



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

*“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”*

División de estudios de Posgrado

*“Matrices de diferenciación aplicadas en  
EDP's.”*

Tesis

Para obtener el grado de:

Maestro en ciencias en Ingeniería Física.

Presenta:

Lic. Rafael García Ruiz.

Director de Tesis:

Dr. Rafael González Campos.



# Matrices de diferenciación aplicadas en EDP's.

por

**Rafael García Ruiz**

Licenciado en ciencias Físico Matemáticas.



GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN MATRICES DE DIFERENCIACIÓN.  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA.  
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO.  
MORELIA, MICHOACÁN, MÉXICO.

---

# Matrices de diferenciación aplicadas en EDP's

**Rafael García Ruiz**

Licenciado en ciencias Físico Matemáticas.

TESIS DIRIGIDA POR  
**Dr. Rafael González Campos**



TESIS SOMETIDA COMO CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUISITOS  
PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA  
FÍSICA.

16 DE AGOSTO DE 2012

---

*Para mi familia.*

## AGRADECIMIENTOS

---

Dedico el trabajo realizado en esta tesis a mi Familia, por su apoyo incondicional, por su paciencia, comprensión, cariño, apoyo y compañía a lo largo de la realización de esta tesis de maestría. Agradezco también a mi amigo Fabio Duvan Lora Clavijo por los consejos, su amistad y el aprendizaje que obtuve junto a él. Agradezco al profesor Francisco Domínguez Mota, por todo su apoyo y su ayuda incondicional, al cual tengo en alta estima. Agradezco a mi asesor Rafael González Campos por todo lo que he aprendido con él durante todos estos años cómo su alumno, tesista y amigo, así como el haberme heredado un tema de investigación como lo son las matrices de diferenciación, al cual espero representar en la forma adecuada. Y agradezco a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por haberme dado la oportunidad de ser parte de sus egresados, por la educación que obtuve en ella desde el Colegio de San Nicolás de Hidalgo, la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y la Maestría en Ciencias en Ingeniería Física, gracias por permitirme ser un orgulloso Nicolaita de Corazón.

# CONTENIDO

---

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
<b>2. MATRICES DE DIFERENCIACIÓN.</b>	<b>4</b>
2.1. Matrices de diferenciación algebraicas. . . . .	4
2.2. Interpolación algebraica. . . . .	5
2.3. Interpolación trigonométrica . . . . .	8
2.4. Propiedades de las matrices de diferenciación. . . . .	14
2.5. Matrices de diferenciación parciales. . . . .	15
<b>3. ESQUEMA DEL MÉTODO EN IVP.</b>	<b>17</b>
<b>4. EJEMPLOS.</b>	<b>20</b>
4.1. Ecuación de calor. . . . .	20
4.1.1. Ejemplo: Ecuación de calor en 3+1 dimensiones. . . . .	23
4.1.2. Solución discreta de la ecuación de calor en 3+1 dimensiones. . . . .	24
<b>5. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES DE DIFERENCIACIÓN.</b>	<b>38</b>
5.1. Transformada de Fourier. . . . .	38

---

5.1.1.	Representación de la integral de Fourier. . . . .	39
5.1.2.	La Transformada de Fourier . . . . .	39
5.1.3.	Método de la Transformada de Fourier . . . . .	40
5.1.4.	Transformada de Fourier de la derivada. . . . .	40
5.1.5.	Transformada Discreta de Fourier . . . . .	41
5.2.	Diagonalización de la matriz de diferenciación trigonométrica. . . . .	42
5.3.	Matrices de diferenciación rápidas. . . . .	43
5.3.1.	Algoritmo de la matriz de diferenciación rápida. . . . .	43
5.4.	Matriz de diferenciación trigonométrica par. . . . .	44
<b>6.</b>	<b>MATRICES DE INTEGRACIÓN .</b>	<b>46</b>
6.1.	Antiderivadas rápidas. . . . .	46
6.2.	Condiciones iniciales. . . . .	47
6.3.	Condiciones de frontera. . . . .	47
<b>7.</b>	<b>APLICACIONES.</b>	<b>49</b>
7.1.	Ecuación de Calor. . . . .	49
7.1.1.	Solución exacta. . . . .	50
7.2.	Matrices de diferenciación rápidas aplicadas a la Ecuación de Calor. . . . .	52
7.2.1.	Sustitución de parametros y obtención de resultados gráficos. . . . .	55
7.2.2.	Propagación del Error . . . . .	58
7.3.	Ecuación de Burgers. . . . .	60
7.4.	Matrices de diferenciación rápidas aplicadas a la ecuación de Burgers. . . . .	61
7.4.1.	Solución exacta y aproximada a la Ecuación de Burgers. . . . .	61

---

7.4.2. Ecuación de Burgers . . . . .	65
7.4.3. Solución exacta y aproximada a la Ecuación de KdV-Burgers. . . . .	66
<b>8. CONCLUSIONES.</b>	<b>71</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>73</b>

## LISTA DE FIGURAS

---

3.1. Primer bloque. . . . .	17
3.2. Segundo bloque. . . . .	18
4.1. Longitud de la varilla. . . . .	21
4.2. $U$ es una sección de la varilla. . . . .	21
4.3. Flujo de calor de $b \rightarrow a$ . . . . .	22
4.4. Dominio discreto. . . . .	25
4.5. Solución de la ecuación de calor para un tiempo, recorriendo cada uno de los valores de $u$ en $x$ , para todo $y$ y $z$ . . . . .	28
4.6. Solución de la ecuación de calor para $t = 0.01$ , recorriendo cada uno de los valores de $u$ en tres distintas posiciones de $x$ , para todo $y$ y $z$ . . . . .	28
4.7. Solución de la ecuación de calor para $t = 0.1$ , recorriendo cada uno de los valores de $u$ en tres distintas posiciones de $x$ , para todo $y$ y $z$ . . . . .	29
4.8. Solución de la ecuación de calor para un $t = 0.24$ , recorriendo cada uno de los valores de $u$ en tres distintas posiciones de $x$ , para todo $y$ y $z$ . . . . .	29
4.9. Norma infinita del error entre la solución exacta y la solución aproximada para $t = 0.05$ . . . . .	30
4.10. Norma infinita. . . . .	31
4.11. Norma infinita del error en todo $x$ para $t = 0.05$ . . . . .	31

---

4.12. Norma infinita del error entre la solución exacta y la solución aproximada para $t = 0.1$ . . . . .	32
4.13. Norma infinita del error entre la solución exacta y la solución aproximada para $t = 0.15$ . . . . .	33
4.14. Norma infinita del error entre la solución exacta y la solución aproximada para $t = 0.2$ . . . . .	34
4.15. Norma infinita del error entre la solución exacta y la solución aproximada para $t = 0.24$ . . . . .	35
4.16. Error relativo en distintos tiempos. . . . .	36
7.1. Barra sólida conductora de calor. . . . .	49
7.2. Problema con valores a la frontera para la ecuación de conducción de calor. . . . .	50
7.3. Dominio discretizado. . . . .	53
7.4. Esquema del primer subintervalo de tiempo. . . . .	54
7.5. Esquema del segundo subintervalo de tiempo. . . . .	55
7.6. Soluciones a la ecuación de calor para diversos tiempos. . . . .	56
7.7. Soluciones superpuestas para diversos tiempos. . . . .	57
7.8. Solución para los diez mil subintervalos en los que se dividió el problema. . . . .	58
7.9. Error relativo para para diversos tiempos. . . . .	59
7.10. Solución exacta y solución aproximada para diversos pasos de tiempo. . . . .	63
7.11. Error relativo para diversos pasos de tiempo. . . . .	64
7.12. Norma infinita. . . . .	65
7.13. Solución aproximada de la ecuación de Burgers. . . . .	66
7.14. Solución aproximada y solución exacta de la ecuación de KdV-Burgers en diversos tiempos. . . . .	68

---

7.15. Error relativo entre la solución aproximada y la solución exacta de la ecuación de KdV-Burgers en diversos tiempos. . . . .	69
7.16. Norma infinita del error para la ecuación KdV-Burgers. . . . .	70

---

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

---

### SECTION 1.1

#### Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales son ecuaciones que involucran funciones desconocidas de varias variables y sus respectivas derivadas parciales, dichas ecuaciones forman parte de modelos físicos y de la ingeniería; por razones de complejidad su tratamiento recurre al análisis numérico.

El análisis numérico es una rama de las matemáticas que estudia formas de resolver de manera numérica y aproximada diversos problemas en las ciencias aplicadas que son muy complejos como para resolver de manera analítica o que simplemente no tienen otra forma de reducción. Así el análisis numérico es de vital importancia en la solución de ecuaciones diferenciales parciales en la matemática aplicada y es especialmente útil cuando la ecuación no tiene solución analítica por ser de fronteras irregulares, no homogéneas o ser ecuaciones no lineales ; es aquí cuando el análisis numérico facilita el desarrollo del problema proporcionando una solución aproximada al problema. Existen diferentes métodos numéricos para resolver EDP's

- **Diferencias Finitas:**

La aproximación de las derivadas por medio de diferencias finitas es uno de los métodos numéricos clásicos que resuelven ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera, en ecuaciones hiperbólicas, especialmente cuasilineales las cuales admiten

soluciones discontinuas. Consiste en aproximar las derivadas que intervienen en las ecuaciones en ciertos puntos del dominio usando polinomios de interpolación.

