\chi(Y) = |G|(\frac{1}{m_{x_1}} + \frac{1}{m_{x_2}} + \frac{1}{m_{x_3}} + \frac{1}{m_{x_4}} - 2) < 2$ , por lo que  $Y$  es una superficie de Riemann con característica de Euler negativa o  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2$  en cuyo caso  $Y$  es el toro. El caso  $k > 4$  implica que  $Y$  debe ser una superficie con género mayor a uno.

# Capítulo 4

## Monodromía

Nos interesa conocer el comportamiento global de una función holomorfa de grado finito  $f : Y \rightarrow X$  alrededor de todos sus puntos críticos, esto se conoce como estudiar la monodromía de la función  $f$ . Una manera de hacer esto es estudiar los levantamientos de lazos alrededor de los valores críticos en  $X$ , haciendo esto podemos saber incluso la multiplicidad local de cada punto.

Dada una función holomorfa finita  $f : Y \rightarrow X$  entre superficies de Riemann, consideramos  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \subset X$  el conjunto de sus valores críticos y  $x_0 \in X \setminus B$ . Existe una acción del grupo  $\pi_1(X \setminus B, x_0)$  en el conjunto finito de puntos  $\{f^{-1}(x_0)\} \subset Y$  como explicamos a continuación.

Consideramos un lazo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X \setminus B$ , si escogemos  $y \in f^{-1}(x_0)$ , entonces podemos levantar  $\gamma$  a una trayectoria  $\tilde{\gamma}_y : [0, 1] \rightarrow Y$  con punto inicial  $y$ , además como  $\gamma(1) = x_0$ , se sigue que  $\tilde{\gamma}_y(1)$  es también un punto preimagen de  $x_0$ . Notamos que  $\tilde{\gamma}_y(1)$  solo depende del punto  $y$ , por lo tanto podemos asignar a  $\gamma$  la función

$$\sigma_\gamma : \{f^{-1}(x_0)\} \rightarrow \{f^{-1}(x_0)\}, \quad y \mapsto \tilde{\gamma}_y(1).$$

Es posible verificar que esta función es una biyección de  $F := \{f^{-1}(x_0)\}$ , es decir  $\sigma_\gamma \in \text{Aut}(F)$ . Como el conjunto  $F$  es finito, el grupo  $\text{Aut}(F)$  es isomorfo al grupo simétrico  $\text{Sym}(m)$  con  $m = |F|$ . Además si  $\gamma'$  es otro lazo basado en  $x_0$  el cual es homotópico a  $\gamma$ , entonces  $\sigma_\gamma = \sigma_{\gamma'}$ . Por lo tanto tenemos la representación

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \pi_1(X, x_0) & \rightarrow & \text{Aut}(F) \cong \text{Sym}(m), \\ \gamma & \mapsto & \sigma_\gamma. \end{array}$$

**Observación 67.** Para nuestro estudio nos limitamos al estudio de funciones holomorfas de grado finito, no obstante varias de las ideas que se presentan más adelante sirven para el estudio de funciones holomorfas de grado infinito, como por ejemplo la función

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto e^z.$$

**Definición 68.** La función  $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(F)$  es la *representación de monodromía* de  $f : Y \rightarrow X$ , y el grupo imagen  $\text{Im}(\Phi) \leq \text{Aut}(F)$  es el *el grupo de monodromía* de  $f$ .

**Ejemplo 69.** Consideremos nuevamente la función  $z^m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z^m$  tiene un único punto crítico y un único valor crítico  $0 \in \mathbb{C}$ . Si consideramos el punto base  $1 \in \mathbb{C}$ , entonces el grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) \cong \mathbb{Z}$  está generado solamente por la clase de homotopía de  $\gamma(t) = e^{it}$ , el lazo que recorre la circunferencia unitaria en sentido levógiro. Ahora, como  $\{f^{-1}(1)\} = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{m-1}\}$  donde  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ , entonces es fácil ver que  $\tilde{\gamma}_\omega(1) = \omega^2$ , en general,  $\tilde{\gamma}_{\omega^k}(1) = \omega^{k+1}$ . De esta manera la monodromía de  $f$  está representada por la función

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z} &\rightarrow \text{Sym}(m), \\ 1 &\mapsto \sigma_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ 2 & 3 & \dots & m & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo que, el grupo de monodromía de  $z^m$  es isomorfo al grupo de permutaciones generado por la permutación  $\sigma_\gamma$ .

