



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

*DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA*

“ANÁLISIS MULTIPARAMETRICO DE  
BIFURCACIONES EN SISTEMAS ELECTRICOS”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA

PRESENTA

ING. HECTOR RAMIRO CARVAJAL PEREZ

ASESOR

DR. CLAUDIO RUBÉN FUERTE ESQUIVEL

MORELIA, MICHOACÁN

AGOSTO DEL 2007



## **Resumen**

En esta tesis se estudia las inestabilidades no lineales, incluyendo colapso de voltaje, que ocurren en los sistemas eléctricos de potencia al variar uno o más parámetros del sistema. El análisis está basado en la teoría de dinámica no lineal y bifurcaciones. Se muestra que la aplicación de controles de excitación del generador y del Compensador Estático Síncrono (StatCom) elimina algunas de las bifurcaciones e incrementan el punto de máxima cargabilidad del sistema de potencia. Un estudio basado en análisis de bifurcaciones al variar más de un parámetro del sistema de potencia es desarrollado para encontrar la causa de la presencia de un agujero inestable dentro de una región que se suponía era estable. También se muestra que la aparición del agujero inestable dentro de la región de estabilidad es causada por dos bifurcaciones Hopf degeneradas. Además se muestra que el uso de controles de excitación del generador y del StatCom retrasa la aparición del agujero inestable dentro de la región de estabilidad.

## **Abstract**

Non-linear instabilities, including voltage collapse, occurring in electric power systems due to continuous quasi-static changes in one or more of its parameters are studied in this thesis. The analysis is based on the nonlinear dynamical and bifurcation theories. It is shown that the application of both generator's excitation control and the Synchronous Static Compensator (StatCom) can eliminate some of the bifurcations and increase the maximum point of system's loadability. A study based on multiparameter bifurcations analysis is developed to assess the cause of the occurrence of an unstable hole inside a region that was supposed stable. It is shown that the occurrence of this hole is due to the collision of two degenerated Hopf bifurcations. It is also shown that the use of both generator's excitation control and the StatCom retards the appearance of the unstable hole inside the stability region.

# Contenido

Resumen .....	i
Abstract.....	ii
Contenido .....	iii
Simbología y abreviaciones.....	vii
Lista de figuras .....	xi
Lista de tablas .....	xvii
<b>Capítulo 1 .....</b>	<b>1</b>
<b>Introducción .....</b>	<b>1</b>
1.1    Introducción.....	1
1.2    Estado Del Arte .....	2
1.3    Objetivo .....	4
1.4    Justificación .....	4
1.5    Planteamiento Del Problema. ....	5
1.6    Estructura De La Tesis. ....	6
<b>Capítulo 2 .....</b>	<b>7</b>
<b>Modelado de sistemas eléctricos de potencia .....</b>	<b>7</b>
2.1    Introducción.....	7
2.2    Modelado de Componentes .....	7
2.2.1 <i>Generador síncrono</i> .....	7
2.2.2 <i>Sistemas de excitación</i> .....	14
2.2.3 <i>Red de transmisión</i> .....	15
2.2.4 <i>Cargas</i> .....	17
2.2.5 <i>StatCom</i> .....	20
2.3    Ecuaciones del Sistema General.....	25
2.3.1 <i>Puntos de equilibrio y su estabilidad</i> .....	26
2.3.2 <i>Relación entre estabilidad de puntos de equilibrio y bifurcaciones</i> .....	28
2.3.3 <i>Teorema de Schur</i> .....	29

2.3.4	<i>Modelo equivalente de un sistema por ecuaciones algebraicas</i> .....	31
2.3.5	<i>Modelo equivalente de un sistema por ecuaciones diferenciales</i> .....	31
<b>Capítulo 3</b> .....		<b>33</b>
<b>Teoría de Bifurcaciones</b> .....		<b>33</b>
3.1	Introducción.....	33
3.2	Sistema dinámico.....	34
3.3	Sistemas de tiempo discreto .....	34
3.4	Sistemas de tiempo continuo .....	35
3.4.1	<i>Sistema no autónomo</i> .....	35
3.4.2	<i>Sistema autónomo</i> .....	37
3.4.3	<i>Retratos de fase y flujo</i> .....	38
3.5	Puntos de equilibrio y su estabilidad .....	39
3.5.1	<i>Sistemas de tiempo continuo</i> .....	39
3.5.2	<i>Linealización del punto de equilibrio</i> .....	40
3.6	Puntos periódicos y su estabilidad.....	43
3.7	Bifurcación .....	46
3.8	Bifurcaciones Locales.....	47
3.8.1	<i>Bifurcación saddle-node</i> .....	48
3.8.2	<i>Bifurcación Hopf</i> .....	51
3.8.3	<i>Bifurcación Hopf degenerada</i> .....	56
3.9	Bifurcaciones Globales.....	67
3.9.1	<i>Mapa de Poincaré</i> .....	68
3.9.2	<i>Bifurcación Toroidal (TRB)</i> .....	71
3.9.3	<i>Bifurcación de Doble Periodo (PDB)</i> .....	72
<b>Capítulo 4</b> .....		<b>74</b>
<b>Análisis monoparametrico de bifurcaciones en un sistema eléctrico de 3 nodos.</b> .....		<b>74</b>
4.1	Introducción.....	74
4.2	Análisis del modelo clásico del sistema eléctrico .....	75
4.3	Modelo clásico del sistema eléctrico con sistema de excitación rápido.....	80
4.4	Modelo clásico del sistema eléctrico con StatCom .....	92

4.5	Modelo clásico del sistema eléctrico con StatCom y sistema de excitación .....	100
<b>Capítulo 5</b>	.....	<b>110</b>
<b>Análisis de bifurcaciones multiparametricas</b>	.....	<b>110</b>
5.1	Introducción.....	110
5.2	Bifurcación Hopf inducida por los controladores de un CEV.....	110
5.2.1	<i>Sistema eléctrico de potencia sin el CEV variando un parámetro del sistema.....</i>	111
5.2.2	<i>Sistema eléctrico de potencia con el CEV variando un parámetro del sistema.....</i>	115
5.2.3	<i>Sistema eléctrico de potencia con el CEV variando más de dos parámetros .....</i>	119
5.3	Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica tipo II y sistema de excitación rápido en el generador sin limitador de voltaje de campo.....	122
5.3.1	<i>Región de estabilidad a pequeña perturbación.....</i>	130
5.3.2	<i>Relación entre la aparición del agujero inestable y bifurcaciones Hopf degeneradas.....</i>	133
5.3.3	<i>Evaluación del agujero inestable en la región de estabilidad .....</i>	138
5.4	Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica tipo II y sistema de excitación rápido en el generador con diferentes valores del limitador de campo. ....	143
5.4.1	<i>Caso de estudio con Efrdlim=3 .....</i>	145
5.4.2	<i>Caso de estudio con Efrdlim=4 .....</i>	153
5.4.3	<i>Caso de estudio con Efrdlim=5 .....</i>	160
5.4.4	<i>Análisis de resultados.....</i>	167
5.5	Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica tipo II incluyendo un StatCom en paralelo con la carga. ....	168
5.5.1	<i>Inyección de potencia reactiva con un valor de <math>Q_{ac}=0.2pu</math>.....</i>	172
5.5.2	<i>Inyección de potencia reactiva con un valor de <math>Q_{ac}=0.3pu</math>.....</i>	181
5.5.3	<i>Inyección de potencia reactiva con un valor de <math>Q_{ac}=0.3pu</math>.....</i>	188
5.5.4	<i>Análisis de resultados.....</i>	195
<b>Capitulo 6</b>	.....	<b>198</b>

<b>Conclusiones, aportaciones y trabajos futuros .....</b>	<b>198</b>
6.1 Conclusiones.....	198
6.2 Aportaciones.....	199
6.3 Trabajos futuros.....	199
<b>Referencias .....</b>	<b>201</b>
<b>Apéndices</b>	
Apéndice A.....	205
Apéndice B.....	213
Apéndice C.....	220
Apéndice D.....	222

## Simbología y abreviaciones

XPPAUT	Software de simulación de sistemas dinámicos (X-Windows Phase Plane Plus Auto).
$\omega$	Velocidad angular del rotor.
$M$	Momento de inercia del generador.
$P_m$	Potencia mecánica de entrada al generador.
$P_{ge}$	Potencia eléctrica activa de salida del generador.
$D$	Coefficiente de amortiguamiento.
$D\omega$	Potencia de amortiguamiento del generador.
$\delta$	Angulo de voltaje en el nodo interno del generador.
$\theta$	Angulo de voltaje en los nodos de la red de transmisión.
$E$	Magnitud de voltaje del nodo interno.
$V$	Magnitud de voltaje del nodo del sistema de transmisión.
$Y_{ij}$	Magnitud de la admitancia de la línea de transmisión.
$G_{ij}$	Conductancia de la línea de transmisión.
$B_{ij}$	Susceptancia de la línea de transmisión.
$E_{fd}$	Voltaje de campo del generador.
$T'_{do}$	Constante de tiempo transitoria del generador en el eje directo.
$ E $	Magnitud de voltaje interno en estado estable.
$ E' $	Magnitud de voltaje interno en estado transitorio.
$x_d$	Reactancia en el eje directo.
$x'_d$	Reactancia transitoria en el eje directo.
$V_a$	Voltaje en terminales del generador.
$K_A$	Ganancia del sistema de excitación.
$T_A$	Constante de tiempo del sistema de excitación.
$V_{ref}$	Voltaje de referencia.
$E_{fd0}$	Punto de operación inicial de $E_{fd}$ .

$E_{fdrr}$	Voltaje de campo del generador controlado por el excitador rápido.
$E_{fd \min}, E_{fd \max}$	Limites mínimo y máximo en el voltaje de campo del sistema de excitación.
$E_{fdr}$	Voltaje de campo limitado.
$E_{fdrlim}$	Constante para el modelado de los límites del voltaje de campo.
$P$	Potencia activa.
$Q$	Potencia reactiva.
$a_1, \dots, a_6$	Constantes del modelo polinomial para las potencias real y reactiva.
$P_0, Q_0$	Potencias real y reactiva nominales.
$V_0$	Voltaje nominal.
$f, f_0$	Frecuencia del voltaje de bus y frecuencia nominal.
$a_f$	Parámetro de sensibilidad de la frecuencia del modelo.
$z(t)$	Vector de variables de estado del nodo de carga.
$L_d$	Demanda nominal (MVA) en el bus de carga.
$pf$	Factor de potencia.
$P_L, Q_L$	Potencia activa y reactiva de la carga.
$D, a, b, k$	Constantes de tiempo de la carga dinámica.
$P_1, Q_1$	Potencias constantes activa y reactiva del modelo de carga dinámica tipo II.
$P_0, Q_0$	Potencias constantes activa y reactiva del motor de inducción del modelo de carga dinámica tipo II.
$K_{pw}, K_{pv}, T$	Constantes de carga del modelo de carga dinámica tipo II.
$K_{qw}, K_{qv}, K_{qv2}$	Constantes de carga del modelo de carga dinámica tipo II.
$R_s, L_s$	Resisten e inductancia que representan las perdidas del transformador trifásico que conectan al StatCom con el sistema de potencia.
$E_{abc}$	Voltaje de fase en el lado de $ac$ del inversor.
$V_{abc}$	Voltajes del lado del sistema de potencia.
$V_{dc}$	Voltaje en el capacitor del StatCom.
$k$	Índice de modulación.

$\alpha$	Angulo de fase del voltaje inyectado por el StatCom.
$R_{dc}$	Resistencia que representa las perdidas por conmutación del StatCom.
$\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$	Variabes de estado del Control del StatCom.
$k_1, \alpha_1$	Índice de modulación y ángulo de fase del limitador del StatCom.
$Q_{ac}, Q_{ac}^*$	Potencia reactiva del sistema de potencia y de referencia.
$k_{lim}, \alpha_{lim}$	Limites del índice de modulación y ángulo de fase del StatCom.
$\dot{x}$	Vector de variables de estado dinámicas.
$y$	Vector de variables instantáneas o algebraicas del sistema.
$\lambda$	Vector de los parámetros del sistema que se varían cuasiestaticamente.
$f$	Conjuntote ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
$g$	Conjunto de ecuaciones algebraicas.
$\lambda_e$	Valor especifico de los parámetros del sistema en el punto de equilibrio.
$P_e$	Punto de equilibrio.
$J$	Matriz Jacobiana.
$J_x$	Matriz Jacobiana asociada con un modelo dinámico equivalente.
$J_y$	Matriz Jacobiana asociada con un modelo algebraico equivalente.
$\mathfrak{R}^n$	Espacio de estado o espacio de fase.
$\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1$	Espacio de estado extendido.
EDA	Ecuaciones diferencial-algebraicas.
EDO	Ecuaciones diferenciales ordinarias.
$t$	Tiempo.
$\Gamma$	Orbita.
$T$	Periodo.
$\rho$	Parámetros auxiliares del sistema.
$\mu_c$	Parámetro de bifurcación critico.
$H_{0m}, H_{n0}$	Tipo de degeneración de la bifurcación Hopf.
SNB	Bifurcación Saddle-node.
UHB	Bifurcación Hopf subcrítica.
SHB	Bifurcación Hopf supercrítica.

TRB	Bifurcación toroidal.
PDB	Bifurcación de doble periodo.

## Lista de figuras

Figura 2.1 Sistema multimáquina. ....	9
Figura 2.2 Diagrama fasorial de la maquina síncrona conectada a un bus infinito. ....	12
Figura 2.3 Generador conectado a un bus infinito. ....	13
Figura 2.4 Generador conectado a un nodo que no es referencia. ....	14
Figura 2.5 Diagrama de bloques del excitador rápido limitado. ....	15
Figura 2.6 Circuito equivalente del Statcom. ....	21
Figura 2.7 Control del Statcom ....	24
Figura 3.1 Comportamiento de un sistema no autónomo. ....	36
Figura 3.2 Orbitas de un sistema autónomo en el espacio de fase. ....	38
Figura 3.3 Ciclo limite estable. ....	45
Figura 3.4 Ciclo limite inestable. ....	46
Figura 3.5 Dirección del flujo cuando $\mu > 0$ ....	49
Figura 3.6 Dirección del flujo cuando $\mu = 0$ ....	50
Figura 3.7 Dirección del flujo cuando $\mu < 0$ ....	50
Figura 3.8 Diagrama de bifurcación saddle-node. ....	51
Figura 3.9 Posición del eigenvalor critico en una bifurcación Hopf. ....	52
Figura 3.10 Planos de fase de una bifurcación Hopf supercrítica. ....	54
Figura 3.11 Diagrama de bifurcación de una Hopf supercrítica. ....	54
Figura 3.12 Plano de fase de una bifurcación Hopf subcrítica. ....	55
Figura 3.13 Diagrama de bifurcación de una Hopf subcrítica. ....	56
Figura 3.14 Diagrama de bifurcación correspondiente a (3.30) y (3.32) respectivamente ..	62
Figura 3.15 Diagrama de bifurcación correspondiente a (3.34) y (3.36) respectivamente ..	63
Figura 3.16 Diagrama de bifurcación correspondiente a (3.40) y (3.42) respectivamente. ..	65
Figura 3.17 Diagrama de bifurcación correspondiente a la ecuación (3.44). ....	66
Figura 3.18 Mapa de Poincaré. ....	69
Figura 3.19 Tres casos de los multiplicadores de floquet cruzando el círculo unitario. ....	70
Figura 3.20 Bifurcación toroidal. ....	71
Figura 3.21 Diagrama de fase de bifurcación de doble periodo de Moon y Rand. ....	73

Figura 4.1 Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica.....	75
Figura 4.2 Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables.....	78
Figura 4.3 Diagrama de bifurcación mostrando los diferentes tipos de bifurcación.....	78
Figura 4.4 Comportamiento de la variables del sistema en $Q_1 = 10 pu$ .....	80
Figura 4.5 Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables .....	83
Figura 4.6 Comportamiento de las variables del sistema en $Q_1=10 pu$ .....	84
Figura 47 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia.....	85
Figura 4.8 Soluciones periódicas inestables surgiendo de la bifurcación Hopf. ....	85
Figura 4.9 Ciclo limite creado en la bifurcación Hopf ( $UHB_1$ ).....	87
Figura 4.10 Oscilaciones de magnitud de voltaje $Q_1 = 14.0010 pu$ .....	87
Figura 4.11 Colapso de magnitud de voltaje en $Q_1 = 14.0176 pu$ .....	88
Figura 4.12 Magnitud de voltaje en $Q_1 = 13.7041 pu$ .....	88
Figura 4.13 Colapso de magnitud de voltaje en $Q_1 = 13.6495 pu$ .....	89
Figura 4.14 Colapso de magnitud de voltaje en $Q_1 = 13.2174 pu$ .....	89
Figura 4.15 Comportamiento de la magnitud de voltaje en $Q_1 = 12.1290 pu$ .....	90
Figura 4.16 Diagramas de bifurcación con y sin excitador automático. ....	91
Figura 4.17 Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica y StatCom.....	92
Figura 4.18 Diagrama de bifurcación con $Q_{ac}^* = 0.0001 pu$ .....	95
Figura 4.19 Comportamiento de las variables en $Q_1 = 10 pu$ .....	96
Figura 4.20 Diagrama de bifurcación con un valor de $Q_{ac}^* = 0.0001 pu$ .....	97
Figura 4. 21 Soluciones periódicas emergiendo de la bifurcación Hopf subcrítica. ....	98
Figura 4.22 Diagrama de bifurcación para diferentes valores de $Q_{ac}^*$ .....	98
Figura 4.23 Diagrama de bifurcación con $Q_{ac}^* = 0.4 pu$ .....	99
Figura 4.24 Comportamiento de las variables del sistema con un valor de $Q_{ac}^* = 0.4 pu$ ..	100
Figura 4.25 Sistema de potencia con sistema de excitación en el generador y StatCom. ..	101
Figura 4.26 Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables.....	103
Figura 4.27 Comportamiento de las variables del sistema $Q_1=10 pu$ .....	105
Figura 4.28 Diagrama de bifurcación con un valor de $Q_{ac}^* = 0.001 pu$ .....	105

Figura 4.29 Soluciones periódicas emergiendo de $UHB_1$ .	106
Figura 4.30 Diagrama de bifurcación para diferentes valores de potencia reactiva.	107
Figura 4. 31 Diagrama de bifurcación para un valor de $Q_{ac}^* = 0.4 pu$ .	108
Figura 4.32 Comportamiento de las variables de estado para $Q_{ac}^* = 0.4 pu$ .	109
Figura 5.1 Sistema eléctrico de potencia generador a carga dinámica.	111
Figura 5.2 Diagrama de bifurcación del sistema eléctrico de potencia sin CEV.	113
Figura 5.3 Colapso de voltaje inducido por la bifurcación SNB en el sistema sin el CEV	114
Figura 5.4 Posición de los eigenvalores del sistema eléctrico de potencia sin CEV.	115
Figura 5.5 Sistema eléctrico de potencia generador a carga dinámica con CEV.	115
Figura 5.6 Diagrama de control del CEV.	116
Figura 5.7 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia con CEV.	117
Figura 5.8 Colapso de voltaje inducido por la bifurcación Hopf.	118
Figura 5.9 Posición de los eigenvalores del sistema de potencia con el CEV.	119
Figura 5.10 Máximo valor de carga $P_{dUHB}^{max}$ parametrizado con respecto a $M$ y $\tau$ .	120
Figura 5.11 Máximo valor de carga $P_{dUHB}^{max}$ parametrizado con respecto a $T$ y $\tau$ .	121
Figura 5.12 Sistema de potencia de tres nodos.	122
Figura 5.13 Sistema de excitación sin limitador de voltaje de campo.	124
Figura 5.14 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia de tres nodos.	127
Figura 5.15 Movimiento de los eigenvalores cuando $P_m$ se incrementa con $T_A=0.05$	129
Figura 5.16 Posición de los eigenvalores críticos donde ocurren las bifurcaciones.	129
Figura 5.17 Superficie del diagrama de bifurcación variando $P_m$ y $T_A$ .	130
Figura 5.18 Región de estabilidad con $K_A=200$ .	131
Figura 5.19 Resultados de la simulación de $P_1$ (a) y $P_2$ (b).	132
Figura 5.20 Resultados de la simulación de $P_3$ (a) y $P_4$ (b).	132
Figura 5.21 Posición de los eigenvalores relacionados con $UHB_1$ , y $SHB_1$ con $K_A=200$ .	136
Figura 5.22 Posición del punto C de la Figura 5.21 cuando $T_A$ se incrementa.	137
Figura 5.23 Regiones de estabilidad con diferentes valores de $K_A$ .	140
Figura 5.24 Posiciones de $T_A$ -C para diferentes valores de $K_A$ .	141
Figura 5.25 Posiciones de los eigenvalores cuando $K_A$ es igual a 190,204.7286 y 210.	143
Figura 5.26 Diagrama de bloques del excitador rápido limitado.	143

Figura 5.27 Diagrama de bifurcación para un valor $E_{fdrlim} = 3$ de límite de campo.....	145
Figura 5.28 Posición de los eigenvalores cuando $P_m$ se incrementa con $T_A=0.05$ y $K_A=200$ . .....	146
Figura 5.29 Vista alargada del rectángulo de la Figura. 5.28.....	147
Figura 5.30 Región de estabilidad para un valor de $K_A=200$ .....	147
Figura 5.31 Resultados de la simulación de $P_1$ (a) y $P_2$ (b).....	148
Figura 5.32 Resultados de la simulación de $P_3$ (a) y $P_4$ (b).....	148
Figura 5.33 Posición de los eigenvalores relacionados con $UHB_1$ , y $SHB_1$ . ....	150
Figura 5.34 Posición del punto C de la Figura 5.33 cuando $T_A$ se incrementa.....	150
Figura 5.35 Regiones de estabilidad con diferentes valores de $K_A$ .....	152
Figura 5.36 Voltaje de campo sin limitador (a) y con limitador (b).....	152
Figura 5.37 Posiciones de $T_A-C$ para diferentes valores de $K_A$ .....	153
Figura 5.38 Diagrama de bifurcación para un valor limite de 4.....	153
Figura 5.39 Movimiento de los eigenvalores cuando $P_m$ se incrementa con $T_A=0.05$ y $K_A=200$ .....	154
Figura 5.40 Vista alargada del rectángulo de la Figura 5.39.....	155
Figura 5.41 Región de estabilidad para un valor de $K_A=200$ .....	155
Figura 5.42 Movimiento de los eigenvalores relacionados con $UHB_1$ y $SHB_1$ para $K_A=200$ . .....	157
Figura 5.43 Posición del punto C de la Figura 5.42 cuando $T_A$ incrementa. ....	157
Figura 5.44 Regiones de estabilidad para diferentes valores de $K_A$ . ....	159
Figura 5.45 Voltaje de campo sin limitador a) y con limitador b). ....	159
Figura 5.46 Posiciones de $T_A-C$ para diferentes valores de $K_A$ .....	160
Figura 5.47 Diagrama de bifurcación para un valor limite de 5.....	160
Figura 5.48 Movimiento de los eigenvalores cuando $P_m$ se incrementa con $T_A=0.05$ y $K_A=200$ .....	161
Figura 5.49 Vista alargada del rectángulo de la Figura 5.48.....	162
Figura 5.50 Región de estabilidad para $K_A=200$ .....	162
Figura 5.51 Movimiento de los eigenvalores relacionados con $UHB_1$ y $SHB_1$ para $K_A=200$ . .....	164
Figura 5.52 Posición del punto C de la Figura 5.51 cuando $T_A$ incrementa. ....	164

Figura 5.53 Regiones de estabilidad para diferentes valores de $K_A$ .	165
Figura 5.54 Voltaje de campo sin limitador a) y con limitador b).	166
Figura 5.55 Posiciones de $T_A$ - $C$ para diferentes valores de $K_A$ .	166
Figura 5.56 Diagramas de bifurcación para valores 3, 4 y 5 del limitador de campo.	167
Figura 5.57 Sistema de potencia incluyendo un StatCom en paralelo con la carga.	169
Figura 5.58 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia incluyendo un StatCom.	173
Figura 5.59 Movimiento de los eigenvalores cuando $P_m$ se incrementa con $T_A=0.05$ y ....	174
Figura 5.60 Vista alargada del rectángulo de la Figura 5.58.	174
Figura 5.61 Superficie del diagrama de bifurcación variando $P_m$ y $T_A$ .	175
Figura 5.62 Región de estabilidad para $K_A=200$ .	175
Figura 5.63 Resultados de la simulación de $P_1$ (a) y $P_2$ (b).	176
Figura 5.64 Resultados de la simulación de $P_3$ (a) y $P_4$ (b).	176
Figura 5.65 Movimiento de los eigenvalores relacionados con $UHB_1$ y $SHB_1$ para $K_A=200$ .	178
Figura 5.66 Posición del punto C de la Figura 5.65 cuando $T_A$ incrementa.	178
Figura 5.67 Regiones de estabilidad para diferentes valores de $K_A$ .	179
Figura 5.68 Posiciones de $T_A$ - $C$ para diferentes valores de $K_A$ .	180
Figura 5.69 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia incluyendo un StatCom.	181
Figura 5.70 Movimiento de los eigenvalores cuando $P_m$ se incrementa con $T_A=0.05$ y $K_A=200$ .	181
Figura 5.71 Vista alargada del rectángulo de la Figura 5.70.	182
Figura 5.72 Región de estabilidad para $K_A=200$ .	182
Figura 5.73 Resultados de la simulación de $P_1$ (a) y $P_2$ (b).	183
Figura 5.74 Resultados de la simulación de $P_1$ (a) y $P_2$ (b).	183
Figura 5.75 Movimiento de los eigenvalores relacionados con $UHB_1$ y $SHB_1$ para $K_A=200$ .	185
Figura 5.76 Posición del punto C de la Figura 5.75 cuando $T_A$ incrementa.	185
Figura 5.77 Regiones de estabilidad para diferentes valores de $K_A$ .	187
Figura 5.78 Posiciones de $T_A$ - $C$ para diferentes valores de $K_A$ .	187
Figura 5.79 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia incluyendo un StatCom.	188
Figura 5.80 Movimiento de los eigenvalores cuando $P_m$ se incrementa con $T_A=0.05$ y ....	189

Figura 5.81 Vista alargada del rectángulo de la Figura 5.80.....	189
Figura 5.82 Región de estabilidad para $K_A=200$ .....	190
Figura 5.83 Resultados de la simulación de $P_1$ (a) y $P_2$ (b).....	190
Figura 5.84 Resultados de la simulación de $P_3$ (a) y $P_4$ (b).....	191
Figura 5.85 Movimiento de los eigenvalores relacionados con $HB_1$ y $HB_2$ para $K_A=200$ .	192
Figura 5.86 Posición del punto C de la Figura 5.85 cuando $T_A$ incrementa. ....	193
Figura 5.87 Regiones de estabilidad para diferentes valores de $K_A$ . ....	194
Figura 5.88 Posiciones de $T_A-C$ para diferentes valores de $K_A$ .....	195
Figura 5.89 Diagramas de bifurcación para valores de potencia reactiva 0.2, 0.3 y 0.4 ....	196

## Lista de tablas.

Tabla 4.1	Parámetros utilizados en el sistema de potencia con carga dinámica. ....	77
Tabla 4.2	Posición de las bifurcaciones en el modelo clásico.....	79
Tabla 4.3	Parámetros utilizados en el sistema de potencia con sistema de excitación.....	82
Tabla 4.4	Posición de las bifurcaciones de la Figura 4.8. ....	86
Tabla 4.5	Comparación del modelo clásico y modelo 1.....	91
Tabla 4.6	Parámetros utilizados en el sistema de potencia clásico añadiendo el StatCom. .	94
Tabla 4.7	Ubicación de las bifurcaciones para diferentes valores de $Q_{ac}^*$ . ....	98
Tabla 4. 8	Parámetros utilizados en el sistema de potencia clásico con sistema de excitación y StatCom. ....	102
Tabla 4.9	Posición de las bifurcaciones de la Figura 4.29. ....	106
Tabla 4.10	Ubicación de las bifurcaciones para diferentes valores de $Q_{ac}^*$ . ....	108
Tabla 5.1	Parámetros utilizados en el sistema de potencia.....	113
Tabla 5.2	Eigenvalores del Jacobiano del sistema sin el CEV.....	114
Tabla 5.3	Eigenvalores de la matriz de estado del sistema del CEV.....	118
Tabla 5.4	Valores de parámetros para el sistema eléctrico.....	127
Tabla 5.5	Eigenvalores del Jacobiano del sistema. ....	128
Tabla 5.6	Valores de parámetros para el sistema de potencia con limitador.....	144
Tabla 5.7	Eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de $E_{fdrr} = 3$ . ....	146
Tabla 5. 8	Eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de $E_{fdrr} = 4$ . ....	154
Tabla 5.9	Eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de $E_{fdrr} = 5$ . ....	161
Tabla 5.10	Valores de $K_A$ y $T_A$ donde ocurre el punto $K$ .. ....	167
Tabla 5.11	Posición de las bifurcaciones para los diferentes valores del limitador. ....	168
Tabla 5.12	Valores de parámetros para el sistema de potencia incluyendo un StatCom. ..	172
Tabla 5.13	Eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de $Q_{ac}^* = 0.2 pu$ . ....	173
Tabla 5.14	Valores de $K_A$ y $T_A$ donde ocurre el punto $K$ .. ....	195
Tabla 5.15	Posición de las bifurcaciones para los diferentes valores de potencia reactiva. .....	196

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Introducción

Uno de los mayores problemas de la teoría de sistemas dinámicos es analizar el comportamiento transitorio y de estado estable de un sistema definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales. El fenómeno de inestabilidad de voltaje se considera como una manifestación de una inestabilidad en estado estacionario dada inicialmente por un decremento gradual de la magnitud de voltaje en uno o varios puntos de la red de transmisión. En una segunda etapa, existe un repentino decremento de la magnitud de voltaje que produce la operación de esquemas de protección, iniciándose un posible desmantelamiento del sistema de transmisión.

Existen dos formas generales de estudiar este fenómeno. La primera consiste en estudiar el fenómeno desde un punto de vista estático en base a las ecuaciones de flujos de potencia. Sin embargo, esta aproximación estática no permite analizar oscilaciones no lineales de las variables de estado que acontecen durante el fenómeno. De tal manera, la segunda forma de análisis consiste en plantear el problema desde un punto de vista dinámico por medio del análisis de las ecuaciones diferencial-algebraicas que modelan al sistema eléctrico de potencia. La teoría de bifurcaciones es muy importante en el análisis de sistemas no lineales debido a que puede predecir cualitativamente comportamientos dinámicos muy complejos en la estructura del sistema, debidos a la variación de sus parámetros [Strogatz94], [Nayfeh95]. Estos cambios cualitativos se manifiestan en modificaciones en la estabilidad del sistema; es decir la aparición y desaparición de soluciones estables, también llamados puntos de equilibrio, cuando uno de los parámetros del sistema es modificado.

En el caso de sistemas eléctricos de potencia, la teoría de bifurcaciones se ha aplicado para caracterizar cambios cualitativos en la respuesta dinámica de la magnitud de voltaje por variaciones lentas en sus parámetros sobre un rango especificado. Entre los tipos de comportamiento dinámico que pueden llegar a observarse están los ciclos límite, movimiento cuasiperiódico e incluso caos.

Esta teoría ha sido aplicada para el estudio del fenómeno de inestabilidad de voltaje; sin embargo, una pregunta abierta es, ¿cómo controlar las posibles inestabilidades de voltaje que pueden acontecer en el sistema?. En esta tesis se pretende contestar esta pregunta mediante la aplicación de controles de excitación del generador y el compensador estático síncrono (StatCom).

Aunado a lo anterior, en esta tesis se realiza la aplicación de la teoría de bifurcaciones a un sistema eléctrico de 3 nodos dos o más de sus parámetros. La finalidad es estudiar el efecto de variación multiparamétrica del sistema sobre la aparición o desaparición de bifurcaciones o cambios de estabilidad, así como también observar el efecto que se tiene en la región de estabilidad del sistema.

## **1.2 Estado del arte**

Existen muchos trabajos de investigación enfocados al estudio de inestabilidades no lineales basados en la teoría de bifurcaciones. En [Dobson89, Dobson88] se analiza un sistema de potencia de 3 nodos con una gran variedad de comportamientos dinámicos no lineales. El sistema es modelado por medio de un conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico cuya solución permite obtener los puntos de equilibrio del sistema. La estabilidad de estos puntos de equilibrio es analizada por medio de técnicas de eigenvalores para determinar cualitativamente el comportamiento dinámico del sistema ante una perturbación pequeña. En este artículo se demuestra que el punto de colapso de voltaje se asocia a la pérdida de estabilidad de un punto de equilibrio debida a una bifurcación saddle-node.

Varios modelos de pequeños sistemas de potencia se analizan en [Kasusky02], donde se hace un estudio de sistemas de potencia representados por grupos de ecuaciones diferenciales, mostrando los diferentes tipos de bifurcaciones que ocurren en ellos, demostrando así que los sistemas eléctricos pequeños pueden experimentar fenómenos dinámicos muy complejos.

Recientemente algunos investigadores se han dado a la tarea de hacer análisis de bifurcaciones al variar más de un parámetro del sistema. En [Perleberg03] se hace un estudio de análisis de bifurcaciones variando más de un parámetro del sistema para estudiar los efectos de estas variaciones sobre la estabilidad en un sistema de potencia del sur de Brasil.

En [Jia06] se muestra un ejemplo de que existe un agujero inestable dentro de una región estable al variar más de un parámetro del sistema, el estudio es desarrollado para encontrar la causa de este fenómeno que es basado sobre el análisis de bifurcaciones, en el cual se encontró que la ocurrencia del agujero inestable dentro de la región de estabilidad es causado por bifurcaciones Hopf degeneradas de segundo orden.

Un estudio sobre las bifurcaciones Hopf inducidas por los controles del Compensador Estático de Var (CEV) se hace en [Gu06], en donde se comparan dos modelos de la maquina síncrona conectada a una carga sin el CEV y posteriormente con el CEV, en donde se hace un análisis de bifurcaciones al variar mas de un parámetro para estudiar el efecto de los parámetros del sistema sobre la bifurcación Hopf.

De lo descrito anteriormente es claro que la aplicación de la teoría de bifurcaciones al análisis de sistemas eléctricos de potencia es de gran ayuda para predecir y entender posibles inestabilidades no lineales ocasionadas por pequeñas perturbaciones en el punto de equilibrio del sistema. Asimismo, el conocimiento de estos comportamientos es de vital importancia para los ingenieros que planean y operan los sistemas eléctricos, ya que pueden prevenir malas decisiones operativas que puedan poner en riesgo la integridad del sistema eléctrico.

### **1.3 Objetivo**

El objetivo de esta tesis es estudiar las inestabilidades no lineales asociadas al fenómeno de colapso de voltaje así como el control de estas inestabilidades mediante la aplicación de controles de excitación del generador y el compensador estático síncrono (StatCom). También se realiza un estudio en un sistema de potencia de 3 nodos con diferentes topologías del sistema para analizar la aparición y tamaño de un agujero inestable dentro de una región de estabilidad.

### **1.4 Justificación**

La teoría de bifurcaciones y caos proporcionan una posible herramienta para interpretar fenómenos complejos dinámicos presentes en sistemas eléctricos, así como su control. Así, en esta tesis se describe de manera fundamental esta teoría y su aplicación al estudio de sistemas eléctricos, con la finalidad de observar los fenómenos de pérdida de sincronismo y colapso de voltaje.

En años recientes se han desarrollado muchos estudios de inestabilidad de voltaje para poder comprender el fenómeno de colapso de voltaje. La aplicación de controladores enmarcados en el concepto de sistemas flexibles de transmisión en corriente alterna (SIFLETCA), ha demostrado su factibilidad para el control de inestabilidades, así como la eliminación de diferentes tipos de bifurcaciones. En esta tesis se desarrollan modelos para diferentes topologías de un sistema de potencia de 3 nodos, a los cuales se aplica la teoría de bifurcaciones variando más de un parámetro. Este tipo de análisis es importante ya que al variar los parámetros se determina un agujero inestable dentro de un área que en un principio se considera estable. Este tipo de fenómenos no observado anteriormente, puede provocar cambios significativos en la estabilidad del sistema, debido a que se podría llevar al sistema dentro de este agujero inestable provocando inestabilidad o hasta un colapso de voltaje. Este tipo de análisis puede ser de gran aplicación como una herramienta predictiva de la presencia de agujeros inestables al variar más de un parámetro del sistema.

## 1.5 Planteamiento del problema.

Para apreciar la dinámica de los sistemas de potencia y sus fenómenos de inestabilidad, el primer paso es modelar en forma dinámica a los elementos que intervienen directamente en estos fenómenos. Como resultado de este modelado, se obtienen conjuntos de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones algebraicas. Estos sistemas de ecuaciones son, en general, no lineales, tal que la teoría de bifurcación encaja perfectamente para este tipo de análisis. Esta teoría consiste básicamente en mostrar como las soluciones del sistema de potencia relacionadas con el punto de operación, ganan o pierden estabilidad con respecto a la variación de uno o más parámetros del sistema.

Para la simulación de los sistemas de potencia modelados en esta tesis como sistemas dinámicos, se utilizará el software XPPAUT [Doedel97]. XPPAUT es una herramienta para simulación, animación y análisis de sistemas dinámicos [Ermentrout02], y se divide en dos partes: XPP se utiliza para la simulación numérica de las ecuaciones y puede encontrar puntos fijos y trazar diagramas de fase de sistemas no lineales. Una vez que se encuentra un punto fijo, se puede utilizar el AUTO para trazar el diagrama de bifurcación. Este software tiene la capacidad de esquematizar los diagramas de bifurcación, indicando soluciones estables e inestables de puntos de equilibrio, y si son de tipo periódico u oscilatorio. Además, es posible simular la dinámica de cualquier punto del diagrama de bifurcación, pudiéndose observar claramente diversos tipos de operación propios de los sistemas no lineales. Entonces, extrapolando todas estas características a los sistemas de potencia, se podrá observar los fenómenos de pérdida de sincronismo y colapso de voltaje producidos por cambios de estabilidad en todo el sistema.

Con respecto a la estabilidad, esta se puede evaluar también por medio de eigenvalores en cualquier punto de operación en el diagrama de bifurcación. El software también proporciona de manera visual la estabilidad del sistema por medio de los multiplicadores de Floquet. Además, con el diagrama de bifurcación se puede mostrar claramente qué tan estable es el sistema por medio de los distintos atractores que se tienen en cada región de operación.

## **1.6 Estructura de la tesis.**

En el capítulo 1 se da una breve introducción a este trabajo. Posteriormente se hace una breve descripción del estado del arte en cuanto a algunas aplicaciones de la teoría de bifurcaciones. Por último se describe el objetivo, justificación y planteamiento del problema analizado en este trabajo.

En el capítulo 2 se muestran los diferentes modelos de los elementos que intervienen en la dinámica de los sistemas de potencia y sus respectivos controles. También se presenta la forma en que estos sistemas pueden ser linealizados para poder realizar un análisis de estabilidad local.

En el capítulo 3 se describe la teoría de bifurcaciones como herramienta de análisis de los sistemas no lineales, los conceptos de sistemas dinámicos, retrato de fase, puntos de equilibrio y puntos periódicos así como su estabilidad. Además, se incluye una breve descripción de los diversos tipos de bifurcaciones locales y globales que presentan los sistemas no lineales. También se da una breve descripción de los diferentes tipos de bifurcaciones Hopf degeneradas.

En el capítulo 4 se muestran los resultados de las simulaciones del sistema de potencia de 3 nodos con diferentes topologías y variando un solo parámetro de bifurcación.

En el capítulo 5 se muestran los resultados de las simulaciones del sistema de potencia de 3 nodos con diferentes topologías y variando más de un parámetro de bifurcación.

Por último, el capítulo 6 contiene las conclusiones a las que se ha llegado, las aportaciones que se han hecho y los posibles trabajos futuros que esta tesis puede originar.

## Capítulo 2

### Modelado de sistemas eléctricos de potencia

#### 2.1 Introducción

En este capítulo se presenta una descripción detallada de los modelos matemáticos usados en esta tesis para representar los diferentes elementos que componen el sistema de potencia con la finalidad de efectuar análisis de inestabilidad de voltaje. Los dispositivos eléctricos considerados son: generador síncrono, sistemas de excitación, red de transmisión, cargas y compensador estático de VARs basado en fuentes conmutadas de voltaje (STATCOM). Estos modelos son desarrollados por medio de ecuaciones diferenciales y algebraicas, asumiendo que el sistema está en por unidad.

#### 2.2 Modelado de Componentes

Para poder simular el comportamiento de un sistema de potencia es necesario modelar en forma adecuada los elementos que lo conforman de manera que se puedan obtener resultados más precisos acerca de la operación del sistema. A continuación, se presentan los modelos matemáticos de los dispositivos eléctricos utilizados en esta tesis para cuantificar fenómenos de inestabilidad de voltaje.

##### 2.2.1 *Generador síncrono*

El modelo matemático de una máquina síncrona varía desde un modelo clásico hasta un modelo más detallado que considera la dinámica en devanados amortiguadores. En esta tesis se utiliza el modelo clásico de un eje despreciando los efectos transitorios del eje de cuadratura. Las ecuaciones mecánicas que describen la dinámica del rotor son representadas por la ecuación de oscilación (2.1).

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} + D \frac{d\delta}{dt} = P_m - P_{ge} \quad (2.1)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden puede ser escrita como dos ecuaciones diferenciales de primer orden como se observa en la ecuación (2.2).

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \omega \\ M \frac{d\omega}{dt} &= P_m - P_{ge} - D\omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $\delta$  es el desplazamiento angular del rotor, también llamado ángulo de par, con respecto al marco de referencia que gira a velocidad síncrona, también llamado marco de referencia rotatorio síncrono. Este desplazamiento se mide en radianes eléctricos. La variable  $\omega$  representa la variación de la velocidad angular del rotor con respecto a la velocidad síncrona. En el caso de estado estacionario, el rotor se mantiene girando a velocidad síncrona y  $\omega = 0$ .  $M$  es el momento de inercia del generador en segundos cuadrados por radianes eléctricos.  $P_m$  es la potencia mecánica de entrada al generador y  $P_{ge}$  es la potencia eléctrica activa de salida del generador. Por último,  $D$  es el coeficiente de amortiguamiento y el producto  $D\omega$  es la potencia de amortiguamiento del generador.

Las expresiones generales para  $P_m$  y  $P_{ge}$  pueden ser muy complicadas debido a la variación del par mecánico de entrada y a la dependencia a la frecuencia de los parámetros eléctricos de los elementos de transmisión [Llic00]. Sin embargo, en análisis de transitorios de tipo electromecánico no es necesario tal detalle en la representación de componentes eléctricos [Llic00], tal que las siguientes consideraciones son validas [Anderson77]:

- La red de transmisión se considera operando en estado estacionario; es decir, las constantes de tiempo de la red de transmisión son despreciables comparadas a la frecuencia de oscilación electromecánica, por lo que sus parámetros se representan por elementos eléctricos concentrados.

- La maquina síncrona puede ser representada como una fuente de voltaje constante (voltaje interno o de excitación) en serie con una reactancia transitoria.
- El ángulo de fase de la fuente de voltaje coincide con el ángulo de par de la máquina, y es el ángulo de voltaje del nodo interno.
- La potencia mecánica de entrada al generador permanece constante durante el intervalo de tiempo de estudio.
- La potencia de amortiguamiento se asume proporcional a la velocidad del rotor de la maquina o a la diferencia de velocidades entre maquinas.
- La saliencia del rotor de la maquina se asume despreciable, tal que siempre se considera un rotor cilíndrico.

En base a lo anterior, un sistema multimaquinas puede ser representado como se ilustra en la Figura 2.1

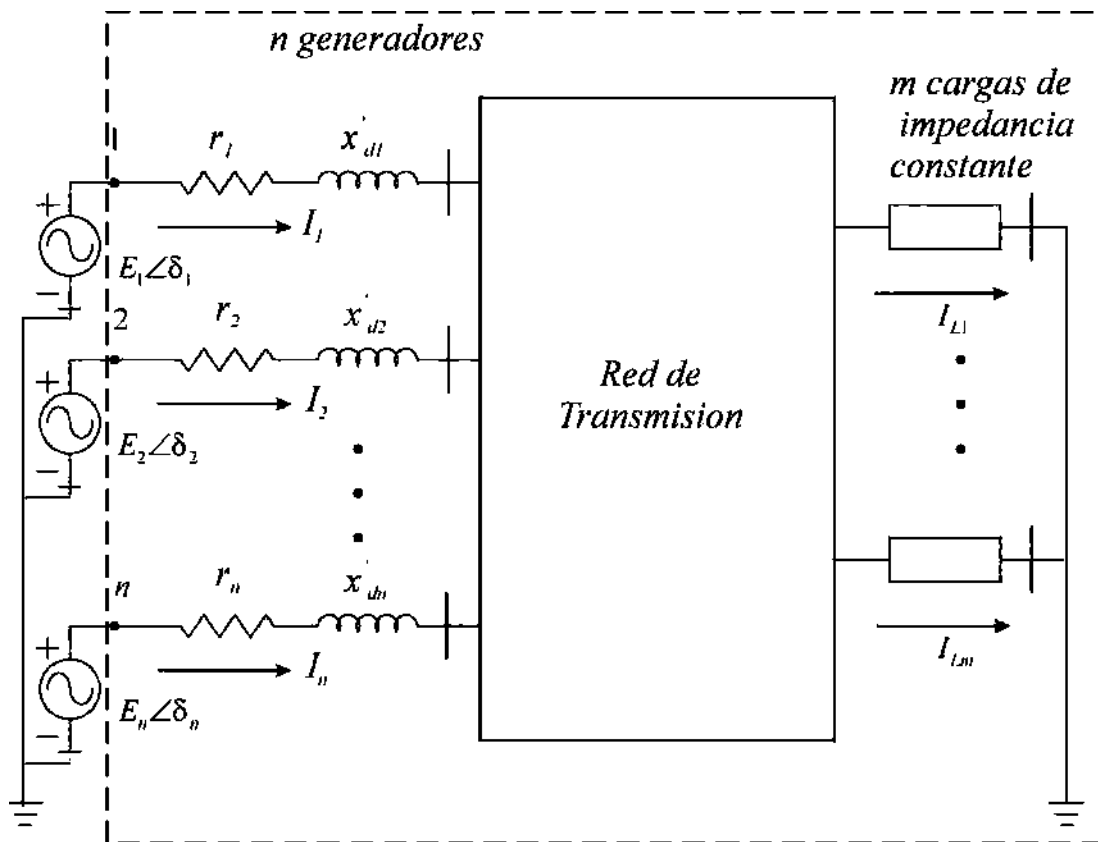


Figura 2.1 Sistema multimaquina.

La potencia eléctrica  $P_{ge}$  es inyectada a la red de transmisión desde las terminales del generador, y esta determinada de la siguiente forma: Asumiendo que se tienen  $n$  nodos internos de generadores,  $l$  nodos de voltaje controlado y  $m$  nodos de carga donde no se tienen unidades generadoras, la ecuación de potencia eléctrica en terminales del generador  $i$  es:

$$\begin{aligned}
P_{gei} = & V_i^2 G_{ii}^g + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n V_i E_j (G_{ij}^g \cos(\theta_i - \delta_j) + B_{ij}^g \text{sen}(\theta_i - \delta_j)) \\
& + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+l} V_i V_j (G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \text{sen}(\theta_i - \theta_j)) \\
& + P_{Li}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

donde  $\delta$  es la variable que describe el ángulo de voltaje en el nodo interno del generador y  $\theta$  representa el ángulo de voltaje en los nodos de la red de transmisión, respectivamente. Adicionalmente,  $E$  es la magnitud de voltaje del nodo interno y  $V$  es la magnitud de voltaje del nodo del sistema de transmisión. La admitancia nodal del elemento de transmisión que enlaza a los nodos del sistema  $i$  y  $j$  es dada por  $\vec{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$ . La admitancia del generador es  $\vec{Y}_{ij}^g = G_{ij}^g + jB_{ij}^g$ . La admitancia total vista desde terminales del generador es  $G_{ii}^g$ . Por último, el término  $P_{Li}$  representa la carga conectada en el  $i$ -ésimo nodo generador.

El modelo del generador puede ser más detallado al considerar la dinámica que existe en el voltaje inducido en el estator, voltaje interno, debido a la variación de los enlaces de flujo producidos en el rotor de la maquina por el voltaje de campo  $E_{fd}$  [Ji95]. Esta dinámica se cuantifica por medio de la ecuación de decaimiento de flujo dada por (2.4), sujeta a dos ecuaciones algebraicas (2.5) y (2.6) [Bergen86].

$$T_{do}' \frac{d|E'|}{dt} + |E| = E_{fd} \tag{2.4}$$

$$E = V_a + rI_a + jx_d I_d + jx_q I_q \quad (2.5)$$

$$E' = V_a + rI_a + jx'_d I_d + jx_q I_q \quad (2.6)$$

donde  $|E|$  es la magnitud del voltaje interno en estado estable,  $|E'|$  es la magnitud del voltaje interno en estado transitorio,  $T'_{d0}$  representa la constante de tiempo transitoria del generador en el eje directo (eje  $d$ ),  $E$  es el fasor de voltaje interno o de excitación,  $E'$  es el fasor de voltaje interno en estado transitorio,  $E_{fd}$  es el voltaje de campo del generador,  $x_d$  es la reactancia en el eje  $d$ ,  $x'_d$  es la reactancia transitoria en el eje  $d$  y  $V_a$  es el fasor de voltaje en terminales del generador.

Asumiendo que la resistencia del devanado del estator es nula, las ecuaciones (2.5) y (2.6) pueden expresarse como,

$$E = V_a + jx_d I_d + jx_q I_q \quad (2.7)$$

$$E' = V_a + jx'_d I_d + jx_q I_q \quad (2.8)$$

Expresando  $E$  en términos de  $E'$  al despejar  $V_a$  de (2.7) y sustituir este valor en (2.8), se tiene como resultado la ecuación (2.9). Es importante notar de esta expresión que los fasores de voltaje  $E$  y  $E'$  están en fase y su ángulo de desfase  $\delta$  es medido con respecto al voltaje en terminales.

$$E = E' + j(x_d - x'_d)I_d \quad (2.9)$$

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) pueden ser representadas esquemáticamente por el diagrama fasorial mostrado en la Figura 2.2.

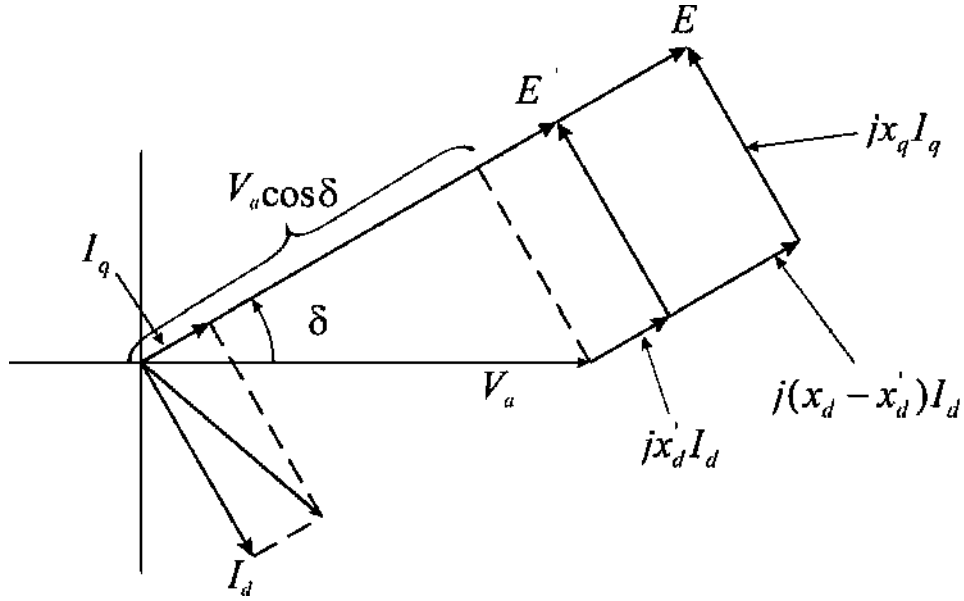


Figura 2.2 Diagrama fasorial de la maquina síncrona conectada a un bus infinito.

De la Figura 2.2, es posible expresar  $|E|$  en términos de  $|E'|$ ,  $\delta$  y  $|V_a|$  realizando las siguientes operaciones algebraicas [Bergen86].

$$\frac{|E| - |V_a| \cos \delta}{|E'| - |V_a| \cos \delta} = \frac{jx'_d |I_d| + j(x_d - x'_d) |I_d|}{jx'_d |I_d|} = \frac{x_d |I_d|}{x'_d |I_d|} = \frac{x_d}{x'_d} \quad (2.10)$$

$$|E| - |V_a| \cos \delta = \frac{x_d}{x'_d} (|E'| - |V_a| \cos \delta) = \frac{x_d}{x'_d} |E'| - \frac{x_d}{x'_d} |V_a| \cos \delta \quad (2.11)$$

$$|E| = \frac{x_d}{x'_d} |E'| - \frac{x_d}{x'_d} |V_a| \cos \delta + |V_a| \cos \delta \quad (2.12)$$

$$|E| = \frac{x_d}{x'_d} |E'| + |V_a| \cos \delta \left( 1 - \frac{x_d}{x'_d} \right) \quad (2.13)$$

$$|E| = \frac{x_d}{x'_d} |E'| + |V_a| \cos \delta \frac{(x'_d - x_d)}{x'_d} \quad (2.14)$$

Como un caso especial se puede encontrar la expresión (2.4) en función de un voltaje nodal de referencia  $V_\infty$  diferente al voltaje en terminales de la máquina. Para obtener esta expresión se considera al generador conectado a un bus infinito a través de una línea de transmisión con resistencia  $r_L$  y reactancia  $x_L$ , como se muestra en la Figura 2.3. En este caso, el ángulo del voltaje interno  $\delta$  se mide con respecto al nodo infinito.

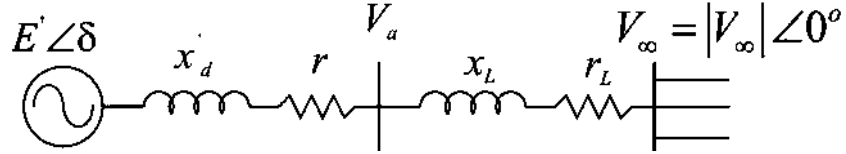


Figura 2.3 Generador conectado a un bus infinito.

Asumiendo la resistencia de la línea de transmisión nula, se define la siguiente constante,

$$K_3 = \frac{x'_d}{x_d} = \frac{x'_d + x_L}{x_d + x_L} \quad (2.15)$$

Puesto que  $x'_d < x_d$ , se tiene que los valores de  $K_3$  están definidos en el intervalo  $1 > K_3 > 0$ .

Sustituyendo (2.15) en (2.14) se obtiene:

$$|E| = \frac{1}{K_3} |E'| + \left(1 - \frac{1}{K_3}\right) |V_\infty| \cos \delta \quad (2.16)$$

$$|E| = \frac{x'_d + x_L}{x_d + x_L} |E'| + \frac{x'_d - x_d}{x_d + x_L} |V_\infty| \cos \delta \quad (2.17)$$

Sustituyendo la ecuación (2.17) en (2.4) se obtiene:

$$T_{d0} \frac{dE'}{dt} = T_{d0} \dot{E}' = -\frac{x'_d + x_L}{x_d + x_L} E' + \frac{x'_d - x_d}{x_d + x_L} V_\infty \cos \delta + E_{fd} \quad (2.18)$$

Considerando la magnitud de voltaje en el bus infinito como  $|V_\infty|=1$ , la ecuación (2.18) se convierte en:

$$T_{d0} \dot{E}' = -\frac{x_d + x_L}{x_d' + x_L} E' + \frac{x_d - x_d'}{x_d' + x_L} \cos \delta + E_{fd} \quad (2.19)$$

Una variante de esta dinámica es la que se presenta en la ecuación (2.20) en donde se considera que el generador esta conectado a un nodo que no es referencia, como se muestra en la Figura 2.4, [Heydeman00].

$$T_{d0} \frac{dE'}{dt} = T_{d0} \dot{E}' = -\frac{x_d + x}{x_d' + x} E' + \frac{x_d - x_d'}{x_d' + x} V \cos(\delta - \theta) + E_{fd} \quad (2.20)$$

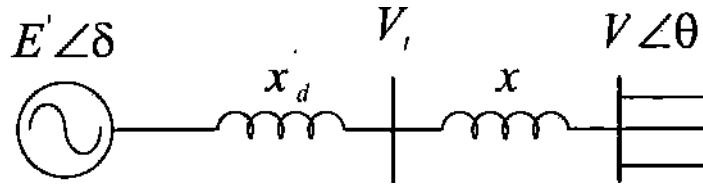


Figura 2.4 Generador conectado a un nodo que no es referencia.

Estos dos modelos que representan la dinámica del cambio de flujo, son utilizados en simulaciones de algunos modelos de sistemas de potencia en el capítulo 4 y 5.

### 2.2.2 Sistemas de excitación

La función básica de un sistema de excitación es suministrar y ajustar automáticamente el voltaje de campo del generador con la finalidad de controlar el voltaje en terminales  $V_a$ . También deberá responder a cambios repentinos de carga para mantener la estabilidad del sistema. La regulación se logra de la siguiente manera: al ocurrir una falla en un punto del sistema eléctricamente cercano a un generador, el flujo del devanado de campo comienza a variar, produciendo cambios en la magnitud del voltaje en terminales de la maquina. Durante este proceso transitorio, actúa el sistema de excitación proveyendo de corriente continua al devanado de campo de la maquina, para mantener el voltaje de campo

$E_{fd}$  constante, y el flujo de campo a un nivel de operación constante. Así, mediante el control de voltaje de campo, se controla el voltaje en terminales del generador.

En esta tesis se utiliza el sistema de excitación rápido que es descrito por la ecuación (2.21) y el diagrama de bloques mostrado en la Figura 2.5[Heydeman00].

$$\dot{E}_{fdrr} = \frac{1}{T_A} (K_A (V_{ref} - V_a) - (E_{fdrr} - E_{fd0})) \quad (2.21)$$

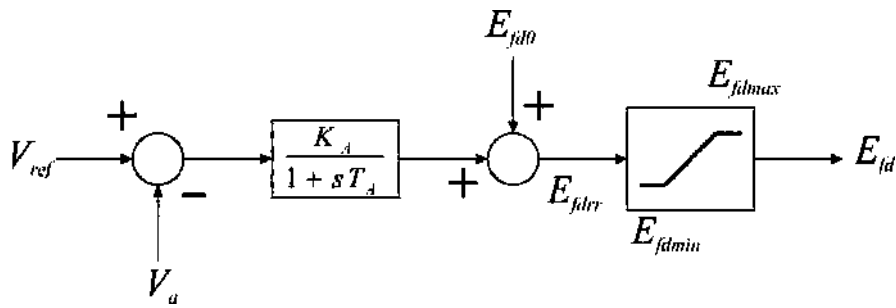


Figura 2.5 Diagrama de bloques del excitador rápido limitado.

Debe observarse que la salida del excitador esta limitada de la siguiente forma:  $E_{fdmin} < E_{fd} < E_{fdmax}$ . Estos límites pueden modelarse por la ecuación (2.22) de manera que  $E_{fdmin} = -5$  y  $E_{fdmax} = 5$ , si  $E_{fdrlim} = 5$  [Rajesh99].

$$E_{fdr} = \frac{E_{fdrlim}}{2} \tanh\left(\frac{2E_{fdrr} - E_{fdrlim}}{E_{fdrlim}}\right) + \frac{E_{fdrlim}}{2} \quad (2.22)$$

### 2.2.3 Red de transmisión

La dinámica de la red de transmisión es bastante complicada debido a que las líneas de transmisión son elementos de parámetros distribuidos. Sin embargo, debido a que la dinámica que se desea analizar es menor a 5 Hz [Kasusky02], es posible modelar la red de transmisión por medio de modelos de parámetros concentrados.

En base a lo anterior, el modelo de un elemento de transmisión esta dado por las ecuaciones de flujos de potencia inyectada en sus terminales. Asumiendo que el elemento de transmisión esta conectado entre los nodos de carga  $i$  y  $j$ , las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= V_i^2 G_{ii} + V_i V_j (G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \text{sen}(\theta_i - \theta_j)) \\ Q_{ij} &= -V_i^2 G_{ii} + V_i V_j (G_{ij} \text{sen}(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)) \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde el elemento de la matriz de admitancia nodal  $\vec{Y}_{BUS}$  asociado a este elemento de transmisión es  $\vec{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$ . Además, para el elemento de transmisión  $G_{ii} = G_{ij}$ .

De igual manera, si el elemento esta conectado entre el nodo  $i$ -esimo del sistema y el nodo interno del  $j$ -esimo generador, se tiene:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= V_i^2 G_{ii} + V_i E_j (G_{ij}^g \cos(\theta_i - \delta_j) + B_{ij}^g \text{sen}(\theta_i - \delta_j)) \\ Q_{ij} &= -V_i^2 G_{ii} + V_i E_j (G_{ij}^g \text{sen}(\theta_i - \delta_j) - B_{ij}^g \cos(\theta_i - \delta_j)) \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde el elemento de la matriz de admitancia nodal  $\vec{Y}_{BUS}$  asociado a este elemento de transmisión corresponde a la admitancia del generador  $\vec{Y}_{ij} = G_{ij}^g + jB_{ij}^g$ , cumpliéndose también  $G_{ii} = G_{ij}^g$ .

En base a las ecuaciones anteriores es posible obtener la ecuación de balance de potencia en el  $i$ -esimo nodo del sistema de transmisión por medio de la ecuación (2.19).

$$\begin{aligned} P_{gei} &= P_{Li} + P_{ei} = P_{Li} + \sum_{j \in \Omega_i} P_{ij} \\ Q_{gei} &= Q_{Li} + Q_{ei} = Q_{Li} + \sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij} \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $\Omega_i = \{j : |Y_{ij}| \neq 0, j \neq i\}$ , es el conjunto de nodos conectados al nodo  $i$ . La expresión para las potencias de demanda en el bus  $i$  dependerá del tipo de modelo de carga empleado.

Debe puntualizarse que la primera ecuación (2.25) corresponde a la ecuación (2.3) en el caso de que el nodo  $i$  contenga uno o más generadores.

#### 2.2.4 Cargas

La diversidad de cargas que conforman un sistema eléctrico hace que el modelado matemático de cargas sea uno de los problemas más difíciles de resolver. Sin embargo, debido a que la demanda de energía eléctrica en un punto específico del sistema consiste de un conjunto agregado de diferentes cargas, el problema fundamental para el modelado consiste en identificar la composición de la carga en un instante de tiempo y su respectivo modelado como un equivalente en cierto punto de la red.

La carga eléctrica puede considerarse como una representación matemática de la relación existente entre el voltaje nodal (magnitud y ángulo) medido en su punto de conexión con respecto a la potencia (activa y reactiva) demandada o la corriente que fluye hacia la carga [Kasusky02]. En general, las cargas pueden clasificarse en dos tipos: cargas estáticas y cargas dinámicas. Las primeras se representan por ecuaciones algebraicas que se caracterizan por expresar las potencias activa y reactiva en cualquier instante de tiempo en función de la magnitud del voltaje del bus de conexión y frecuencia en ese mismo instante de tiempo. Por el contrario, las cargas dinámicas son representadas por ecuaciones diferenciales, o de diferencias, que se caracterizan por expresar las potencias activa y reactiva en cualquier instante de tiempo en función del voltaje y frecuencia obtenidos en instantes de tiempo pasado, incluyendo además el instante de evaluación.

Entre los modelos clásicos de cargas estáticas están los siguientes [Mithulananthan02]:

- *Impedancia constante*: esta es una carga donde la potencia varía directamente con respecto al cuadrado de la magnitud del voltaje.
- *Corriente constante*: en esta carga la potencia varía directamente con la magnitud del voltaje.
- *Potencia constante*: en esta carga la potencia no varía con cambios en la magnitud del voltaje.

- *Modelo polinomial*: este modelo de carga representa la relación entre la potencia y el voltaje por una ecuación polinomial, tal como se indica en la ecuación (2.26):

$$\begin{aligned}
 P &= P_0 \left[ a_1 \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 + a_2 \left( \frac{V}{V_0} \right) + a_3 \right] \\
 Q &= Q_0 \left[ a_4 \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 + a_5 \left( \frac{V}{V_0} \right) + a_6 \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

Este modelo también es conocido como modelo ZIP, por el hecho de que están agregados los tres primeros tipos de cargas: impedancia (Z), corriente (I) y potencia (P) constantes. Las variables  $V_0, P_0$  y  $Q_0$  son la magnitud de voltaje y las potencias nominales.

- *Modelo exponencial*: este modelo de carga representa la relación entre la potencia y la magnitud de voltaje como una ecuación exponencial el cual esta descrito por la ecuación :

$$\begin{aligned}
 P &= P_0 \left( \frac{V}{V_0} \right)^p \\
 Q &= Q_0 \left( \frac{V}{V_0} \right)^q
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Los exponentes  $p$  y  $q$  dependen del tipo de carga que esta siendo representada. A manera de ejemplo, para un modelo de carga de potencia constante se tienen los siguientes valores:  $p = q = 0$ . De manera similar, los valores de estas constantes son: para un modelo de carga de corriente constante,  $p = q = 1$ ; y para un modelo de impedancia constante,  $p = q = 2$ .

- *Modelo dependiente de la frecuencia:* este modelo es representado por el producto de un modelo polinomial o exponencial y un factor descrito por la ecuación (2.28):

$$[1 + a_f(f - f_0)] \quad (2.28)$$

donde  $f$  es la frecuencia del voltaje de bus,  $f_0$  es la frecuencia nominal y  $a_f$  es el parámetro de sensibilidad de la frecuencia del modelo. Sin embargo, este modelo no es muy usado debido a que la frecuencia no es variable de estado en el análisis de las redes eléctricas. Esta variable puede ser calculada tomando la derivada del ángulo del voltaje de bus y es de gran importancia para los modelos dinámicos, especialmente para el modelo dinámico del motor de inducción.

Estos modelos de cargas estáticas se pueden incluir fácilmente en la formulación de flujos de potencia en los que, regularmente, solo se utiliza el modelo de potencia constante.

Los modelos para las cargas dinámicas pueden llegar a ser variados debido a la gran diversidad de cargas que hay en un sistema. La forma genérica de este tipo de modelos de carga es dada por la ecuación (2.29). En este caso,  $z(t)$  es el vector de variables de estado del nodo de carga. Dos de estos modelos se presentan a continuación.

$$\dot{z}(t) = h(z(t), y(t)) \quad (2.29)$$

- *Modelo dinámico I:* Este modelo representa una carga dinámica dependiente de la magnitud  $V$  y el ángulo  $\theta$  del voltaje nodal, tal como se describe en la ecuación (2.30) [Dobson92].

$$\begin{aligned} L_d(pf) + D\dot{\theta} + a\dot{V} &= P_L \\ L_d\sqrt{1 - pf^2} + b\dot{\theta} + k\dot{V} &= Q_L \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde  $L_d$  es la demanda nominal (MVA) en el bus de carga,  $pf$  es el factor de potencia,  $P_L$  y  $Q_L$  son las potencias activa y reactiva de la carga,  $V$  y  $\theta$  son la

magnitud y ángulo de voltaje en el bus de carga y  $D$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $k$  son constantes de tiempo de la carga dinámica.

- *Modelo dinámico II*: Este modelo de carga es un modelo mixto que incluye una combinación en paralelo de un modelo estático de carga basado en potencia constante y un modelo dinámico. En esta tesis, se considera como carga dinámica un motor de inducción. El modelo considerado para este dispositivo es el propuesto en [Walve86] que expresa las potencias activa y reactiva como función de la magnitud  $V$  y el ángulo  $\theta$  del voltaje nodal. Este modelo está descrito por la ecuación (2.31).

$$\begin{aligned} P_L &= P_0 + P_1 + K_{pw}\dot{\theta} + K_{pv}(V + TV\dot{V}) \\ Q_L &= Q_0 + Q_1 + K_{qw}\dot{\theta} + K_{qv}V + K_{qv2}V^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $P_1$  y  $Q_1$  son las potencias constantes,  $P_0$  y  $Q_0$  son las potencias constantes del motor de inducción,  $K_{pw}$ ,  $K_{pv}$ ,  $T$ ,  $K_{qw}$ ,  $K_{qv}$ ,  $K_{qv2}$  son coeficientes de carga.

### 2.2.5 StatCom

El rápido desarrollo de la tecnología de semiconductores en relación a la capacidad de dispositivos conmutables a operar a mayores niveles de alto voltaje y alta corriente ha permitido la construcción y puesta en servicio de controladores electrónicos en sistemas de transmisión. Estos sistemas son denominados sistemas flexibles de transmisión en corriente alterna (SIFLETCA). Los dispositivos SIFLETCA han demostrado ser efectivos en controlar el flujo de potencia y amortiguar oscilaciones en sistemas de potencia [Dong04]. Algunos dispositivos SIFLETCA están actualmente en servicio en Japón, Brasil, U.S.A, y otras localidades alrededor del mundo [Dong04].

La mayoría de los controles son primero desarrollados y simulados usando un conjunto de ecuaciones dinámicas que describen cada dispositivo SIFLETCA. Los modelos dinámicos

de los dispositivos SIFLETCA son no-lineales y variantes en el tiempo debido a la naturaleza de los elementos de conmutación que los conforman.

El StatCom (compensador estático síncrono) es un dispositivo basado en una fuente conmutada de voltaje (VSC) conectada en paralelo al sistema de transmisión a través de un transformador de acoplamiento. La finalidad de este controlador es convertir un voltaje de entrada de corriente directa ( $dc$ ) en un voltaje de corriente alterna ( $ac$ ) trifásico, con una magnitud de voltaje y ángulo de fase controlable a frecuencia fundamental. Un StatCom no tiene inercia, por lo cual puede actuar en fracciones de segundo [Uzunovic01]. El StatCom puede ser usado para la regulación de voltaje en un sistema de potencia, permitiendo un incremento de transmisión de potencia, mejoramiento de la característica de operación en estado estable, así como la estabilidad operativa del sistema.

El StatCom esta compuesto de un transformador de acoplamiento, un VSC y un dispositivo de almacenamiento de energía. El dispositivo de almacenamiento de energía es un pequeño capacitor, por lo cual el StatCom solo tiene la capacidad de intercambiar potencia reactiva con el sistema de potencia. Si una batería o cualquier otra fuente de voltaje de  $dc$  son usadas para reemplazar al capacitor, entonces el StatCom podría intercambiar potencia activa y reactiva con el sistema de potencia. Un circuito equivalente de este dispositivo es mostrado en la Figura 2.6.

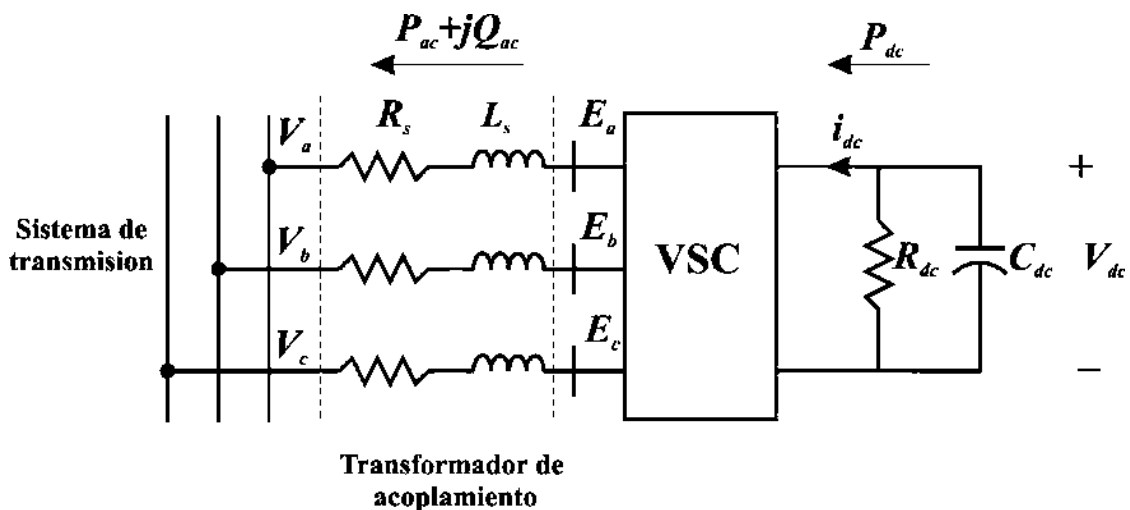


Figura 2.6 Circuito equivalente del Statcom.

La ecuación para el circuito de la Figura 2.6 en forma vectorial es:

$$\frac{d}{dt}i_{abc} = -\frac{R_s}{L_s}i_{abc} + \frac{i_{abc}}{L_s}(E_{abc} - V_{abc}) \quad (2.32)$$

donde  $R_s$  y  $L_s$  representan las pérdidas del transformador trifásico,  $E_{abc}$  es el voltaje de fase en el lado de  $ac$  del inversor,  $V_{abc}$  son los voltajes del lado del sistema de potencia y  $i_{abc}$  son las corrientes de fase. El voltaje de salida del StatCom esta dado por:

$$E_a = kV_{dc} \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.33)$$

donde  $V_{dc}$  es el voltaje en el capacitor,  $k$  es el índice de modulación y  $\alpha$  es el ángulo de fase del voltaje inyectado. Para definir un marco de referencia síncrono propio, el modelo dinámico puede ser simplificado. Las coordenadas del marco de referencia son definidas de tal forma que el eje  $d$  esta siempre coincidiendo con el vector de voltaje instantáneo del sistema y el eje  $q$  esta en cuadratura con este.

Transformando el modelo del StatCom a este marco de referencia, las ecuaciones en el bus de conexión pueden ser escritas como [Schauder93] y [Lehn02]:

$$\frac{d}{dt}i_d = -\frac{R_s}{L_s}i_d + \omega i_q + \frac{k}{L_s} \cos(\alpha + \delta)V_{dc} - \frac{V_i}{L_s} \cos \delta \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{dt}i_q = -\frac{R_s}{L_s}i_q - \omega i_d + \frac{k}{L_s} \text{sen}(\alpha + \delta)V_{dc} - \frac{V_i}{L_s} \text{sen} \delta \quad (2.35)$$

$$\frac{d}{dt}V_{dc} = \left(\frac{1}{C}\right) \left( -k \cos(\alpha + \delta)i_d - k \text{sen}(\alpha + \delta)i_q - \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \right) \quad (2.36)$$

donde  $i_d$  e  $i_q$  son las corrientes inyectadas del Statcom,  $V_{dc}$  es el voltaje del capacitor,  $R_{dc}$  representa las pérdidas por conmutación,  $R_s$  y  $L_s$  son las resistencias e inductancias del transformador de acoplamiento respectivamente y  $V_i$  es el voltaje en el bus de conexión. La obtención de las ecuaciones (2.32)-(2.36) se detallan en el apéndice A. Las ecuaciones

del balance de potencia activa y reactiva en el nodo de conexión del Statcom son dadas por (2.37) y (2.38), respectivamente.

$$0 = V_i(i_d \cos \theta_i + i_q \text{sen} \theta_i) - V_i \sum_{j=1}^n V_j Y_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j - \phi_{ij}) \quad (2.37)$$

$$0 = V_i(i_d \text{sen} \theta_i - i_q \cos \theta_i) - V_i \sum_{j=1}^n V_j Y_{ij} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \phi_{ij}) \quad (2.38)$$

Los términos  $Y_{ij} \angle \phi_{ij}$  corresponden al  $(i, j)$ -ésimo elemento de la matriz de admitancia nodal y  $n$  es el numero de nodos en el sistema. El primer término derecho de las ecuaciones (2.37) y (2.38) indican la potencia activa y reactiva inyectada por el Statcom respectivamente. La sumatoria de los otros términos corresponde a las ecuaciones de flujos de potencia del sistema.

Los objetivos de control del Statcom son proveer potencia reactiva y mantener el voltaje del capacitor constante. Conceptualmente, el intercambio de potencia reactiva del StatCom con el sistema de potencia es controlado al regular la amplitud de voltaje de salida del StatCom con respecto a la magnitud de voltaje medido en su punto de conexión con la red de transmisión. Si la amplitud de voltaje de salida del StatCom es mayor que la amplitud de voltaje del sistema de potencia, la corriente fluye a través del transformador desde el StatCom hacia el sistema de potencia, y el dispositivo inyecta potencia reactiva. Por el contrario, si la amplitud del voltaje de salida del StatCom es menor que la amplitud de voltaje del sistema de potencia, entonces la corriente fluye desde el sistema de potencia hacia el StatCom, tal que el dispositivo absorbe potencia reactiva. Si la amplitud de voltaje de salida del StatCom y la amplitud de voltaje del sistema de potencia son las mismas, el StatCom no genera ni absorbe potencia reactiva [Uzunovic01].

Una forma de lograr el intercambio de potencia reactiva, y mantener el voltaje del capacitor constante, es mediante la técnica de control PWM que permite modular el índice de modulación y el ángulo de fase en (2.33). El control implementado en este trabajo es el mostrado en la Figura 2.7[Dong04].

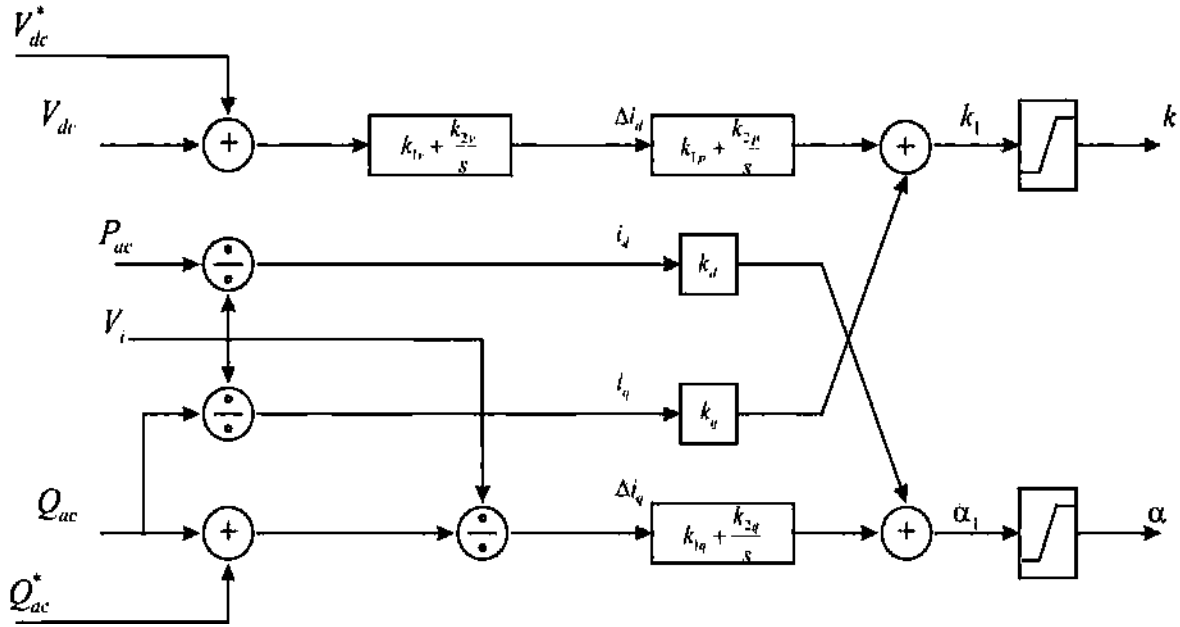


Figura 2.7 Control del Statcom

En este control, las señales de entrada  $V_{dc}$  y  $Q_{ac}$  son comparadas con los valores de referencia y usadas para calcular los errores de las señales en  $i_d$  e  $i_q$ . Un control proporcional-integral (PI) es usado para producir las señales de control de  $k$  y  $\alpha$  [Dong04]. El ángulo  $\alpha$  y el índice de modulación  $k$  son afectados por los cambios en  $i_d$  e  $i_q$ ; sin embargo,  $\alpha$  está más correlacionada con los cambios en  $i_d$  y  $k$  está más correlacionada con  $i_q$  [Dong04]. En base a esta observación, los términos de acoplamiento  $\alpha - i_q$  y  $k - i_d$  pueden ser despreciados ( $k_d = k_q = 0$ ), logrando un control desacoplado.

En base a la Figura 2.7, las ecuaciones del sistema de control son:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_{2v}(V_{dc}^* - V_{dc}) \\ \Delta i_d &= k_{1v}(V_{dc}^* - V_{dc}) + x_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2 &= k_{2p}\Delta i_d \\ k_1 &= k_{1p}\Delta i_d + x_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_3 &= k_{2q} \left( \frac{Q_{ac} - Q_{ac}^*}{V} \right) \\ \alpha_1 &= k_{1q} \left( \frac{Q_{ac} - Q_{ac}^*}{V} \right) + x_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

La derivación de las ecuaciones (2.39)-(2.41) se detallan en el apéndice A.

Las ecuaciones de los limitadores se presentan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} k &= k_{\text{lim}} \tanh\left(\frac{k_1}{k_{\text{lim}}}\right) \\ \alpha &= \alpha_{\text{lim}} \tanh\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{\text{lim}}}\right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

### 2.3 Ecuaciones del Sistema General

En base a las ecuaciones de los diversos componentes eléctricos y sus controles descritas en las secciones anteriores, el sistema de potencia conformado por estos componentes puede ser representado matemáticamente por un conjunto de ecuaciones diferencial-algebraicas (EDA),

$$\dot{x} = f(x, y, \lambda) \quad (2.43)$$

$$0 = g(x, y, \lambda) \quad (2.44)$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de las variables de estado dinámicas asociadas a generadores, cargas, y sistemas de control;  $y \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de estado correspondiente a las variables instantáneas o algebraicas del sistema, tales como los voltajes complejos nodales medidos en la red de transmisión;  $\lambda \in \mathfrak{R}^p$  es el correspondiente vector a los parámetros del sistema que varían de manera cuasiestática, produciendo cambios en la operación del mismo.

### 2.3.1 Puntos de equilibrio y su estabilidad

Para un valor específico  $\lambda_e$  de los parámetros del sistema, los puntos de equilibrio  $\mathbf{P}_e = (x^*(\lambda_e), y^*(\lambda_e), \lambda_e)$  están definidos por la solución de las ecuaciones algebraicas no lineales dadas por:

$$0 = f(x, y, \lambda_e) \quad (2.45)$$

$$0 = g(x, y, \lambda_e) \quad (2.46)$$

La solución dada por los puntos  $\mathbf{P}_e$  define el equilibrio del sistema. En este contexto, equilibrio implica que el sistema eléctrico está en reposo; es decir, las ecuaciones (2.45) y (2.46) se satisfacen. Sin embargo, este equilibrio no implica que el sistema sea estable.