- Elementos Finitos :

Es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales asociados a problemas físicos sobre geometrías complicadas, se usan en diseño y mejora de productos de aplicaciones industriales así como simulación de sistemas físicos y biológicos complejos. Para obtener este tipo de método se introduce una partición en el dominio del problema y con base en dicha partición se introducen funciones aproximantes y la solución se expresa como una superposición de las funciones aproximantes. Finalmente los coeficientes en esta expansión se obtienen utilizando el método de residuos pesados. Este procedimiento consiste en imponer la condición de que el residuo en la ecuación diferencial sea cero cuando se le aplican funciones de peso de una familia previamente seleccionada.

- Métodos Espectrales:

Los métodos espectrales se propusieron en 1944 como una herramienta para simulaciones a gran escala en dinámica de fluidos ya que probaron ser particularmente útiles en estudios numéricos de la dinámica de fluidos. Se utilizan códigos espectrales en estudios de turbulencia, modelaje global del comportamiento climático y en la dinámica de los océanos.

- Métodos de Colocación:

Este método es similar al de Elementos Finitos salvo que los coeficientes en la expansión de la solución, en lugar de utilizar el método del residuo pesado, se obtiene imponiendo la condición de que el residuo se anule en algunos puntos del dominio. A estos puntos se les llama puntos de colocación.

Entre muchos otros métodos numéricos. El principal objetivo de esta tesis es el utilizar un nuevo método de solución numérica para resolver ecuaciones diferenciales parciales con solución discontinua(4.1.1) y (7.1), así como en ecuaciones diferenciales no lineales(7.3) las cuales juegan un papel importante en varias áreas de la física moderna así como de la ingeniería dentro de la mecánica de fluidos, mecánica cuántica, etc. Y una de las ecuaciones más importantes es la ecuación de Burgers por la dificultad que representa el encontrar numéricamente su solución.

Como es bien conocido los esquemas en diferenciación para  $N$  puntos son técnicas para aproximaciones computacionales de derivadas e integrales definidas respectivamente así como para fórmulas de cuadratura, sobre funciones suaves. Estos métodos reproducen la derivada o la integral como una combinación lineal de los valores de la función de  $f(x_k)$  en los  $N$  nodos  $x_k, k = 1, 2, \dots, N$  y esto se puede realizar por el uso de las fórmulas de interpolación.

La diferenciación en  $N$  puntos y la evaluación de la derivada en los  $N$  puntos da lugar a los métodos de colocación y a las matrices de diferenciación las cuales son importantes

herramientas en los métodos espectrales y para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales [1]-[6]. El uso de interpolación trigonométrica produce una matriz de diferenciación que proporciona las derivadas exactas para funciones periódicas [7]. Esta matriz es diferente a las que se usa en aplicaciones actuales [1]-[2]. Esta matriz es diagonalizable por la transformada discreta de Fourier y su inversa reproduce a la matriz de antiderivadas y a la matriz de integración (6). Estas matrices se utilizan para resolver dentro de la tesis EDP's en  $3 + 1$  dimensiones (4.1.1) y (7.1) con condiciones de frontera homogéneas y no homogéneas y ecuaciones no lineales (7.3). Del mismo modo, el uso de la formula de interpolación Lagrangiana reproduce una matriz de diferenciación construida con diferentes números complejos, la cuál proporciona derivadas exactas para funciones meromorfas [3]-[5] y es útil para resolver problemas de valores a la frontera y valores iniciales [4]-[6], para muchos nodos en el tiempo lo cuál es de gran utilidad en problemas dinámicos [9] e integración numérica [6]. Se usa la transformada discreta de Fourier para calcular derivadas rápidas en  $\mathcal{O}(n \log(n))$  operaciones y se hace uso de la invertibilidad de  $D$  (Matriz de diferenciación) para obtener las antiderivadas rápidas de esta clase de funciones. Estas ideas son utiles en las secciones (7.2), (7.4.1), (7.4.3) y (7.4.2), las cuales son implementadas para encontrar las soluciones de la ecuación unidimensional de Burgers y la ecuación KdV de Burgers, ecuaciones que son no lineales.

---

# Capítulo 2

## MATRICES DE DIFERENCIACIÓN.

---

### SECTION 2.1

#### Matrices de diferenciación algebraicas.

A continuación se presentan dos clases de matrices de diferenciación. Una de ellas consiste en matrices que se emplean en espacios de polinomios que pueden reproducir exactamente la derivada de un polinomio algebraico y la otra clase consiste en matrices que reproducen exactamente la derivada de polinomios trigonométricos, esto se observa en la sección (2.4). Estas clases de matrices se obtienen usando el concepto de interpolación en sus versiones algebraica y trigonométrica, es decir, con la interpolación de polinomios de Lagrange e interpolación compleja.

## SECTION 2.2

## Interpolación algebraica.

Considérese un polinomio  $f(x)$  de grado hasta  $n - 1$  y  $n$  puntos arbitrarios distintos  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . De acuerdo al problema general de interpolación,  $f(x)$  se puede escribir en la forma Lagrangiana

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_i)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)} = \sum_{j=1}^n f_j \frac{P_j(x)}{P_j(x_j)}, \quad (2.1)$$

donde hemos definido  $P_j(x) = \prod_{i \neq j} (x - x_i)$ . Es conveniente en el desarrollo del método definir el polinomio  $g(x)$  como:

$$g(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

En términos de  $g(x)$  es posible obtener una forma matricial que aproxima la derivada de una función en general. Nótese que

$$P_j(x) = \frac{g(x)}{(x - x_j)}. \quad (2.2)$$

Nuestro interés es construir un vector cuyos elementos sean las aproximaciones a los valores de la derivada de  $f(x)$  evaluada en  $x_k$ , así que calculamos las expresiones evaluadas en  $x_k$ . Derivando (2.2) y evaluando en  $x_k$  obtenemos

$$P_j'(x_k) = \frac{g'(x_k)}{(x_k - x_j)}. \quad (2.3)$$

Considere primero el caso en que  $j \neq k$ . Entonces la expresión anterior está bien definida. Obsérvese que la expresión (2.2), es igual  $g(x) = (x - x_k)P_k(x)$ . Derivando respecto de  $x$  se obtiene  $g'(x) = (x - x_k)P_k'(x) + P_k(x)$  y evaluando en  $x_k$  resulta que  $g'(x_k) = P_k(x_k)$ , sustituyendo en (2.3) y tomando en cuenta que  $g(x_k) = 0$  se obtiene

$$P_j'(x_k) = \frac{P_k(x_k)}{(x_k - x_j)}. \quad (2.4)$$

Ahora para el caso cuando  $j = k$  la ecuación (2.2), permite escribir a  $P_k$  en la siguiente forma

$$P_k(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n).$$

Derivando a  $P_k(x)$  se llega a la siguiente expresión

$$P'_k(x) = \prod_{1,k} + \prod_{2,k} + \dots + \prod_{n,k},$$

donde cada producto indica un producto de binomios que no contienen ciertos elementos que se desaparecen al momento de haber derivado  $P_k(x)$  respecto a  $x$  obteniendo una suma de multiplicatorias. El primer término es  $\prod_{1,k} = \prod_{l \neq 1, l \neq k} (x - x_l)$ , que además de no contener al elemento  $k$  no contiene al elemento 1, la segunda multiplicatoria es  $\prod_{2,k} = \prod_{l \neq 2, l \neq k} (x - x_l)$ , dicho término no contiene al elemento 2 y al elemento  $k$ , y así sucesivamente hasta la última multiplicatoria  $\prod_{n,k} = \prod_{l \neq n, l \neq k} (x - x_l)$  que no contiene al elemento  $k$  y al elemento  $n$ . Se hace notar que todos los productos son multiplicados por la unidad, dicha unidad la podemos escoger en la manera más conveniente de tal manera que los multiplicadores obtengan uno de los términos faltantes al momento de ser evaluada  $x$  en  $x_k$  como se muestra a continuación

$$P'_k(x) = \frac{x_k - x_1}{x_k - x_1} \prod_{1,k} + \dots + \frac{x_k - x_n}{x_k - x_n} \prod_{n,k}.$$

Podemos escribir a  $P'_k(x)$  en términos de una suma de productos

$$P'_k(x) = \sum_{j=1}^n \prod_{j,k} (x - x_l) = \sum_{j=1}^n \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} \prod_{j,k} (x - x_l). \tag{2.5}$$

Se observa de (2.4) que  $P_k(x) = (x - x_j) \prod_{j,k}$ , por lo que la expresión (2.5) se puede simplificar de la siguiente manera

$$P'_k(x) = \frac{P_k(x)}{x_k - x_1} + \dots + \frac{P_k(x)}{x_k - x_n},$$

de manera que si evaluamos la derivada de  $P_k(x)$  en  $x_k$  se puede acomodar la ecuación anterior en términos de la siguiente sumatoria:

$$P'_k(x_k) = P_k(x_k) \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j}. \tag{2.6}$$

Ahora bien, derivando, la ecuación (2.1), se obtiene

$$f'(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \frac{P'_j(x)}{P_j(x)},$$

separando de la suma el término  $k$ -ésimo se llega a la expresión siguiente

$$f'(x) = \sum_{j=1, j \neq k}^n f(x_j) \frac{P_j'(x)}{P_j(x_j)} + f(x_k) \frac{P_k'(x)}{P_k(x_k)}.$$

Evaluando  $x$  en  $x_k$  para la expresión anterior y sustituyendo de (2.4)  $P_j'(x_k)$  y de (2.6)  $P_k'(x_k)$ , se obtiene la siguiente ecuación

$$f'(x_k) = \sum_{j=1, j \neq k}^n f(x_j) \frac{P_k(x_k)}{x_k - x_j} \frac{1}{P_j(x_j)} + \sum_{j=1, j \neq k}^n f(x_k) P_k(x_k) \frac{1}{x_k - x_j} \frac{1}{P_k(x_k)}.$$