## 4.1 Visualización de una función afortunada

Para calcular la monodromía de una función necesitamos una herramienta para visualizar el comportamiento de una función de variable compleja  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Para esto utilizamos la idea de asociar un mosaico a una función holomorfa, esta es una idea atribuida a Felix Klein, como puede apreciarse en sus notas propias que utilizaba en sus lecturas y seminarios, las cuales ahora están digitalizadas y pueden consultarse en [15], que permite describir cualitativamente a las funciones “afortunadas” (Definición 70). En lo siguiente denotaremos con  $f : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$ , distinguiendo el dominio  $\hat{\mathbb{C}}_z$  y codominio  $\hat{\mathbb{C}}_w$  de la función  $f$ .

**Definición 70.** Consideramos  $f : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$  una función holomorfa con valores críticos  $B \subset \mathbb{C}_w$ , decimos que  $f$  es una *función afortunada* si existe una línea recta  $\mathfrak{l} \subset \mathbb{C}_w$  tal que  $B \subset \mathfrak{l} \cup \{\infty\}$ , en cuyo caso llamamos a la curva  $\Gamma := \mathfrak{l} \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}_w$  la *curva generadora*.

**Ejemplo 71.** La función  $f : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$  dada por  $z \mapsto z^2$  es una función afortunada pues el conjunto de valores críticos es  $B = \{0, \infty\}$ , por lo que basta tomar como curva generadora al conjunto  $\Gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \supset B$ .

Procedemos a explicar el algoritmo de visualización de Klein para funciones holomorfas afortunadas de grado finito. Si  $f : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$  es una función holomorfa afortunada de grado finito, entonces la curva generadora  $\Gamma \subset \hat{\mathbb{C}}_w$  es una curva cerrada simple, que por el teorema de la curva de Jordan divide a la esfera de Riemann en dos componentes conexas, cada una homeomorfa a una bola abierta  $\mathbb{B}$ . Asignamos una orientación a  $\Gamma$  y coloreamos la componente del lado izquierdo de  $\Gamma$  de color azul y la otra componente de color blanco. De esta manera obtenemos una descomposición

$$\hat{\mathbb{C}}_w = \mathfrak{m}_a \cup \mathfrak{m}_b \cup \Gamma$$

donde  $\mathbf{m}_a$  es la componente coloreada de azul y  $\mathbf{m}_b$  es la componente coloreada de blanco. Luego, como todos los valores críticos de  $f$  están en  $\Gamma$ , tenemos que

$$f : f^{-1}(\mathbf{m}_a) \rightarrow \mathbf{m}_a$$

es un cubriente finito, de hecho cada componente conexa de  $f^{-1}(\mathbf{m}_a)$  es enviada de manera biholomorfa en  $\mathbf{m}_a$ , de manera similar sucede con  $f : f^{-1}(\mathbf{m}_b) \rightarrow \mathbf{m}_b$ . Por lo que tenemos la descomposición

$$\widehat{\mathbb{C}}_z = f^{-1}(\mathbf{m}_a) \cup f^{-1}(\mathbf{m}_b) \cup f^{-1}(\Gamma)$$

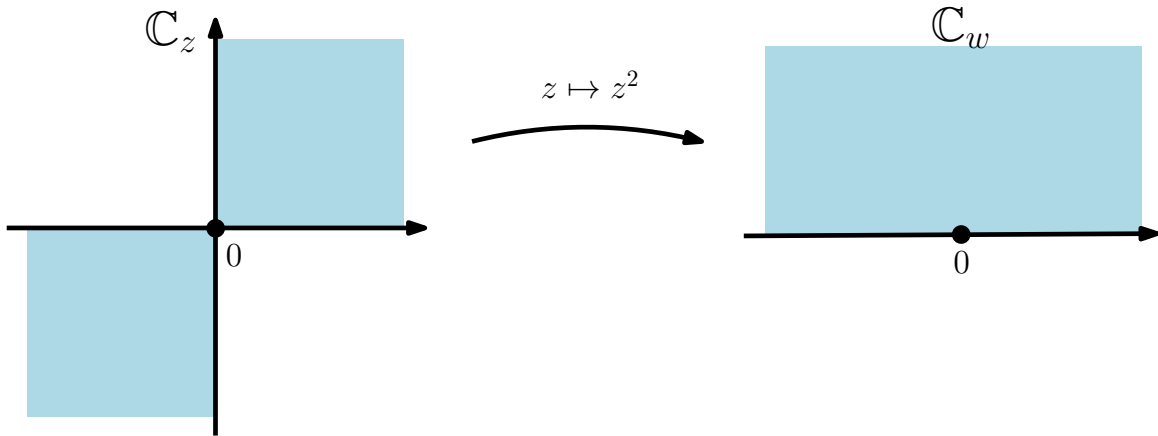


Figura 4.1: Mosaico asociado a la función  $f(z) = z^2$ .