Es importante mencionar que para un valor específico de  $\lambda_e$  se han definido como solución de las ecuaciones (2.45) y (2.46) diversos puntos de equilibrio. Esto se debe a la característica no lineal de las ecuaciones; es decir, diferentes puntos  $\mathbf{P}_e = (x^*, y^*, \lambda_e)$  satisfacen el conjunto de ecuaciones no lineales. La solución de estas ecuaciones y, por ende, la obtención de los puntos de equilibrio, puede calcularse mediante la formulación de flujos de potencia. De tal manera, dependiendo de las condiciones iniciales que se utilicen para resolver el problema, así será el punto de equilibrio obtenido. En esta tesis se obtiene un solo punto de equilibrio, también denominado punto de equilibrio regular o aislado, para un valor determinado de  $\lambda_e$ ; es decir, no se pretende obtener el número posible de soluciones.

La estabilidad de un punto de equilibrio aislado  $\mathbf{P}_e = (x^*, y^*, \lambda_e)$  puede ser determinada al linealizar el conjunto de ecuaciones (2.43) y (2.44), y efectuar un análisis de eigenvalores al sistema linealizado. Este proceso permite obtener información en relación a la estabilidad local del sistema eléctrico de potencia bajo análisis. La linealización de las ecuaciones se realiza al expresarlas por medio de un polinomio, el cual es obtenido mediante la aplicación del Teorema de Taylor. En este caso, cada función no lineal se expande en su serie de

Taylor de 1<sup>er</sup> grado en la vecindad del punto de equilibrio de interés. El sistema resultante es:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

donde:

$$\mathbf{J} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \right|_{(x^*, y^*, \lambda_e)} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

En resumen, una vez resuelto el sistema de ecuaciones (2.45) y (2.46) y obtenido el punto de equilibrio, se determina del conjunto de eigenvalores de la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  evaluada en el punto de equilibrio bajo análisis para determinar la estabilidad local del sistema,. Si todos los eigenvalores tienen parte real diferente de cero, el punto de equilibrio es llamado punto de equilibrio hiperbólico; de lo contrario, es llamado punto de equilibrio no hiperbólico.

El punto de equilibrio hiperbólico se clasifica de la siguiente manera [Kasusky02]: nodo estable, nodo inestable o punto de silla. Este punto de equilibrio es estable o sumidero si todos los eigenvalores de la matriz jacobiana tienen parte real negativa; es decir, se tiene un nodo estable. Además, si algunos de estos eigenvalores son complejos, el nodo estable es llamado foco estable. Por el contrario, el punto de equilibrio es llamado nodo inestable o fuente si uno o más eigenvalores de la matriz  $\mathbf{J}$  tienen parte real positiva. Conjuntamente, si algunos de los eigenvalores del nodo inestable son complejos, se le llama foco inestable. Por último, el punto de equilibrio es un punto de silla (Saddle-Node) si se tienen eigenvalores con partes reales positivas y negativas.

El punto de equilibrio no hiperbólico es inestable si uno o más de los eigenvalores de  $\mathbf{J}$  tienen parte real positiva. Si la matriz asociada  $\mathbf{J}$  tiene algunos eigenvalores con parte real

negativa, mientras que el resto de ellos tiene parte real nula, el punto de equilibrio es marginalmente estable. Por último, el punto de equilibrio se llama centro si todos los eigenvalores de  $J$  son complejos con parte real nula

### ***2.3.2 Relación entre estabilidad de puntos de equilibrio y bifurcaciones***

La dependencia de las variables de estado  $x$  y  $y$  con los parámetros del sistema  $\lambda$ , implica que cambios en estos últimos provocan variaciones en el comportamiento del sistema. Entonces, al ocurrir un cambio en los parámetros, es necesario obtener nuevos puntos de equilibrio y realizar el cálculo arriba mencionado para determinar cualitativamente la estabilidad local del sistema. Para un estado de operación del sistema dado por un punto de equilibrio, es posible observar la dinámica del sistema. En este caso, se resuelve numéricamente el conjunto de ecuaciones diferenciales considerando como condiciones iniciales los valores de las variables de estado  $x$  y  $y$ , los cuales son dados por el punto de equilibrio.

En general, pequeños cambios en los parámetros del sistema no producen cambios cuantitativos en la operación del mismo, tal que se mantiene una operación estable. Esto se puede confirmar numéricamente al resolver las ecuaciones diferenciales, como se indicó anteriormente, observándose que el perfil de las variables de estado con respecto al tiempo es una línea recta, cuyo valor corresponde al del punto de equilibrio. De igual manera, si las condiciones iniciales son cercanas al punto de equilibrio, se tendrá una dinámica de las variables de estado la cual, después de un lapso de tiempo, desaparece para estabilizarse en el valor del punto de equilibrio.

Por el contrario, puede ocurrir que, al tener un pequeño cambio en los parámetros  $\lambda$  del sistema, se pueda producir grandes cambios cuantitativos en las propiedades del mismo que, en el peor de los casos, conducen a su pérdida de estabilidad. Tales cambios cualitativos en el comportamiento del sistema, ocasionados por variaciones en sus parámetros, son denominados bifurcaciones. Los valores de los parámetros del sistema que ocasionan la aparición de bifurcaciones son llamados parámetros de bifurcación. Por

último, los puntos de equilibrio obtenidos para un parámetro de bifurcación  $\lambda_b$ , son llamados puntos de bifurcación.

Con la finalidad de visualizar la dinámica del sistema, se puede recurrir a la integración numérica de las ecuaciones diferenciales considerando los puntos de bifurcación como condiciones iniciales. Sin embargo, otra opción es asociar los eigenvalores de la matriz Jacobiana con algún tipo de bifurcación. Esto permite saber de manera cualitativa como se comportará la dinámica del sistema sin necesidad de realizar explícitamente el proceso de integración. Este tópico se trata en detalle en el siguiente capítulo.

### 2.3.3 Teorema de Schur

La aplicación de este teorema permite obtener un sistema equivalente de orden reducido conformado solo por ecuaciones diferenciales que presente las mismas propiedades dinámicas y algebraicas que el sistema original representado por un sistema EDA.

Considerando una matriz cuadrada  $A$  de dimensión  $n+m$  la cual puede ser particionada como:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

donde  $A_{11}$  es una matriz cuadrada de orden  $(m \times m)$ ,  $A_{12}$  es una matriz cuadrada de orden  $(m \times n)$ ,  $A_{21}$  es una matriz cuadrada de orden  $(n \times m)$ ; y  $A_{22}$  es una matriz cuadrada de orden  $(n \times n)$ , entonces se cumple lo siguiente:

1. Si la matriz  $A_{11}$  no es singular, el determinante de la matriz  $A$ ,  $(\det A)$ , puede escribirse como:

$$\det [A] = \text{Det} [A_{11}] \cdot \text{Det} [A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}] \quad (2.50)$$

2. Si la matriz  $A_{22}$  no es singular, el determinante de la matriz  $A$ ,  $(\det A)$  puede escribirse como:

$$\det[A] = \text{Det}[A_{22}] \cdot \text{Det}[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}] \quad (2.51)$$

3. Si las matrices  $A_{11}$  y  $A_{22}$  no son singulares,  $(\det A)$  puede escribirse como se indica en el caso 1 o 2.

De tal manera, las matrices de orden reducido

$$A_{r1} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \quad (2.52)$$

$$A_{r2} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \quad (2.53)$$

también llamadas matrices de sensibilidades del sistema, preservan la singularidad de la matriz cuadrada  $A$ . Esta propiedad es muy deseable para técnicas de reducción de sistemas y absolutamente esencial para el análisis de bifurcaciones.

Puesto que se desea obtener un sistema equivalente de orden reducido que presente las mismas propiedades dinámicas y algebraicas que el sistema original o completo, es posible aplicar el teorema de Schur a la matriz jacobiana  $J$  definida en (2.48), y obtener 2 posibles matrices equivalentes dadas por:

$$J_x = f_x - f_y g_y^{-1} g_x \quad (2.54)$$

$$J_y = g_y - g_x f_x^{-1} f_y \quad (2.55)$$

las cuales representan 2 matrices jacobianas equivalentes asociadas con un modelo dinámico equivalente y un modelo estático algebraico equivalente, respectivamente, como se describe a continuación.

### 2.3.4 Modelo equivalente de un sistema por ecuaciones algebraicas

Asumiendo que  $f_x$  no es singular en el estado estable ( $\Delta \dot{x} = 0$ ), el teorema de la función implícita asegura que existe una función  $\phi(y, \lambda)$  definida en la vecindad del punto de equilibrio  $P_e$  tal que  $x = \phi(y, \lambda)$  [Kasusky02]. De tal manera, la estabilidad local del sistema de EDA puede ser determinada del modelo equivalente algebraico dado por  $g(\phi(y, \lambda), y, \lambda) = 0$ . Esto significa que la ecuación (2.45) puede ser incluida en el conjunto de ecuaciones algebraicas (2.46); esto se logra al considerar  $\dot{x} = 0$  y resolver para  $x(y)$  de la ecuación  $f(x, y, \lambda) = 0$ .

De lo anterior, se puede concluir lo siguiente: es posible analizar el sistema multimáquina completo, definido por un conjunto de EDA, por medio de un modelo algebraico equivalente de orden reducido dado por la ecuación  $g(\phi(y, \lambda), y, \lambda) = 0$  y calcular la estabilidad local del modelo completo, al realizar un análisis de eigenvalores del sistema algebraico equivalente linealizado alrededor del punto de equilibrio. La ecuación linealizada del sistema algebraico equivalente es:

$$0 = \mathbf{J}_y \Delta_y = \left[ g_y - g_x f_x^{-1} f_y \right]_{(x^*, y^*, \lambda_e)} \Delta_y \quad (2.56)$$

### 2.3.5 Modelo equivalente de un sistema por ecuaciones diferenciales

El modelo de EDA puede ser reducido a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias si la submatriz jacobiana de las ecuaciones algebraicas  $g_y$  es no singular. Al igual que en el caso anterior, el teorema de la función implícita establece que existe una función  $\psi(x, \lambda)$  definida en la vecindad del punto de equilibrio  $P_e$  tal que  $y = \psi(x, \lambda)$  y la cual satisface  $g(x, \psi(x, \lambda), \lambda) = 0$ . Esto permite que el sistema de EDA pueda ser representada por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO):

$$\dot{x} = f(x, \psi(x, \lambda), \lambda) \quad (2.57)$$

Lo anterior es equivalente a que la ecuación (2.46) puede ser incluida en el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (2.45); esto se logra al resolver para  $y(x)$  de la ecuación  $g(x, y, \lambda) = 0$  y sustituir en la ecuación (2.45).

El modelo equivalente linealizado del conjunto EDO se obtiene del teorema de Schur y es dado por:

$$\Delta \dot{x} = \mathbf{J}_x \Delta x = \left[ f_x - f_y g_y^{-1} g_x \right] \Big|_{(x^*, y^*, \lambda_e)} \Delta x \quad (2.58)$$

Basado en los dos modelos equivalentes descritos, un cambio cualitativo en el comportamiento del sistema linealizado completo puede ser determinado por el análisis de eigenvalores de los modelos linealizados equivalentes representados solo por EDO o por ecuaciones algebraicas. Esto dependerá de la singularidad de las matrices  $f_x$  y  $g_y$ .

## Capítulo 3

### Teoría de Bifurcaciones

#### 3.1 Introducción

Uno de los mayores problemas de la teoría de sistemas dinámicos es analizar el comportamiento transitorio y estado estable de un sistema definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales. Este problema puede ser resuelto de forma convencional al calcular las órbitas y trayectorias por simulación numérica. Sin embargo, se puede aplicar la teoría de bifurcaciones para predecir el comportamiento de las órbitas y trayectorias del sistema sin necesidad de solucionar las ecuaciones diferenciales numéricamente. Esta predicción puede realizarse al conocer las posiciones de puntos de equilibrio, así como su estabilidad; es decir, determinar la aparición y desaparición de soluciones estables (también llamadas puntos de equilibrio) cuando uno de los parámetros del sistema es modificado.

En el caso de sistemas eléctricos de potencia, la teoría de bifurcación puede ser aplicada para caracterizar cambios cualitativos en la respuesta dinámica del sistema debidos a variaciones lentas en sus parámetros sobre un rango especificado.

Entre los tipos de comportamiento dinámico que pueden llegar a observarse están los ciclos límite, movimiento cuasiperiódico e incluso caos. A continuación, se explica los conceptos básicos de la teoría de bifurcaciones como puntos de equilibrio, ciclos límite, caos, además de los diferentes tipos de bifurcaciones que se estudian en esta tesis. Estos conceptos son explicados en el contexto de sistemas eléctricos de potencia.

### 3.2 Sistema dinámico

Un sistema dinámico es aquel cuyo estado evoluciona (cambia) con el tiempo  $t$ . La evolución es gobernada por un conjunto de reglas que especifican el estado del sistema para los valores discretos o continuos de  $t$  [Nayfeh95]. Una evolución de tiempo discreto es usualmente descrita por un sistema de ecuaciones algebraicas, mientras que una evolución de tiempo continuo es usualmente descrita por un sistema de ecuaciones diferenciales.

El comportamiento asintótico de un sistema dinámico conforme  $t \rightarrow \infty$  es llamado el estado estable del sistema. Frecuentemente, este estado estable acontece solo para un conjunto limitado de valores iniciales de las variables que determinan el comportamiento del sistema. El comportamiento de un sistema dinámico antes de alcanzar el estado estable es llamado estado transitorio, y la solución correspondiente del sistema dinámico se denomina solución transitoria [Nayfeh95].

### 3.3 Sistemas de tiempo discreto

Un sistema de tiempo discreto es gobernado por la ecuación:

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

donde  $x_k \in \mathcal{R}^n$  es el estado del sistema en el tiempo  $t_k$ , y  $f$  es un mapa o transformación que proyecta al estado actual del sistema  $x_k$  al siguiente estado  $x_{k+1}$ , acontecido en un tiempo  $t_{k+1}$ . Dada una condición inicial  $x_0$ , las aplicaciones repetidas de  $f$  generan una secuencia de puntos  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  llamada una órbita. El término órbita es a menudo usado como un sinónimo de trayectoria [Nayfeh95].

Con referencia a la ecuación (3.1), la función  $f$  es también llamada operador evolución. Cuando se desea estudiar la evolución que tiene el sistema al cambiar o controlar un cierto conjunto de parámetros  $M$ , la ecuación (3.1) se puede redescibir como:

$$x_{k+1} = f(x_k; M) \quad (3.2)$$

donde  $M$  es el vector de los parámetros de control.

### 3.4 Sistemas de tiempo continuo

Para valores de tiempo continuo, la evolución de un sistema es gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo y no autónomo.

#### 3.4.1 Sistema no autónomo

En el caso de los sistemas no autónomos, la ecuación es de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.3)$$

donde  $x$  es de dimensión finita,  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $t \in \mathfrak{R}$ , y  $f$  depende explícitamente de  $t$ . El vector  $f$  es referido como el vector de campo, el vector  $x$  es llamado el vector de estado debido a que este describe el estado del sistema, el espacio  $\mathfrak{R}^n$  en que  $x$  evoluciona es llamado el espacio de estado. El espacio dimensional  $(n+1)$   $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1$ , donde el espacio adicional corresponde a  $t$ , es referido como un espacio de estado extendido. En (3.3), si  $f$  es una función lineal,  $x$  es llamado un vector de campo lineal.

En general, la proyección de la solución de (3.3) en el espacio de estado de dimensión- $n$  es referida como una trayectoria o una órbita del sistema. En otras palabras, la solución podría ser interpretada como un punto que se mueve a lo largo de la trayectoria, ocupando diferentes posiciones en diferentes tiempos similar a la forma del movimiento de un planeta a través del espacio. Debido a que la solución se obtiene a partir de la condición inicial  $x_0$ , la órbita pasa a través de  $x_0$  en  $t = 0$ . El símbolo  $\gamma(x_0)$  o  $\Gamma$  se utiliza para denotar una órbita.

La ecuación (3.3) es también llamada ecuación de evolución. La evolución del sistema descrito por esta ecuación esta controlada por un conjunto de parámetros  $M$ . Para hacer esta dependencia de parámetros explicita, se describe la evolución por [Nayfeh95]:

$$\dot{x} = f(x, t; M) \quad (3.4)$$

donde  $M$  es un vector de parámetros de control. Formalmente,  $M \in \mathfrak{R}^m$  y el vector función  $f$  representa una transformación  $f: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1 \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ . Si la existencia y unicidad de las soluciones de un sistema (3.6) se cumplen, entonces este sistema es determinístico [Nayfeh95]. Esto significa que dos curvas integrales que empiezan desde dos diferentes condiciones iniciales no pueden intersectar una con la otra en el espacio de estado extendido. Sin embargo, las orbitas correspondientes se pueden intersectar una con la otra en el correspondiente espacio de estado. Para ilustrar el concepto anterior se considera el sistema dinámico determinístico dado por la ecuación (3.5) [Nayfeh95]. En este caso, los valores de los parámetros de la ecuación son:  $\omega = 8, \mu = 2, F = 10$  y  $\Omega = 2$ . Con la finalidad de obtener dos orbitas; para un tiempo inicial  $t = 0$ , se tienen dos conjuntos de condiciones iniciales  $(x, y)$  dados por  $(1, 0)$  y  $(1.5, 0)$ , respectivamente. La evolución de las dos orbitas en el espacio de estado extendido y espacio de estado es ilustrado en las Figuras 3.1 (a) y 3.1 (b), respectivamente.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2\omega x - 2\mu y + F \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

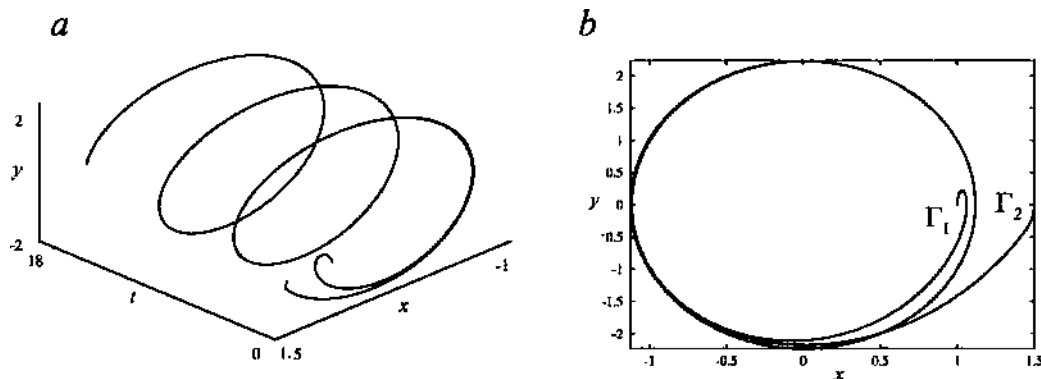


Figura 3.1 Comportamiento de un sistema no autónomo.

En la Figura 3.1 (a) se observa que las curvas no se intersectan una con la otra en cualquier parte del espacio  $(x, y, t)$ . La aparente intersección es una consecuencia de seleccionar un ángulo de vista.

### 3.4.2 Sistema autónomo

En el caso de los sistemas autónomos, las ecuaciones son de la forma [Nayfeh95]:

$$\dot{x} = f(x; M) \quad (3.6)$$

donde,  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  es el estado en el tiempo  $t$ , y  $f$  es el vector de campo que no depende explícitamente de la variable independiente  $t$  y puede ser representada como  $f: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ . El sistema (3.6) es independiente del tiempo. Esto significa que si  $x(t)$  es una solución de (3.6), entonces  $x(t + \tau)$  es también una solución de (3.6) para algún valor arbitrario de  $\tau$  [Nayfeh95]. Dada una condición inicial  $x(0) = x_0$  para el vector de estado en el tiempo  $t = 0$ , la solución de (3.6) puede obtenerse por métodos de integración numérica. Lo anterior constituye la solución de un problema de valor inicial. Como una consecuencia, dos trayectorias u orbitas de un sistema autónomo no pueden intersectar una con la otra en el espacio de estado de dimensión  $n$  del sistema.

Un ejemplo de un sistema autónomo es dado por el conjunto de ecuaciones (3.7) [Nayfeh95].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 - 2\mu x_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\omega^2 = 8$  y  $\mu = 2$ . Con la finalidad de obtener diferentes orbitas en el espacio de fase se seleccionan un conjunto de cuatro condiciones iniciales  $(x, y)$  dadas por:  $(1.0, 1.0)$ ,  $(0.0, -1.2)$ ,  $(-1.0, -1.0)$  y  $(0.0, 1.2)$ . Estas orbitas se muestran en la Figura 3.2,

observándose que estas orbitas no se intersectan entre si en cualquier parte del plano de fase conforme estas se aproximan al origen, donde se unen.

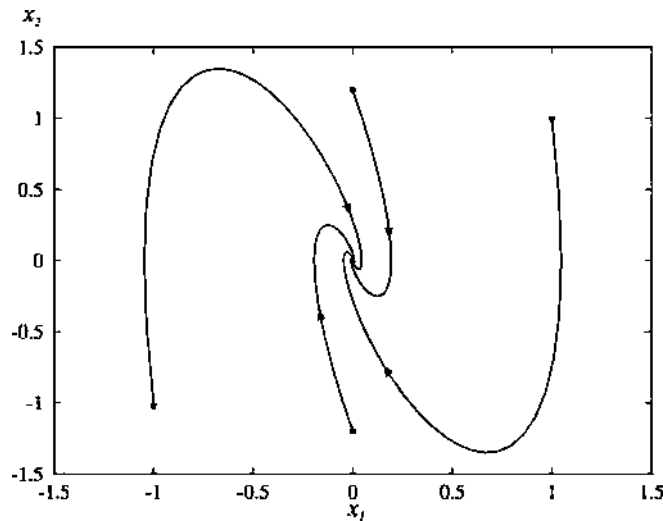


Figura 3.2 Orbitas de un sistema autónomo en el espacio de fase.

La dirección de las orbitas en el espacio  $(x_1, x_2)$  es dada por [Nayfeh95]:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-(\omega x_1 + 2\mu x_2)}{x_2} \quad (3.8)$$

La cual esta definida en cualquier parte del plano excepto en el origen. El punto  $(0,0)$  donde ocurre la singularidad de (3.8) es llamado un punto singular [Nayfeh95].

### 3.4.3 Retratos de fase y flujo

Frecuentemente se examina la evolución de un conjunto de trayectorias emanando desde diferentes condiciones iniciales en el espacio de estado. Conforme  $t \rightarrow \infty$ , la evolución se aproxima a diferentes soluciones (asintóticas) del sistema de ecuaciones no lineales. Un retrato de fase es una colección de trayectorias que representan las soluciones de estas ecuaciones en el espacio de fase y proporciona información sobre los comportamientos transitorio y asintótico de la solución del sistema [Nayfeh95]. En este contexto, la Figura 3.2 es un retrato de fase de la ecuación (3.7).

### 3.5 Puntos de equilibrio y su estabilidad

Una importante clase de soluciones de una función o mapa, como  $x_{k+1} = f(x_k; M)$  o un sistema de ecuaciones diferenciales, como  $\dot{x} = f(x; M)$ , son las soluciones de puntos fijos o soluciones de equilibrio. El punto fijo también es llamado punto de equilibrio, puntos seguros, puntos constantes o soluciones de reposo [Nayfeh95].

#### 3.5.1 Sistemas de tiempo continuo

En el caso de un sistema autónomo descrito por la ecuación (3.6), los puntos de equilibrio son definidos por la desaparición del vector de campo como se describe en la siguiente ecuación:

$$f(x; M) = 0 \quad (3.9)$$

Un punto en el espacio de estado donde esta condición sea satisfecha es llamado punto singular [Nayfeh95]. En tal punto, la curva integral del vector de campo  $f$  corresponde al mismo punto. Físicamente un punto fijo representa a una posición de equilibrio del sistema, más no su estabilidad. Esto quiere decir que en el punto de equilibrio el sistema esta en reposo, pero no significa que el sistema sea estable ante una pequeña perturbación.

La estabilidad del sistema puede ser obtenida sin necesidad de resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales al determinar la estabilidad del punto de equilibrio por la aplicación del concepto de estabilidad de Lyapunov [Kasusky04].

Un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen cerca del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es inestable [Seron00]. Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia este punto a medida que el tiempo se aproxima a infinito [Seron00].

El teorema de estabilidad de Lyapunov da condiciones suficientes para estabilidad de puntos de equilibrio. Considerando el sistema estacionario

$$\dot{x} = f(x, M) \quad (3.10)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}^n$  es un mapa local en el dominio  $D \subset \mathfrak{R}^n$  en  $\mathfrak{R}^n$ . Si se supone que  $\bar{x} \in D$  es un punto de equilibrio de (3.10), es decir  $f(\bar{x}, M) = 0$ , este presenta las siguientes características de estabilidad [Seron00].

- estable, si dado un pequeño número  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- inestable si no es estable

- asintóticamente estable, si es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

### 3.5.2 Linealización del punto de equilibrio

La solución de (3.10) para  $M = M_0$  es  $x_0$ , donde  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$  y  $M_0 \in \mathfrak{R}^m$ . Para determinar la estabilidad de este punto de equilibrio, se sobrepone una pequeña perturbación  $y$  y se obtiene:

$$x(t) = x_0 + y(t) \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.11) en (3.10) se tiene

$$\dot{y} = f(x_0 + y; M_0) \quad (3.12)$$

tal que el punto fijo  $x = x_0$  del sistema no lineal (3.10) ha sido transformado en el punto fijo  $y=0$  de (3.12). Asumiendo que  $f$  es por lo menos dos veces diferenciable,  $C^2$ , expandiendo (3.12) en una serie de Taylor alrededor del punto  $x_0$ , y considerando solo los términos lineales en la perturbación se llega a:

$$\dot{y} = f(x_0; M_0) + D_x f(x_0; M_0)y + O(\|y\|^2) \quad (3.13)$$

o

$$\dot{y} \approx D_x f(x_0; M_0)y = Ay \quad (3.14)$$

donde la ecuación (3.14) es un equivalente lineal del sistema no lineal (3.10). La matriz de primeras derivadas parciales  $A$ , es llamada matriz Jacobiana y es dada por (3.15).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Con la finalidad de determinar el tipo de punto fijo  $x_0$  y su estabilidad local a partir del sistema linealizado, es necesario obtener los eigenvalores de la matriz  $A$  evaluada en  $x_0$  [Nayfeh95].

Si todos los eigenvalores de  $A$  tienen parte real diferente de cero, el correspondiente punto fijo es llamado punto fijo hiperbólico, independientemente del valor de la parte imaginaria; de lo contrario, este es llamado punto fijo no hiperbólico [Nayfeh95].

Hay tres tipos de puntos fijos hiperbólicos: sumidero, foco y puntos de silla. Si todos los eigenvalores de  $A$  tienen parte real negativa, el punto fijo  $x_0$  de (3.14) es asintóticamente estable. Un punto fijo asintóticamente estable es llamado sumidero. Si la matriz  $A$  asociada con un sumidero tiene eigenvalores complejos, es llamado también un foco estable. Por otra parte, si todos los eigenvalores de  $A$  asociados con un sumidero son reales, es llamado también un nodo estable.

Cuando todos los eigenvalores de  $A$  tienen parte real positiva,  $x_0$  se dice que es una fuente. Si la matriz  $A$  asociada con una fuente tiene eigenvalores complejos, la fuente es llamada un foco inestable. Por otra parte, si todos los eigenvalores de la matriz  $A$  asociada con una fuente son reales, la fuente es llamada un nodo inestable.

Cuando algunos, pero no todos, los eigenvalores tienen parte real positiva mientras el resto de los eigenvalores tienen parte real negativa, el punto fijo asociado es llamado un punto saddle.

Si alguno de los eigenvalores de  $A$  tienen parte real negativa mientras el resto de los eigenvalores tienen parte real cero, el punto fijo  $x = x_0$  de (3.14) se dice que será neutro o marginalmente estable. Si todos los eigenvalores de  $A$  son puramente imaginarios, el punto fijo es llamado un centro.

Existen dos teoremas que permiten relacionar la estabilidad de los puntos fijos del sistema linealizado (3.14) con la estabilidad de los puntos fijos del sistema no lineal (3.10). El teorema de Hartman-Grobman se aplica a los puntos fijos hiperbólicos, mientras que el teorema de Shoshitaishvili se aplica a los puntos fijos no hiperbólicos. De estos teoremas se obtiene lo siguiente [Nayfeh95].

- a) El punto fijo  $x = x_0$  del sistema no lineal (3.10) es estable si el punto fijo  $y = 0$  del sistema lineal (3.14) es asintóticamente estable.

- b) El punto fijo  $x = x_0$  del sistema no lineal (3.10) es inestable si el punto fijo  $y = 0$  del sistema lineal (3.14) es inestable.
- c) La linealización no permite determinar la estabilidad de puntos fijos neutro (incluyendo centros) del sistema no lineal (3.10). En el caso de los puntos fijos neutro, un análisis no lineal es necesario para determinar la estabilidad de  $x_0$ . Es decir, es necesario retener algunos términos cuadráticos y de mayor orden en la expansión en series de Taylor en (3.13) [Nayfeh95].

De lo anterior, se puede concluir que para los puntos fijos hiperbólicos, los eigenvalores de la matriz  $A$  determinan la estabilidad del punto fijo y, por ende, la estabilidad del sistema no lineal. En este caso, el teorema de Hartman-Grobman [Nayfeh95] implica que las trayectorias en la vecindad de un punto fijo hiperbólico  $x = x_0$  del sistema no lineal (3.10) son cualitativamente similares a las trayectorias en la vecindad de un punto fijo hiperbólico  $y = 0$  del sistema lineal (3.14). En otras palabras, este teorema implica que en la vecindad del punto de equilibrio hiperbólico, el comportamiento dinámico del sistema linealizado es cualitativamente similar al comportamiento dinámico local del sistema dinámico no lineal. Asimismo, un cambio cualitativo en la dinámica del sistema no lineal puede ser detectado al examinar la dinámica del sistema lineal.

Por ultimo, aunque la linealización ayuda a determinar si un punto fijo hiperbólico del sistema no lineal (3.10) es estable, esta no proporciona ninguna información respecto al tamaño del dominio alrededor del punto fijo de (3.10) donde la conclusión de estabilidad se mantiene.

### 3.6 Puntos periódicos y su estabilidad

Un sistema dinámico exhibe comportamiento periódico cuando este retorna a un estado previamente experimentado. Lo anterior se puede escribir como  $x(t_1) = x(t_1 + T)$  para  $T > 0$ . En este caso se asume que la trayectoria que el sistema sigue desde  $t_1$  a  $t_1 + T$ ,

siempre se repite debido a que el estado del sistema en el tiempo  $t_1 + T$  es exactamente el mismo que el estado  $t_1$  [Scheinerman00]. Lo anterior implica que  $x(t_1) = x(t_1 + T) = x(t_1 + 2T) = x(t_1 + 3T) = \dots = x(t_1 + \infty T)$ .

Una solución periódica de (3.10) es llamada ciclo límite si no existen otras soluciones periódicas cercanas a ella. En otras palabras un ciclo límite es una solución periódica aislada y corresponde a una órbita periódica aislada en el espacio de fase. Los ciclos límite son inherentemente un fenómeno no lineal. En sistemas lineales pueden existir soluciones periódicas, pero con la característica que las órbitas cerradas no están aisladas. A este conjunto de soluciones se les llama centros.

La estabilidad de los ciclos límite es análoga a la de los puntos de equilibrio:

- Un ciclo límite es asintóticamente estable si todas las órbitas, que inician cerca de este, alcanzan el ciclo límite conforme el tiempo se incrementa.
- Un ciclo límite es inestable si todas las órbitas comenzando cerca de este, se alejan o divergen del mismo.

A manera de ejemplificar lo anterior la Figura 3.3, muestra las órbitas cerradas correspondientes a las soluciones periódicas de la ecuación (3.16), donde los valores de los parámetros son:  $\mu = 1, \alpha = -1, \omega = 1$  y  $\beta = 1$ .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega y + (\alpha x - \beta y)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y + (\beta x + \alpha y)(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{3.16}$$

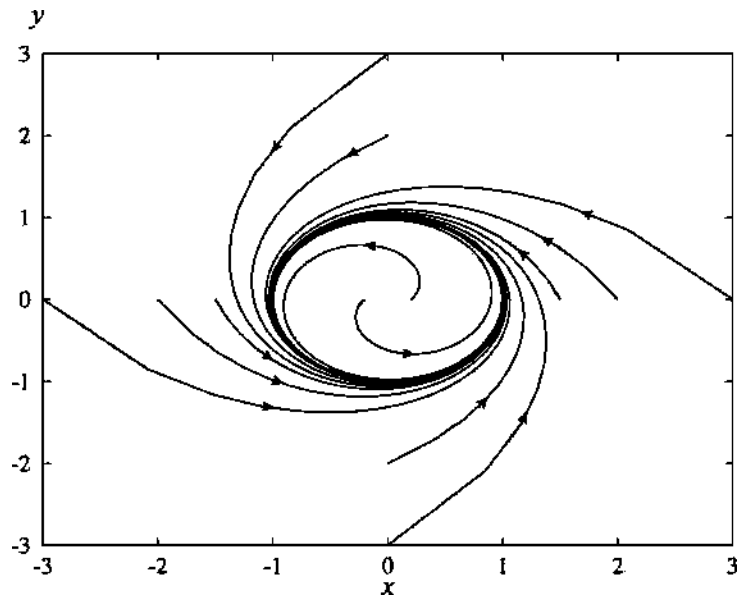


Figura 3.3 Ciclo limite estable

Las flechas indican la dirección de la evolución de las orbitas. Debido a que no hay orbitas cerradas lo suficientemente cerca de esta solución periódica, la orbita cerrada es un ciclo limite. Este es también un conjunto invariante debido a que una orbita iniciada desde cualquier punto sobre la trayectoria de la orbita cerrada permanece sobre esta orbita por todo el tiempo. Además, se observa que las orbitas positivas iniciadas desde diferentes puntos en el espacio de estado  $x$ - $y$ , y otras en el origen, son atraídas hacia el ciclo limite. De lo anterior, este es un ciclo limite estable o un atractor periódico [Nayfeh95].

En la Figura 3.4, se muestran algunas orbitas de la ecuación (3.16) para los valores de parámetros  $\mu = -1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\omega = 1$  y  $\beta = 1$ . De igual forma, debido a que no hay otra trayectoria cerrada lo suficientemente cerca esta solución periódica, es un ciclo limite. Sin embargo, este ciclo limite es inestable debido a que todas las orbitas positivas iniciadas desde puntos cercanos se alejan de este ciclo limite conforme  $t \rightarrow \infty$ , mientras las orbitas negativas iniciadas desde puntos cercanos se mueven hacia este conforme  $t \rightarrow -\infty$ . El ciclo limite antes mencionado es un ciclo limite inestable y es un ejemplo de un repelente. En este caso, el origen es un punto atractor, como se observa en la figura.

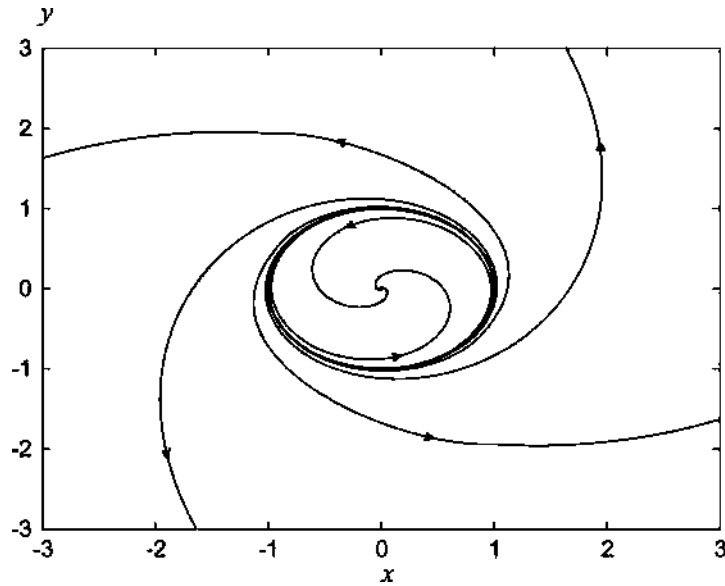


Figura 3.4 Ciclo limite inestable

### 3.7 Bifurcación

Bifurcación es una palabra francesa introducida a sistemas dinámicos no lineales por Poincaré que es usada para indicar un cambio cualitativo en las características dinámicas de un sistema debido a la variación de uno o más de sus parámetros físicos o parámetros de control. Este cambio cualitativo se hace manifiesto al ocurrir un cambio en el número, tipo y/o estabilidad de los puntos de equilibrio y órbitas periódicas; es decir, cambia la estabilidad estructural del sistema. Los valores de los parámetros de control en los cuales acontecen estos cambios son llamados parámetros de bifurcación. El punto de equilibrio en el espacio de estado donde acontece este cambio es llamado punto de bifurcación.

En el problema de bifurcaciones, es conveniente considerar un espacio formado por las variables de estado y los parámetros de control, llamado espacio estado-control o espacio estado-parametros. La trayectoria plasmada en este espacio es llamada diagrama de bifurcación.

Las formas en que el sistema cambia al encontrarse con un punto de bifurcación son muy variadas. Esto lleva a la clasificación de los distintos tipos de bifurcación, y a su caracterización. El cambio cualitativo del sistema que ocurre en la vecindad de un punto

fijo o una solución periódica del sistema, puede ser catalogado como bifurcación local [Nayfeh95]. Las bifurcaciones que tratan con el periodo de las soluciones periódicas se clasifican como bifurcaciones globales [Nayfeh95]. Las bifurcaciones globales implican aspectos globales del plano de fase y no pueden ser detectadas analizando en las pequeñas vecindades de los puntos de equilibrio [Kuznetzov98].

La manera en que los puntos de bifurcación local pueden ser encontrados es definida por su naturaleza misma; es decir, en la vecindad del punto de bifurcación, el plano de fase es estructuralmente inestable. De tal manera que las bifurcaciones locales solo pueden ocurrir para valores de parámetros que convierten al punto de equilibrio en no hiperbólico. Esto proporciona un criterio fácil de aplicar para la detección de bifurcaciones que consiste simplemente en encontrar los valores de los parámetros para los cuales el flujo linealizado cerca del punto de equilibrio tiene un eigenvalor puramente imaginario.

### **3.8 Bifurcaciones Locales**

Las bifurcaciones locales se asocian con un cambio de estabilidad de un punto de equilibrio. Esto sucede cuando el retrato del espacio de estado antes y después de un punto de equilibrio es cualitativamente diferente. El parámetro de control correspondiente a un punto de equilibrio de un sistema es variado lentamente hasta que este punto de equilibrio pierde su estabilidad a través de alguna de las siguientes bifurcaciones: bifurcación saddle-node, bifurcación pitchfork, bifurcación transcítica o bifurcación Hopf. Al punto de bifurcación asociado con las bifurcaciones saddle-node, pitchfork y transcítica solamente convergen ramas de puntos fijos o soluciones estáticas. Por lo tanto estas tres bifurcaciones son clasificadas como bifurcaciones estáticas. Por lo contrario, en una bifurcación Hopf convergen ramas de puntos fijos y soluciones periódicas, por lo que se le clasifica como dinámica. En esta tesis solo se analizan las bifurcaciones saddle-node y Hopf que se describen en las siguientes secciones.

### 3.8.1 Bifurcación saddle-node

Las bifurcaciones saddle-node, también conocidas como puntos de vuelta o bifurcaciones de doblez, son típicamente identificadas por un par de puntos de equilibrio que convergen a un solo punto de equilibrio conforme el parámetro de bifurcación es variado lentamente. Lo anterior ocurre con la aparición de un simple eigenvalor cero en la matriz Jacobiana (3.15). La ocurrencia de esta bifurcación conduce a la desaparición del equilibrio del sistema conforme el parámetro de bifurcación es variado lentamente.

Formalmente, una bifurcación saddle-node ocurre en un punto de equilibrio  $(x_0; \mu_c)$  del sistema (3.10), a un cierto valor del parámetro de bifurcación  $\mu_c$ , si las siguientes condiciones son satisfechas:

$$\text{SN1. } f(x_0; \mu_c) = 0$$

$$\text{SN2. } D_x f \text{ tiene un eigenvalor con parte real cero mientras que todos los otros eigenvalores tienen parte real diferente de cero en } (x_0; \mu_c).$$

$$\text{SN3. } \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{x_0, \mu_c} \neq 0$$

La primera condición asegura que la solución considerada es un punto de equilibrio del sistema (3.10), la segunda condición implica que el punto de equilibrio es un punto de equilibrio no hiperbólico y la tercera condición implica condiciones de transversalidad, y determinan el carácter genérico de la bifurcación saddle node [Nayfeh95]. Estas condiciones son necesarias pero no suficientes [Nayfeh95]. En el espacio estado-control, todas las ramas de los puntos de equilibrio que convergen a un punto de bifurcación saddle-node tienen la misma tangente.

Con la finalidad de mostrar como acontece esta bifurcación, se considera el siguiente sistema [Strogatz00]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}\tag{3.17}$$

donde  $\mu$  es el parámetro de control . Para un valor de  $\mu < 0$  el sistema (3.17) no tiene ningún punto de equilibrio. Sin embargo, para  $\mu > 0$  se tienen dos puntos de equilibrio en  $(x, y) = (\sqrt{\mu}, 0)$  y un punto saddle en  $(x, y) = (-\sqrt{\mu}, 0)$ . En este caso la matriz jacobiana tiene un solo eigenvalor  $\lambda = -2x$ . El punto de equilibrio  $(x, y) = (\sqrt{\mu}, 0)$  es un nodo estable debido a que  $\lambda < 0$ , y el punto  $(x, y) = (-\sqrt{\mu}, 0)$  es un nodo inestable debido a que  $\lambda > 0$ . El flujo asociada a la solución de (3.17) se muestra gráficamente en el espacio de estado dado en las Figuras 3.5 a 3.7 para diferentes valores de  $\mu$ .

De la Figura 3.5 se puede observar que cuando el parámetro de bifurcación es mayor que cero, existen dos puntos de equilibrio en el sistema, uno estable y otro inestable. Para el punto estable (derecha) se puede observar que la dirección del flujo en la vecindad del punto de equilibrio tiende hacia este punto. Por el contrario, para el punto inestable (izquierda), la dirección del flujo se aleja de este punto.

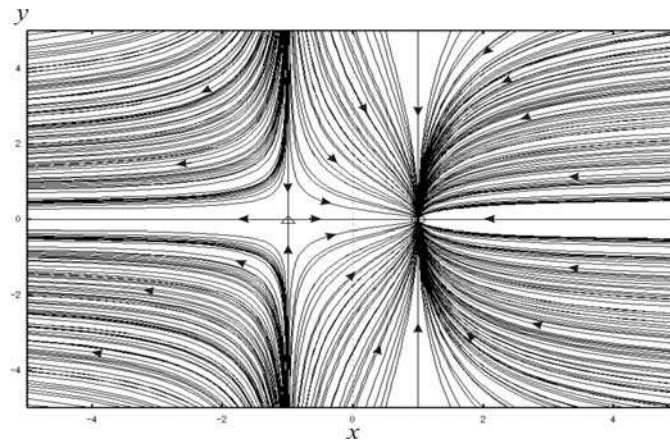


Figura 3.5 Dirección del flujo cuando  $\mu > 0$

En la Figura 3.6 se puede observar que cuando el parámetro de control es igual a cero, el punto estable e inestable chocan y se produce el punto de bifurcación saddle-node. En la

Figura 3.7 el parámetro de bifurcación es menor a cero y no existen puntos de equilibrio esto se puede observar debido a que el flujo no converge a ningún punto de equilibrio.

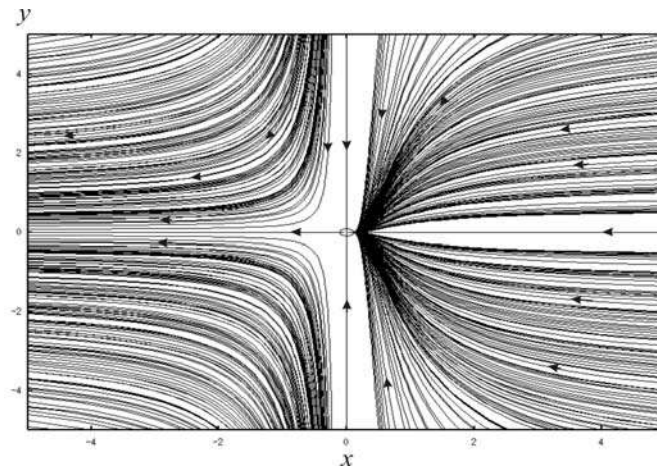


Figura 3.6 Dirección del flujo cuando  $\mu = 0$

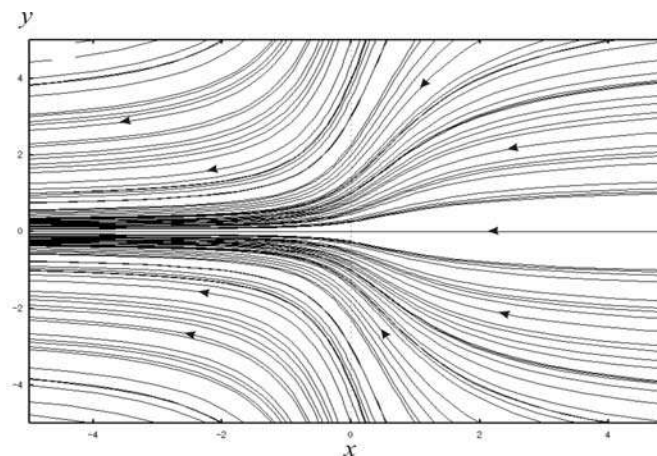


Figura 3.7 Dirección del flujo cuando  $\mu < 0$

En la Figura 3.8 se muestra el diagrama de bifurcación para las diferentes soluciones de los puntos de equilibrio del sistema (3.17). Las soluciones asociadas a los puntos de equilibrio estable e inestable obtenidas para diferentes valores del parámetro de bifurcación  $\mu$ , son representadas en el diagrama de bifurcación con línea continua gruesa y línea continua delgada respectivamente. Del diagrama de bifurcación se puede observar que conforme  $\mu$  tiende a cero, las soluciones estables e inestables se aproximan entre si, hasta que quedan situadas en el mismo lugar para el valor de  $\mu=0$ . En este valor del parámetro de

bifurcación acontece la bifurcación saddle-node. Para valores de  $\mu$  menores a cero, no existe ninguna solución del sistema. Las dos ramas que se unen en el punto de bifurcación tienen la misma tangente.

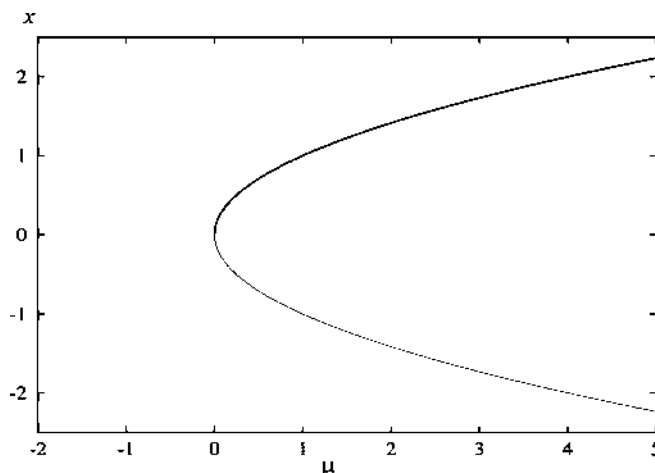


Figura 3.8 Diagrama de bifurcación saddle-node.

### 3.8.2 Bifurcación Hopf

Las bifurcaciones Hopf están relacionadas con sistemas de más de una dimensión. Las bifurcaciones Hopf están caracterizadas por orbitas periódicas (ciclos limite) emergiendo alrededor de un punto de equilibrio. Cuando el parámetro de bifurcación  $\mu$  es variado, el punto de equilibrio  $(x, \mu)$  cambia, y también lo hacen los eigenvalores correspondientes a la matriz Jacobiana del sistema (3.15). El punto donde un par de eigenvalores complejos conjugados alcanza al eje imaginario y cruzan hacia la parte derecha del plano complejo con respecto al cambio del parámetro de bifurcación  $\mu$ , es conocido como un punto de bifurcación Hopf. Este fenómeno es mostrado en la Figura 3.9, donde en el punto de bifurcación un par de eigenvalores complejos conjugados cruzan el plano complejo, dando lugar a una bifurcación Hopf.

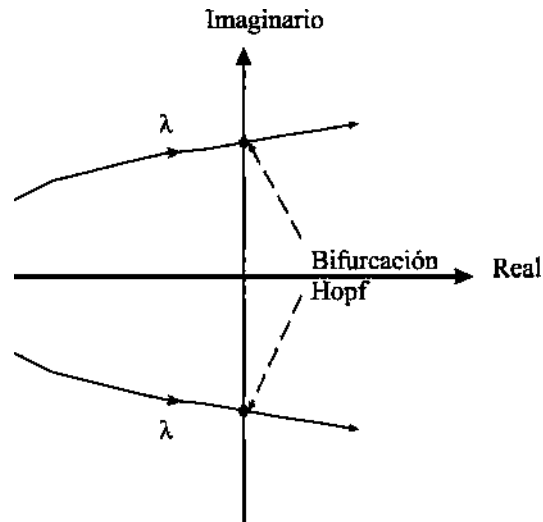


Figura 3.9 Posición del eigenvalor crítico en una bifurcación Hopf

Formalmente, una bifurcación Hopf ocurre en un punto de equilibrio  $(x_0; \mu_c)$  del sistema (3.10), a un cierto valor del parámetro de bifurcación  $\mu_c$ , si las siguientes condiciones son satisfechas [Mithulananthan02]:

- H1.**  $f(x_0, \mu_c) = 0$
- H2.** El Jacobiano evaluado en el punto  $(x_0, \mu_c)$  deberá tener solamente un par de eigenvalores puramente imaginarios  $\lambda = \pm j\beta$ , mientras que todos los demás eigenvalores tienen parte real diferente de cero.
- H3.** La relación de cambio de la parte real del eigenvalor crítico  $\text{Re}\{\lambda(\mu)\}$  con respecto al parámetro de bifurcación  $\mu$  deberá ser diferente de cero, es decir:

$$\left. \frac{d \text{Re}\{\lambda(\mu)\}}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_c} \neq 0$$

Las dos primeras condiciones implican que el punto fijo sufre una bifurcación y es un punto fijo no hiperbólico. La tercera condición, llamada condición de transversalidad, implica que

el par de eigenvalores críticos cruzan el eje imaginario del plano complejo conforme el parámetro  $\mu$  cambia, produciendo oscilaciones en el sistema.

Cuando las tres condiciones anteriormente descritas son satisfechas, un ciclo limite emerge del punto de bifurcación  $(x_0, \mu_c)$  con un periodo inicial de  $T_0 = 2\pi/\beta$  y una amplitud  $x_{amp}$ . De igual manera, Hopf demostró que a lo largo de la trayectoria de soluciones periódicas, el parámetro de bifurcación  $\mu$  es una función par de la amplitud  $x_{amp}$  dada por  $\mu = \mu_2 x_{amp}^2$ , donde  $\mu_2 \neq 0$  es llamado coeficiente de curvatura o estabilidad [Moiola96]. Es importante mencionar que soluciones periódicas podrían también emerger desde  $(x_0, \mu_c)$  cuando las condiciones de transversalidad no son satisfechas, dando lugar a una bifurcación Hopf degenerada. Esta bifurcación será descrita en la próxima sección.

La característica oscilatoria que experimenta el sistema debido a la bifurcación Hopf permanecerá estable o crecerá dependiendo si la bifurcación Hopf es supercrítica (SHB) o subcrítica (UHB); respectivamente [Strogatz00], dependiendo del signo de  $\mu_2$  [Golubitsky81].

La bifurcación supercrítica ocurre cuando un punto de equilibrio pierde estabilidad en el parámetro de bifurcación y se transforma en un ciclo límite estable para valores más allá del parámetro de bifurcación. Un ejemplo de una bifurcación Hopf supercrítica es dado por la ecuación (3.18).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + \beta x^2\end{aligned}\tag{3.18}$$

Los planos de fase de esta bifurcación se muestran en la Figura 3.10 para valores de  $\mu$  antes y después de la bifurcación. Para  $\mu > 0$  hay una espiral inestable en el origen y un ciclo limite estable. Cuando  $\mu < 0$ , el origen  $x=0$  es una espiral estable cuyo sentido de rotación depende del signo de  $\omega$ .

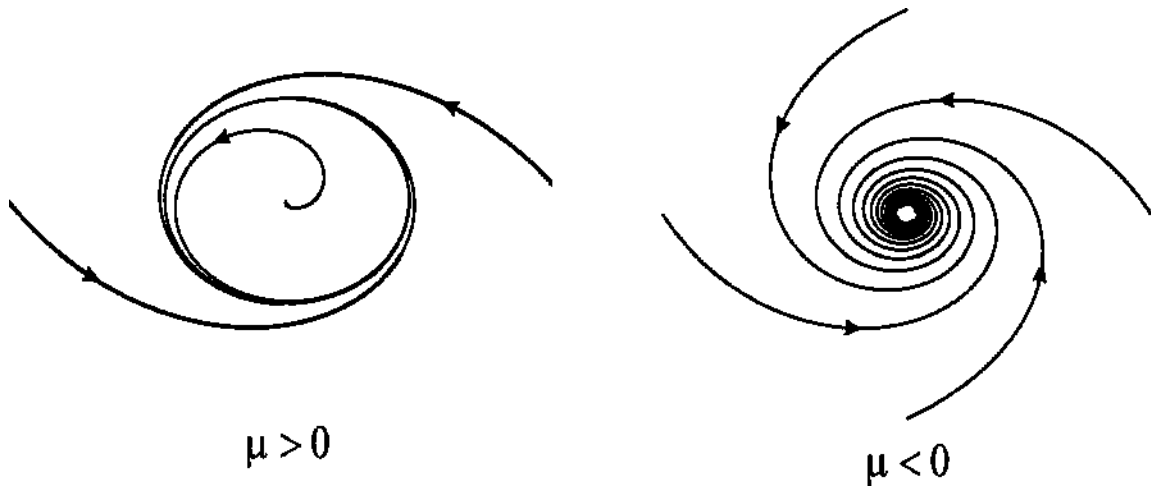


Figura 3.10 Planos de fase de una bifurcación Hopf supercrítica

El diagrama de bifurcación se muestra en la Figura 3.11. En este tipo de bifurcaciones, se tiene localmente alrededor del punto de equilibrio, una rama de puntos fijos estables, una rama de puntos fijos inestables y una rama de soluciones periódicas estables. La rama de soluciones periódicas estables emana de la línea recta de los puntos de equilibrio estables en forma de curva como se muestra en la Figura 3.11.

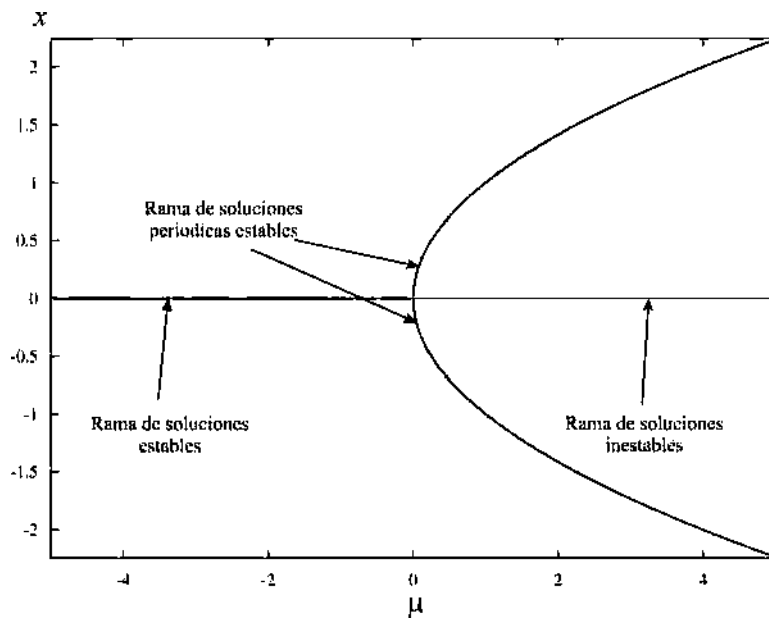


Figura 3.11 Diagrama de bifurcación de una Hopf supercrítica

La bifurcación Hopf subcrítica acontece cuando desde un punto de equilibrio estable emerge un ciclo límite inestable. Esta bifurcación es muy peligrosa en cuestiones de ingeniería, ya que el ciclo límite inestable puede conducir al sistema a un estado caótico. Un ejemplo de una bifurcación Hopf subcrítica es dado por la ecuación (3.19). Los planos de fase de esta bifurcación se muestran en la Figura 3.12.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + x^3 - x^5 \\ \dot{\theta} &= \omega + \beta x^2\end{aligned}\tag{3.19}$$

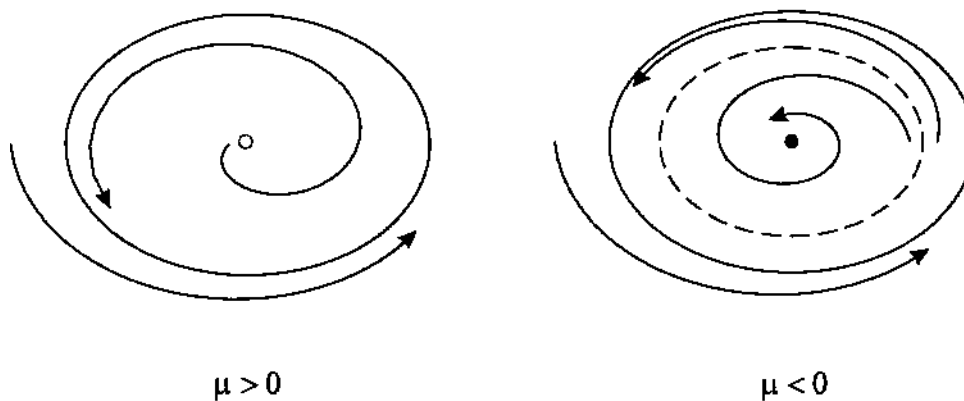


Figura 3.12 Plano de fase de una bifurcación Hopf subcrítica.

Para  $\mu > 0$ , el ciclo límite es el único atractor. Cuando  $\mu < 0$  se tienen dos atractores, el ciclo límite estable y un punto fijo en el origen. Entre ellos está un ciclo límite inestable que se muestra en línea discontinua. Conforme  $\mu$  se incrementa, el ciclo límite inestable se reduce a un lazo alrededor del punto fijo.

El diagrama de bifurcación de una bifurcación Hopf subcrítica se muestra en la Figura 3.13. La rama de soluciones periódicas inestables emana de la línea recta de los puntos de equilibrio estables en forma de curva como se muestra en la Figura 3.13.

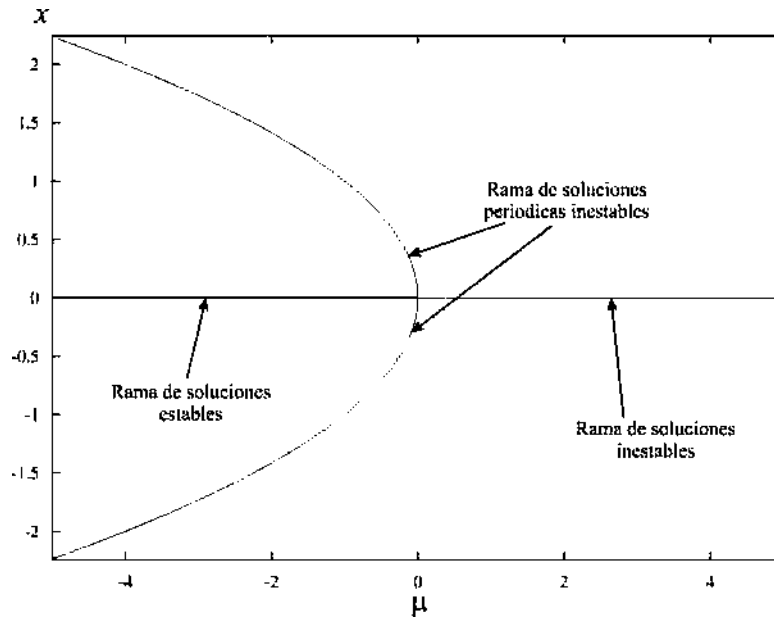


Figura 3.12 Diagrama de bifurcación de una Hopf subcrítica

### 3.8.3 Bifurcación Hopf degenerada

El teorema de Hartman-Grobman descrito en la sección 3.5.2 implica que la dinámica local de un sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio puede ser determinada mediante el análisis del sistema linealizado alrededor de este punto de equilibrio siempre y cuando este punto sea hiperbólico. Sin embargo, cuando se desea investigar la dinámica alrededor de un punto de equilibrio no hiperbólico, este teorema no es aplicable y se hace uso del teorema enunciado por Hopf para saber que existe una solución periódica del sistema alrededor de este punto de equilibrio.

Cuando la dinámica del sistema no lineal depende de más de uno de sus parámetros físicos o de control es posible que varias de las condiciones enunciadas por Hopf no se cumplan alrededor del punto de equilibrio no hiperbólico, ocurriendo lo que se denomina bifurcación Hopf degenerada [Moiola96]. En este contexto, es necesario utilizar técnicas de análisis matemático más avanzadas, como la teoría de singularidad [Moiola96, Golubitsky85], para determinar las diversas dinámicas asociadas a este tipo de bifurcaciones.

La teoría de singularidad permite reducir las trayectorias de solución de un sistema dinámico no lineal a su forma más simple posible, preservando la equivalencia entre ambos dominios, en la vecindad de un punto de equilibrio no hiperbólico. Esto permite que la dinámica reducida del sistema, al menos en términos de dimensión, pueda ser más fácilmente entendida y calculada, particularmente para análisis de bifurcaciones.

En esta sección se aplica esta técnica matemática para comprender como pueden ser las dinámicas no lineales de bifurcaciones Hopf degeneradas alrededor de un punto de equilibrio no hiperbólico. En este contexto, primeramente se debe determinar una función real  $G(x_{amp}, \mu)$  cuya solución no trivial corresponde a las soluciones periódicas de (3.10) [Golubitsky81]. En este caso,  $x_{amp}$  corresponde a la amplitud de la solución periódica obtenida y  $\mu$  es el parámetro de bifurcación. Dada la función  $G(x_{amp}, \mu)$ , es posible aplicar la teoría de singularidad para entender la estructura topológica de las soluciones periódicas alrededor del punto de equilibrio no hiperbólico conforme se varía el parámetro de bifurcación  $\mu$ .

Con la finalidad de reducir el sistema de ecuaciones no lineal (3.10) a la ecuación escalar  $G(x_{amp}, \mu)$  cuyas soluciones corresponden uno a uno a las soluciones de (3.10), se aplica el método de reducción de Lyapunov-Schmidt, obteniéndose la siguiente ecuación [Golubitsky81, Chen88]:

$$G(x_{amp}, \mu) = a(x_{amp}^2, \mu)x_{amp} = 0 \quad (3.20)$$

donde  $x_{amp} = 0$  corresponde a las soluciones de estado estable, y  $x_{amp} \neq 0$  corresponde a las soluciones periódicas no triviales del sistema original obtenidas al solucionar  $a(x_{amp}^2, \mu) = 0$ . Es importante aclarar que tanto (3.10) como (3.20) dependen de otros parámetros físicos o de control del sistema llamados parámetros auxiliares  $\rho$ ; sin embargo, por simplicidad de notación esta dependencia no se ha indicado en las ecuaciones.

Una vez obtenida la función real, es posible aplicar la teoría de singularidades para analizar las soluciones no triviales de la ecuación (3.20), considerando una perturbación de esta ecuación causada por la variación de los parámetros auxiliares.

Para describir las soluciones no triviales de (3.20), se sustituye  $z = x_{amp}^2$  en la ecuación y se obtiene  $a(z, \mu)x_{amp} = 0$ . En este caso que  $z \geq 0$ . Además no se reemplaza  $x_{amp}$  por  $\sqrt{z}$ , debido a que solamente se está interesado en las soluciones periódicas representadas por  $a(z, \mu) = 0$ .

Las condiciones de no degeneración H2 y H3 del teorema de Hopf dadas en la sección anterior pueden ser escritas en una forma más compacta como [Golubitsky81]:

$$\text{H2} \quad \frac{d \operatorname{Re}\{\lambda(\mu)\}}{d\mu} = -a_\mu \quad \text{con} \quad a_\mu = -\frac{\partial a(z, \mu)}{\partial \mu} \quad (3.21)$$

$$\text{H3} \quad \mu_2 = -\frac{a_z}{a_\mu} = \frac{-\partial a(z, \mu)/\partial z}{\partial a(z, \mu)/\partial \mu} \quad (3.22)$$

En adición a las notaciones dadas en (3.21) y (3.22), las derivadas de la función real con respecto a  $z$  y  $\mu$  pueden expresarse de manera general como  $a_{ij} = \partial^{i+j} a(z, \mu) / \partial^i z \partial^j \mu$  donde  $i, j \in \mathbb{R}^n$ . En base a lo anterior, es posible el análisis de las bifurcaciones Hopf degeneradas aplicando la teoría de singularidades. El procedimiento consiste de tres pasos.

En el primer paso, la estructura dinámica cualitativa de la degeneración es identificada con un simple polinomio, llamado forma normal. En este proceso se obtienen las derivadas parciales de  $a(z, \mu)$  y sus valores. La desaparición de algunas derivadas corresponde a las condiciones de singularidad que producen la degeneración, mientras la preservación de algunas otras derivadas corresponden a las condiciones de no degeneración que limitan la complejidad de la degeneración. La teoría provee un número mínimo de parámetros que se requieren para construir un vecindario general de la correspondiente forma normal con todas sus variantes. Dentro de este vecindario general, todas las características dinámicas

distintivas de la singularidad, pueden ser recuperadas perturbando ese número mínimo de parámetros del sistema.

El segundo paso consiste de analizar la forma normal para determinar todos los diagramas de bifurcación local que pueden ser obtenidos en la vecindad de la singularidad. Algunos elementos cualitativos dividen al sistema del espacio paramétrico en regiones, permitiendo una clasificación de los diagramas de bifurcación. Estos elementos distintivos, conocidos como variedades de transición, son definidos como subconjuntos del vector  $\rho$  de parámetros auxiliares como [Moiola96]:

$$\mathcal{B}_0 = \{ \rho : \text{existe } \mu \text{ tal que } a(z, \mu) = a_\mu(z, \mu) = 0 \text{ en } (0, \mu; \rho) \} \quad (3.23)$$

$$\mathcal{H}_0 = \{ \rho : \text{existe } \mu \text{ tal que } a(z, \mu) = a_z(z, \mu) = 0 \text{ en } (0, \mu; \rho) \} \quad (3.24)$$

$$\mathcal{H}_1 = \{ \rho : \text{existe } (z, \mu) \text{ con } z > 0 \text{ tal que} \quad (3.25)$$

$$a(z, \mu) = a_z(z, \mu) = a_{zz}(z, \mu) = 0 \text{ en } (z, \mu; \rho) \}$$

$$\mathcal{B}_1 = \{ \rho : \text{existe } (\mu, z) \text{ con } z > 0 \text{ tal que} \quad (3.26)$$

$$a(z, \mu) = a_z(z, \mu) = a_\mu(z, \mu) = 0 \text{ en } (z, \mu; \rho) \}$$

$$\mathcal{D} = \{ \rho : \text{existe } \mu, z_1, z_2 \text{ con } z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \geq 0 \text{ tal que} \quad (3.27)$$

$$a(z, \mu) = za_z(z, \mu) = 0, \text{ en } (z_1, \mu; \rho) \text{ y } (z_2, \mu; \rho) \}$$

Usando este conjunto de transiciones, se pueden analizar las variaciones de la forma normal, que son polinomios por naturaleza, bajo la influencia de los parámetros de sistema. Aunque este análisis sigue siendo de naturaleza local, permite que una gran diversidad de diagramas de bifurcación pueda ser obtenida.

El tercer paso en este análisis consiste de identificar los parámetros del sistema original y aquellos creados por las perturbaciones de las formas normales que llevan a la bifurcación

degenerada. En general esto no es una tarea difícil, y generalmente se realiza por computación numérica.

A continuación se presentan caracterizaciones de las bifurcaciones Hopf degeneradas mediante la aplicación de la teoría de singularidad para las siguientes fallas en las condiciones de la bifurcación Hopf:

- Singularidades que involucran la falla de la segunda hipótesis H2.
- Singularidades que involucran la falla de la tercera hipótesis H3.
- Singularidades que involucran la combinación de las fallas de la segunda y tercera hipótesis H2 y H3.

I. Singularidades que involucran la falla de la segunda hipótesis H2.

Esta degeneración se caracteriza por la multiplicidad de bifurcaciones Hopf en la trayectoria de soluciones periódicas. La condición no degenerada para los miembros de esta familia es  $a_{10} = a_z(0, \mu) \neq 0$ . Los miembros de esta familia son representados como  $H_{0m}$ , donde  $m$  es el número de los parámetros auxiliares que es necesario variar, en adición al parámetro de bifurcación  $\mu$ , para una completa descripción de la singularidad y de la descripción de la dinámica en su vecindad.

Las condiciones para un típico miembro  $H_{0m}$  de esta familia son:

$$a_{01}(0, \mu) = a_{02}(0, \mu) = \dots = a_{0,m+1}(0, \mu) = 0 \quad (3.28)$$

con las condiciones no degeneradas  $a_{10}(0, \mu) \neq 0$  y  $a_{0,m+1}(0, \mu) \neq 0$ .

Las formas normales para los dos primeros miembros de la familia  $H_{0,m}$  son mostradas a continuación [Moiola96].

i) Degeneración  $H_{01}$

La condición es  $a_{01}(0, \mu) = 0$  y la condición no degenerada es  $a_{02} \neq 0$  y  $a_{10}(0, \mu) \neq 0$ . Las formas normales de esta singularidad pueden ser alguna de las descritas en los inciso a) o b):

a) La forma normal en la singularidad es

$$x(x^2 + \mu^2) = 0 \quad (3.29)$$

y cuando ocurre una perturbación en el parámetro auxiliar  $\alpha$  es

$$x(x^2 + \mu^2 + \alpha) = 0 \quad (3.30)$$

Los diagramas de bifurcación local correspondientes a este tipo de singularidad son mostrados en la Figura 3.13a, donde las soluciones periódicas inestables y estables son indicadas por la línea delgada y gruesa, respectivamente. En la Figura 3.13a se puede observar que para  $\alpha > 0$  no hay una bifurcación Hopf, mientras para  $\alpha < 0$  hay dos bifurcaciones Hopf. La clásica teoría de las bifurcaciones Hopf predice la existencia de estas dos soluciones periódicas, pero no la forma en que ambas se unen para  $\alpha = 0$ .

b) La forma normal es

$$x(-x^2 + \mu^2) = 0 \quad (3.31)$$

y dada una perturbación del parámetro  $\alpha$  es

$$x(-x^2 + \mu^2 + \alpha) = 0 \quad (3.32)$$

Los diagramas de bifurcación local correspondientes a este tipo de singularidad son mostrados en la Figura 3.13b.

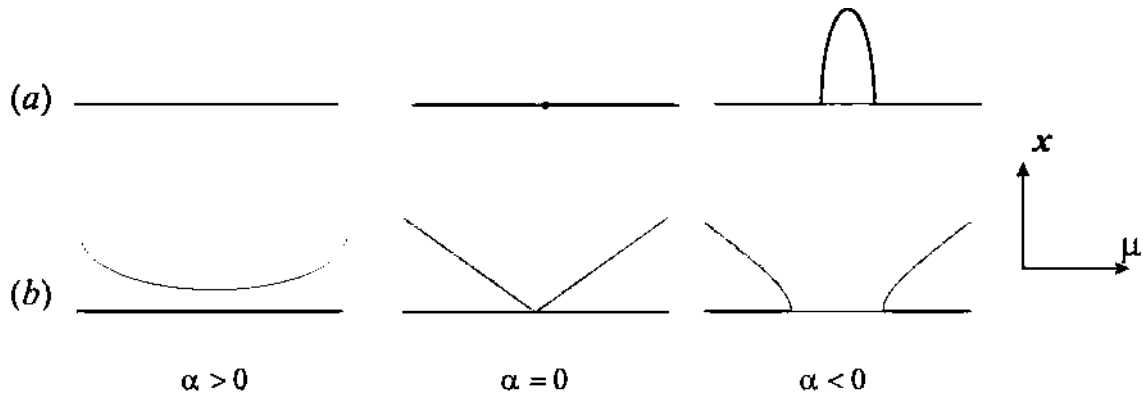


Figura 3.13 Diagrama de bifurcación correspondiente a (3.30) y (3.32) respectivamente

ii) Degeneración  $H_{02}$

En este caso es necesario perturbar dos parámetros auxiliares con la finalidad de obtener la degeneración. La condición para este tipo de singularidades es  $a_{01}(0, \mu) = a_{02}(0, \mu) = 0$  y la condición de no degeneración es dada por  $a_{10}(0, \mu) \neq 0$  y  $a_{03}(0, \mu) \neq 0$ . Como en el caso anterior se tienen dos diferentes subcasos:

a) La forma normal es

$$x(x^2 - \mu^3) = 0 \quad (3.33)$$

y cuando se perturban los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  es:

$$x(x^2 - \mu^3 + \alpha + \beta\mu) = 0 \quad (3.34)$$

El diagrama de bifurcación es mostrado en la Figura 3.15a.

b) La forma normal es

$$x(x^2 + \mu^3) = 0 \quad (3.35)$$

y cuando ocurre la perturbación es:

$$x(x^2 + \mu^3 + \alpha + \beta\mu) = 0 \quad (3.36)$$

El diagrama de bifurcación local correspondiente a este tipo de singularidad es mostrado en la Figura 3.15b.

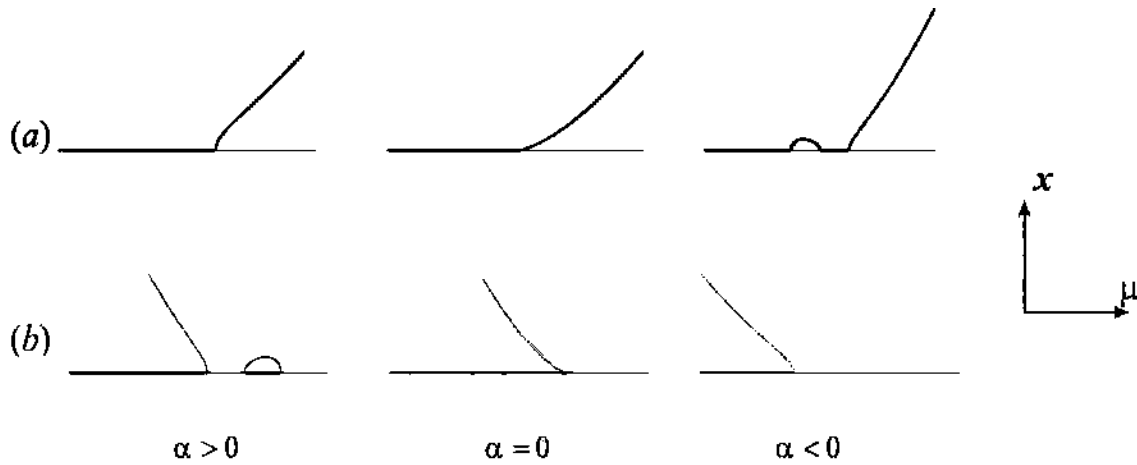


Figura 3.14 Diagrama de bifurcación correspondiente a (3.34) y (3.36) respectivamente

## II. Singularidades que involucran la falla de la tercera hipótesis H3.

Esta familia de bifurcaciones Hopf degeneradas es un tipo de complemento de la primera familia, en lugar de tener una multiplicidad en el número de puntos de bifurcación Hopf, este tiene una multiplicidad de soluciones periódicas del sistema. La condición de no degeneración para este caso es  $a_{01}(0, \mu) \neq 0$ .

Los miembros de esta familia son representados por  $H_{n,0}$  que satisfacen las siguientes condiciones de degeneración:

$$a_{10}(0, \mu) = a_{20}(0, \mu) = \dots = a_{n,0}(0, \mu) = 0 \quad (3.37)$$

y las condiciones de no degeneración:

$$a_{01}(0, \mu) \neq 0 \text{ y } a_{n+1,0}(0, \mu) \neq 0 \quad (3.38)$$

La degeneración  $H_{n,0}$  es relacionada a los puntos límite en las ramas periódicas y la multiplicidad de ciclos límite. Las formas normales y sus correspondientes perturbaciones se muestran a continuación, pero solamente para los primeros dos miembros de la familia.

i). Degeneración  $H_{10}$

La condición para este tipo de singularidad es  $a_{10}(0, \mu) = 0$ , y la condición de no degeneración es  $a_{01}(0, \mu) \neq 0$  y  $a_{20}(0, \mu) \neq 0$ . Donde se tienen los siguientes dos subcasos.

a) Forma normal

$$x(x^4 + \mu) = 0 \quad (3.39)$$

y dada su perturbación es :

$$x(x^4 + \mu + \alpha x^2) = 0 \quad (3.40)$$

El diagrama de bifurcación es dado en la Figura 3.15a, donde el punto límite LP representa la convergencia o unión de las soluciones periódicas estables e inestables.

b) Forma normal

$$x(x^4 - \mu) = 0 \quad (3.41)$$

y cuando acontece la perturbación es :

$$x(x^4 - \mu + \alpha x^2) = 0 \quad (3.42)$$

El diagrama de bifurcación para este caso es mostrado en la Figura 3.15b. Es claro de estas figuras que la rama de soluciones periódicas emerge de una manera más vertical o abrupta en la condición de singularidad  $\alpha = 0$  que aquella que surge desde una condición de bifurcación Hopf no degenerada.

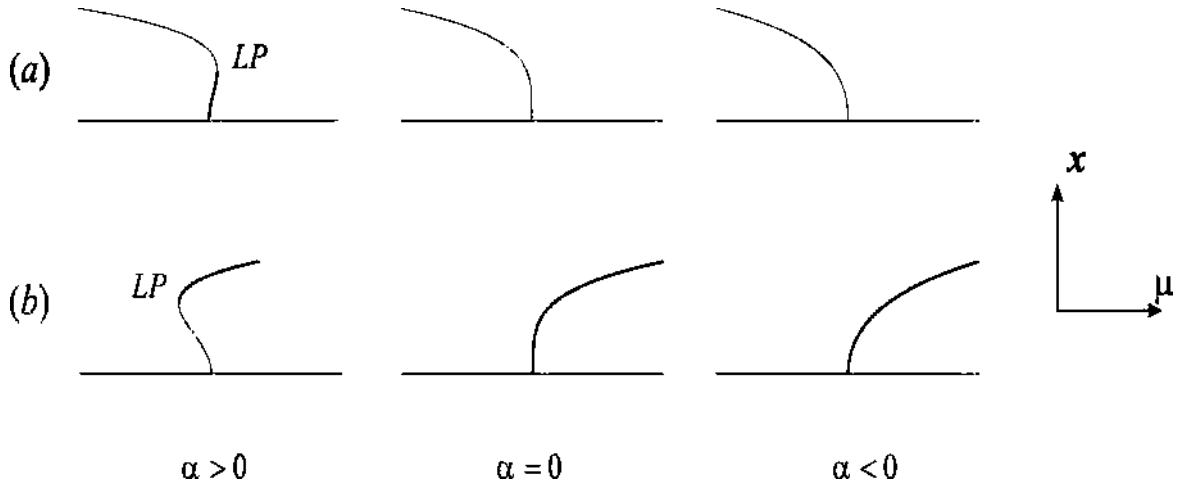


Figura 3.15 Diagrama de bifurcación correspondiente a (3.40) y (3.42) respectivamente.

ii). Degeneración  $H_{20}$

Las condiciones de degeneración para este caso son  $a_{01}(0, \mu) = a_{20}(0, \mu) = 0$ , y las condiciones de no degeneración son  $a_{01}(0, \mu) \neq 0$  y  $a_{30}(0, \mu) \neq 0$ . Solamente se presenta una de las dos formas normales para esta singularidad, debido a que la otra se puede obtener de la misma forma.

a) Forma normal

$$x(x^6 - \mu) = 0 \tag{3.43}$$

y cuando ocurre la perturbación es dada por:

$$x(x^6 - \mu + \alpha x^2 + \beta x^4) = 0 \tag{3.44}$$

El diagrama de bifurcación para este caso es mostrado en la Figura 3.16 donde se observan dos puntos límites y tres soluciones periódicas.

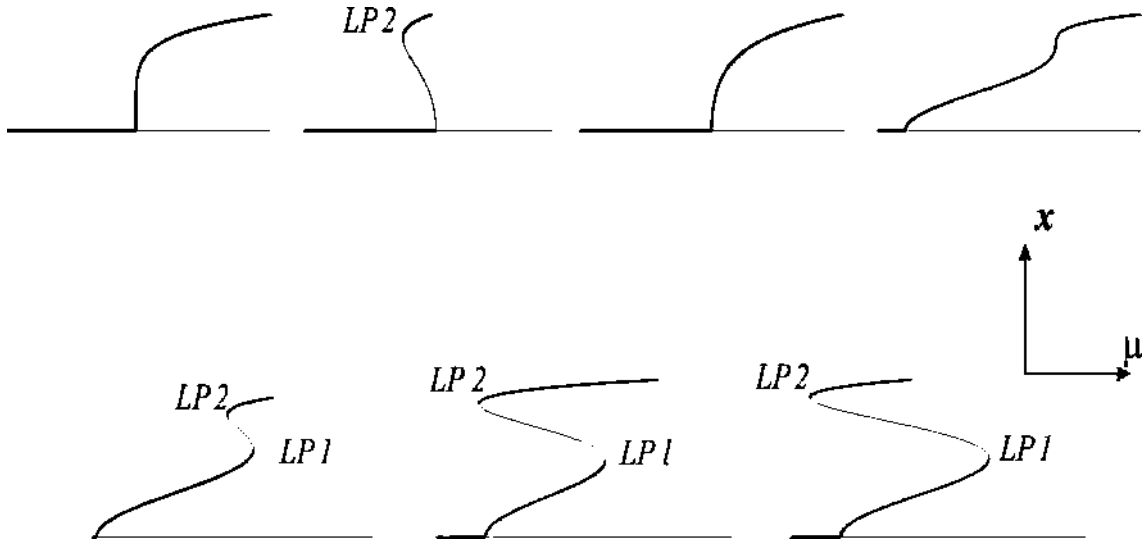


Figura 3.16 Diagrama de bifurcación correspondiente a la ecuación (3.44).

III. Singularidades que involucran la combinación de las fallas de la segunda y tercera hipótesis del clásico teorema de bifurcación Hopf.

Estas singularidades difieren significativamente de las dos anteriormente discutidas, debido esencialmente a la presencia de un parámetro modal usado para caracterizar el comportamiento dinámico encontrado en sus perturbaciones. Los miembros de esta familia son denotados como degeneración  $H_{11}$ , que satisface las condiciones  $a_{10}(0, \mu) = a_{01}(0, \mu) = 0$ .