La ecuación anterior se puede escribir como una multiplicación matriz-vector:

$$f'(x_k) = \sum_{j=1}^n P_k(x_k) [\tilde{D}_{kj}] \frac{1}{P_j(x_j)} f(x_j), \quad (2.7)$$

donde se define a  $\tilde{D}_{kj}$  como:

$$\tilde{D}_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{(x_k - x_j)}, & j \neq k, \\ \sum_{l=1, l \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_l}, & j = k. \end{cases} \quad (2.8)$$

Considerando que  $P$  puede definirse como la matriz diagonal compuesta por los elementos  $P_k \equiv P_k(x_k)$ , de manera que la matriz inversa  $P^{-1}$  está definida por los elementos  $P_j^{-1} = \frac{1}{P_j(x_j)}$ . Así, la expresión (2.7) toma la forma compacta

$$f'(x_k) = \sum_{j=1}^n D_{kj} f_j.$$

donde los elementos de  $D_{kj}$  son los elementos de la matriz  $P\tilde{D}P^{-1}$  y están dados por:

$$D_{kj} = P_k \tilde{D}_{kj} P_j^{-1}. \quad (2.9)$$

La ecuación anterior proporciona los parámetros para que la matriz  $D_{kj}$  tome la siguiente forma:

$$D_{kj} = \begin{cases} \frac{P_k}{P_j(x_k - x_j)} & j \neq k \\ \sum_{l=1, l \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_l} & j = k \end{cases} \quad (2.10)$$

Estos resultados pueden extenderse al caso complejo, es decir, es posible encontrar matrices de diferenciación, construidas con números complejos que actúan como la derivada  $d/dz$  para funciones complejas. Estas matrices se obtienen considerando la interpolación de Hermite para valores de alguna función  $g(z)$  como puede observar en las referencias [1]-[6]. El resultado es similar al caso real, esto es

$$D_{mn} = (D(z))_{mn} = \begin{cases} \frac{\prod_{j \neq m} (z_m - z_j)}{(z_m - z_n) \prod_{j \neq n} (z_n - z_j)}, & m \neq n \\ \sum_{k \neq n} \frac{1}{z_n - z_k}, & m = n \end{cases} \quad (2.11)$$

En donde los  $z_j$  son considerados números complejos, ya que la función interpolante se considera definida sobre  $n$  puntos arbitrarios en el plano complejo.

### SECTION 2.3

## Interpolación trigonométrica

En esta sección nuestro interés se centra en el desarrollo de este método aplicado a resolver problemas en ecuaciones diferenciales parciales con valores de frontera o contorno y valores iniciales, que sean las soluciones a estos problemas periódicos y que pueden aproximarse por polinomios trigonométricos, fijando nuestra atención en la solución de sistemas de evolución para tiempos grandes. Ya que las soluciones a este tipo de problemas dinámicos son periódicas entonces utilizamos polinomios trigonométricos, sea  $f(z)$  una función analítica y de 1-periodo  $2\pi$ , la cuál se pueden aproximar por polinomios trigonométricos que son de manera general una combinación lineal de funciones seno y coseno con cierto período, dicha función  $f(z)$  se puede desarrollarse en series de Fourier proporcionando un polinomio trigonométrico de grado  $M$  que tiene la siguiente forma

$$T(z) = a_0 + \sum_{n=1}^M (a_n \cos nz + b_n \sin nz),$$

en la expresión anterior se observa que el polinomio trigonométrico es de grado  $M$  y que se puede llevar al plano complejo en su forma exponencial, por lo cuál obtenemos una ecuación

general en forma compacta

$$T(z) = \sum_{n=-M}^M c_n e^{inz} = w^{-M} \sum_{n=0}^{2M} c_{n-M} w^n = w^{-M} f(w), \quad (2.12)$$

en donde  $c_n = a_n - ib_n$ ,  $c_{-n} = c_n^*$  y  $w = e^{iz}$ . De esta forma un polinomio trigonométrico de grado  $M$  adquiere la forma de un polinomio algebraico pero de grado  $2M$ .

$$f(w) = \sum_{n=0}^{2M} c_{n-M} w^n.$$

De la misma manera en la que se desarrolla la matriz de diferenciación algebraica, procedemos a obtener la matriz de diferenciación que sea útil en el caso de funciones periódicas, considerado una función  $f(w(z))$  analítica y 1-periódica en el plano  $z$ . Se observa que la ecuación (2.12) tiene la forma de un polinomio algebraico a excepción de  $w^{-M}$ , dicho polinomio puede interpolarse en  $2M + 1$  puntos. Se puede encontrar un polinomio que interpole a  $f(w)$  con  $N$  puntos y de grado a lo más de  $N - 1$ ; el número de puntos del polinomio trigonométrico es de  $2M + 1$  y es de grado  $2M$ , así que en el presente caso la relación entre el polinomio trigonométrico de la ecuación (2.12) y el polinomio interpolante a  $f(w)$  es que el número  $N$  de puntos debe ser impar, dado este número, sólo será posible el interpolar de manera exacta a polinomios trigonométricos de orden  $M = (N - 1)/2$  a lo más.

Escribimos el polinomio interpolante algebraico en su forma lagrangiana, siguiendo el procedimiento, para la interpolación algebraica

$$f(w) = \sum_{k=1}^N f(w_k) \frac{\prod_{l \neq k}^N (w - w_l)}{\prod_{l \neq k}^N (w_k - w_l)}.$$

El orden del polinomio interpolante es  $N = 2M + 1$  y lo sustituimos en la ecuación (2.12) la cuál se reescribe de la siguiente manera:

$$T(z) = w^{-M} f(w) = \sum_{k=1}^N w^{-M} f(w_k) l_k(w).$$

El siguiente paso es derivar  $T(z)$  respecto a  $z$ , donde la derivada de esta función será evaluada en  $z_j$ , tal como se hizo con el caso algebraico. Pero para poder derivar a  $T(z)$ , se observa en la expresión anterior la dependencia del término derecho con respecto a la variable  $w$ . Se usa la regla de la cadena

$$T'(z_j) = \left. \frac{dT(z)}{dw} \right|_{w_j} \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z_j},$$

resultando dos derivadas que se evalúan en términos de  $w_j$  y  $z_j$  respectivamente, a continuación se expresa en su forma desarrollada una de las derivadas

$$\left. \frac{dT(z)}{dz} \right|_{z_j} = \left[ -Mw_j^{-(M+1)} \sum_{k=1}^N f(w_k) l_k(w_j) + w_j^{-M} \sum_{k=1}^N f(w_k) \left. \frac{dl_k(w)}{dw} \right|_{w_j} \right] \left. \frac{dz}{dw} \right|_{z_j}.$$

donde el término  $l_k(w_j) = \delta_{jk}$  que es una de las propiedades de los polinomios de Lagrange. Esta propiedad se puede analizar fácilmente, primero en el caso de que  $j = k$  entonces todos los términos del polinomio son  $\frac{(w_k - w_l)}{(w_k - w_l)} = 1$  ya que  $l \neq k$  por definición, el segundo caso es cuando  $j \neq k$  donde el numerador del polinomio se anula ya que en alguna parte del desarrollo del polinomio cuando  $l = j$  se tiene que  $\frac{(w_j - w_j)}{(w_k - w_l)} = 0$  por lo que la ecuación (2.3) se escribe de la siguiente manera

$$\left. \frac{dT(z)}{dz} \right|_{z_j} = \left[ -Mw_j^{-(M+1)} \sum_{k=1}^N f(w_k) \delta_{j,k} + w_j^{-M} \sum_{k=1}^N f(w_k) \left. \frac{dl_k(w)}{dw} \right|_{w_j} \right] \left. \frac{dz}{dw} \right|_{z_j}. \quad (2.13)$$

La derivada del polinomio  $\left. \frac{dl_k(w)}{dw} \right|_{w_j}$  nos proporciona la posibilidad de encontrar a la matriz que sustituye a la derivada para este espacio de polinomios. Comenzamos desarrollando la derivada del polinomio  $l_k(w)$  en la siguiente expresión

$$\left( \left. \frac{dl_k(w)}{dw} \right|_{w_j} \right) = \frac{1}{\prod_{l \neq k} (w_k - w_l)} \left. \frac{d(\prod_{l \neq k} (w - w_l))}{dw} \right|_{w_j} = \frac{\prod_{l \neq k, l \neq j} (w_j - w_l)}{\prod_{l \neq k} (w_k - w_l)}. \quad (2.14)$$

Primeramente se supone a  $j \neq k$  y se factoriza el término  $w_j$  del denominador, para obtener que:

$$\frac{\prod_{l \neq k, l \neq j} (w_j - w_l)}{(w_k - w_j) \prod_{l \neq k, l \neq j} (w_k - w_l)},$$

la expresión anterior se multiplica por la unidad  $\frac{(w_j - w_k)}{(w_j - w_k)}$  como se muestra a continuación

$$\frac{\prod_{l \neq k, l \neq j} (w_j - w_l)}{(w_k - w_j) \prod_{l \neq k, l \neq j} (w_k - w_l)} \frac{(w_j - w_k)}{(w_j - w_k)},$$

agregando el término  $k$ -ésimo en el numerador y el término  $j$ -ésimo para el denominador se obtienen los elementos no diagonales de la matriz de diferenciación

$$\frac{1}{(w_j - w_k)} \frac{\prod_{l \neq j} (w_j - w_l)}{\prod_{l \neq k} (w_k - w_l)} = \frac{1}{(w_j - w_k)} \frac{P'(w_j)}{P'(w_k)}. \quad (2.15)$$