que consiste en  $m = \deg(f)$  componentes conexas azules, correspondientes a  $f^{-1}(\mathbf{m}_a)$ ;  $m$  componentes blancas, correspondientes a  $f^{-1}(\mathbf{m}_b)$  y a la preimagen de la curva generadora bajo  $f$ , la cual es una curva cerrada no simple. A esta descomposición la llamamos “mosaico” y decimos que esta formado por “losetas” azules y blancas. Esta visualización de  $f$  nos será útil para el cálculo de monodromía de funciones afortunadas. En la figura 4.1 ilustramos el mosaico asociado a la función  $f(z) = z^2$ .

#### 4.1.1 Cálculo de monodromía de una función afortunada

En esta parte del texto explicamos un algoritmo para calcular el punto final del levantamiento de un lazo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}_w$ , bajo una función afortunada, utilizando el mosaico asociado a esta, de esta manera podremos calcular la monodromía de  $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ .

Salvo un automorfismo de  $\widehat{\mathbb{C}}$  podemos suponer que la curva generadora coincide con el eje real  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Luego, ordenamos los valores críticos  $b_1 < b_2 < \dots < b_n \neq \{\infty\}$ . Esto sugiere la descomposición de la curva generadora en  $n + 1$  segmentos:

$$\Gamma = (-\infty, b_1] \cup [b_1, b_2] \cup \dots \cup [b_n, \infty].$$

Notemos también que la frontera de cada loseta del mosaico es enviada de manera biyectiva a  $\Gamma$ , por lo que si  $\partial\mathcal{L}$  es la frontera de una loseta  $\mathcal{L}$ , entonces dicha frontera también se descompone en  $n + 1$  segmentos, es decir:

$$\partial\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} \cap [f^{-1}((-\infty, b_1]) \cup f^{-1}([b_1, b_2]) \cup \dots \cup f^{-1}([b_n, \infty))]$$

Si elegimos el punto base  $i \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ , entonces el grupo fundamental  $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus \{b_1, \dots, b_n\}, i)$  esta generado por  $n$  lazos alrededor de cada valor crítico Figura 4.2 bajo una relación entre ellos, esto es

$$\pi_1(\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus \{b_1, \dots, b_n\}, i) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \mid \gamma_1 \bullet \gamma_2 \bullet \dots \bullet \gamma_n = e \rangle.$$

Como la función de monodromía es una representación, cumple que  $\Phi(\gamma^{-1}) = \Phi(\gamma)^{-1}$