La forma normal para este tipo de singularidad es:

$$x(\varepsilon x^4 + 2m\mu x^2 + \delta\mu^2) = 0 \quad (3.45)$$

donde  $\varepsilon = \text{sgn}(a_{20})$ ,  $\delta = \text{sgn}(a_{02})$ , y  $m$  es el parámetro modal definido por  $m = \frac{a_{11}}{2\sqrt{|a_{20}a_{02}|}}$

La condición de no degeneración para este caso es  $a_{20}(0, \mu) \neq 0$ ,  $a_{02}(0, \mu) \neq 0$  y  $m^2 \neq \varepsilon\delta$ . Si  $m^2 = \varepsilon\delta$ , entonces la ecuación (3.45) puede ser factorizada. La otra condición de no degeneración tiene las siguientes implicaciones:

- a) Si  $a_{20}(0, \mu) = 0$ , tres ciclos límite anidados pueden ser encontrados
- b) Si  $a_{02}(0, \mu) = 0$ , tres puntos de bifurcaciones Hopf pueden aparecer en la perturbación.

Puesto que la forma normal requiere de dos parámetros auxiliares, se obtiene:

$$x(\varepsilon x^4 + 2m\mu x^2 + \delta\mu^2 + \alpha + 2\beta x^2) = 0 \quad (3.46)$$

De la ecuación anterior hay tres diferentes situaciones, dependiendo sobre el valor de  $\varepsilon$ ,  $\delta$  y  $m$  que no son analizadas en este trabajo, pero pueden consultarse en [Moiola96].

### 3.9 Bifurcaciones Globales

Existen bifurcaciones que no pueden ser detectadas por el análisis local en la vecindad de puntos de equilibrios y/o ciclos límites llamadas bifurcaciones globales. Este tipo de bifurcaciones es difícil de analizar debido a que su detección involucra el muestreo de grandes regiones del plano de fase. En esta tesis solo se discutirán dos bifurcaciones globales que son toroidal y de doble periodo.

Antes de definir algunas bifurcaciones globales, se presenta el concepto de mapa de Poincaré aplicado para el análisis de estabilidad de orbitas periódicas. La estabilidad de estas orbitas puede ser analizada por medio de los multiplicadores de Floquet. Estos multiplicadores representan una generalización de los eigenvalores asociados a un punto de equilibrio, ya que describen la proporción en que localmente se expande o contrae el plano de fase cerca del ciclo límite bajo análisis. La teoría de Floquet se basa en la observación que una solución periódica puede ser representada por medio de un punto fijo asociado al mapa de Poincaré [Guckenheimer83]. Consecuentemente, la estabilidad de la orbita periódica puede ser determinada en base a la estabilidad del correspondiente punto fijo de

este mapa de Poincaré. La linealización del mapa de Poincaré en el punto fijo resulta en un sistema lineal discreto en el tiempo que describe la evolución periodo a periodo de las oscilaciones en la vecindad del ciclo límite. En este caso, los multiplicadores de Floquet son los eigenvalores de la matriz Jacobiana de este sistema lineal, también llamada matriz monodroma [Nayfeh95].

### 3.9.1 Mapa de Poincaré

En esta sección se describe el concepto de mapa de Poincaré. Para lo anterior se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.47)$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^n$ . Suponiendo que la solución de (3.47) comienza en  $x$ , se tiene:

$$\phi_t(x) = \phi(t, x) \quad (3.48)$$

donde el mapa  $\phi: (t, x) \rightarrow \phi(t, x)$  es llamado flujo del vector de campo  $f(x)$ . También se define  $\Gamma$  como una órbita de periodo  $T$  del flujo  $\phi$ .

Suponiendo una hipersuperficie  $\Sigma \subset \mathfrak{R}^n$ , denominada sección de Poincaré, de dimensión  $n-1$  como se muestra en la Figura 3.17, se tienen las siguientes observaciones [Wang96]:

- 1) El flujo  $\phi$  es transversal en cualquier parte a  $\Sigma$ .
- 2) El flujo  $\phi$  cruza  $\Sigma$  en la misma dirección.
- 3)  $\Sigma$  interseca a  $\Gamma$  en un único punto  $p$ .

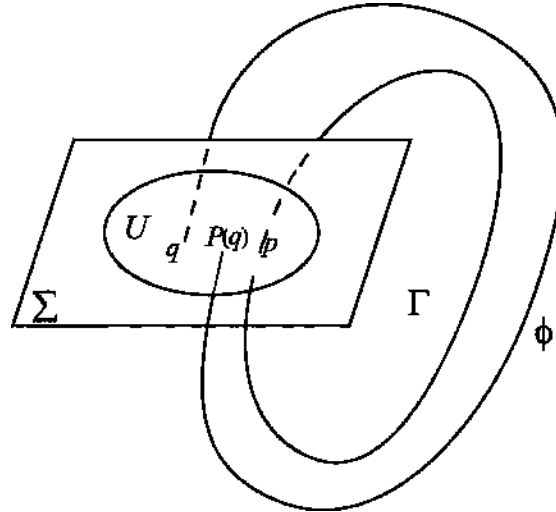


Figura 3.17 Mapa de Poincaré.

Asumiendo un espacio  $U \subset \Sigma$  como una vecindad de  $p$  y considerando que  $q \in U$ ; el primer retorno de la orbita a la sección de Poincaré, partiendo del punto  $q$ ,  $P:U \rightarrow \Sigma$ , es definido por:

$$P(q) \triangleq \phi_{\tau(q)}(q) = \phi(\tau(q), q) \quad (4.49)$$

donde  $\tau(q)$  es el tiempo tomado por la orbita para regresar a  $\Sigma$ , partiendo del punto  $q$ . Así, una orbita periódica tomara un tiempo de retorno  $\tau(p) = T$  y  $\tau(q) \rightarrow T$  conforme  $q \rightarrow p$ .  $p$  es un punto fijo de  $P$ . En coordenadas locales  $P(q)$  es un mapa desde  $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$  a  $\mathbb{R}^{n-1}$ , denominado mapa de Poincaré, tal que  $\frac{\partial P(p)}{\partial p}$  tiene  $n-1$  eigenvalores, llamados multiplicadores Floquet (o multiplicadores característicos) asociados con la orbita periódica  $\Gamma$  [Wang96].

**Teorema 3.1.** La orbita periódica  $\Gamma$  es orbitalmente asintoticamente estable si todos los multiplicadores Floquet tienen magnitud menor que uno. Además,  $p$  es un punto fijo estable para el mapa de Poincaré si  $\Gamma$  es estable. Si al menos uno de los multiplicadores Floquet tiene magnitud mayor que uno, la orbita periódica es inestable.

Con la finalidad de explicar como pueden ser detectadas bifurcaciones a partir de los multiplicadores de Floquet se considera lo siguiente. Se asume una familia de ecuaciones diferenciales con un solo parámetro  $\dot{x} = f(x, \mu)$  cuya solución contiene una órbita periódica para un valor del parámetro  $\mu$  y con todos los multiplicadores de Floquet  $\lambda_1(\mu), \dots, \lambda_{n-1}(\mu)$  dentro del círculo unitario. Conforme el parámetro  $\mu$  es variado, estos multiplicadores cambian de valor, tal que algunos de ellos pueden cruzar el círculo unitario para un valor crítico  $\mu_0$  [Wang96]. Aquellos multiplicadores que cruzan el círculo unitario son llamados multiplicadores críticos. Varios tipos de bifurcaciones pueden ocurrir dependiendo de como un multiplicador o un par de multiplicadores complejos conjugados críticos cruzan el círculo unitario. Los tres casos típicos de cruce son mostrados en la Figura 3.18 [Wang96].

- 1) Solo un multiplicador cruza el círculo unitario a lo largo del eje real positivo con  $\lambda_i(\mu_0) = 1$  para algún  $i$ .
- 2) Solo un multiplicador cruza el círculo unitario a lo largo del eje real negativo con  $\lambda_i(\mu_0) = -1$  para algún  $i$ .
- 3) Solo un par de multiplicadores complejos conjugados cruzan el círculo unitario  $|\lambda_i(\mu_0)| = 1, \text{Im}(\lambda_i(\mu_0)) \neq 0$  y  $\frac{d}{d\mu} |\lambda_i(\mu_0)| \neq 0$  para algún  $i$ .

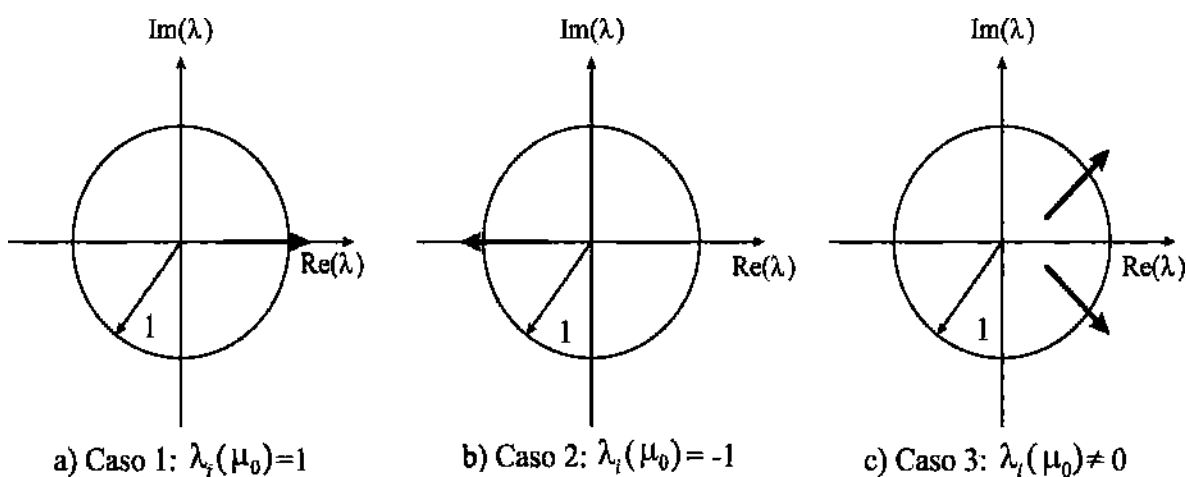


Figura 3.18 Tres casos de los multiplicadores de floquet cruzando el círculo unitario.

### 3.9.2 Bifurcación Toroidal (TRB)

Esta bifurcación puede entenderse como una bifurcación Hopf de orbitas periódicas o segunda bifurcación Hopf, en donde las variables del sistema experimentan una doble frecuencia [Nayfeh95]. Esto ocurre cuando dos multiplicadores de Floquet complejos conjugados salen del círculo unitario alejándose del eje real, como se muestra en la Figura 3.18c. La solución de la bifurcación podría ser periódica o de doble periodo, dependiendo de la relación entre la nueva frecuencia introducida y la frecuencia de la solución periódica anterior a la bifurcación. De forma similar a la bifurcación Hopf subcrítica y supercrítica, la bifurcación toroidal también es subcrítica y supercrítica. Este fenómeno solo puede presentarse en sistemas no lineales de dimensión mayor a dos.

En la Figura 3.19 se muestra una bifurcación toroidal de la ecuación (3.50), donde los valores de los parámetros correspondientes son:  $\mu_3 = 1, k = -1, \mu_1 = -0.5, \mu_2 = 0.4, \omega = 3.5$  y las condiciones iniciales son:  $x(0) = 0.1, y(0) = 0.1, z(0) = 0.1$ .

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (z + \mu_1)x - \omega y \\ \dot{y} &= \omega x + (z + \mu_1)y \\ \dot{z} &= \mu_2 + \mu_3 z - z^3 + k(x^2 + y^2)\end{aligned}\tag{3.50}$$

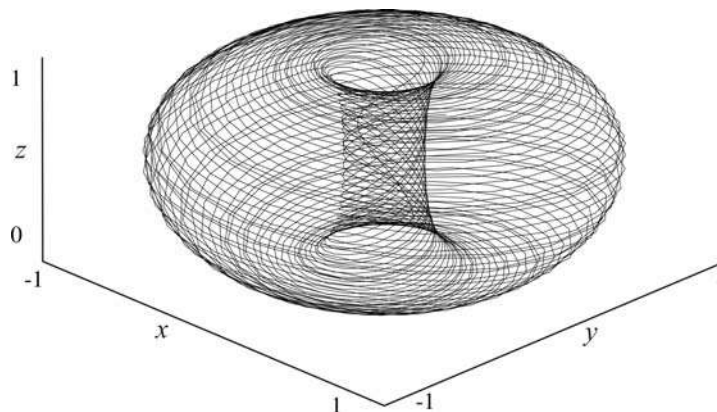


Figura 3.19 Bifurcación toroidal.

### 3.9.3 Bifurcación de Doble Periodo (PDB)

Cuando un multiplicador de Floquet deja el círculo de la unidad a través de -1, Figura 3.18b, una bifurcación de doble periodo (PDB) aparece y la rama de soluciones periódicas estable que existe antes de la bifurcación continúa como una rama de soluciones periódicas inestables después de la bifurcación. Una rama de soluciones estables de doble periodo es creada si la bifurcación es supercrítica, mientras una rama de soluciones inestables de doble periodo es destruida si la bifurcación es subcrítica. Cuando el parámetro de bifurcación es variado, las orbitas que recorren las variables de este sistema comienzan a dividirse en dos orbitas, sufriendo una PDB. El parámetro de bifurcación puede seguir variándose y el sistema puede sufrir otra bifurcación de doble periodo; esto es, de las dos orbitas creadas en la primera bifurcación, cada una se divide en dos orbitas, teniéndose un total de cuatro orbitas. Si se continúa variando el parámetro se pueden seguir formando más orbitas o trayectorias de operación en cascada en el sistema.

En la Figura 3.20 se muestran estas características para el sistema Moon y Rand [Nayfeh95] de la ecuación (3.51).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y - xz \\ \dot{y} &= \mu y + x \\ \dot{z} &= -z + y^2 + x^2 z\end{aligned}\tag{3.51}$$

donde  $\mu$  se ha variado desde  $\mu = 0.2$  hasta  $\mu = 0.5$  y las condiciones iniciales son:  $x(0) = 0.5, y(0) = 0.5, z(0) = 0.5$ .

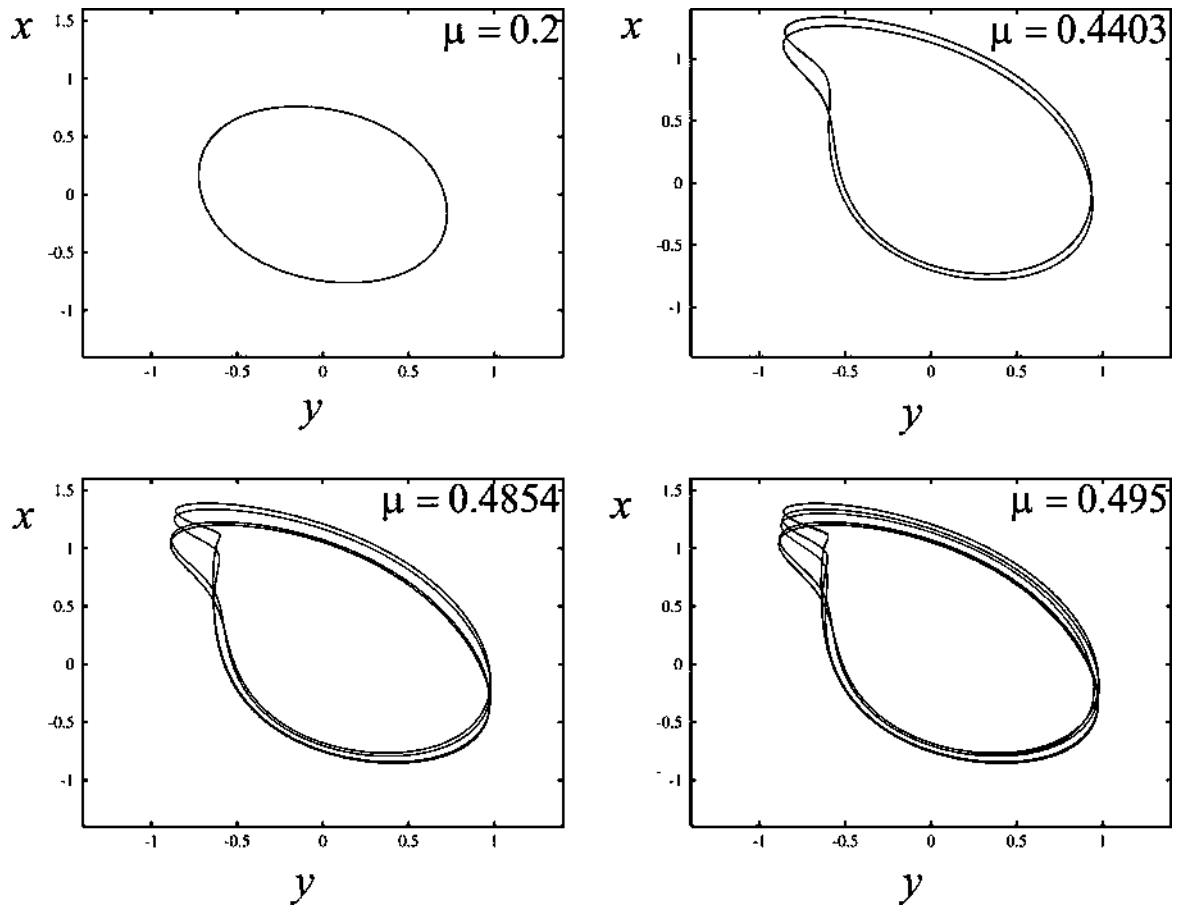


Figura 3.20 Bifurcación de Doble periodo de Moon y Rand.

## Capítulo 4

# Análisis monoparamétrico de bifurcaciones en un sistema eléctrico de 3 nodos.

### 4.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han descrito las técnicas necesarias para el estudio de bifurcaciones de una manera sistemática. En este capítulo se hace la aplicación de la teoría de bifurcaciones para estudiar el comportamiento de los puntos de equilibrio asociados a un sistema eléctrico de tres nodos. El modelado matemático de este sistema es acorde a la descripción dada en el capítulo 2. La finalidad de la aplicación de esta teoría es mostrar como pueden ocurrir fenómenos oscilatorios no lineales en las variables de estado del sistema ante pequeñas perturbaciones en sus parámetros, lo cual puede conducir a un estado de colapso operativo. A partir de un sistema eléctrico clásico sin dispositivos controladores, se presentan diferentes casos de estudio considerando dos tipos de dispositivos controladores conectados al sistema. En base a los resultados obtenidos, se discuten los diferentes tipos de bifurcaciones acontecidas y sus implicaciones en el comportamiento del sistema eléctrico.

Con la finalidad de realizar las simulaciones, primeramente se obtiene un punto de equilibrio estable al solucionar el conjunto de ecuaciones diferenciales que representan el comportamiento del sistema bajo análisis. A partir de este punto de equilibrio, se obtiene una rama de soluciones de puntos de equilibrio variando el parámetro de bifurcación seleccionado. Simultáneamente se va realizando un análisis de estabilidad de cada punto de equilibrio obtenido con la finalidad de determinar si se ha encontrado una bifurcación. Para la ejecución de estas simulaciones, y su representación gráfica mediante un diagrama de bifurcación, se utiliza el programa del dominio público llamado XPPAUT [Doedel97]. Los archivos de datos realizados para efectuar estas simulaciones en XPPAUT se listan en el Apéndice D.

## 4.2 Análisis del modelo clásico del sistema eléctrico

El modelo clásico del sistema eléctrico de tres nodos es mostrado en la Figura 4.1. Este sistema está compuesto por dos generadores; uno es considerado como nodo de referencia, y el otro como una fuente de voltaje constante cuya dinámica se describe por medio de la ecuación de oscilación. El sistema puede entenderse como una pequeña área conectada a una red que es modelada como un bus infinito. Las líneas de transmisión son modeladas como admitancias. La carga es modelada de la siguiente manera; una carga constante, un capacitor y un motor de inducción dependiente de la frecuencia y de la magnitud del voltaje en el nodo de carga. El modelo del motor de inducción es el propuesto por [Walve86]. Las ecuaciones matemáticas necesarias para realizar el estudio dinámico se presentan a continuación.

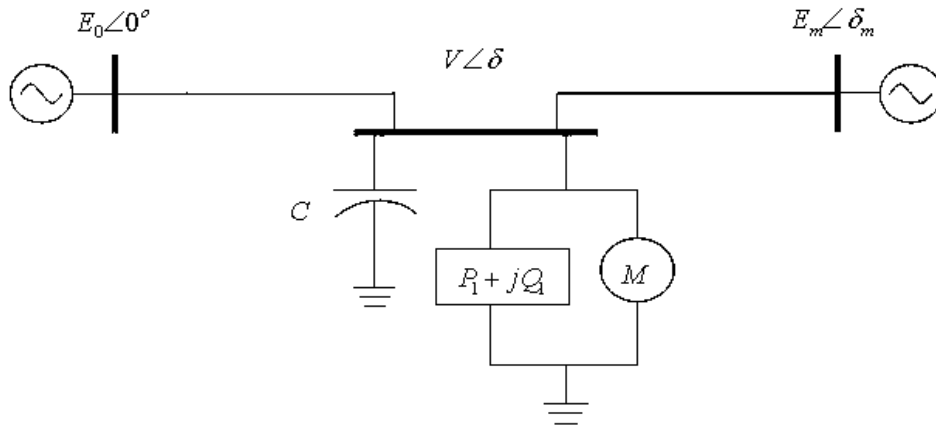


Figura 4.1 Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica.

Las ecuaciones que describen a la carga dinámica combinada con la carga constante son las siguientes:

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 + K_{pw} \dot{\delta} + K_{pv} (V + TV) \\ Q &= Q_0 + Q_1 + K_{qw} \dot{\delta} + K_{qv} V + K_{qv} V^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $P$  y  $Q$  son las potencias que la carga dinámica demanda al sistema, y están descritas por las ecuaciones de flujos de potencia dadas en (4.2) de forma polar.

$$\begin{aligned}
P &= -VE_0'Y_0'\text{sen}(\delta + \theta_0') - VE_m'Y_m'\text{sen}(\delta - \delta_m' + \theta_m') + V^2(Y_0'\text{sen}\theta_0' + Y_m'\text{sen}\theta_m') \\
Q &= VE_0'Y_0'\text{cos}(\delta + \theta_0') + VE_m'Y_m'\text{cos}(\delta - \delta_m' + \theta_m') - V^2(Y_0'\text{cos}\theta_0' + Y_m'\text{cos}\theta_m')
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde las variables  $E_0'$  y  $Y_0'$  son el voltaje y admitancia del equivalente de Thevenin del sistema, tal como se explica en el apéndice B.

El modelo del generador es representado por la ecuación de oscilación dada en el capítulo 2. Con la finalidad de integrar todas estas ecuaciones, el conjunto de ecuaciones (4.3) describen de manera dinámica al sistema analizado.

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_m &= \omega \\
\dot{\omega} &= \frac{1}{M} \left( P_m - D_m \omega + E_m V Y_m' \text{sen}(\delta - \delta_m' - \theta_m') + E_m^2 Y_m' \text{sen}\theta_m' \right) \\
\dot{\delta} &= K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1) \\
\dot{V} &= \frac{1}{TK_{qw} K_{pv}} \left( -K_{qw} (P_0 + P_1 - P) + (K_{pw} K_{qv} - K_{qw} K_{pv}) V + K_{pw} (Q_0 + Q_1 - Q) \right. \\
&\quad \left. + K_{pw} K_{qv2} V^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

El término  $\delta_m$  es el ángulo que existe entre el campo magnético del rotor y el campo magnético del estator o de referencia; este ángulo también es conocido como ángulo de carga. Si el ángulo es positivo el generador suministra potencia al sistema y si es negativo el generador consume potencia eléctrica. La variable  $E_m$  es la magnitud del voltaje interno del generador, que para este ejemplo corresponde al voltaje en terminales del mismo, y se mantiene a un valor constante. La variación de la velocidad del rotor con respecto a la velocidad de sincronismo esta representada por  $\omega$ ; esto es, cuando el generador se encuentra en sincronismo, la variable  $\omega$  tiene un valor cero. El ángulo  $\delta$  representa al ángulo del voltaje en el nodo de carga y esta medido con respecto al nodo de referencia. La variable  $V$  representa la magnitud de voltaje en el nodo de carga y está medida en pu.

El parámetro de bifurcación que se comenzará a variar de manera cuasiestática es la potencia reactiva  $Q_1$  en el nodo de carga. Los parámetros restantes que se utilizaron en esta simulación se listan en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Parámetros utilizados en el sistema de potencia con carga dinámica.

Parámetro de Bifurcación $Q_1 = 10$ hasta $12 pu$			
$K_{pw} = 0.4 pu$	$K_{pv} = 0.3 pu$	$K_{qw} = -0.03 pu$	$K_{qv} = -2.8 pu$
$K_{qv2} = 2.1 pu$	$T_1 = 8.1 pu$	$P_0 = 0.6 pu$	$Q_0 = 1.3 pu$
$P_1 = 0 pu$	$C = 12$	$E'_0 = 2.5 pu$	$E_m = 1 pu$
$P_m = 1 pu$	$M = 0.3 seg^2 / rad$	$D = 0.05 seg / rad$	$Y_0 = 20 pu$
$\theta'_0 = -12^\circ$	$Y_m = 5 pu$	$E_0 = 1 pu$	$Y'_0 = 8 pu$
	$\theta_m = -5^\circ$	$\theta_0 = -5^\circ$	

El análisis de bifurcación comienza por obtener un punto de equilibrio estable del sistema en  $Q_1=10 pu$ . Este punto se obtiene con las condiciones iniciales de las variables de estado dadas por  $V = 1.2295 pu$ ,  $\delta_m = 0.2858 rad$ ,  $\omega=0 rad/seg$ ,  $\delta=0.10662 rad$ . A partir de este punto se obtiene el diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 4.1. Conforme se incrementa el valor del parámetro de bifurcación se decrementa la magnitud de voltaje en el nodo, pero el sistema sigue operando en puntos de equilibrio estables, lo cual se representa por las soluciones en línea gruesa en el diagrama. Cuando el parámetro de bifurcación tiene un valor  $Q_1 = 10.9459 pu$ , el punto de equilibrio cambia de estabilidad; ahora es inestable, al igual que la rama de soluciones obtenidas para  $10.9459 pu < Q_1 < 11.4067 pu$  y representadas por una línea delgada en el diagrama de bifurcación. Cuando el parámetro toma el valor  $Q_1 = 11.4067 pu$  se vuelve a presentar un conjunto de soluciones estables hasta  $Q_1 = 11.4114 pu$ . Después de este valor el sistema no tiene solución o punto de equilibrio.

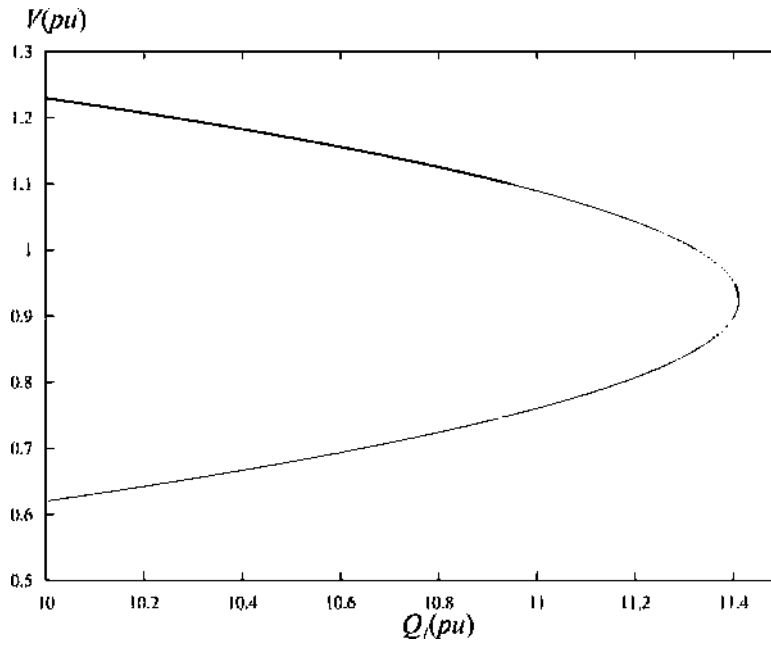


Figura 4.2 Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables.

A partir de un punto de bifurcación, es posible obtener otra rama de soluciones de puntos de equilibrio, tal como se ilustra en la Figura 4.3.

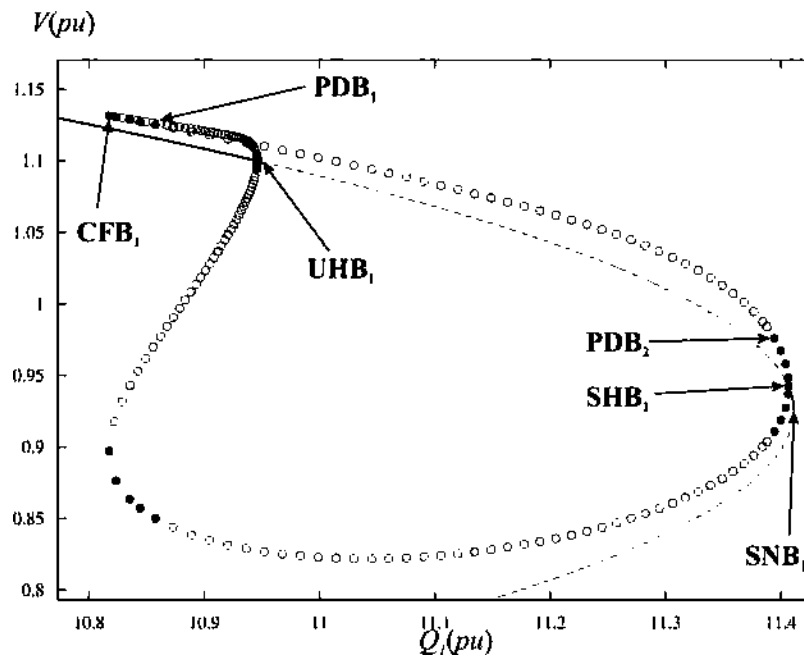


Figura 4.3 Diagrama de bifurcación mostrando los diferentes tipos de bifurcación.

A manera de ejemplo, se observa que el primer punto de bifurcación esta asociado a una bifurcación Hopf subcrítica de la cual emana una trayectoria de soluciones que presentará una bifurcación de doble periodo y una bifurcación Fold. En la Tabla 4.2 se resume la ubicación de las diversas bifurcaciones obtenidas en este estudio

Tabla 4.2 Posición de las bifurcaciones en el modelo clásico.

<b>Bifurcación</b>	$Q_1(pu)$	$V(pu)$
<b>UHB<sub>1</sub></b>	10.9457	1.0999
<b>SHB<sub>1</sub></b>	11.4067	0.9425
<b>SNB<sub>1</sub></b>	11.4114	0.9250
<b>CFB<sub>1</sub></b>	10.8174	1.1315
<b>PDB<sub>1</sub></b>	10.8727	1.1229
<b>PDB<sub>2</sub></b>	11.3879	0.9834

En las regiones estables, la dinámica de las variables de estado convergerá hacia algún punto de equilibrio contenido en esta región, conforme  $t \rightarrow \infty$ , si sus condiciones iniciales son definidas dentro de la región estable [Nayfeh95]. Lo mismo aplica para regiones inestables o centros [Nayfeh95]. Para mostrar lo anterior, se realiza una simulación dinámica de las ecuaciones (4.3) considerando un conjunto de condiciones iniciales contenido en la región estable y dado por  $V = 1.22952$  pu,  $\delta_m = 0.285796$  rad.,  $\omega = 0$  rad/seg y  $\delta = 0.106625$  rad. La dinámica que siguen las variables de estado en el dominio del tiempo se muestra en la Figura 4.4, observándose como todas ellas llegan a un punto de equilibrio estable.

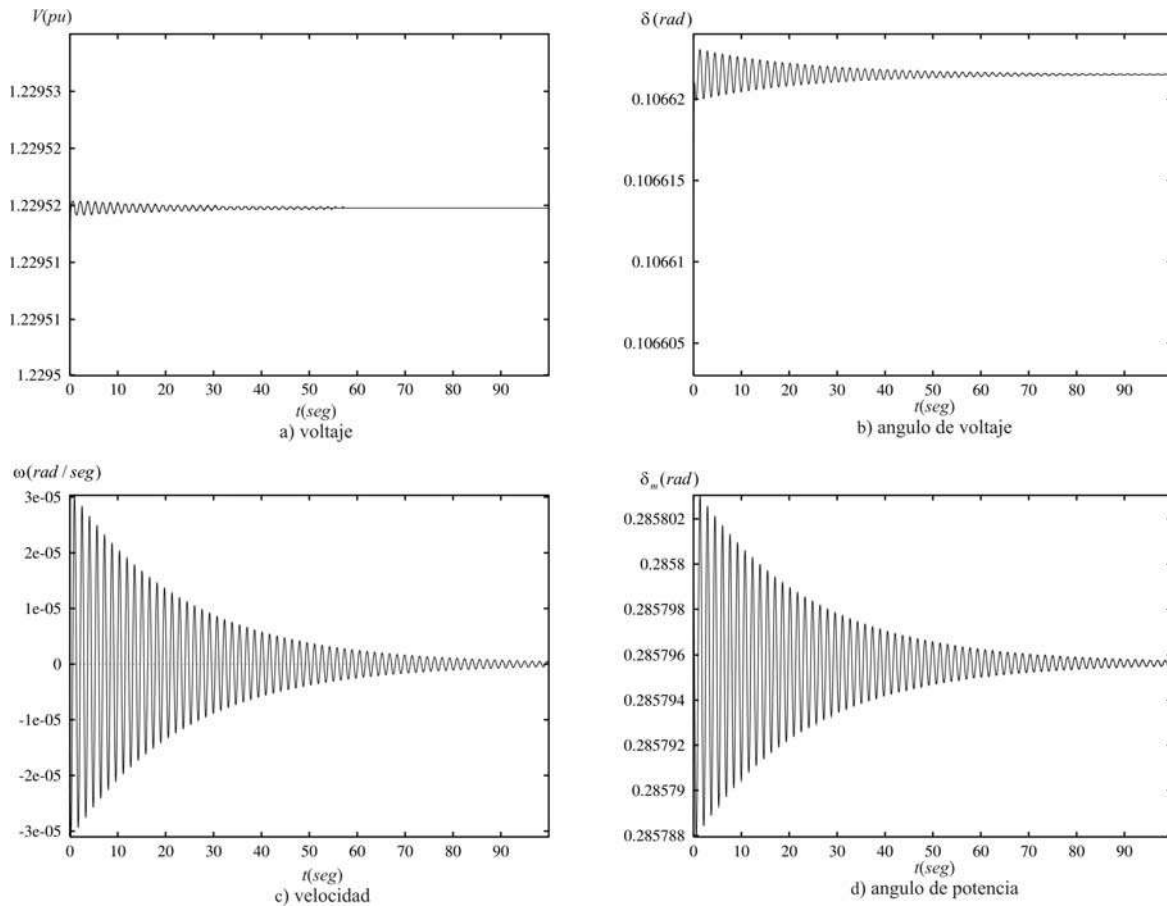


Figura 4.4 Comportamiento de la variables del sistema en  $Q_1 = 10 pu$ .

### 4.3 Modelo clásico del sistema eléctrico con sistema de excitación rápido

En esta sección se modela el modelo clásico presentado en la sección anterior utilizando un generador con sistema de excitación rápido con el fin de controlar la magnitud de su voltaje en terminales [Ji95] al modular su voltaje de campo. Este voltaje es representado por la variable  $E_{fdrr}$ . Por lo tanto la variable  $E_m$  será una variable de estado del sistema que considera la dinámica que existe en el voltaje inducido en el estator, voltaje interno, debido a la variación de los enlaces de flujo producidos en el rotor de la maquina por el voltaje de campo  $E_{fd}$  [Ji95]. En este caso, la magnitud de voltaje interno  $E_m$  dado en la sección 4.2 es reemplazado por la magnitud del voltaje interno en estado transitorio  $E_m'$ . Las ecuaciones del sistema analizado y las ecuaciones del sistema de excitación rápido son dadas en (4.4). La quinta ecuación de (4.4) corresponde a la ecuación (2.20) del capítulo 2. En este caso  $V$

es la magnitud de voltaje en el nodo de carga y  $x$  es la reactancia de la línea que conecta al generador con el nodo de carga, tal como se muestra en la Figura 2.4. El diagrama de bloques del sistema de excitación rápido es presentado en la Figura 2.5 del capítulo 2.

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_m &= \omega \\
\dot{\omega} &= \frac{1}{M} \left( P_m - D_m \omega - \left( (E'_m)^2 G_m - E'_m V (G_m \cos(\delta_m - \delta) + B_m \sin(\delta_m - \delta)) \right) \right) \\
\dot{\delta} &= K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1) \\
\dot{V} &= \frac{1}{TK_{qw} K_{pv}} (-K_{qw} (P_0 + P_1 - P) + (K_{pw} K_{qv} - K_{qw} K_{pv}) V + K_{pw} (Q_0 + Q_1 - Q) \\
&\quad + K_{pw} K_{qv2} V^2) \\
\dot{E}'_m &= \frac{1}{T_{d0}} \left( \frac{-(x_d + x)}{(x'_d + x)} E'_m + \frac{(x_d - x'_d)}{(x'_d + x)} V \cos(\delta_m - \delta) + E_{fdr} \right) \\
\dot{E}_{fdr} &= \frac{1}{T_A} (K_A (V_{ref} - V_a) - (E_{fdr} - E_{fd0})) \\
V_a &= \frac{1}{(x - x'_d)} \sqrt{\left( V x'_d + E'_m x \cos(\delta_m - \delta) \right)^2 + \left( E'_m x \sin(\delta_m - \delta) \right)^2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

La salida del voltaje de campo del excitador  $E_{fdr}$  esta limitada con la ecuación (4.5). La restricción de límites que tiene el voltaje de excitación son -5 y 5 pu.

$$E_{fdr} = \frac{E_{fdr \lim}}{2} \tanh\left(\frac{2E_{fdr} - E_{fdr \lim}}{E_{fdr \lim}}\right) + \frac{E_{fdr \lim}}{2} \tag{4.5}$$

Las potencias  $P$  y  $Q$  que la carga dinámica demanda al sistema, están descritas por las ecuaciones de flujos de potencia dadas en (4.6) de forma rectangular.

$$\begin{aligned}
P &= -V^2 (G'_0 + G_m) + V E'_m (G_m \cos(\delta - \delta_m) + B_m \sin(\delta - \delta_m)) \\
&\quad + V E'_0 (G'_0 \cos \delta + B'_0 \sin \delta) \\
Q &= V^2 (B'_0 + B_m) + V E'_m (G_m \sin(\delta - \delta_m) - B_m \cos(\delta - \delta_m)) \\
&\quad + V E'_0 (G'_0 \sin \delta - B'_0 \cos \delta)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde  $G_m$  y  $B_m$  son la conductancia y susceptancia de la admitancia de la línea que conecta el generador con la carga. Las variables  $E_0'$ ,  $G_0'$  y  $B_0'$  son el voltaje, conductancia y susceptancia del equivalente de Thevenin del sistema, tal como se explica en el apéndice B. El parámetro de bifurcación que se comenzara a variar de manera cuasiestática es la potencia reactiva  $Q_1$  en el nodo de carga. Los parámetros restantes que se utilizaron en este modelo se listan en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3 Parámetros utilizados en el sistema de potencia con sistema de excitación.

Parámetro de Bifurcación $Q_1= 10$ hasta $15$ pu				
$K_{pw} = 0.4 pu$	$K_{pv} = 0.3 pu$	$K_{qv} = -0.03 pu$	$K_{qv} = -2.8 pu$	$K_{qv2} = 2.1 pu$
$T_1 = 8.5 pu$	$P_0 = 0.6 pu$	$Q_0 = 1.3 pu$	$P_1 = 0 pu$	$C = 12$
$E_0' = 2.5 pu$	$P_m = 1 pu$	$M = 0.3 seg^2 / rad$	$D = 0.05 seg / rad$	$B_0' = -7.8251 pu$
$G_0' = 1.6632 pu$	$B_m = -4.9809 pu$	$G_m = 0.4357 pu$	$x = 0.1992 pu$	$x_d' = 0.4 pu$
$x_d = 1 pu$	$T_{d0}' = 4 pu$	$K_A = 106.93$	$T_A = 0.003 seg$	$V_{ref} = 1.2 pu$
$E_{fd0} = -5 pu$	$E_{fdrlim} = 5 pu$			

El análisis de bifurcación comienza por obtener un punto de equilibrio estable del sistema en  $Q_1=10$  pu. Este punto se obtiene con las condiciones iniciales dadas por  $V = 1.2295$  pu,  $\delta_m = 0.2858 rad$ ,  $\omega = 0$  rad/seg,  $\delta = 0.10662 rad$ ,  $E_m' = 1 pu$ ,  $E_{fdrr} = 0.4 pu$ . A partir de este punto se obtiene el diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 4.5. El conjunto de puntos de equilibrio estable y inestable se muestra con línea gruesa y delgada, respectivamente. El cambio de estabilidad en los puntos de equilibrio ocurre a un valor de  $Q_1 = 13.9942$  pu.

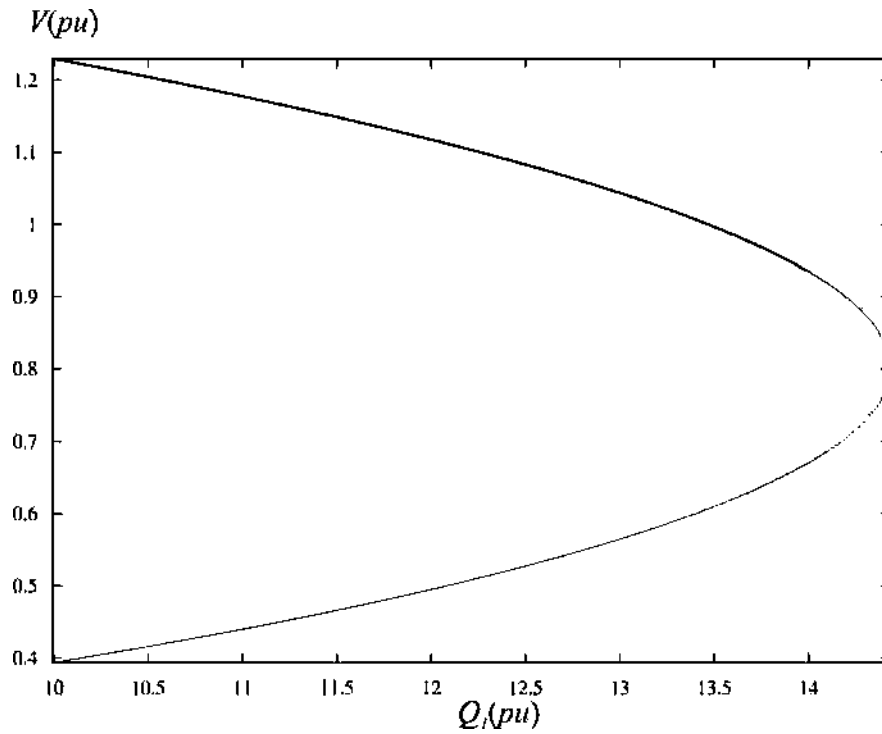
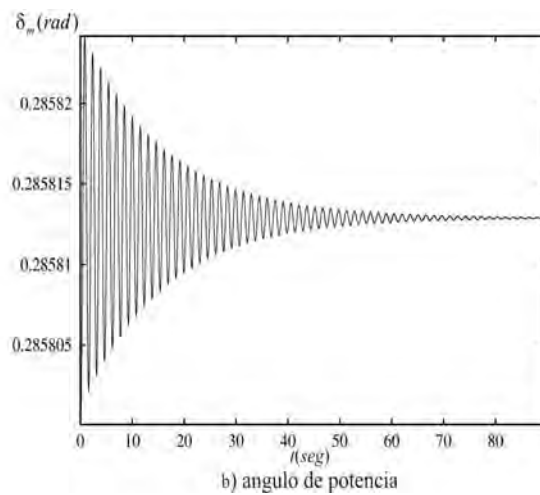
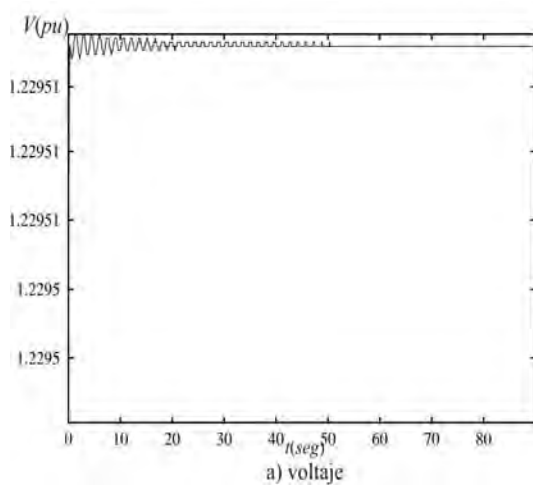


Figura 4.5 Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables

La dinámica de las variables de estado del sistema para las condiciones iniciales dadas por  $V = 1.2295$ ,  $\delta_m = 0.2858$ ,  $\omega = 0$ ,  $\delta = 0.10662$ ,  $E'_m = 1$ ,  $E_{fdrr} = 0.4$ , y contenidas dentro de la región estable es mostrada en la Figura 4.6. El punto de equilibrio al que convergen estas variables es  $V = 1.22951$ ,  $\delta_m = 0.28581$ ,  $\omega = 0$ ,  $\delta = 0.106637$ ,  $E'_m = 1$ ,  $E_{fdrr} = 0.40836$ .



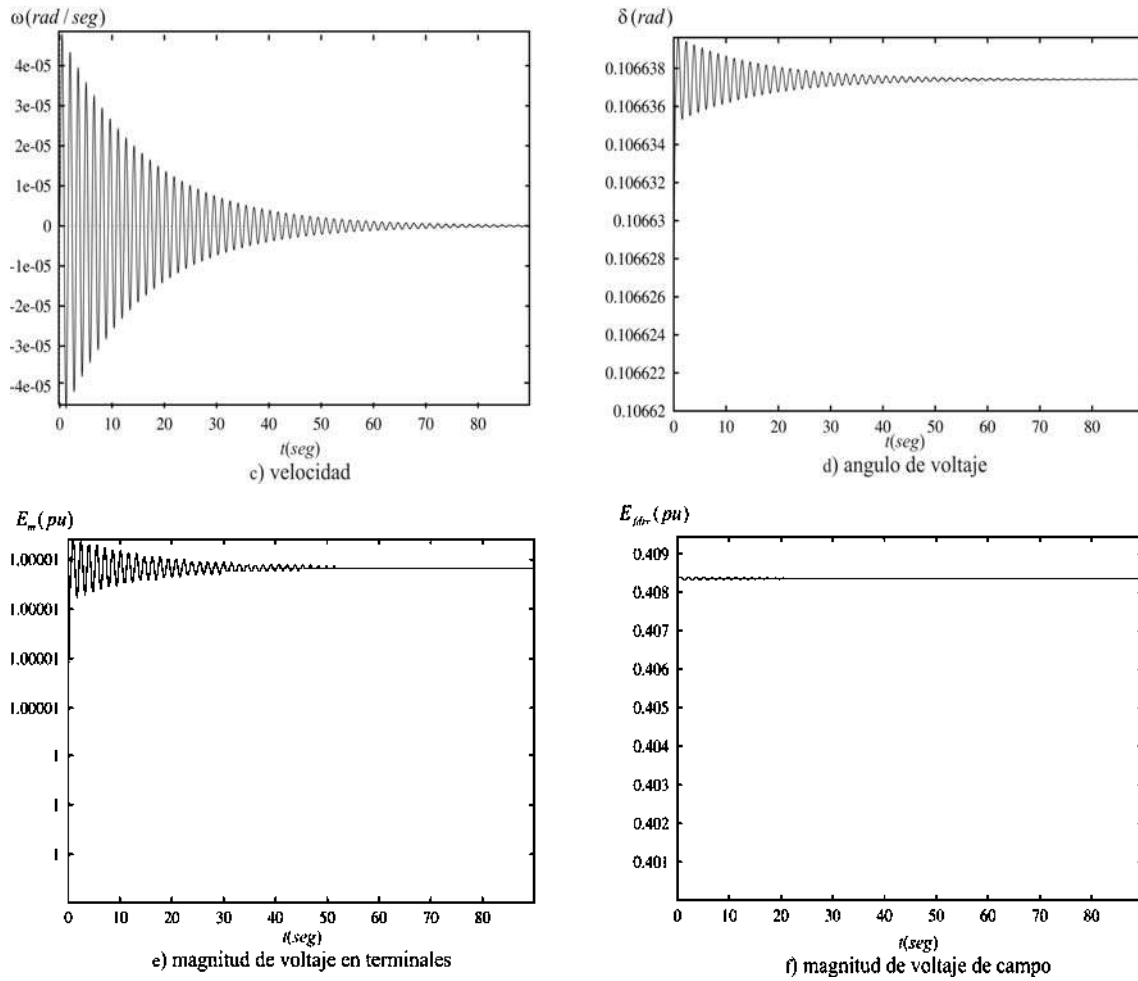


Figura 4.6 Comportamiento de las variables del sistema en  $Q_1=10$  pu.

La trayectoria de soluciones emanada desde el punto de bifurcación mostrado en la Figura 4.5 presenta soluciones periódicas, tal como se muestra en la Figura 4.7. En la Figura 4.8 se muestra de manera detallada las bifurcaciones contenidas en esta rama de soluciones; observándose siete bifurcaciones de doble periodo, tres bifurcaciones Saddle-Node, dos bifurcaciones toroidales y una bifurcación Hopf.

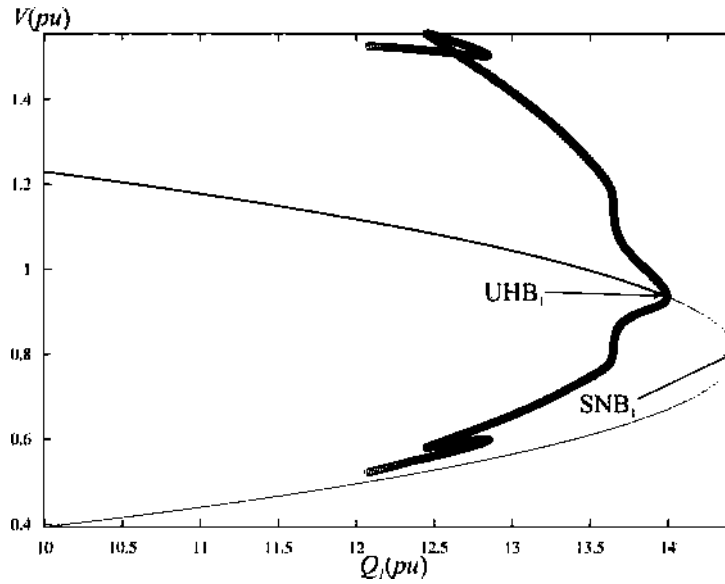


Figura 4.7 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia.

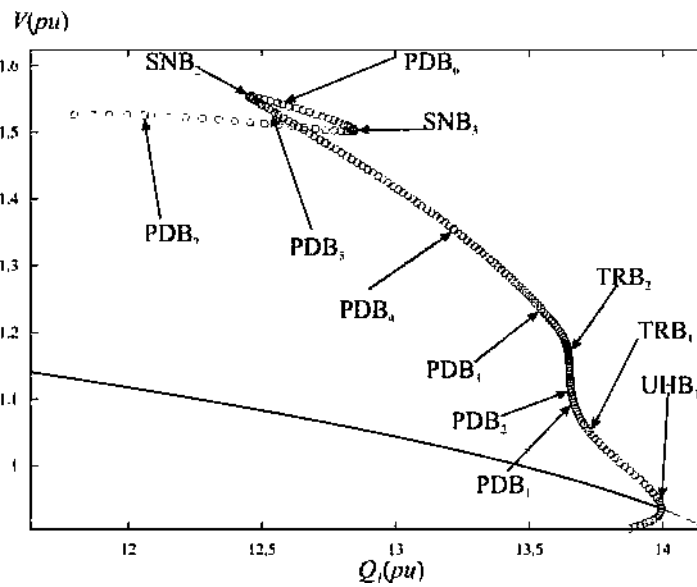


Figura 4.8 Soluciones periódicas inestables surgiendo de la bifurcación Hopf.

De la Figura 4.8 se observa que se tiene una rama de soluciones estables hasta un valor del parámetro de bifurcación  $Q_1 = 13.9942$  pu. Cuando el parámetro toma este valor se presenta una bifurcación Hopf subcrítica ( $UHB_1$ ) emanando una rama de soluciones periódicas inestables identificadas por círculos blancos. Esta rama se extiende a la izquierda, y al llegar el parámetro de bifurcación a un valor de  $Q_1 = 13.7041$  pu se presenta una bifurcación toroidal ( $TRB_1$ ). Decrementando el parámetro de bifurcación hasta

$Q_1 = 13.6731$  pu se presenta una bifurcación de doble periodo (**PDB<sub>1</sub>**). Este tipo de bifurcación también se presenta para un valor de  $Q_1 = 13.6574$  pu. Conforme se sigue variando este parámetro aparecen nuevos puntos de bifurcación. La aparición y ubicación de los diversos tipos de bifurcaciones se muestran en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4 Posición de las bifurcaciones de la Figura 4.8.

<b>Bifurcación</b>	$Q_1(pu)$	$V(pu)$
<b>UHB<sub>1</sub></b>	13.9942	0.9351
<b>SNB<sub>1</sub></b>	14.4333	0.8017
<b>SNB<sub>2</sub></b>	12.4569	1.5535
<b>SNB<sub>3</sub></b>	12.4554	1.5531
<b>TRB<sub>1</sub></b>	13.7041	1.0622
<b>TRB<sub>2</sub></b>	13.6522	1.1333
<b>PDB<sub>1</sub></b>	13.6731	1.0861
<b>PDB<sub>2</sub></b>	13.6574	1.1113
<b>PDB<sub>3</sub></b>	13.6503	1.1482
<b>PDB<sub>4</sub></b>	13.2173	1.3536
<b>PDB<sub>5</sub></b>	12.5522	1.5274
<b>PDB<sub>6</sub></b>	12.5772	1.5408
<b>PDB<sub>7</sub></b>	12.1290	1.5232

Con la finalidad de mostrar el efecto que tiene la aparición de una bifurcación en la dinámica, se considera la primer región estable que da lugar a la bifurcación Hopf subcrítica (**UHB<sub>1</sub>**) en el valor del parámetro de bifurcación  $Q_1 = 13.9942$  pu. Considerando condiciones iniciales de las variables de estado igual los valores obtenidos en este punto de bifurcación y efectuando la integración de las ecuaciones (4.4), la dinámica de las variables del sistema ya no se comporta de la misma manera que en el estado estable ante una perturbación en el sistema. El cambio radica en que las variables de estado comienzan a oscilar en lugar de tender hacia un valor constante. Esta oscilación se vuelve periódica cuando se alcanza un pequeño ciclo limite, como se muestra esquemáticamente en la Figura 4.9. Este ciclo limite es una oscilación en el sistema de muy baja amplitud y frecuencia.

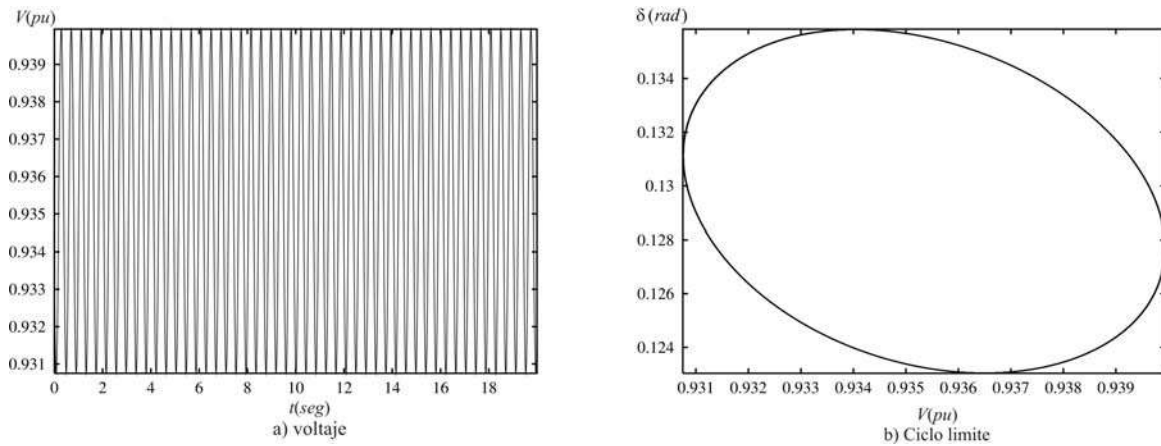


Figura 4.9 Ciclo limite creado en la bifurcación Hopf ( $UHB_1$ ).

Cuando  $Q_1$  se incrementa más allá de esta bifurcación Hopf, la amplitud de la oscilación de la magnitud de voltaje comenzara a incrementarse conforme transcurre el tiempo hasta alcanzar un máximo y después colapsar. Este fenómeno se muestra en la Figura 4.10 y Figura 4.11 para valores de  $Q_1 = 14.0010$  pu y  $Q_1 = 14.0176$  pu, respectivamente. Se observa que ha mayor valor de  $Q_1$ , la magnitud de voltaje se colapsa en un menor tiempo.

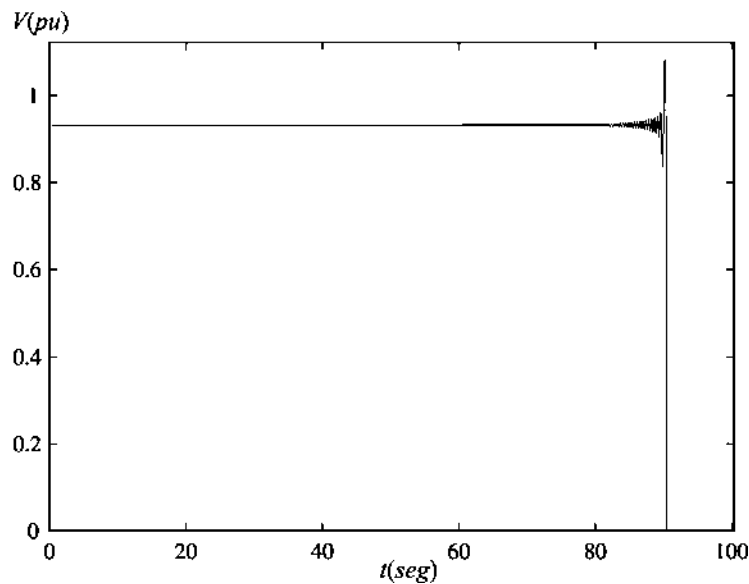


Figura 4.10 Oscilaciones de magnitud de voltaje  $Q_1 = 14.0010$  pu.

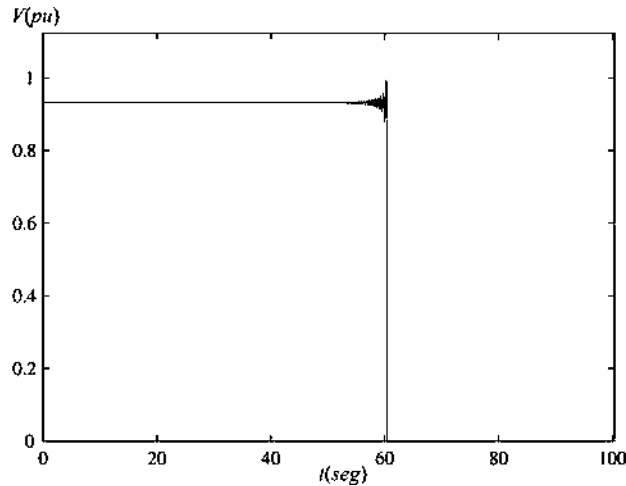


Figura 4.11 Colapso de magnitud de voltaje en  $Q_1 = 14.0176$  pu .

En caso de que la variación de  $Q_1$  sea hacia valores menores al que produjo la bifurcación Hopf, es posible eliminar la oscilación en la magnitud de voltaje en el nodo de carga. Lo anterior se muestra para un valor  $Q_1 = 13.7041$  pu en el que se presenta la bifurcación toroidal (**TRB**<sub>1</sub>). En este punto la dinámica de la magnitud del voltaje tiende hacia un estado estable, como se observa en la Figura 4.12. El mismo comportamiento acontece cuando aparece la otra bifurcación toroidal (**TRB**<sub>2</sub>) en el valor de  $Q_1 = 13.6522$  pu . En estos casos el sistema es llevado a una zona de operación estable.

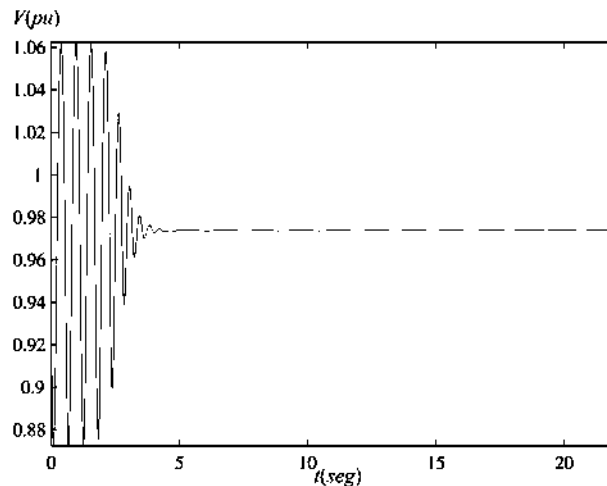


Figura 4.12 Magnitud de voltaje en  $Q_1 = 13.7041$  pu .

Si se continúa decrementando aun más el parámetro de bifurcación hasta el punto  $Q_1 = 13.6495$  pu , se pierde la estabilidad del sistema como se observa en la Figura 4.13. En este caso la magnitud de voltaje comienza un proceso oscilatorio que conduce a una situación de colapso.

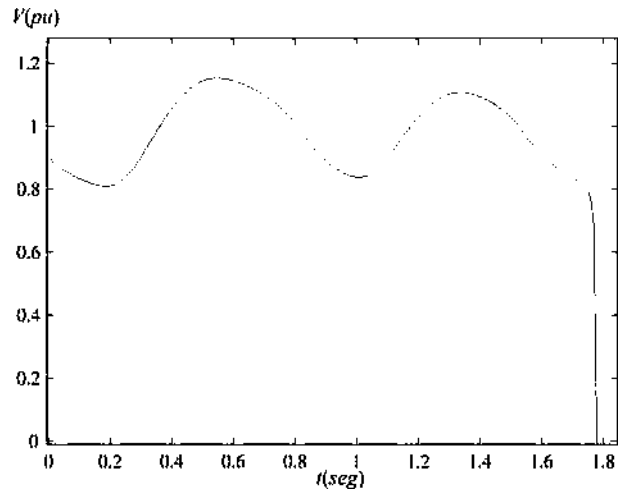


Figura 4.13 Colapso de magnitud de voltaje en  $Q_1 = 13.6495$  pu .

Al seguir decrementando el parámetro de bifurcación se llega al punto  $Q_1 = 13.2174$  pu en donde ocurre otra bifurcación de doble periodo (**PDB<sub>4</sub>**), en este punto la magnitud del voltaje tiene un comportamiento similar al punto anterior, pero el colapso de voltaje ocurre en menor tiempo esto se observa en la Figura 4.14.

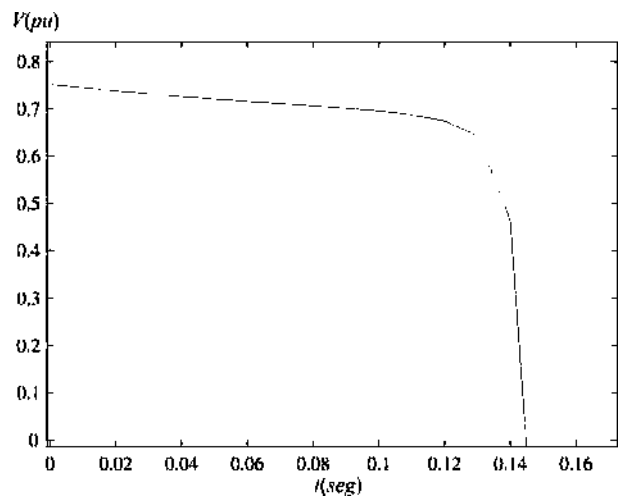


Figura 4.14 Colapso de magnitud de voltaje en  $Q_1 = 13.2174$  pu .

Si se decrementa el parámetro de bifurcación hasta el punto  $Q_1 = 12.4569$  pu y  $Q_1 = 12.4554$  pu se tienen dos bifurcación Saddle-Node (**SNB**), en donde la magnitud de voltaje tiene un comportamiento similar al expuesto para la bifurcación (**PDB<sub>4</sub>**). En el punto de bifurcación  $Q_1 = 12.5772$  pu se tiene una bifurcación de doble periodo (**PDB<sub>6</sub>**) y en el punto  $Q_1 = 12.1290$  pu ocurre otra bifurcación de doble periodo (**PDB<sub>7</sub>**) en donde la magnitud del voltaje colapsa muy rápido. Este comportamiento de la magnitud de voltaje se puede observar en la Figura 4.15.

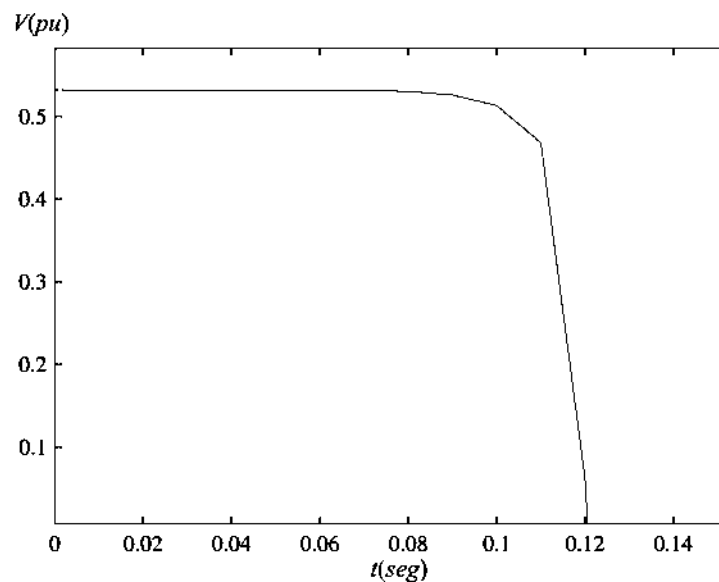


Figura 4.15 Comportamiento de la magnitud de voltaje en  $Q_1 = 12.1290$  pu .

El efecto de la inclusión del excitador en el generador se puede cuantificar al comparar los diagramas de bifurcación del sistema eléctrico bajo estudio sin y con excitador. Esta comparación se muestra gráficamente en la Figura 4.16, de donde se observa que al incluir el sistema de excitación automático en el generador se logra eliminar la segunda bifurcación Hopf (**SHB<sub>1</sub>**) y se aumenta el margen de estabilidad del sistema.

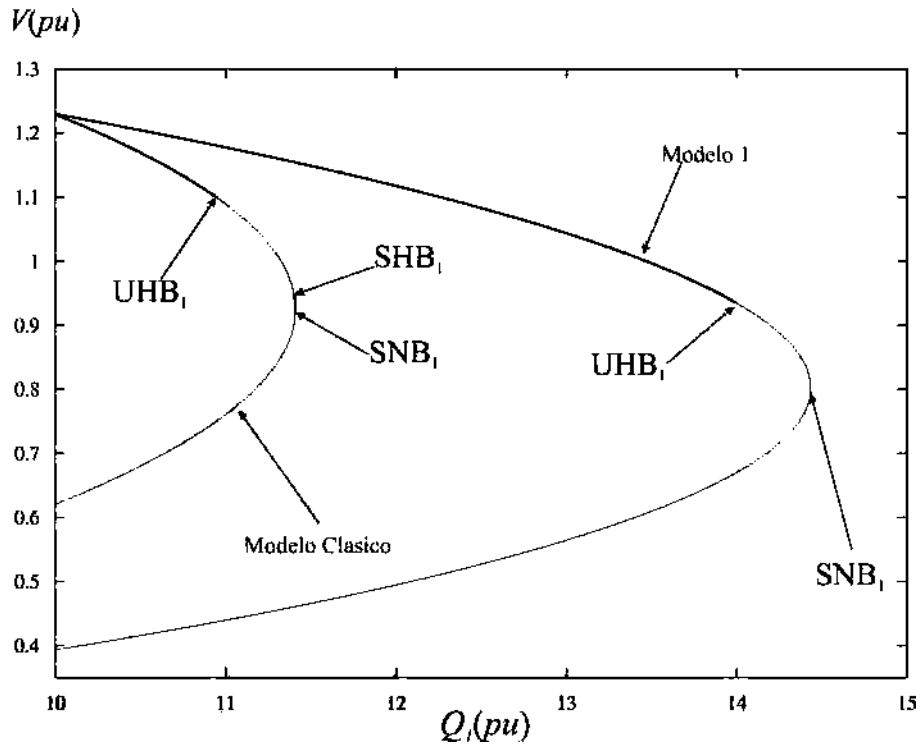


Figura 4.16 Diagramas de bifurcación con y sin excitador automático.

En la Tabla 4.5 se comparan la posición de las bifurcaciones de la rama estable e inestable de los diferentes diagramas de bifurcación de la Figura 4.16 de los modelos clásico y modelo con sistema de excitación.

Tabla 4.5 Comparación del modelo clásico y modelo 1.

Modelo	Bifurcación	$Q_1(pu)$	$V(pu)$
Clásico	$UHB_1$	10.9457	1.0999
Modelo 1	$UHB_1$	13.9942	0.9351
Clásico	$SHB_1$	11.4067	0.9425
Modelo 1	Se elimina	Se elimina	Se elimina
Clásico	$SNB_1$	11.4114	0.925
Modelo 1	$SNB_1$	14.4333	0.8017

#### 4.4 Modelo clásico del sistema eléctrico con StatCom

En este caso se añade un StatCom al modelo clásico en el nodo de carga con la finalidad de inyectar una potencia reactiva constante para mejorar la magnitud de voltaje en ese nodo, tal como se muestra en la Figura 4.17.

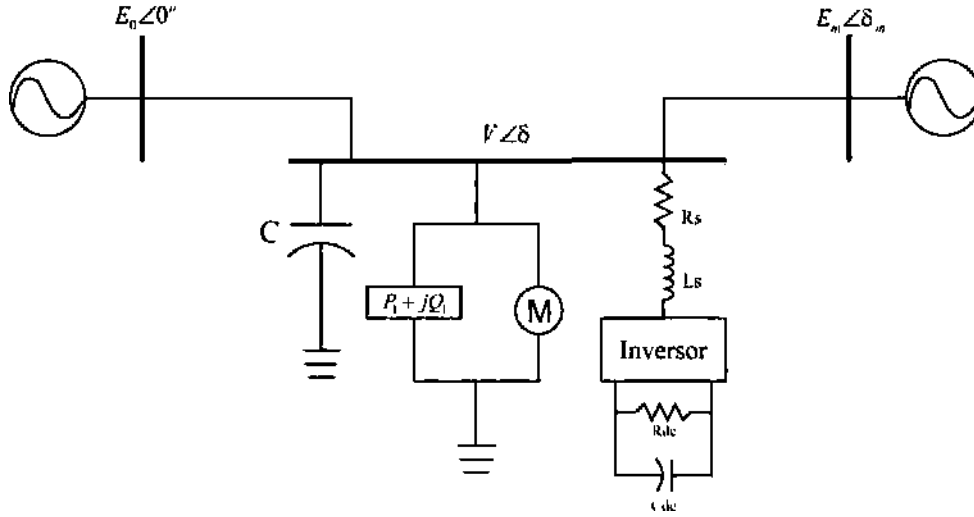


Figura 4.17 Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica y StatCom.

Las ecuaciones (4.7) representan la dinámica del sistema.

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}_m &= \omega \\
 \dot{\omega} &= \frac{1}{M} (P_m - D_m \omega - E_m^2 G_m + E_m V (G_m \cos(\delta_m - \delta) + B_m \sin(\delta_m - \delta))) \\
 \dot{\delta} &= K_{qv}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1) \\
 \dot{V} &= \frac{1}{TK_{qw} K_{pv}} (-K_{qw} (P_0 + P_1 - P) + (K_{pw} K_{qv} - K_{qw} K_{pv}) V + K_{pw} (Q_0 + Q_1 - Q) \\
 &\quad + K_{pw} K_{qv2} V^2) \\
 \dot{i}_d &= -\frac{R_s}{L_s} i_d + \omega i_q + \frac{k}{L_s} \cos(\alpha + \delta) V_{dc} - \frac{V}{L_s} \cos \delta \\
 \dot{i}_q &= -\frac{R_s}{L_s} i_q - \omega i_d + \frac{k}{L_s} \sin(\alpha + \delta) V_{dc} - \frac{V}{L_s} \sin \delta \\
 \dot{V}_{dc} &= \left( \frac{1}{C} \right) \left( -k \cos(\alpha + \delta) i_d - k \sin(\alpha + \delta) i_q - \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde las potencias  $P$  y  $Q$  están descritas por las ecuaciones de flujos de potencia dadas en (4.8). El último término de la expresión derecha de las ecuaciones representa la potencia inyectada por el Statcom.

$$\begin{aligned}
 P &= -V^2(G'_0 + G'_m) + VE'_m(G'_m \cos(\delta - \delta_m) + B'_m \sin(\delta - \delta_m)) + VE'_0(G'_0 \cos\delta + B'_0 \sin\delta) \\
 &\quad + V(I_d \cos\delta + I_q \sin\delta) \\
 Q &= V^2(B'_0 + B'_m) + VE'_m(G'_m \sin(\delta - \delta_m) - B'_m \cos(\delta - \delta_m)) + VE'_0(G'_0 \sin\delta - B'_0 \cos\delta) \\
 &\quad + V(I_d \sin\delta - I_q \cos\delta)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Las ecuaciones del sistema de control son:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= k_{2v} (V_{dc}^* - V_{dc}) \\
 \Delta i_d &= k_{1v} (V_{dc}^* - V_{dc}) + x_1
 \end{aligned} \right\} \tag{4.9}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= k_{2p} \Delta i_d \\
 k_1 &= k_{1p} \Delta i_d + x_2
 \end{aligned} \right\} \tag{4.10}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_3 &= k_{2q} \left( \frac{Q_{ac} - Q_{ac}^*}{V} \right) \\
 \alpha_1 &= k_{1q} \left( \frac{Q_{ac} - Q_{ac}^*}{V} \right) + x_3
 \end{aligned} \right\} \tag{4.11}$$

Las ecuaciones de los limitadores se presentan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 k &= k_{lim} \tanh\left(\frac{k_1}{k_{lim}}\right) \\
 \alpha &= \alpha_{lim} \tanh\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{lim}}\right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

El parámetro de bifurcación es la potencia reactiva  $Q_1$  en el nodo de carga. Los parámetros restantes que se utilizaron en este modelo se listan en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6 Parámetros utilizados en el sistema de potencia clásico añadiendo el StatCom.

Parámetro de Bifurcación $Q_1= 10$ hasta 14 pu				
$K_{pw} = 0.4 pu$	$K_{pv} = 0.3 pu$	$K_{qw} = -0.03 pu$	$K_{qv} = -2.8 pu$	$K_{qv2} = 2.1 pu$
$T_1 = 8.5 pu$	$P_0 = 0.6 pu$	$Q_0 = 1.3 pu$	$P_1 = 0 pu$	$C = 12$
$E'_0 = 2.5 pu$	$E_m = 1 pu$	$P_m = 1 pu$	$M = 0.3 seg^2 / rad$	$D = 0.05 seg / rad$
$B'_0 = -7.8251 pu$	$G'_0 = 1.6632 pu$	$B_m = -4.9809 pu$	$G_m = 0.4357 pu$	$L_s = 0.1 pu$
$R'_s = 0.1 pu$	$V_{dc}^* = 1.3201 pu$	$C_{dc} = 0.1 pu$	$K_{1p} = 0.35$	$K_{2p} = -0.1$
$K_{1v} = 0.35$	$K_{2v} = 0.001$	$K_{1q} = 1$	$K_{2q} = 0.5$	$Q_{ac}^* = 0.0001 pu$
$alfa_{lim} = 1$	$k_{lim} = 1$	$R_{dc} = 600$		

El Statcom tiene la capacidad de inyectar potencia reactiva dentro de su margen operativo normal. Como primer caso se obtiene el diagrama de bifurcación considerando que la potencia inyectada es nula  $Q_{ac}^* = 0.0001 pu$ . El punto de equilibrio estable del sistema para un valor del parámetro de bifurcación de  $Q_1=10$  pu se obtiene dadas las siguientes condiciones iniciales:

$$V = 1.2295 pu, \delta_m = 0.2858 rad, \omega = 0 rad/seg, \delta = 0.10662 rad, V_{dc} = 1.32 pu$$

$$i_d = -0.001557 pu, i_q = -0.0002484 pu, x_1 = 9.8515^{-20}, x_2 = 1.66768, x_3 = -1.3232^{-5}$$

El diagrama de bifurcación obtenido al variar  $Q_1$  es mostrado en la Figura 4.18 y es similar al obtenido para el modelo clásico sin controles. Cuando  $Q_1 = 10.8957 pu$ , las soluciones del sistema son inestables y se representan por la línea delgada, hasta llegar al punto  $Q_1 = 11.4065 pu$  donde el sistema se vuelve estable, después de este valor el sistema no tiene solución o punto de equilibrio.

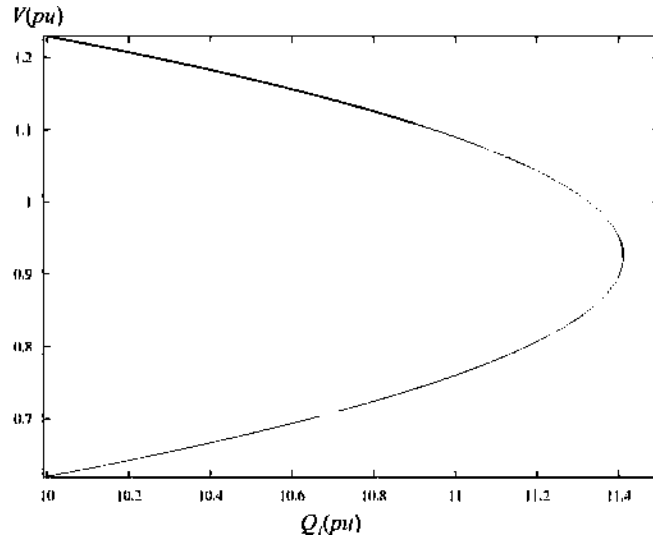


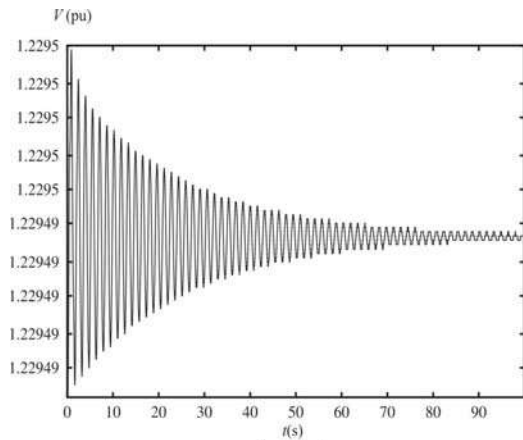
Figura 4.18 Diagrama de bifurcación con  $Q_{ac}^* = 0.0001 pu$

La Figura 4.19 muestra la dinámica de las variables de estado del sistema para condiciones iniciales dadas por:

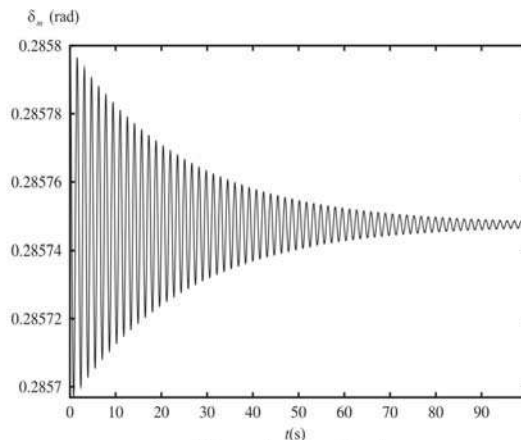
$$V = 1.22949, \delta_m = 0.285745, \omega = 0, \delta = 0.10656, V_{dc} = 1.3201$$

$$i_d = -0.001557, i_q = -0.0002484, x_2 = 1.66768,$$

De manera similar a lo expuesto en el análisis del diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 4.18, el comportamiento dinámico de estas variables es muy similar al observado para el modelo clásico sin controlador. Puesto que la inyección de potencia reactiva del StatCom al sistema es nula, las variables de estado  $i_d$  e  $i_q$  tienen un valor estacionario nulo como se muestra en las Figura 4.19e y 4.19f.



a) voltaje



b) angulo de potencia

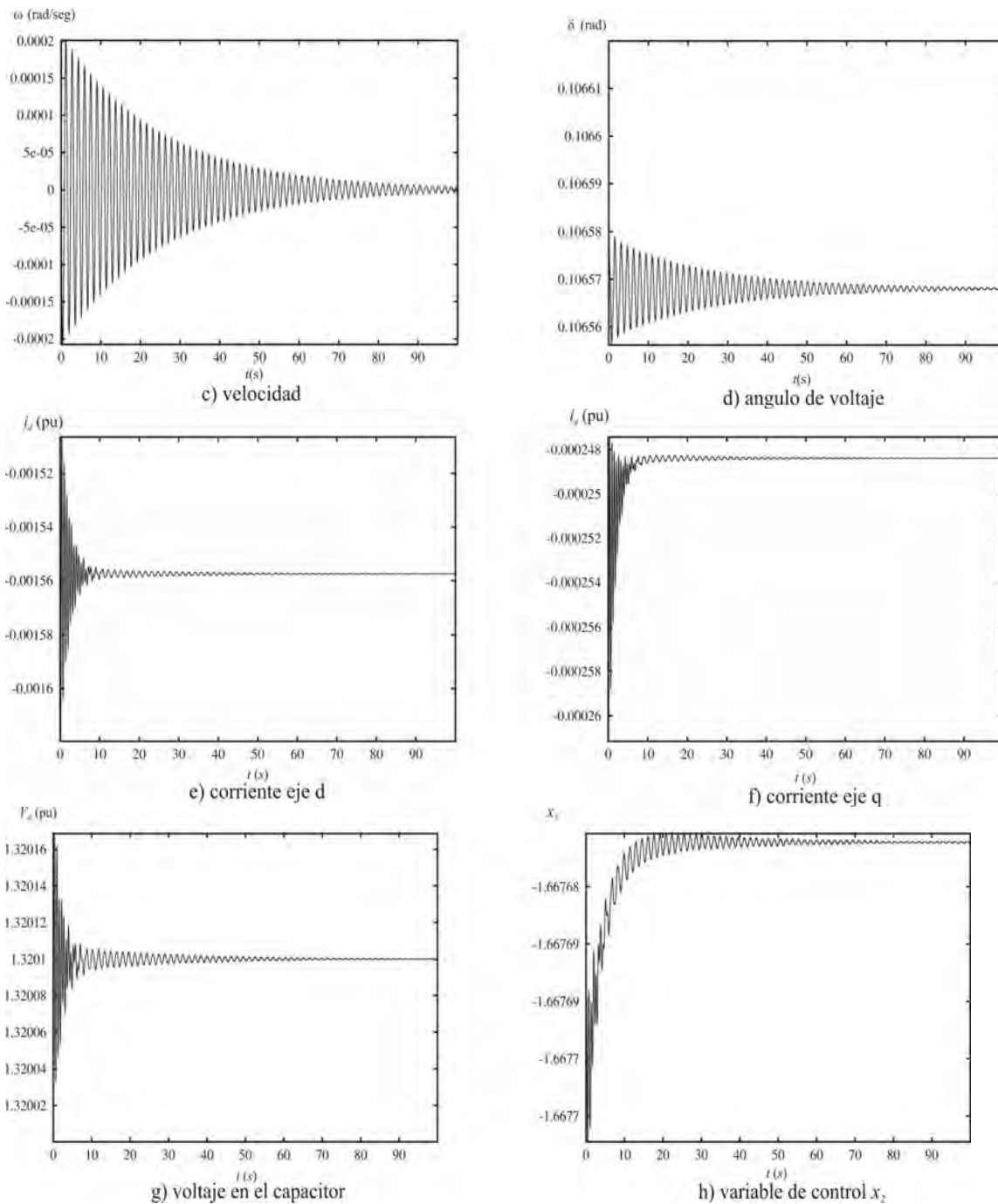


Figura 4.19 Comportamiento de las variables en  $Q_1 = 10 pu$ .