Ahora consideremos el caso restante el cuál completa la matriz de diferenciación cuando  $j = k$  usando la ecuación (2.14) que se escribe como

$$\left( \left. \frac{dl_k(w)}{dw} \right|_{w_j} \right) = \frac{1}{\prod_{l \neq k} (w_k - w_l)} \left. \frac{d \prod_{l \neq k} (w - w_l)}{dw} \right|_{w_j}.$$

Factorizando los términos  $j$ -ésimos del denominador, se obtiene la ecuación anterior la cuál se reduce y se obtienen los elementos diagonales de las matriz de diferenciación.

$$= \frac{\sum_{l \neq j, l=1}^n \prod_{l \neq k, l \neq j} (w_j - w_l)}{\sum_{l \neq j, l=1}^n (w_j - w_l) \prod_{l \neq k, l \neq j} (w_k - w_l)} = \sum_{l \neq j, l=1}^n \frac{1}{(w_j - w_l)}. \quad (2.16)$$

Las ecuaciones (2.15) y (2.16) nos proporcionan la representación de la matriz de diferenciación en el caso en que la función interpolante sea un polinomio algebraico,

$$P'(w_j) \tilde{D} P'^{-1}(w_k) = \begin{cases} \frac{P'(w_j)}{(w_j - w_k) P'(w_k)} & j \neq k, \\ \sum_{l \neq j, l=1}^N \frac{1}{w_j - w_l} & j = k. \end{cases}$$

Sustituyendo la representación anterior de la matriz de diferenciación en la ecuación (2.13) se obtiene:

$$\left. \frac{dT(z)}{dz} \right|_{z_j} = [-M w_j^{-(M+1)} \sum_{k=1}^N f(w_k) \delta_{j,k} l_k(w_k) + w_j^{-M} \sum_{k=1}^N f(w_k) P'(w_j) \tilde{D} P'^{-1}(w_k)] \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z_j}. \quad (2.17)$$

Escribimos la ecuación anterior en forma matricial para obtener una ecuación mas compacta donde  $W$  es la matriz resultante de  $e^{iz_j}$ ,  $PP^{-1}$  es la matriz identidad, y  $\tilde{D}$  nos proporciona los elementos de la matriz de diferenciación algebraica pero sin los elementos matriciales  $P$  y  $P^{-1}$  que la multiplican por la derecha y por la izquierda respectivamente de manera que se pueda expresar de la siguiente manera

$$T' = [-MW^{-(M+1)} f P P^{-1} + W^{-M} f P' \tilde{D} P'^{-1}] i W.$$

factorizando  $W^{-M}$  y  $W$  de la ecuación anterior se obtiene las siguiente representación

$$T' = W^{-M} P [-M W^{-1} + \tilde{D}] i W f P^{-1},$$

$$T' = i W^{-M} P [-M + W \tilde{D}] f P^{-1}.$$

Se hace notar que  $T = W^{-M} f$ , o bien  $f = W^M T$  para así obtener la siguiente ecuación

$$T' = i W^{-M} P [-M + W \tilde{D}] W^M T P^{-1} = i [-M W^{-M} W^M + W^{-M} W^M W P \tilde{D} P^{-1}] T, \quad (2.18)$$

de la ecuación anterior consideramos el caso cuando  $j = k$ , es decir los elementos diagonales,

$$i [-M W^{-M} W^M + W^{-M} W^M W P \tilde{D} P^{-1}] T.$$

Al simplificar y eliminar términos en la ecuación anterior obtenemos:

$$i \left[ - \left( \frac{n-1}{2} \right) + \sum_{l \neq j, l=1}^N \frac{e^{iz_j}}{e^{iz_j} - e^{iz_l}} \right]. \quad (2.19)$$

Factorizamos los términos exponenciales del denominador y reacomodándolos

$$i \left[ - \left( \frac{n-1}{2} \right) + \sum_{l \neq j, l=1}^N \frac{\cos\left(\frac{z_j - z_l}{2}\right) + i \sin\left(\frac{z_j - z_l}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{z_j - z_l}{2}\right)} \right].$$

Reducimos términos similares para obtener los elementos de la matriz de diferenciación para el caso trigonométrico que nos proporciona los elementos diagonales de dicha matriz, como se observa:

$$i \left[ - \left( \frac{n-1}{2} \right) + \sum_{l \neq j, l=1}^N \left( \frac{\cot\left(\frac{z_j - z_l}{2}\right)}{2i} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

se eliminan todos los términos a excepción del término trigonométrico,

$$\sum_{l \neq j, l=1}^N \frac{\cot\left(\frac{z_j - z_l}{2}\right)}{2}.$$

De la ecuación (2.18) se considera el caso restante cuando  $j \neq k$

$$i[-MW^{-M}W^M + W^{-M}W^MWP\tilde{D}P^{-1}]T = iW^{-M} \left[ \frac{WP'(w_j)}{(w_j - w_k)P'(w_k)} \right] W^M \quad (2.20)$$

desglosando la ecuación anterior, comenzamos con el término  $\frac{P'}{P'-1}$

$$\frac{P'(w_j)}{P'(w_k)} = \frac{\prod_{l \neq j, l=1}^N (e^{iz_j} - e^{iz_l})}{\prod_{l \neq k, l=1}^N (e^{iz_k} - e^{iz_l})}$$

posteriormente se factorizan los términos exponenciales para así poder dejar todo en términos de

$$\frac{\prod_{l \neq j, l=1}^N e^{\frac{iz_j}{2}} e^{\frac{iz_l}{2}} \sin\left(\frac{z_j - z_l}{2}\right)}{\prod_{l \neq k, l=1}^N e^{-\frac{iz_k}{2}} e^{\frac{iz_l}{2}} \sin\left(\frac{z_k - z_l}{2}\right)},$$

sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (2.20) y desarrollando la ecuación con sus valores correspondientes obtenemos la siguiente representación:

$$i \left[ \frac{e^{-\frac{i(N-1)z_j}{2}} e^{iz_j} e^{\frac{i(N-1)z_k}{2}} \prod_{l \neq j, l=1}^N e^{\frac{iz_j}{2}} e^{\frac{iz_l}{2}} \sin\left(\frac{z_j - z_l}{2}\right)}{e^{iz_j} - e^{iz_l}} \frac{\prod_{l \neq k, l=1}^N e^{-\frac{iz_k}{2}} e^{\frac{iz_l}{2}} \sin\left(\frac{z_k - z_l}{2}\right)}{\prod_{l \neq k, l=1}^N e^{-\frac{iz_k}{2}} e^{\frac{iz_l}{2}} \sin\left(\frac{z_k - z_l}{2}\right)} \right],$$

factorizamos en las multiplicatorias del numerador y del denominador el exponencial evaluado en  $j$  y el exponencial evaluado en  $k$  respectivamente, y factorizando  $e^{iz_j} - e^{iz_l}$ , se obtiene

$$i \left[ \frac{e^{-\frac{i(N-1)z_j}{2}} e^{\frac{i(N-1)z_k}{2}} e^{iz_j}}{e^{\frac{iz_j}{2}} e^{\frac{iz_l}{2}} \left( e^{\frac{i(z_j-z_l)}{2}} - e^{-\frac{i(z_j-z_l)}{2}} \right)} \frac{e^{\frac{iz_j(N-2)}{2}} \prod_{l \neq j, l=1}^N \sin\left(\frac{z_j-z_l}{2}\right)}{e^{\frac{iz_k(N-2)}{2}} \prod_{l \neq k, l=1}^N \sin\left(\frac{z_k-z_l}{2}\right)} \right].$$

En la ecuación anterior se nota que el término  $e^{\frac{i(z_j-z_l)}{2}} - e^{-\frac{i(z_j-z_l)}{2}}$  es igual a  $2i \sin \frac{z_j-z_l}{2}$  así que obtenemos la siguiente representación

$$i \left[ \frac{e^{-\frac{i(N-1)z_j}{2}} e^{\frac{i(N-1)z_k}{2}} e^{\frac{i(z_j-z_l)}{2}} e^{\frac{iz_j(N-2)}{2}} \prod_{l \neq j, l=1}^N \sin\left(\frac{z_j-z_l}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{z_j-z_l}{2}\right) e^{\frac{iz_k(N-2)}{2}} \prod_{l \neq k, l=1}^N \sin\left(\frac{z_k-z_l}{2}\right)} \right],$$

reacomodamos el término  $e^{\frac{iz_k(N-2)}{2}}$  en el numerador, para poder simplificar la ecuación

$$i \left[ \frac{e^{-\frac{i(N-1)z_j}{2}} e^{\frac{i(N-1)z_k}{2}} e^{\frac{i(z_j-z_l)}{2}} e^{\frac{i(z_j(N-2)-z_k(N-2))}{2}} \prod_{l \neq j, l=1}^N \sin\left(\frac{z_j-z_l}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{z_j-z_l}{2}\right) \prod_{l \neq k, l=1}^N \sin\left(\frac{z_k-z_l}{2}\right)} \right].$$

Se eliminan todos los términos exponenciales fuera de las multiplicatorias para llegar a la versión final de nuestra ecuación:

$$\frac{\csc\left(\frac{z_j-z_l}{2}\right) \prod_{l \neq j, l=1}^N \sin\left(\frac{z_j-z_l}{2}\right)}{2 \prod_{l \neq k, l=1}^N \sin\left(\frac{z_k-z_l}{2}\right)}.$$

Con este último resultado obtenemos nuestra matriz de diferenciación trigonométrica que se escribe de la siguiente manera

$$D_{jk} = \begin{cases} \frac{\csc\left(\frac{z_j-z_l}{2}\right) \prod_{l \neq j, l=1}^N \sin\left(\frac{z_j-z_l}{2}\right)}{2 \prod_{l \neq k, l=1}^N \sin\left(\frac{z_k-z_l}{2}\right)}, & j \neq k \\ \sum_{l \neq j, l=1}^N \frac{\cot\left(\frac{z_j-z_l}{2}\right)}{2}, & j = k \end{cases} \quad (2.21)$$

De manera que un problema diferencial que sea periódico, que contenga derivadas espaciales y temporales se puede resolver numéricamente usando estas matrices en lugar de las derivadas correspondientes.