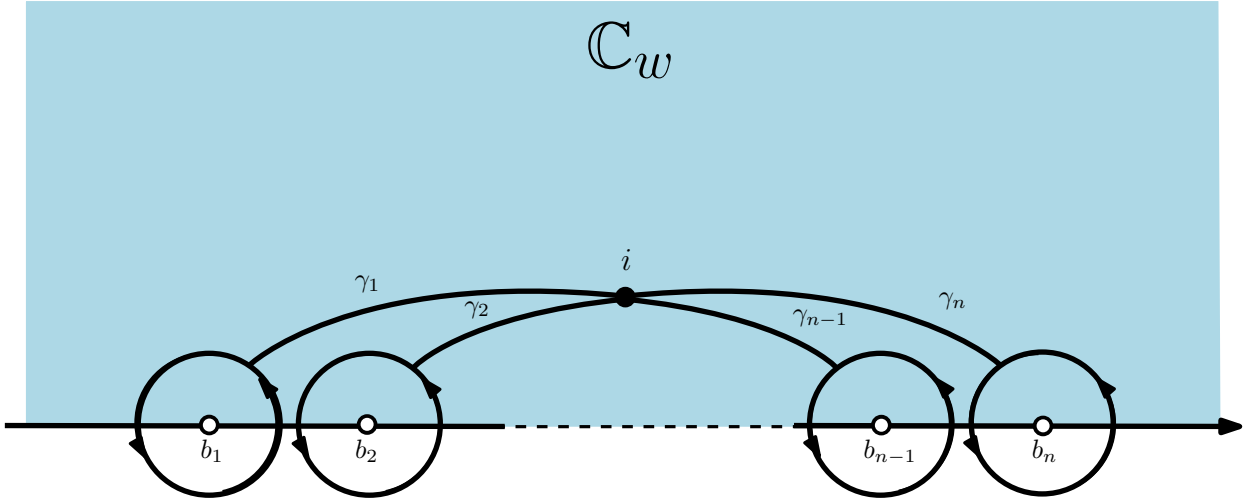


Figura 4.2: Lazos generadores del grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{C}_w \setminus \{b_1, \dots, b_n\}, i)$ .

y  $\Phi(\gamma_k \bullet \gamma_j) = \Phi(\gamma_j) \circ \Phi(\gamma_k)$  para cualesquiera  $\gamma, \gamma_k, \gamma_j \in \pi_1(\mathbb{C}_w \setminus \{b_1, \dots, b_n\}, i)$ , por lo tanto para calcular la monodromía de  $f$ , se necesita calcular el punto final del levantamiento de cada lazo generador, fijando como punto inicial cada uno de los puntos de la fibra de  $i$ , es decir, basta calcular el punto  $\widetilde{\gamma}_{k,y}(1)$  para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$  y cada  $y \in f^{-1}(i)$ .

Olvidamos el subíndice  $k$  en  $\gamma_k$  por simplicidad en la notación y consideramos el lazo generador  $\gamma$  con punto inicial  $i \in \mathbb{C}_w$  alrededor de  $b_1$ . Notemos que  $\gamma \subset \mathbb{C}_w$  cruza dos veces la curva generadora; una vez cruzando por el segmento  $(-\infty, b_1]$  saliendo de la región azul  $\mathfrak{m}_a$  y otra vez a través del segmento  $[b_1, b_2]$  regresando a  $\mathfrak{m}_a$ .

Fijamos un punto  $y \in \{f^{-1}(i)\}$ . Si ahora consideramos el levantamiento de  $\gamma$  con punto inicial  $y$ , se sigue lo siguiente:

- i)  $\mathcal{L}_a$  la loseta que contiene al punto  $y \in \{f^{-1}(i)\}$  es de color azul.
- ii) Si descomponemos la frontera de  $\mathcal{L}_a$ ,  $\partial\mathcal{L}_a$ , en  $n + 1$  segmentos (disjuntos salvo en los puntos finales), entonces a cada uno de estos segmentos le corresponde un único segmento de la curva generadora del cual es preimagen.

- iii) El levantamiento de  $\gamma$  basado en  $y$ ,  $\tilde{\gamma}_y \subset \mathbb{C}_z$ , empieza en la loseta azul  $\mathcal{L}_a$  y cruza hacia una loseta blanca  $\mathcal{L}_b$  a través del segmento correspondiente a  $f^{-1}((-\infty, b_1]) \cap \partial\mathcal{L}_a$ .
- iv) Posteriormente  $\tilde{\gamma}_y$  parte de la loseta blanca  $\mathcal{L}_b$  y cruza hacia una loseta azul  $\mathcal{L}'_a$  (posiblemente distinta a  $\mathcal{L}_a$ ), a través del segmento correspondiente a  $f^{-1}([b_1, b_2]) \cap \partial\mathcal{L}_b$ .

Concluimos que el punto  $\tilde{\gamma}_y(1)$  es el único punto  $y'$  en la intersección  $(\mathcal{L}'_a \cap f^{-1}(i))$ , notemos que  $y' = y$  si y solo si  $\mathcal{L}'_a = \mathcal{L}_a$ . Por lo que para calcular el punto final del levantamiento de un lazo generador, basta seguir cuidadosamente el comportamiento anterior.

Finalizamos realizando el análisis anterior para una función en particular.