Por último, los diagramas de bifurcación mostrados en la Figura 4.20 y 4.21 muestran las ramas de soluciones periódicas emanando de los puntos de bifurcación Hopf encontrados en el análisis.

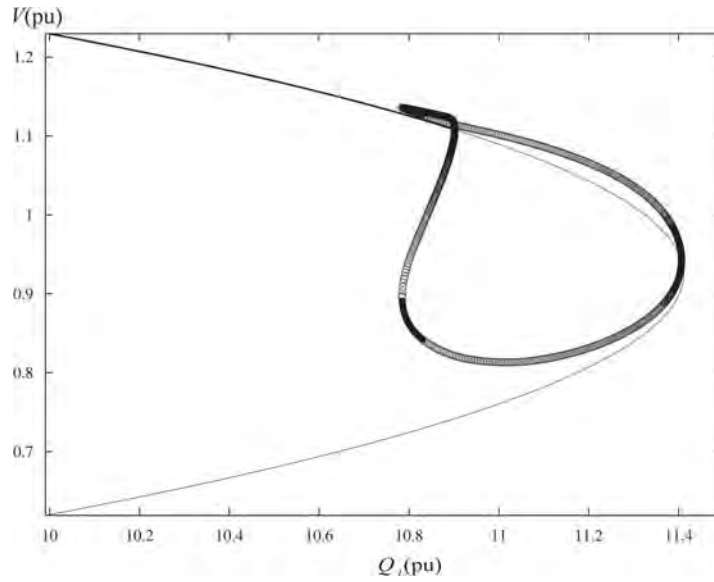


Figura 4.20 Diagrama de bifurcación con un valor de  $Q_{ac}^* = 0.0001 pu$

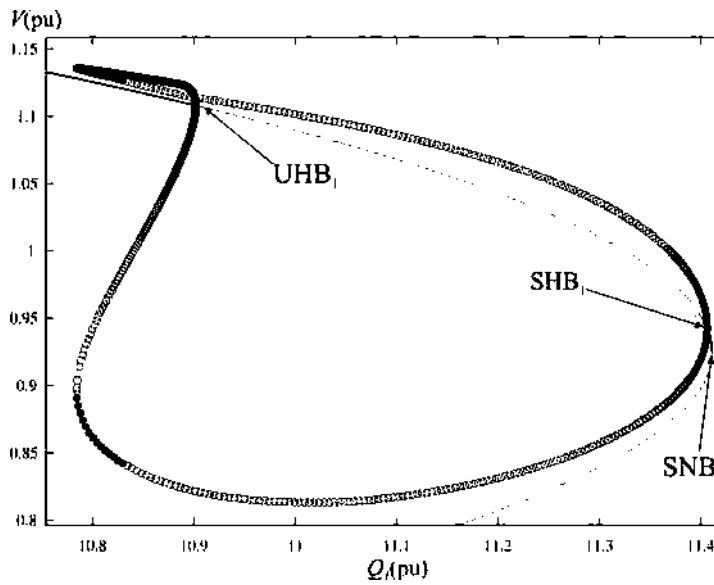


Figura 4.21 Soluciones periódicas emergiendo de la bifurcación Hopf subcrítica.

La Figura 4.22 muestra diversos diagramas de bifurcación para los niveles indicados de inyección de potencia reactiva del StatCom.

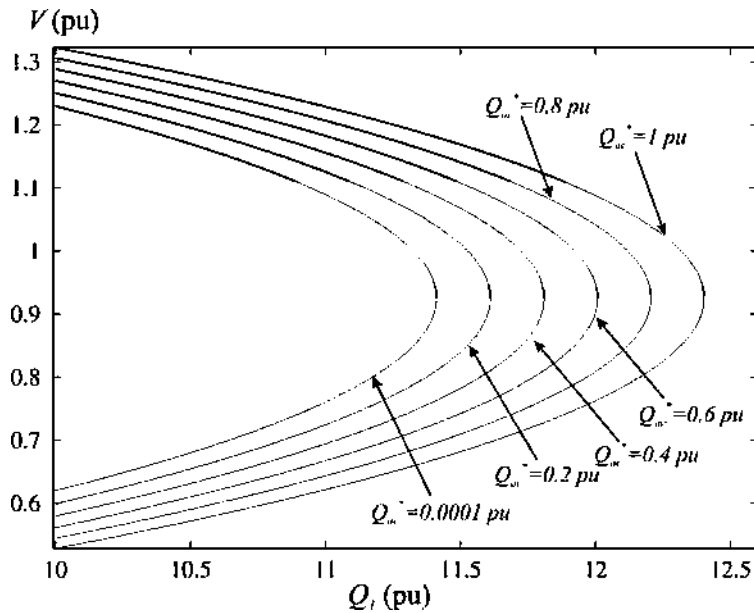


Figura 4.22 Diagrama de bifurcación para diferentes valores de  $Q_{ac}^*$ .

Como es de esperarse, el perfil de voltaje del sistema se mejora conforme el valor de inyección de potencia reactiva  $Q_{ac}^*$  se incrementa. Asimismo, el puntote bifurcación aparece a un mayor valor del parámetro  $Q_I$ . Esto indica que el límite de cargabilidad se presenta a un valor mayor del parámetro de bifurcación  $Q_I$ ; es decir, la región de operación estable es mayor. Sin embargo, para este caso la utilización del Statcom es incapaz de eliminar algún tipo de bifurcación que aparece en el modelo clásico.

La ubicación precisa de las bifurcaciones detectadas en la trayectoria de soluciones mostrada en los diagramas de bifurcación mostrados en la Figura 4.22 se resume en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7 Ubicación de las bifurcaciones para diferentes valores de  $Q_{ac}^*$ .

$Q_{ac}^*$	$UHB_1$	$SHB_1$	$SNB_1$
$0.0001 pu$	$10.8957 pu$	$11.4065 pu$	$11.4112 pu$
$0.2 pu$	$11.0878 pu$	$11.6062 pu$	$11.6108 pu$
$0.4 pu$	$11.2856 pu$	$11.8053 pu$	$11.8098 pu$

$0.6 pu$	$11.4861 pu$	$12.0037 pu$	$12.0080 pu$
$0.8 pu$	$11.6890 pu$	$12.2014 pu$	$12.2055 pu$
$1 pu$	$11.8943 pu$	$12.3983 pu$	$12.4022 pu$

La Figura 4.23 muestra el diagrama de bifurcación asociado a una inyección de potencia reactiva del StatCom de  $Q_{ac}^* = 0.4 pu$  con las trayectorias de soluciones periódicas emanando de los puntos de bifurcación Hopf. Es interesante observar que este diagrama es similar al obtenido con inyección de potencia reactiva nula, pero desplazado con respecto al valor del parámetro de bifurcación.

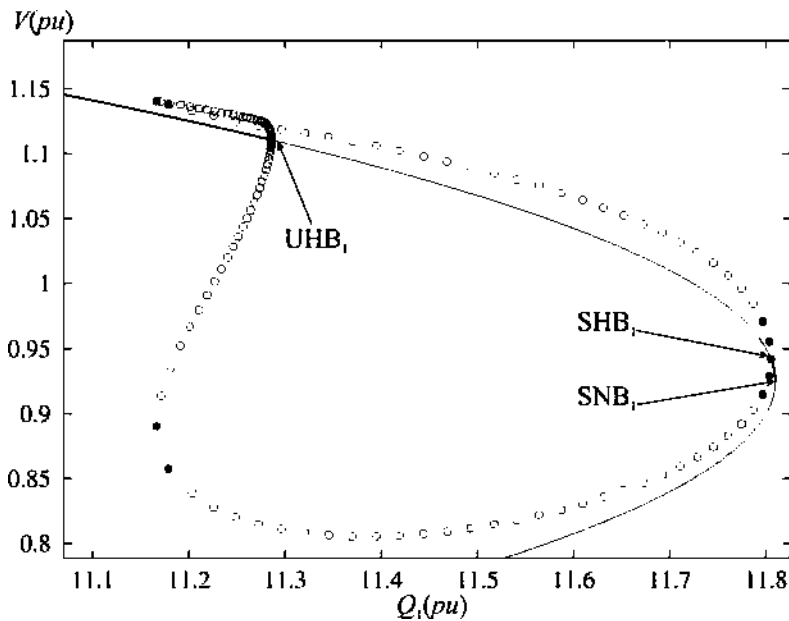


Figura 4.23 Diagrama de bifurcación con  $Q_{ac}^* = 0.4 pu$ .

En la Figura 4.24 se muestra el comportamiento dinámico de las variables de estado para el valor de  $Q_{ac}^* = 0.4 pu$ , donde se observa que el valor de estado estable de la magnitud de voltaje y la corriente en el eje  $d$ , es mayor respecto al análisis con un valor de  $Q_{ac}^* = 0.0001 pu$ . También se observa que el voltaje en el capacitor tiende hacia su valor de referencia.

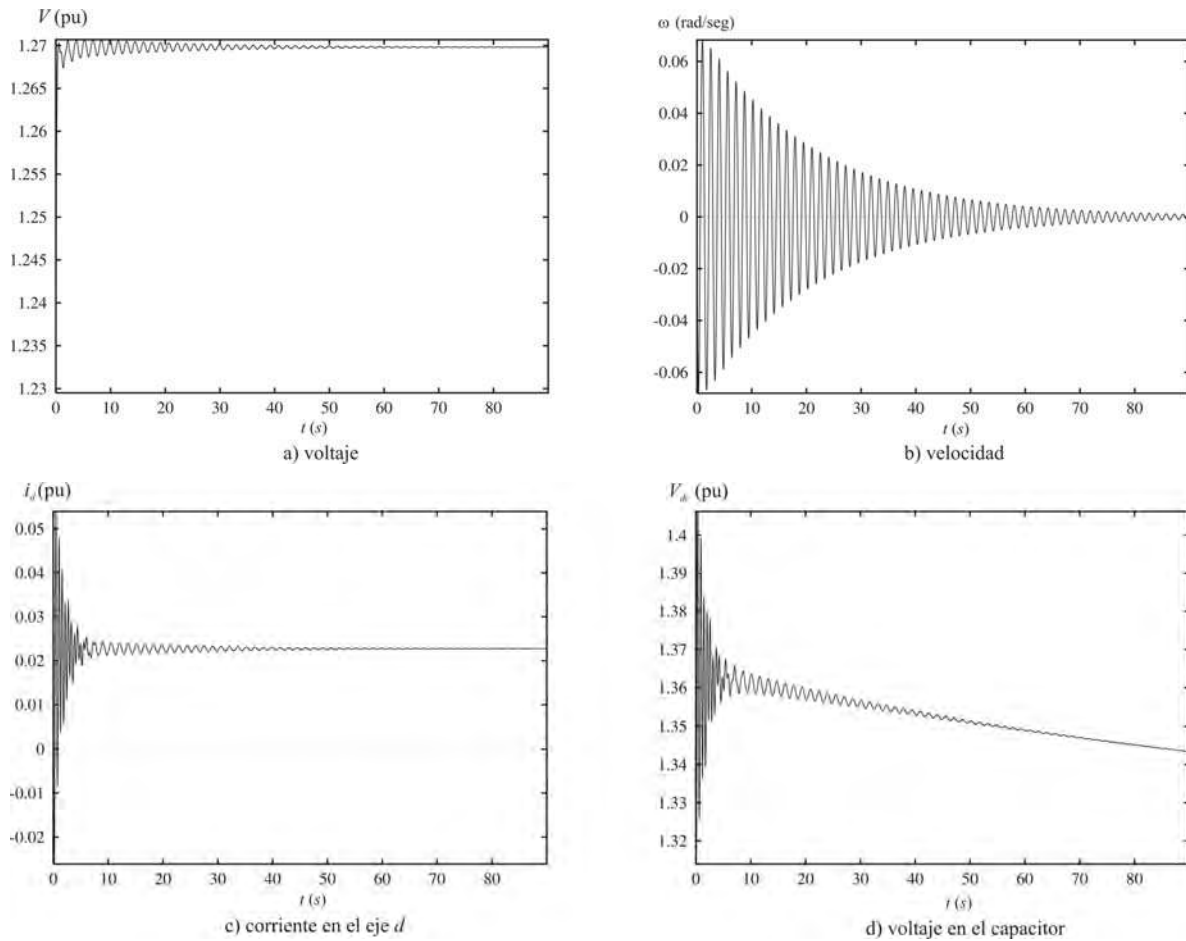


Figura 4.24 Comportamiento de las variables del sistema con un valor de  $Q_{ac}^* = 0.4 pu$

#### 4.5 Modelo clásico del sistema eléctrico con StatCom y sistema de excitación

En esta sección se analiza el modelo clásico con ambos controladores, StatCom y sistema de excitación rápido. El primero inyecta un valor constante de potencia reactiva al sistema desde su nodo de conexión, y el segundo regula la magnitud de voltaje en terminales del generador. La Figura 4.25 se muestra el sistema compensado, en donde también se utiliza como parámetro de bifurcación la demanda de potencia reactiva  $Q_I$  en el nodo de carga. Las ecuaciones matemáticas necesarias para realizar el estudio dinámico se presentan a continuación.

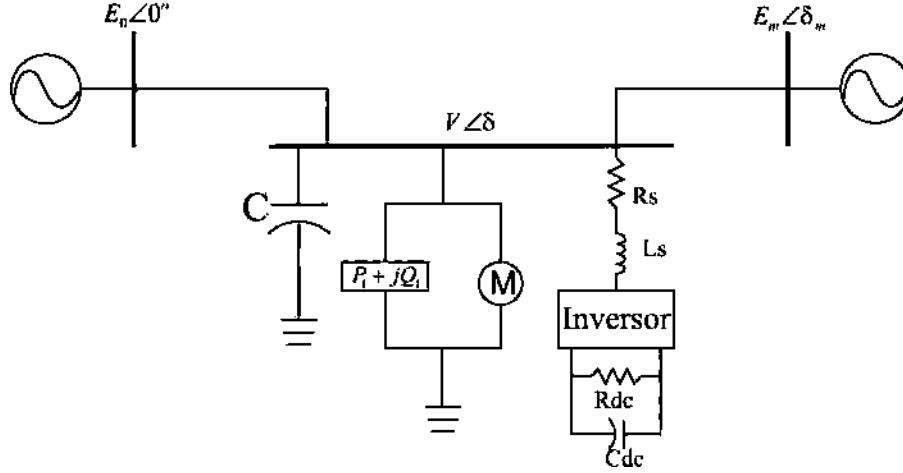


Figura 4.25 Sistema de potencia con sistema de excitación en el generador y StatCom.

Las ecuaciones (4.13) describen de forma dinámica el sistema analizado.

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}_m &= \omega \\
 \dot{\omega} &= \frac{1}{M} \left( P_m - D_m \omega - \left( (E'_m)^2 G_m - E'_m V (G_m \cos(\delta_m - \delta) + B_m \sin(\delta_m - \delta)) \right) \right) \\
 \dot{\delta} &= K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1) \\
 \dot{V} &= \frac{1}{TK_{qw} K_{pv}} (-K_{qw} (P_0 + P_1 - P) + (K_{pw} K_{qv} - K_{qw} K_{pv}) V + K_{pw} (Q_0 + Q_1 - Q) \\
 &\quad + K_{pw} K_{qv2} V^2) \\
 \dot{i}_d &= -\frac{R_s}{L_s} i_d + \omega i_q + \frac{k}{L_s} \cos(\alpha + \delta) V_{dc} - \frac{V}{L_s} \cos \delta \\
 \dot{i}_q &= -\frac{R_s}{L_s} i_q - \omega i_d + \frac{k}{L_s} \sin(\alpha + \delta) V_{dc} - \frac{V}{L_s} \sin \delta \\
 \dot{V}_{dc} &= \left( \frac{1}{C} \right) \left( -k \cos(\alpha + \delta) i_d - k \sin(\alpha + \delta) i_q - \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \right) \\
 \dot{E}'_m &= \frac{1}{T'_{d0}} \left( \frac{-(x_d + x)}{(x'_d + x)} E'_m + \frac{(x_d - x'_d)}{(x'_d + x)} V \cos(\delta_m - \delta) + E_{fdr} \right) \\
 E_{fdr} &= \frac{E_{fdr \lim}}{2} \tanh \left( \frac{2E_{fdr} - E_{fdr \lim}}{E_{fdr \lim}} \right) + \frac{E_{fdr \lim}}{2} \\
 \dot{E}_{fdr} &= \frac{1}{T_A} (K_A (V_{ref} - V_a) - (E_{fdr} - E_{fd0})) \\
 V_a &= \frac{1}{(x - x'_d)} \sqrt{(V x'_d + E'_m x \cos(\delta_m - \delta))^2 + (E'_m x \sin(\delta_m - \delta))^2}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde las potencias  $P$  y  $Q$  están descritas por las ecuaciones de flujos de potencia dadas en (4.14). De la parte derecha de esta ecuación, el cuarto elemento es la potencia inyectada por el Statcom.

$$\begin{aligned}
 P &= -V^2(G'_0 + G'_m) + VE'_m(G'_m \cos(\delta - \delta'_m) + B'_m \text{Sen}(\delta - \delta'_m)) + VE'_0(G'_0 \cos\delta + B'_0 \text{Sen}\delta) \\
 &\quad + V(I_d \cos\delta + I_q \text{Sen}\delta) \\
 Q &= V^2(B'_0 + B'_m) + VE'_m(G'_m \text{Sen}(\delta - \delta'_m) - B'_m \cos(\delta - \delta'_m)) + VE'_0(G'_0 \text{Sen}\delta - B'_0 \cos\delta) \\
 &\quad + V(I_d \text{Sen}\delta - I_q \cos\delta)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Las ecuaciones del sistema de control del StatCom son las mismas que en (4.9), (4.10) y (4.11) y las ecuaciones de los limitadores son igual que (4.12). Los parámetros restantes que se utilizaron en este modelo se listan en la Tabla 4. 8.

Tabla 4. 8 Parámetros utilizados en el sistema de potencia clásico con sistema de excitación y StatCom.

<b>Parámetro de Bifurcación <math>Q_1= 10</math> hasta 16 pu</b>				
$K_{pw} = 0.4 pu$	$K_{pv} = 0.3 pu$	$K_{qv} = -0.03 pu$	$K_{qv} = -2.8 pu$	$K_{qv2} = 2.1 pu$
$T_1 = 8.5 pu$	$P_0 = 0.6 pu$	$Q_0 = 1.3 pu$	$P_1 = 0 pu$	$C = 12$
$E'_0 = 2.5 pu$	$P'_m = 1 pu$	$M = 0.3 \text{seg}^2 / \text{rad}$	$D = 0.05 \text{seg} / \text{rad}$	$B'_0 = -7.8251 pu$
$G'_0 = 1.6632 pu$	$B'_m = -4.9809 pu$	$G'_m = 0.4357 pu$	$x = 0.1992 pu$	$x'_d = 0.4 pu$
$x_d = 1 pu$	$T'_{d0} = 4 pu$	$K_A = 106.93$	$T_A = 0.003 \text{seg}$	$V_{ref} = 1.2 pu$
$E_{fd0} = -5 pu$	$E_{fdrlim} = 5 pu$	$L_s = 0.1 pu$	$R'_s = 0.1 pu$	$V_{dc}^* = 1.3201 pu$
$C_{dc} = 0.1 pu$	$K_{1p} = 0.35$	$K_{2p} = -0.1$	$K_{1v} = 0.35$	$K_{2v} = 0.001$
$K_{1q} = 1$	$K_{2q} = 0.5$	$Q_{ac}^* = 0.0001 pu$	$alfa_{lim} = 1$	$k_{lim} = 1$
$R_{dc} = 600$				

El primer análisis en este modelo es con un valor nulo de inyección de potencia reactiva del StatCom al sistema,  $Q_{ac}^* = 0.001 pu$ . El diagrama de bifurcación se muestra en la Figura 4.26 partiendo del punto de equilibrio obtenido con las condiciones iniciales dadas por:

$$V = 1.2295 \text{ pu}, \delta_m = 0.2858 \text{ rad}, \omega = 0 \text{ rad/seg}, \delta = 0.10662 \text{ rad}, V_{dc} = 1.95 \text{ pu}$$

$$i_d = -0.008120 \text{ pu}, i_q = -0.001683 \text{ pu}, x_1 = -5.0822^{-20}, x_2 = 0.74152, x_3 = -6.6195^{-5}$$

$$E_m' = 1 \text{ pu}, E_{fdrr} = 0.4 \text{ pu}$$

Cuando el parámetro de bifurcación tiene un valor de  $Q_1 = 13.9909 \text{ pu}$ , las soluciones del sistema se vuelven inestables y se representan por la línea delgada, después de este valor el sistema no tiene solución o punto de equilibrio estable.

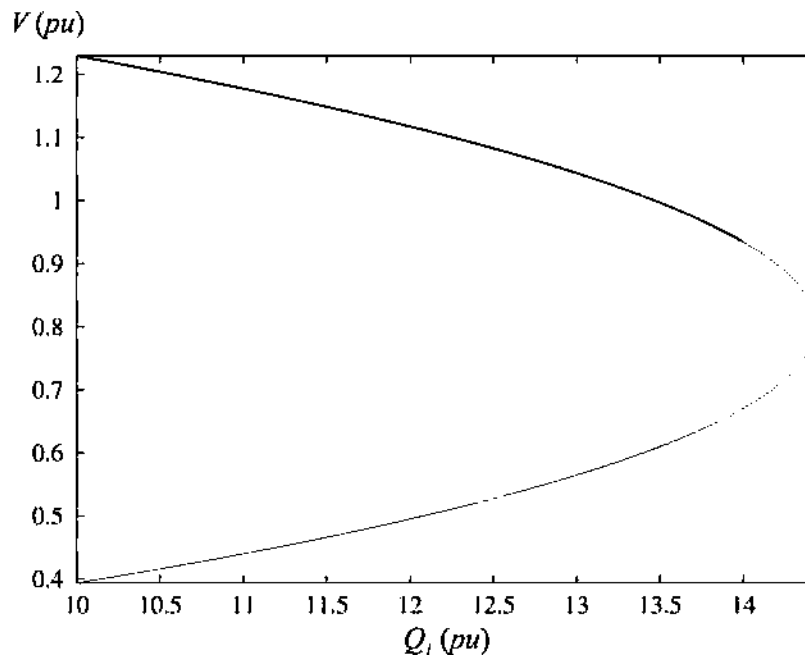


Figura 4.26 Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables.

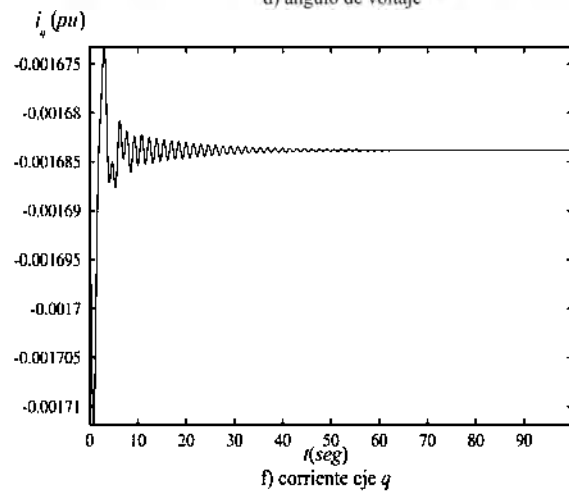
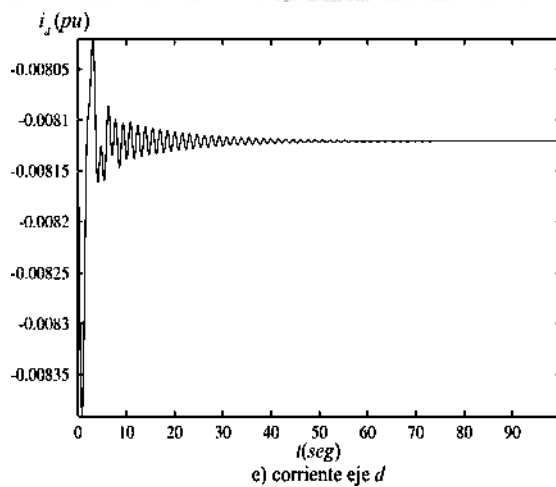
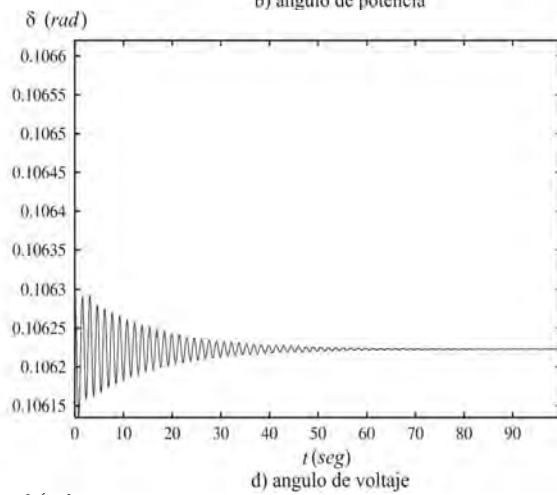
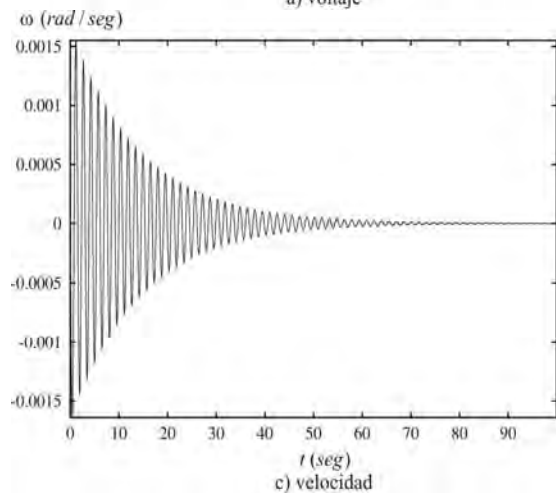
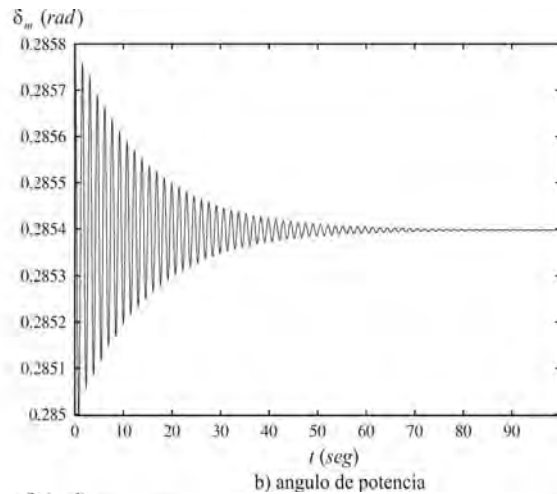
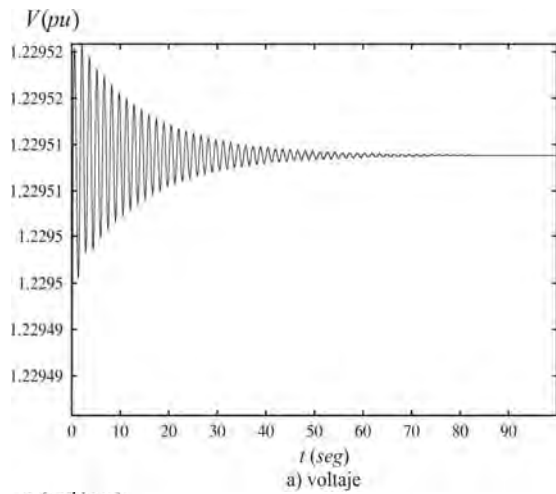
La Figura 4.27 muestra el comportamiento dinámico de las variables de estado obtenido al integrar el sistema de ecuaciones (4.13) partiendo de las siguientes condiciones iniciales:

$$V = 1.22951 \text{ pu}, \delta_m = 0.2854 \text{ rad}, \omega = 0, \delta = 0.10624, V_{dc} = 1.9501$$

$$i_d = -0.008125, i_q = -0.001684, x_1 = -5.0822^{-20}, x_2 = 0.74152, x_3 = -6.6195^{-5}$$

$$E_m = 1 \text{ pu}, E_{fdrr} = 0.4 \text{ pu}$$

Puesto que la potencia reactiva que esta inyectando el StatCom al sistema es nula,  $Q_{ac}^* = 0.001$ , las variables de estado  $i_d$  e  $i_q$  son casi cero como se muestra en las Figuras 4.27e y 4.27f.



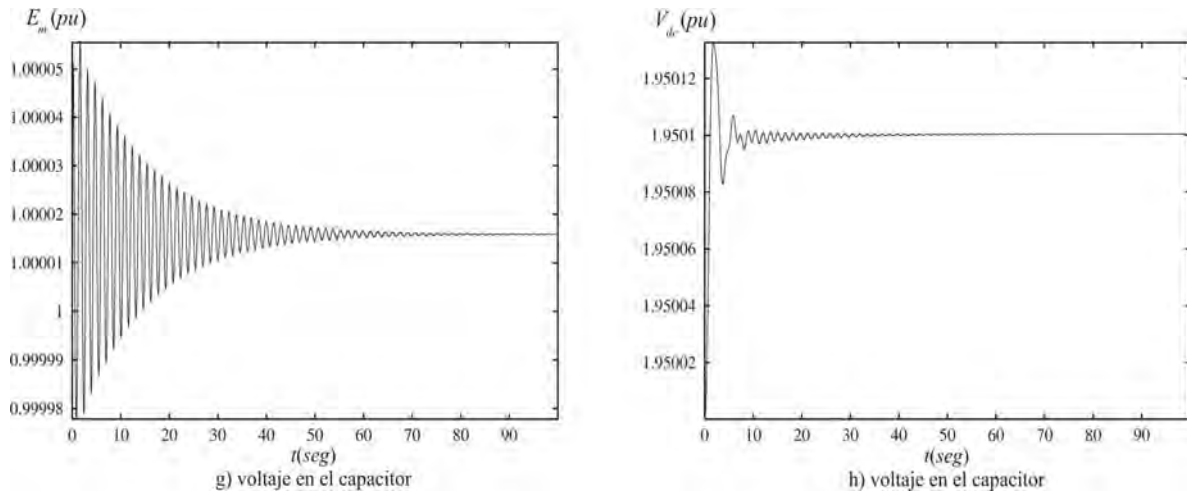


Figura 4.27 Comportamiento de las variables del sistema  $Q_1=10$  pu.

Los diagramas de bifurcación dados en las Figura 4.28 y 4.29 muestran las ramas de soluciones periódicas emergiendo del punto de bifurcación Hopf. El tipo de bifurcaciones que aparecen en estas ramas se resumen en la Tabla 4.9. Estas bifurcaciones son iguales a las obtenidas en el caso analizado anteriormente donde se considera únicamente el sistema excitador rápido.

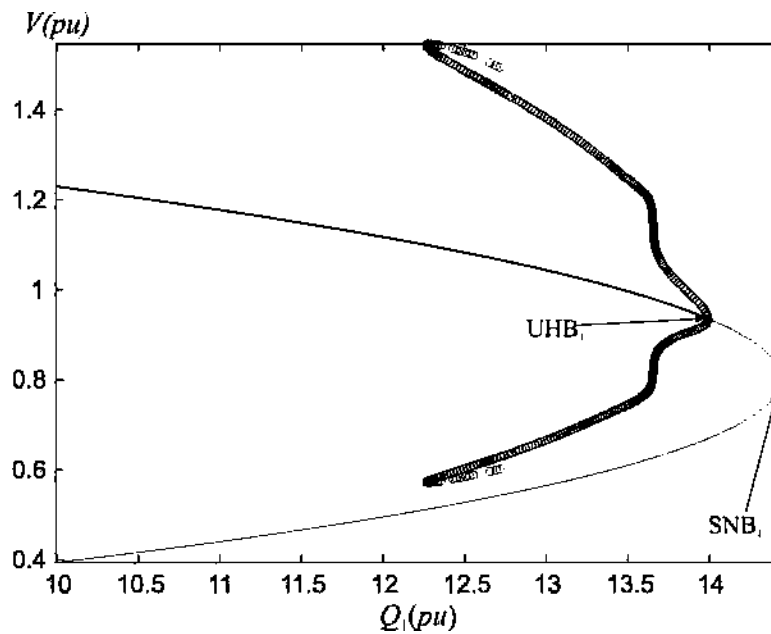


Figura 4.28 Diagrama de bifurcación con un valor de  $Q_{ac}^* = 0.001$  pu

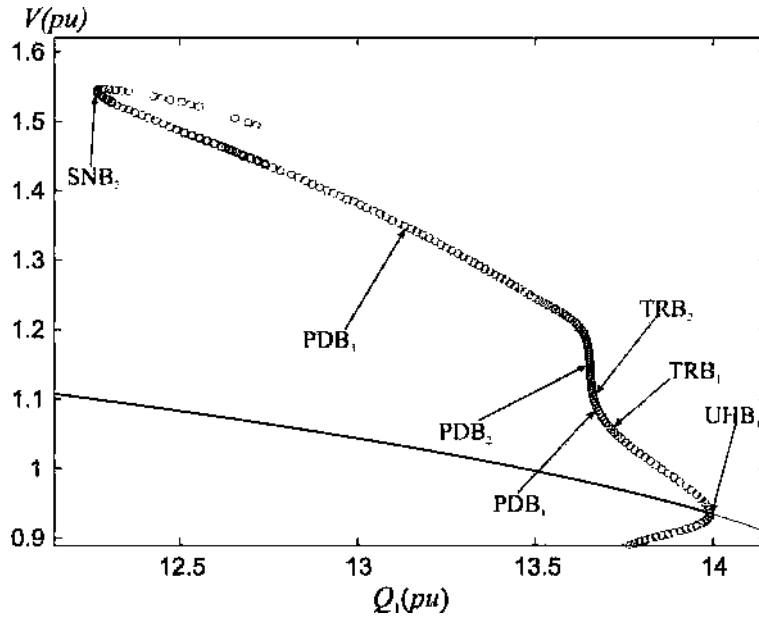


Figura 4.29 Soluciones periódicas emergiendo de  $UHB_1$ .

Tabla 4.9 Posición de las bifurcaciones de la Figura 4.29.

Bifurcación	$Q_1(pu)$	$V(pu)$
<b>UHB<sub>1</sub></b>	13.9909	0.9351
<b>SNB<sub>1</sub></b>	14.4334	0.8017
<b>SNB<sub>2</sub></b>	12.2268	1.5411
<b>TRB<sub>1</sub></b>	13.6990	1.0656
<b>TRB<sub>2</sub></b>	13.6551	1.1367
<b>PDB<sub>1</sub></b>	13.6577	1.1195
<b>PDB<sub>2</sub></b>	13.6465	1.1792
<b>PDB<sub>3</sub></b>	13.0561	1.3683

La Figura 4.30 muestra los diagramas de bifurcación asociados a cada una de las inyecciones de potencia reactiva del StatCom, teniendo de manera simultanea el control del voltaje en terminales del generador por el sistema excitador. Las condiciones iniciales para obtener el primer punto de equilibrio estable para cada uno de los diagramas de bifurcación mostrados, son las mismas que en el análisis anterior de  $Q_{ac}^* = 0.001$ .

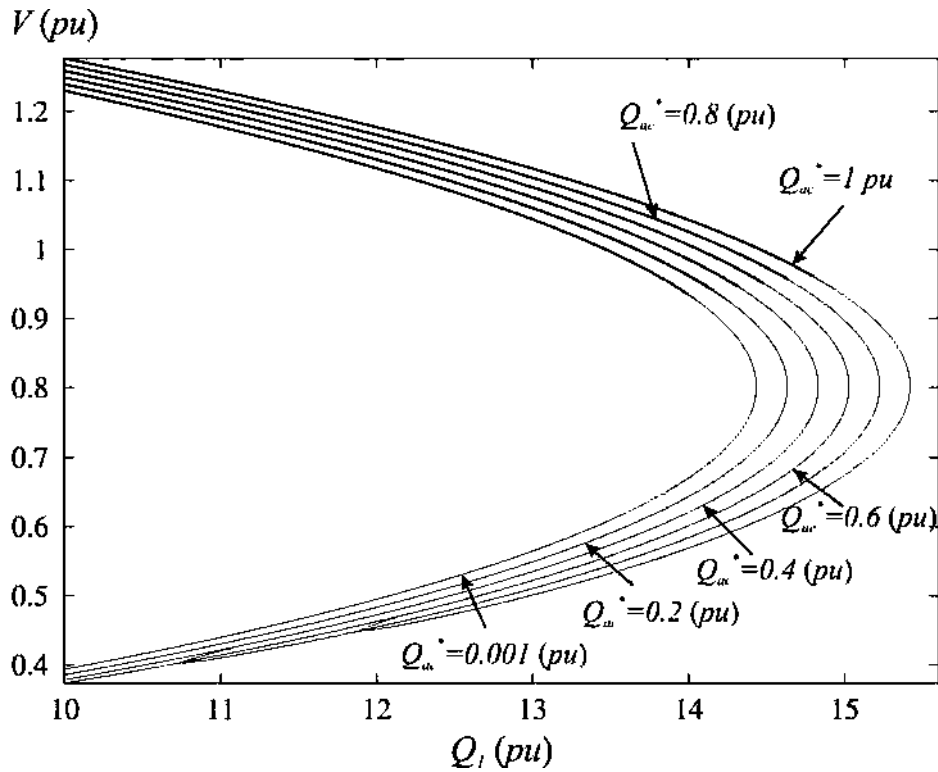


Figura 4.30 Diagrama de bifurcación para diferentes valores de potencia reactiva.

El perfil de magnitud de voltaje es mayor conforme  $Q_{ac}^*$  se incrementa; lo mismo sucede con la aparición de la bifurcación Hopf (**UHB<sub>1</sub>**). Esto indica que el límite de cargabilidad se presenta cada vez en un valor mayor en el parámetro de bifurcación  $Q_l$ , es decir; la región de operación estable es mayor.

Al incluir el sistema de excitación en el generador y el StatCom al modelo clásico se incrementa la región de estabilidad y se elimina la segunda bifurcación (**SHB<sub>1</sub>**) que se tenía en el modelo clásico. Aunque en el modelo donde solo se utiliza el excitador también se eliminó la bifurcación (**SHB<sub>1</sub>**), al incluir estos dos dispositivos se aumenta aun más la región de estabilidad del sistema de potencia.

La ubicación exacta de todas las bifurcaciones para los diferentes valores de inyección de potencia reactiva del StatCom al sistema de potencia se resume en la Tabla 4.10.

Tabla 4.10 Ubicación de las bifurcaciones para diferentes valores de  $Q_{ac}^*$ .

$Q_{ac}^*$	$UHB_1$	$SNB_1$
$0.001 pu$	$13.9909 pu$	$14.4334 pu$
$0.2 pu$	$14.1531 pu$	$14.6319 pu$
$0.4 pu$	$14.3160 pu$	$14.8303 pu$
$0.6 pu$	$14.4788 pu$	$15.0276 pu$
$0.8 pu$	$14.6413 pu$	$15.2236 pu$
$1 pu$	$14.8036 pu$	$15.4183 pu$

La Figura 4.31 muestra un diagrama de bifurcación considerando  $Q_{ac}^* = 0.4 pu$  donde ocurre la bifurcación Hopf subcrítica ( $UHB_1$ ) a un valor de  $Q_1 = 14.3160 pu$ . En la Figura 4.32 se muestra el comportamiento dinámico de las variables de estado para el valor de  $Q_{ac}^* = 0.4 pu$ , donde se observa que el valor de estado estable de la magnitud de voltaje y la corriente en el eje  $d$ , es mayor respecto al análisis con un valor de  $Q_{ac}^* = 0.001 pu$ , también se observa que el voltaje en el capacitor tiende hacia su valor de referencia.

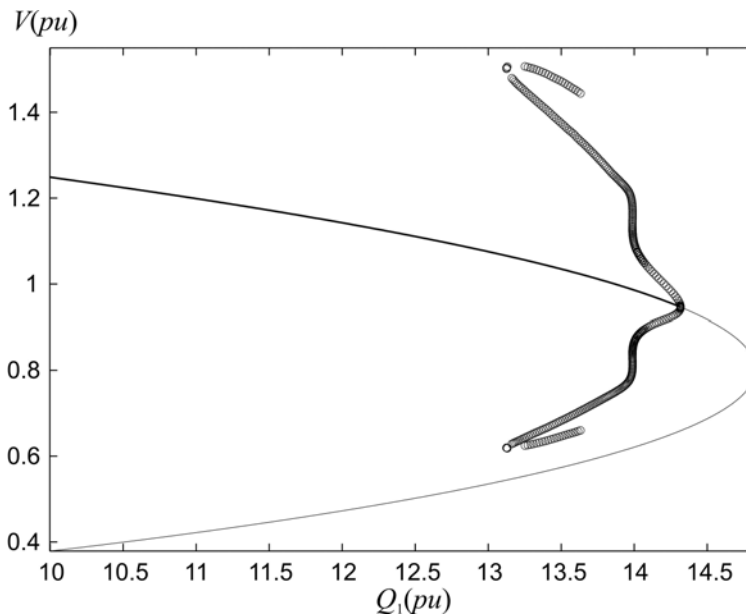


Figura 4.31 Diagrama de bifurcación para un valor de  $Q_{ac}^* = 0.4 pu$ .

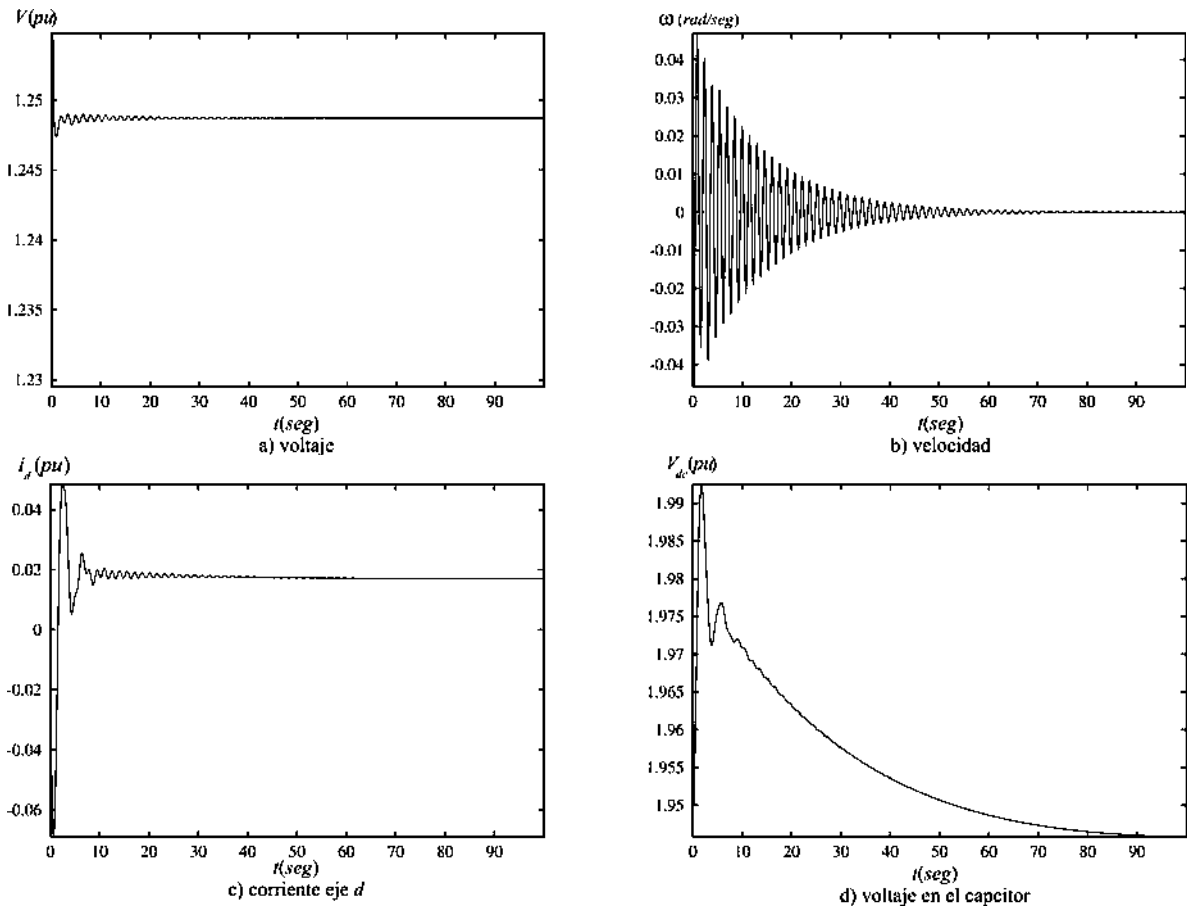


Figura 4.32 Comportamiento de las variables de estado para  $Q_{ac}^* = 0.4 pu$ .

## Capítulo 5

### Análisis de bifurcaciones multiparametricas.

#### 5.1 Introducción

Varios tipos de problemas de estabilidad en sistemas de potencia, tales como colapso de voltaje y oscilaciones de voltaje, pueden ser analizados a través de la teoría de bifurcaciones [Perleberg03]. De esta forma, el análisis de bifurcaciones ha llegado a ser una importante herramienta de análisis en estudios de estabilidad en sistemas de potencia. La mayoría de los trabajos publicados se concentran sobre estudios de bifurcaciones al variar un solo parámetro del sistema. La consideración de variar un segundo parámetro usualmente resalta nuestro conocimiento acerca de las propiedades del sistema y comportamiento dinámico. Todavía algunos fenómenos complicados pueden surgir al explorar y comprender sistemas dinámicos no lineales, si dos o más parámetros del sistema son variados simultáneamente [Moiola96]. Por ejemplo la multiplicidad del punto de bifurcación que fue detectada por variar un parámetro del sistema puede cambiar cuando otro parámetro también es variado. En este capítulo se muestran varios modelos de sistemas de potencia aplicando la teoría de bifurcaciones, para estudiar el efecto de la variación de multiparámetros del sistema sobre la estabilidad de los sistemas de potencia.

#### 5.2 Bifurcación Hopf inducida por los controladores de un CEV.

Este análisis se enfoca en el análisis de estabilidad de puntos de equilibrio asociados a un sistema eléctrico de potencia de dos nodos con un compensador estático de vars (CEV). Este análisis se enfoca solamente a la bifurcación Hopf (HB) y bifurcación Saddle-node (SNB). Se hace una comparación con los resultados obtenidos para este sistema sin estar el CEV conectado, con la finalidad de mostrar que un CEV puede inducir bifurcaciones en el sistema y conducirlo a un problema de estabilidad de voltaje.

El sistema usado es, generador a carga dinámica [Gu06] para ilustrar los siguientes problemas:

- i. Los sistemas de potencia generalmente tienen una máxima condición de carga asociado con una bifurcación Saddle-node.
- ii. El uso de los dispositivos SIFLETCA, en particular de un CEV, pueden mejorar la cargabilidad del sistema, así evitando la ocurrencia de la bifurcación Saddle-node y el colapso de voltaje.
- iii. Los parámetros del CEV deben ser propiamente ajustados para evitar la ocurrencia de la bifurcación Hopf.

### 5.2.1 Sistema eléctrico de potencia sin el CEV variando un parámetro del sistema.

La Figura 5.1 muestra el modelo del sistema de generador a carga dinámica sin el CEV, este sistema es utilizado para el análisis de inestabilidad de voltaje [Gu06].

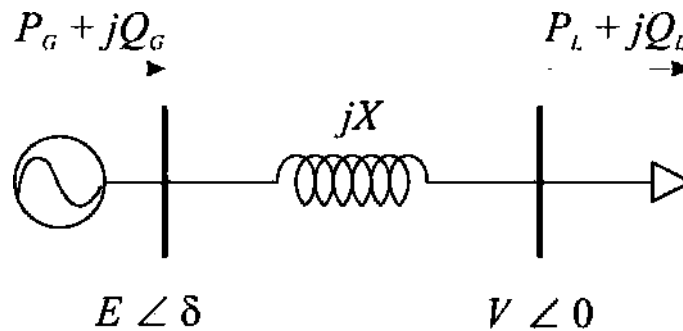


Figura 5.1 Sistema eléctrico de potencia generador a carga dinámica.

Las ecuaciones dinámicas del sistema analizado son dadas en (5.1) y las ecuaciones de potencia tanto en el bus de generación como en el bus de carga son dadas en (5.2) [Gu06].

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta} &= \omega \\
 \dot{\omega} &= \frac{1}{M} [P_m - P_G - D\omega] \\
 \dot{V} &= \frac{1}{\tau} [Q_L - Q_d]
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
P_G &= \frac{EV}{X} \text{sen}(\delta) \\
Q_L &= \frac{EV}{X} \text{cos}(\delta) - \frac{V^2}{X}
\end{aligned}
\tag{5.2}$$

Las variables contenidas en este conjunto de ecuaciones se definen de la siguiente manera:  $\delta$  es el desplazamiento angular del rotor con respecto al eje síncrono giratorio (en este caso se considera que este ángulo es igual al del voltaje en terminales de la máquina,  $\omega$  es la velocidad angular del rotor,  $M$  es la constante de inercia,  $P_m$  es la potencia mecánica de entrada al generador y  $P_G$  es la potencia eléctrica activa de salida del generador,  $D$  es el coeficiente de amortiguamiento y el producto  $D\omega$  es la potencia de amortiguamiento del generador,  $\tau$  es la constante de tiempo de la magnitud de voltaje de la carga dinámica y  $V$  es la magnitud voltaje en el bus de carga dinámica. Asimismo,  $X$  es la reactancia de la línea,  $E$  es la magnitud de voltaje del generador.

La potencia que demanda la carga es  $P_d + jQ_d$ . Por causa de simplicidad, pero sin pérdidas de generalidad la resistencia de la línea de transmisión es despreciada, es decir:  $P_m = P_d$ . Además, se asume que la carga, en condiciones de estado estable, tiene un factor de potencia constante, es decir:  $Q_d = kP_d$ , donde  $k$  es una constante. Así (5.1) puede ser simplificada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{\delta} &= \omega \\
\dot{\omega} &= \frac{1}{M} \left[ P_d - \frac{EV}{X} \text{sen}(\delta) - D\omega \right] \\
\dot{V} &= \frac{1}{\tau} \left[ -kP_d - \frac{V^2}{X} + \frac{EV}{X} \text{cos}(\delta) \right]
\end{aligned}
\tag{5.3}$$

Observe que las ecuaciones algebraicas (5.2) son eliminadas en (5.3), así llevando a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

El parámetro de bifurcación que se comenzara a variar de manera cuasiestática es la potencia reactiva  $P_d$  en el nodo de carga. Los parámetros restantes que se utilizaron en este modelo se listan en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 Parámetros utilizados en el sistema de potencia.

Parámetro de Bifurcación $P_d = 0$ hasta $1pu$					
$M = 0.1 \text{ seg}$	$D = 0.1$	$X = 0.5 pu$	$E = 1 pu$	$k = 0.5$	$\tau = 0.001 \text{ seg}$

Las condiciones iniciales de las variables de estado son:  $V = 1 pu$ ,  $\omega = 0 \text{ rad/seg}$ ,  $\delta = 0 \text{ rad}$ . Así, este punto de operación inicial, es el primer punto del diagrama de bifurcación que se muestra en la Figura 5.2. A partir de este punto, si el parámetro de bifurcación se incrementa el voltaje empieza a disminuir de forma estable, lo cual se representa por las soluciones en línea gruesa en el diagrama.

Cuando el parámetro toma el valor  $P_d = 0.618033 pu$ , las soluciones del sistema son inestables y se representan por la línea delgada en la Figura 5.2, después de este valor el sistema no tiene solución o punto de equilibrio.

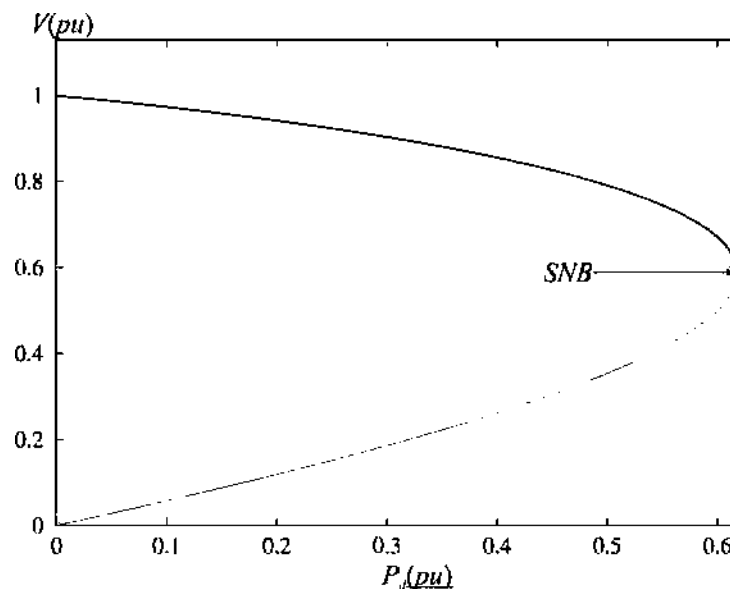


Figura 5.2 Diagrama de bifurcación del sistema eléctrico de potencia sin CEV.

En la Figura 5.3 se muestra que en el punto  $P_d = 0.616176 pu$  de la rama de soluciones inestables, el sistema sufre un colapso de voltaje inducido por la bifurcación saddle-node, como una consecuencia el ángulo del rotor presenta una trayectoria inestable después del colapso de voltaje.

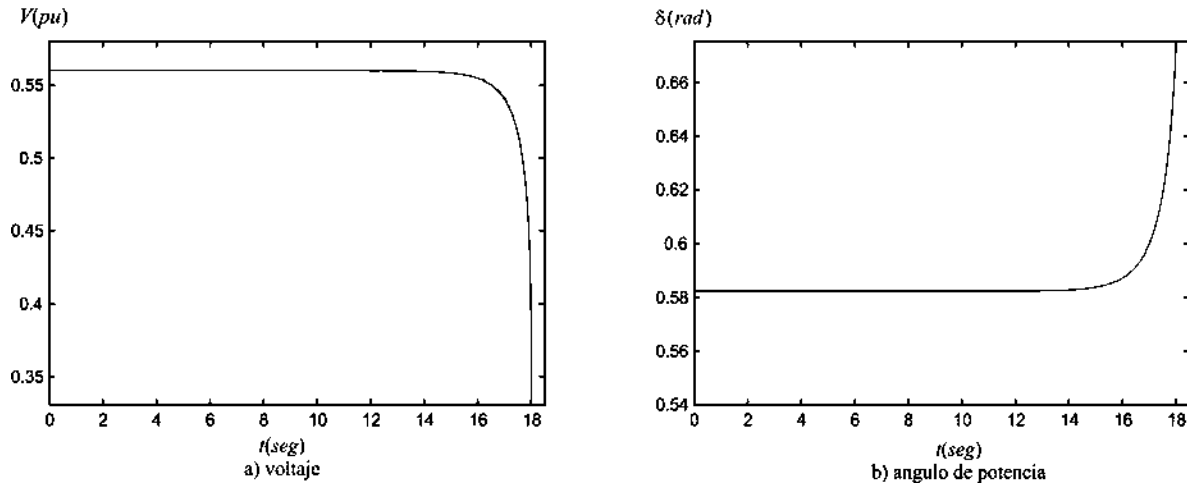


Figura 5.3 Colapso de voltaje inducido por la bifurcación SNB en el sistema sin el CEV

En la Tabla 5.2 se muestran los eigenvalores del Jacobiano del sistema y en la Figura 5.4 se muestran los cambios relevantes de los eigenvalores críticos del Jacobiano cuando se incrementa la potencia  $P_d$ . Un eigenvalor cruza el eje imaginario cuando  $P_d = 0.618033 pu$ , llevando el sistema a una bifurcación saddle-node. El punto de la bifurcación SNB es:  $(\delta_0, \omega_0, V_0, P_{d0}) = (0.5533, 0, 0.5881, 0.618033)$ . En la Figura 5.4 el numero 2 indica al eigenvalor correspondiente al de la Tabla 5.2.

Tabla 5.2 Eigenvalores del Jacobiano del sistema sin el CEV.

1	$-2002 + 0.000i$
2	$-0.5 \pm 4.4440i$

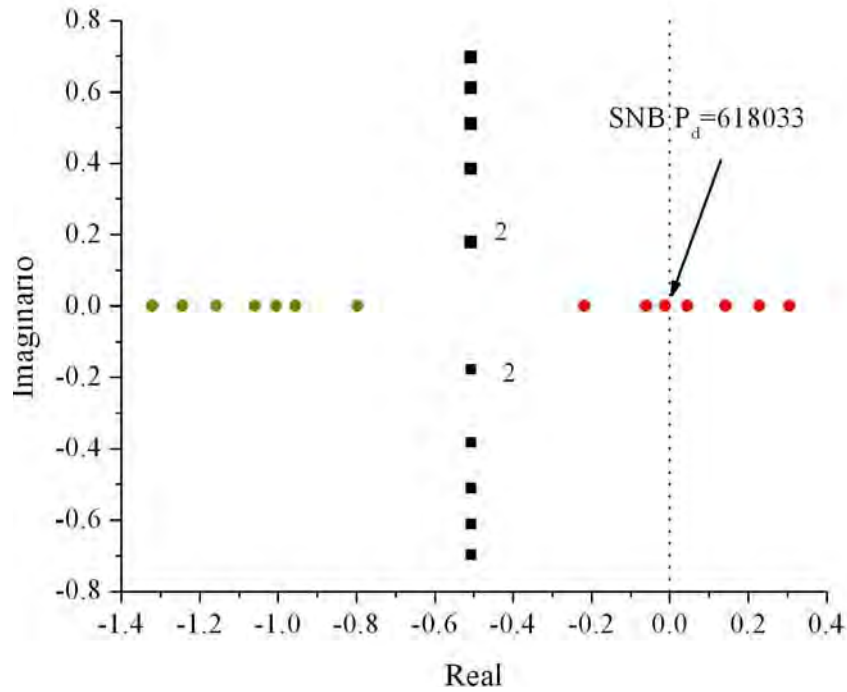


Figura 5.4 Posición de los eigenvalores del sistema eléctrico de potencia sin CEV.

### 5.2.2 Sistema eléctrico de potencia con el CEV variando un parámetro del sistema.

Los dispositivos CEV son comúnmente usados en sistemas de potencia para controlar localmente el perfil de magnitud de voltaje nodal y para mejorar la estabilidad del sistema [Gu06]. En este análisis se utiliza un CEV para controlar el voltaje en el bus de carga del sistema como se ilustra en la Figura 5.5.

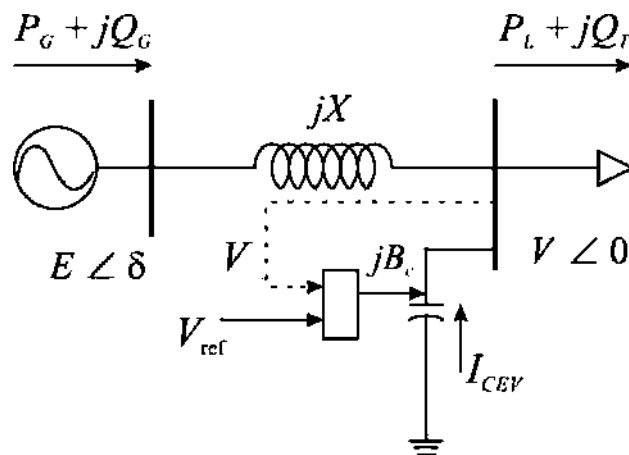


Figura 5.5 Sistema eléctrico de potencia generador a carga dinámica con CEV.

La potencia reactiva total absorbida por la carga y el CEV en el bus de carga es la siguiente:

$$Q_r = \frac{EV}{X} \cos(\delta) - \frac{V^2}{X} + V^2 B_c \quad (5.4)$$

El control del CEV es modelado como un integrador como se muestra en la Figura 5.6.

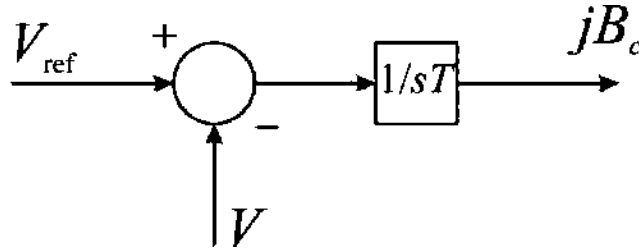


Figura 5.6 Diagrama de control del CEV.

Las ecuaciones del sistema de potencia con el CEV son dadas en (5.5) [Gu06].

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{M} \left[ P_d - \frac{EV}{X} \sin(\delta) - D\omega \right] \\ \dot{V} &= \frac{1}{\tau} \left[ -kP_d + V^2 \left( B_c - \frac{1}{X} \right) + \frac{EV}{X} \cos(\delta) \right] \\ \dot{B}_c &= \frac{1}{T} (V_{ref} - V) \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde  $B_c$  es la susceptancia equivalente del CEV,  $T$  y  $V_{ref}$  son la constante de tiempo y voltaje de referencia, respectivamente. Los valores de la constante de tiempo y el voltaje de referencia son  $T = 0.01 \text{ s}$  y  $V_{ref} = 1.0 \text{ pu}$ . También en este caso, es posible deducir el conjunto de EDO, es decir las variables algebraicas pueden ser expresadas explícitamente como una función de las variables de estado y los parámetros.

Puesto que no se consideran límites de inyección de potencia reactiva por parte del CEV; la magnitud de voltaje del bus de carga siempre es regulado a un valor  $V = V_{ref}$ ,

independientemente del valor de  $P_d$  especificado. Por lo tanto, no es relevante graficar el diagrama de bifurcación  $P_d-V$  y se a considerado como variable de estado a monitorear el ángulo  $\delta$ . La Figura 5.7 muestra el diagrama de bifurcación  $P_d-\delta$ .

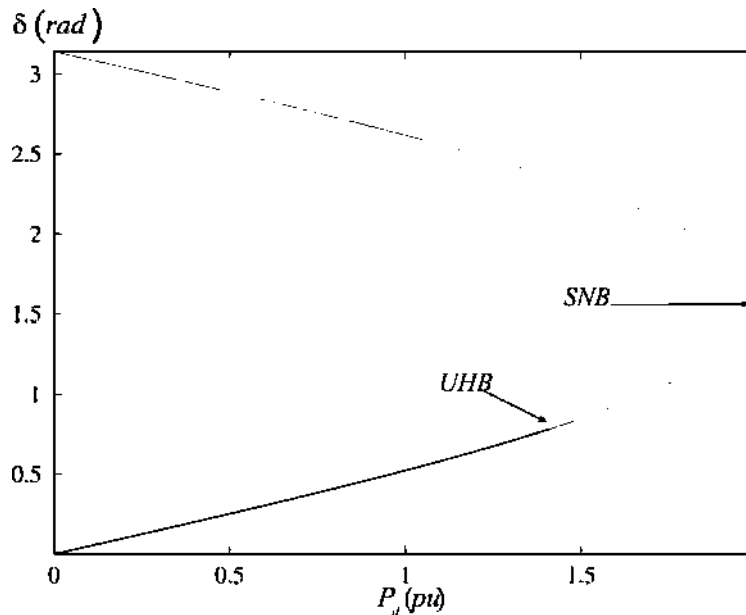


Figura 5.7 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia con CEV.

Con la finalidad de obtener el primer punto de equilibrio estable del diagrama de bifurcación se seleccionaron las siguientes condiciones iniciales para las variables de estado del sistema:  $V = 1$  pu,  $\omega = 0$  rad/seg,  $\delta = 0$  rad,  $B_c = 0$  pu. Como se observa en la Figura 5.7, a partir del primer punto de equilibrio estable; si el parámetro de bifurcación se incrementa, el ángulo de potencia empieza a aumentar de forma estable, lo cual se representa por las soluciones en línea gruesa en el diagrama. Cuando  $P_d = 1.4143$  pu ocurre una bifurcación Hopf subcrítica, convirtiéndose los puntos de equilibrio en inestables, tal como se representa por la línea delgada en la Figura 5.7. Es importante observar que el punto en donde ocurre la bifurcación Hopf no es el punto de máxima cargabilidad del sistema.

En la Figura 5.8 se muestran las simulaciones en el tiempo para el punto  $(\delta_0, \omega_0, V_0, B_{c0}, P_{d0}) = (0.9073, 0, 1, 1.5562, 1.5757)$  más allá de la bifurcación Hopf. Se

observa que el ángulo del generador muestra una trayectoria inestable solamente después de la ocurrencia del colapso de voltaje en el bus de carga.

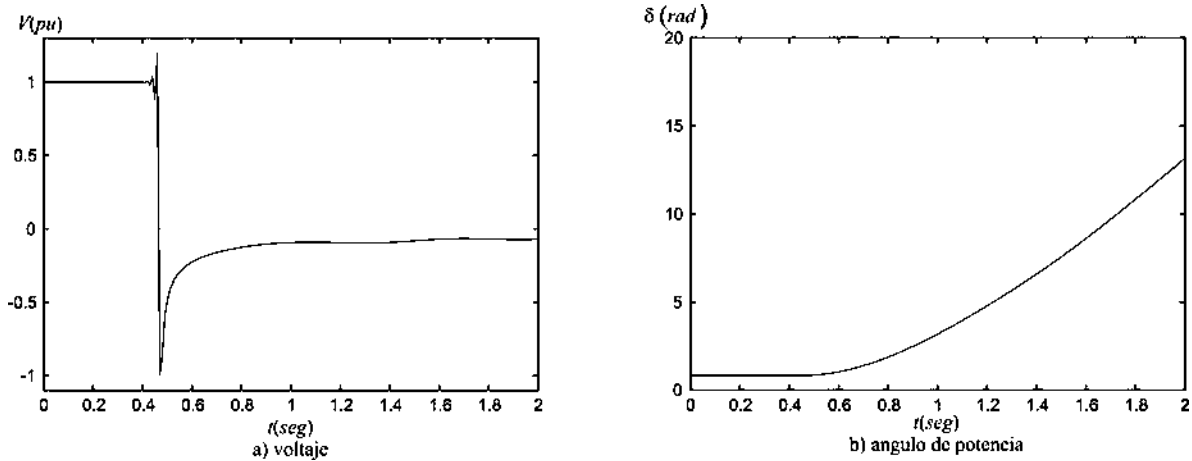


Figura 5.8 Colapso de voltaje inducido por la bifurcación Hopf.

En la Tabla 5.3 se muestran los eigenvalores del Jacobiano del sistema con el CEV y en la Figura 5.9 se muestran las posiciones de los eigenvalores del Jacobiano evaluado en cada punto de equilibrio para diferentes valores de  $P_d$ , para el sistema con el CEV, los números 1,2 y 3 indican cada eigenvalor de la Tabla 5.3.

Tabla 5.3 Eigenvalores de la matriz de estado del sistema del CEV.

1	$-0.5 \pm 4.4440i$
2	$-1950.7373 \pm 0.000i$
3	$-51.2626 + 0.000i$

Incrementando el valor de  $P_d$  los eigenvalores 2 y 3 cambian a un par de eigenvalores complejos conjugados que cruzan el eje imaginario para  $P_d=1.4143$ , llevando a una bifurcación Hopf. El punto de la bifurcación UHB es:

$$(\delta_0, \omega_0, V_0, B_{c0}, P_{d0}) = (0.7855, 0, 1, 1.2930, 1.4143)$$

En  $P_d=2.0001$  un par de eigenvalores complejos conjugados indicados con el número 1 en la Tabla 5.3, cambian a parte real positiva y negativa, esto se puede observar en el recuadro de la Figura 5.9 donde el par de eigenvalores es señalado con el número 1 que corresponde

al de la Tabla 5.3. Esta es la máxima condición de carga correspondiente a:  $(\delta_0, \omega_0, V_0, B_{c0}, P_{d0}) = (1.5708, 0, 1, 3, 2.0001)$ .

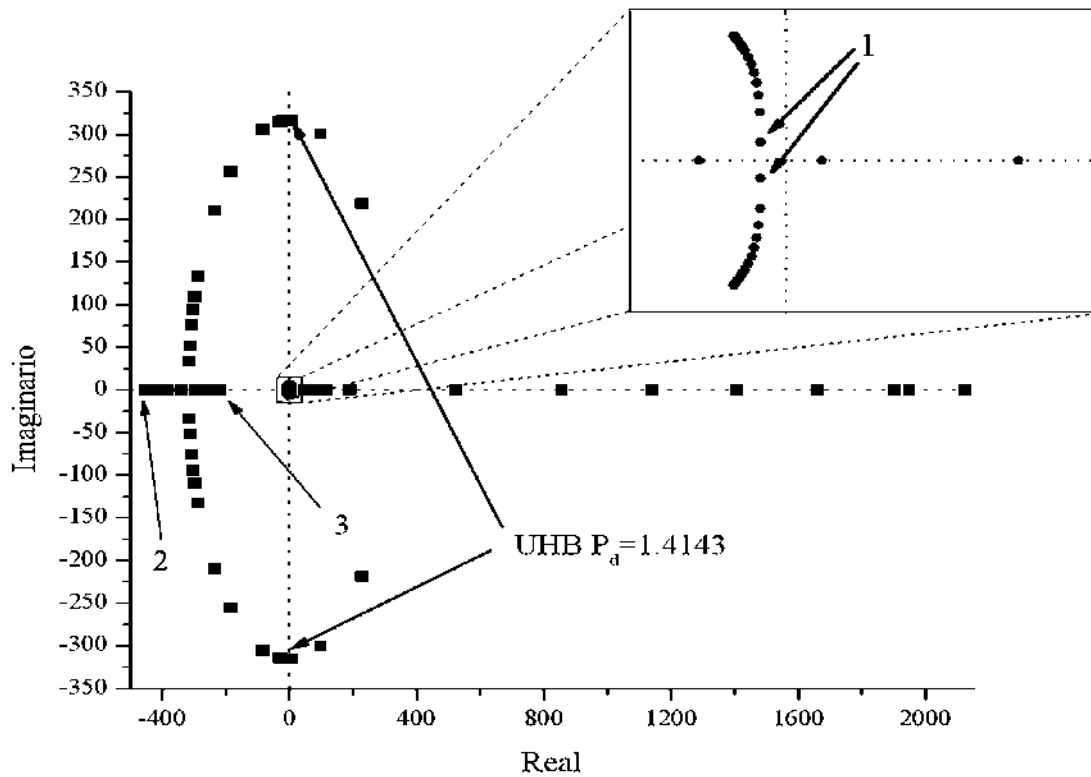


Figura 5.9 Posición de los eigenvalores del sistema de potencia con el CEV.

### 5.2.3 Sistema eléctrico de potencia con el CEV variando más de dos parámetros.

En el análisis anterior se consideró a la potencia activa demandada  $P_d$  como el parámetro de bifurcación. En esta sección se presenta un análisis de bifurcaciones multiparametrico de la siguiente manera: se varia de manera cuasi-estática el valor de la potencia activa demandada  $P_d$ ; y para cada valor de esta variable, se varían dos parámetros del sistema hasta obtener el primer punto de inestabilidad dado por la UHB. Este análisis permite cuantificar el efecto de los parámetros del sistema sobre el valor de potencia activa demandada que origina el cambio de estabilidad del sistema eléctrico. Para tal efecto, los siguientes dos escenarios son discutidos:

- (i) Los efectos de la inercia del rotor  $M$  y la constante de tiempo de carga  $\tau$  sobre la UHB del sistema de potencia.

- (ii) Los efectos de la constante de tiempo  $T$  del regulador del CEV y la constante de tiempo de carga  $\tau$  sobre la UHB del sistema.

*Efectos de  $M$  y  $\tau$  sobre la bifurcación UHB del sistema.*

La Figura 5.10 muestra la posición de los puntos de equilibrio donde ocurren las bifurcaciones UHB en función de los parámetros de bifurcación  $P_d$ ,  $M$  y  $\tau$ . Estos dos últimos parámetros se varían en el rango  $[0.1-1.9]$ . La superficie mostrada en la figura corresponde a la frontera de estabilidad del sistema, tal que la parte inferior esta superficie corresponde a la operación estable del sistema.

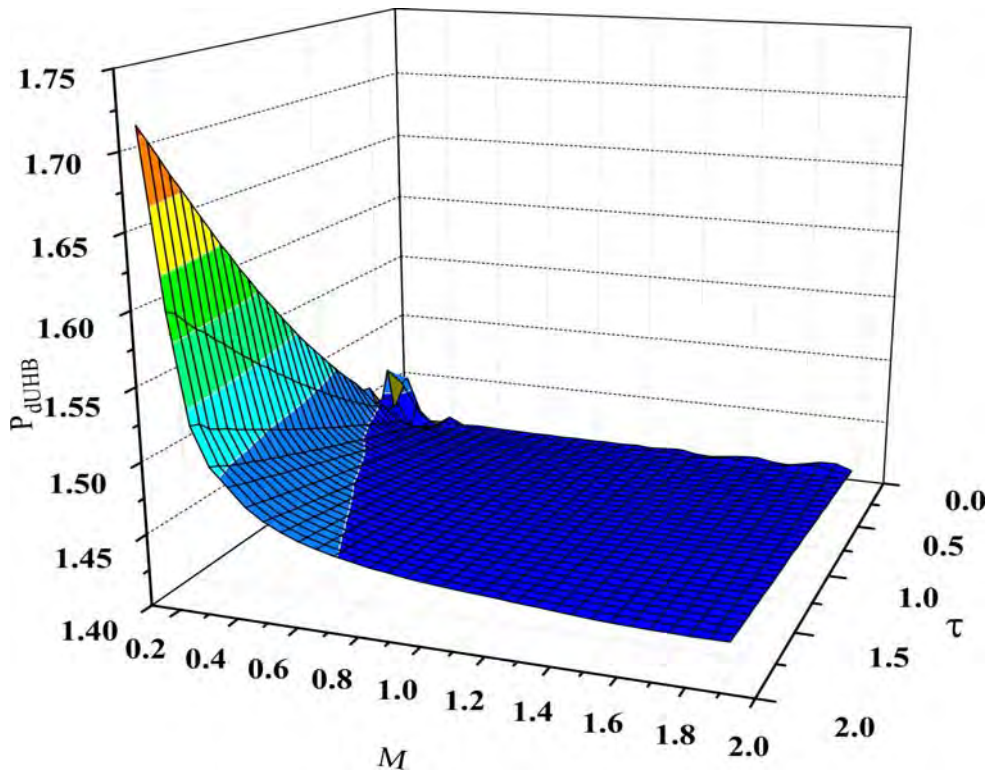


Figura 5.10 Máximo valor de carga  $P_{dUHB}^{\max}$  parametrizado con respecto a  $M$  y  $\tau$ .

De la Figura 5.10 es posible deducir el efecto de los diferentes valores de  $M$  y  $\tau$  sobre el valor de potencia activa en la carga,  $P_{dUHB}$ , que ocasiona la aparición de la bifurcación UHB. La aparición de la bifurcación UHB ocurre a un valor mayor de potencia activa demandada conforme se incrementa el valor de la constante de tiempo de la carga  $\tau$ ; es decir, a mayor valor de esta constante mayor nivel de cargabilidad estable del sistema. Lo contrario ocurre conforme se incrementa el valor de inercia del rotor  $M$ . La máxima

demanda de potencia para la cual ocurre la bifurcación UHB es  $P_{dUHB}^{\max} = 1.7129 pu$ , que corresponde a valores  $M = 0.1 s$  y  $\tau = 1.9 s$ .

*Efectos de  $T$  y  $\tau$  sobre la bifurcación UHB del sistema.*

La Figura 5.11 muestra los valores críticos de  $P_{dUHB}$ ,  $T$  y  $\tau$  que producen la aparición de los puntos de equilibrio no hiperbólicos asociados a la bifurcación UHB. Estos puntos conforman la superficie o frontera de estabilidad mostrada en la figura. Los resultados muestran que la cargabilidad del sistema  $P_{dUHB}$  se incrementa conforme el parámetro  $T$  decrece y el parámetro  $\tau$  se incrementa. Para propósitos de la simulación mostrada, los parámetros  $T$  y  $\tau$  se variaron en el rango de  $[0.01-0.1]$  y  $[0.1-1.9]$ , respectivamente. La máxima demanda de potencia para la cual ocurre la bifurcación UHB es  $P_{dUHB}^{\max} = 1.9763 pu$ , correspondiente a valores parametricos de  $T = 0.02 s$  y  $\tau = 1.9 s$ .

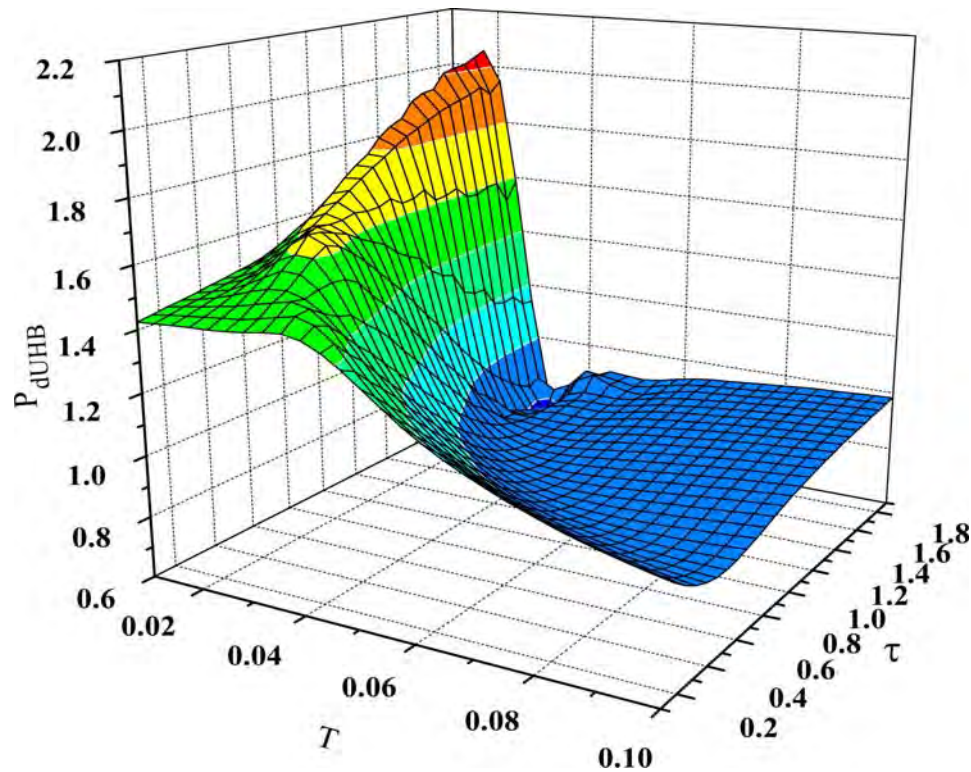


Figura 5.11 Máximo valor de carga  $P_{dUHB}^{\max}$  parametrizado con respecto a  $T$  y  $\tau$ .

### 5.3 Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica tipo II y sistema de excitación rápido en el generador sin limitador de voltaje de campo.

En esta sección se analiza el sistema de tres nodos mostrado en la Figura 5.12 con la finalidad de estudiar las características topológicas de su región de estabilidad y la existencia de hoyos inestables dentro de esta región.

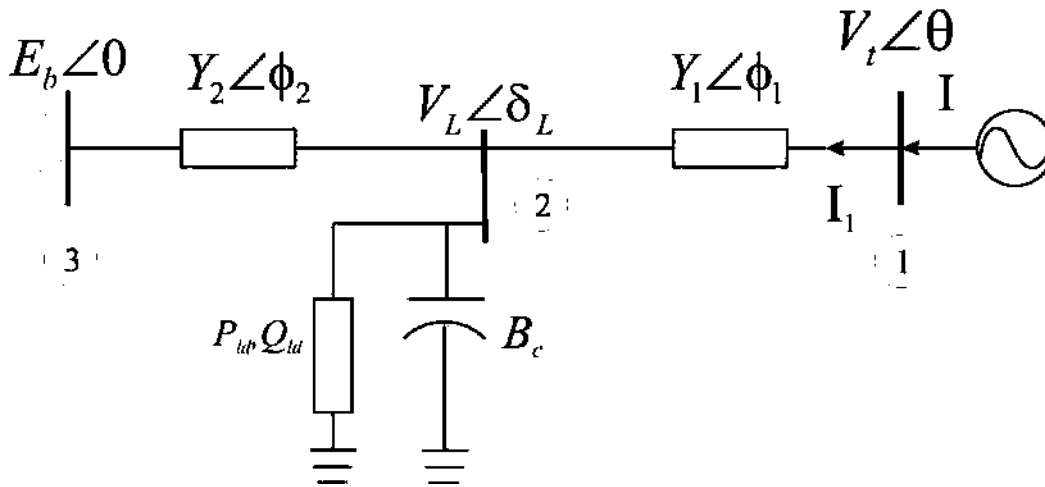


Figura 5.12 Sistema de potencia de tres nodos.

Las variables indicadas en la figura son las siguientes:  $E_b$  es la magnitud de voltaje en el bus infinito,  $Y_2$  es la admitancia de la línea que conecta al bus infinito con el nodo de carga,  $V_L$  es la magnitud de voltaje en el nodo de carga,  $\delta_L$  es el ángulo de voltaje en el nodo de carga en radianes,  $Y_1$  es la admitancia de la línea que conecta al generador con el nodo de carga,  $V_t$  es el voltaje en terminales del generador y  $\theta$  es el ángulo de voltaje en terminales del generador en radianes.