## SECTION 2.4

**Propiedades de las matrices de diferenciación.**

1. Se obtiene una fórmula exacta para cuando  $f$  es un polinomio como el caso cuando  $f(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , o bien cuando  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ .
2. Linealidad: La matriz  $D$  aplicada a la suma de funciones es la suma de la matriz  $D$  aplicada a cada función  $D(ax^k + bx^{k-1}) = aDx^k + bD(x^{k-1})$ .
3. Al aplicar la matriz  $D$  a el vector  $f$  formado con los valores de  $x_j^k$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , es decir,  $f = x^k$ , se obtiene que  $Dx^k = kx^{k-1}$ , ya que la matriz  $D$  es una matriz de derivación, así que cada vez que este resultado se vuelva a multiplicar por la matriz  $D$  se obtendrán las derivadas subsecuentes, lo cuál es también válido si  $f$  es un polinomio de grado menor o igual hasta  $n - 1$  de manera que  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ , por lo que su derivada sería  $Df = f' = a_1 + 2a_2x + \dots + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2}$ ; la expresión anterior es un polinomio de grado menor a  $n - 1$ . Si  $f$  es de grado mayor a  $n - 1$  por ejemplo  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$ ; el vector obtenido por este método aproxima a la derivada exacta es decir,  $Df \sim f'$ .
4. Regla de Leibniz: La regla del producto se cumple para las matrices de diferenciación si la matriz  $D$  aplicada a un producto de  $fg$  cumplen con  $D(fg) = fDg + gDf$ , donde el grado de  $fg \leq n - 1$ . Si elemento a elemento es de un grado mayor que la matriz  $D$  entonces la regla del producto no es posible a menos que se incremente el número de puntos para  $D$  obteniendo un grado mayor, para que de esta manera se cumpla la regla de Leibniz.
5. Hay que enfatizar que este procedimiento simplifica la solución de problemas que tengan valores a la frontera y valores iniciales al usar las matrices que se desarrollan dentro del trabajo de esta tesis, ya que se obtienen ecuaciones matriciales en lugar de las ecuaciones diferenciales.
6. Es de esperarse que mientras más grande sea  $N$  (número de nodos), menor será el error que presente el método.

## SECTION 2.5

## Matrices de diferenciación parciales.

La idea de derivada parcial surge en el Cálculo Diferencial para determinar la variación de una función de más de una variable, cuando una variable cambia y la otra (u otras) permanece(n) constante(s), por lo que el vector  $f$  está definido sobre una red de puntos en el plano.

Tomemos un polinomio de dos variables con conjuntos arbitrarios de números reales  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ ,  $y_1 < y_2 < \dots < y_M$ , lo cual genera  $NM$  pares ordenados de números, así podremos referirnos a la derivada de una función en estos puntos. Pero antes es necesario el hacer algunas definiciones.

El producto tensorial de dos matrices  $A$ ,  $B$  de dimensiones  $N \times N$  y  $M \times M$  respectivamente, se define de la siguiente manera

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1N}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2N}B \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots \\ a_{N1}B & a_{N2}B & \dots & a_{NN}B \end{pmatrix}$$

Ésta es una matriz de  $\tilde{N} \times \tilde{N}$ , donde  $\tilde{N} = NM$ .

Ahora se procede a derivar el polinomio  $f(x, y)$  con respecto de  $x$  y dejando fijo  $y$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad a < x < b, \quad c < y < d.$$

Para discretizar esta ecuación es importante el observar cómo se acomoda el polinomio  $f(x, y)$ , evaluado en cada uno de sus puntos

$$f = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_1) \\ \vdots \\ f(x_N, y_1) \\ \hline f(x_1, y_2) \\ \vdots \\ f(x_N, y_2) \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ f(x_N, y_M) \end{pmatrix}.$$



---

# Capítulo 3

---

## ESQUEMA DEL MÉTODO EN IVP.

---

El objetivo de esta sección es aplicar las matrices de diferenciación a la solución de ecuaciones diferenciales parciales y en particular a problemas de valores iniciales. La idea es particionar la matriz de diferenciación para poder incorporar el valor inicial, como se observa a continuación. Considérese el IVP

$$y'(t) = f(y, t), \quad y(a) = \alpha, \quad a \leq t \leq b, \quad c \leq y \leq b.$$

El objetivo es encontrar la solución de  $y$  en  $M$  bloques de nodos

$$\{t_{11}, \dots, t_{1N}\}, \{t_{21}, \dots, t_{2N}\}, \dots, \{t_{M1}, \dots, t_{MN}\}.$$

El primer paso es encontrar la matriz de diferenciación en los  $N + 1$  nodos del primer bloque

$$a < t_{11} < t_{12} < \dots < t_{1N}$$

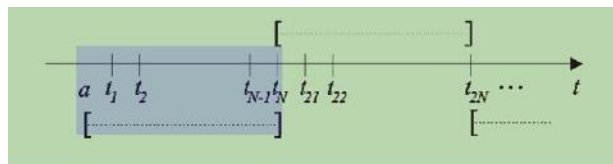


Figura 3.1: Primer bloque.

De lo que resulta la ecuación vectorial,

$$\begin{pmatrix} y'(a) \\ y'(t_{11}) \\ y'(t_{12}) \\ \vdots \\ y'(t_{1N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha, a) \\ f(y_1, t_{11}) \\ f(y_2, t_{12}) \\ \vdots \\ f(y_N, t_{1N}) \end{pmatrix}.$$

Usando la matriz de diferenciación con respecto al tiempo, obtenemos la siguiente representación discreta para los primero  $N$  nodos

$$\begin{pmatrix} D_{aa} & D_{a1} & \dots & D_{aN} \\ D_{1a} & D_{11} & \dots & D_{1N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ D_{Na} & D_{N1} & \dots & D_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ y(t_{11}) \\ y(t_{12}) \\ \vdots \\ y(t_{1N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha, a) \\ f(y_1, t_{11}) \\ f(y_2, t_{12}) \\ \vdots \\ f(y_N, t_{1N}) \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

En la ecuación anterior se tienen  $N$  parámetros desconocidos

$$\{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1N}\},$$

los cuales se encuentran resolviendo el siguiente sistema, donde  $d_j$  es

$$\sum_{k=1}^N D_{jk} y_{1k} - f(y_{1j}, t_j) = -\alpha d_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Resolviendo el sistema anterior encontramos los  $y_{1j}$  términos que desconocíamos en los  $t_j$  puntos del primer subintervalo, ahora procedemos a resolver para el segundo subintervalo

$$t_{1N}, t_{21}, t_{31}, \dots, t_{2N}$$

donde  $t_{1N}$  es un valor conocido que se encontro resolviendo el sistema (3.2) y el cuál tomaremos como la condición inicial para el segundo subintervalo como se observa en la siguiente figura

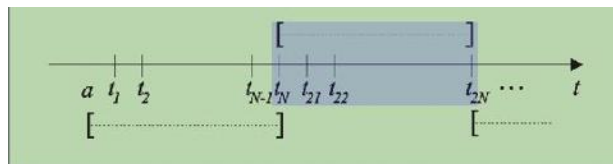


Figura 3.2: Segundo bloque.

resultando en la ecuación vectorial,

$$\begin{pmatrix} y'(t_{1N}) \\ y'(t_{21}) \\ y'(t_{22}) \\ \vdots \\ y'(t_{2N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha, t_{1N}) \\ f(y_1, t_{21}) \\ f(y_2, t_{22}) \\ \vdots \\ f(y_N, t_{2N}) \end{pmatrix}.$$

y al discretizar tenemos un sistema parecido al de (3.2), evaluando en el segundo subintervalo y resolviendo el sistema encontramos los valores de  $y_{2j}$ , para todo  $t_{21}, t_{22}, t_{23}, \dots, t_{2N}$ . Así como se encuentran los valores desconocidos de  $y$ , para el primer y segundo subintervalos, se hace para los  $M$ -subintervalos en los que se particiono el intervalo para el IVP.

---

# Capítulo 4

---

## EJEMPLOS.

---

### SECTION 4.1

#### Ecuación de calor.

La ecuación de calor es una EDP la cuál describe la variación, difusión o distribución de la temperatura en una region dada con respecto a el tiempo. Existen diferentes métodos para obtener el flujo de calor a través de un objeto. Una manera de obtenerlo es a través de las propiedades del objeto. Otra se obtiene midiendo la tasa de flujo de calor a través de las fronteras del objeto. Utilizaremos ambas para encontrar la ecuación de calor.