**Ejemplo 72.** Consideremos la función  $g : \hat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$  dada por  $z \mapsto \frac{z^4}{4} - z^2$ . Los valores críticos de  $g$  son  $\{-1, 0, \infty\}$ ; por lo tanto  $g$  es afortunada. Los puntos críticos de  $g$  son  $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \infty\}$  y los puntos cocríticos son  $\{-2, 2\}$ . La función  $g$  tiene el mosaico asociado como el de la Figura 4.3, donde  $f^{-1}(i) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ .

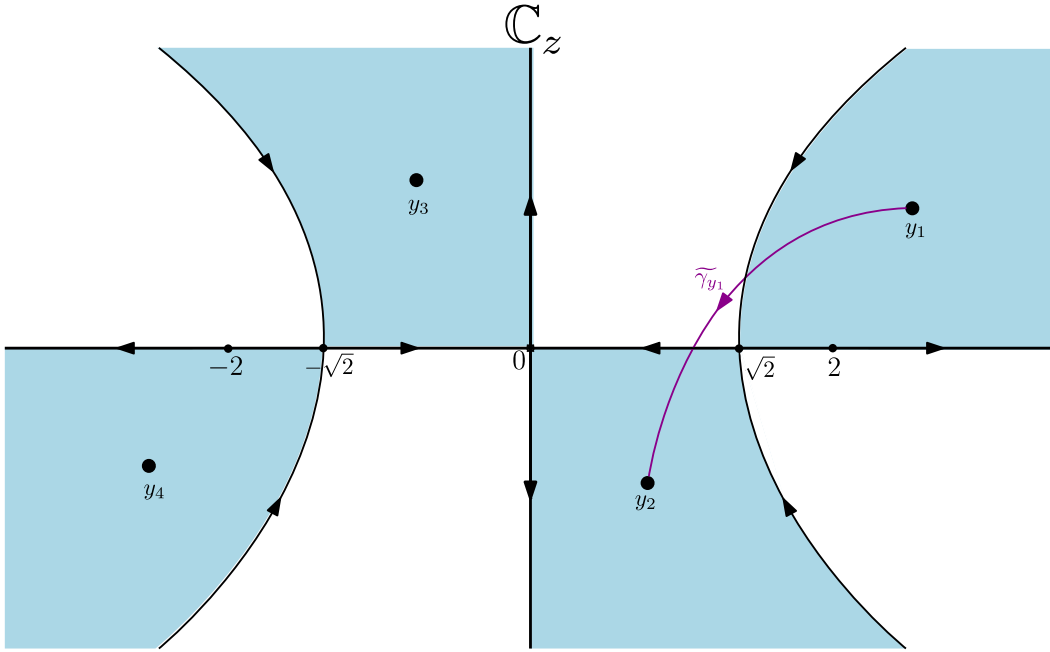


Figura 4.3: Mosaico en  $\mathbb{C}_z$  bajo la función  $g$ .

Luego, denotamos  $\gamma_1$  el lazo generador basado en  $i$  alrededor de  $-1$  y escogemos  $y_1$  en la preimagen de  $i$  bajo  $f$  como punto inicial del levantamiento de  $\gamma_1$ . Dado que  $\gamma_1$  está orientado en sentido positivo  $\gamma_1$  cruza primero el intervalo  $(-\infty, -1]$  y después el intervalo  $[-1, 0]$ , por lo tanto su levantamiento  $\tilde{\gamma}_{1y_1}$  basado en  $y_1$ , primero cruza la

preimagen el segmento de curva que va de  $\infty$  a  $\sqrt{2}$  en el semiplano superior pues este segmento de curva corresponde al intervalo  $(-\infty, -1]$  bajo  $f$  y luego vuelve a cruzar por el intervalo  $[0, \sqrt{2}]$  que corresponde al intervalo  $[-1, 0]$ , vea la Figura 4.3. Como el levantamiento  $\widetilde{\gamma}_{1y_1}$  debe terminar en la región que entró por segunda vez, entonces podemos concluir que  $\widetilde{\gamma}_{1y_1}(1) = y_2$ .

Si ahora levantamos  $\gamma_1$  iniciando en el punto  $y_2$ , entonces  $\widetilde{\gamma}_{1y_2}$  primero cruza la preimagen de la curva generadora por el segmento de curva que va de 0 a  $\infty$  en el semiplano inferior, y luego cruza por el intervalo  $[0, \sqrt{2}]$  regresando a la región donde se encuentra el punto  $y_1$ , concluimos que  $\widetilde{\gamma}_{1y_2}(1) = y_1$ . De manera análoga calculamos  $\widetilde{\gamma}_{1y_3}(1) = y_4$  y  $\widetilde{\gamma}_{1y_4}(1) = y_3$ .