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del generador se obtienen en base a las ecuaciones del rotor y estator. Las ecuaciones mecánicas del rotor para el generador son dadas por la ecuación de oscilación:

$$\dot{\delta}_m = \omega_B s_m \quad (5.6)$$

$$\dot{s}_m = \frac{-Ds_m + P_m - P_{ge}}{2H} \quad (5.7)$$

donde  $\delta_m$  es el ángulo de voltaje en el nodo interno del generador en radianes,  $D$  es el factor de amortiguamiento en por unidad,  $\omega$  es la frecuencia angular en rad/seg.,  $\omega_B$  es la frecuencia base del sistema en rad/seg.,  $H$  es la constante de inercia en seg,  $P_m$  es la potencia mecánica de entrada al generador y  $P_{ge}$  es la potencia eléctrica activa de salida del generador y  $s_m$  es el deslizamiento del generador definido por la ecuación (5.8).

$$s_m = \frac{\omega - \omega_B}{\omega_B} \quad (5.8)$$

Considerando dos circuitos eléctricos sobre el rotor, el devanado de campo sobre el eje  $d$  y un devanado de amortiguamiento sobre el eje  $q$ , se tienen las siguientes ecuaciones [Rajesh99]:

$$\dot{E}'_q = \frac{-E'_q + (x_d - x'_d)I_d + E_{fd}}{T'_{d0}} \quad (5.9)$$

$$\dot{E}'_d = \frac{-E'_d - (x_q - x'_q)I_q}{T'_{q0}} \quad (5.10)$$

donde  $E'_d$  y  $E'_q$  son las magnitudes de los voltajes internos transitorios del eje  $d$  y el eje  $q$  respectivamente,  $x_d$  y  $x'_d$  son las reactancias de estado estable y estado transitorio del eje  $d$  respectivamente,  $x_q$  y  $x'_q$  son las reactancias de estado estable y estado transitorio del eje  $q$  respectivamente,  $T'_{d0}$  y  $T'_{q0}$  son las constantes de tiempo del eje  $d$  y el eje  $q$  respectivamente y  $E_{fd}$  es la magnitud del voltaje de campo.

La potencia activa  $P_{ge}$  en terminales del generador puede ser expresada como [Rajesh99]:

$$P_{ge} = E'_q i_q + E'_d i_d + (x'_d - x'_q) i_d i_q \quad (5.11)$$

Las ecuaciones del estator se obtienen despreciando los efectos transitorios y la resistencia del devanado, por lo cual solo se tienen las siguientes ecuaciones algebraicas [Rajesh99]:

$$E'_q + x'_d i_d = v_q \quad (5.12)$$

$$E'_d - x'_q i_q = v_d \quad (5.13)$$

Las ecuaciones anteriores relacionan los voltajes internos de la maquina con sus voltajes en terminales tanto en eje  $d$  como en el eje  $q$ .

El sistema de excitación rápido es similar al utilizado en el capítulo 4, solo que en este caso se omite el voltaje de campo de condición inicial  $E_{fd0}$  y los limitadores, tal como se muestra en la Figura 5.13.

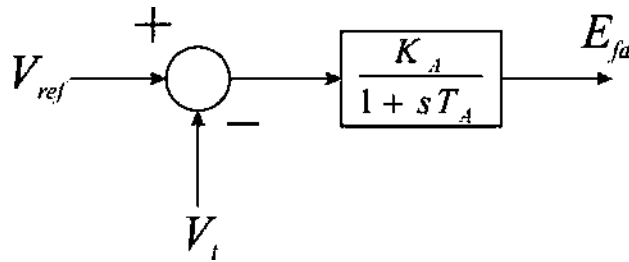


Figura 5.13 Sistema de excitación sin limitador de voltaje de campo.

La ecuación para el sistema de excitación es dada por:

$$\dot{E}_{fd} = \frac{-E_{fd} + K_A (V_{ref} - V_t)}{T_A} \quad (5.14)$$

El modelo de la carga dinámica utilizado para este análisis, es el mismo utilizado en el capítulo 4, solo que en este caso se cambiaron algunos nombres de las constantes y se introduce una susceptancia  $B_c$  con un valor constante para compensar la carga en el nodo, con una carga de potencia constante  $(P_{ld}, Q_{ld})$  en paralelo con esta. Así, las potencias de carga activa y reactiva son especificadas por las siguientes ecuaciones [Jia06]:

$$\dot{\delta}_L = (Q - Q_{1d} - Q_0 - q_2 V_L - (q_3 - B_c) V_L^2) / q_1 \quad (5.15)$$

$$\dot{V}_L = [P - P_{1d} - P_0 - p_1(Q - Q_{1d} - Q_0 - q_2 V_L - (q_3 - B_c) V_L^2) / q_1 - p_3 V_L] / p_2 \quad (5.16)$$

Con la notación definida en la Figura 5.12, es posible escribir la ecuación de la red en el marco de referencia  $d$ - $q$  como:

$$I_q = \frac{\cos \phi \cdot (Y \cdot E'_q - a) + (Y \cdot E'_d - b) \cdot (Y \cdot x'_d - \sin \phi)}{-\cos^2 \phi + (\sin \phi - Y \cdot x'_d) \cdot (-\sin \phi + Y \cdot x'_q)} \quad (5.17)$$

$$I_d = \frac{\cos \phi \cdot (Y \cdot E'_d - b) + (Y \cdot E'_q - a) \cdot (\sin \phi - Y \cdot x'_q)}{-\cos^2 \phi + (\sin \phi - Y \cdot x'_d) \cdot (-\sin \phi + Y \cdot x'_q)} \quad (5.18)$$

La derivación de las ecuaciones (5.17) y (5.18), y la definición de cada variable contenidas en estas ecuaciones, se describe en el apéndice C.

Cuando los devanados de amortiguamiento del eje  $q$  son despreciados la ecuación (5.10) deberá cambiar a una ecuación algebraica como se muestra a continuación:

$$0 = \frac{-E'_d - (x_q - x'_q) I_q}{T'_{q0}} \Leftrightarrow E'_d = (x'_q - x_q) I_q \quad (5.19)$$

Sustituyendo (5.17) en (5.19) se tiene:

$$E'_d = (x'_q - x_q) \frac{-\cos \phi \cdot (Y \cdot E'_q - a) + (Y \cdot E'_d - b) \cdot (\sin \phi - Y \cdot x'_d)_d}{-\cos^2 \phi + (\sin \phi - Y \cdot x'_d) \cdot (-\sin \phi + Y \cdot x'_q)} \quad (5.20)$$

Definiendo  $W_p$ ,  $A_p$  y  $B_p$  como se indica a continuación,

$$W_p = \frac{x'_q - x_q}{\cos^2 \phi - B_p \cdot A_p} \quad (5.21)$$

$$A_p = Y \cdot x'_q - \sin \phi \quad (5.22)$$

$$B_p = \sin \phi - Y \cdot x'_d \quad (5.23)$$

y sustituyendo (5.20), (5.21) y (5.22) en (5.19), se tiene:

$$E'_d = \frac{W_p \cdot [Y \cdot \cos \phi \cdot E'_q + (b \cdot B_p - a \cdot \cos \phi)]}{1 + W_p \cdot Y \cdot B_p} \quad (5.24)$$

La magnitud y ángulo de voltaje en terminales del generador quedan relacionados con los voltajes en terminales del generador expresados en su eje directo y cuadratura por las ecuaciones (5.25) y (5.26).

$$|\hat{V}_t| = \sqrt{(v_q^2 + v_d^2)} \quad (5.25)$$

$$\theta = \delta_m + \tan^{-1} \left( \frac{v_d}{v_q} \right) \quad (5.26)$$

Las potencias  $P$  y  $Q$  que la carga dinámica demanda al sistema, están descritas por las ecuaciones de flujos de potencia dadas en (5.27) y (5.28) en forma polar.

$$P = V_t V_L Y_1 \cos(r_1) - V_L^2 Y_1 \cos(\phi_1) + E_b V_L Y_2 \cos(r_2) - V_L^2 Y_2 \cos(\phi_2) \quad (5.27)$$

$$Q = V_t V_L Y_1 \text{sen}(r_1) + V_L^2 Y_1 \text{sen}(\phi_1) + E_b V_L Y_2 \text{sen}(r_2) + V_L^2 Y_2 \text{sen}(\phi_2) \quad (5.28)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas en forma general como en (2.42) y (2.43). donde,  $x = [\delta, s_m, E'_q, E'_{fd}, \delta_L, V_L]^T \in R^6$  es el vector de variables de estado,  $y = [P_g, I_d, I_q, E'_d, V_t, V_d, V_q, P, Q]^T \in R^9$  es el vector de variables algebraicas,  $p = [T_A, P_m, K_A]^T \in R^3$  es vector de los parámetros de bifurcación. La Tabla 5.4 contiene los valores de los parámetros usados en este análisis.

Tabla 5.4 Valores de parámetros para el sistema eléctrico.

$P_m = [0.4 - 3] pu$		$T_A = [0.02 - 0.25] seg$		$K_A = [100 - 210]$	
$Y_1 = 4.9752 pu$	$Y_2 = 1.6584 pu$	$\phi_1 = -1.4711 rad$	$\phi_2 = -1.4711 rad$	$E_b = 1 pu$	
$E_m = 1 pu$	$x_d = 1.79 pu$	$x_q = 1.71 pu$	$x'_d = 0.169 pu$	$x'_q = 0.23 pu$	
$T'_{d0} = 4.3 seg$	$H = 2.894 seg$	$\omega_B = 377 rad / seg$	$D = 0.05 pu$	$P_0 = 0.4 pu$	
$Q_0 = 0.8 pu$	$P_1 = 0.24 pu$	$q_1 = -0.02 pu$	$p_2 = 1.7 pu$	$q_2 = -1.866 pu$	
$p_3 = 0.2 pu$	$q_3 = 1.6 pu$	$Q_{ld} = 0 pu$	$P_{ld} = 0 pu$	$B_c = 0.2 pu$	

La obtención del diagrama de bifurcación comienza por el cálculo del punto de equilibrio estable del sistema para el valor del parámetro de bifurcación  $P_m=0.4 pu$ . Este punto se obtiene con las condiciones iniciales de las variables de estado  $V_L=1.012 pu$ ,  $\delta_L=0.1312 rad$ ,  $\delta_m=0.8684 rad$ ,  $\omega=0 rad/seg$ ,  $E_q=1.0556 pu$ ,  $E_{fd}=2.3684 pu$ . A partir de este punto, se obtiene el diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 5.14 correspondiente a la variación de la magnitud del voltaje en el nodo de carga con respecto a la variación de la potencia mecánica suministrada al generador.

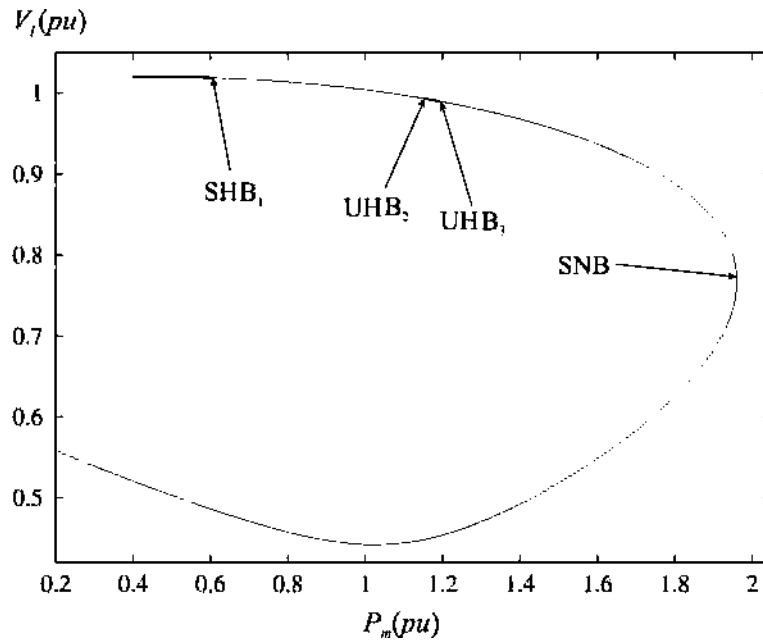


Figura 5.14 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia de tres nodos. A partir de  $P_m = 0.4$  pu, conforme el parámetro de bifurcación se incrementa, la magnitud de voltaje disminuye de forma estable, lo cual se representa por las soluciones en línea gruesa en el diagrama. Cuando el parámetro toma el valor  $P_m = 0.6086$  pu aparece una bifurcación Hopf  $UHB_1$ , después de este punto las soluciones del sistema son inestables y se representan por la línea delgada en la Figura 5.14. En el valor de  $P_m = 1.1558$  pu aparece otra bifurcación Hopf  $SHB_2$  y el sistema se vuelve estable hasta el valor de  $P_m = 1.1912$  pu donde aparece otra bifurcación Hopf  $SHB_2$ , y el sistema se vuelve inestable. En  $P_m = 1.9607$  pu aparece una bifurcación SNB, tal que para valores de  $P_m$  mayores a 1.9607 pu, el sistema no tiene solución o punto de equilibrio.

En la Tabla 5.5 se muestran todos los eigenvalores del Jacobiano del sistema y en la Figura 5.15 se muestran las posiciones de los eigenvalores del Jacobiano evaluado en cada punto de equilibrio para diferentes valores de  $P_m$  con  $T_A=0.05$ . En la Figura 5.15 las flechas indican la dirección del eigenvalor conforme se incrementa  $P_m$  y los números indican al eigenvalor correspondiente de la Tabla 5.5.

En la Figura 5.16 se muestran solamente a los eigenvalores críticos del Jacobiano que corresponden a las bifurcaciones  $UHB_1$ ,  $SHB_2$  y  $SHB_2$  que aparecen en la Figura 5.15 y

también se señalan las posiciones de los eigenvalores donde ocurren las bifurcaciones  $UHB_1$ ,  $SHB_2$  y  $SHB_1$ . Debido a que el valor de  $P_m$  en la bifurcación saddle-node es siempre mayor que el valor de las bifurcaciones Hopf, la bifurcación saddle-node será omitida en los siguientes estudios. En las Figuras 5.15 y 5.16 los círculos y cuadros negros representan a los eigenvalores con parte real negativa y los círculos y cuadros blancos representan a los eigenvalores con parte real positiva.

Tabla 5.5 Eigenvalores del Jacobiano del sistema.

1	$-40.1338 \pm 0.000i$
2	$-3.808454 \pm -31.612472i$
3	$-6.472013 \pm 0.000i$
4	$-1.070386 \pm -6.838766i$

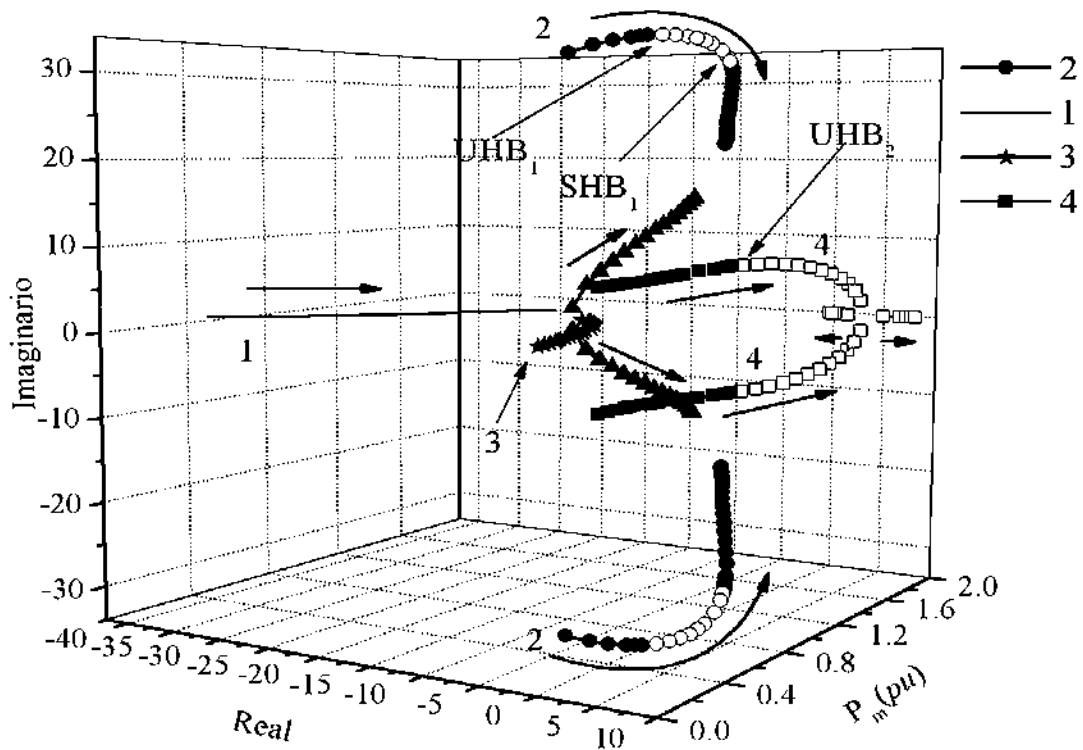


Figura 5.15 Movimiento de los eigenvalores cuando  $P_m$  se incrementa con  $T_A=0.05$

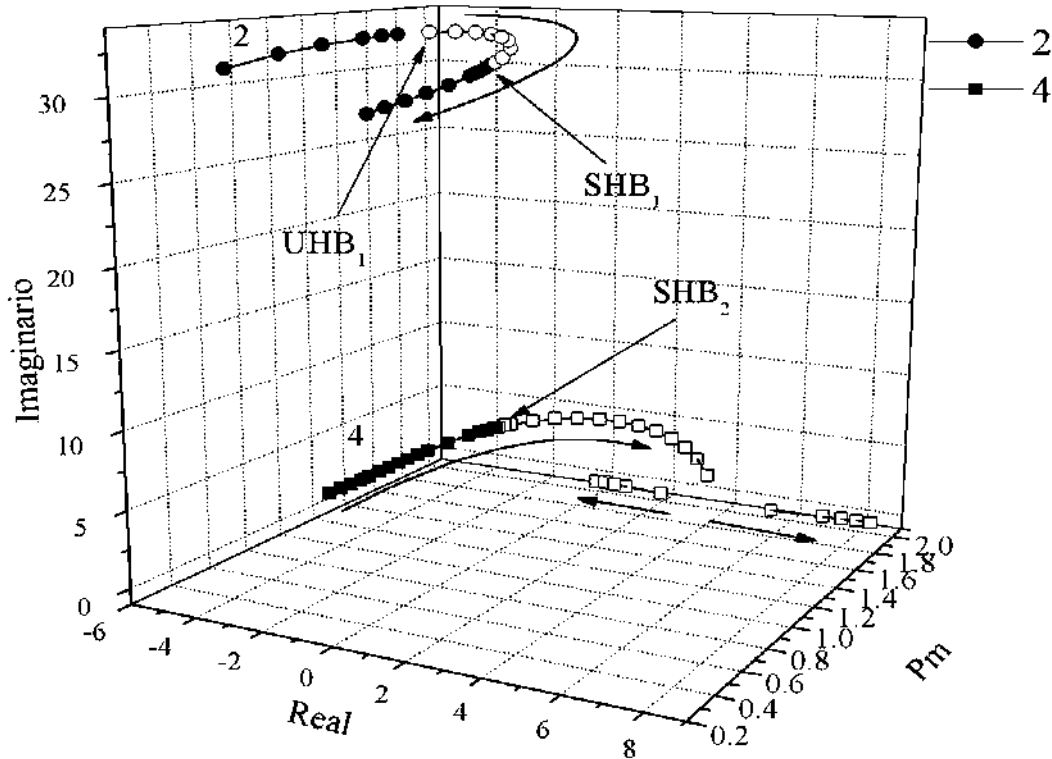


Figura 5.16 Posición de los eigenvalores críticos donde ocurren las bifurcaciones.

### 5.3.1 Región de estabilidad a pequeña perturbación

Los resultados mostrados en la Figura 5.14 corresponden a una curva considerando un solo parámetro de bifurcación. Con la finalidad de obtener una región de estabilidad dada por una superficie, es necesario variar dos parámetros de bifurcación. Para lo anterior, se consideran diferentes valores del parámetro  $T_A$  y para cada uno de estos valores se obtiene un diagrama de bifurcación considerando la variación de  $P_m$ . El resultado de estas simulaciones se muestra esquemáticamente en la Figura 5.17, donde se indican los puntos donde acontecen las bifurcaciones Hopf  $UHB_1$ ,  $SHB_1$  y  $SHB_2$  que corresponden a las curvas denotadas como  $HB_1$ ,  $HB_2$  y  $HB_3$  respectivamente. En estas simulaciones se varió  $T_A$  en el rango de  $[0.01-0.25]$  y  $P_m$  en el rango de  $[0.4-2]$ , y el valor de la ganancia del controlador  $K_A$  se mantuvo constante al valor de 200.

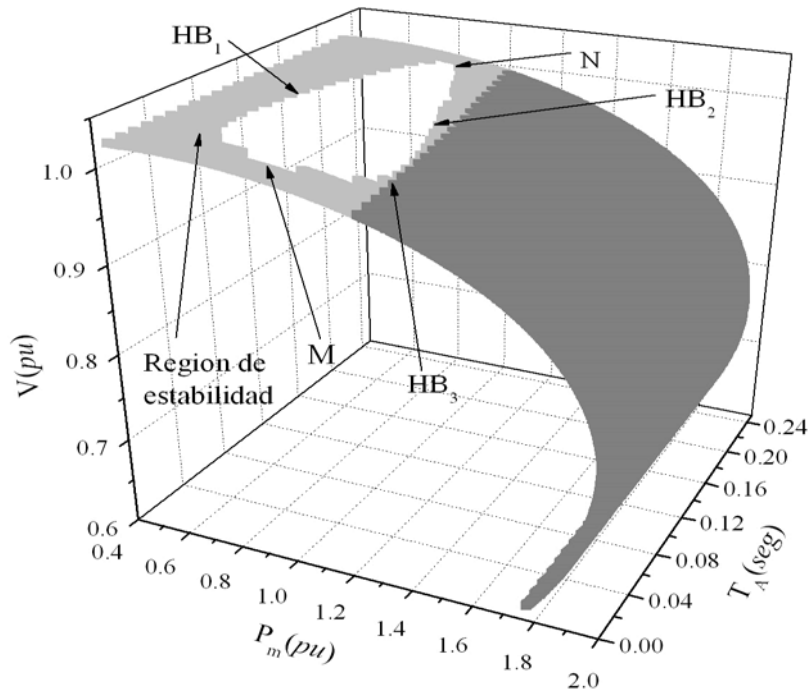


Figura 5.17 Superficie del diagrama de bifurcación variando  $P_m$  y  $T_A$ .

La región de estabilidad queda definida por la curva que une a los puntos de equilibrio asociados a una misma bifurcación. En este caso se tendrán tres curvas asociadas a UHB<sub>1</sub>, SHB<sub>1</sub> y SHB<sub>2</sub>, respectivamente que corresponden a las curvas denotadas como HB<sub>1</sub>, HB<sub>2</sub> y HB<sub>3</sub> respectivamente de la Figura 5.17. Estas curvas son llamadas fronteras de estabilidad. En la Figura 5.17 el agujero dentro de la región de estabilidad (gris claro) es un agujero inestable.

En el caso bidimensional que considera solo los parámetros de bifurcación  $T_A$  y  $P_m$ , la región de estabilidad tiene la topología mostrada en la Figura 5.18. En esta figura, las fronteras de estabilidad dadas por el conjunto de puntos de equilibrio asociados a las bifurcaciones UHB<sub>1</sub>, SHB<sub>2</sub> y SHB<sub>3</sub> son denotadas como HB<sub>1</sub>, HB<sub>2</sub> y HB<sub>3</sub>; respectivamente. En la Figura 5.18 el área en blanco es la región de estabilidad, que es limitada por las fronteras de estabilidad HB<sub>1</sub>, HB<sub>2</sub> y HB<sub>3</sub>. Es importante observar que las fronteras HB<sub>1</sub> y HB<sub>2</sub> se unen en el punto M y N formando un agujero (área gris) en la región de estabilidad. Los puntos contenidos dentro de esta área son inestables ante pequeñas perturbaciones [Jia06].

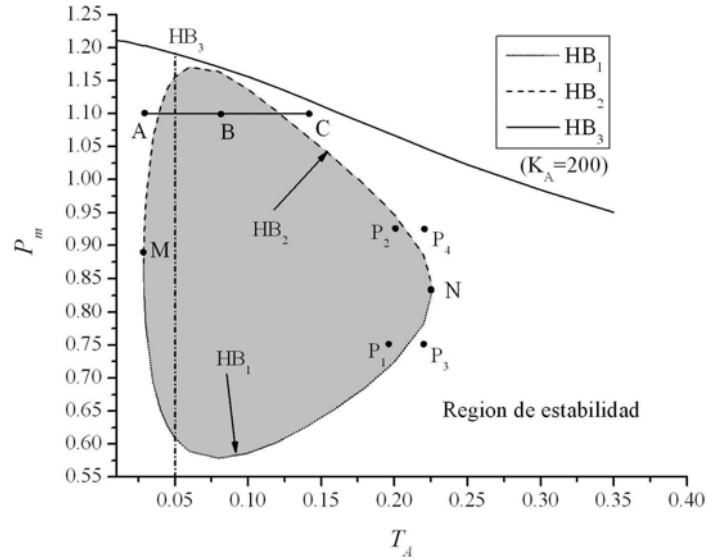


Figura 5.18 Región de estabilidad con  $K_A=200$ .

Con la finalidad de demostrar lo anterior, se seleccionan los puntos  $P_1$  y  $P_2$  arbitrariamente dentro del agujero de la Figura 5.18. Por ejemplo se hace la simulación en el tiempo para un valor de  $T_A$  dentro del agujero inestable y en el diagrama de bifurcación se selecciona un valor de  $P_m$  que se encuentre dentro del agujero inestable, con este valor de  $P_m$  se realiza la simulación en el tiempo, para el caso de  $P_1$  se selecciono  $T_A=0.185$  y  $P_m=0.75$ . Los resultados de las simulaciones son mostrados en la Figura 5.19. Se puede observar que el comportamiento dinámico del sistema es inestable para los valores correspondientes a  $P_1$  y  $P_2$ .

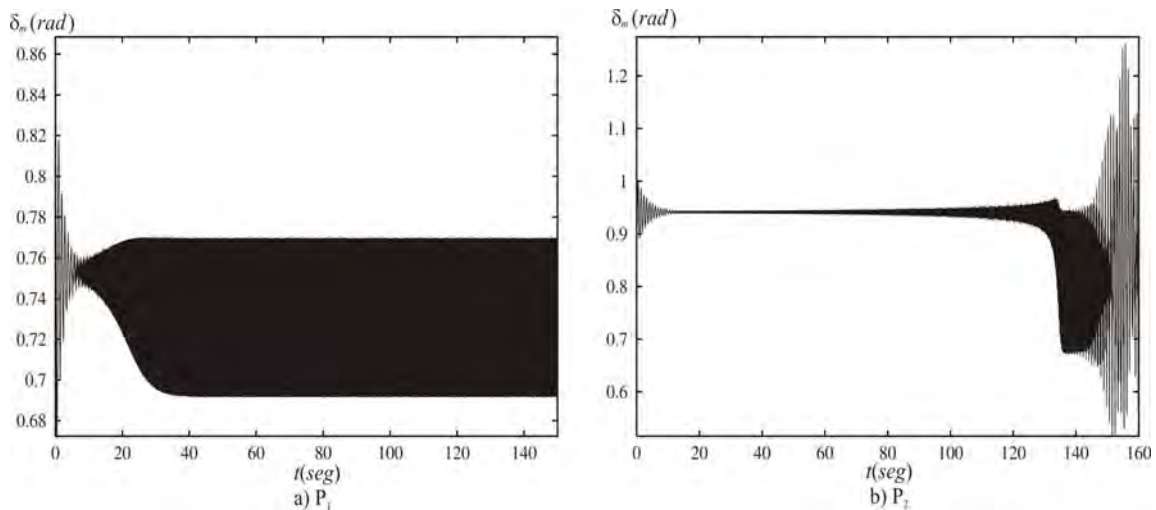


Figura 5.19 Resultados de la simulación de  $P_1$  (a) y  $P_2$  (b).

Contrario a lo mostrado en la Figura 5.19, el comportamiento dinámico del sistema para valores de parámetros dentro de la región de estabilidad tenderá a un punto de equilibrio estable. Lo anterior queda de manifiesto en la Figura 5.20, la cual muestra el comportamiento dinámico del sistema para valores de parámetros dados por los puntos  $P_3$  y  $P_4$  mostrado en la Figura 5.18.

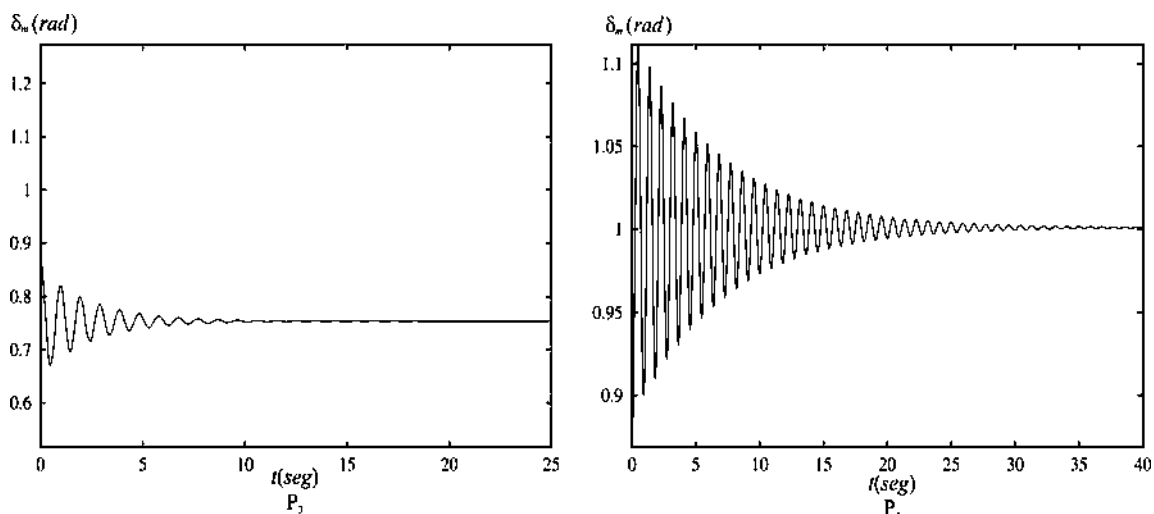


Figura 5.20 Resultados de la simulación de  $P_3$  (a) y  $P_4$  (b).

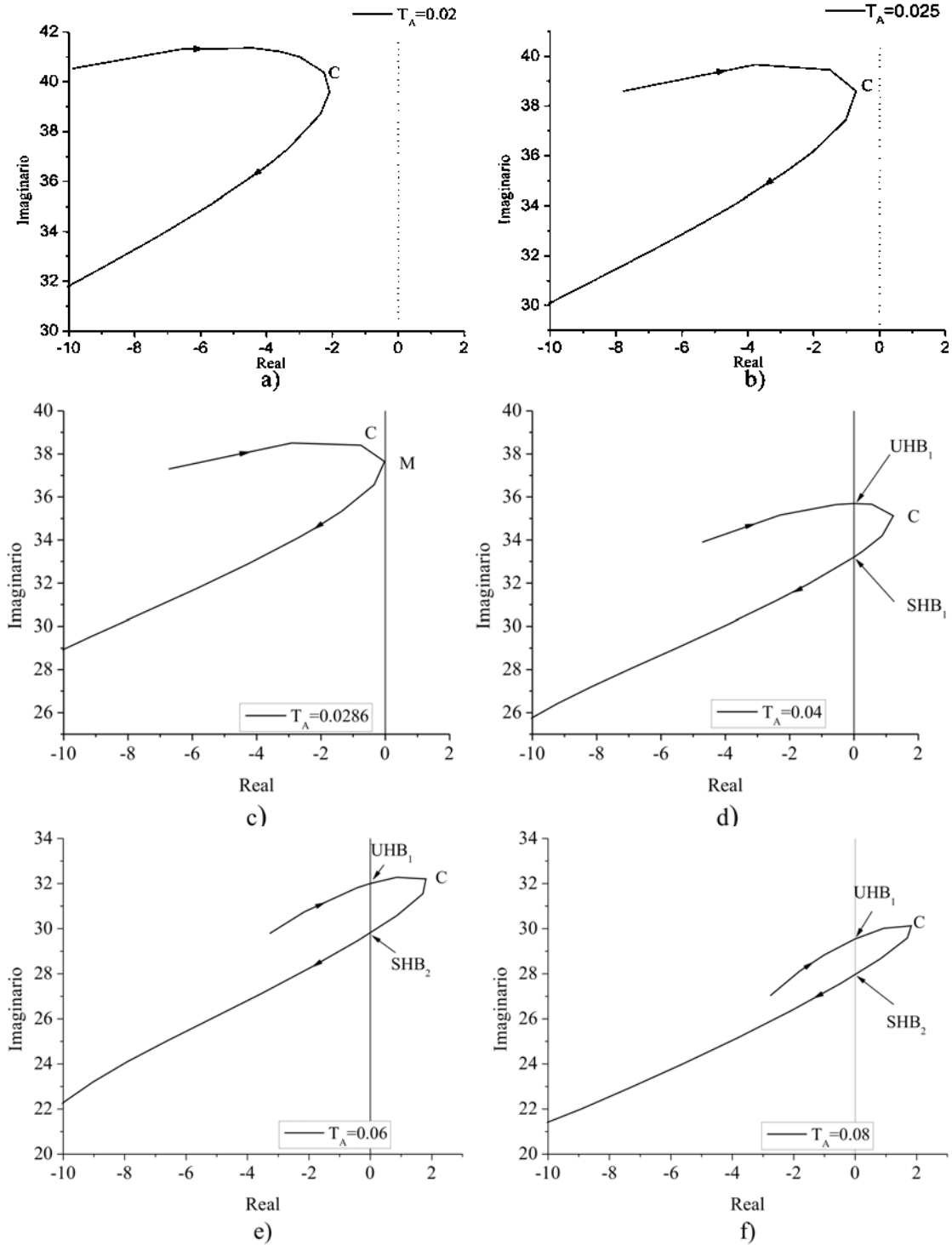
La existencia de este agujero inestable dentro de la región de estabilidad indica que esta región no es convexa [Jia06]. Esto se demuestra al seleccionar los puntos A y C dentro de la región estable, como se muestra en la Figura 5.18, y obtener el punto B localizado a la mitad de la línea recta que une a ambos puntos  $x_B = ax_A + (1-a)x_C$ , donde  $a=0.5$ . En este caso es obvio que el valor de B está fuera de la región de estabilidad, tal que la aplicación de la definición de un conjunto convexo no se cumple.

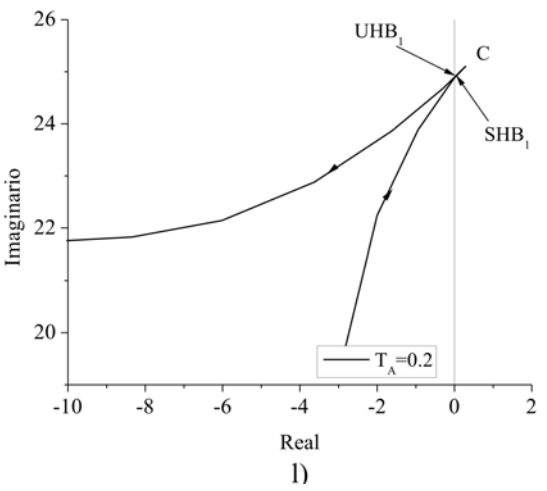
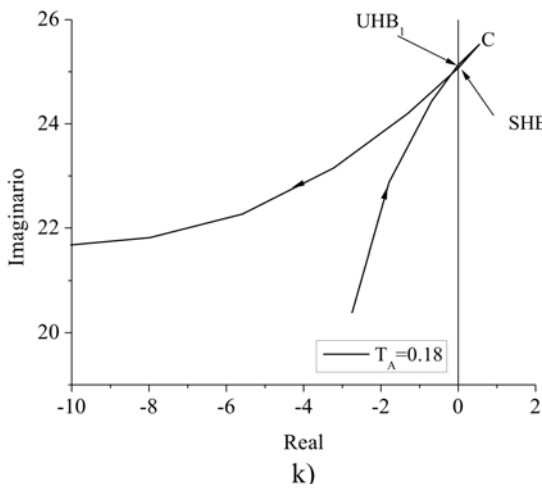
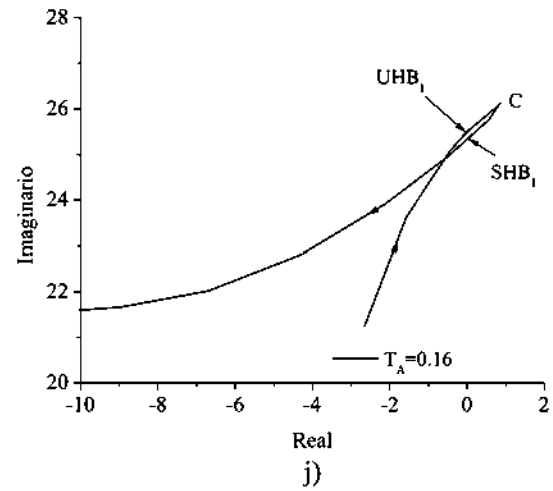
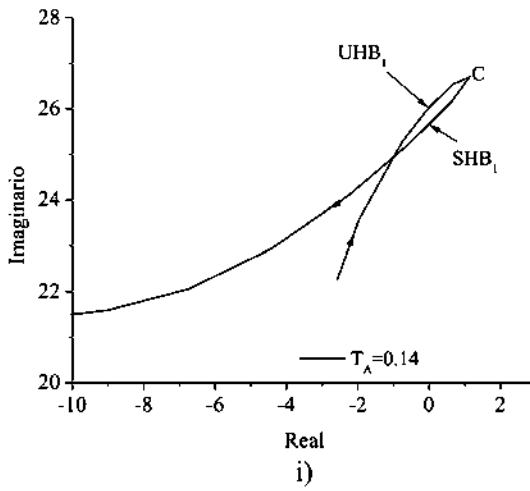
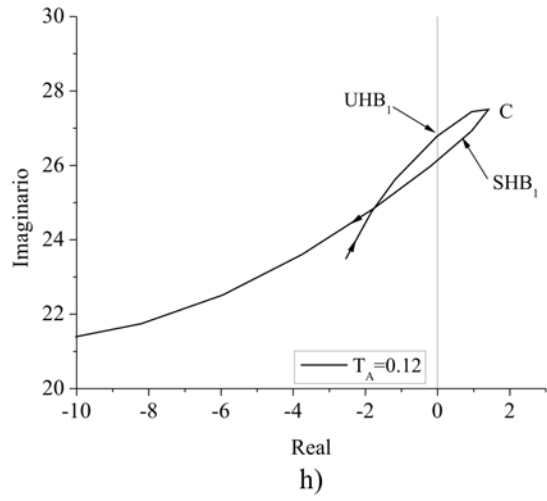
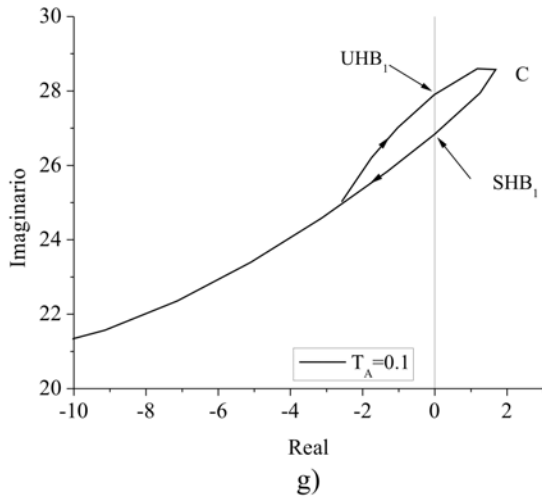
El hecho de que la región de estabilidad de señal pequeña no sea convexa tiene una gran implicación práctica en la operación de sistemas eléctricos de potencia. Un operador podría estar confiado en que está operando dentro de la región de estabilidad sin tener idea de la existencia del agujero dentro de esta región, de tal manera que una pequeña perturbación dentro de la región de estabilidad conducirá al sistema a un estado operativo inestable.

### 5.3.2 *Relación entre la aparición del agujero inestable y bifurcaciones Hopf degeneradas*

La formación del agujero inestable dentro de la región de estabilidad tiene lugar cuando las curvas de bifurcaciones Hopf  $HB_1$  y  $HB_2$  se unen en los puntos M y N de la Figura 5.18. En el siguiente análisis, se explica como es que ambas curvas colisionan en los puntos M y N. La Figura 5.21 muestra la posición de los eigenvalores complejos conjugados del Jacobiano relacionados a las bifurcaciones  $UHB_1$  y  $SHB_1$  de la Figura 5.14 con respecto a diferentes valores de  $T_A$ . En este análisis el eigenvalor del jacobiano que se esta monitoreando es el eigenvalor 2 de la Tabla 5.5 para diferentes valores de  $T_A$ , ya que este eigenvalor cruza al eje imaginario en dos ocasiones dando lugar a las bifurcaciones  $UHB_1$  y  $SHB_1$ . El análisis se realiza de la siguiente forma para un valor determinado de  $T_A$  en el rango de [0.01-0.25] se hace la simulación en el tiempo y se saca su diagrama de bifurcación, posterior a esto se van tomando cada uno de los puntos de equilibrio estables e inestables desde 0.4 hasta donde ocurre la bifurcación SNB es decir, la parte superior del diagrama de bifurcación como el que se muestra en la Figura 5.14, posteriormente de cada punto de equilibrio estable e inestable se hace la simulación en el tiempo para obtener cada uno de los eigenvalores del Jacobiano evaluados en ese punto de equilibrio los cuales forman una trayectoria como la que se muestra en la Figura 5.21. Debido a que los eigenvalores son complejos conjugados, solamente la parte positiva del eje real (con parte imaginaria positiva) es graficada. La flecha sobre la trayectoria indica la dirección del eigenvalor al incrementar  $P_m$ . Se puede ver que existe un punto máximo en cada figura que es denotado por el punto C, este punto indica al eigenvalor con parte real negativa mas cercano al eje imaginario el cual cambia con respecto al valor de  $T_A$ , es decir al ir incrementando el valor de  $T_A$  este punto C se aproxima cada vez mas al eje imaginario hasta llegar a ser tangente a este en el valor de  $T_A=0.00286$  el punto donde el eigenvalor es tangente al eje imaginario se indica con el punto M se que se muestra en la Figura 5.21c, si se continua incrementando el valor de  $T_A$ , aparecen dos bifurcaciones  $UHB_1$  y  $SHB_1$  debido a que los eigenvalores cruzan dos veces al eje imaginario esto se muestra en las Figuras 5.21d-5.21l. En la Figura 5.21m los eigenvalores vuelven a ser tangentes al eje imaginario

al seguir incrementando el valor de  $T_A$  el punto donde el eigenvalor es tangente al eje imaginario se indica con el punto N.





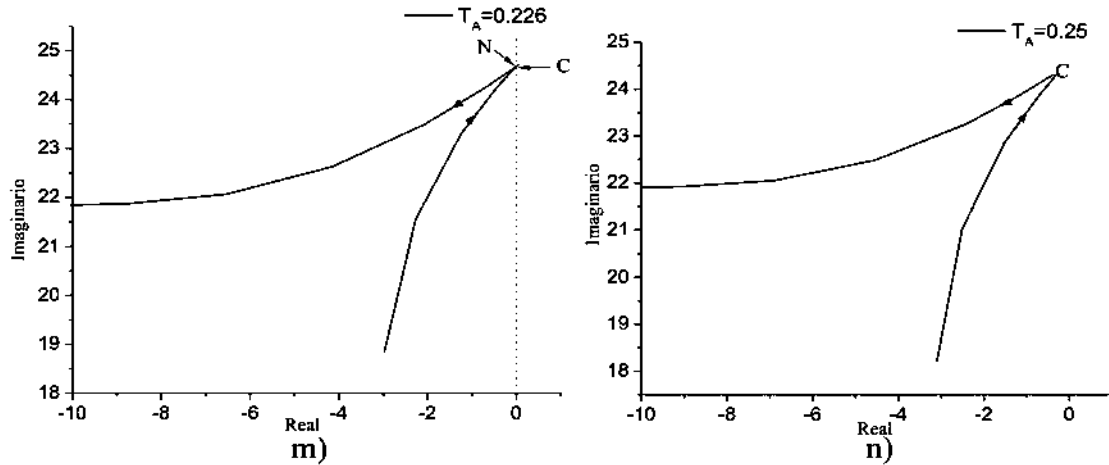


Figura 5.21 Posición de los eigenvalores relacionados con  $UHB_1$ , y  $SHB_1$  con  $K_A=200$ .

En la Figura 5.22, se grafican las posiciones del punto C de la Figura 5.21 con la finalidad de mostrar de manera clara a que valores del parámetro  $T_A$  se tienen eigenvalores sobre el eje imaginario. Del diagrama  $T_A$ -C se observa que cuando  $T_A$  es menor que 0.0268 o mayor que 0.2260, el punto C estará sobre la izquierda del eje imaginario. Esto implica que la posición del eigenvalor crítico está a la izquierda del eje imaginario y por lo tanto, bifurcaciones Hopf no aparecen pues no hay ningún eigenvalor que cruce el eje imaginario (Figuras 5.21a, 5.21b y 5.21n). Cuando  $T_A$  está en el rango de (0.0268, 0.2260), el punto C está sobre la derecha del eje imaginario. Los eigenvalores cruzan el eje imaginario dos veces (Figura 5.21d-5.21l), por lo cual, existen dos bifurcaciones Hopf, es decir  $UHB_1$  y  $SHB_1$ . En este caso no se hace el análisis de los eigenvalores asociados a  $SHB_2$  ya que no están asociados a la creación del agujero inestable.

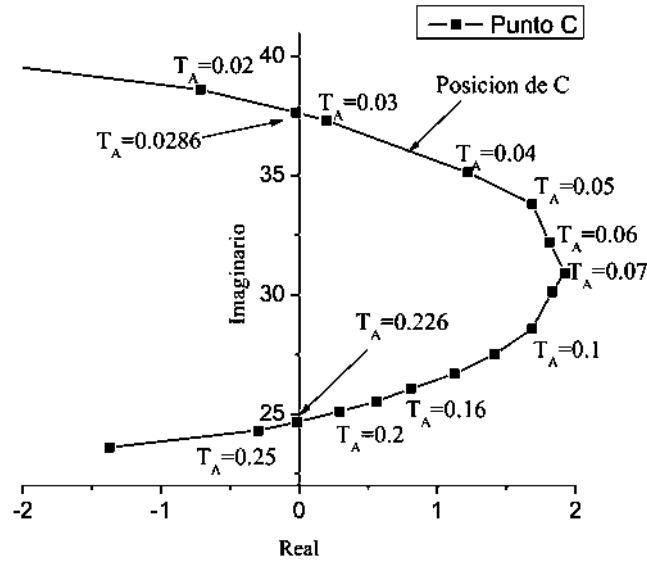


Figura 5.22 Posición del punto C de la Figura 5.21 cuando  $T_A$  se incrementa.

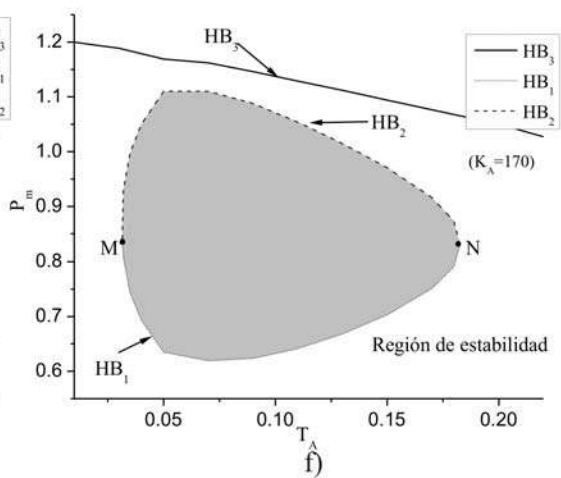
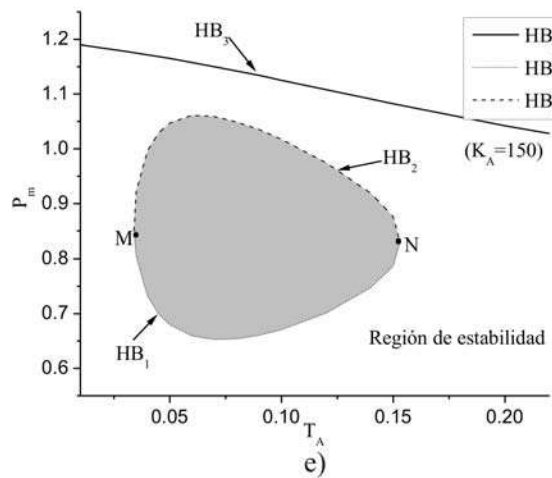
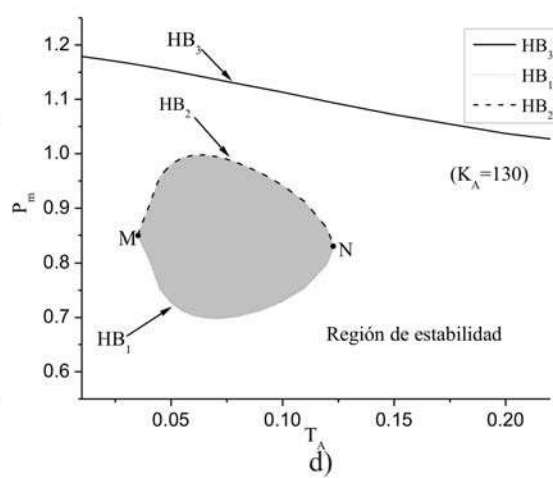
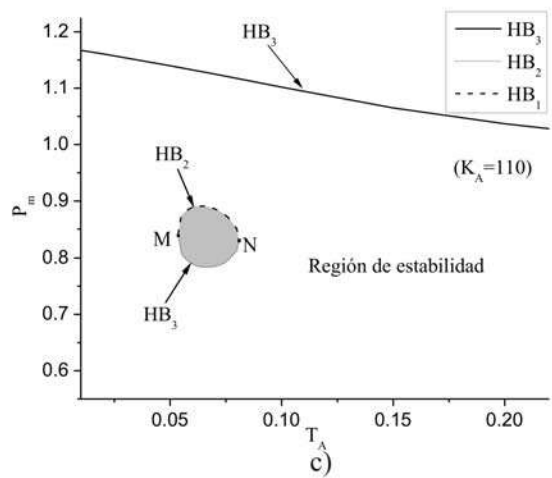
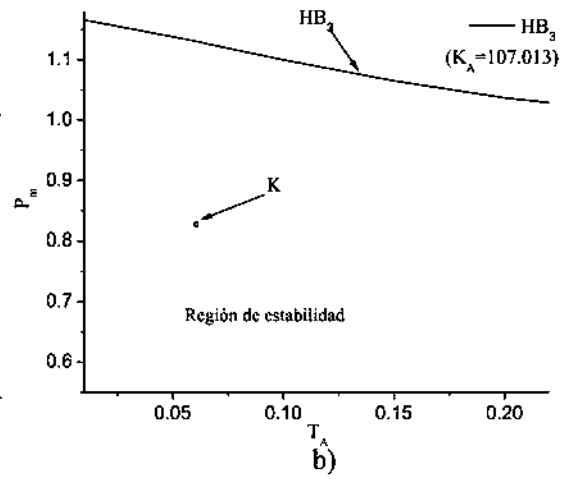
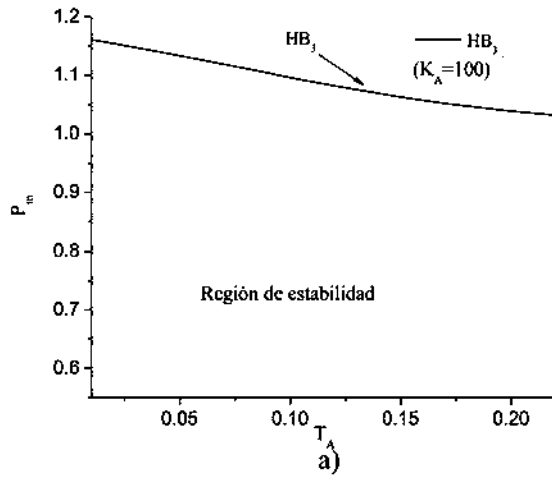
En el punto  $T_A=0.0268$ , la posición de los eigenvalores críticos es tangencial al eje imaginario como se muestra en la Figura 5.21c, lo cual implica que:

$$\frac{\partial \text{Re}(\lambda(P_m))}{\partial P_m} = 0 \quad (5.29)$$

La ecuación (5.29) significa que la condición de transversalidad H3 del capítulo 3 es violada, tal que los puntos de bifurcación  $\text{UHB}_1$  y  $\text{SHB}_1$  se unen para formar un punto de bifurcación Hopf degenerada. De tal manera, este punto de bifurcación Hopf degenerada, ilustrado por el punto M en la Figura 5.18, queda definido por la colisión de las dos curvas de bifurcaciones Hopf. De forma similar, se observa que aparece otro punto de bifurcación Hopf degenerada cuando  $T_A=0.2260$ . Esto se ilustra esquemáticamente en las Figuras 5.22 y 5.21m. De lo anterior se concluye que los puntos que los M y N mostrados en las Figuras 5.21c y 5.21m son dos puntos de bifurcaciones Hopf degeneradas, las cuales dan lugar al agujero inestable dentro de la región de estabilidad.

### 5.3.3 Evaluación del agujero inestable en la región de estabilidad

El análisis presentado en la sección 5.3.2 se realizó considerando un valor de la ganancia del control de excitación de  $K_A=200$ . En esta sección se presenta el efecto de esta ganancia sobre el agujero inestable. Para realizar lo anterior se realizan las simulaciones presentadas en la sección anterior para diferentes valores de  $K_A$ . La Figura 5.23 muestra algunas regiones de estabilidad cuando los valores de  $K_A$  se definen dentro del rango [100-210]. Para realizar este análisis se hace lo siguiente: primero para un valor de  $K_A$  y  $T_A$  donde  $T_A$  esta en el rango de [0.01-0.25] se hace la simulación en el tiempo, después en el diagrama de bifurcación se monitorea el valor de  $P_m$  en el punto donde ocurre cada una de las bifurcaciones  $UHB_1$ ,  $SHB_1$  y  $SHB_2$ , posteriormente se vuelve a hacer la simulación en el tiempo donde el valor de  $K_A$  se mantiene fijo mientras  $T_A$  es variado en el rango antes mencionado con esto se obtiene otra vez el diagrama de bifurcación para buscar el valor de  $P_m$  en el punto donde ocurre cada una de las bifurcaciones. Después de haber terminado de variar  $T_A$  y haber sacado cada uno de los diagramas de bifurcación, se vuelven a hacer las simulaciones para un valor de  $K_A$  diferente, los valores correspondientes de  $P_m$  para cada uno de los valores de  $K_A$  y  $T_A$  son los graficados en la Figura 5.23. En Figura 5.23a se observa que la región es solamente limitada por la curva  $HB_3$  que corresponde a la bifurcación  $SHB_2$  cuando  $K_A=100$ , sin presentar agujeros inestables en la región, esto se debe a que solamente se tiene la bifurcación  $SHB_2$  en el diagrama de bifurcación. Cuando  $K_A$  se incrementa al valor de  $K_A=107.013$ , un punto  $K$  inestable aparece, que es señalado por una flecha en la Figura 5.123b. Cuando  $K_A$  se incrementa continuamente, el área del agujero inestable aumenta más y más como se muestra en las Figuras 5.23c-5.23f. En el valor aproximado de  $K_A=204.7286$ , la curva  $HB_2$  (el limite superior del agujero) se hace tangente a la curva  $HB_3$  (limite externo de la región de estabilidad) como se muestra en la Figura 5.23g. Cuando la ganancia del controlador se define en  $K_A = 210$ , la curva  $HB_2$  se cruza con  $HB_3$  en los puntos  $T_1$  y  $T_2$ , como se muestra en la Figura 5.23h, este cruce de las curvas se explica mas adelante. De estas figuras también se observa que a medida que se incrementa el valor de la ganancia del controlador, se incrementa el área del agujero inestable dentro de la región de estabilidad.



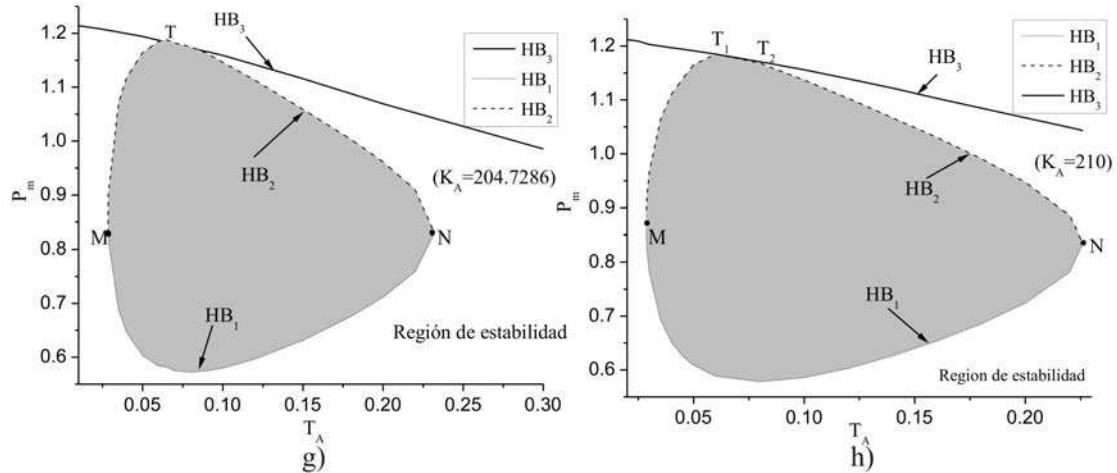


Figura 5.23 Regiones de estabilidad con diferentes valores de  $K_A$ .

Con la finalidad de explicar la razón por la cual aparece un agujero en la región de estabilidad, se obtuvieron los diagramas  $T_A-C$  para los diferentes valores de  $K_A$  considerados en la simulación anterior. Estos diagramas se muestran en la Figura 5.24. De esta figura se observa que cuando  $K_A$  es menor que 107.013, es decir  $K_A=100$ , todas las posiciones del eigenvalor crítico están sobre la izquierda del eje imaginario, por lo que no existe ninguna bifurcación tipo Hopf, y por ende no hay puntos inestables (agujeros) dentro de la región de estabilidad. Conforme se incrementa el valor de  $K_A$ , el diagrama  $T_A-C$  se mueve hacia el eje imaginario. Cuando  $K_A$  se incrementa alrededor de  $K_A=107.013$ , una parte del diagrama  $T_A-C$  es tangente al eje imaginario. En este caso, y en base al análisis mostrado en las Figuras 5.21 y 5.22, se deduce que hay un par de eigenvalores complejos conjugados tangentes al eje imaginario asociados al Jacobiano del sistema evaluado en el en el punto de equilibrio obtenido con los parámetros  $(K_A, T_A, P_m) = (107.013, 0.064950, 0.835344)$ . Lo anterior da origen a un punto crítico dentro de la región de estabilidad, que es el punto  $K$  en la Figura 5.23b.

En base a la teoría de bifurcaciones Hopf degeneradas [Jia06], se sabe que el punto  $K$  de la Figura 5.23b es un punto de bifurcación Hopf degenerado de segundo orden, en donde dos bifurcaciones Hopf de primer orden  $M$  y  $N$  colisionan y desaparecen.

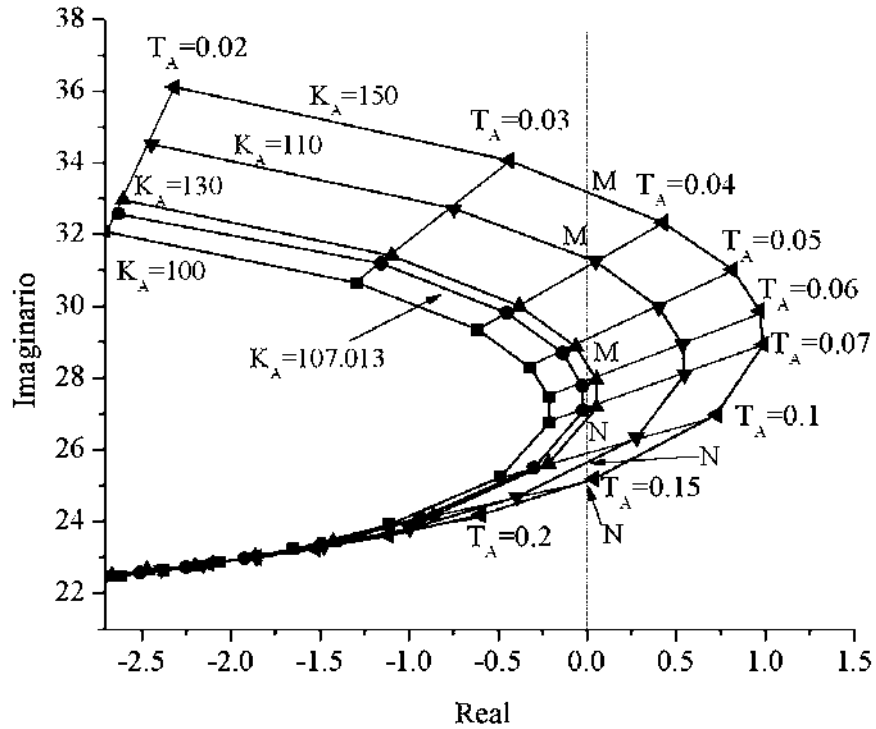
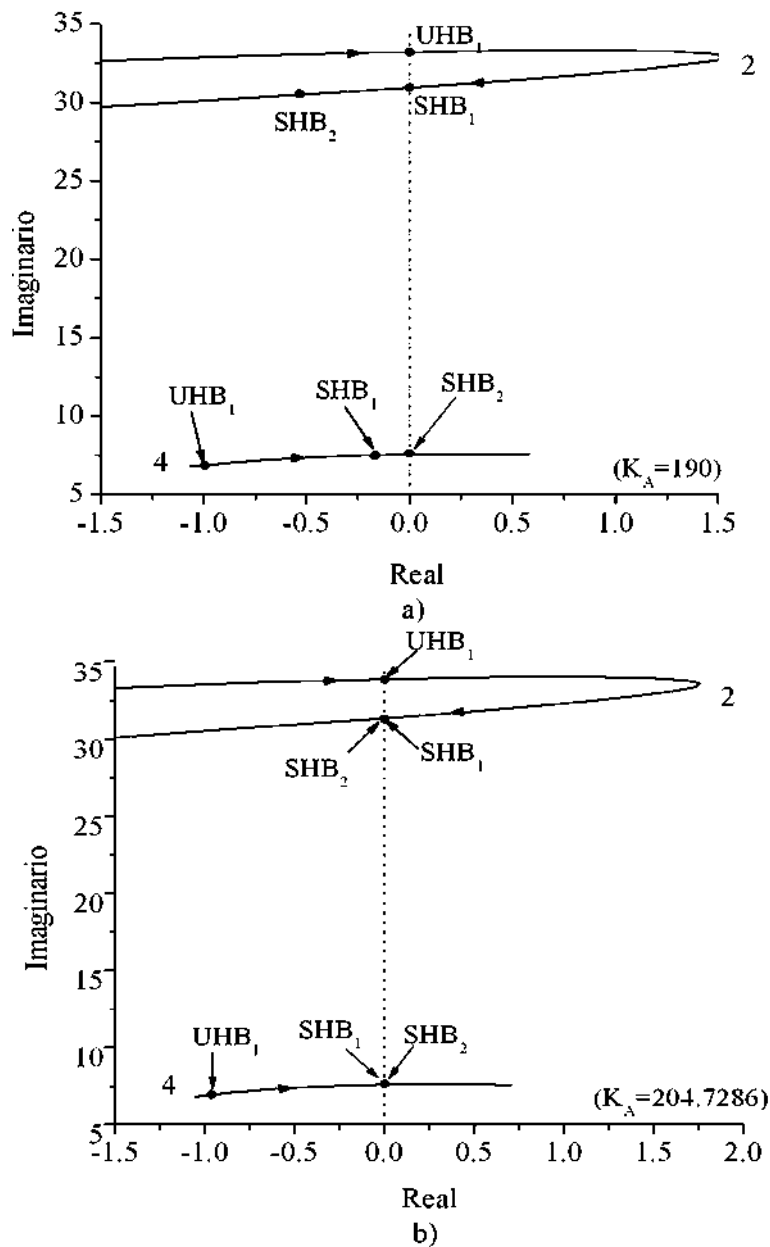


Figura 5.24 Posiciones de  $T_A$ -C para diferentes valores de  $K_A$ .

Los escenarios operativos para valores de  $K_A$  dentro del rango  $107.013 < K_A < 204.7286$  son similares a los resultados de la Figura 5.22. El diagrama  $T_A$ -C tiene dos puntos que cruzan el eje imaginario; es decir los puntos M y N. Esto implica que existen dos bifurcaciones Hopf degeneradas  $UHB_1$  y  $SHB_1$  que causan la colisión de las curvas  $HB_1$  y  $HB_2$ , tal que se forma un agujero cerrado inestable dentro de la región de estabilidad como se muestra en la Figura 5.18 y Figuras 5.17c-5.17f.

Cuando  $K_A$  se incrementa alrededor del valor 204.7286, la curva  $HB_2$  se hace tangente con la curva  $HB_3$  como se muestra en la Figura 5.23g. Si  $K_A$  se incrementa mas allá del valor anterior (es decir  $K_A > 204.7286$ ), la curva  $HB_2$  se intersecta con la curva  $HB_3$  en dos puntos como se muestra en la Figura 5.23h. Es evidente que el agujero inestable sale de la región de estabilidad. En este caso, el límite superior de la región de estabilidad es formado por una estructura similar a un valle dada por los puntos M- $T_1$ - $T_2$ -N, como se ilustra en la Figura 5.23h.

La Figura 5.25 muestra la relación de las posiciones de los eigenvalores asociados a  $UHB_1$ ,  $SHB_1$  y  $SHB_2$ , considerando tres valores de  $K_A$  dados por 190, 204.7286 y 210. Las Flechas indican la dirección de incremento del punto  $P_m$ . Para  $K_A=190$  se observa que  $SHB_1$  aparece primero que  $SHB_2$ . Sin embargo, para  $K_A=210$  ocurre lo contrario. Cuando  $K_A=204.7286$ ,  $SHB_1$  y  $SHB_2$  aparecen al mismo tiempo. Este punto de aparición corresponde al punto tangente T en la Figura 5.23g. De tal manera, el cruce del agujero inestable con la región de estabilidad es causada por la coincidencia simultánea de  $SHB_1$  y  $SHB_2$ .



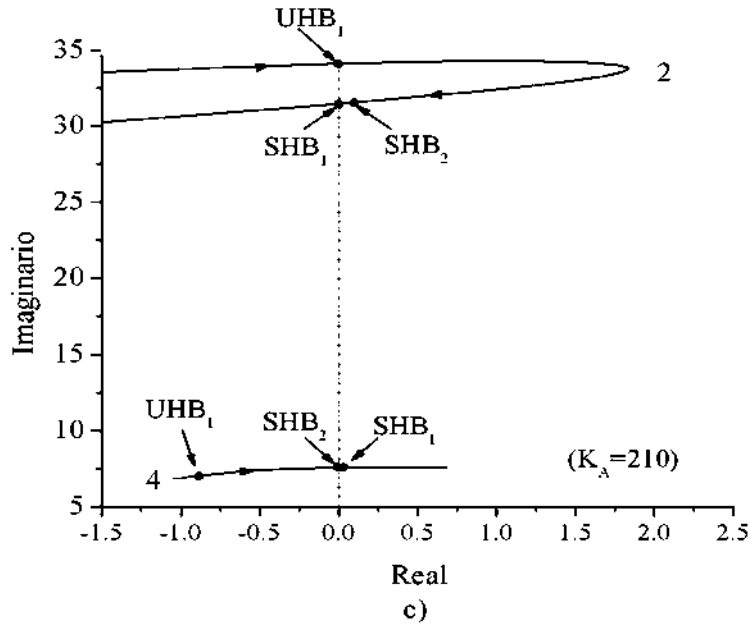


Figura 5.25 Posiciones de los eigenvalores cuando  $K_A$  es igual a 190,204.7286 y 210.

#### 5.4 Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica tipo II y sistema de excitación rápido en el generador con diferentes valores del limitador de campo.

En esta sección se analiza el sistema descrito en la sección 5.3 añadiendo un limitador en el AVR para cuantificar su efecto sobre la región de estabilidad y en la aparición de las bifurcaciones Hopf. En la Figura 5. 26 se muestra el diagrama de bloques del excitador rápido con el limitador de voltaje de campo.

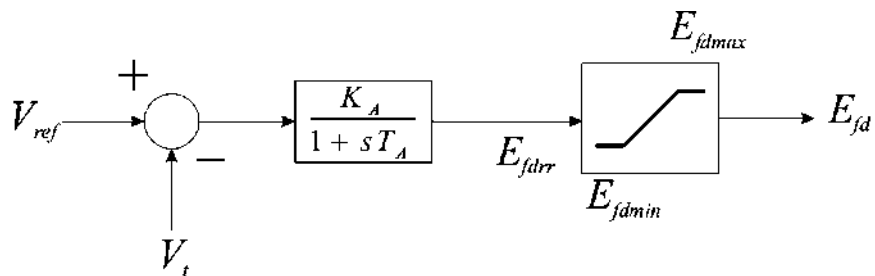


Figura 5. 26 Diagrama de bloques del excitador rápido limitado.

Las ecuaciones que describen la dinámica del sistema son las anteriormente descritas, la única ecuación que es modificada es la ecuación de control de voltaje de campo (5.13), que se sustituye por la siguiente ecuación:

$$\dot{E}_{fdrr} = \frac{-E_{fdrr} + K_A (V_{ref} - V_t)}{T_A} \quad (5.30)$$

Debe observarse que la salida del excitador esta limitada de la siguiente forma:  $E_{fd \min} < E_{fd} < E_{fd \max}$ . Estos límites pueden modelarse por la ecuación (5.31) de manera que  $E_{fd \min} = 0$  y  $E_{fd \max} = 5$  pu si el límite de voltaje de campo es  $E_{fd \lim} = 5$ .

$$E_{fd} = \frac{E_{fd \lim}}{2} \tanh\left(\frac{2E_{fdrr} - E_{fd \lim}}{E_{fd \lim}}\right) + \frac{E_{fd \lim}}{2} \quad (5.31)$$

Las variables del sistema quedan definidas por  $x = [\delta, s_m, E'_q, E'_{fdrr}, \delta_L, V_L]^T \in R^6$  que es el vector de variables de estado,  $y = [P_g, I_d, I_q, E'_d, V_t, V_d, V_q, P, Q]^T \in R^9$  que es el vector de variables algebraicas, y  $p = [T_A, P_m, K_A]^T \in R^3$  que es vector de parámetros de bifurcación. La Tabla 5.6 contiene los valores de los parámetros usados en este análisis.

Tabla 5.6 Valores de parámetros para el sistema de potencia con limitador.

$P_m = [0.4 - 3] pu$		$T_A = [0.02 - 0.4] seg$		$K_A = [100 - 480]$	
$Y_1 = 4.9752 pu$	$Y_2 = 1.6584 pu$	$\phi_1 = -1.4711 rad$	$\phi_2 = -1.4711 rad$	$E_b = 1 pu$	
$E_m = 1 pu$	$x_d = 1.79 pu$	$x_q = 1.71 pu$	$x'_d = 0.169 pu$	$x'_q = 0.23 pu$	
$T'_{d0} = 4.3 seg$	$H = 2.894 seg$	$\omega_b = 377 rad / seg$	$D = 0.05 pu$	$P_0 = 0.4 pu$	
$Q_0 = 0.8 pu$	$P_1 = 0.24 pu$	$q_1 = -0.02 pu$	$p_2 = 1.7 pu$	$q_2 = -1.866 pu$	
$p_3 = 0.2 pu$	$q_3 = 1.6 pu$	$Q_{ld} = 0 pu$	$P_{ld} = 0 pu$	$B_c = 0 pu$	

El análisis se realiza considerando tres diferentes límites de voltaje de campo, 3 pu, 4 pu y 5 pu. A continuación se presentan los resultados de diagramas de bifurcación, ubicación de eigenvalores críticos en función del parámetro de bifurcación  $P_m$ , diagramas de región de estabilidad, simulación en el tiempo de puntos de equilibrio contenidos en el hoyo inestable

y región de estabilidad, así como los diagramas  $T_A$ - $C$  correspondientes a cada uno de los valores del limitador. Puesto que estas simulaciones se explicaron en detalle en la sección 5.3, en esta sección solamente se resaltan aquellos resultados más importantes. Al final de estos estudios se realiza una comparación de resultados con la finalidad de exponer claramente el efecto del limitador del control de voltaje en la región de estabilidad.

#### 5.4.1 Caso de estudio con $E_{frlim}=3$

El diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 5.27 comienza del punto de equilibrio estable obtenido para los valores de parámetros de bifurcación  $P_m=0.4pu$ ,  $T_A=0.05seg$  y  $K_A=200$ , y las condiciones iniciales de las variables de estado dadas por  $V_L = 1.012 pu$ ,  $\delta_L = 0.1312 rad$ ,  $\delta_m = 0.868 rad$ ,  $\omega=0 rad / seg$ ,  $E_q = 1.055 pu$ ,  $E_{fdrr} = 2.368 pu$ . Los puntos de equilibrio estables son representados por la línea gruesa y los inestables por la línea delgada. Cuando el parámetro toma el valor  $P_m = 0.6657 pu$  aparece una bifurcación Hopf UHB<sub>1</sub>, en el valor de  $P_m = 0.92743 pu$  aparece otra bifurcación Hopf SHB<sub>1</sub> y el sistema se vuelve estable hasta el valor de  $P_m = 1.1487 pu$  donde aparece otra bifurcación Hopf SHB<sub>2</sub>. Después de este punto se tienen soluciones inestables, encontrándose una bifurcación SNB  $P_m = 1.2600 pu$ .

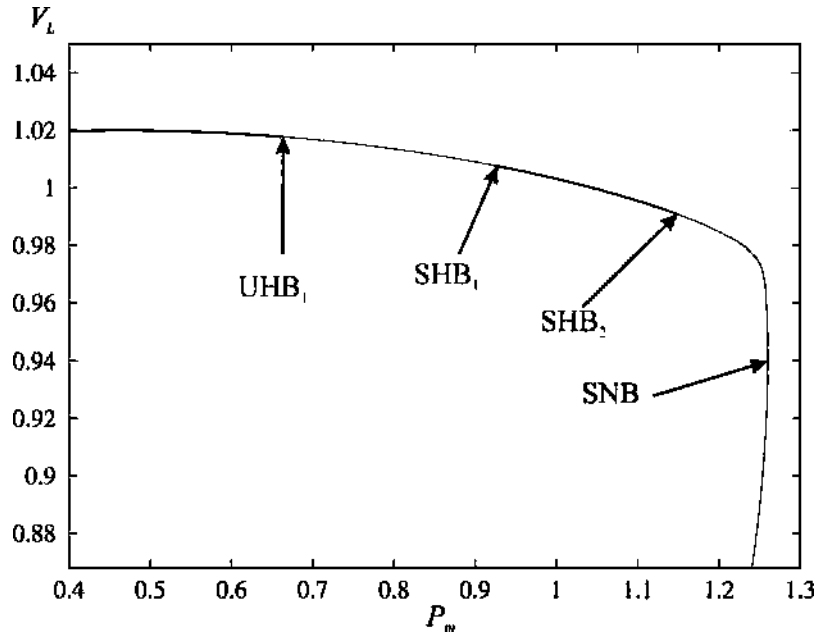


Figura 5.27 Diagrama de bifurcación para un valor  $E_{fdr\lim} = 3$  de límite de campo.

En la Tabla 5.7 se muestran todos los eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de  $E_{fdr} = 3$  y en la Figura 5.28 se muestran las posiciones de los eigenvalores críticos del Jacobiano del sistema de ecuaciones linealizado conforme el parámetro de bifurcación  $P_m$  se incrementa, considerando fijos la constante de tiempo y ganancia del AVR en los valores  $T_A=0.05\text{seg}$  y  $K_A=200$ , respectivamente. La Figura 5.29 muestra al rectángulo que se muestra en la Figura 5.28.

Tabla 5.7 Eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de  $E_{fdr} = 3$ .

1	$-39.3629 \pm 0.000i$
2	$-4.1779 \pm -30.2879i$
3	$-6.4472 \pm 0.000i$
4	$-1.0943 \pm -6.7926i$

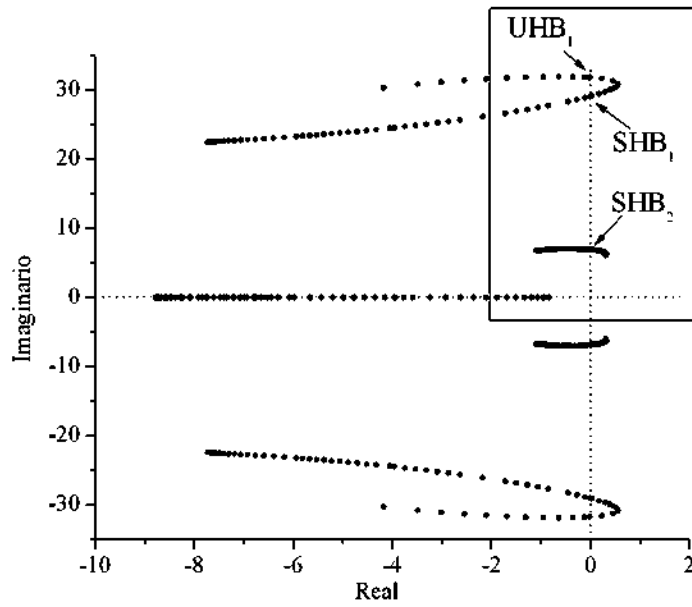


Figura 5.28 Posición de los eigenvalores cuando  $P_m$  se incrementa con  $T_A=0.05$  y  $K_A=200$ .

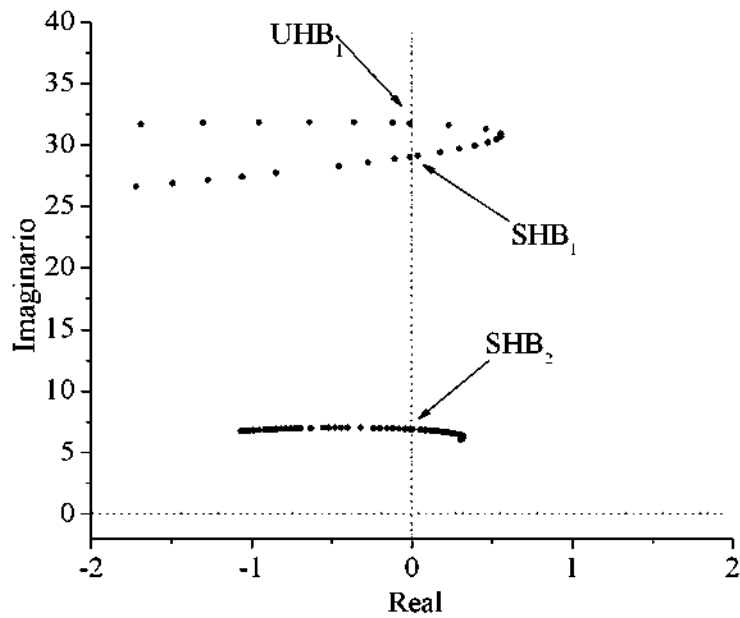


Figura 5.29 Vista alargada del rectángulo de la Figura. 5.28.

La región de estabilidad mostrada en la Figura 5.30 se obtiene manteniendo fijo el valor de  $K_A=200$  y variando  $T_A$ . Las fronteras de estabilidad pasando a través de los puntos de equilibrio asociados a las bifurcaciones  $UHB_1$ ,  $SHB_1$  y  $SHB_2$  se denotan como  $HB_1$ ,  $HB_2$  y  $HB_3$ .

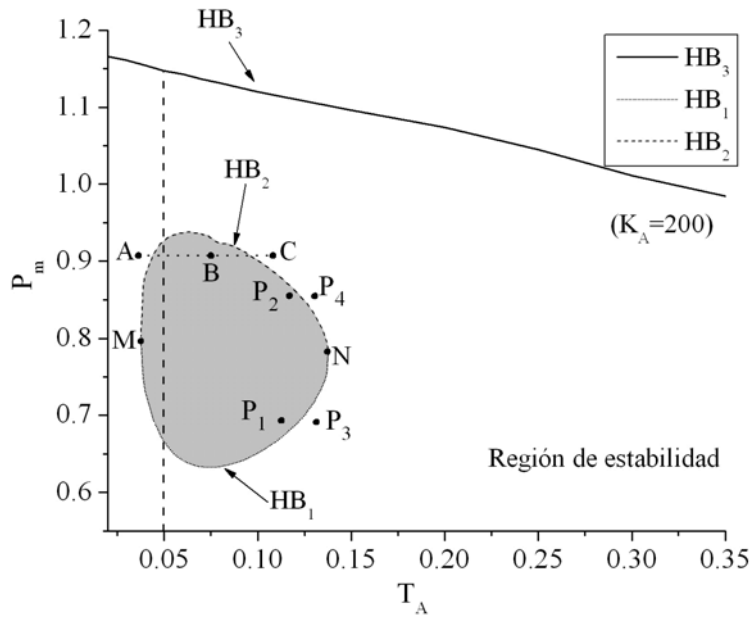


Figura 5.30 Región de estabilidad para un valor de  $K_A=200$ .

Las Figuras 5.31 y 5.32 muestran las simulaciones dinámicas asociadas al comportamiento del ángulo de voltaje en el nodo generador cuando se consideran como condiciones iniciales puntos de equilibrio contenidos en el agujero inestable y en la región de estabilidad respectivamente. Estos puntos de equilibrio se muestran en la Figura 5.30 y son definidos como  $P_1$  y  $P_2$  para el hoyo inestable, y para la región de estabilidad como  $P_3$  y  $P_4$ .