1. En ausencia de trabajo el cambio de energía interna del material está relacionado con los incrementos de calor a través de  $\Delta V$  a un tiempo  $t$  y definida por la fórmula

$$\Delta Q = c\rho u\Delta V \quad (4.1)$$

donde  $c$  es el calor especifico,  $\rho$  es la densidad del material,  $u$  es la temperatura y  $\Delta V$  es un volumen pequeño. Se considera una varilla delgada, hecha de un material homogéneo y perfectamente aislado en toda su longitud para que el calor sólo pueda fluir a través de sus extremos. La variable espacial se denota como  $x$ , y la longitud de la varilla es  $L$  y es de  $0 \leq x \leq L$ .

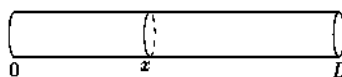
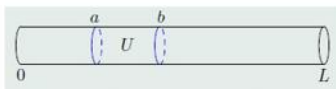


Figura 4.1: Longitud de la varilla.

Por lo tanto para encontrar la temperatura  $u$  la única condición es que dependa de la posición  $x$  y del tiempo  $t$ . Así

$$\Delta Q = c\rho u(x, t)\Delta V.$$

Ahora consideramos una pequeña sección de la varilla la cuál denotamos como  $U$  sobre el intervalo de  $x = a$  y  $x = b$ .

Figura 4.2:  $U$  es una sección de la varilla.

El área de la sección transversal se define como  $S$ , y la anchura de la sección como  $\Delta x$ . Esto da que  $\Delta V = S\Delta x$ . Ahora podemos expresar que la cantidad de calor en el área  $S$  es

$$\Delta Q = c\rho u(x, t)S\Delta x. \quad (4.2)$$

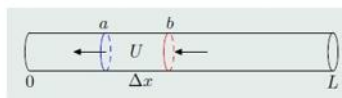
Para encontrar la cantidad de calor en la sección  $U$  a tiempo  $t$ , podemos integrar.

$$Q(t) = \int_a^b c\rho u(x, t)S dx.$$

Puesto que la varilla tiene un espesor uniforme,  $S$  no cambia con respecto al tiempo, y como estamos tratando con un material homogéneo  $c$  y  $\rho$  no cambian con respecto al tiempo. Así mediante la diferenciación tomamos la parcial de  $u$  para encontrar el cambio de calor con respecto del tiempo.

$$\frac{dQ}{dt} = \int_a^b c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx S. \quad (4.3)$$

2. Otra manera de encontrar el cambio de calor con respecto al tiempo en una varilla similar a la mostrada anteriormente en donde la tasa de flujo de calor a través de  $U$  es inversamente proporcional a la anchura de  $U$  y directamente proporcional a el área transversal. Esto es por que mientras mayor sea la longitud de la sección, más tiempo tomará para que el calor fluya a través de ella. Se usa la propiedad de que cuando dos objetos se juntan (tocándose) el objeto más caliente cederá calor al objeto más frío. Si la  $u(b) > u(a)$  entonces el flujo de calor va de  $b \rightarrow a$ .

Figura 4.3: Flujo de calor de  $b \rightarrow a$ .

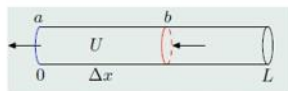
Combinando estas propiedades

$$\Delta Q = -K \frac{u(a + \Delta x, t) - u(a, t)}{\Delta x} S. \quad (4.4)$$

Donde  $K$  es una constante de proporcionalidad conocida como conductividad térmica. Ésta varía dependiendo del tipo de material que es usado. Para mostrar que esto es cierto se necesita mostrar que flujo de calor a través de la sección  $U$  donde las fronteras de esta sección están definidas como

$$a = x = 0, \quad (4.5)$$

$$b = a + \Delta x. \quad (4.6)$$



Si la temperatura en  $u(a + \Delta x, t) > u(a, t)$ , entonces  $\Delta Q$  es negativo por que la temperatura es mayor en  $b$  que en  $a$ , por lo cuál el flujo es hacia a fuera de la varilla. Dejando que  $\Delta x \rightarrow 0$  en la ecuación (4.4), el cociente de diferenciación aproxima  $\partial u / \partial x$ , por lo cuál la tasa de flujo de calor a través de  $U$  en  $x = a$  es

$$-K \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} S.$$

Siguiendo el mismo argumento se puede mostrar que la tasa de calor a través de  $U$  en  $b$  se define como

$$K \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} S.$$

Por lo tanto, la cantidad de calor que  $U$  obtiene a un tiempo  $t$  se puede escribir como

$$\frac{dQ}{dt} = K \left[ \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} \right] S. \quad (4.7)$$

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo a la ecuación (4.7), obtenemos

$$\frac{dQ}{dt} = \int_a^b \frac{d}{dx} \left( K \frac{\partial u}{\partial x} S \right) dx. \quad (4.8)$$

Ya que estamos tratando con materiales homogéneos y el área de la sección transversal es constante. Entonces la expresión se convierte en

$$\frac{dQ}{dt} = K \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx S. \quad (4.9)$$

Se obtuvieron dos ecuaciones con las cuales podemos obtener la tasa de flujo de calor dentro y fuera de la sección  $U$ , que son las ecuaciones (4.3) y (4.9). Ya que estas dos ecuaciones modelan el flujo de calor a través de una varilla establecemos la igualdad entre estas ecuaciones.

$$c\rho \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} dx S = K \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx S$$

Esta ecuación se convierte en

$$\int_a^b \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) = 0,$$

por lo cuál

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = 0.$$

Al combinar las constantes dentro de una sola expresión  $k$ , se nota que  $k = K/c\rho$  de manera que obtenemos,

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = 0. \quad (4.10)$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$u_t = k u_{xx},$$

Donde  $k$  es la constante de difusividad térmica. EL resultado final es la ecuación de calor, también conocida como la ecuación de difusión.

#### 4.1.1 Ejemplo: Ecuación de calor en 3+1 dimensiones.

<sup>1</sup> Un cubo sólido cuyos bordes miden 1m, y con conductividad térmica constante  $k$ , está inicialmente a la temperatura constante de ebullición  $100^\circ\text{C}$  y repentinamente se coloca en agua helada ( $0^\circ\text{C}$ ) al tiempo  $t = 0$ . Encontrar la temperatura dentro del cubo como función del tiempo.

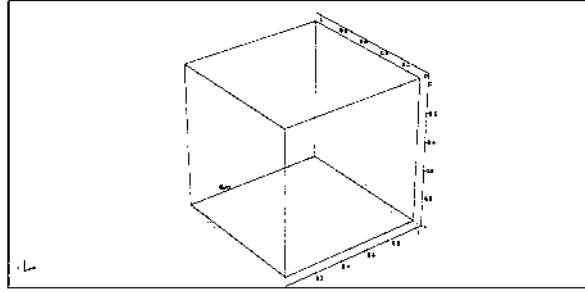
Solución :

La solución de la ecuación de calor en 3 + 1

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1, \quad t > 0, \quad (4.11)$$

---

<sup>1</sup>La solución exacta se desarrollara con detalle en la sección 7.1



con las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) = u(1, y, z, t) &= 0, \quad , t > 0, \\ u(x, 0, z, t) = u(x, 1, z, t) &= 0, \quad , t > 0, \\ u(x, y, 0, t) = u(x, y, 1, t) &= 0, \quad , t > 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

y la condición inicial

$$u(x, y, z, 0) = 100, \quad \forall, \quad 0 \leq x, y, z \leq 1, \quad (4.13)$$

es

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n,m,p=1}^{\infty} B_{n,m,p} \exp(-\lambda_{n,m,p}^2 t) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \sin(p\pi z) \quad (4.14)$$

donde

$$\lambda_{n,m,p} = \sqrt{(m^2 + n^2 + p^2)k\pi},$$

y

$$B_{n,m,p} = 8 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 100 \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \sin(p\pi z) dx dy dz, \quad n, m, p = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Al evaluar la ecuación (4.14) y sustituir en la ecuación (4.15), obtenemos

$$u(x, y, z, t) = \frac{6400}{\pi^3} \sum_{n,m,p} \frac{1}{nmp} \exp(-(m^2 + n^2 + p^2)\pi^2 kt) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \sin(p\pi z). \quad (4.16)$$

### 4.1.2 Solución discreta de la ecuación de calor en 3+1 dimensiones.

Como hemos visto, el problema VF dado por (4.11)-(4.13) tiene solución analítica, pero como ejemplo ilustrativo se resolverá de manera numérica. (Notese que si los valores numéricos

de la solución son los esperados, uno puede proceder generalmente a obtener más rápido la solución mediante el método numérico que resolviendo de manera analítica) El método de matrices de diferenciación reduce la ecuación de calor a un problema discreto matricial que puede resolverse mediante técnicas estándares. Comenzamos discretizando el dominio espacial mediante la colocación de una malla sobre el dominio. Utilizamos por conveniencia una malla uniforme como se muestra en la siguiente figura

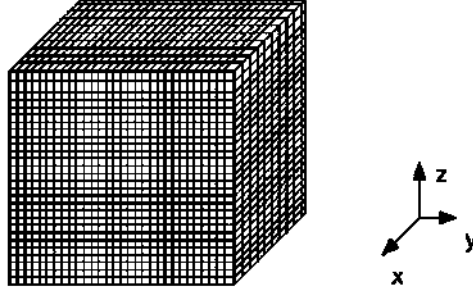


Figura 4.4: Dominio discreto.

con el conjunto de puntos arbitrarios  $\{x_1, \dots, x_N\}$ ,  $\{y_1, \dots, y_M\}$ ,  $\{z_1, \dots, z_P\}$  discretizamos el dominio espacial utilizando  $D_{xx}$ ,  $D_{yy}$  y  $D_{zz}$  que representan al operador derivada total. Igualmente, discretizamos el dominio temporal con  $D_t$  utilizando el conjunto de puntos en el tiempo  $\{t_1, \dots, t_R\}$ .