Por lo anterior, la función de monodromía  $\Phi$  de la función  $g$  es tal que

$$\Phi(\gamma_1) = \sigma_{\gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para los otros lazos generadores procedemos de manera similar. Denotamos  $\gamma_2$  el lazo generador alrededor de 0. Dicho lazo cruza la curva generadora en el intervalo  $[-1, 0]$  y luego en el intervalo  $[0, \infty]$ , por lo tanto su levantamiento  $\widetilde{\gamma}_{2y_1}$  basado en el punto  $y_1$ , primero cruza la curva generadora por el intervalo  $[\sqrt{2}, 2]$  el cual corresponde a  $[-1, 0]$  bajo  $f$  y posteriormente de manera análoga cruza por el intervalo  $[2, \infty)$ , volviendo a la región donde pertenece  $y_1$ , por lo que  $\widetilde{\gamma}_{2y_1}$  es un lazo ( $\widetilde{\gamma}_{2y_1}(1) = y_1$ ). Siguiendo el mismo procedimiento para los demás puntos en la fibra de  $i$  encontramos que  $\widetilde{\gamma}_{2y_4}(1) = y_4$ ,  $\widetilde{\gamma}_{2y_2}(1) = y_3$  y  $\widetilde{\gamma}_{2y_3}(1) = y_2$ . Por lo que la función de monodromía es tal que

$$\Phi(\gamma_2) = \sigma_{\gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por último notemos que el lazo generador restante es  $\gamma_3$  el lazo generador alrededor de  $\infty$ . Dicho lazo cumple la relación  $\gamma_3 = (\gamma_1 \bullet \gamma_2)^{-1}$  por lo que  $\Phi(\gamma_3) = \Phi(\gamma_1) \circ \Phi(\gamma_2)$  de donde

$$\Phi(\gamma_3) = \sigma_{\gamma_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que el grupo de monodromía de la función  $g$  es isomorfo a un subgrupo de permutaciones, generado por las permutaciones  $\sigma_{\gamma_1}$ ,  $\sigma_{\gamma_2}$  y  $\sigma_{\gamma_3}$ .

# Bibliografía

- [1] William Abikoff. The uniformization theorem. *The American Mathematical Monthly*, 88(8):574–592, 1981.
- [2] James Munkres. *General Topology*. Prentice Hall, 1975.
- [3] Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. GSM, volume 4. American Mathematical Soc., 1995.
- [4] Ralph H. Fox. Covering spaces with singularities. In *Algebraic Geometry and Topology: A Symposium in Honor of S. Lefschetz*, pages 243–257. Princeton University Press, 1957.
- [5] José María Montesinos-Amilibia. Open 3-manifolds and branched coverings: a quick exposition. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 41:287 – 302, 2007.
- [6] José Maria Montesinos-Amilibia. Propiedades topológicas básicas de las cubiertas ramificadas de Fox. In *Contribuciones Matemáticas. Homenaje al Profesor Enrique Outerelo Domínguez*, pages 315–332. Editorial Complutense, Madrid, 2004.
- [7] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [8] Carsten Thomassen. The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. *The American Mathematical Monthly*, 99:116–130, 1992.
- [9] Hans Grauert and Reinhold Remmert. *Coherent Analytic Sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [10] Renzo Cavalieri and Eric Miles. *Riemann Surfaces and Algebraic Curves*, volume 87. Cambridge University Press, 2016.
- [11] Maxim E. Kazaryan, Sergei K. Lando, and Victor V. Prasolov. *Algebraic Curves: Towards Moduli Spaces*. Springer, 2019.
- [12] Askold Khovanskii. *Galois Theory, Coverings, and Riemann Surfaces*. Springer-Link : Bücher. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [13] Fedor Pakovich. On rational functions whose normalization has genus zero or one. *arXiv preprint arXiv:1609.03482*, 2016.

- 
- [14] Felix Klein. *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree*. Dover, 1956.
- [15] Felix Klein. Klein Protokolle. <https://www.claymath.org/publications/klein-protokolle>. [Digitalized by Clay Mathematics Institute].
- [16] José María Montesinos-Amilibia. Branched coverings after fox. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Tercera Serie*, 11:19–64, 2005.