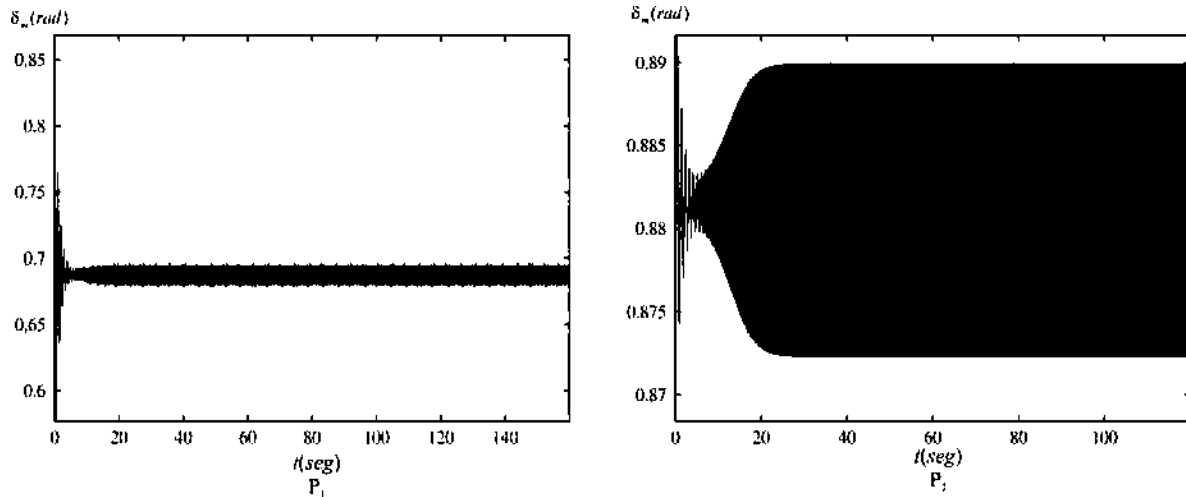


Figura 5.31 Resultados de la simulación de  $P_1$  (a) y  $P_2$  (b).

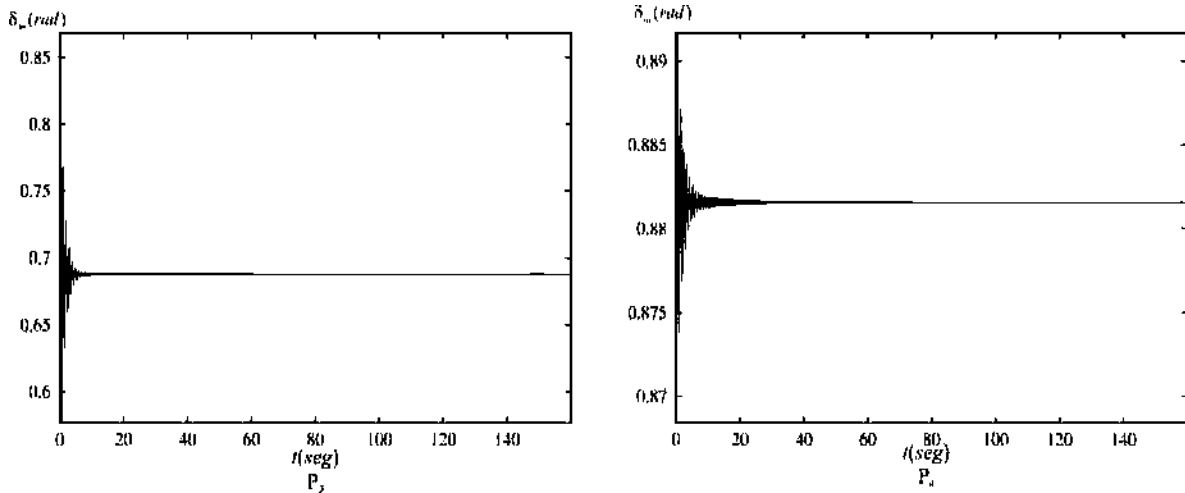
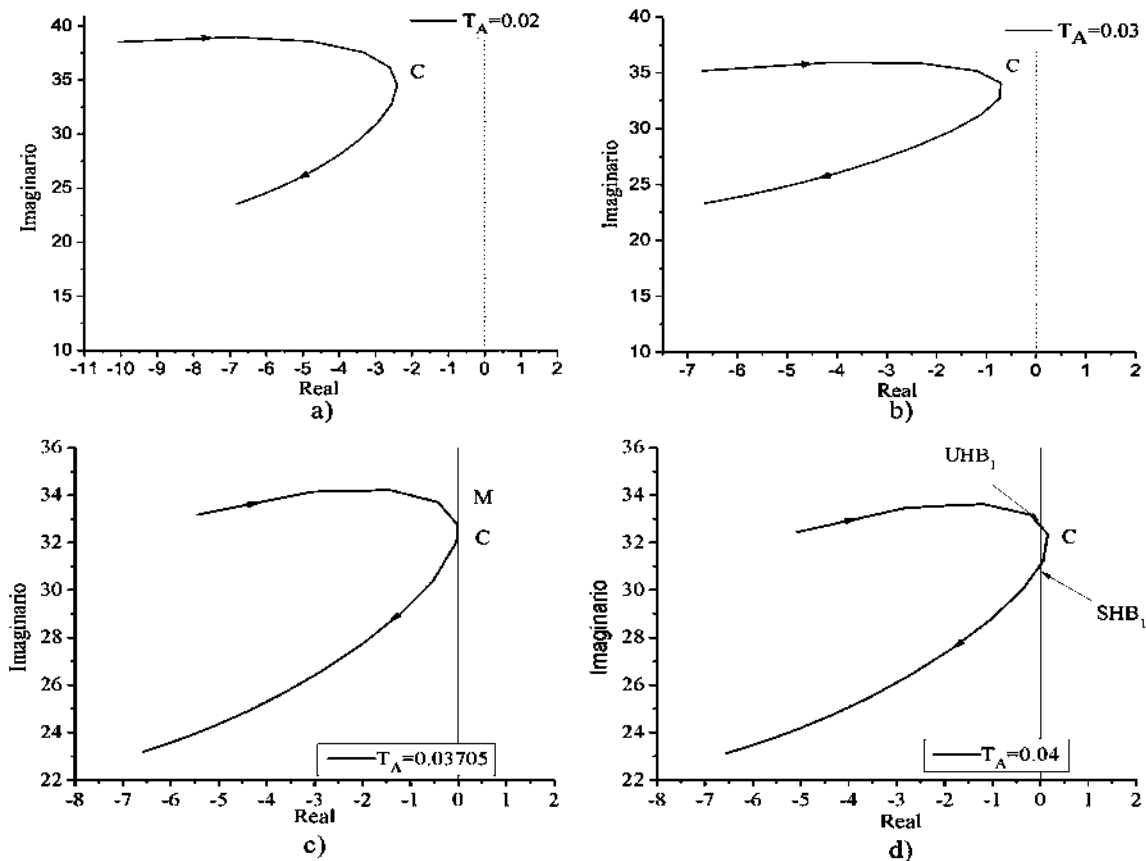


Figura 5.32 Resultados de la simulación de  $P_3$  (a) y  $P_4$  (b).

La Figura 5.33 muestra la posición de los eigenvalores conjugados 2 y 4 de la Tabla 5.7 relacionados a las bifurcaciones  $UHB_1$  y  $SHB_1$  de la Figura 5.27. En cada diagrama existe un eigenvalor cuya parte real es la más próxima al eje imaginario, y que es denotado por el punto C.



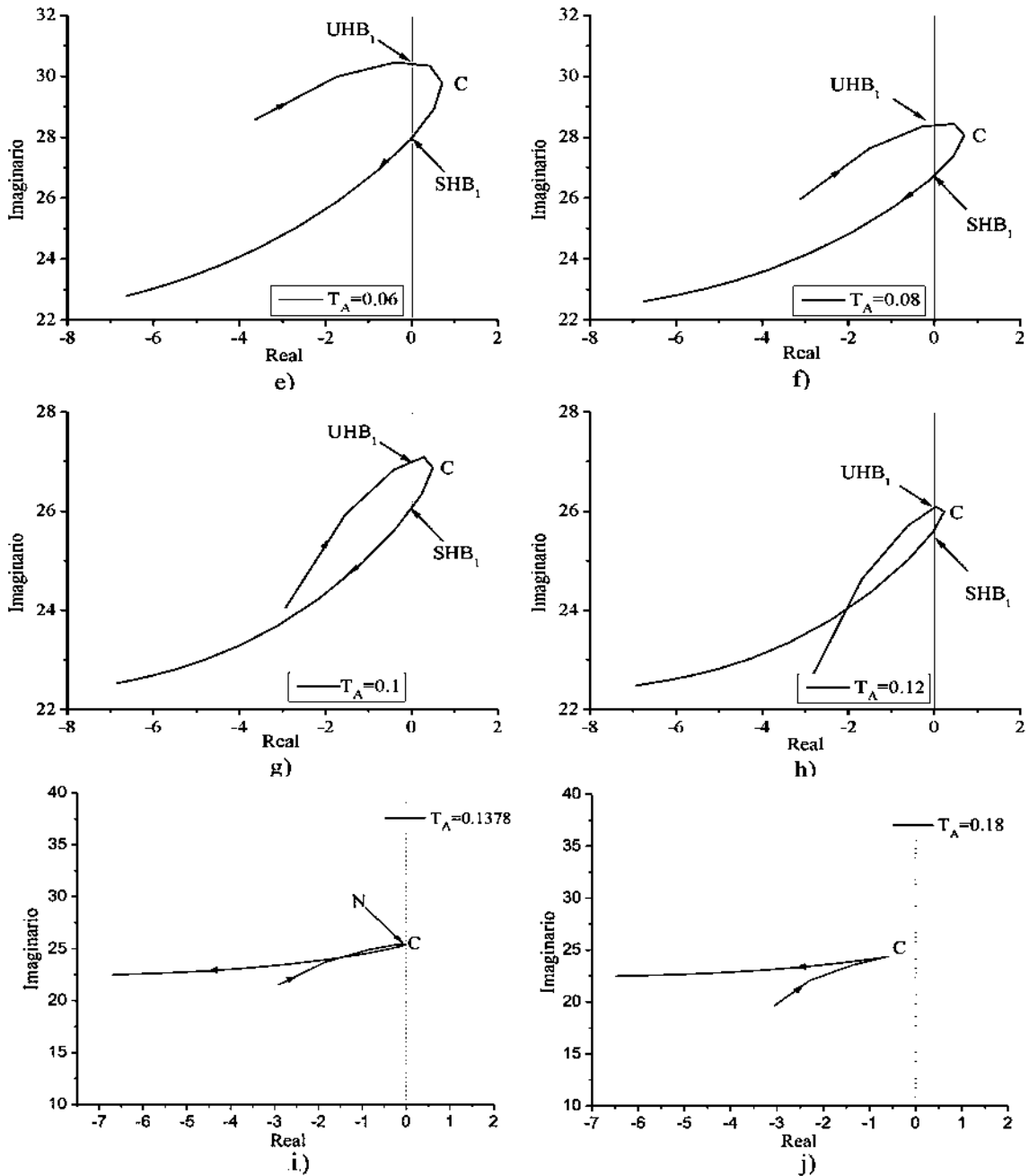


Figura 5.33 Posición de los eigenvalores relacionados con  $UHB_1$ , y  $SHB_1$ .

En la Figura 5.34, se muestra el diagrama  $T_A$ -C con la finalidad de mostrar la intersección del punto C con el eje imaginario.

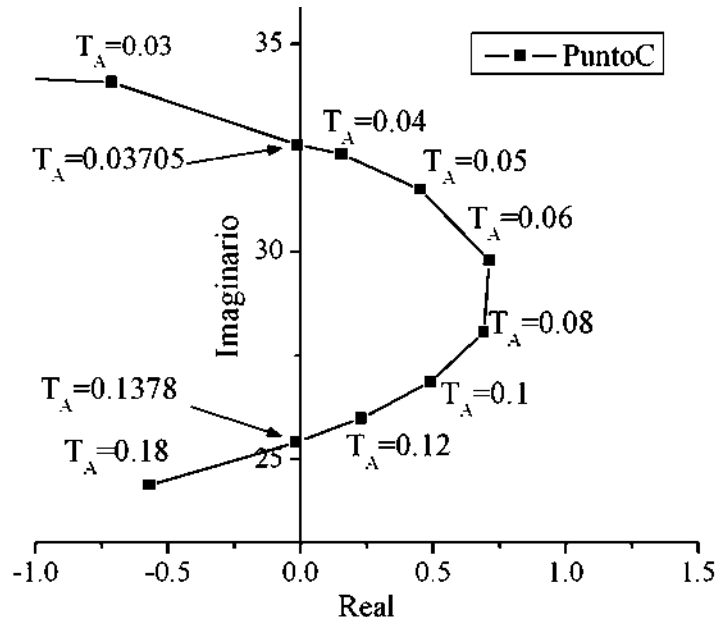
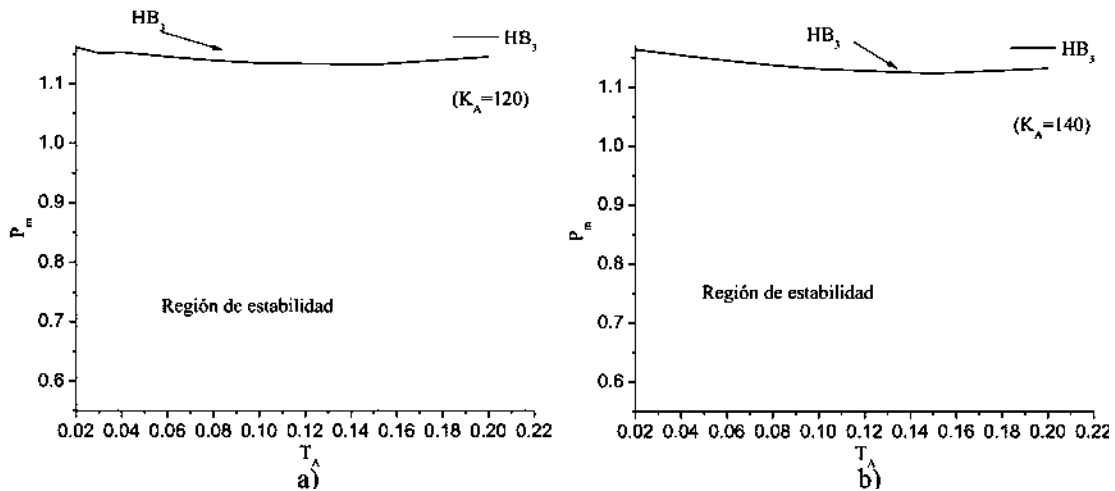


Figura 5.34 Posición del punto C de la Figura 5.33 cuando  $T_A$  se incrementa.

En la Figura 5.35 se muestran algunas regiones de estabilidad cuando  $K_A$  se incrementa en el rango de [120-480]. En Figura 5.35a se observa que al especificar la ganancia del controlador a un valor cuando  $K_A=120$ , la región de estabilidad es solamente limitada por la frontera  $HB_3$  asociada al conjunto de puntos donde ocurre la bifurcación Hopf  $SHB_2$ . Cuando  $K_A$  se incrementa al valor de 153.63, un punto  $K$  inestable aparece, como se indica por la flecha en la Figura 5.35d. Conforme el valor de  $K_A$  se incrementa continuamente, el área del agujero inestable aumenta cada vez mas, como se muestra en las Figura 5.35e-5.35h.



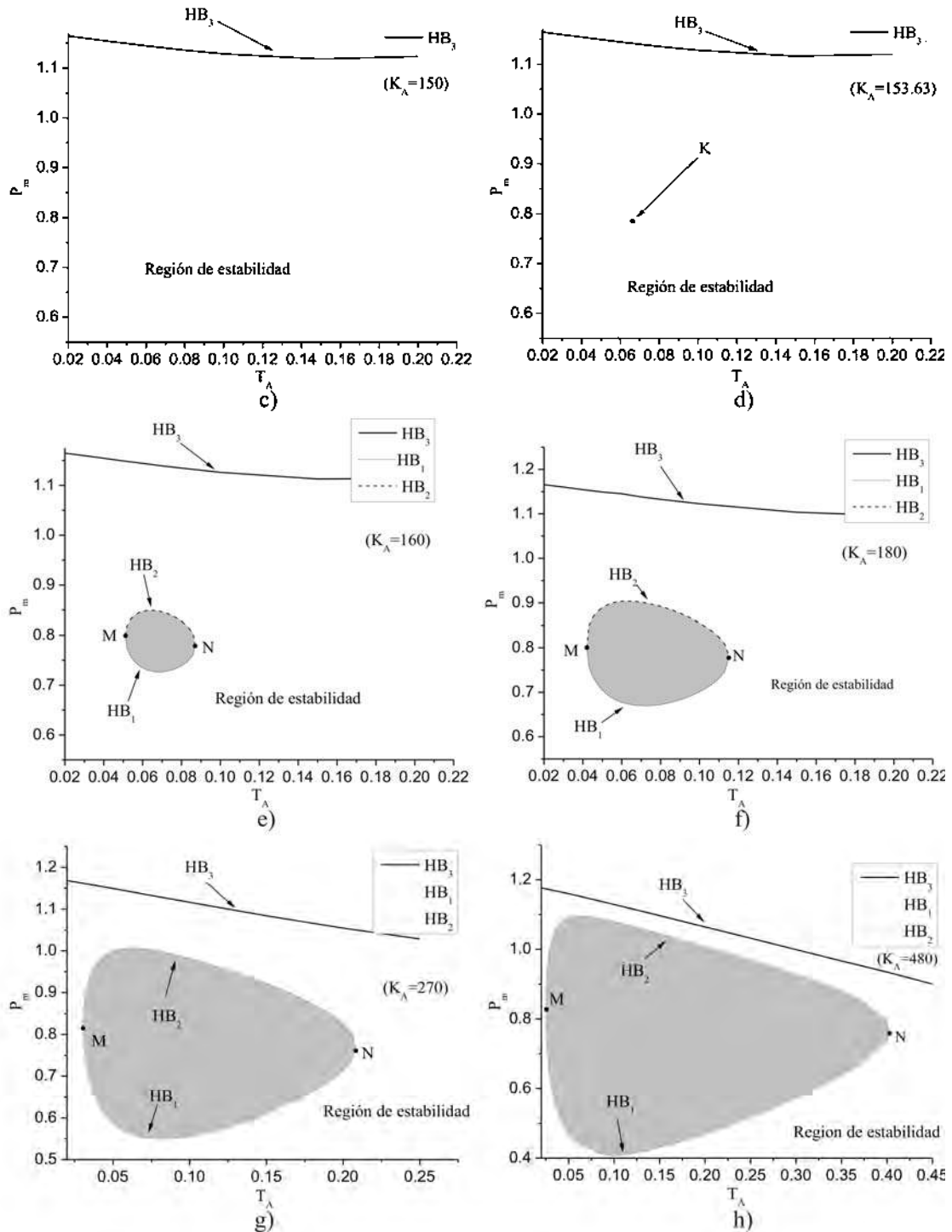


Figura 5.35 Regiones de estabilidad con diferentes valores de  $K_A$ .

Contrario a lo que ocurre cuando no se considera el limitador del AVR, en este caso la frontera de estabilidad  $HB_2$  no cruza la frontera  $HB_3$  en ningún valor de  $K_A$  simulado. Debe observarse que los valores de  $K_A$  considerados en la simulación son mayores a los

considerados en el análisis sin limitador. Esto es porque la aparición del agujero inestable ocurre a un mayor valor de  $K_A$ . Esto se debe a que el limitador obliga a la ecuación de campo a que se mantenga dentro de los valores establecidos por el limitador, como se observa en la Figura 5.36 donde se compara el valor de voltaje de campo sin y con limitador en el AVR.

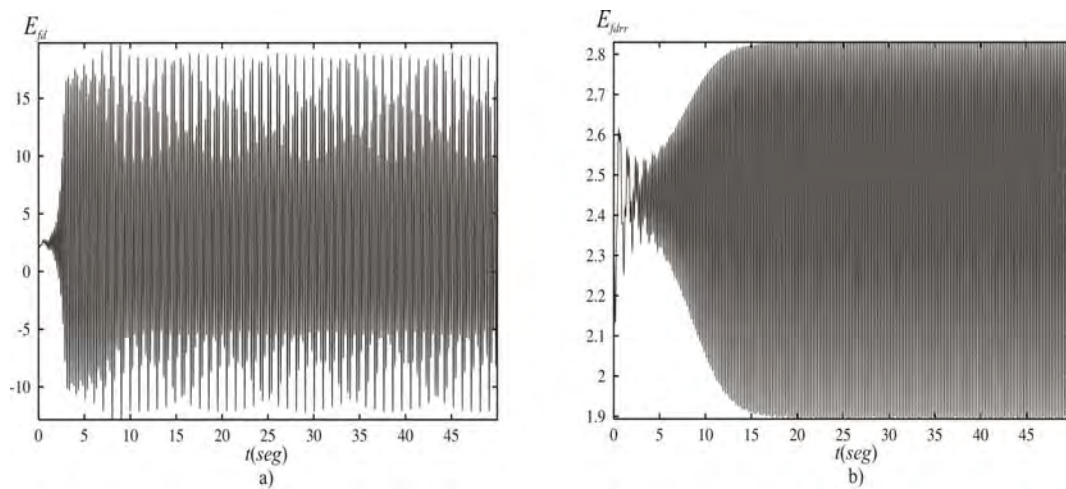


Figura 5.36 Voltaje de campo sin limitador (a) y con limitador (b).

Los diagramas  $T_A$ - $C$  considerando diferentes valores de  $K_A$  se muestran en la Figura 5.37, y son similares a aquellos mostrados en la Figura 5.34. La aparición del agujero inestable dentro de la región de estabilidad acontece a un valor de  $K_A=153.63$  y corresponde a un punto de equilibrio asociado a los parámetros  $(K_A, T_A, P_m) = (153.63, 0.065, 0.7919)$ .

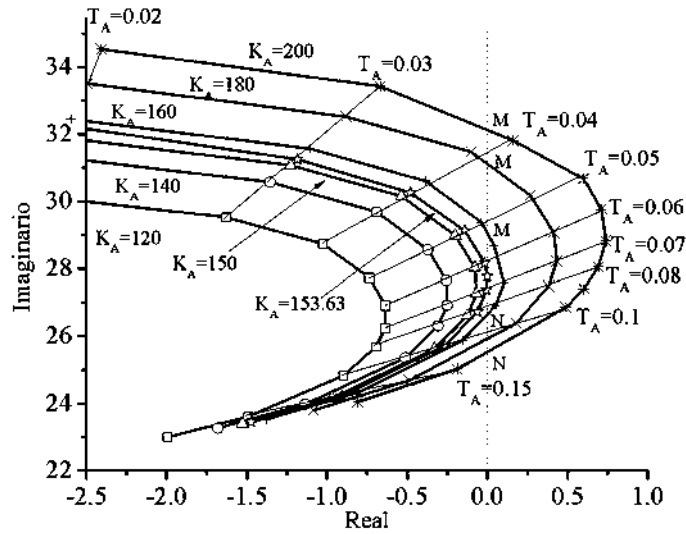


Figura 5.37 Posiciones de  $T_A-C$  para diferentes valores de  $K_A$ .

#### 5.4.2 Caso de estudio con $E_{fdlim}=4$

El diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 5.38 comienza del punto de equilibrio estable obtenido para los valores de los parámetros de bifurcación  $P_m=0.4pu$ ,  $T_A=0.05seg$  y  $K_A=200$ , y las condiciones iniciales de las variables de estado dadas por  $V_L = 1.012 pu$ ,  $\delta_L = 0.1312rad$ ,  $\delta_m = 0.868rad$ ,  $\omega=0rad / seg$ ,  $E_q = 1.055 pu$ ,  $E_{fdrr} = 2.368 pu$ .

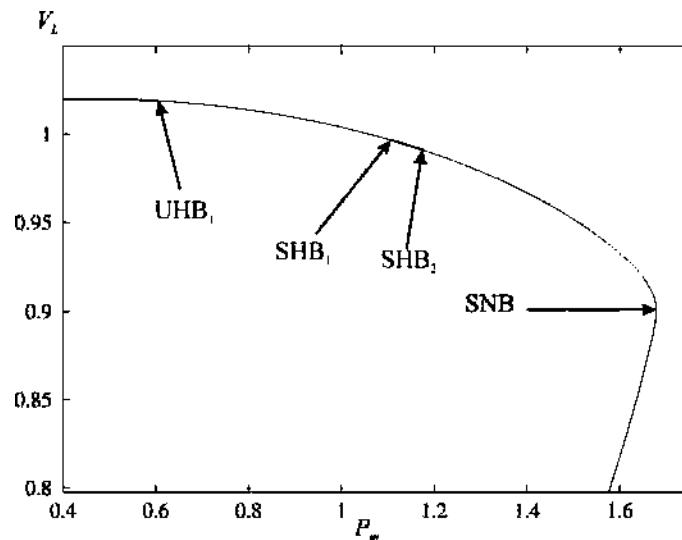


Figura 5.38 Diagrama de bifurcación para un valor limite de 4.

En la Tabla 5. 8 se muestran todos los eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de  $E_{fdrr} = 4$  y en la Figura 5.39 se muestran las posiciones de los eigenvalores críticos del

Jacobiano del sistema de ecuaciones linealizado conforme el parámetro de bifurcación  $P_m$  se incrementa, considerando fijos la constante de tiempo y ganancia del AVR en los valores  $T_A=0.05\text{seg}$  y  $K_A=200$ , respectivamente. La Figura 5.40 muestra al rectángulo que se muestra en la Figura 5.39.

Tabla 5. 8 Eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de  $E_{fdrr} = 4$ .

1	$-40.1338 \pm 0.000i$
2	$-3.8084 \pm -31.6124i$
3	$-6.4720 \pm 0.000i$
4	$-1.0703 \pm -6.8387i$

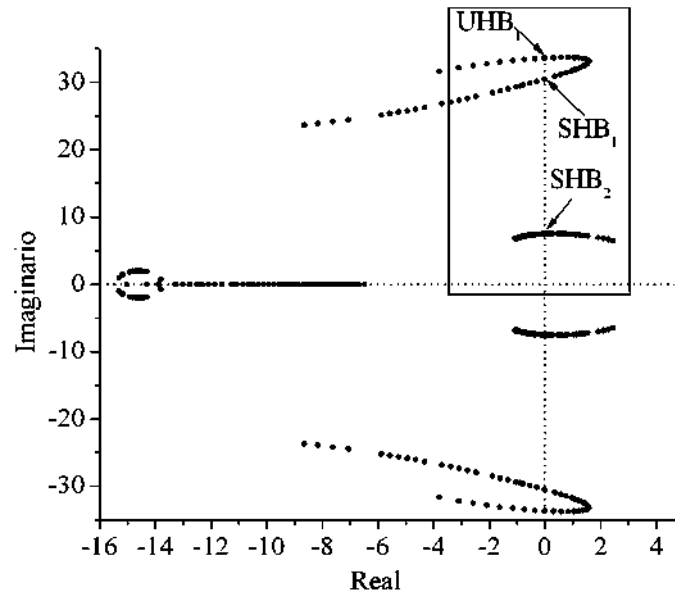


Figura 5.39 Movimiento de los eigenvalores cuando  $P_m$  se incrementa con  $T_A=0.05$  y  $K_A=200$ .

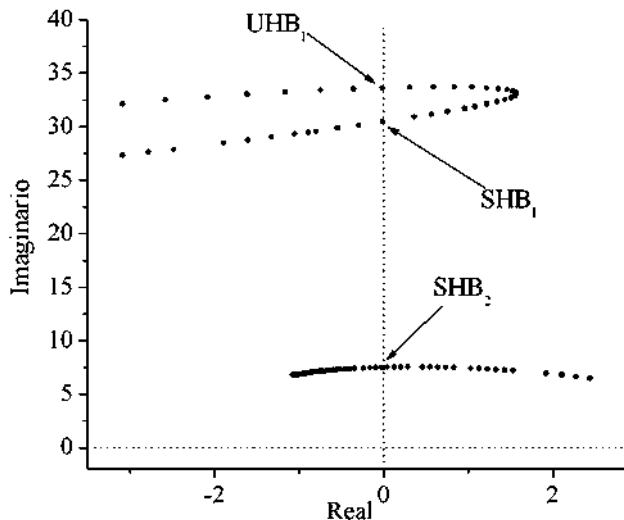


Figura 5.40 Vista alargada del rectángulo de la Figura 5.39.

La Figura 5.41 muestra las fronteras de estabilidad considerando la variación de los parámetros de bifurcación  $P_m$  y  $T_A$ , manteniendo fijo el valor de  $K_A=200$ .

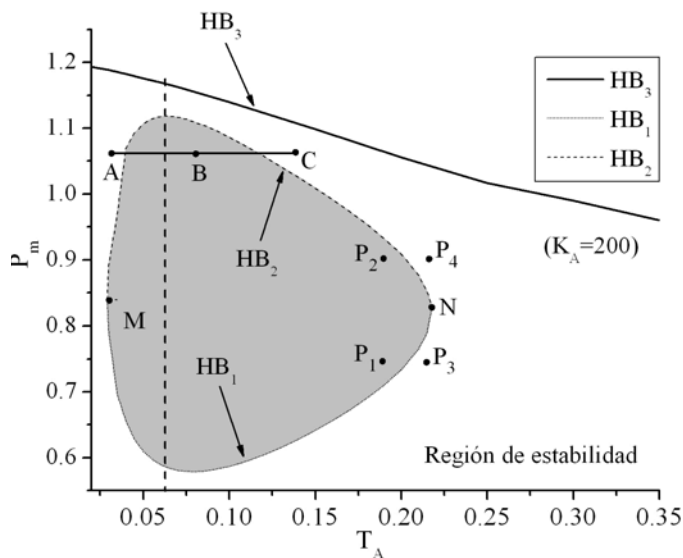
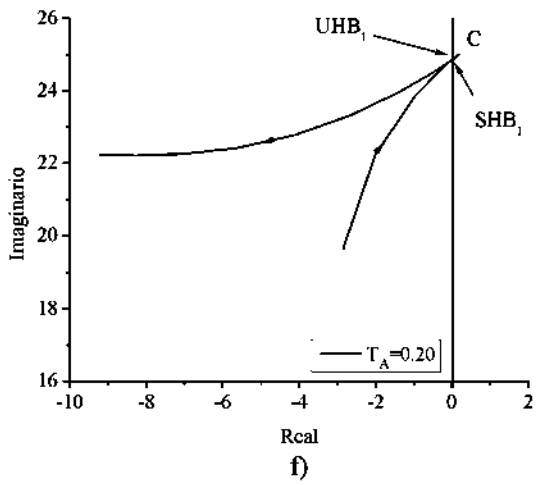
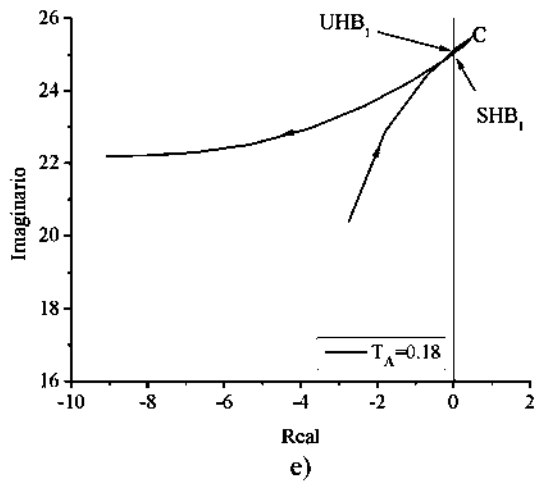
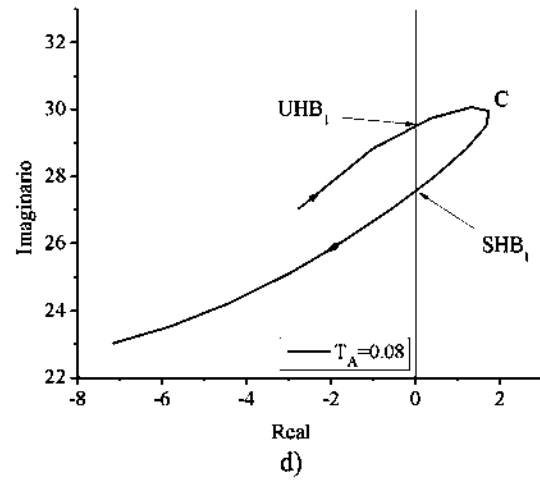
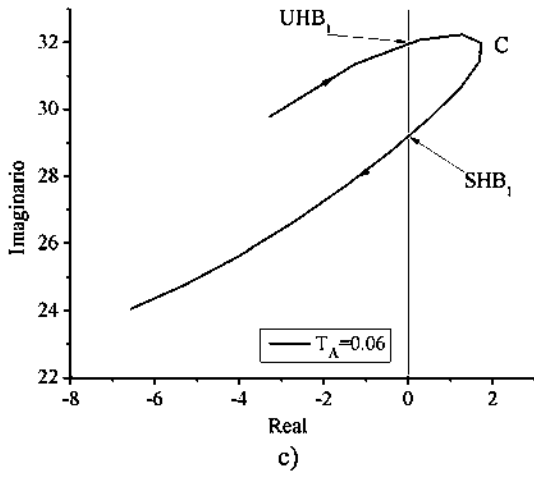
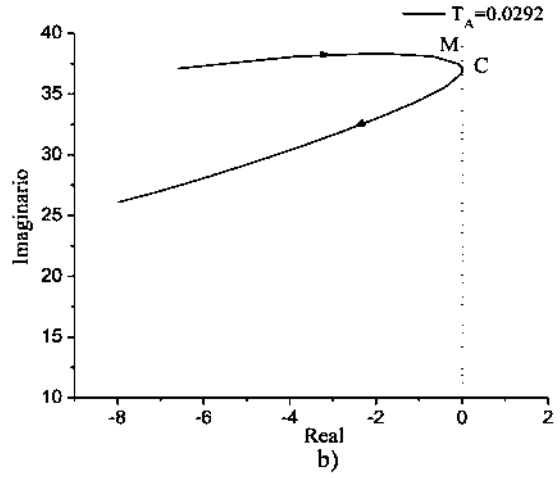
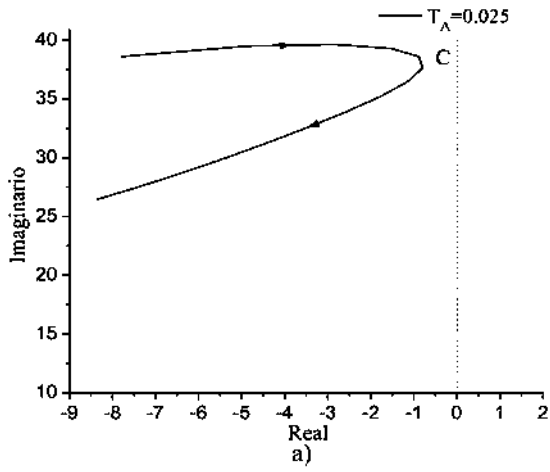


Figura 5.41 Región de estabilidad para un valor de  $K_A=200$ .

La Figura 5.42 muestra la posición de los eigenvalores conjugados relacionados a las bifurcaciones  $HB_1$  y  $HB_2$  de la Figura 5.38 para diferentes valores de  $T_A$  y un valor fijo de  $K_A=200$ . En cada diagrama existe un eigenvalor crítico cuya parte real es la más próxima al eje imaginario, y su localización en el plano complejo es denotada por el punto C.



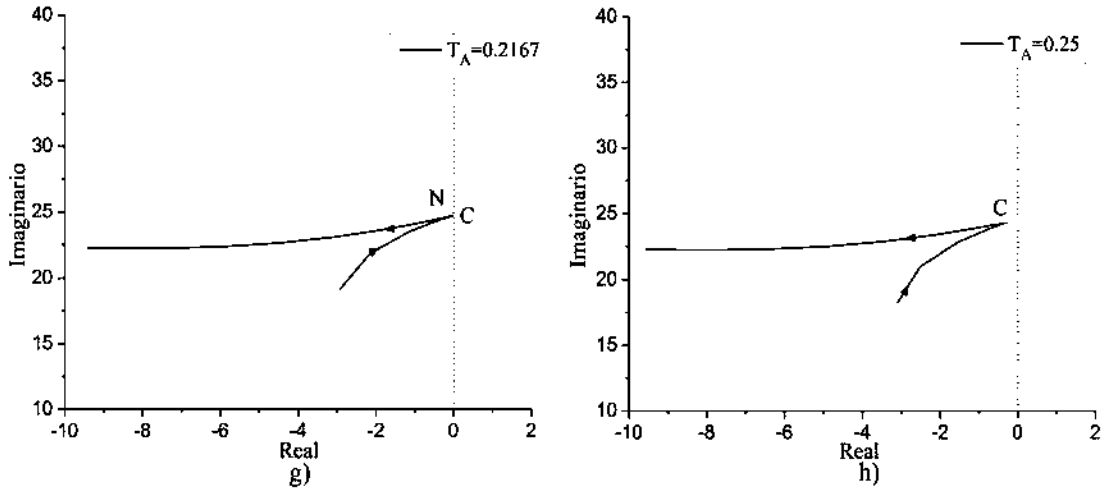


Figura 5.42 Movimiento de los eigenvalores relacionados con  $UHB_1$  y  $SHB_1$  para  $K_A=200$ .

En la Figura 5.43 se muestra que los lugares de intersección de  $T_A-C$  con el eje imaginario están asociados a los puntos de equilibrio obtenidos para valores de  $T_A=0.0292$  y  $T_A=0.2167$ . Cuando  $T_A$  es menor que 0.0292 o mayor que 0.2167, el punto  $C$  estará sobre la izquierda del eje imaginario. Cuando  $T_A$  esta en el rango de (0.0292, 0.2167), el punto  $C$  esta sobre la derecha del eje imaginario.

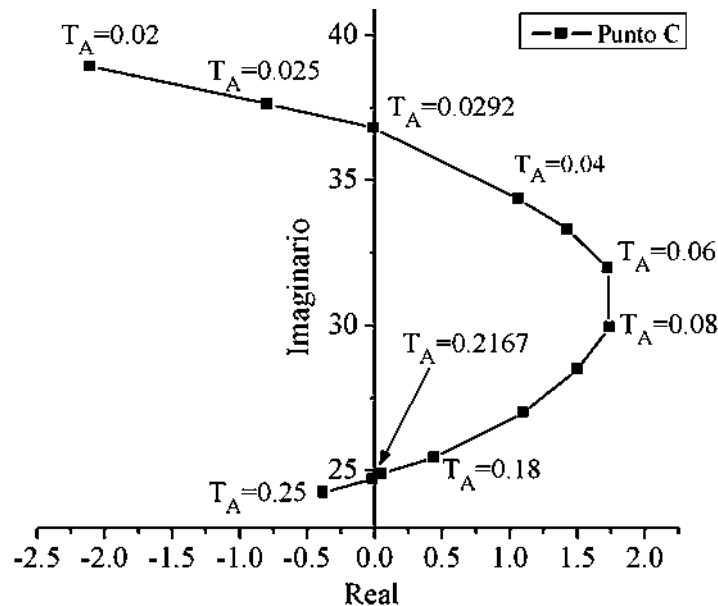
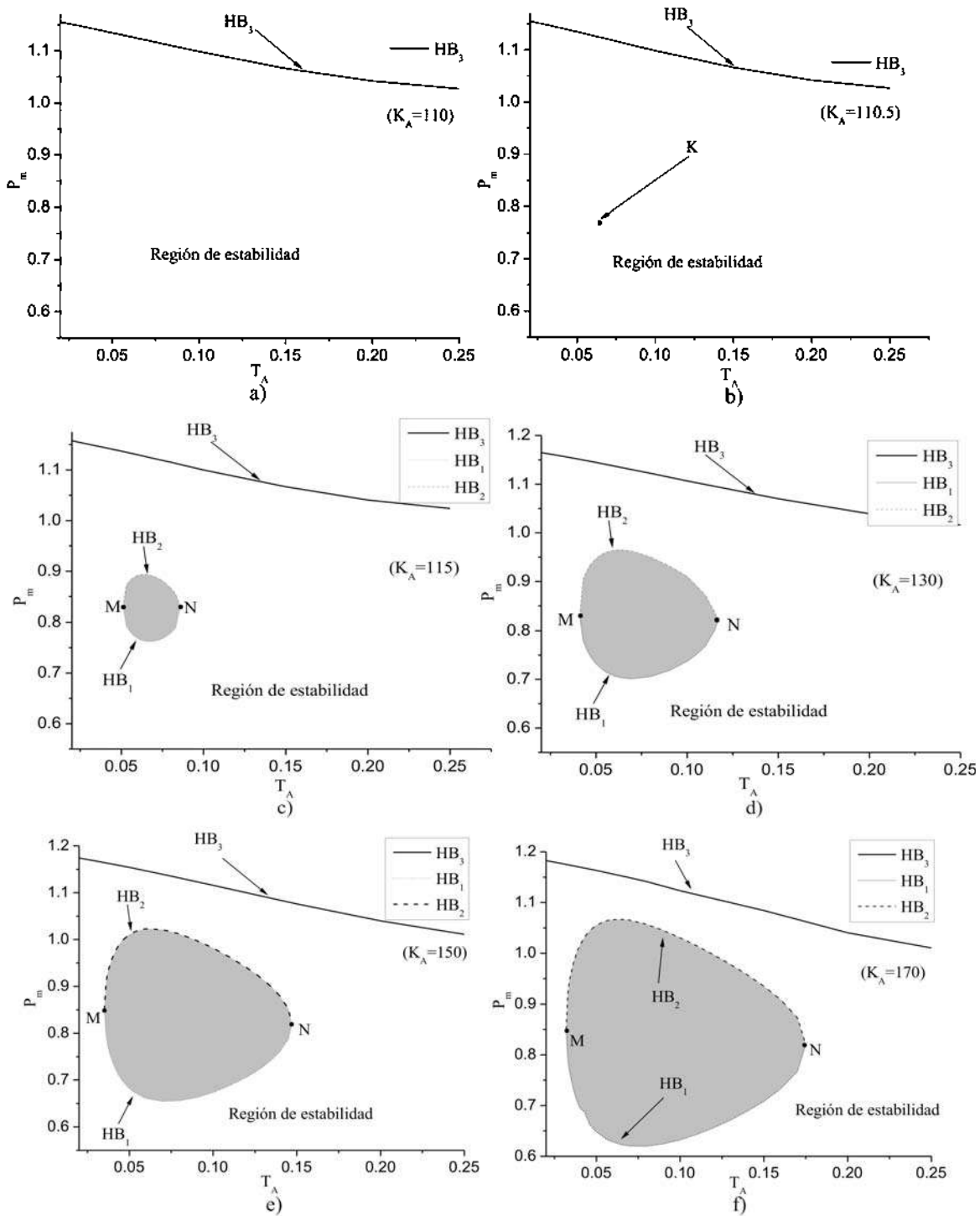


Figura 5.43 Posición del punto  $C$  de la Figura 5.42 cuando  $T_A$  incrementa.

En la Figura 5.44 se muestran algunas regiones de estabilidad cuando  $K_A$  se incrementa en el rango de [110-260]. En Figura 5.44a se muestra que la región es solamente limitada por la frontera de estabilidad  $HB_3$  asociada a la bifurcación Hopf  $SHB_2$  cuando  $K_A=110$ .



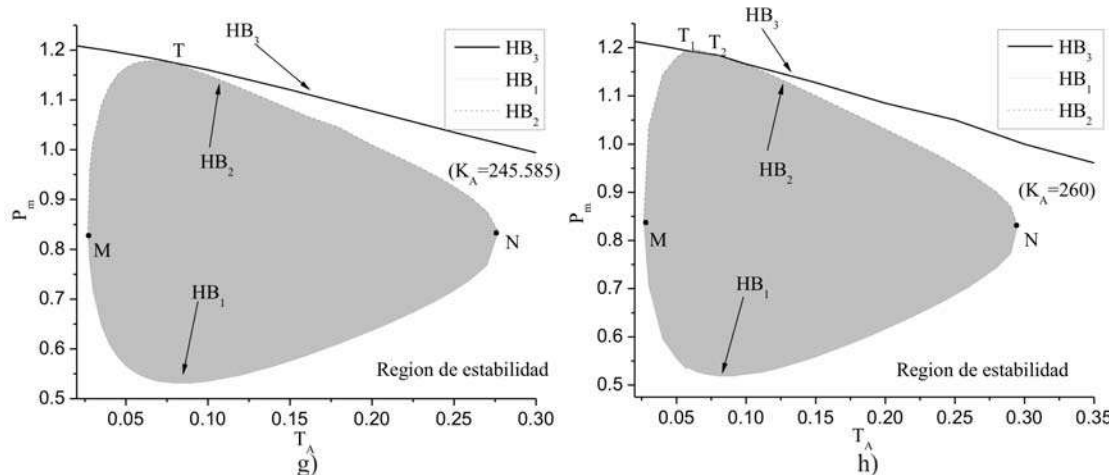


Figura 5.44 Regiones de estabilidad para diferentes valores de  $K_A$ .

En la Figura 5.45 se muestra la dinámica del voltaje de campo cuando el control no contiene limitador y cuando este control limita el voltaje de campo a un valor de 4.0 pu.

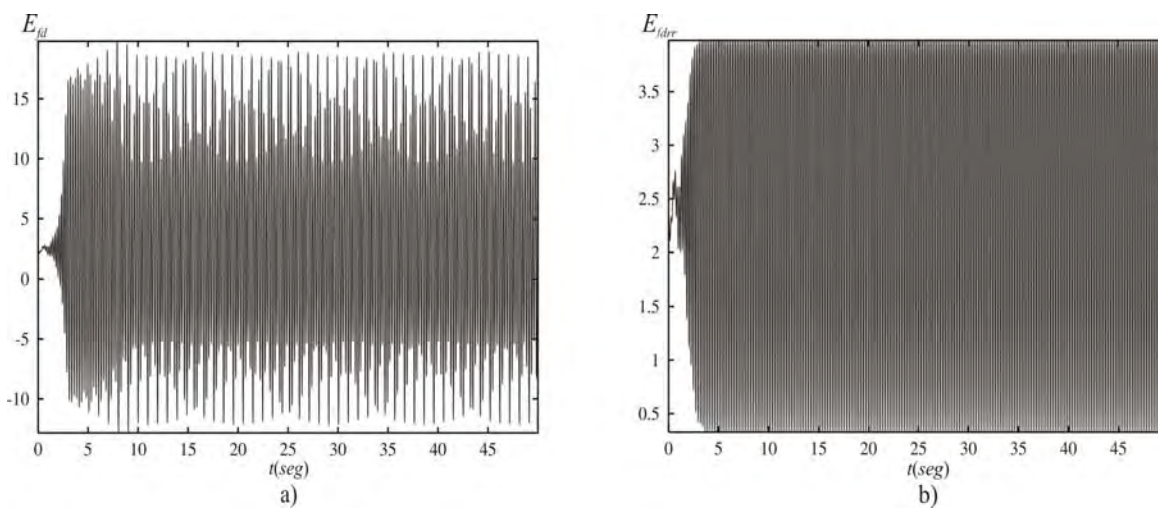


Figura 5.45 Voltaje de campo sin limitador a) y con limitador b).

Los diagramas  $T_A$ - $C$  considerando diferentes valores de  $K_A$  se muestran en la Figura 5.46, y son similares a aquellos mostrados en la Figura 5.34. La aparición del agujero inestable dentro de la región de estabilidad acontece a un valor de  $K_A=110.5$ , donde el punto  $C$  es tangente al eje imaginario y corresponde a un punto de equilibrio asociado a los parámetros  $(K_A, T_A, P_m) = (110.5, 0.065, 0.78)$ .

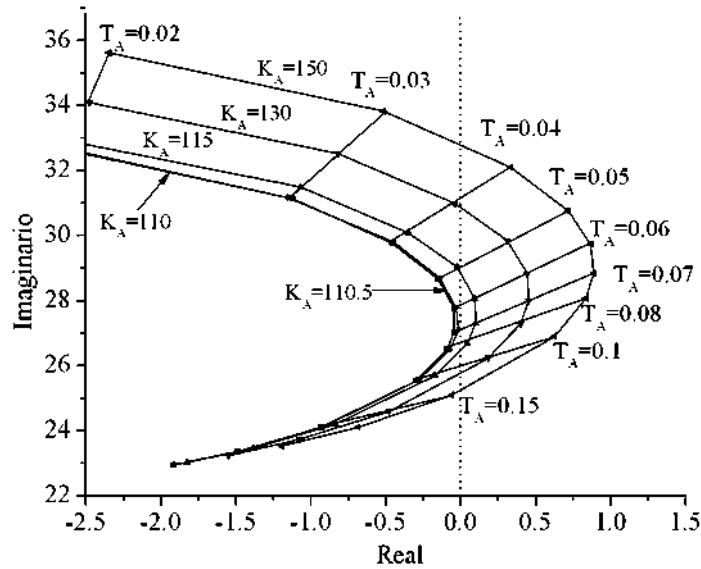


Figura 5.46 Posiciones de  $T_A$ -C para diferentes valores de  $K_A$ .

### 5.4.3 Caso de estudio con $E_{frdim}=5$

El diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 5.47 comienza del punto de equilibrio estable obtenido para los valores de los parámetros de bifurcación  $P_m=0.4pu$ ,  $T_A=0.05seg$  y  $K_A=200$ , y las condiciones iniciales de las variables de estado dadas por  $V_L=1.012pu$ ,  $\delta_L=0.1312rad$ ,  $\delta_m=0.868rad$ ,  $\omega=0rad/seg$ ,  $E_q=1.055pu$ ,  $E_{fdrr}=2.368pu$ .

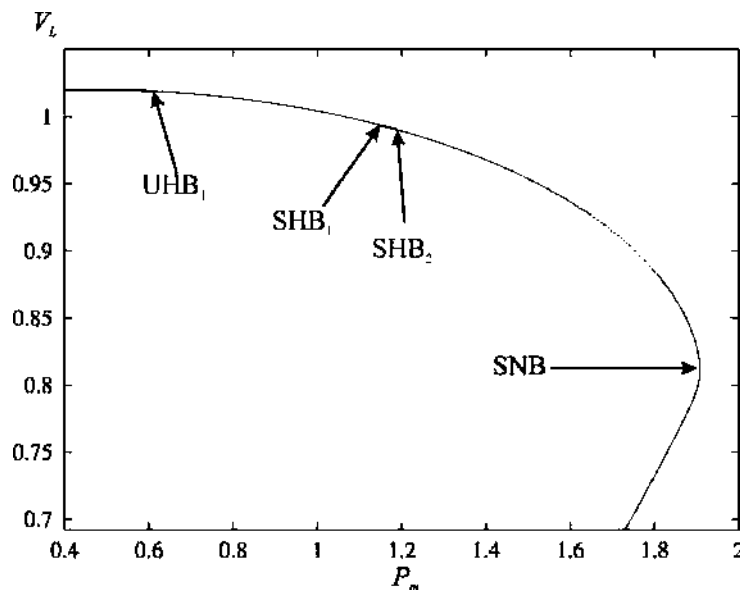


Figura 5.47 Diagrama de bifurcación para un valor limite de 5.

En la Tabla 5.9 se muestran todos los eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de  $E_{fdrr} = 5$  y en la Figura 5.48 se muestran las posiciones de los eigenvalores críticos del Jacobiano del sistema de ecuaciones linealizado conforme el parámetro de bifurcación  $P_m$  se incrementa, considerando fijos la constante de tiempo y ganancia del AVR en los valores  $T_A=0.05\text{seg}$  y  $K_A=200$ , respectivamente. La Figura 5.49 muestra al rectángulo que se muestra en la Figura 5.48.

Tabla 5.9 Eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de  $E_{fdrr} = 5$ .

1	$-39.8698 \pm 0.000i$
2	$-3.9379 \pm -31.1488i$
3	$-6.4641 \pm 0.000i$
4	$-1.0783 \pm -6.8387i$

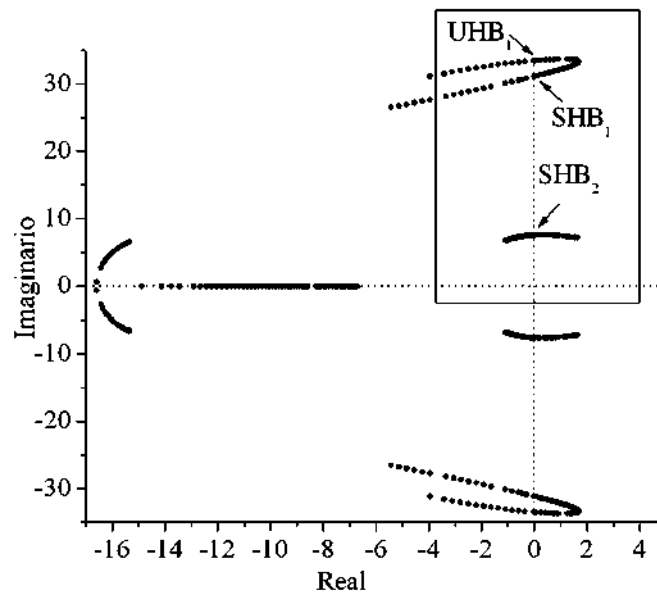


Figura 5.48 Movimiento de los eigenvalores cuando  $P_m$  se incrementa con  $T_A=0.05$  y  $K_A=200$ .

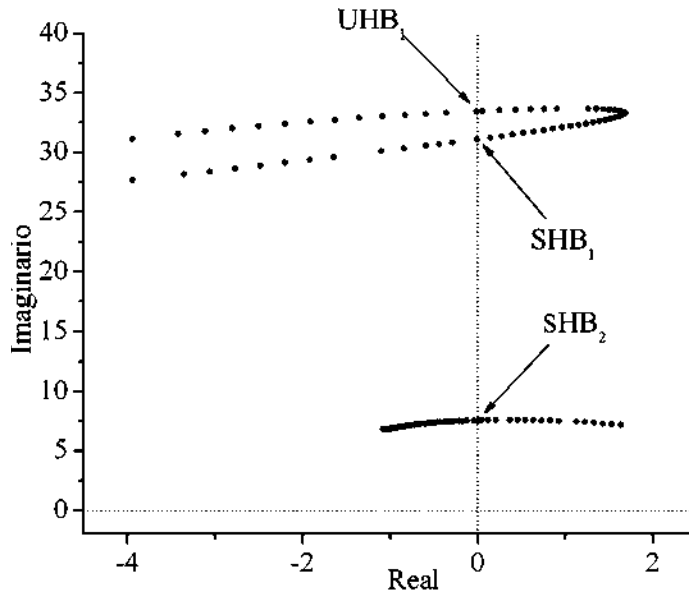


Figura 5.49 Vista alargada del rectángulo de la Figura 5.48.

La región de estabilidad mostrada en la Figura 5.50 se obtiene manteniendo el valor de ganancia del controlador en  $K_A=200$  y variando  $T_A$ . Las fronteras de estabilidad pasando a través de los puntos de equilibrio asociados a las bifurcaciones  $UHB_1$ ,  $SHB_1$  y  $SHB_2$  se denotan como  $HB_1$ ,  $HB_2$  y  $HB_3$ .

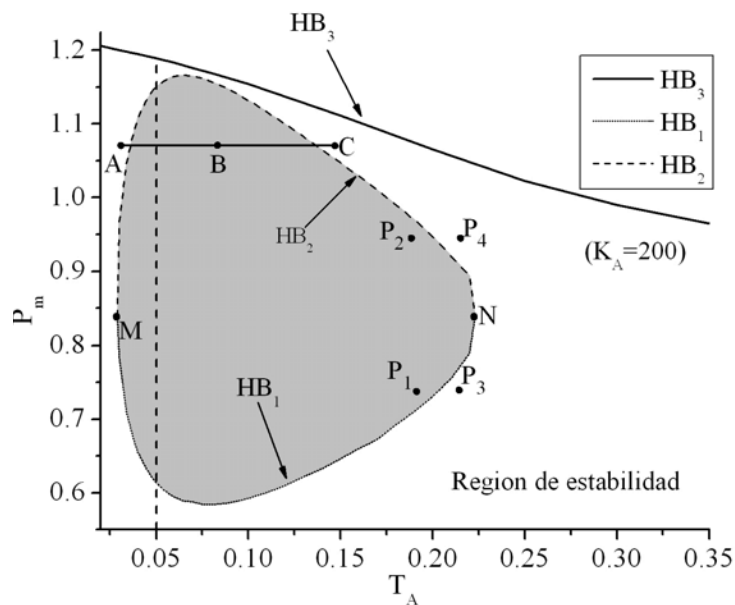
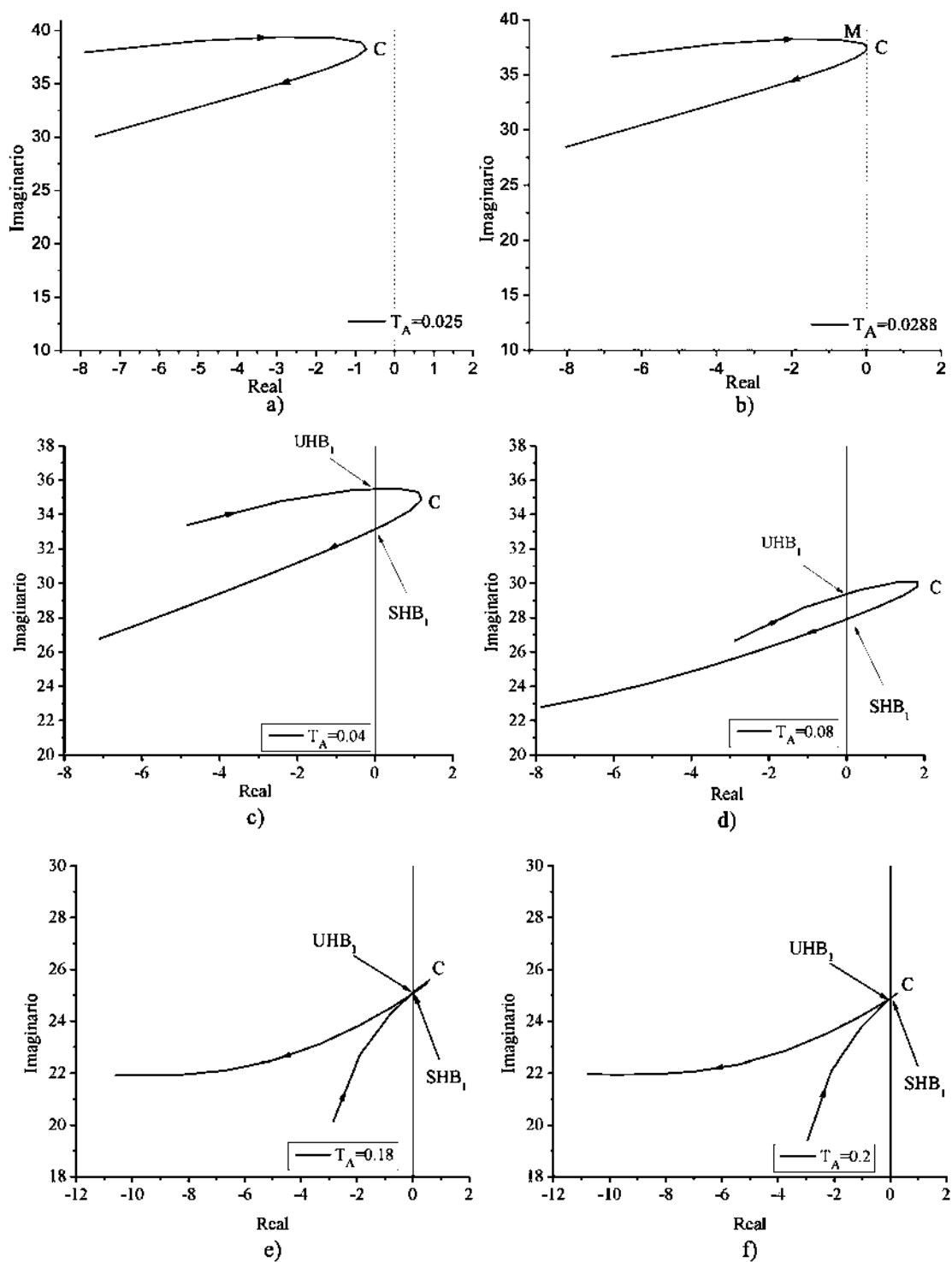


Figura 5.50 Región de estabilidad para  $K_A=200$ .

La Figura 5.51 muestra la posición de los eigenvalores complejos conjugados relacionados a las bifurcaciones  $UHB_1$  y  $SHB_1$  de la Figura 5.47. En esta figura se indica la posición del eigenvalor complejo más cercano al eje imaginario por la letra C.



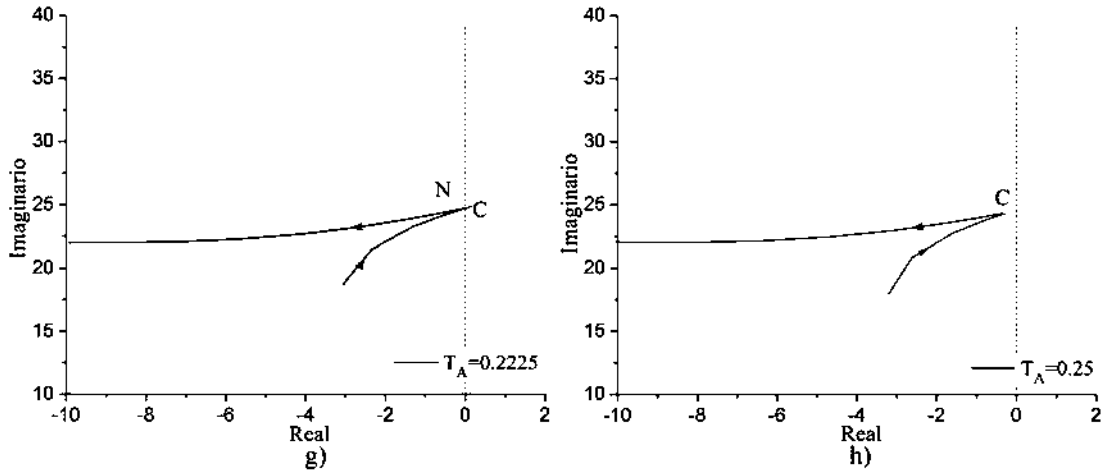


Figura 5.51 Movimiento de los eigenvalores relacionados con  $UHB_1$  y  $SHB_1$  para  $K_A=200$ .

En la Figura 5.52, se muestra el diagrama  $T_A$ -C con la finalidad de mostrar la intersección del punto C con el eje imaginario en los valores de la constante de tiempo del controlador dados por  $T_A=0.0288$  y  $T_A=0.2225$ . Cuando  $T_A$  es menor que 0.0288 o mayor que 0.2225, el punto C estará sobre la izquierda del eje imaginario. Cuando  $T_A$  esta en el rango de (0.0288, 0.2225), el punto C esta sobre la derecha del eje imaginario.

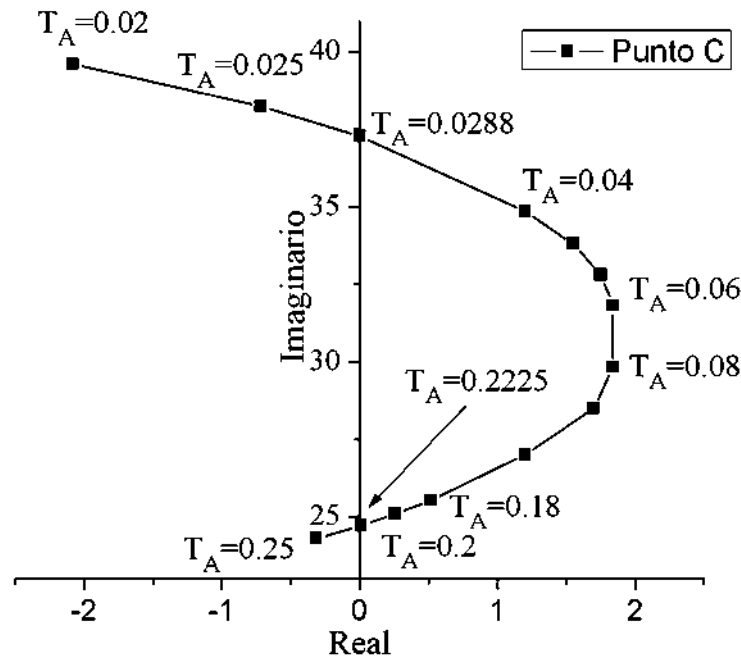


Figura 5.52 Posición del punto C de la Figura 5.51 cuando  $T_A$  incrementa.

En la Figura 5.53 se muestran algunas regiones de estabilidad cuando  $K_A$  se incrementa en el rango de [100-230].

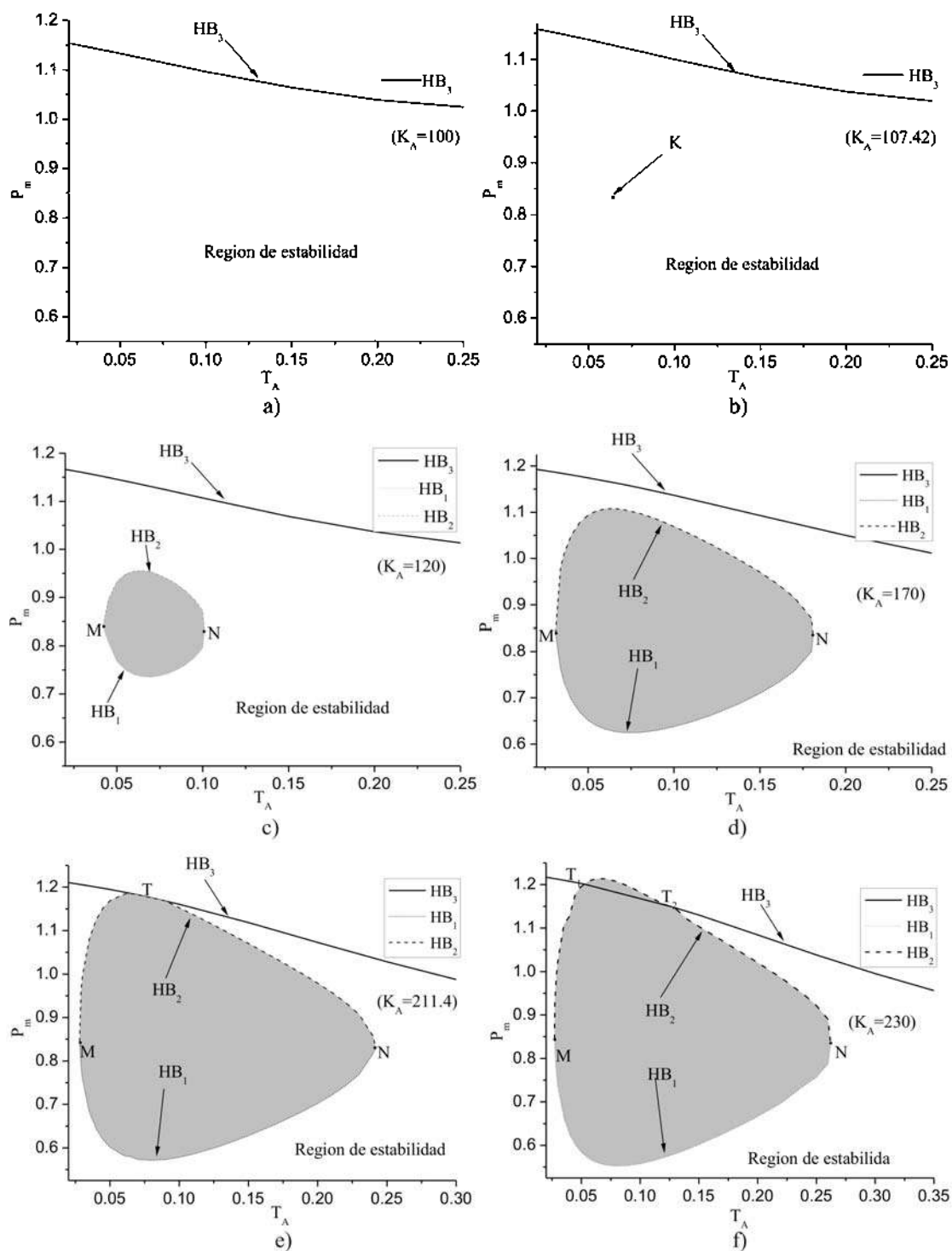


Figura 5.53 Regiones de estabilidad para diferentes valores de  $K_A$ .

En la Figura 5.54 se muestran el comportamiento dinámico del voltaje de campo sin y con limitador en el controlador.

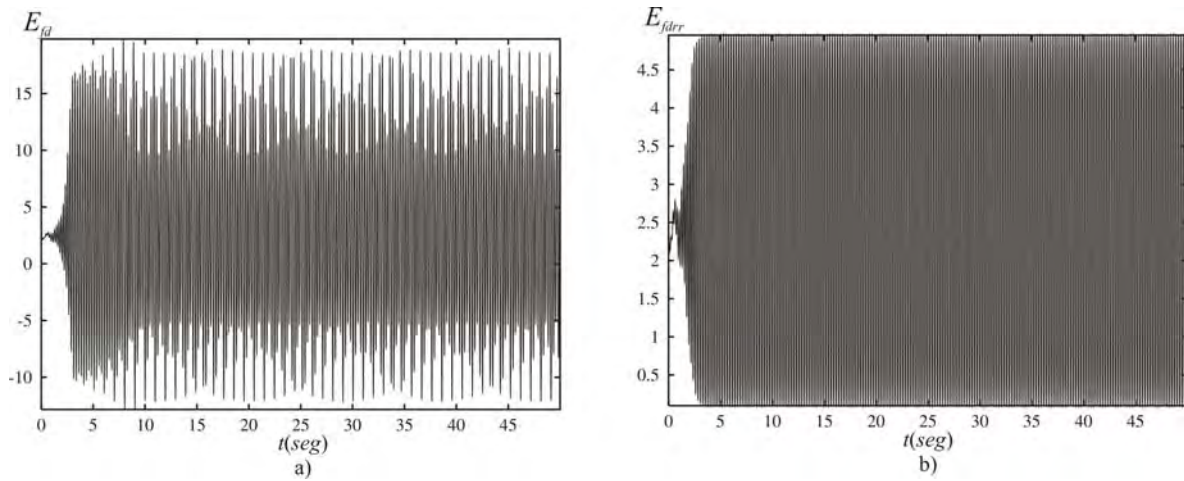


Figura 5.54 Voltaje de campo sin limitador a) y con limitador b).

Los diagramas  $T_A$ - $C$  considerando diferentes valores de  $K_A$  se muestran en la Figura 5.55, y son similares a aquellos mostrados en la Figura 5.52. La aparición del agujero inestable dentro de la región de estabilidad acontece a un valor de  $K_A=107.42$ , donde el punto  $C$  es tangente al eje imaginario y corresponde a un punto de equilibrio asociado a los parámetros  $(K_A, T_A, P_m) = (107.42, 0.065, 0.83)$ .

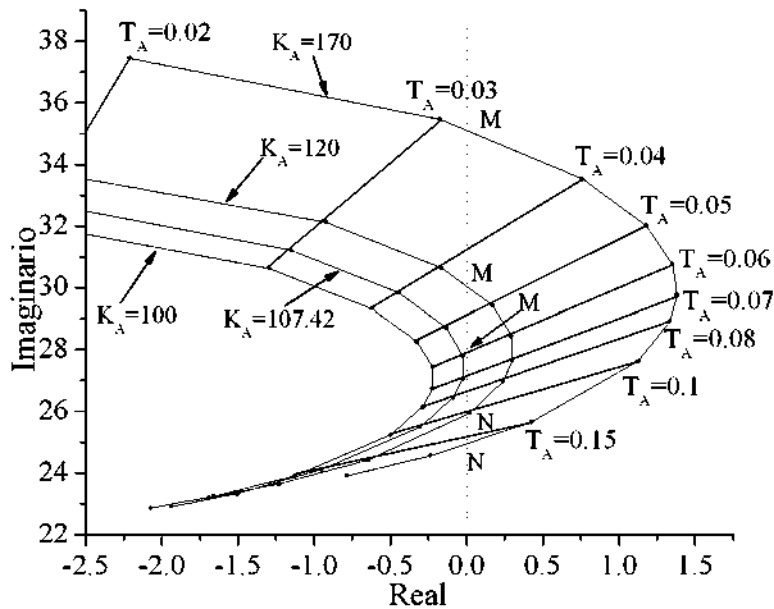


Figura 5.55 Posiciones de  $T_A$ - $C$  para diferentes valores de  $K_A$ .

#### 5.4.4 Análisis de resultados

En la Tabla 5.10 se muestran los diferentes valores de  $K_A$  y  $T_A$  para los cuales aparece el punto  $K$  inestable para los diferentes valores del limitador de voltaje de campo. Donde para el valor de  $E_{fdr\lim} = 3$  el área del agujero inestable nunca cruza a la curva  $HB_3$  en las simulaciones que se realizaron para los diferentes valores de  $K_A$ .

Tabla 5.10 Valores de  $K_A$  y  $T_A$  donde ocurre el punto  $K$ .

	$E_{fdr\lim} = 3$	$E_{fdr\lim} = 4$	$E_{fdr\lim} = 5$
$K_A$	153.63	110.5	107.42
$T_A$	0.03705	0.0292	0.0288

En la Figura 5.56 se muestran los diagramas de bifurcación para los valores 3, 4 y 5 del limitador con la finalidad de comparar las diferentes posiciones donde ocurren cada una de las bifurcaciones y así observar los efectos que tienen los limitadores de voltaje de campo sobre las bifurcaciones.

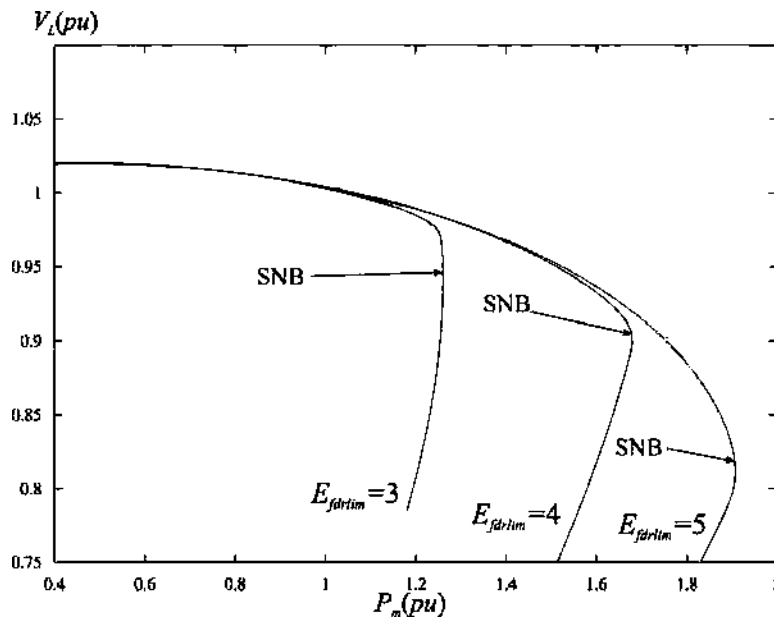


Figura 5.56 Diagramas de bifurcación para valores 3, 4 y 5 del limitador de campo.

En la Tabla 5.11 se muestran las posiciones de las bifurcaciones para los diferentes valores del limitador. En la Figura 5.56 se puede observar que a mayor valor del limitador de voltaje de campo el área de máxima cargabilidad es mayor.

Tabla 5.11 Posición de las bifurcaciones para los diferentes valores del limitador.

	$E_{fdr\lim} = 3$	$E_{fdr\lim} = 4$	$E_{fdr\lim} = 5$
$UHB_1$	$P_m = 0.6657$	$P_m = 0.6096$	$P_m = 0.6138$
$SHB_1$	$P_m = 0.9274$	$P_m = 1.1068$	$P_m = 1.1506$
$SHB_2$	$P_m = 1.1487$	$P_m = 1.1760$	$P_m = 1.1894$
$SNB$	$P_m = 1.2600$	$P_m = 1.6788$	$P_m = 1.9073$

### 5.5 Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica tipo II incluyendo un StatCom en paralelo con la carga.

En esta sección se analiza el efecto de sustituir el capacitor conectado en derivación con la carga, Figura 5.12, por un Statcom conectado de manera similar, como se ilustra en la Figura 5.57. Contrario a la inyección de potencia reactiva del capacitor, cuyo valor depende directamente de la magnitud de voltaje en el nodo de carga, el StatCom inyecta un valor de potencia reactiva constante, independientemente de la magnitud de este voltaje. Para propósitos de análisis, se especifican tres diferentes inyecciones constantes de potencia reactiva dadas por 0.2 pu, 0.3 pu y 0.4 pu. El análisis se realiza con el sistema de excitación sin limitador con la finalidad de observar el efecto del StatCom comparado con el modelo de la sección 5.3.

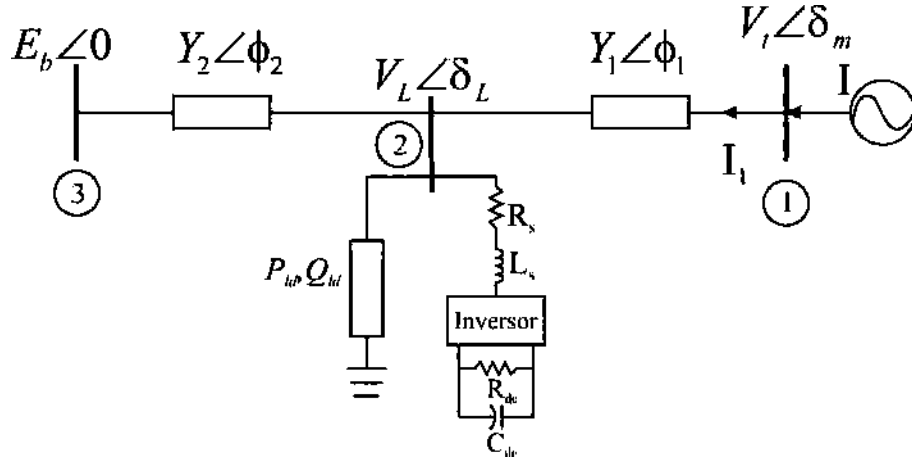


Figura 5.57 Sistema de potencia incluyendo un StatCom en paralelo con la carga.

La representación matemática del sistema eléctrico mostrado en la Figura 5.57 es dada por el siguiente conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico no lineal.

Las ecuaciones diferenciales del sistema sin considerar al StatCom son:

$$\dot{\delta}_m = \omega_B s_m \quad (5.32)$$

$$\dot{s}_m = \frac{-Ds_m + P_m - P_{ge}}{2H} \quad (5.33)$$

$$s_m = \frac{\omega - \omega_B}{\omega_B} \quad (5.34)$$

$$\dot{E}'_q = \frac{-E'_q + (x_d - x'_d)I_d + E_{fd}}{T'_{d0}} \quad (5.35)$$

$$\dot{E}_{fd} = \frac{-E_{fd} + K_A(V_{ref} - V_t)}{T_A} \quad (5.36)$$

$$\dot{\delta}_L = (Q - Q_{ld} - Q_0 - q_2 V_L - q_3 V_L^2) / q_1 \quad (5.37)$$

$$\dot{V}_L = [P - P_{ld} - P_0 - p_1(Q - Q_{ld} - Q_0 - q_2 V_L - q_3 V_L^2) / q_1 - p_3 V_L] / p_2 \quad (5.38)$$

Las ecuaciones algebraicas son:

$$P_g = E'_q i_q + E'_d i_d + (x'_d - x'_q) i_d i_q \quad (5.39)$$

$$I_q = \frac{\cos \phi \cdot (Y \cdot E'_q - a) + (Y \cdot E'_d - b) \cdot (Y \cdot x'_d - \sin \phi)}{-\cos^2 \phi + (\sin \phi - Y \cdot x'_d) \cdot (-\sin \phi + Y \cdot x'_q)} \quad (5.40)$$

$$I_d = \frac{\cos \phi \cdot (Y \cdot E'_d - b) + (Y \cdot E'_q - a) \cdot (\sin \phi - Y \cdot x'_q)}{-\cos^2 \phi + (\sin \phi - Y \cdot x'_d) \cdot (-\sin \phi + Y \cdot x'_q)} \quad (5.41)$$

$$W_p = \frac{X'_q - X_q}{\cos^2 \phi - B_p \cdot A_p} \quad (5.42)$$

$$A_p = Y \cdot X'_q - \sin \phi \quad (5.43)$$

$$B_p = \sin \phi - Y \cdot X'_d \quad (5.44)$$

$$E'_d = \frac{W_p \cdot [Y \cdot \cos \phi \cdot E'_q + (b \cdot B_p - a \cdot \cos \phi)]}{1 + W_p \cdot Y \cdot B_p} \quad (5.45)$$

$$|\hat{V}_t| = \sqrt{(v_q^2 + v_d^2)} \quad (5.46)$$

$$\theta = \delta_m + \tan^{-1} \left( \frac{v_d}{v_q} \right) \quad (5.47)$$

$$E'_q + x'_d i_d = v_q \quad (5.48)$$

$$E'_d - x'_q i_q = v_d \quad (5.49)$$

Las potencias  $P$  y  $Q$  están descritas por las ecuaciones de flujos de potencia expresadas en forma polar por las ecuaciones (5.50) y (5.51).

$$P = V_r V_L Y_1 \cos(r_1) - V_L^2 Y_1 \cos(\phi_1) + E_b V_L Y_2 \cos(r_2) - V_L^2 Y_2 \cos(\phi_2) + V(I_{d1} \cos \delta + I_{q1} \sin \delta) \quad (5.50)$$

$$Q = V_r V_L Y_1 \sin(r_1) + V_L^2 Y_1 \sin(\phi_1) + E_b V_L Y_2 \sin(r_2) + V_L^2 Y_2 \sin(\phi_2) + V(I_{d1} \sin \delta - I_{q1} \cos \delta) \quad (5.51)$$

En la parte derecha de las ecuaciones (5.50) y (5.51), el quinto elemento es la potencia intercambiada entre el Statcom y el sistema eléctrico.

La dinámica del Statcom y su control es descrita por las siguientes ecuaciones diferencial-algebraicas [Schauder93] y [Lehn02]:

$$\dot{I}_{d1} = -\frac{R_s}{L_s} I_{d1} + \omega I_{q1} + \frac{k}{L_s} \cos(\alpha + \delta) V_{dc} - \frac{V}{L_s} \cos \delta \quad (5.52)$$

$$\dot{I}_{q1} = -\frac{R_s}{L_s} I_{q1} - \omega I_{d1} + \frac{k}{L_s} \operatorname{sen}(\alpha + \delta) V_{dc} - \frac{V}{L_s} \operatorname{sen} \delta \quad (5.53)$$

$$\dot{V}_{dc} = \left( \frac{1}{C} \right) \left( -k \cos(\alpha + \delta) I_{d1} - k \operatorname{sen}(\alpha + \delta) I_{q1} - \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \right) \quad (5.54)$$

El diagrama de bloques del sistema de control del StatCom fue explicado en el capítulo 2 y sus ecuaciones son las siguientes [Dong04]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_{2v} (V_{dc}^* - V_{dc}) \\ \Delta i_d &= k_{1v} (V_{dc}^* - V_{dc}) + x_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2 &= k_{2p} \Delta i_d \\ k_1 &= k_{1p} \Delta i_d + x_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_3 &= k_{2q} \left( \frac{Q_{ac} - Q_{ac}^*}{V} \right) \\ \alpha_1 &= k_{1q} \left( \frac{Q_{ac} - Q_{ac}^*}{V} \right) + x_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

Las ecuaciones de los limitadores del control son [Dong04]:

$$\begin{aligned} k &= k_{\lim} \tanh \left( \frac{k_1}{k_{\lim}} \right) \\ \alpha &= \alpha_{\lim} \tanh \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_{\lim}} \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

En base a las ecuaciones expresadas, se tiene el vector de variables de estado dado por  $x = [\delta, s_m, E'_q, E'_{fd}, \delta_L, V_L, I_{d1}, I_{q1}, V_{dc}, x_1, x_2, x_3]^T \in R^{12}$ , el vector de variables algebraicas dado por  $y = [P_g, I_d, I_q, E'_d, V_t, v_d, v_q, P, Q, \Delta I_{d1}, k_1, \alpha_1]^T \in R^{12}$ , y el vector de parámetros de bifurcación  $p = [T_A, P_m, K_A]^T \in R^3$ . La Tabla 5.12 contiene los valores de los parámetros usados en los análisis presentados, así como los rangos en los cuales se varían cada uno de los parámetros de bifurcación.