Ya que tenemos una malla sobre nuestro dominio, el siguiente paso es aproximar el problema (4.11) en cada uno de los puntos que conforman nuestro dominio discreto. Por lo cuál es importante el analizar la forma de las derivadas unidimensionales para el espacio y el tiempo. De tal forma que la matriz de diferenciación unidimensional con respecto al tiempo esta representada como  $D_t$  y ésta discretiza el dominio temporal para la variable  $t$ , como se observó en la sección (3), por lo cuál llamamos  $u^t$  al vector con diferentes tiempos,  $\gamma = u(x, y, z, 0)$  es la condición inicial (4.13)

$$D_t u^t = \begin{pmatrix} d_{11}^t & d_{12}^t & \dots & d_{1R}^t \\ d_{21}^t & d_{22}^t & \dots & d_{2R}^t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ d_{R1}^t & d_{R2}^t & \dots & d_{RR}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ u(t_2, z, y, x) \\ \vdots \\ u(t_R, z, y, x) \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

se observa que el primer valor de  $u^t$  es donde entra la condición inicial. La matriz de diferenciación espacial es  $D_{xx}$  sobre todo  $x$  y  $u^x$  es el vector que toma diferentes valores en

$x$  y  $\alpha = u(0, y, z, t)$ ,  $\beta = u(1, y, z, t)$  son las condiciones de frontera (4.12)

$$D_{xx}u^x = \begin{pmatrix} d_{1,1}^x & d_{1,2}^x & d_{1,3}^x & d_{1,4}^x & \dots & \dots & d_{1,N}^x \\ d_{2,1}^x & d_{2,2}^x & d_{2,3}^x & d_{2,4}^x & \dots & \dots & d_{2,N}^x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ d_{N,1}^x & d_{N,2}^x & d_{N,3}^x & d_{N,4}^x & \dots & \dots & d_{N,N}^x \\ d_{N,1}^x & d_{N,2}^x & d_{N,3}^x & d_{N,4}^x & \dots & \dots & d_{N,N}^x \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \alpha \\ u(t, z, y, x_1) \\ \vdots \\ u(t, z, y, x_{N-1}) \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

como se observa las condiciones de frontera se colocan al inicio y al final del vector  $u^x$ , se procede de la misma manera en  $D_{yy}$  y  $D_{zz}$ . Tanto  $u^t$ ,  $u^x$ ,  $u^y$  y  $u^z$  conforman  $u$  con esto en mente podemos pasar a discretizar cada una de las derivadas parciales espaciales y temporales por medio de las matrices de diferenciación tal como se realizó en la sección (2.5)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \mathcal{D}_{xx} = I_t \otimes I_z \otimes I_y \otimes D_{xx}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \approx \mathcal{D}_{yy} = I_t \otimes I_z \otimes D_{yy} \otimes I_x, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx \mathcal{D}_{zz} = I_t \otimes D_{zz} \otimes I_y \otimes I_x, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx \mathcal{D}_t = D_t \otimes I_z \otimes I_y \otimes I_x. \quad (4.22)$$

La dimensión de cada uno de los operadores discretos  $\{\mathcal{D}_{xx}, \mathcal{D}_{yy}, \mathcal{D}_{zz}, \mathcal{D}_t\}$  es de  $\tilde{N} \times \tilde{N}$ , donde  $\tilde{N} = N \times M \times P \times R$ , como ejemplo ilustrativo, ponemos la forma que toma  $\mathcal{D}_{xx}u$  en 2 + 1 dimensiones

$$\mathcal{D}_{xx}u = \begin{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} D_{xx} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{xx} \end{pmatrix} \right) \\ \vdots \\ \left( \begin{pmatrix} D_{xx} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{xx} \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u^x \\ \vdots \\ u^x \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} u^x \\ \vdots \\ u^x \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

es similar la forma para las demás parciales discretas, con esto en mente procedemos a escribir la ecuación de calor en 3 + 1 dimensiones en su forma discreta utilizando (4.19-4.22)

$$\mathcal{D}_t u = k(\mathcal{D}_{xx}u + \mathcal{D}_{yy}u + \mathcal{D}_{zz}u). \quad (4.24)$$

Como se observa en las ecuaciones (4.17 y 4.18), la condición inicial multiplica la primer columna de la matriz  $D_t$  y las condiciones de frontera multiplican la primera y la última

columna de las matrices  $\{D_{xx}, D_{tt}, D_{zz}\}$ , dichas columnas las despejamos de la ecuación (4.24) para reformular

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_t u - k(\tilde{\mathcal{D}}_{xx} u + \tilde{\mathcal{D}}_{yy} u + \tilde{\mathcal{D}}_{zz} u) = & \tilde{d}_{in,j}^x \alpha + \tilde{d}_{in,j}^y \alpha + \tilde{d}_{in,j}^z \alpha + \\ & \tilde{d}_{fn,j}^x \beta + \tilde{d}_{fn,j}^y \beta + \tilde{d}_{fn,j}^z \beta - \tilde{d}_{in,j}^t \gamma, \end{aligned} \quad (4.25)$$

en la ecuación anterior  $\alpha$  y  $\beta$  son las condiciones de frontera que multiplican a  $\tilde{d}_{in,j}^i$  y  $\tilde{d}_{fn,j}^i$  respectivamente e  $i$  puede ser  $\{x, y, z\}$ , donde  $j = 1, 2, \dots, \tilde{N}$ , en el caso así como  $\tilde{d}_{in,j}^t$  es el vector correspondiente a  $\mathcal{D}_t$  que es multiplicado por la condición inicial  $\gamma$ . La solución a la ecuación (4.25) se obtiene al despejar  $u$  y resolver mediante las técnicas estándares. Definiendo  $M_d$  como la matriz

$$M_d = \tilde{\mathcal{D}}_t u - k(\tilde{\mathcal{D}}_{xx} u + \tilde{\mathcal{D}}_{yy} u + \tilde{\mathcal{D}}_{zz} u),$$

y la suma de los vectores que contienen la información de las condiciones de frontera y condición inicial se define como  $d_a$

$$d_a = \tilde{d}_{1,j}^x \alpha + \tilde{d}_{1,j}^y \alpha + \tilde{d}_{1,j}^z \alpha,$$

y la suma de los vectores que son multiplicados por la condición de frontera  $\beta$  más el vector multiplicado por la condición inicial se define como  $d_b$

$$d_b = \tilde{d}_{N,j}^x \beta + \tilde{d}_{M,j}^y \beta + \tilde{d}_{P,j}^z \beta - \tilde{d}_{1,j}^t \gamma,$$

tal que la solución de nuestro problema es

$$u = (M_d)^{-1}(d_a + d_b) \quad (4.26)$$

Procedemos a hacer los cálculos correspondientes utilizando Matlab el cual es un software matemático que es de mucha utilidad en la manipulación de matrices, la representación de datos e implementación de algoritmos.

La constante de disipación propuesta es  $k=0.25$  para el problema de VF (4.11)-(4.13), las dimensiones de  $D_{xx}$ ,  $D_{yy}$ ,  $D_{zz}$ ,  $D_t$  son  $N=20$ ,  $M=20$ ,  $P=20$  en el dominio de  $0 < x < 1$ , y  $R=25$  para  $t > 0$ , por lo que las dimensiones para las matrices de diferenciación parciales  $\mathcal{D}_{xx}$ ,  $\mathcal{D}_{yy}$ ,  $\mathcal{D}_{zz}$  y  $\mathcal{D}_t$  son de  $\tilde{N} \times \tilde{N} = 139968 \times 139968$ , el espaciamiento en  $x$ ,  $y$  y  $z$  son del mismo tamaño y se denota como  $\delta_s = 0.0526$ , el paso de tiempo es  $\delta_t = 0.01$ , en el intervalo  $t \in (0, 0.24]$ . Las soluciones a este problema se acomodaron de manera que para cada  $t$  se conozca la temperatura en cada  $x$  para todo  $y$  y  $z$ , como rebanadas del cubo,

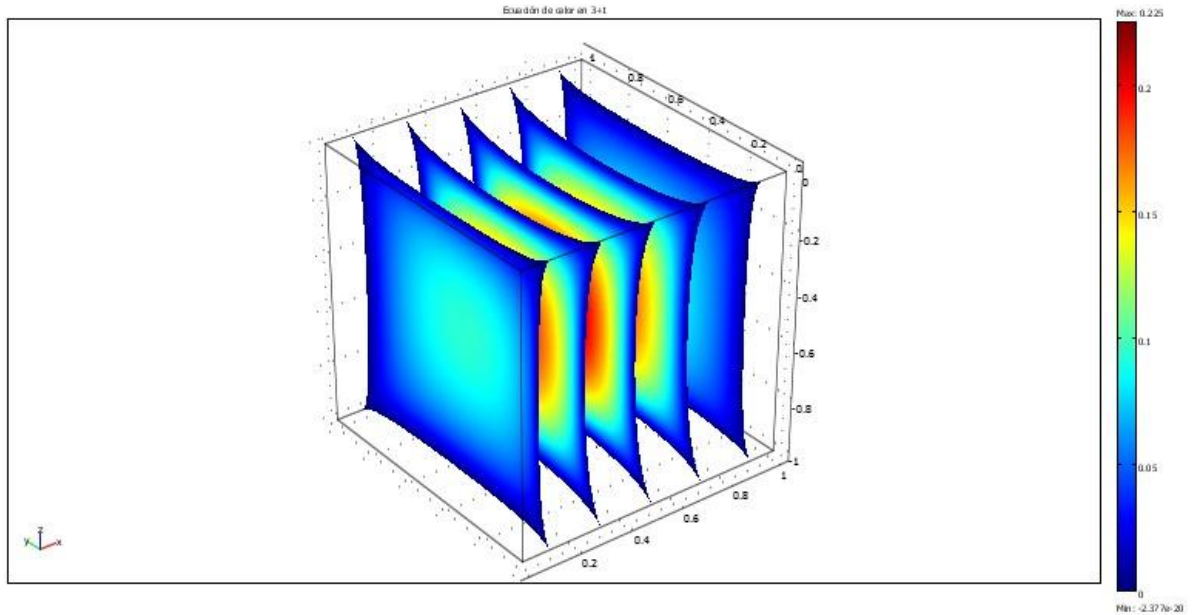


Figura 4.5: Solución de la ecuación de calor para un tiempo, recorriendo cada uno de los valores de  $u$  en  $x$ , para todo  $y$  y  $z$ .