Tabla 5.12 Valores de parámetros para el sistema de potencia incluyendo un StatCom.

$P_m = [0.4 - 3] pu$		$T_A = [0.02 - 0.3] seg$		$K_A = [100 - 280]$	
$Y_1 = 4.9752 pu$	$Y_2 = 1.6584 pu$	$\phi_1 = -1.4711 rad$	$\phi_2 = -1.4711 rad$	$E_b = 1 pu$	
$E_m = 1 pu$	$x_d = 1.79 pu$	$x_q = 1.71 pu$	$x'_d = 0.169 pu$	$x'_q = 0.23 pu$	
$T'_{d0} = 4.3 seg$	$H = 2.894 seg$	$\omega_B = 377 rad / seg$	$D = 0.05 pu$	$P_0 = 0.4 pu$	
$Q_0 = 0.8 pu$	$P_1 = 0.24 pu$	$q_1 = -0.02 pu$	$p_2 = 1.7 pu$	$q_2 = -1.866 pu$	
$p_3 = 0.2 pu$	$q_3 = 1.6 pu$	$Q_{fd} = 0 pu$	$P_{fd} = 0 pu$	$B_c = 0.2 pu$	
$R_s = 0.01 pu$	$L_s = 0.1 pu$	$C = 0.7 pu$	$R_{dc} = 22 pu$	$k_{2p} = -0.05$	
$k_{2v} = 0.01$	$k_{2q} = 0.15$	$k_{1p} = 0.1$	$k_{1v} = 0.1$	$k_{1q} = 0.3$	
$k_{lim} = 1$	$alf_{lim} = 1 pu$	$V_{dcref} = 1.951 pu$			

### 5.5.1 Inyección de potencia reactiva con un valor de $Q_{ac}=0.2 pu$

La Figura 5.58 muestra el diagrama de bifurcación  $P_m-V_L$  obtenido a partir del punto de equilibrio estable calculado en base a las siguientes condiciones iniciales  $V_L = 1.012 pu, \delta_L = 0.1312 rad, \delta_m = 0.8684 rad, \omega = 0 rad / seg, E'_q = 1.0556 pu, x_1 = 0 pu, E'_{fd} = 2.3684 pu, I_{d1} = -0.21302 pu, I_{q1} = -0.1521 pu, V_{dc} = 1.95 pu, x_2 = 0.5734 pu, x_3 = -0.001955 pu$  y considerando constantes la ganancia y la constante de tiempo del control de voltaje de campo en  $T_A=0.05$  y  $K_A=200$ .

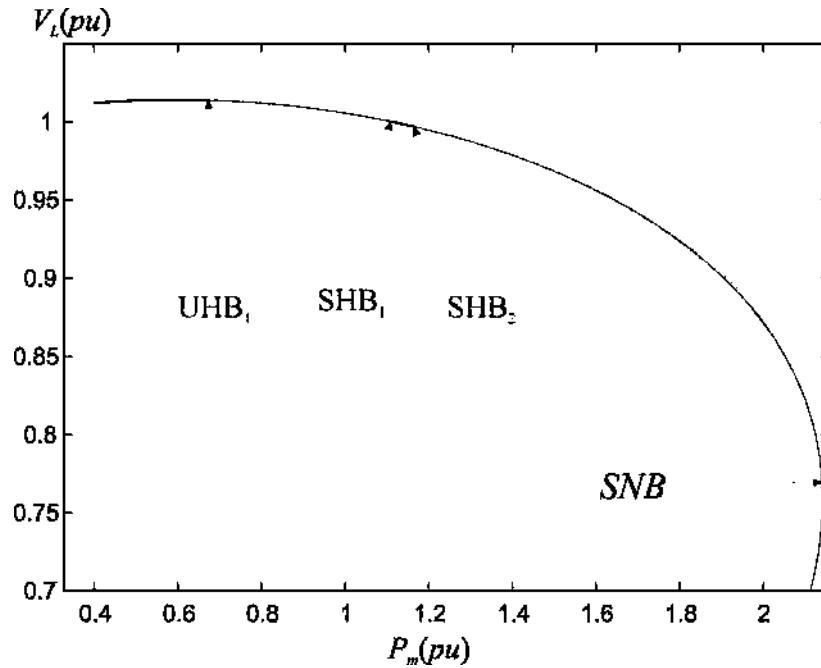


Figura 5.58 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia incluyendo un StatCom.

En la Tabla 5.13 se muestran todos los eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de  $Q_{ac}^* = 0.2 pu$  y en la Figura 5.59 se muestran las posiciones de los eigenvalores críticos del Jacobiano del sistema de ecuaciones linealizado conforme el parámetro de bifurcación  $P_m$  se incrementa, considerando fijos la constante de tiempo y ganancia del AVR en los valores  $T_A=0.05seg$  y  $K_A=200$ , respectivamente. La Figura 5.60 muestra al rectángulo que se muestra en la Figura 5.59, que son los eigenvalores 2 y 3 de la Tabla 5.12.

Tabla 5.13 Eigenvalores del Jacobiano del sistema para un valor de  $Q_{ac}^* = 0.2 pu$ .

1	$-40.0989 \pm 0.000i$
2	$-4.5356 \pm 31.5641i$
3	$-0.9638 \pm 6.9993i$
4	$-7.5581 \pm 0.0000i$
5	$-0.2995 \pm 1.9073i$
6	$-2.1400 \pm 0.0000i$
7	$-0.6025 \pm 0.0000i$
8	$-0.0054 \pm 0.0369i$

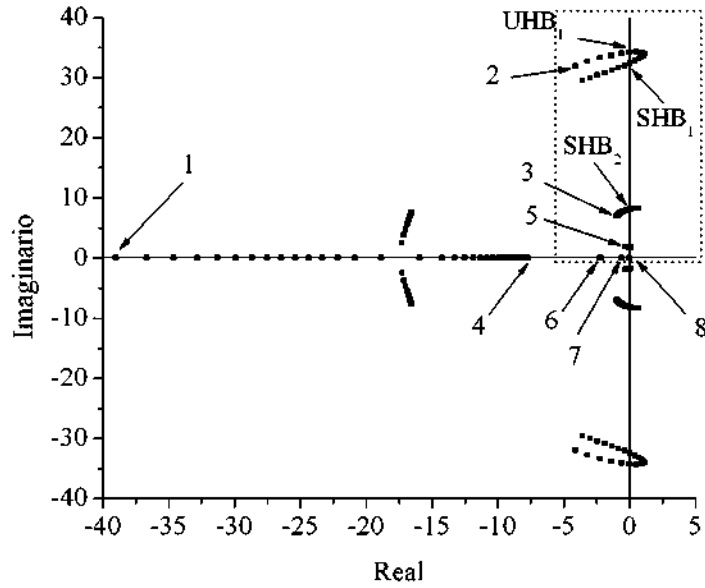


Figura 5.59 Movimiento de los eigenvalores cuando  $P_m$  se incrementa con  $T_A=0.05$  y  $K_A=200$ .

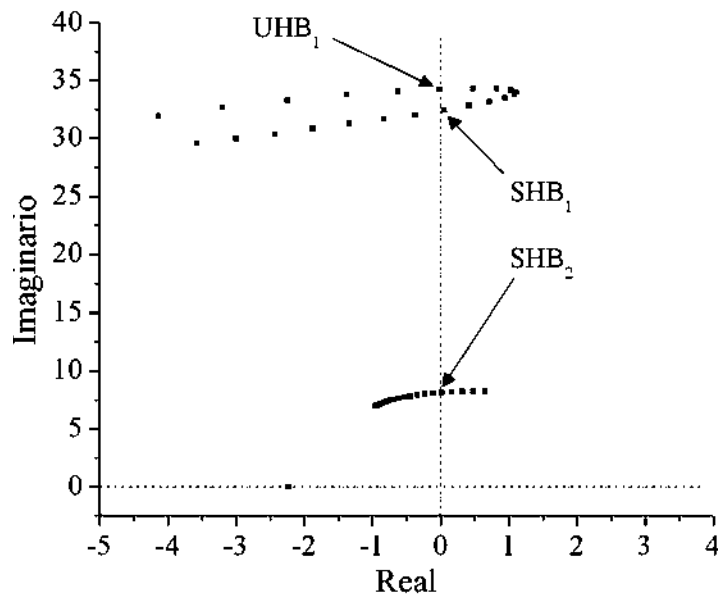


Figura 5.60 Vista alargada del rectángulo de la Figura 5.58.

En la Figura 5.61 se muestra el agujero inestable dentro de la región de estabilidad, donde se indican los puntos donde acontecen las bifurcaciones Hopf  $UHB_1$ ,  $SHB_1$  y  $SHB_2$  que corresponden a las curvas denotadas como  $HB_1$ ,  $HB_2$  y  $HB_3$  respectivamente. En estas simulaciones se varió  $T_A$  en el rango de  $[0.01-0.25]$  y  $P_m$  en el rango de  $[0.4-2.1]$ , y el valor de la ganancia del controlador  $K_A$  se mantuvo constante al valor de 200.

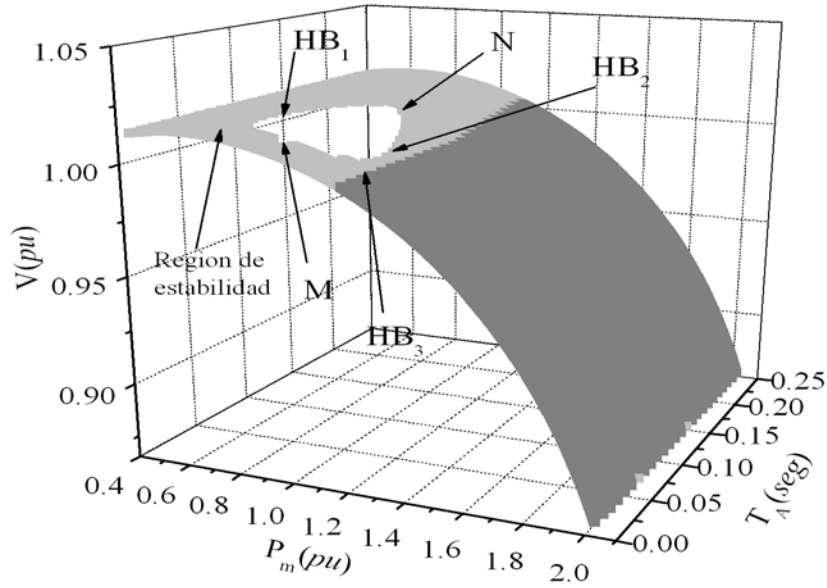


Figura 5.61 Superficie del diagrama de bifurcación variando  $P_m$  y  $T_A$ .

La región de estabilidad mostrada en la Figura 5.62 se obtiene manteniendo fijo el valor de  $K_A$  a 200 y variando  $T_A$ . Las fronteras de estabilidad pasando a través de los puntos de equilibrio asociados a las bifurcaciones  $UHB_1$ ,  $SHB_1$  y  $SHB_2$  se denotan como  $HB_1$ ,  $HB_2$  y  $HB_3$ . Es importante observar que la frontera de estabilidad asociada a la bifurcación  $HB_3$  se mantiene a un valor constante de  $P_m$ , cuando los valores de la constante de tiempo del AVR,  $T_A$ , están dentro del rango de [0.02-0.1].

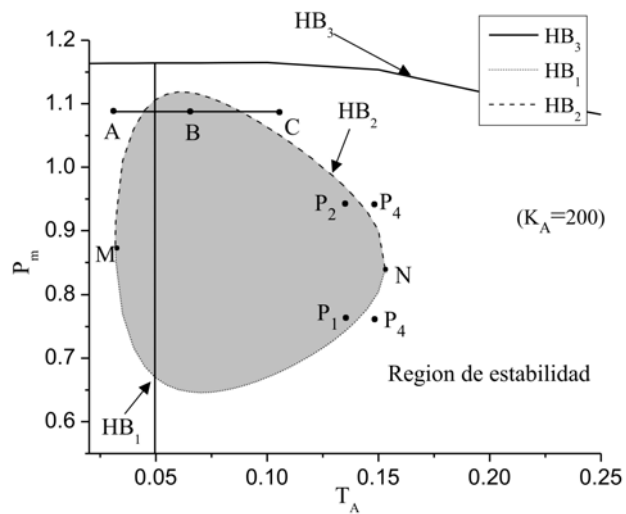


Figura 5.62 Región de estabilidad para  $K_A=200$ .

Las Figura 5.63 y Figura 5.64 muestran las simulaciones dinámicas asociadas al comportamiento del ángulo de voltaje en el nodo generador cuando se consideran como condiciones iniciales puntos de equilibrio contenidos en el hoyo inestable y en la región de estabilidad respectivamente. Estos puntos de equilibrio se muestran en la Figura 5.62 y son definidos como  $P_1$  y  $P_2$  para el hoyo inestable, y para la región de estabilidad como  $P_3$  y  $P_4$ .

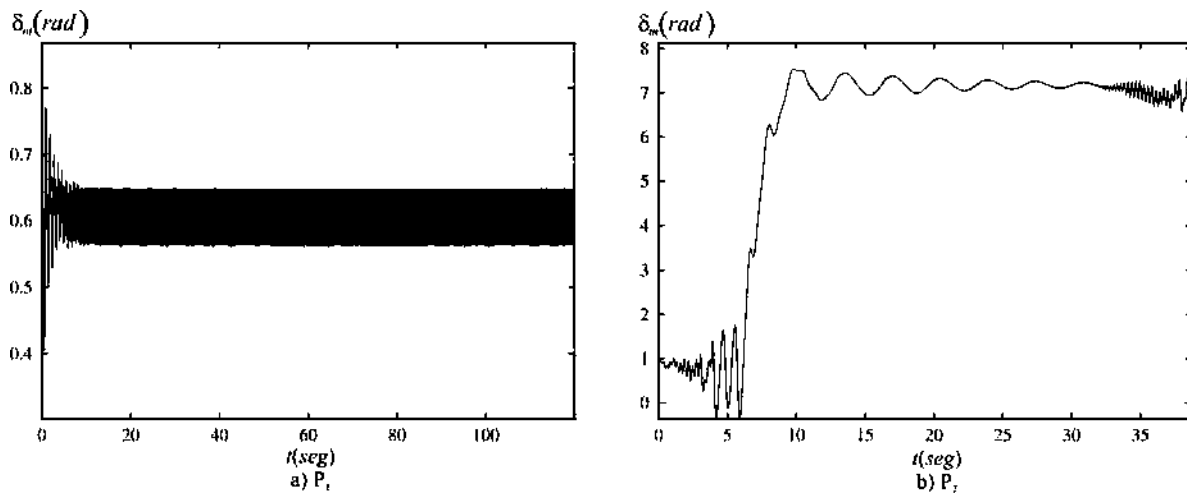


Figura 5.63 Resultados de la simulación de  $P_1$  (a) y  $P_2$  (b).

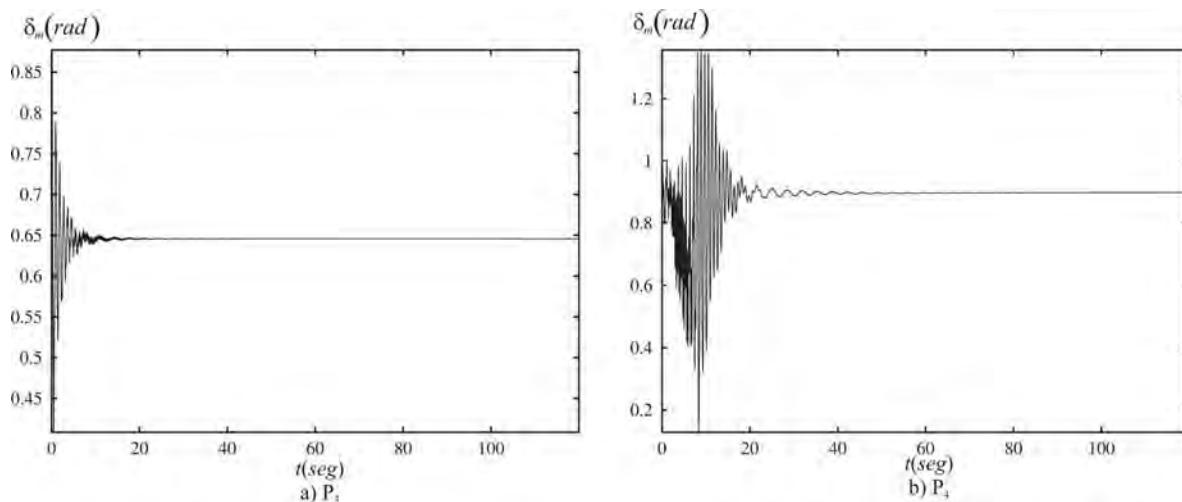
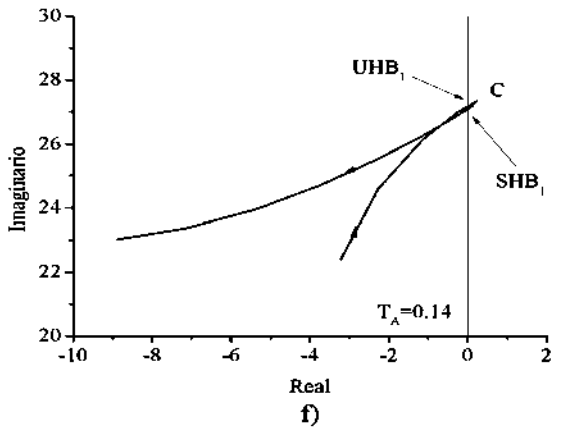
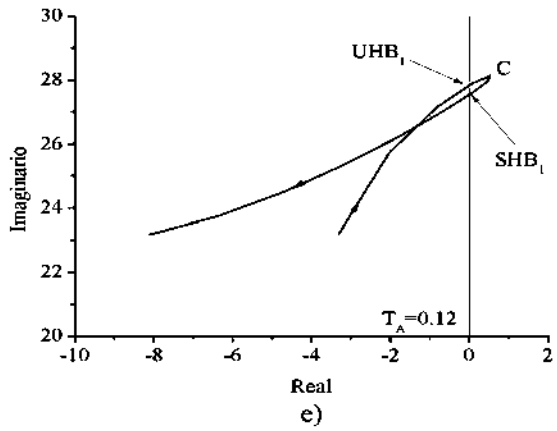
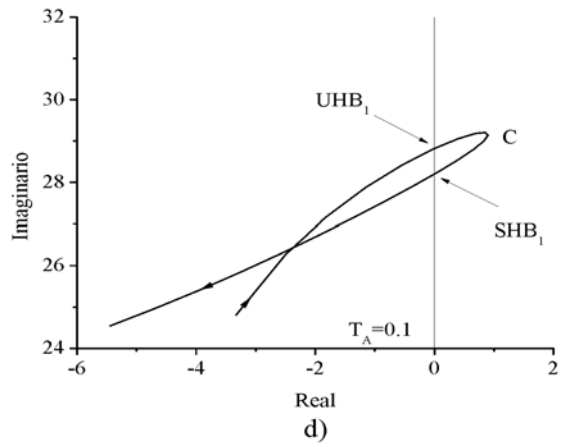
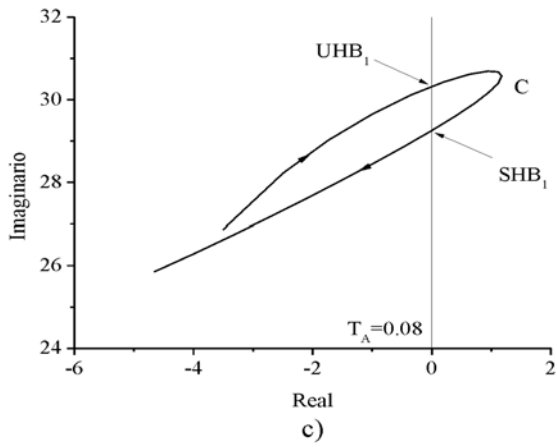
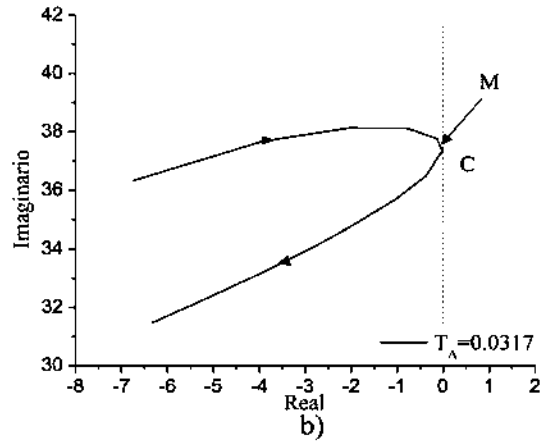
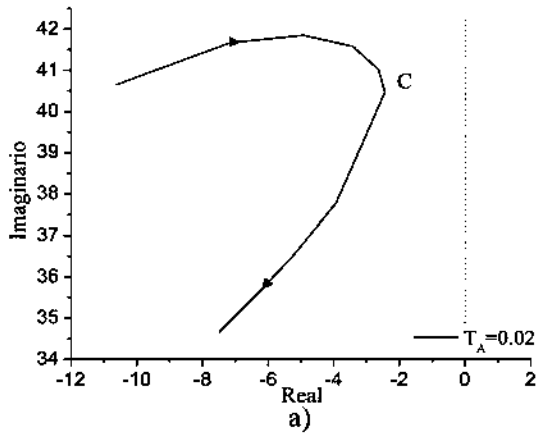


Figura 5.64 Resultados de la simulación de  $P_3$  (a) y  $P_4$  (b) .

La Figura 5.65 muestra la posición de los eigenvalores conjugados relacionados a las bifurcaciones  $UHB_1$  y  $SHB_1$  de la Figura 5.58. En cada diagrama existe un eigenvalor cuya parte real es la más próxima al eje imaginario, y que es denotado por el punto C.



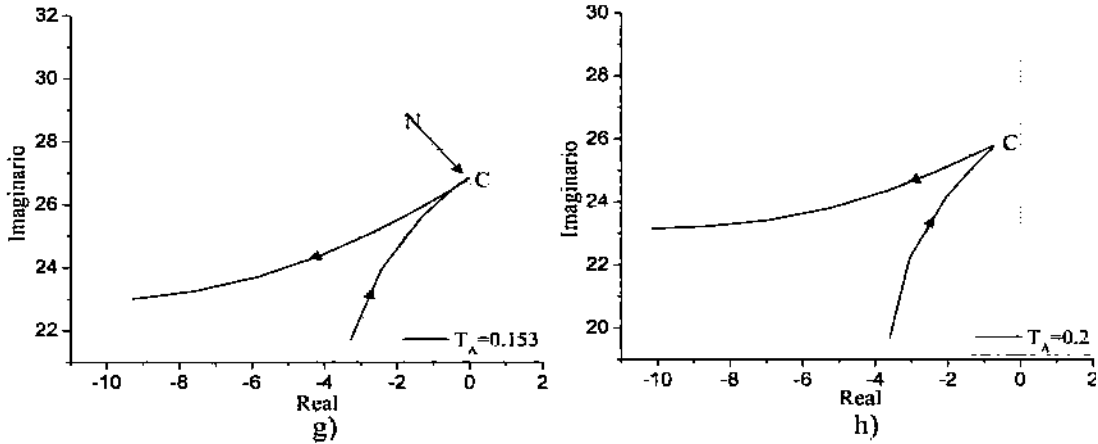


Figura 5.65 Movimiento de los eigenvalores relacionados con  $UHB_1$  y  $SHB_1$  para  $K_A=200$ .

En la Figura 5.66 se muestra el diagrama  $T_A$ -C con la finalidad de mostrar la intersección del punto C con el eje imaginario.

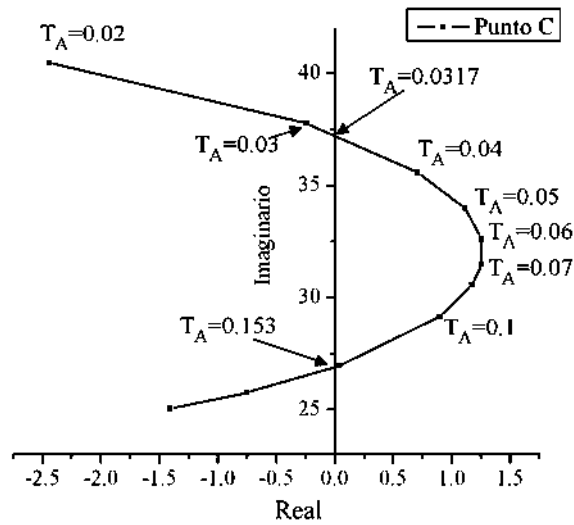


Figura 5.66 Posición del punto C de la Figura 5.65 cuando  $T_A$  incrementa.

En la Figura 5.67 se muestran algunas regiones de estabilidad cuando  $K_A$  se incrementa en el rango de [120-249]. En la Figura 5.67a se observa que al especificar la ganancia del controlador a un valor cuando  $K_A=120$ , la región de estabilidad es solamente limitada por la frontera  $HB_3$  asociada al conjunto de puntos donde ocurre la bifurcación Hopf  $SHB_2$ . Cuando  $K_A$  se incrementa al valor de 137.6025, un punto  $K$  inestable aparece, como se indica por la flecha en la Figura 5.67b. Conforme el valor de  $K_A$  se incrementa

continuamente, el área del agujero inestable aumenta cada vez mas, como se muestra en las Figura 5.67c-Figura 5.67f.

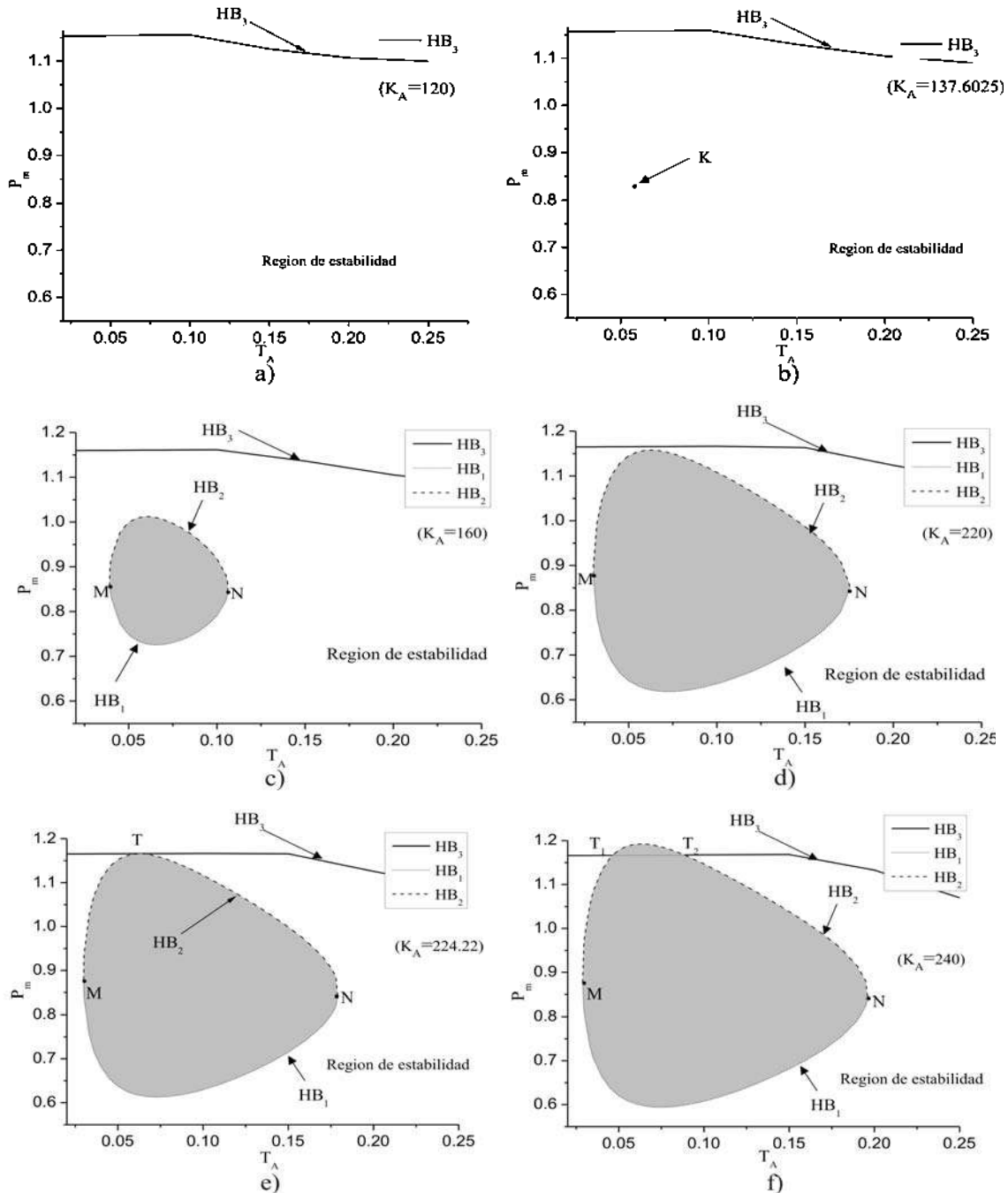


Figura 5.67 Regiones de estabilidad para diferentes valores de  $K_A$ .

En la Figura 5.68 se grafican algunas posiciones de  $T_A-C$  para diferentes valores de  $K_A$ , que son similares a los resultados mostrados en la Figura 5.66. Se encontró que cuando  $K_A$  es menor que 137.6025, es decir  $K_A=120$ , todas las posiciones de  $T_A-C$  están sobre la izquierda del eje imaginario. Ningún punto sobre la curva  $T_A-C$  está sobre la derecha del eje imaginario. No hay puntos inestables (agujeros) dentro de la región de estabilidad. Incrementando  $K_A$ , las posiciones de  $T_A-C$  se mueven hacia la derecha. Cuando  $K_A$  se incrementa alrededor de  $K_A=137.6025$ , las posiciones de  $T_A-C$  son tangentes al eje imaginario en el punto  $(K_A, T_A, P_m) = (137.6025, 0.06, 0.85)$ . De acuerdo al análisis de las Figura 5.65 y Figura 5.66, se observa que hay un par de eigenvalores complejos conjugados tangentes al eje imaginario en el punto  $K_A=137.6025$ . Tal que existe un punto crítico dentro de la región de estabilidad, que es el punto  $K$  en la Figura 5.67b.

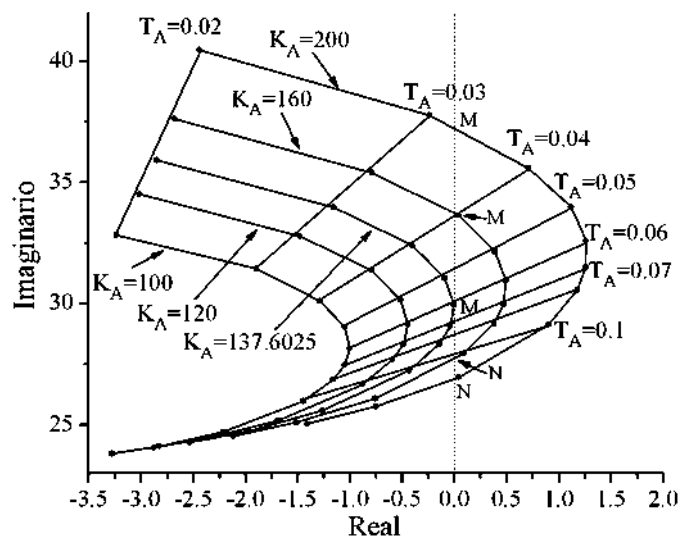


Figura 5.68 Posiciones de  $T_A-C$  para diferentes valores de  $K_A$ .

Los escenarios con  $137.6025 < K_A < 240$  son similar a los resultados de la Figura 5.66. La curva  $T_A-C$  tiene dos puntos que cruzan el eje imaginario es decir los puntos  $M$  y  $N$ . Hay dos bifurcaciones Hopf degeneradas  $UHB_1$  y  $SHB_1$  que causan la unión de las fronteras de estabilidad  $HB_1$  y  $HB_2$ , originando un agujero cerrado inestable dentro de la región de estabilidad, como se muestra en las Figura 5.62 y Figura 5.67c-Figura 5.67f. Cuando  $K_A$  se incrementa continuamente, la parte inestable de la curva  $T_A-C$  aumenta. Esto afecta

directamente el área del agujero inestable dentro de la región de estabilidad al incrementar su área, como se muestra en la Figura 5.67.

### 5.5.2 Inyección de potencia reactiva con un valor de $Q_{ac}=0.3pu$

En la Figura 5.69 se muestra el diagrama de bifurcación donde ahora la potencia reactiva que esta inyectando el StatCom al sistema tiene un valor de  $Q_{ac}^* = 0.3pu$ . Los puntos  $UHB_1$ ,  $SHB_1$  y  $SHB_2$  son tres bifurcaciones Hopf, mientras el punto  $SNB$  es una bifurcación saddle-node. Las condiciones iniciales utilizadas en este análisis son las mismas utilizadas para un valor de potencia reactiva de  $Q_{ac}^* = 0.2pu$ .

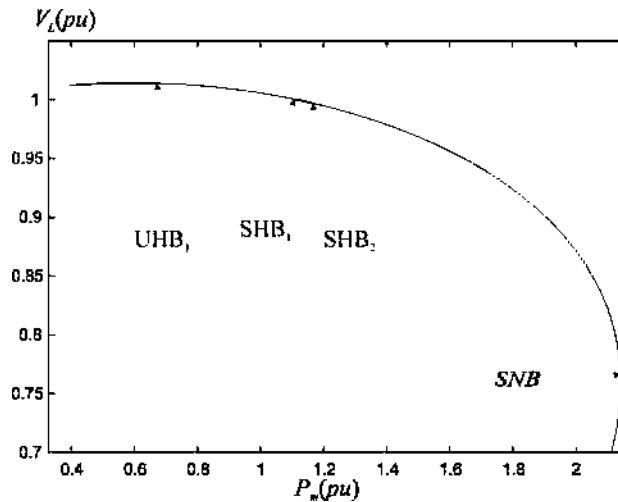


Figura 5.69 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia incluyendo un StatCom.

La Figura 5.70 y Figura 5.71 muestran la posición de los eigenvalores críticos cuando  $P_m$  se incrementa manteniendo fijos los parámetros de bifurcación  $T_A=0.05$  y  $K_A=200$ .

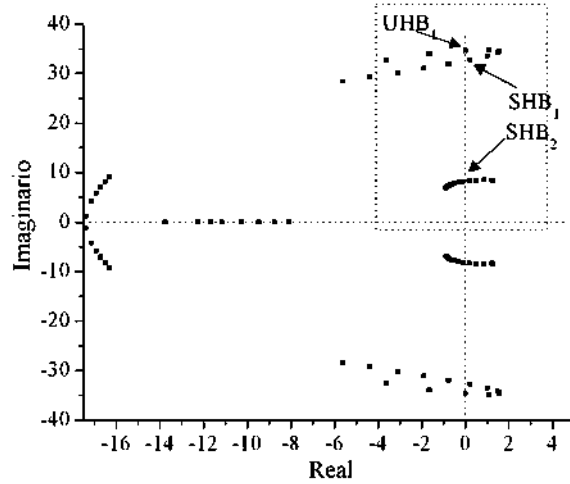


Figura 5.70 Movimiento de los eigenvalores cuando  $P_m$  se incrementa con  $T_A=0.05$  y  $K_A=200$ .

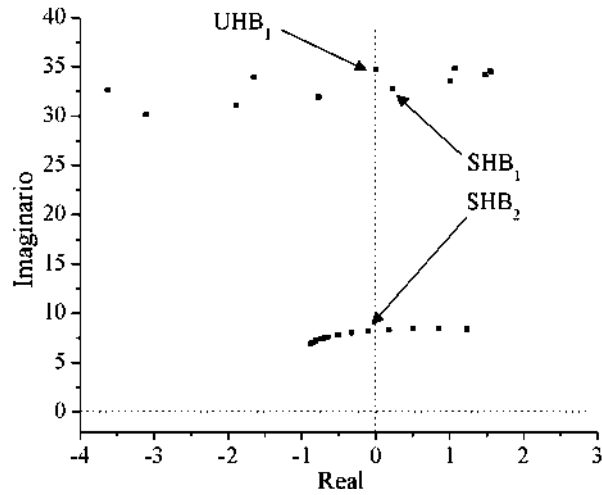


Figura 5.71 Vista alargada del rectángulo de la Figura 5.70.

La Figura 5.72 muestra las fronteras de estabilidad considerando variación en los parámetros de bifurcación  $P_m$  y  $T_A$ , manteniendo fijo el valor de  $K_A=200$ .

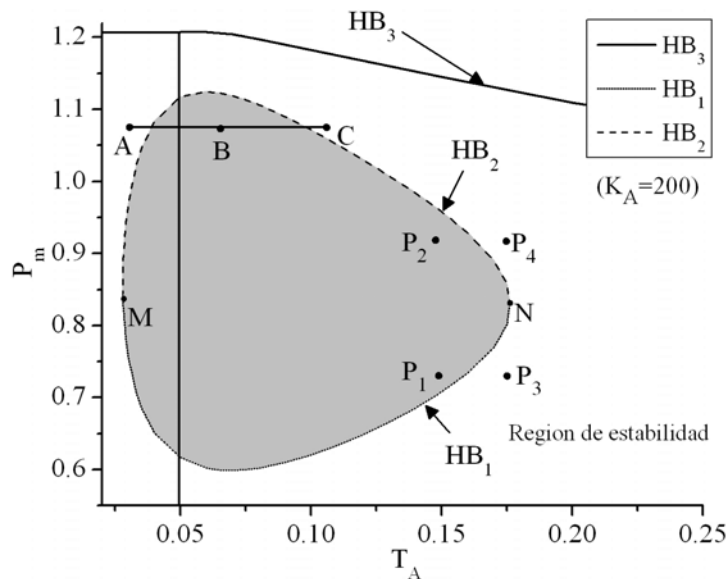


Figura 5.72 Región de estabilidad para  $K_A=200$ .

La Figura 5.73 y Figura 5.74 muestran las simulaciones dinámicas asociadas al comportamiento del ángulo de voltaje en el nodo generador cuando se consideran como condiciones iniciales puntos de equilibrio contenidos en el hoyo inestable y en la región de estabilidad respectivamente. Estos puntos de equilibrio se muestran en la Figura 5.72 y son definidos como  $P_1$  y  $P_2$  para el hoyo inestable, y para la región de estabilidad como  $P_3$  y  $P_4$ .

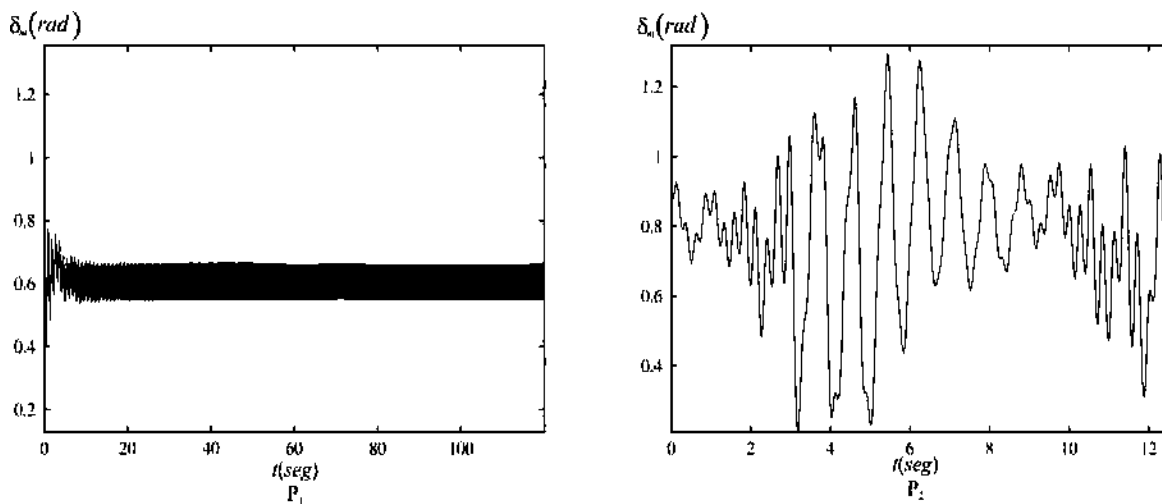


Figura 5.73 Resultados de la simulación de  $P_1$  (a) y  $P_2$  (b).

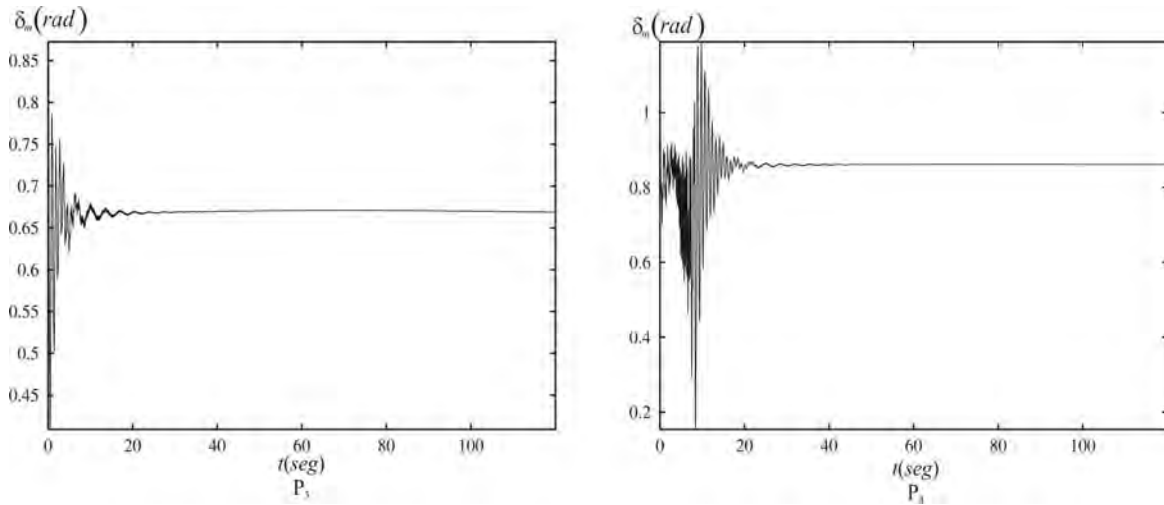
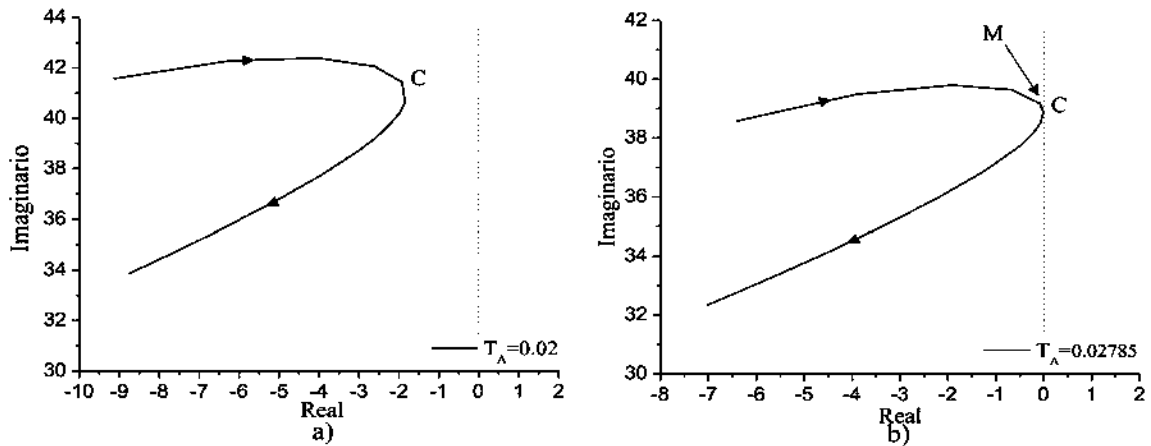


Figura 5.74 Resultados de la simulación de  $P_1$  (a) y  $P_2$  (b).

La Figura 5.75 muestra la posición de los eigenvalores conjugados relacionados a las bifurcaciones  $UHB_1$  y  $SHB_1$  de la Figura 5.69 para diferentes valores de  $T_A$  y un valor fijo de  $K_A=200$ . En cada diagrama existe un eigenvalor crítico cuya parte real es la más próxima al eje imaginario, y su localización en el plano complejo es denotada por el punto C.



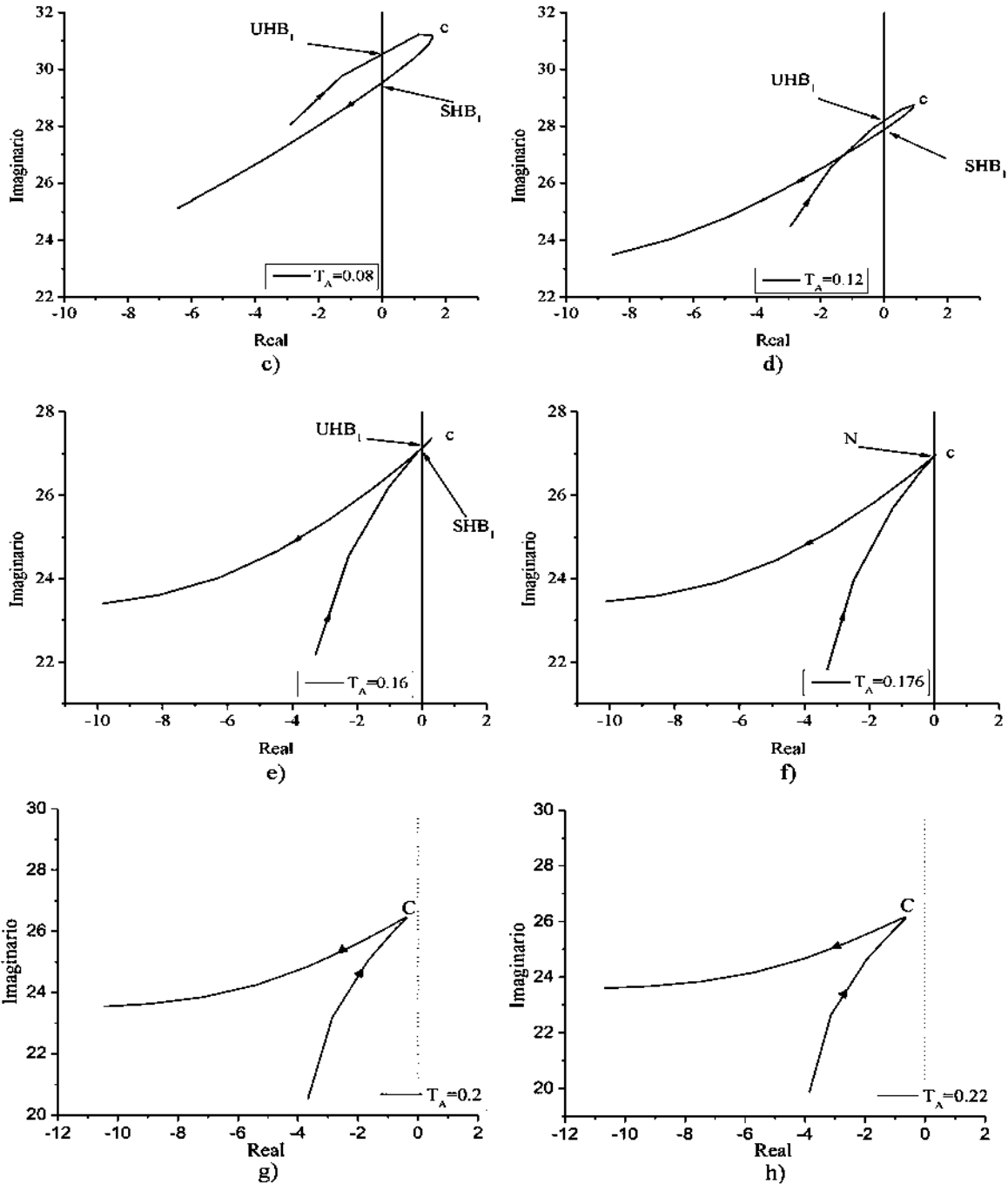


Figura 5.75 Movimiento de los eigenvalores relacionados con  $UHB_1$  y  $SHB_1$  para  $K_A=200$ .

En la Figura 5.76 se muestra que los lugares de intersección de  $T_A-C$  con el eje imaginario están asociados a los puntos de equilibrio obtenidos para valores de  $T_A=0.02785$  y  $T_A=0.176$ . Cuando  $T_A$  es menor que 0.02785 o mayor que 0.176, el punto  $C$  estará sobre la

izquierda del eje imaginario. Cuando  $T_A$  esta en el rango de  $(0.02785, 0.176)$ , el punto C esta sobre la derecha del eje imaginario.

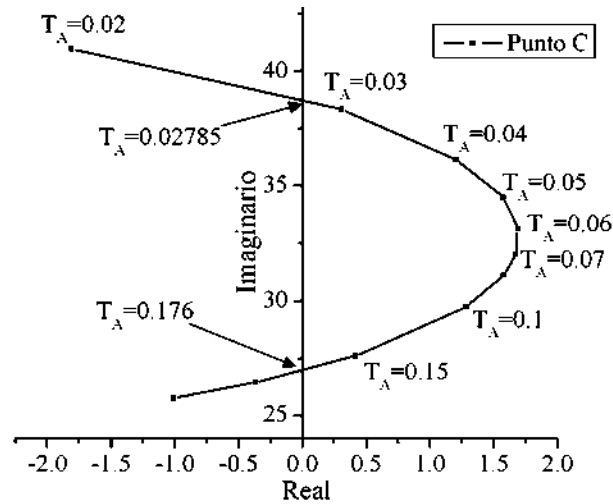
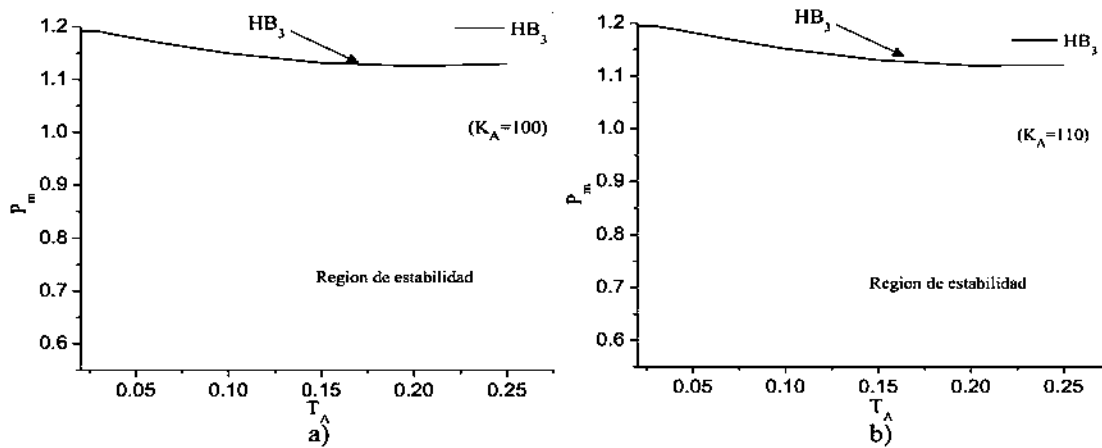


Figura 5.76 Posición del punto C de la Figura 5.75 cuando  $T_A$  incrementa.

En la Figura 5.77 se muestran algunas regiones de estabilidad cuando  $K_A$  se incrementa en el rango de  $[100-260]$ . En la Figura 5.77a y Figura 5.77b se muestra que la región es solamente limitada por la curva  $HB_3$  que corresponde a la bifurcación Hopf  $SHB_2$  cuando  $K_A=100$  y  $K_A=110$ .



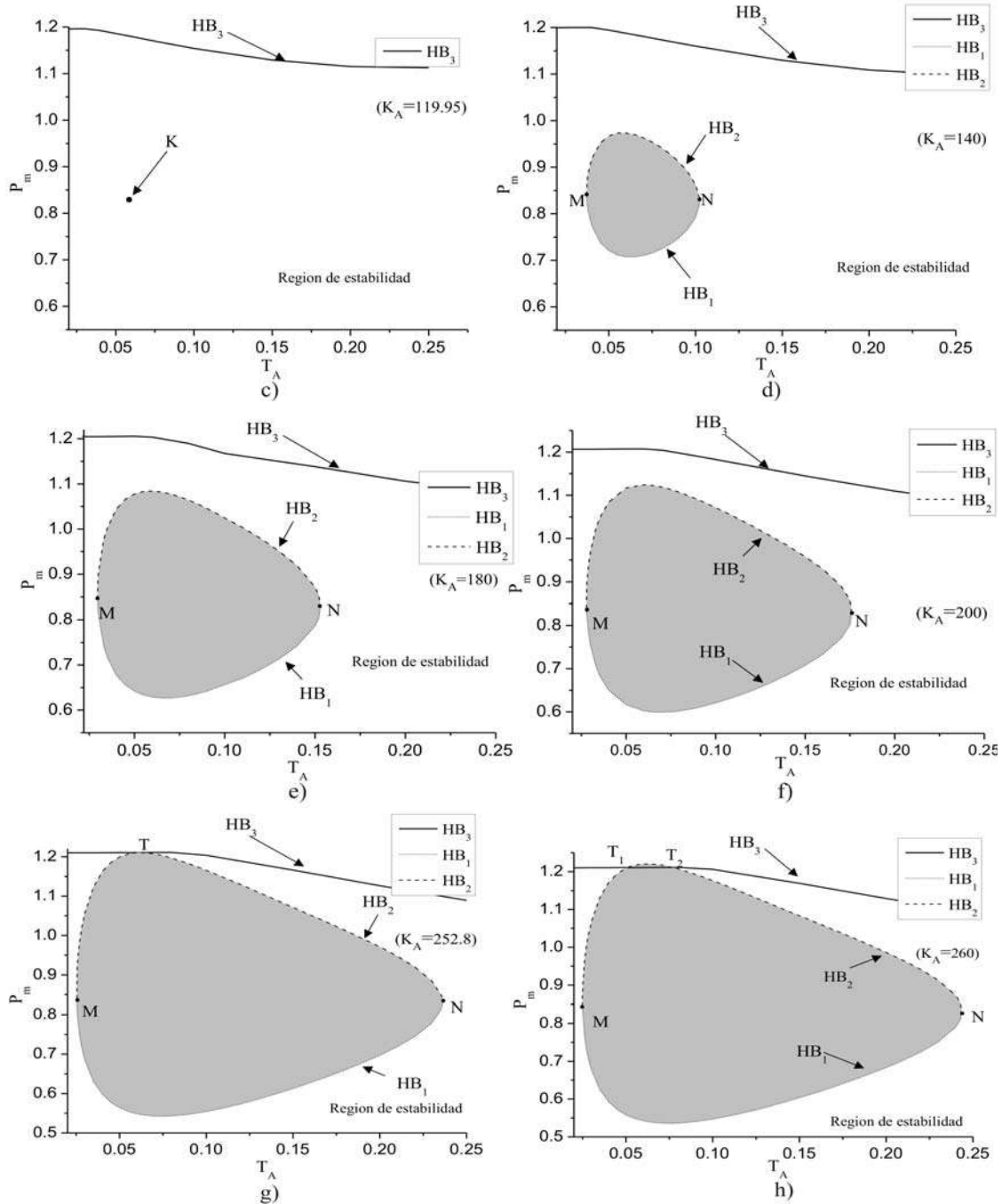


Figura 5.77 Regiones de estabilidad para diferentes valores de  $K_A$ .

En la Figura 5.78 se grafican algunas posiciones de  $T_A-C$  para diferentes valores de  $K_A$ , que son similares a los resultados mostrados en la Figura 5.76. Se encontró que cuando  $K_A$  es menor que 119.95, es decir  $K_A=110$ , todas las posiciones de  $T_A-C$  están sobre la izquierda del eje imaginario. Ningún punto sobre la curva  $T_A-C$  está sobre la derecha del eje imaginario. No hay puntos inestables (agujeros) dentro de la región de estabilidad.

Incrementando  $K_A$ , las posiciones de  $T_A-C$  se mueven hacia la derecha. Cuando  $K_A$  se incrementa alrededor de  $K_A=119.95$ , las posiciones de  $T_A-C$  son tangentes al eje imaginario en el punto  $(K_A, T_A, P_m) = (119.95, 0.06, 0.83)$ . De acuerdo al análisis de la Figura 5.75 y Figura 5.76, se observa que hay un par de eigenvalores complejos conjugados tangentes al eje imaginario en el punto  $K_A=119.95$ . Tal que existe un punto crítico dentro de la región de estabilidad, que es el punto  $K$  en la Figura 5.76b.

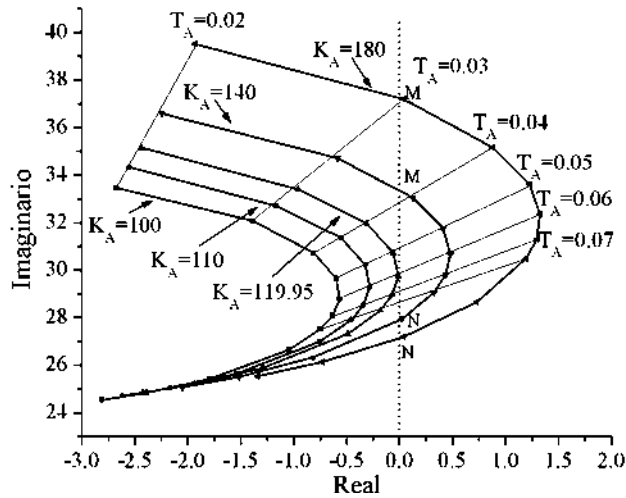


Figura 5.78 Posiciones de  $T_A-C$  para diferentes valores de  $K_A$ .

Los escenarios con  $119.95 < K_A < 252.8$  son similar a los resultados de la Figura 5.75. La curva  $T_A-C$  tiene dos puntos que cruzan el eje imaginario es decir los puntos  $M$  y  $N$ . Hay dos bifurcaciones Hopf degeneradas  $UHB_1$  y  $SHB_1$  que causan la unión de las curvas  $HB_1$  y  $HB_2$  tal como un agujero cerrado inestable dentro de la región de estabilidad como se muestra en las Figura 5.72 y Figura 5.77d-Figura 5.77h. Cuando  $K_A$  se incrementa continuamente, la parte inestable de la curva  $T_A-C$  aumenta cada vez más y más. Esto afecta directamente el área del agujero inestable dentro de la región de estabilidad haciéndolo crecer más y más como se muestra en la Figura 5.77.

### 5.5.3 Inyección de potencia reactiva con un valor de $Q_{ac}=0.4pu$

En la Figura 5.79 se muestra el diagrama de bifurcación donde ahora la potencia reactiva que esta inyectando el StatCom al sistema tiene un valor de  $Q_{ac}^* = 0.4pu$ . Las condiciones

iniciales utilizadas en este análisis son las mismas utilizadas para un valor de potencia reactiva de  $Q_{ac}^* = 0.2 pu$ .

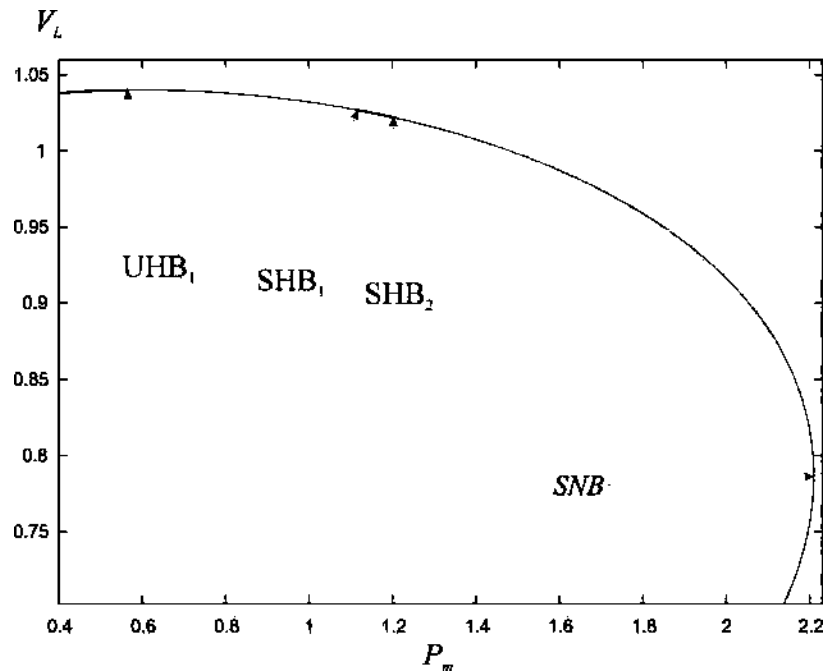


Figura 5.79 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia incluyendo un StatCom.

En la Figura 5.80 y Figura 5.81 se muestran las posiciones de los eigenvalores críticos del Jacobiano del sistema de ecuaciones linealizado conforme el parámetro de bifurcación  $P_m$  se incrementa, considerando fijos la constante de tiempo y ganancia del AVR en los valores  $T_A=0.05\text{seg}$  y  $K_A=200$ , respectivamente.

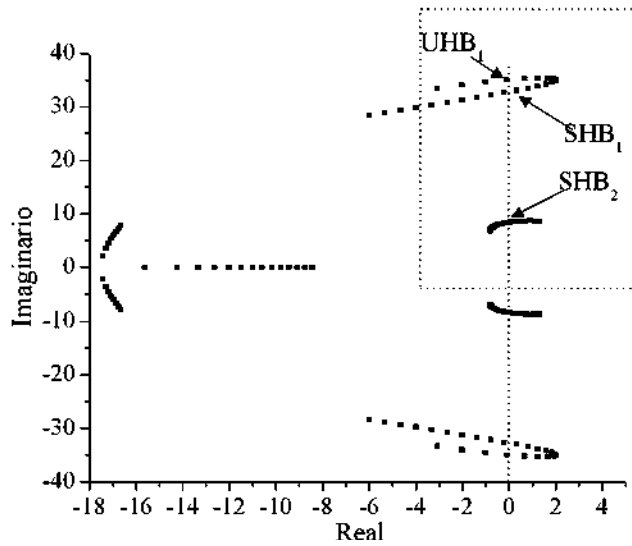


Figura 5.80 Movimiento de los eigenvalores cuando  $P_m$  se incrementa con  $T_A=0.05$  y  $K_A=200$ .

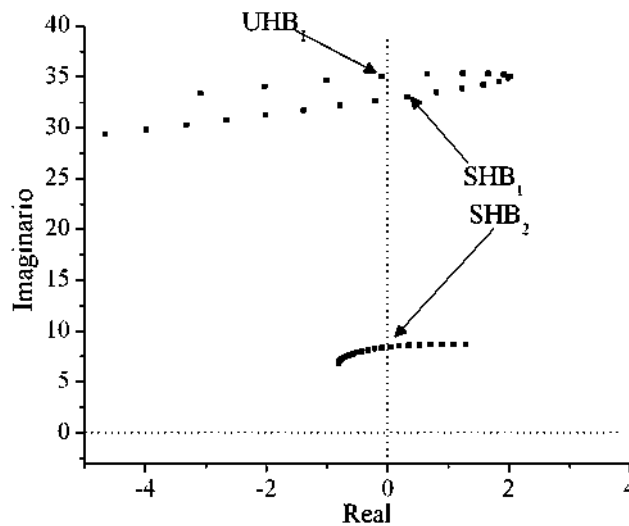


Figura 5.81 Vista alargada del rectángulo de la Figura 5.80.

La región de estabilidad mostrada en la Figura 5.82 se obtiene manteniendo el valor de ganancia del controlador en  $K_A=200$  y variando  $T_A$ . Las fronteras de estabilidad pasando a través de los puntos de equilibrio asociados a las bifurcaciones  $UHB_1$ ,  $SHB_1$  y  $SHB_2$  se denotan como  $HB_1$ ,  $HB_2$  y  $HB_3$ . Para este caso, se observa que al inyectar el StatCom una potencia reactiva de 0.4 pu, en la frontera de estabilidad  $HB_3$  la potencia  $P_m$  ya no se mantiene constante dentro de un rango de  $T_A$ ; es decir, esta potencia disminuye conforme  $T_A$  aumenta.

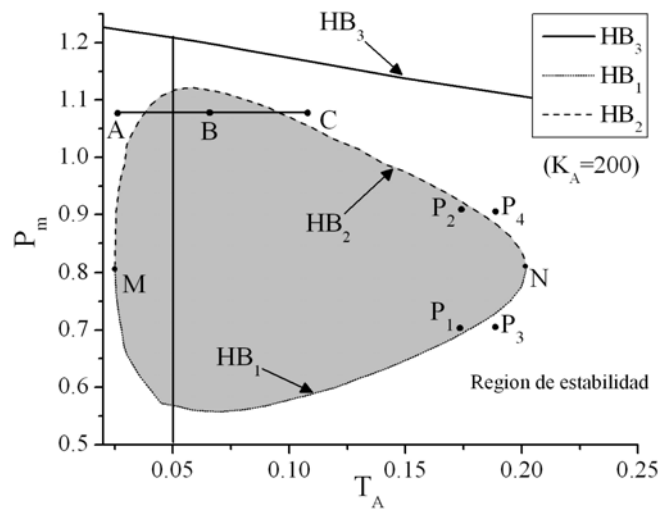


Figura 5.82 Región de estabilidad para  $K_A=200$ .

La Figura 5.83 y Figura 5.84 muestran las simulaciones dinámicas asociadas al comportamiento del ángulo de voltaje en el nodo generador cuando se consideran como condiciones iniciales puntos de equilibrio contenidos en el hoyo inestable y en la región de estabilidad respectivamente. Estos puntos de equilibrio se muestran en la Figura 5.82 y son definidos como  $P_1$  y  $P_2$  para el hoyo inestable, y para la región de estabilidad como  $P_3$  y  $P_4$ .

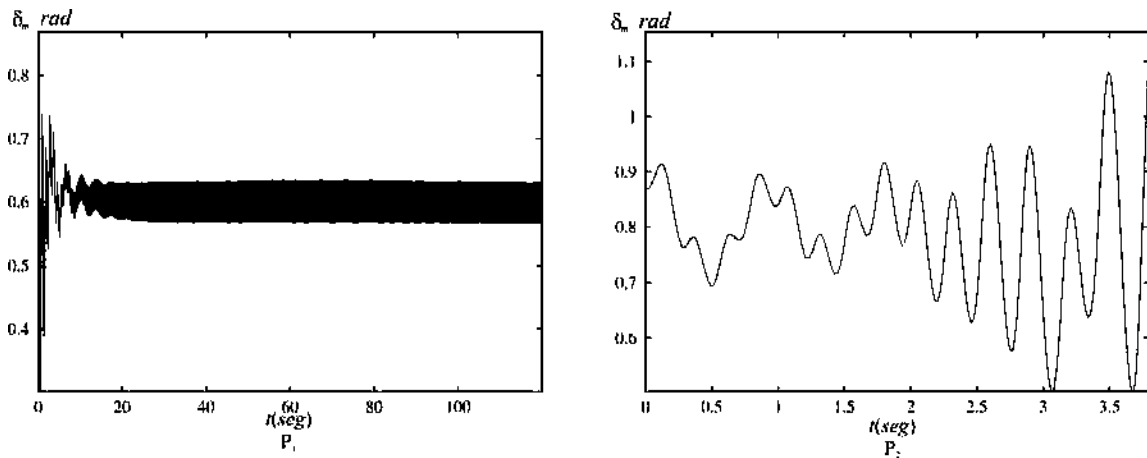


Figura 5.83 Resultados de la simulación de  $P_1$  (a) y  $P_2$  (b).

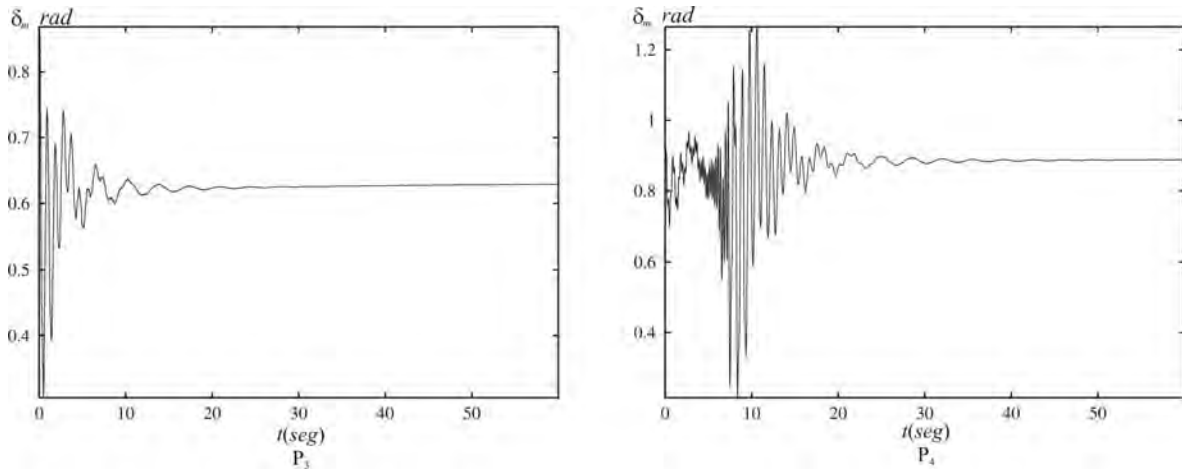
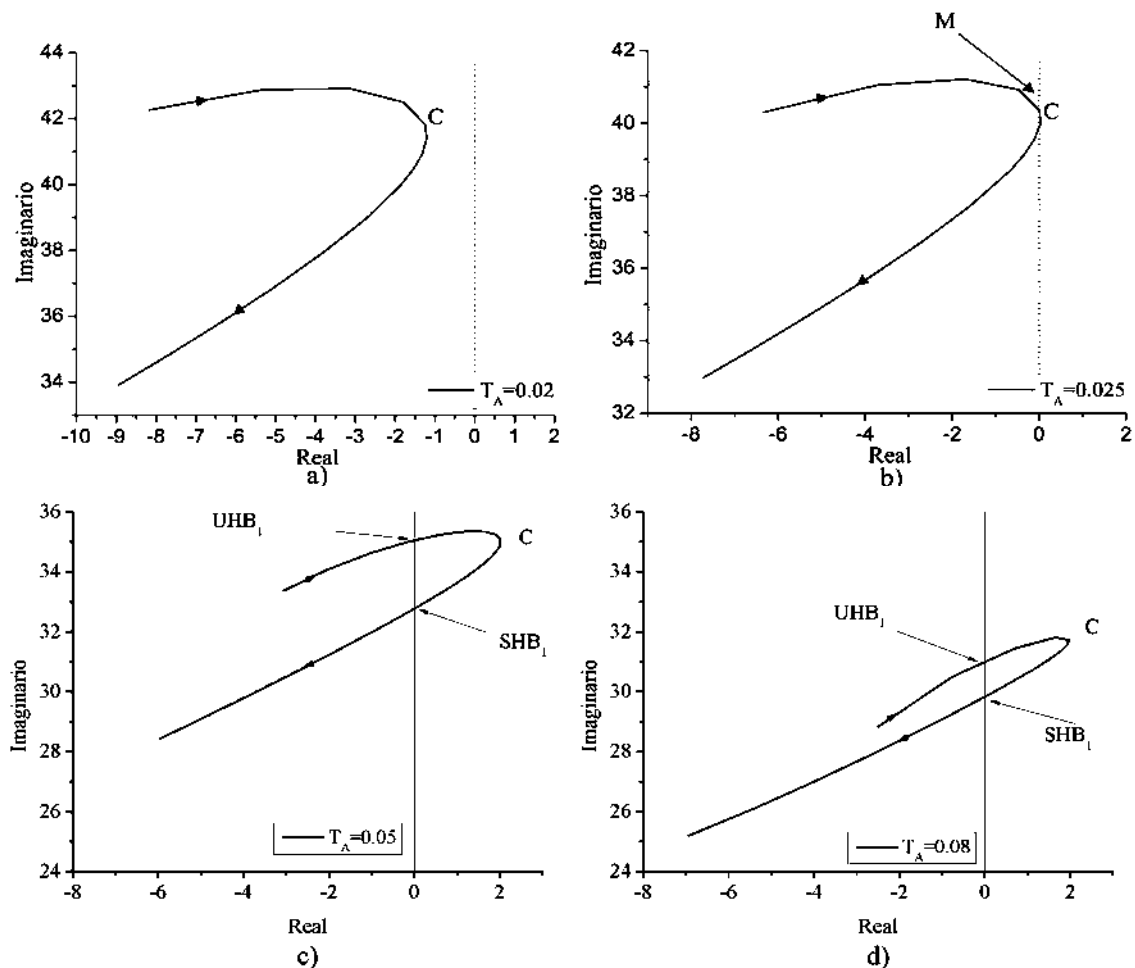


Figura 5.84 Resultados de la simulación de  $P_3$  (a) y  $P_4$  (b).

La Figura 5.85 muestra la posición de los eigenvalores conjugados relacionados a las bifurcaciones  $UHB_1$  y  $SHB_1$  de la Figura 5.79. En cada diagrama existe un eigenvalor cuya parte real es la más próxima al eje imaginario, y que es denotado por el punto C.



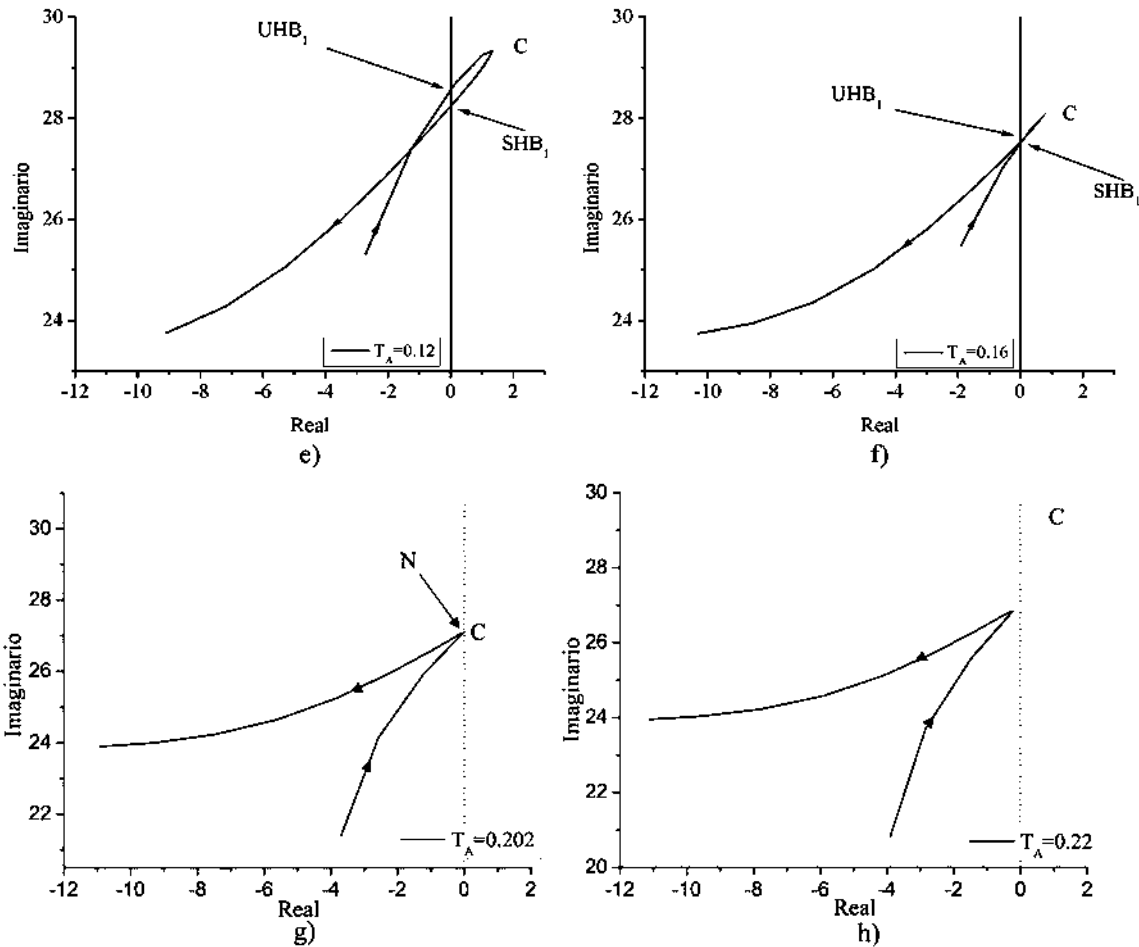


Figura 5.85 Movimiento de los eigenvalores relacionados con  $HB_1$  y  $HB_2$  para  $K_A=200$ .

En la Figura 5.78, se muestra el diagrama  $T_A$ - $C$  con la finalidad de mostrar la intersección del punto  $C$  con el eje imaginario en los valores de la constante de tiempo del controlador dados por  $T_A=0.025$  y  $T_A=0.202$ . Cuando  $T_A$  es menor que 0.025 o mayor que 0.202, el punto  $C$  estará sobre la izquierda del eje imaginario. Cuando  $T_A$  esta en el rango de  $(0.025, 0.202)$ , el punto  $C$  esta sobre la derecha del eje imaginario.

En la Figura 5.79 se muestran algunas regiones de estabilidad cuando  $K_A$  se incrementa en el rango de  $[100-260]$ . En la Figuras 5.79a se muestra que la región es solamente limitada por la curva de la bifurcación Hopf  $HB_3$  cuando  $K_A=100$ .

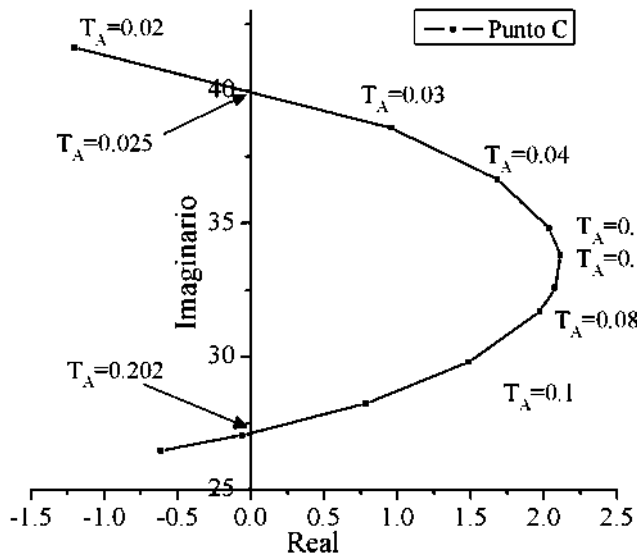
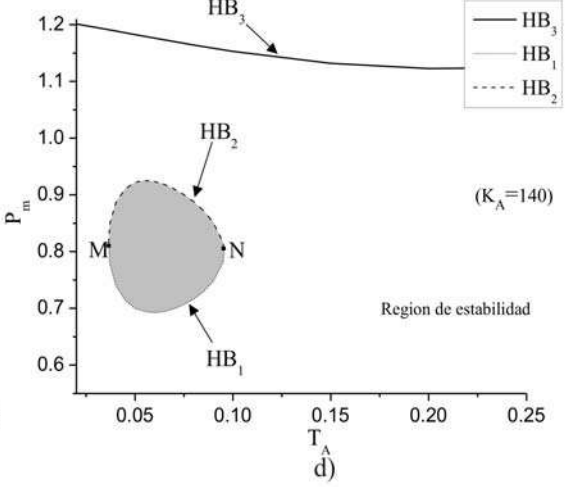
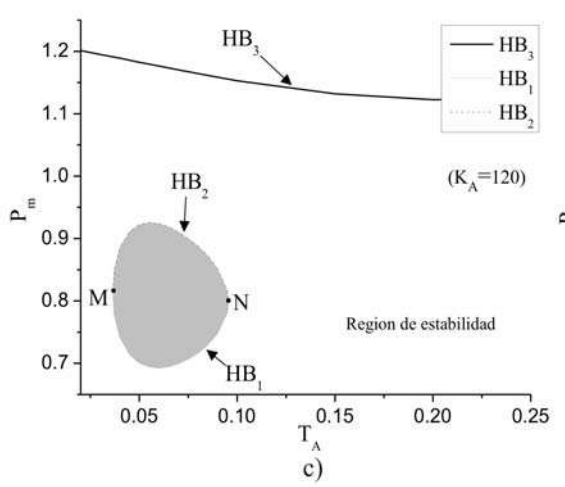
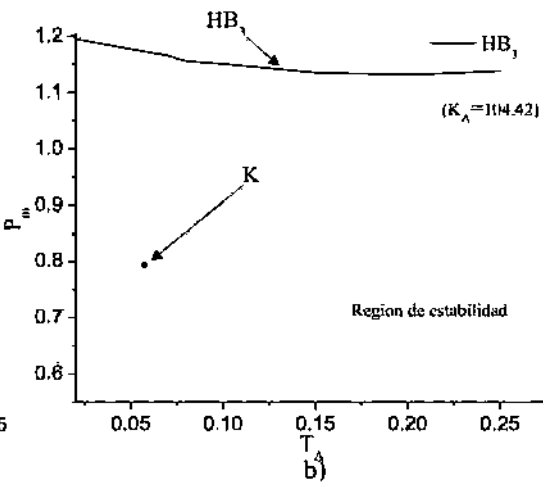
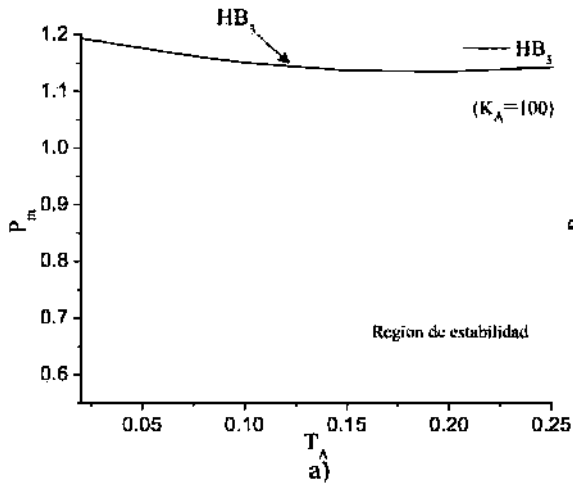


Figura 5.86 Posición del punto C de la Figura 5.85 cuando  $T_A$  incrementa.



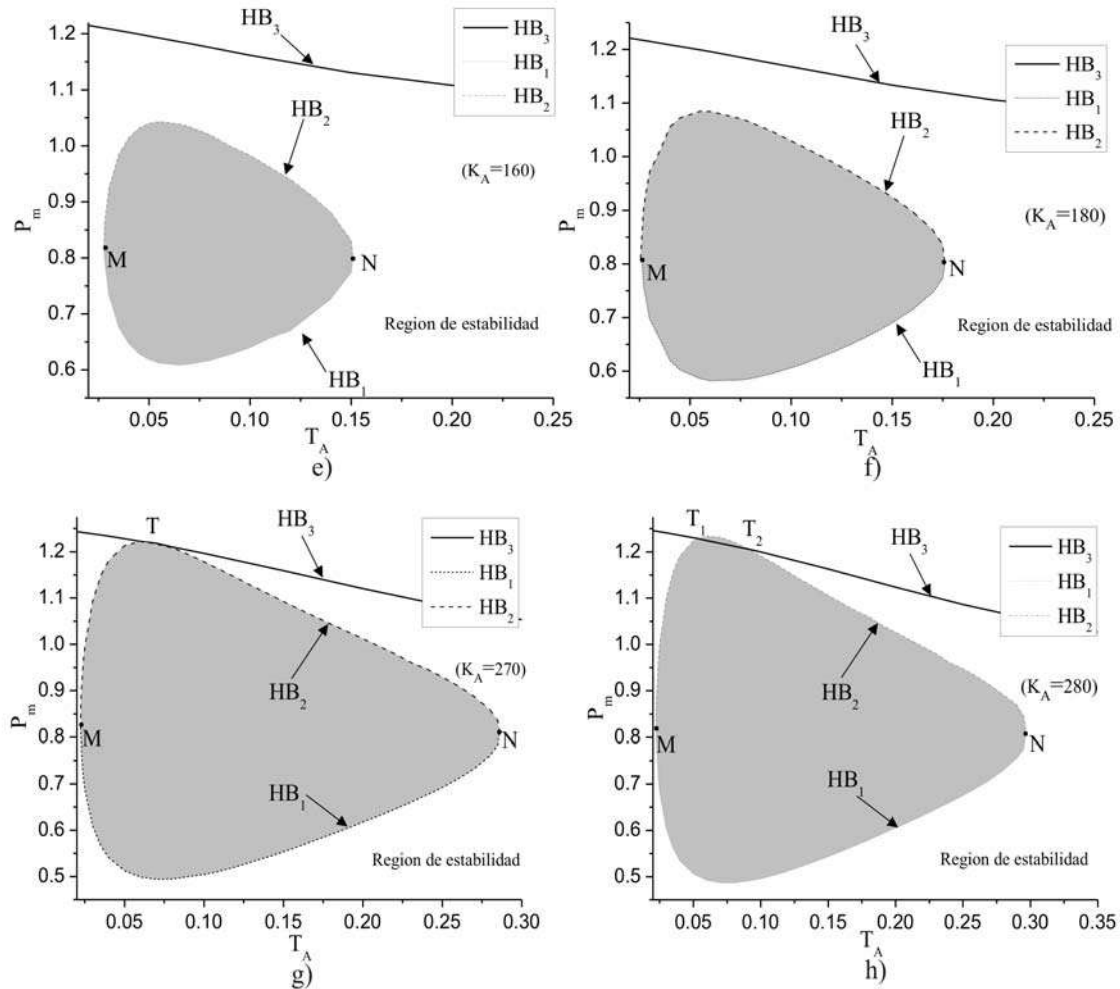


Figura 5.87 Regiones de estabilidad para diferentes valores de  $K_A$ .

Los diagramas  $T_A$ - $C$  considerando diferentes valores de  $K_A$  se muestran en la Figura 5.88. La aparición del agujero inestable dentro de la región de estabilidad acontece a un valor de  $K_A=104.42$ , donde el punto  $C$  es tangente al eje imaginario y corresponde a un punto de equilibrio asociado a los parámetros  $(K_A, T_A, P_m) = (104.42, 0.06, 0.8)$ .

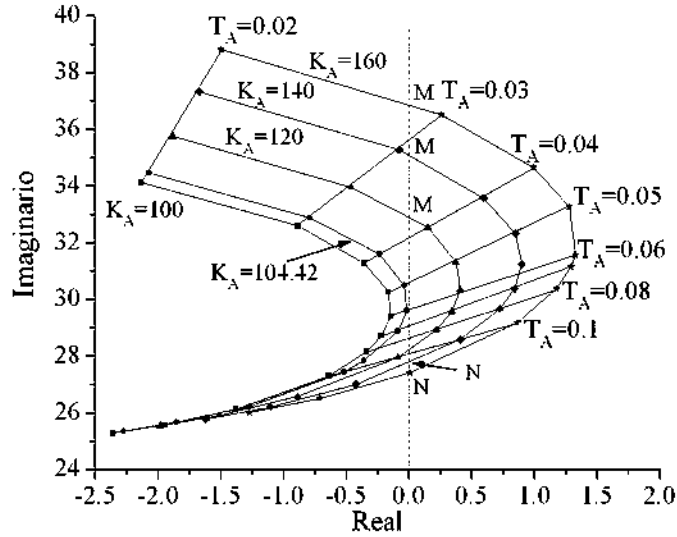


Figura 5.88 Posiciones de  $T_A$ - $C$  para diferentes valores de  $K_A$ .

#### 5.5.4 Análisis de resultados

En la Tabla 5.14 se muestran los diferentes valores de  $K_A$  y  $T_A$  para los cuales aparece el punto  $K$  inestable en los diferentes valores de inyección de potencia reactiva.

Tabla 5.14 Valores de  $K_A$  y  $T_A$  donde ocurre el punto  $K$ .

	$Q_{ref} = 0.2$	$Q_{ref} = 0.3$	$Q_{ref} = 0.4$
$K_A$	137.6025	119.95	104.42
$T_A$	0.0317	0.02785	0.025

De la tabla anterior se puede observar que a mayor inyección de potencia reactiva el punto  $K$  inestable aparece a menor valor de  $K_A$  y  $T_A$ .

En la Figura 5.89 se muestran los diagramas de bifurcación para los valores de inyección de potencia reactiva 0.2, 0.3 y 0.4 que inyecta el StatCom al sistema con la finalidad de comparar las diferentes posiciones donde ocurren cada una de las bifurcaciones y así observar los efectos que tienen al incluir el StatCom sobre las bifurcaciones.

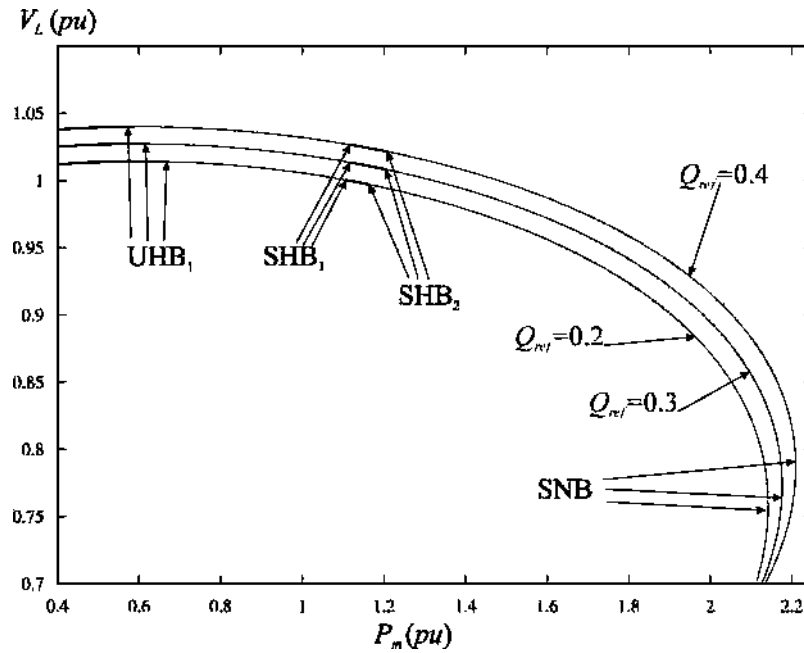


Figura 5.89 Diagramas de bifurcación para valores de potencia reactiva 0.2, 0.3 y 0.4

En la Figura 5.89 se observa que la bifurcación  $UHB_1$  aparece a un valor menor de  $P_m$  para una inyección de potencia de  $Q_{ref} = 0.4$  comparado con los valores de inyección de potencia reactiva  $Q_{ref} = 0.2$  y  $Q_{ref} = 0.3$ , también se observa que a mayor inyección de potencia reactiva el voltaje en el nodo de carga aumenta, es decir que para un valor de inyección de potencia reactiva de  $Q_{ref} = 0.2$  el voltaje en el nodo de carga empieza en 1.0120 y para  $Q_{ref} = 0.3$  el voltaje es 1.0251 y por ultimo  $Q_{ref} = 0.4$  el voltaje es 1.0379.

En la Tabla 5.15 se muestran las posiciones de las bifurcaciones que aparecen en la Figura 5.89 para los diferentes valores de inyección de potencia reactiva del StatCom.

Tabla 5.15 Posición de las bifurcaciones para los diferentes valores de potencia reactiva.

	$Q_{ref} = 0.2$	$Q_{ref} = 0.3$	$Q_{ref} = 0.4$
$UHB_1$	$P_m = 0.6689$	$P_m = 0.6158$	$P_m = 0.5700$
$SHB_1$	$P_m = 1.1068$	$P_m = 1.1173$	$P_m = 1.1165$

$SHB_2$	$P_m = 1.1641$	$P_m = 1.2072$	$P_m = 1.2087$
SNB	$P_m = 2.1418$	$P_m = 2.1761$	$P_m = 2.2095$

## Capítulo 6

### Conclusiones, aportaciones y trabajos futuros

#### 6.1 Conclusiones

En el presente trabajo se aplicó la teoría de bifurcaciones para determinar cambios en la estabilidad estructural y la forma de la región de estabilidad de algunos sistemas eléctricos. Para lo anterior, se realizó un estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados a un conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico de sistemas eléctricos. La estabilidad fue determinada por el cálculo de los eigenvalores del Jacobiano, evaluado en el punto de equilibrio bajo análisis, del sistema linealizado de ecuaciones diferencial-algebraico. Con la finalidad de cuantificar cambios en la estabilidad estructural del sistema, estos eigenvalores se relacionaron con diferentes tipos de bifurcaciones, tal que fue posible determinar la dinámica del sistema ante una perturbación pequeña de manera cualitativa. Estos estudios se realizaron considerando mono-parámetros y multi-parámetros de bifurcación. Algunas conclusiones a las que se ha llegado durante la realización de este trabajo son las siguientes:

- Los comportamientos dinámicos que se han observado en los sistemas no dependen del tamaño de estos, ya que se mostró que pequeños sistemas eléctricos pueden experimentar fenómenos dinámicos muy complejos, incluyendo comportamiento caótico.
- La inclusión del sistema de excitación automático aumenta el punto de máxima cargabilidad del sistema de potencia y elimina una bifurcación Hopf que se tenía en el sistema de potencia de tres nodos sin el sistema de excitación automático.

- Se ha mostrado que la inclusión del StatCom no ayuda a eliminar las bifurcaciones Hopf, pero añade amortiguamiento al sistema de potencia ya que el control utilizado permite fijar el valor de potencia reactiva que se requiera en el nodo de carga.
- El uso del compensador estático de Var (CEV) aumenta el punto de máxima cargabilidad del sistema, pero da lugar al nacimiento de una bifurcación Hopf.
- Se mostró con el análisis multiparamétrico que un agujero inestable puede aparecer dentro de una región la cual se creía era estable. Este resultado no puede ser obtenido cuando se hace el análisis de estabilidad de puntos de equilibrio basado en el método convencional de flujos de potencia.
- La variación de más de un parámetro de bifurcación del sistema puede llevar a que las bifurcaciones Hopf violen ciertas condiciones por las cuales se rigen llevando a bifurcaciones Hopf de tipo degeneradas.
- El uso de los limitadores de voltaje de campo de los sistemas de excitación, retardan la aparición del agujero inestable conforme se incrementa la ganancia de estos.

## 6.2 Aportaciones

La mayoría de los trabajos referentes a la aplicación de teoría de bifurcaciones para el análisis de inestabilidades en sistemas eléctricos consideran un solo parámetro de bifurcación del sistema. Contrario a estos análisis, en esta tesis se presentan estudios multiparamétricos de bifurcaciones de diferentes sistemas de potencia.

Se describe de manera detallada como puede emerger una región inestable dentro de una región estable, justificando teóricamente este fenómeno.

Por primera vez se presenta el análisis del efecto del limitador de voltaje de campo del sistema de excitación sobre la forma y tamaño de la región de estabilidad del sistema.

Por primera vez se presenta el análisis del efecto del StatCom sobre las bifurcaciones que aparecen en un sistema eléctrico, así como su efecto en la forma y tamaño de la región de estabilidad del sistema.

### **6.3 Trabajos futuros**

Este tipo de análisis podría ser implementado para sistemas de potencia reales o de gran escala y poder realizar estudios sobre como se comportan estos sistemas al variar diferentes parámetros de control.

Realizar análisis de multiparámetros implementando otro tipo de dispositivos SIFLETCA tales como el Controlador Unificado de Flujo de Potencia (UPFC) y el Compensador Serie síncrono Estático (SSSC).

## Referencias.

[Strogatz00]

Strogatz Steven H. "Nonlinear Dynamics And Chaos," Cambridge Massachusetts. Perseus Publishing 2000.

[Nayfeh95]

Ali H. Nayfeh, Balakumar Balachandran, "Applied Nonlinear Dynamics, Analytical, Computational and Experimental Methods", John Wiley & Sons, Inc. 1995.

[Anderson77]

P. M. Anderson and A. A. Fouad, "Power system control and stability," The Iowa state university press. 1977.

[Kundur94]

Kundur, Prabha "Power system stability and control", McGraw-Hill 1994.

[Dobson89]

Ian Dobson, Hsiao-Dong Chiang, "Towards a theory of voltage collapse in electric power systems," Systems and Control Letters, Vol. 13, pp. 253-262, 1989.

[Dobson88]

Ian Dobson, Hsiao Dong Chiang, James S. Thorp., "A Model Of Voltage Collapse In Electric Power Systems". IEEE proceedings of 27<sup>th</sup>. Conference on Decision and Control, Austin Texas, pp.2104-2109, December, 1988.

[Kasusky02]

R. García Kasusky, "Análisis de Inestabilidades en Sistemas Eléctricos de Potencia por Medio de la Teoría de Bifurcación", Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de Morelia, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Programa de Graduados E Investigación en Ingeniería Eléctrica, 2002

[Dong04]

L. Dong, M. L. Crow, Z. Yang, C. Shen, L. Zhang and S. Atcitty. "A Reconfigurable FACTS System for University Laboratories". IEEE Transactions on Power System, Vol. 19, No. 1 pp. 120-128 February 2004.

[Perleberg03]

André Arthur Perleberg Lerm, Claudio A. Cañizares, and Aguinaldo Silveira e Silva. "Multiparameter Bifurcation Analysis of the South Brazilian Power System". IEEE Transactions on Power System, Vol. 18, No. 2, pp. 737-746 MAY 2003.

[Jia06]

Hongjie Jia, Xiaodan Yu and Pei Zhang. "Topological Characteristic Studies on Power System Small Signal Stability Region". IEEE Power Engineering Society General Meeting, 2006.

[Gu06]

Wei Gu, Federico Milano, Ping Jiang, Guoqing Tang. "Hopf bifurcations induced by SVC Controllers: A didactic example" *Electric Power Systems Research*, Vol. 77, pp.234-240 March 2006

[Doedel97]

Doedel Eusebius, "AUTO97", Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations. Pasadena Calif., California Institute of Technology.

[Ermentrout02]

Bard Ermentrout, "Simulating, Analyzing and Animating Dynamical Systems A Guide to XPPAUT for Researchers and Students," SIAM 2002.

[Llic00]

Marija Llic, John Zaborszky, "Dynamics and Control of Large Electric Power Systems," Wiley Interscience Publication 2000.

[Ji95]

Weijun Ji, Vaithianathan Venkatasubramanian, "Dynamics of a Minimal Power System: Invariant Tori and Quasi-Periodic Motions," *IEEE Transactions on circuits and systems*, Vol. 42, No. 12, pp 981-1000, December 1995.

[Bergen86]

Arthur R. Bergen "Power System Analysis" Prentice-Hall 1986.

[Heydemann00]

J. Heydemann, S. C. Tripathy, G.C. Paap, and L. van der Sluis, "Digital and Experimental Study of Voltage Collapse and Instability in Power System," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 22, pp.303-311, 2000.

[Rajesh99]

K.G. Rajesh, K.R Padiyar. "Bifurcation analysis of a three node power system with detailed models," *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, Vol. 21, pp.375-393 November 1999.

[Mithulananthan02]

Nadarajah Mithulananthan "Hopf Bifurcation Control and Indices for Power System with Interacting Generator and FACTS Controllers," PhD Thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, Waterloo, Ontario, Canada. 2002.

[Dobson92]

Ian Dobson, Fernando Alvarado, Christopher L. DeMarco, "Sensitivity of Hopf Bifurcations to Power System Parameters," *Proceedings of the 31st, Conference on decision and control*, pp. 2928-2933, Tucson, Arizona. December 1992.

[Walve86]

Walve K., "Modeling of power system components at severe disturbances", CIGRÉ paper 38-18, International conference on large high voltage electric systems, August 1986.

[Uzunovic01]

Edvina Uzunovic, "EMTP, Transient Stability and Power Flow Models and Controls of VSC Based FACTS Controllers," PhD Thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, Waterloo, Ontario, Canada. 2001.

[Schauder93]

C. Schauder and H. Mehta, "Vector analysis and control of advanced static VAR compensators," Proc. Inst. Elect. Eng., Gen. Transm. Dist., vol. 140, no. 4, pp. 299-306, July 1993.

[Lenh02]

P. Lenh, "Exact modeling of the voltage source converter," IEEE Trans. Power Delivery, vol. 17, pp. 217-222, January 2002.

[Seron00]

Maria Marta Seron, "Sistemas No Lineales," Notas de Clase, Departamento de Electronica, Universidad Nacional de Rosario, Rosario, Argentina. 2000.

[Scheinerman00]

Edwar C. Scheinerman, "Invitation to Dynamical Systems," Department of Mathematical Sciences, The Johns Hopkins University, 2000.

[Kuznetsov98]

Y. A. Kuznetsov, "Elements of Applied Bifurcation Theory", Second Edition, Springer-Verlag, 1998.

[Moiola96]

Jorge L. Moiola, Guanrong Chen, "Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach," World Scientific Publishing Co. 1996.

[Golubitsky81]

M. Golubitsky and W. F. Langford, "Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations," J. Differential Equations, vol. 41, no. 3, pp. 375-415, 1981.

[Golubitsky85]

M. Golubitsky and D. G. Schaeffer, "Singularities and Groups in Bifurcation Theory," vol. I, New York: Springer-Verlag, 1985.

[Chen88]

R.L. Chen and P.P. Varaiya, "Degenerate Hopf Bifurcations in Power Systems," IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 35, no. 7, pp. 818-824, July 1988.

[Guckenheimer83]

J. Guckenheimer and P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields," Springer 1983.

[Wang96]

Shen Wang, "Bifurcation Analysis of Oscillations in Electric Power Systems," PhD Thesis, Arizona State University, Arizona, EUA. 1996.

[Chiang93]

H.D. Chiang, C.C. Liu, P.P. Varaiya, F.F. Wu and M.G. Lauby, "Chaos in a simple power system," IEEE Trans. On Power Systems, vol. 8, no. 4, pp. 1407-1417, 1993.

## Apéndice A

### Obtención de las ecuaciones del StatCom.

Un circuito equivalente para el StatCom se muestra en la Figura A.1.

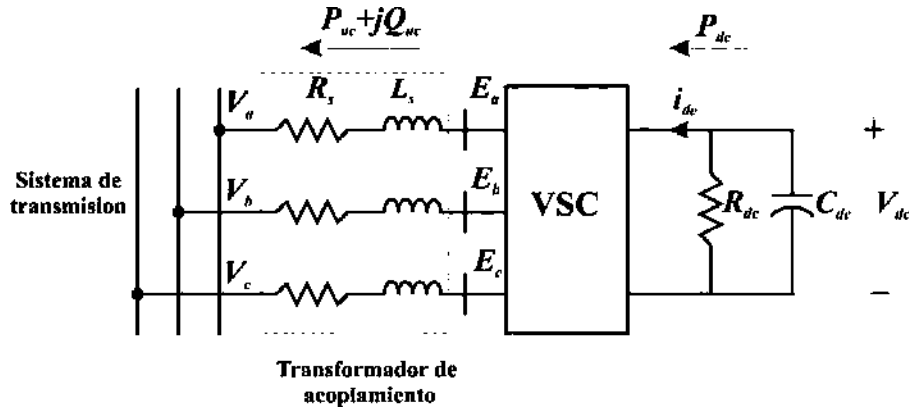


Figura. A.1 Circuito equivalente del Statcom.

Las ecuaciones del lazo para el circuito pueden ser escritas de la siguiente forma [Dong]:

$$\begin{aligned}
 -V_a - L_s \frac{di_a}{dt} - i_a R_s + E_a &= 0 \\
 -V_b - L_s \frac{di_b}{dt} - i_b R_s + E_b &= 0 \\
 -V_c - L_s \frac{di_c}{dt} - i_c R_s + E_c &= 0
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

dejando las ecuaciones en función de las corrientes se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{di_a}{dt} &= \frac{-i_a R_s}{L_s} + \frac{1}{L_s} (E_a - V_a) \\
 \frac{di_b}{dt} &= \frac{-i_b R_s}{L_s} + \frac{1}{L_s} (E_b - V_b) \\
 \frac{di_c}{dt} &= \frac{-i_c R_s}{L_s} + \frac{1}{L_s} (E_c - V_c)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

en forma matricial como:

$$p \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{1}{L_s} \begin{bmatrix} (E_a - V_a) \\ (E_b - V_b) \\ (E_c - V_c) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

donde  $p=d/dt$ ,  $R_s$  y  $L_s$  representan las pérdidas del transformador trifásico,  $E_{abc}$  es el voltaje de fase en el lado de  $ac$  del inversor,  $V_{abc}$  son los voltajes del lado del sistema de potencia e  $i_{abc}$  son las corrientes de fase. El voltaje de salida del StatCom es [Dong]:

$$E_a = kV_{dc} \cos(\omega t + \alpha) \quad (\text{A.4})$$

donde  $V_{dc}$  es el voltaje en el capacitor,  $k$  es el índice de modulación y  $\alpha$  es el ángulo de fase del voltaje inyectado. Para definir un marco de referencia síncrono propio, el modelo dinámico puede ser simplificado. Las coordenadas del marco de referencia son definidas de tal forma que el eje  $d$  esta siempre coincidiendo con el vector de voltaje instantáneo del sistema y el eje  $q$  esta en cuadratura con este.

Utilizando las siguientes matrices de transformación:

$$[C_1] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\text{sen}(\theta) & -\text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$[C_1]^{-1} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$[C_1]^{-1} = \frac{3}{2}[C_1]^T, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_q}{V_d}\right) \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = [C_1]^{-1} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = [C_1]^{-1} \begin{bmatrix} |V| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Expresando la ecuación (B.8) en una forma más compacta se tiene:

$$p i_{abc} = -\frac{R_s}{L_s} i_{abc} + \frac{1}{L_s} (E_{abc} - V_{abc}) \quad (\text{A.9})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.8) en (A.9) se obtiene la siguiente ecuación:

$$p C_1^{-1} i_{dq0} = -\frac{R_s}{L_s} C_1^{-1} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} (C_1^{-1} E_{dq0} - C_1^{-1} |V|) \quad (\text{A.10})$$

multiplicando (A.10) por (A.5) se tiene lo siguiente:

$$C_1 p C_1^{-1} i_{dq0} = -\frac{R_s}{L_s} C_1 C_1^{-1} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} (C_1 C_1^{-1} E_{dq0} - C_1 C_1^{-1} |V|) \quad (\text{A.11})$$

donde

$$C_1 p C_1^{-1} i_{dq0} + C_1 C_1^{-1} p i_{dq0} = -\frac{R_s}{L_s} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} (E_{dq0} - |V|) \quad (\text{A.12})$$

donde

$$pC_1^{-1} = \omega \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ -\text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ -\text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$CpC^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\text{sen}(\theta) & -\text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \omega \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ -\text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ -\text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$CpC^{-1} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo la ecuación (A.15) en (A.12) y reagrupando términos se tiene:

$$pi_{dq0} = -\left(\frac{R_s}{L_s} + \omega\right) i_{dq0} + \frac{1}{L_s} (E_{dq0} - |V|) \quad (\text{A.16})$$

La potencia instantánea en las terminales *ac-dc* del inversor son igual a las siguientes ecuaciones de balance de potencia:

$$V_{dc} i_{dc} = \frac{3}{2} (E_d i_d + E_q i_q) \quad (\text{A.17})$$

donde la ecuación del circuito del lado de *dc* es:

$$pV_{dc} = -\frac{1}{C} \left( i_{dc} + \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \right) \quad (\text{A.18})$$

Sustituyendo (A.17) en (A.18) se tiene:

$$pV_{dc} = -\frac{1}{C} \left( \frac{3}{2} \frac{(E_d i_d + E_q i_q)}{V_{dc}} + \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \right) \quad (\text{A.19})$$

Despreciando los armónicos en el voltaje producidos por el inversor, podemos escribir un par de ecuaciones para  $E_d$  y  $E_q$ .

$$E_d = kV_{dc} \cos(\alpha) \quad (\text{A.20})$$

$$E_q = kV_{dc} \text{sen}(\alpha) \quad (\text{A.21})$$

Sustituyendo (A.20) y (A.21) en (A.16) y (A.19) se llega a las siguientes ecuaciones [Schauder93] y [Lehn02]:

$$\frac{d}{dt} i_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + \omega i_q + \frac{k}{L_s} \cos(\alpha + \delta) V_{dc} - \frac{V_i}{L_s} \cos \delta \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d}{dt} i_q = -\frac{R_s}{L_s} i_q - \omega i_d + \frac{k}{L_s} \text{sen}(\alpha + \delta) V_{dc} - \frac{V_i}{L_s} \text{sen} \delta \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d}{dt} V_{dc} = \left( \frac{1}{C} \right) \left( -k \cos(\alpha + \delta) i_d - k \text{sen}(\alpha + \delta) i_q - \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \right) \quad (\text{A.24})$$

donde  $i_d$  e  $i_q$  son las corrientes inyectadas del Statcom,  $V_{dc}$  es el voltaje del capacitor,  $R_{dc}$  representa las pérdidas por conmutación,  $R_s$  y  $L_s$  son las resistencias e inductancias del transformador de acoplamiento respectivamente y  $V_i$  es el voltaje en el bus de conexión. Las ecuaciones del balance de potencia activa y reactiva en el nodo de conexión del Statcom son dadas por (A.25) y (A.26), respectivamente.

$$0 = V_i (i_d \cos \theta_i + i_q \text{sen} \theta_i) - V_i \sum_{j=1}^n V_j Y_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j - \phi_{ij}) \quad (\text{A.25})$$

$$0 = V_i (i_d \text{sen} \theta_i - i_q \cos \theta_i) - V_i \sum_{j=1}^n V_j Y_{ij} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \phi_{ij}) \quad (\text{A.26})$$

Los términos  $Y_{ij} \angle \phi_{ij}$  corresponden al  $(i, j)$ -ésimo elemento de la matriz de admitancia nodal y  $n$  es el número de nodos en el sistema. El primer término de la parte derecha de las ecuaciones (A.25) y (A.26) indican la potencia activa y reactiva inyectada por el

Statcom respectivamente. La sumatoria de los otros términos corresponde a las ecuaciones de flujos de potencia del sistema.

Una vez terminada esta simplificación del Statcom, se procede a establecer la ecuación dinámica del generador que no es referencia. Entonces, la ecuación de oscilación para el generador es:

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} + D \frac{d\delta}{dt} = P_m - P_{ge} \quad (\text{A.27})$$

Donde  $P_{ge}$  es la potencia eléctrica inyectada en ese nodo por el generador, para este caso la potencia eléctrica de salida en terminales del generador es:

$$P_{ge} = E_m^2 G_m + E_m V (G_m \text{Cos}(\delta_m - \delta) + B_m \text{Sen}(\delta_m - \delta)) \quad (\text{A.28})$$

Las ecuaciones de potencia real y reactiva que entran hacia la red en el nodo de carga incluyendo la potencia del Statcom tienen la forma ( $VI^*$ ):

$$\begin{aligned} P &= -V^2(G_0' + G_m) + VE_m(G_m \text{Cos}(\delta - \delta_m) + B_m \text{Sen}(\delta - \delta_m)) + VE_0'(G_0' \text{Cos}\delta + B_0' \text{Sen}\delta) \\ &\quad + V(I_d \text{Cos}\delta + I_q \text{Sen}\delta) \\ Q &= V^2(B_0' + B_m) + VE_m(G_m \text{Sen}(\delta - \delta_m) - B_m \text{Cos}(\delta - \delta_m)) + VE_0'(G_0' \text{Sen}\delta - B_0' \text{Cos}\delta) \\ &\quad + V(I_q \text{Sen}\delta - I_d \text{Cos}\delta) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Una forma de lograr el intercambio de potencia reactiva, y mantener el voltaje del capacitor constante, es mediante la técnica de control PWM que permite modular el índice de modulación y el ángulo de fase en (A.4). El control implementado en este trabajo es el mostrado en la Figura A.2 [Dong04].

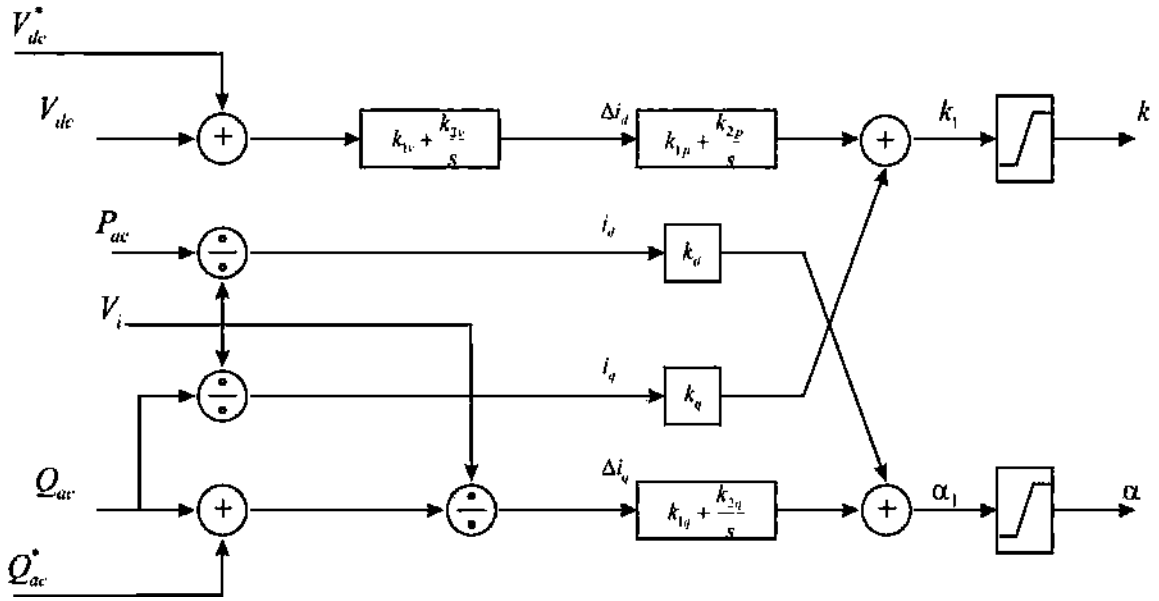


Figura A.2 Control del StatCom.

Las ecuaciones del control se muestran en las siguientes ecuaciones.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_{2v} (V_{dc}^* - V_{dc}) \\ \Delta i_d &= k_{1v} (V_{dc}^* - V_{dc}) + x_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.30})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2 &= k_{2p} \Delta i_d \\ k_1 &= k_{1p} \Delta i_d + x_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.31})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_3 &= k_{2q} \left( \frac{Q_{ac} - Q_{ac}^*}{V} \right) \\ \alpha_1 &= k_{1q} \left( \frac{Q_{ac} - Q_{ac}^*}{V} \right) + x_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.32})$$

Las ecuaciones de los limitadores se presentan de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} k &= k_{lim} \tanh \left( \frac{k_1}{k_{lim}} \right) \\ \alpha &= \alpha_{lim} \tanh \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_{lim}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.34})$$

Con la finalidad de integrar todas estas ecuaciones, se establece el balance de potencia en el nodo de carga y en el nodo de generación, tal que las ecuaciones (A.35) describen de forma dinámica el sistema analizado.

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_m &= \omega \\
\dot{\omega} &= \frac{1}{M} \left( P_m - D_m \omega + E_m^2 G_m + E_m V (G_m \cos(\delta_m - \delta) + B_m \sin(\delta_m - \delta)) \right) \\
\dot{\delta} &= K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1) \\
\dot{V} &= \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} (-K_{qw}(P_0 + P_1 - P) + (K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv})V + K_{pw}(Q_0 + Q_1 - Q) \\
&\quad + K_{pw}K_{qv2}V^2) \\
\dot{i}_d &= -\frac{R_s}{L_s} i_d + \omega i_q + \frac{k}{L_s} \cos(\alpha + \delta) V_{dc} - \frac{V}{L_s} \cos \delta \\
\dot{i}_q &= -\frac{R_s}{L_s} i_q - \omega i_d + \frac{k}{L_s} \sin(\alpha + \delta) V_{dc} - \frac{V}{L_s} \sin \delta \\
\dot{V}_{dc} &= \left( \frac{1}{C} \right) \left( -k \cos(\alpha + \delta) i_d - k \sin(\alpha + \delta) i_q - \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \right)
\end{aligned} \tag{A.35}$$

## Apéndice B

### Obtención de las ecuaciones del modelo clásico.

El modelo clásico de tres nodos fue propuesto por Ian Dobson, Hsiao Dong Chiang y James S. Thorp. en su artículo “A Model Of Voltage Collapse In Electric Power Systems” [Dobson88]. El sistema es el siguiente:

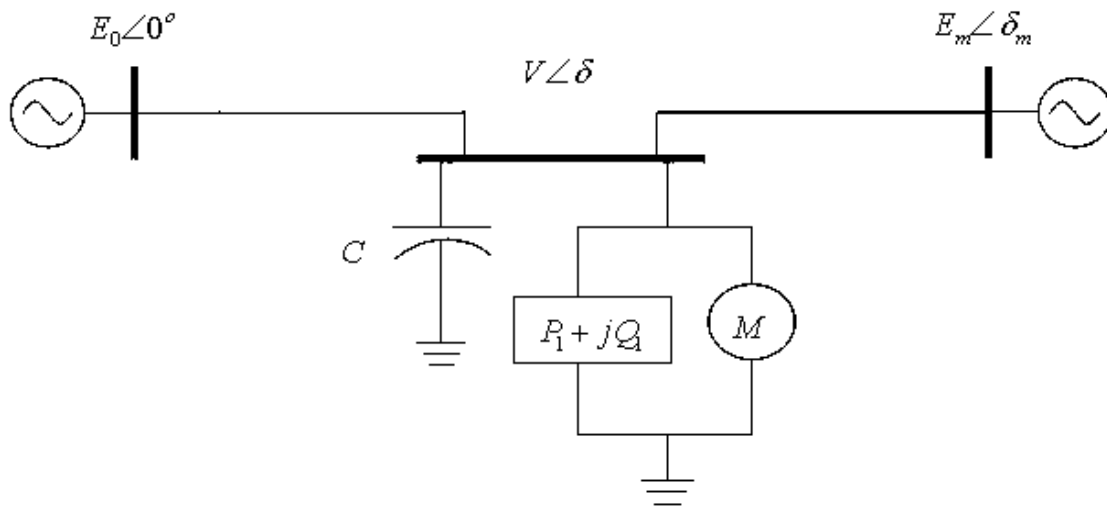


Figura B.1 Sistema eléctrico de potencia de tres nodos del modelo clásico.

Este sistema está compuesto por dos generadores; uno es considerado como nodo de referencia (izquierda) y el otro como una fuente de voltaje constante (derecha). El sistema puede entenderse como una pequeña área conectada a una red que es modelada como un bus infinito. Las líneas de transmisión son modeladas como admitancias. La carga es modelada de la siguiente manera; una carga constante, un capacitor y un motor de inducción dependiente de la frecuencia y de la magnitud del voltaje en el nodo de carga. El modelo del motor de inducción es el propuesto por [Walve86]. Además, un capacitor se encuentra conectado en paralelo con la carga. Las ecuaciones matemáticas necesarias para realizar el estudio dinámico se presentan a continuación.

Este sistema puede ser modelado con el siguiente diagrama:

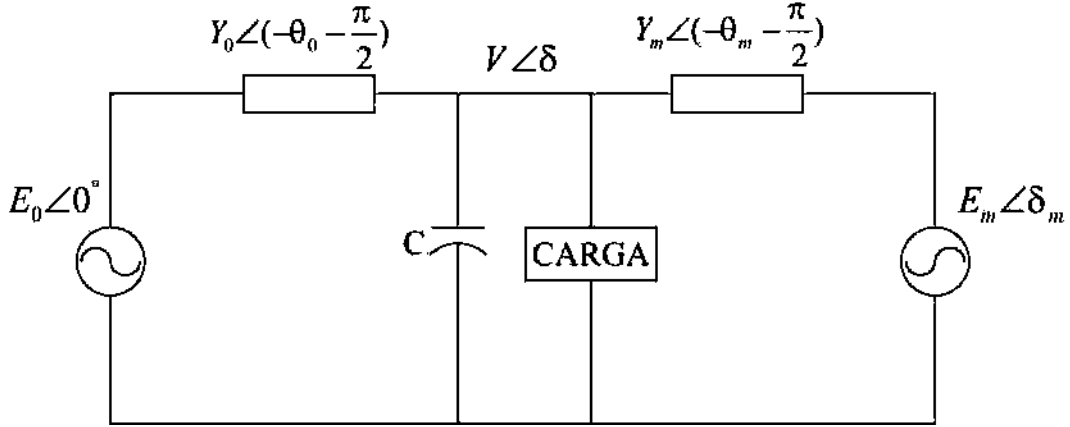


Figura B.2 Modelo del sistema eléctrico de potencia

Haciendo un equivalente de Thevenin del capacitor con el nodo slack, para incrementar el voltaje de Thevenin  $E_0'$  al incrementar  $C$ . Entonces utilizando la identidad de Euler:  $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \text{sen} x$ , las admitancias de las líneas de transmisión pueden ser expresadas de la misma forma.

$$\begin{aligned}
 Y_0 e^{-j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} &= Y_0 \left( \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - j \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
 Y_0 e^{-j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} &= Y_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen} \theta \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -j \left( \text{sen} \theta \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos \theta \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \end{pmatrix} \\
 Y_0 e^{-j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} &= Y_0 (-\text{sen} \theta - j \cos \theta) \\
 Y_0 e^{-j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} &= -Y_0 \text{sen} \theta - j Y_0 \cos \theta
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Tomando la línea de la izquierda y el capacitor para formar el equivalente de Thevenin, la admitancia total es:

$$\begin{aligned}
 Y_{th} &= -Y_0 \text{sen} \theta - j Y_0 \cos \theta + j C \\
 Y_{th} &= -Y_0 \text{sen} \theta + j(C - Y_0 \cos \theta) \\
 Y_{th} &= G + j B
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Obteniendo su magnitud y ángulo:

$$\begin{aligned}
 |Y_{th}| &= \sqrt{G^2 + jB^2} \\
 |Y_{th}| &= \sqrt{(Y_0 \operatorname{sen} \theta)^2 + (C - Y_0 \cos \theta)^2} = \sqrt{Y_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta + C^2 - 2CY_0 \cos \theta + Y_0^2 \cos^2 \theta} \\
 |Y_{th}| &= \sqrt{Y_0^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) + C^2 - 2CY_0 \cos \theta} = \sqrt{Y_0^2 + C^2 - 2CY_0} \\
 |Y_{th}| &= \sqrt{Y_0^2 (1 + C^2 Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1} \cos \theta)} = Y_0 (1 + C^2 Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1} \cos \theta)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\theta_{th} = \tan^{-1} \frac{C - Y_0 \cos \theta}{-Y_0 \operatorname{sen} \theta} \tag{B.4}$$

Por lo tanto el voltaje de Thevenin es:

$$\begin{aligned}
 E_{th} &= \frac{-jE_0 C^{-1} (jCY_0)}{-jC^{-1} + \frac{1}{Y_0} (jCY_0)} \\
 E_{th} &= \frac{E_0 Y_0}{Y_0 + jC} = \frac{E_0 Y_0}{Y_0'}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

donde

$$\frac{Y_0}{Y_0'} = \frac{Y_0}{Y_0 (1 + C^2 Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1} \cos \theta)^{1/2}} \tag{B.6}$$

Sustituyendo (B.6) en (B.5) se tiene lo siguiente:

$$E_{th} = \frac{E_0}{(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1} \cos \theta)^{1/2}} \tag{B.7}$$

Los elementos del equivalente de Thevenin son:

$$|Y_{th}| = Y_0(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos \theta)^{1/2}$$

$$\theta_{th} = \tan^{-1} \frac{C - Y_0 \cos \theta}{-Y_0 \sin \theta} \quad (\text{B.8})$$

$$E_{th} = \frac{E_0}{(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos \theta)^{1/2}}$$

El diagrama correspondiente con el equivalente de Thevenin es dado en la Figura B.3.

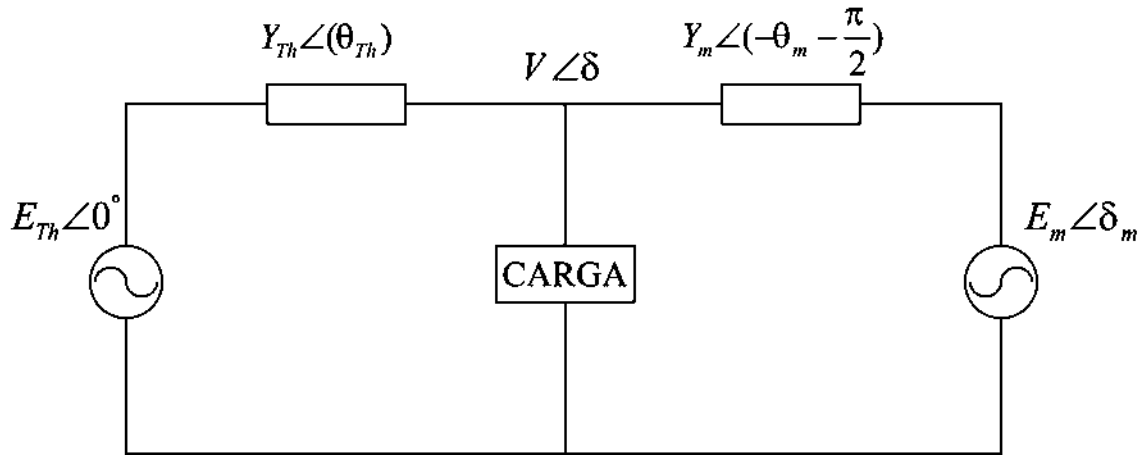


Figura B.3 Modelo del sistema con el equivalente de Thevenin en la parte izquierda.

La admitancia de Thevenin de este nuevo modelo puede modelarse como las de la Figura B.2.

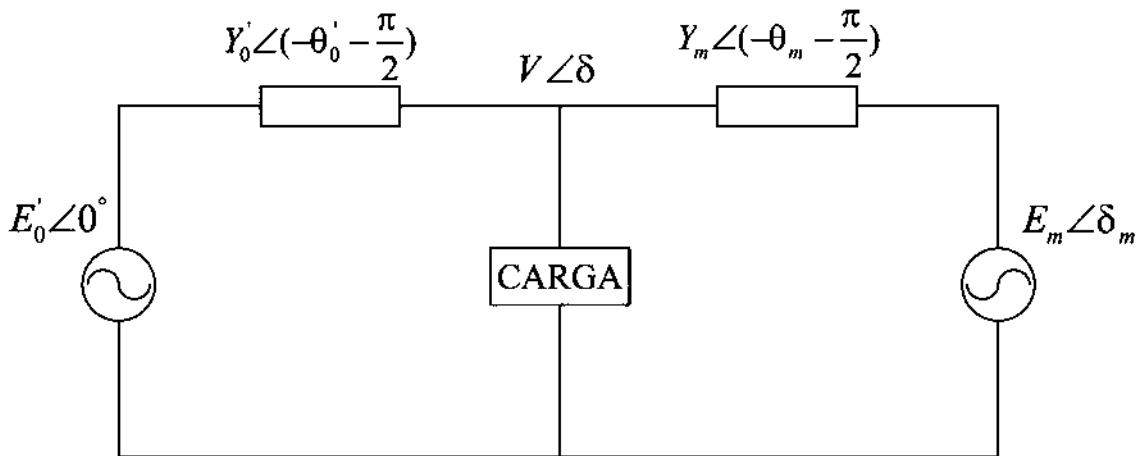


Figura B.4 Modelo del sistema con la admitancia del lado izquierdo remodelada.

Donde:

$$\theta_0' = -\theta_{th} - \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.9})$$

$$\theta_0' = \tan^{-1} \left( \frac{C - Y_0 \cos \theta}{-Y_0 \text{sen} \theta} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.10})$$

$$E_0' = E_{th} \quad (\text{B.11})$$

$$Y_0' = Y_{th} \quad (\text{B.12})$$

A continuación se establece la ecuación dinámica del generador. Entonces la ecuación de oscilación para el generador es:

$$M \ddot{\delta}_m + D_m \omega = P_m - P_e \quad (\text{B.13})$$

Donde  $P_e$  es la potencia eléctrica inyectada en ese nodo por el generador:

$$P_e = \sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} - \delta_i - \delta_j) \quad (\text{B.14})$$

La potencia eléctrica de salida en terminales del generador es:

$$\begin{aligned} P_e &= V E_m Y_m \cos\left(-\theta_m - \frac{\pi}{2} - \delta_m + \delta + \pi\right) + E_m^2 Y_m \cos\left(-\theta_m - \frac{\pi}{2}\right) \\ P_e &= V E_m Y_m \cos\left(-\theta_m - \delta_m + \delta + \frac{\pi}{2}\right) + E_m^2 Y_m \cos\left(-\theta_m - \frac{\pi}{2}\right) \\ P_e &= -V E_m Y_m \text{sen}(\delta - \delta_m - \theta_m) - E_m^2 Y_m \text{sen}(\theta_m) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Entonces la ecuación de oscilación de puede describir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} M \ddot{\delta}_m + D_m \omega &= P_m - \left(-V E_m Y_m \text{sen}(\delta - \delta_m - \theta_m) - E_m^2 Y_m \text{sen}(\theta_m)\right) \\ M \ddot{\delta}_m + D_m \omega &= P_m + \left(V E_m Y_m \text{sen}(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2 Y_m \text{sen}(\theta_m)\right) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Las ecuaciones de potencia activa y reactiva que entran hacia la red en el nodo de carga tienen la siguiente forma ( $VI^*$ ):

$$P = \sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (\text{B.17})$$

$$Q = -\sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (\text{B.18})$$

Para este modelo tomaremos el negativo de  $P$  y  $Q$  que corresponden a las potencias demandadas por la carga.

$$P = VE_0' Y_0' \cos(-\delta - \theta_0' - \frac{\pi}{2} + \pi) + VE_m Y_m \cos(-\delta + \delta_m - \theta_m - \frac{\pi}{2} + \pi) - V^2 (Y_0' \text{sen} \theta_0' + Y_m \text{sen} \theta_m)$$

$$P = -VE_0' Y_0' \text{sen}(-\delta - \theta_0') - VE_m Y_m \text{sen}(-\delta + \delta_m - \theta_m) - V^2 (Y_0' \text{sen} \theta_0' + Y_m \text{sen} \theta_m) \quad (\text{B.19})$$

$$P = VE_0' Y_0' \text{sen}(\delta + \theta_0') + VE_m Y_m \text{sen}(\delta - \delta_m + \theta_m) - V^2 (Y_0' \text{sen} \theta_0' + Y_m \text{sen} \theta_m)$$

$$Q = -VE_0' Y_0' \text{sen}(-\delta - \theta_0' - \frac{\pi}{2} + \pi) - VE_m Y_m \text{sen}(-\delta + \delta_m - \theta_m - \frac{\pi}{2} + \pi) + V^2 (Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m)$$

$$Q = -VE_0' Y_0' \cos(-\delta - \theta_0') - VE_m Y_m \cos(-\delta + \delta_m - \theta_m) + V^2 (Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m) \quad (\text{B.20})$$

$$Q = -VE_0' Y_0' \cos(\delta + \theta_0') - VE_m Y_m \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) + V^2 (Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m)$$

Tomando el negativo de estas potencias se obtiene la potencia total de salida en el nodo de carga.

$$P = -VE_0' Y_0' \text{sen}(\delta + \theta_0') - VE_m Y_m \text{sen}(\delta - \delta_m + \theta_m) + V^2 (Y_0' \text{sen} \theta_0' + Y_m \text{sen} \theta_m) \quad (\text{B.21})$$

$$Q = VE_0' Y_0' \cos(\delta + \theta_0') + VE_m Y_m \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) - V^2 (Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m)$$

El modelo de carga estática y el motor de inducción propuesto por [Walve86], es el siguiente:

$$P = P_0 + P_1 + K_{pw} \dot{\delta} + K_{pv} (V + TV\dot{V}) \quad (\text{B.22})$$

$$Q = Q_0 + Q_1 + K_{qw} \dot{\delta} + K_{qv} V + K_{qv2} V^2 \quad (\text{B.23})$$

Donde  $P_0$  y  $Q_0$  son las constantes activa y reactiva del motor,  $P_1$  y  $Q_1$  representan la carga modelada como potencia constante.

Despejando  $K_{qw}\dot{\delta}$  de (B.23) y sustituyendo  $Q$  de la ecuación (B.21) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= K_{qw}^{-1}(-K_{qv}V - K_{qv2}V^2 + Q - Q_0 - Q_1) \\ \dot{\delta} &= K_{qw}^{-1}(-K_{qv}V - K_{qv2}V^2 - Q_0 - Q_1 - V^2(Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m) \\ &\quad + VE_m Y_m \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) + VE_0' Y_0' \cos(\delta + \theta_0'))\end{aligned}\quad (B.24)$$

Despejando  $\dot{V}$  de (B.22) y sustituyendo (B.21) y (B.24) se tiene:

$$\begin{aligned}TK_{pw}\dot{V} &= P - P_0 - P_1 - K_{pw}K_{qw}^{-1}(-K_{qv}V - K_{qv2}V^2 + Q - Q_0 - Q_1) - VK_{pv} \\ TK_{qw}K_{pv}\dot{V} &= K_{qw}(P - P_0 - P_1) + K_{pw}K_{qv}V + K_{pw}K_{qv2}V^2 - K_{pw}(Q - Q_0 - Q_1) - VK_{qw}K_{pv} \\ TK_{qw}K_{pv}\dot{V} &= K_{qw}(P - P_0 - P_1) + (K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv})V + K_{pw}K_{qv2}V^2 + K_{pw}(Q_0 + Q_1 - Q) \\ TK_{qw}K_{pv}\dot{V} &= -K_{qw}(P_0 + P_1 - (-VE_0' Y_0' \text{sen}(\delta + \theta_0') - VE_m Y_m \text{sen}(\delta - \delta_m + \theta_m) \\ &\quad + V^2(Y_0' \text{sen} \theta_0' + Y_m \text{sen} \theta_m))) + (K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv})V \\ &\quad + K_{pw}(Q_0 + Q_1 - (VE_0' Y_0' \cos(\delta + \theta_0') + VE_m Y_m \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) \\ &\quad - V^2(Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m))) + K_{pw}K_{qv2}V^2\end{aligned}\quad (B.25)$$

De esta forma las ecuaciones (B.16), (B.24) y (B.25) describen en forma dinámica el comportamiento del sistema de potencia. Para efectos de simulación es necesario reescribirlas como ecuaciones de primer orden recordando que:  $\dot{\delta}_m = \omega$  en la ecuación de oscilación. De esta forma se obtiene un sistema de cuarto dimensiones.

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_m &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{M}(P_m - D_m \omega + VE_m Y_m \text{sen}(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2 Y_m \text{sen} \theta_m) \\ \dot{\delta} &= K_{qw}^{-1}(-K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1) \\ \dot{V} &= \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}}(-K_{qw}(P_0 + P_1 - P) + (K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv})V + K_{pw}(Q_0 + Q_1 - Q) \\ &\quad + K_{pw}K_{qv2}V^2)\end{aligned}\quad (B.26)$$

## Apéndice C

### Derivación de ecuaciones

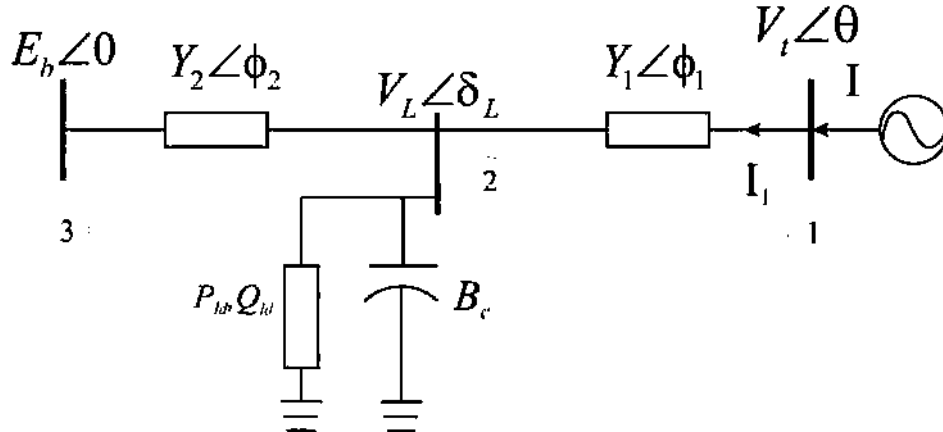


Figura C.1 Sistema de potencia de tres nodos.

Con la notación definida en la Figura C.1, se escribe la ecuación de la red en el marco de referencia  $d$ - $q$  como:

$$\hat{V}_L + \frac{\hat{i}_1}{\hat{Y}_1} = \hat{V}_t \quad (C.1)$$

Además

$$\hat{V}_t = (v_q + jv_d)e^{j\delta_m} \quad (C.2)$$

$$\hat{i} = (i_q + ji_d)e^{j\delta_m} = \hat{i}_1 \quad (C.3)$$

$$\hat{Y} = Y \angle \phi = \hat{Y}_1 \quad (C.4)$$

De (C.1)-(C.4), se escribe la siguiente ecuación:

$$(v_q + jv_d) = \frac{Y_1 V_L e^{j(\delta_L - \delta_m - \phi + \phi_1)} + (i_q + ji_d)e^{-j\phi}}{Y} \quad (C.5)$$

Definiendo

$$a = Y_1 V_L \cos(\delta_L - \delta_m - \phi + \phi_1) \quad (\text{C.6})$$

$$b = Y_1 V_L \text{sen}(\delta_L - \delta_m - \phi + \phi_1) \quad (\text{C.7})$$

Reescribiendo la ecuación (C.5) de la siguiente forma:

$$i_q \cos(\phi) + i_d \text{sen}(\phi) = Y v_q - a \quad (\text{C.8})$$

$$i_d \cos(\phi) - i_q \text{sen}(\phi) = Y v_d - b \quad (\text{C.9})$$

Sustituyendo en (C.8) y (C.9) para  $v_d$  y  $v_q$  desde (5.11) y (5.12) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) - Y x'_d \\ -(\text{sen}(\phi) - Y x'_q) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Y E'_q - a) \\ (Y E'_d - b) \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Derivando para  $i_q$  e  $i_d$  de (C.10) se tiene lo siguiente:

$$I_q = \frac{\cos \phi \cdot (Y \cdot E'_q - a) + (Y \cdot E'_d - b) \cdot (Y \cdot x'_d - \sin \phi)}{-\cos^2 \phi + (\sin \phi - Y \cdot x'_d) \cdot (-\sin \phi + Y \cdot x'_q)} \quad (\text{C.11})$$

$$I_d = \frac{\cos \phi \cdot (Y \cdot E'_d - b) + (Y \cdot E'_q - a) \cdot (\sin \phi - Y \cdot x'_q)}{-\cos^2 \phi + (\sin \phi - Y \cdot x'_d) \cdot (-\sin \phi + Y \cdot x'_q)} \quad (\text{C.12})$$

## Apéndice D

### Listado de archivos ODE

Este apéndice contiene el listado de los archivos de tipo (\*.ODE) de los modelos que se han analizado en los capítulos 4 y 5. Estos archivos contienen los parámetros del modelo, ecuaciones que describen al modelo y condiciones iniciales para la simulación que el programa XPP-AUT necesita.

En los listados de los archivos ODE, no importa si las letras de las variables son mayúsculas o minúsculas, el programa XPP-AUT reconoce los dos tipos como uno solo. Algunos parámetros o variables en los listados tienen diferente nombre o letra para no repetir las que ya han sido usadas. Las ecuaciones muy largas que en este listado se escriben a continuación, en el archivo ODE se deben escribir en un solo renglón.

#### Modelo Clasico:

```
#Clasico.ode (Polar) "Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica (1)"
```

```
param Q1=10,p1=0,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1
```

```
param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,c=12,yop=8,top=-0.2094
```

```
param eop=2.5,ym=5,tm=-0.08726,em=1,pm=1,m=0.3,dmm=0.05
```

```
p=-v*eop*yop*sin(d+top)-v*em*ym*sin(d-dm+tm)+v^2*(yop*sin(top)+ym*sin(tm))
```

```
q=v*eop*yop*cos(d+top)+v*em*ym*cos(d-dm+tm)-v^2*(yop*cos(top)+ym*cos(tm))
```

```
v'=(1/(t1*kqw*kpv))*(-kqw*(po+p1-p)+(kpw*kqv-kqw*kpv)*v+kpw*(qo+q1-q)+kpw*kqv2*v^2)
```

```
dm'= w
```

```
w'=(1/m)*(-dmm*w+pm+em*ym*v*sin(d-dm-tm)+em^2*ym*sin(tm))
```

```
d'=(1/kqw)*(-kqv2*v^2-kqv*v-qo-q1+q)
```

```
dm(0)=0.2858
```

```
w(0)=0
```

```
d(0)=0.10662
```

```
V(0)=1.2295
```

```
@ Dt=0.01,TOTAL=50,MAXSTOR=10000000,method=Q
```

```
# AUTO options
```

```
@ autoeval=1, autovar=V
```

```
@ NTST=15,PARMIN=10,PARMAX=11.5
@ AUTOXMIN=10,AUTOXMAX=11.5,AUTOYMIN=0.5,AUTOYMAX=1.3,
done
```

### Modelo1:

# Sistema1.ode "Sistema de potencia de tres nodos con sistema de excitación rápido en el generador" en forma rectangular.

```
param Q1=10,p1=0,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1
param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,c=12,yop=8,top=-5
param eop=2.5,pm=1,m=0.3,dmm=0.05,bo=-19.923904,
param go=1.742992,bm=-4.9809,gm=0.435778,bop=-7.8251,gop=1.6632,x=0.1992
param xd=1,xdp=0.4,Tdo=4,KA=106.93,TA=0.003,Vref=1.2,Efdo=-5,Efdrlim=5
```

$$p=(v*eo*op*((gop)*\cos(d)+(bop)*\sin(d))+v*em*((gm)*\cos(d-dm)+(bm)*\sin(d-dm))-v^2*(gop+gm))$$

$$q=(v*eo*op*((gop)*\sin(d)-(bop)*\cos(d))+v*em*((gm)*\sin(d-dm)-(bm)*\cos(d-dm))+(v^2*(bop+bm)))$$

$$v'=(1/(t1*kqw*kpv))*(-kqw*(po+p1-p)+(kpw*kqv-kqw*kpv)*v+kpw*(qo+q1-q)+kpw*kqv2*v^2)$$

$$dm'=w$$

$$w'=(1/m)*(-dmm*w+pm-(em*v*(-gm*\cos(dm-d))+(-bm)*\sin(dm-d))+em^2*gm)$$

$$d'=(1/kqw)*(-kqv2*v^2-kqv*v-qo-q1+q)$$

$$em'=(1/Tdo)*(-(xd+x)/(xdp+x)*em+((xd-xdp)/(xdp+x))*v*\cos(dm-d)+Efdr)$$

$$Efdrr'=(1/TA)*(KA*(Vref-Vt)-(Efdrr-Efdo))$$

$$Efdr=(Efdrlim/2)*\tanh((Efdrr-(Efdrlim/2))/(Efdrlim/2))+(Efdrlim/2)$$

$$Vt=(1/(xdp+x))*((V*xdp+x*em*\cos(dm-d))^2+(x*em*\sin(dm-d))^2)^{1/2}$$

```
V(0)=1.2295
dm(0)=0.2858
w(0)=0
d(0)=0.10662
em(0)=1
Efdrr(0)= 0.4
```

done

### Modelo2:

# Sistema1.ode "Sistema de potencia de tres nodos con StatCom" en forma rectangular.

```
param Q1=10,p1=0,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1
param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,yop=8,top=-5
param eop=2.5,pm=1,m=0.3,dmm=0.05
param bm=-4.9809,gm=0.435778,bop=-7.8251,gop=1.6632
param Ls=0.1,Rs=0.1
param C=0.1,Rdc=600,em=1,vdcref=1.3201, k2p=-0.1
```

param k2v=0.001,K2q=0.5,k1p=0.35,k1v=0.35,k1q=1,Qref=0.0001,alfalim=1,klim=1

#Ecuaciones del sistema

$$p=(v*eo*((gop)*\cos(d)+(bop)*\sin(d))+v*em*((gm)*\cos(d-dm)+(bm)*\sin(d-dm))-v^2*(gop+gm)+V*(Id*\cos(d)+Iq*\sin(d)))$$

$$q=(v*eo*((gop)*\sin(d)-(bop)*\cos(d))+v*em*((gm)*\sin(d-dm)-(bm)*\cos(d-dm))+v^2*(bop+bm))+v*(Id*\sin(d)-Iq*\cos(d))$$

$$v'=(1/(t1*kqw*kp))*(kqw*(po+p1-p)+(kpw*kqv-kqw*kp)*v+kpw*(qo+q1-q)+kpw*kqv^2*v^2)$$

$$dm'=w$$

$$w'=(1/m)*(-dmm*w+pm-(em*v*(-gm*\cos(d-dm)-(-bm)*\sin(d-dm))+em^2*gm))$$

$$d'=(1/kqw)*(-kqv^2*v^2-kqv*v-qo-q1+q)$$

#Ecuaciones del Statcom

$$Id'=-((Rs/Ls)*Id+Iq*w+(k/Ls)*\cos(\text{alfa}+d)*Vdc-(V/Ls)*\cos(d))$$

$$Iq'=-((Rs/Ls)*Iq-Id*w+(k/Ls)*\sin(\text{alfa}+d)*Vdc-(V/Ls)*\sin(d))$$

$$Vdc'=-((k*\cos(\text{alfa}+d)*Id-k*\sin(\text{alfa}+d)*Iq-(Vdc/Rdc))/C)$$

#Ecuaciones de control del Statcom

$$Pa=V*(Id*\cos(d)+Iq*\sin(d))$$

$$Qa=v*(Id*\sin(d)-Iq*\cos(d))$$

$$x1'=K2v*(Vdcref-Vdc)$$

$$Did=K1v*(Vdcref-vdc)+x1$$

$$x2'=k2p*Did$$

$$k1=k1p*Did+x2$$

$$x3'=K2q*((Qa-Qref)/V)$$

$$\text{alfa1}=K1q*((Qa-Qref)/V)+x3$$

$$k=\text{klim}*\tanh(k1/\text{klim})$$

$$\text{alfa}=\text{alfalim}*\tanh(\text{alfa1}/\text{alfalim})$$

#Condiciones iniciales

$$V(0)=1.2295$$

$$dm(0)=0.2858$$

$$w(0)=0$$

$$d(0)=0.10662$$

$$X1(0)=3.7619e-19$$

$$x2(0)=1.66768$$

$$x3(0)=-1.3240e-05$$

$$Id(0)=-0.001557$$

Iq(0)=-0.0002484  
Vdc(0)=1.32  
done

### Modelo3:

# Sistema1.ode "Sistema de potencia con sistema con AVR y un Statcom en el nodo de carga", en forma rectangular

param Q1=10,p1=0,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1  
param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,c1=12,yop=8,top=-5  
param eop=2.5,pm=1,m=0.3,dmm=0.05, bo=-19.923904,go=1.742992  
param bm=-4.9809,gm=0.435778,bop=-7.8251,gop=1.6632,X=0.1992  
param xd=1,xdp=0.4,Tdo=4,KA=106.93,TA=0.003,Vref=1.2,Efdo=-5,Efdrlim=5  
param C=2,Rdc=250,vdcref=1.9501,Ls=0.1,Rs=0.1, k2p=-0.2  
param k2v=0.001,K2q=0.5,k1p=0.1,k1v=0.1,k1q=1,Qref=0.001,alfalim=1,klim=1

#Ecuaciones de balance de potencia

$$p=(v*eop*((gop)*\cos(d)+(bop)*\sin(d))+v*em*((gm)*\cos(d-dm)+(bm)*\sin(d-dm))-v^2*(gop+gm)+V*(Id*\cos(d)+Iq*\sin(d)))$$

$$q=(v*eop*((gop)*\sin(d)-(bop)*\cos(d))+v*em*((gm)*\sin(d-dm)-(bm)*\cos(d-dm))+(v^2*(bop+bm))+v*(Id*\sin(d)-Iq*\cos(d)))$$

#Ecuaciones del Sistema

$$v'=(1/(t1*kqw*kpv))*(-kqw*(po+p1-p)+(kpw*kqv-kqw*kpv)*v+kpw*(qo+q1-q)+kpw*kqv2*v^2)$$

$$dm'=w$$

$$w'=(1/m)*(-dmm*w+pm*(-em*v*(gm*\cos(dm-d)+(bm)*\sin(dm-d))+em^2*gm))$$

$$d'=(1/kqw)*(-kqv2*v^2-kqv*v-qo-q1+q)$$

$$em'=(1/Tdo)*(-(xd+x)/(xdp+x))*em+((xd-xdp)/(xdp+x))*v*\cos(dm-d)+Efdrr$$

#Ecuaciones del AVR

$$Efdrr'=(1/TA)*(KA*(Vref-Vt)-(Efdrr-Efdo))$$

$$Efdrr=(Efdrlim/2)*\tanh((2*Efdrr-Efdrlim)/Efdrlim)+Efdrlim/2$$

$$Vt=(1/(xdp+x))*((V*xdp+x*em*\cos(dm-d))^2+(x*em*\sin(dm-d))^2)^{(1/2)}$$

#Ecuaciones del Statcom

$$Id'=-((Rs/Ls)*Id+Iq*w+(k/Ls)*\cos(alfa+d)*Vdc-(V/Ls)*\cos(d))$$

$$Iq'=-((Rs/Ls)*Iq-Id*w+(k/Ls)*\sin(alfa+d)*Vdc-(V/Ls)*\sin(d))$$

$$Vdc'=-k*\cos(alfa+d)*Id-k*\sin(alfa+d)*Iq-(Vdc/Rdc)/C$$

#Ecuaciones de control del Statcom controlando Qa en el nodo de carga

$$Pa=V*(Id*\cos(d)+Iq*\sin(d))$$

$$Qa=v*(Id*\sin(d)-Iq*\cos(d))$$

```
x1'=(K2v)*(Vdcref-Vdc)
Did=K1v*(Vdcref-vdc)+x1
```

```
x2'=k2p*Did
k1=k1p*Did+x2
```

```
x3'=K2q*((Qa-Qref)/V)
alfa1=K1q*((Qa-Qref)/V)+x3
```

```
k=klim*tanh(k1/klim)
```

```
alfa=alfalim*tanh(alfa1/alfalim)
```

```
V(0)=1.2295
dm(0)=0.2858
w(0)=0
d(0)=0.10662
Em(0)=1
Efdrr(0)= 0.4
X1(0)=-6.5398e-24
X2(0)=0.74152
X3(0)=-6.6195e-05
Id(0)=-0.00812088
Iq(0)=-0.00168382
Vdc(0)=1.95
done
```

#### **Modelo4a:**

#Generador a carga dinámica sin el CEV.

```
par Pd=0,M=0.1,Dm=0.1,X=0.5,E=1,k=0.5,tau=0.001,Ts=0.01,Vref=1
```

```
d'=w
w'=(1/M)*(Pd-((E*V)/X)*sin(d)-Dm*w)
V'=(1/tau)*(-k*Pd+V^2*(Bc-(1/X))+((E*V)/X)*cos(d))
Bc'=(1/Ts)*(Vref-V)
```

```
V(0)=1
d(0)=0.7855
w(0)=0
Bc(0)=1.2930
```

```
@ Dt=0.01,TOTAL=30,MAXSTOR=10000000, meth=Q
done
```

#### **Modelo4b:**

#Generador a carga dinámica incluyendo un CEV.

```
param Pd=0,M=0.1,Dm=0.1,X=0.5,E=1,k=0.5,tau=0.001,Ts=0.01,Vref=1
```

```
d'=w
```

$$w'=(1/M)*(Pd-((E*V)/X)*\sin(d)-Dm*w)$$

$$V'=(1/\tau)*(-k*Pd+V^2*(Bc-(1/X))+((E*V)/X)*\cos(d))$$

$$Bc'=(1/Ts)*(Vref-V)$$

$$V(0)=1$$

$$d(0)=0.7855$$

$$w(0)=0$$

$$Bc(0)=1.2930$$

@ Dt=0.01,TOTAL=30,MAXSTOR=10000000, meth=Q  
done

### Modelo5:

#Modelo5: “Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica tipo II y sistema de excitación rápido en el generador sin limitador de voltaje de campo”.

param Pm=0.4,Y1=4.9752,Y2=1.6584,Y=4.9752,Fi1=-1.4711,Fi2=-1.4711,Fi=-1.4711  
param Eb=1,Em=1Xd=1.79,Xq=1.71,Xdp=0.169,Xqp=0.23,Tdop=4.3,Tqop=0.85  
param P0=0.4,Q0=0.8,P1=0.24,Q1=-0.02,P2=1.7,Q2=-1.866,H=2.894,Wb=377,D=0.05  
param P3=0.2,Q3=1.6,Q1d=0,P1d=0,Bc=0.2,KA=200,TA=0.05,Vref=1.1223

#Ecuaciones algebraicas

$$a=Y1*VL*\cos(DL-dm-Fi+Fi1)$$

$$b=Y1*VL*\sin(DL-dm-Fi+Fi1)$$

$$Wp=(Xqp-Xq)/((\cos(Fi))^2-(\sin(Fi)-Y*Xdp)*(Y*Xqp-\sin(Fi)))$$

$$Bp=\sin(Fi)-Y*Xdp$$

$$Edp=(1/(1+Wp*Y*Bp))*(Wp*((Y*\cos(Fi)*Eqp)+(b*Bp-a*\cos(Fi))))$$

$$Iq=(1/(1-\sin(Fi)*Y*Xdp-\sin(Fi)*Y*Xqp+Y^2*Xdp*Xqp))*(\cos(Fi)*Y*Eqp-a*\cos(Fi)-Y*Edp*\sin(Fi)+b*\sin(Fi)+Y^2*Xdp*Edp-b*Y*Xdp)$$

$$Id=(1/(1-\sin(Fi)*Y*Xdp-\sin(Fi)*Y*Xqp+Y^2*Xdp*Xqp))*(\sin(Fi)*Y*Eqp-a*\sin(Fi)+Y*Edp*\cos(Fi)-b*\cos(Fi)-Y^2*Xqp*Eqp+a*Y*Xqp)$$

$$Vq=Eqp+Xdp*Id$$

$$Vd=Edp-Xqp*Iq$$

$$Vt=\sqrt{Vq^2+Vd^2}$$

$$Vi=(Vd/Vq)$$

$$teta=dm+atan(Vi)$$

$$P=(Vt*VL*Y1*\cos(DL-teta-Fi1)-VL^2*Y1*\cos(Fi1)+Eb*VL*Y2*\cos(DL-Fi2)-VL^2*Y2*\cos(Fi2))$$

$$P=(Vt*VL*Y1*\sin(DL-teta-Fi1)+VL^2*Y1*\sin(Fi1)+Eb*VL*Y2*\sin(DL-Fi2)+VL^2*Y2*\sin(Fi2))$$

#Ecuaciones Diferenciales

$$VL'=(P-P1d-P0-P1*((q-Q1d-Q0-Q2*VL-(Q3-Bc)*VL^2)/Q1)-P3*VL)/P2$$

$$dm'=w*Wb$$

$$w'=(-D*w+pm-(Eqp*Iq+Edp*Id+(Xdp-Xqp)*Id*Iq))/(2*H)$$

$$Eqp'=(-Eqp+(Xd-Xdp)*Id+Efd)/Tdop$$

$$Efd'=(-Efd+KA*(Vref-Vt))/TA$$

$$DL'=(Q-Q1d-Q0-Q2*VL-(Q3-Bc)*VL^2)/Q1$$

$$VL(0)=1.012$$

$$dm(0)=0.8684$$

$$w(0)=0$$

$$DL(0)=0.1312$$

$$Efd(0)=2.3684$$

$$Eqp(0)=1.0556$$

@ Dt=0.01,TOTAL=90,MAXSTOR=10000000, meth=Q  
done

### Modelo6:

# “Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica tipo II y sistema de excitación rápido en el generador con diferentes valores del limitador de campo”.

param Pm=0.4,Y1=4.9752,Y2=1.6584,Y=4.9752,Fi1=-1.4711,Fi2=-1.4711  
param Fi=-1.4711,Eb=1,Em=1Xd=1.79,Xq=1.71,Xdp=0.169,Xqp=0.23,Tdop=4.3  
param Tqop=0.85,H=2.894,wb=377,D=0.05,P0=0.4,Q0=0.8,P1=0.24,Q1=-0.02  
param P2=1.7,Q2=-1.866,P3=0.2,Q3=1.6,Q1d=0,P1d=0,Bc=0.2,KA=200  
param TA=0.05,Vref=1.1223,Efdlim=3

#Ecuaciones algebraicas

$$a=Y1*VL*\cos(DL-dm-Fi+Fi1)$$

$$b=Y1*VL*\sin(DL-dm-Fi+Fi1)$$

$$Wp=(Xqp-Xq)/((\cos(Fi))^2-(\sin(Fi)-Y*Xdp)*(Y*Xqp-\sin(Fi)))$$

$$Bp=\sin(Fi)-Y*Xdp$$

$$Edp=(1/(1+Wp*Y*Bp))*(Wp*((Y*\cos(Fi)*Eqp)+(b*Bp-a*\cos(Fi))))$$

$$Iq=(1/(1-\sin(Fi)*Y*Xdp-\sin(Fi)*Y*Xqp+Y^2*Xdp*Xqp))*(\cos(Fi)*Y*Eqp-a*\cos(Fi)-Y*Edp*\sin(Fi)+b*\sin(Fi)+Y^2*Xdp*Edp-b*Y*Xdp)$$

$$Id=(1/(1-\sin(Fi)*Y*Xdp-\sin(Fi)*Y*Xqp+Y^2*Xdp*Xqp))*(\sin(Fi)*Y*Eqp-a*\sin(Fi)+Y*Edp*\cos(Fi)-b*\cos(Fi)-Y^2*Xqp*Eqp+a*Y*Xqp)$$

$$Vq=Eqp+Xdp*Id$$

$$Vd=Edp-Xqp*Iq$$

$$Vt=sqrt(Vq^2+Vd^2)$$

$$Vi=(Vd/Vq)$$

$$teta=dm+atan(Vi)$$

$$P=(Vt*VL*Y1*cos(DL-teta-Fi1)-VL^2*Y1*cos(Fi1)+Eb*VL*Y2*cos(DL-Fi2)-VL^2*Y2*cos(Fi2))$$

$$P=(Vt*VL*Y1*sin(DL-teta-Fi1)+VL^2*Y1*sin(Fi1)+Eb*VL*Y2*sin(DL-Fi2)+VL^2*Y2*sin(Fi2))$$

#Ecuaciones Diferenciales

$$VL'=(P-P1d-P0-P1*((q-Q1d-Q0-Q2*VL-(Q3-Bc)*VL^2)/Q1)-P3*VL)/P2$$

$$dm'=w*Wb$$

$$w'=(-D*w+pm-(Eqp*Iq+Edp*Id+(Xdp-Xqp)*Id*Iq))/(2*H)$$

$$Eqp'=-Eqp+(Xd-Xdp)*Id+Efd/Tdop$$

$$Efd'=(-Efd+KA*(Vref-Vt))/TA$$

$$Efdr=(Efdlim/2)*tanh((2*Efd-Efdlim)/Efdlim)+Efdlim/2$$

$$DL'=(q-Q1d-Q0-Q2*VL-(Q3-Bc)*VL^2)/Q1$$

$$VL(0)=1.012$$

$$dm(0)=0.8684$$

$$w(0)=0$$

$$DL(0)=0.1312$$

$$Efd(0)=2.3684$$

$$Eqp(0)=1.0556$$

@ Dt=0.01,TOTAL=90,MAXSTOR=10000000, meth=Q

done

### Modelo7:

#Modelo7: "Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica tipo II incluyendo un StatCom en paralelo con la carga".

param Pm=0.4, Y1=4.9752, Y2=1.6584, Y=4.9752, Fi1=-1.4711, Fi2=-1.4711, Fi=-1.4711

param Eb=1, Em=1, Xd=1.79, Xq=1.71, Xdp=0.169, Xqp=0.23, Tdop=4.3

param Tqop=0.85, H=2.894, Wb=377, D=0.05, Tsvc=0.01, Blim=1, P0=0.4,

param P2=1.7, Q2=-1.866, P3=0.2, Q3=1.6, Q1d=0, P1d=0, Q0=0.8, P1=0.24, Q1=-0.02

param KA=200, TA=0.05, Vref=1.1223, Vref2=1.0195, k2p=-0.05, k2v=0.01, K2q=0.15

param Ls=0.1, Rs=0.01, C=0.7, Rdc=22, vdcref=1.951, k1p=0.1,

param k1v=0.1, k1q=0.3, Qref=0.4, klim=1, alflim=1

#Ecuaciones algebraicas

$$a=Y1*VL*\cos(DL-dm-Fi+Fi1)$$

$$b=Y1*VL*\sin(DL-dm-Fi+Fi1)$$

$$Wp=(Xqp-Xq)/((\cos(Fi))^2-(\sin(Fi)-Y*Xdp)*(Y*Xqp-\sin(Fi)))$$

$$Bp=\sin(Fi)-Y*Xdp$$

$$Edp=(1/(1+Wp*Y*Bp))*(Wp*((Y*\cos(Fi)*Eqp)+(b*Bp-a*\cos(Fi))))$$

$$Iq=(1/(1-\sin(Fi)*Y*Xdp-\sin(Fi)*Y*Xqp+Y^2*Xdp*Xqp))*(\cos(Fi)*Y*Eqp-a*\cos(Fi)-Y*Edp*\sin(Fi)+b*\sin(Fi)+Y^2*Xdp*Edp-b*Y*Xdp)$$

$$Id=(1/(1-\sin(Fi)*Y*Xdp-\sin(Fi)*Y*Xqp+Y^2*Xdp*Xqp))*(\sin(Fi)*Y*Eqp-a*\sin(Fi)+Y*Edp*\cos(Fi)-b*\cos(Fi)-Y^2*Xqp*Eqp+a*Y*Xqp)$$

$$Vq=Eqp+Xdp*Id$$

$$Vd=Edp-Xqp*Iq$$

$$Vt=\sqrt{Vq^2+Vd^2}$$

$$Vi=(Vd/Vq)$$

$$\text{teta}=dm+\text{atan}(Vi)$$

$$P=(Vt*VL*Y1*\cos(DL-\text{teta}-Fi1)-VL^2*Y1*\cos(Fi1)+Eb*VL*Y2*\cos(DL-Fi2)-VL^2*Y2*\cos(Fi2)+VL*(Id1*\cos(DL)+Iq1*\sin(DL)))$$

$$P=(Vt*VL*Y1*\sin(DL-\text{teta}-Fi1)+VL^2*Y1*\sin(Fi1)+Eb*VL*Y2*\sin(DL-Fi2)+VL^2*Y2*\sin(Fi2)+vL*(Id1*\sin(DL)-Iq1*\cos(DL)))$$

#Ecuaciones Diferenciales

$$VL'=(P-P1d-P0-P1*((q-Q1d-Q0-Q2*VL-Q3*VL^2)/Q1)-P3*VL)/P2$$

$$dm'=w*Wb$$

$$w'=(-D*w+pm-(Eqp*Iq+Edp*Id+(Xdp-Xqp)*Id*Iq))/(2*H)$$

$$DL'=(q-Q1d-Q0-Q2*VL-Q3*VL^2)/Q1$$

$$Id1'=-\text{(Rs/Ls)*Id1+Iq1*w+(k/Ls)*\cos(alfa+DL)*Vdc-(VL/Ls)*\cos(DL)}$$

$$Iq1'=-\text{(Rs/Ls)*Iq1-Id1*w+(k/Ls)*\sin(alfa+DL)*Vdc-(VL/Ls)*\sin(DL)}$$

$$Vdc'=(1/C)*(-k*\cos(alfa+DL)*Id1-k*\sin(alfa+DL)*Iq1-(Vdc/Rdc))$$

$$Eqp'=-\text{(Eqp+(Xd-Xdp)*Id+Efd)/Tdop}$$

$$Efd'=-\text{(Efd+KA*(Vref-Vt))/TA}$$

$$Pa=VL*(Id1*\cos(DL)+Iq1*\sin(DL))$$

$$Qa=vL*(Id1*\sin(DL)-Iq1*\cos(DL))$$

$$x1'=(K2v)*(Vdcref-Vdc)$$

$$DId1=K1v*(Vdcref-vdc)+x1$$

$$x2'=k2p*DId1$$

$$k1=k1p*DId1+x2$$

$$x3'=K2q*((Qa-Qref)/VL)$$

$$alfa1=K1q*((Qa-Qref)/VL)+x3$$

$$k=klim*\tanh(k1/klim)$$

$$alfa=alflim*\tanh(alfa1/alflim)$$

$$VL(0)=1.012$$

$$dm(0)=0.8684$$

$$w(0)=0$$

$$DL(0)=0.1312$$

$$Efd(0)=2.3684$$

$$Eqp(0)=1.0556$$

$$Id1(0)=-0.21302$$

$$Iq1(0)=-0.1521$$

$$Vdc(0)=1.95$$

$$X1(0)=0$$

$$X2(0)=0.5734$$

$$X3(0)=-0.001955$$

@ Dt=0.01,TOTAL=90,MAXSTOR=10000000, meth=Q

done