se muestran los resultados en las siguientes figuras, dejando fijo el tiempo y para ciertos valores de  $x$ , como  $u(t_1, z_j, y_j, x_k)$ , donde  $j = 1, \dots, 18$  y  $k = \{1, 9, 18\}$

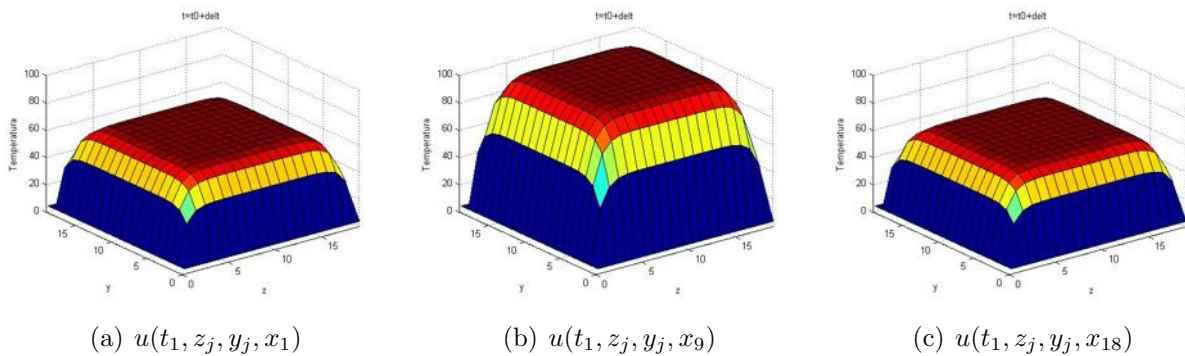


Figura 4.6: Solución de la ecuación de calor para  $t = 0.01$ , recorriendo cada uno de los valores de  $u$  en tres distintas posiciones de  $x$ , para todo  $y$  y  $z$ .

Se observa en (4.6) como la temperatura es más alta en el centro del cubo. Las siguiente soluciones son para el tiempo  $t = t_0 + 10\delta_t$ ,

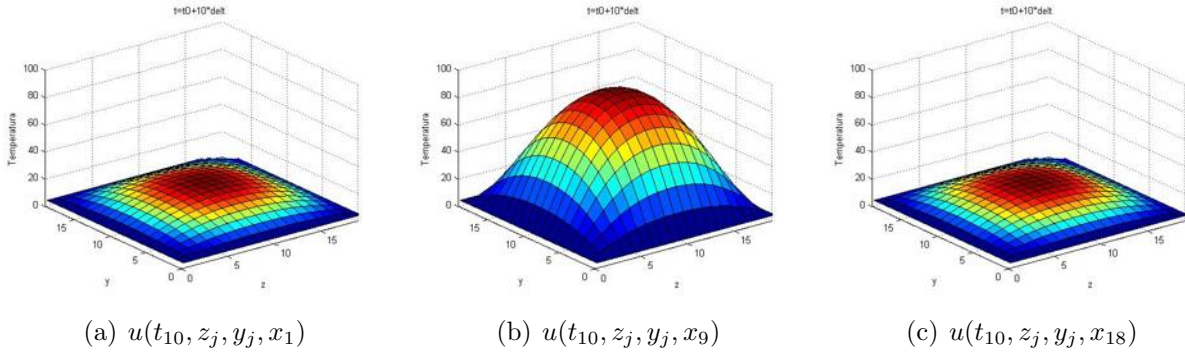


Figura 4.7: Solución de la ecuación de calor para  $t = 0.1$ , recorriendo cada uno de los valores de  $u$  en tres distintas posiciones de  $x$ , para todo  $y$  y  $z$ .

Por último se muestran los valores de  $u$ , para el tiempo final  $t = t_0 + 24\delta_t$

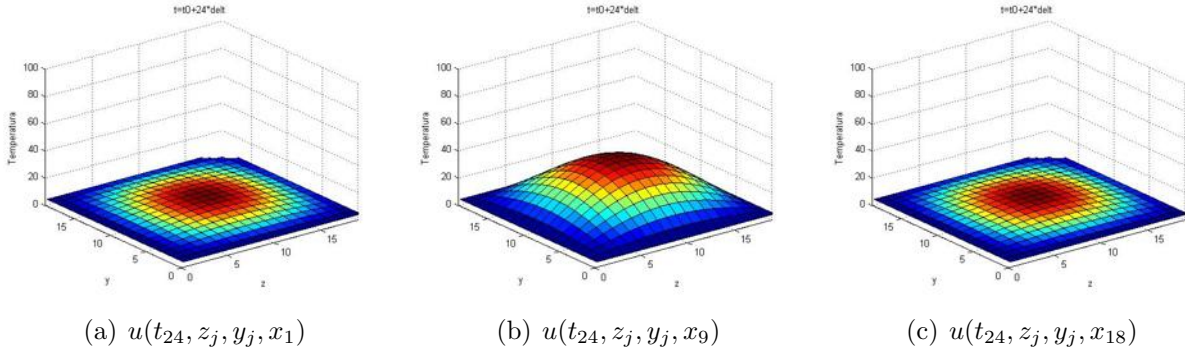


Figura 4.8: Solución de la ecuación de calor para un  $t = 0.24$ , recorriendo cada uno de los valores de  $u$  en tres distintas posiciones de  $x$ , para todo  $y$  y  $z$ .

Una parte importante en la implementación de un método numérico, es la predicción o el cálculo del error y la propagación de éste. Así que calculamos el error  $E$  entre la solución aproximada (4.26)  $u_a$  y la solución exacta  $u_e$  (4.16)

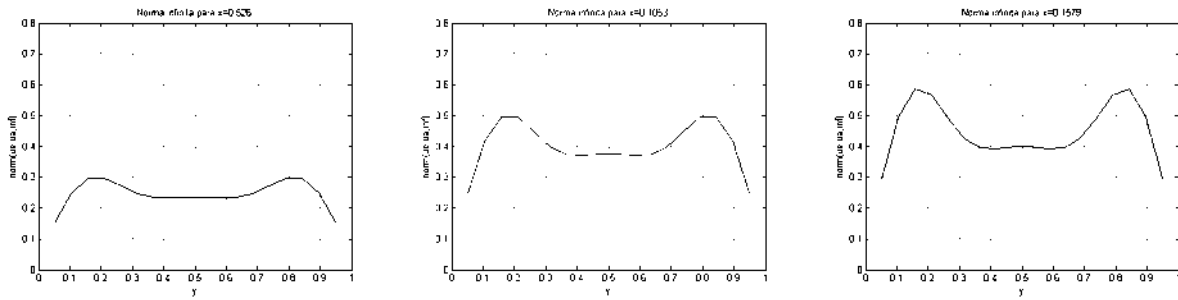
$$E = u_e - u_a, \quad (4.27)$$

en la norma máxima o norma infinita, dicha norma se puede escribir como

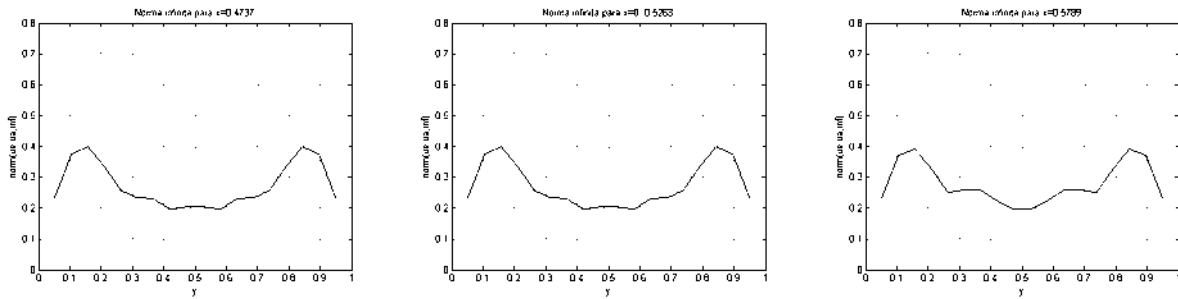
$$\| E \|_{\infty} = \max_i \sum_j | e_{i,j} |. \quad (4.28)$$

Los resultados que se en las (4.6(a))-(4.8(c)), se realizaron con matrices de  $18 \times 18$ , las cuales conforman la solución para un valor en el tiempo, en un valor fijo en  $x$  para todos

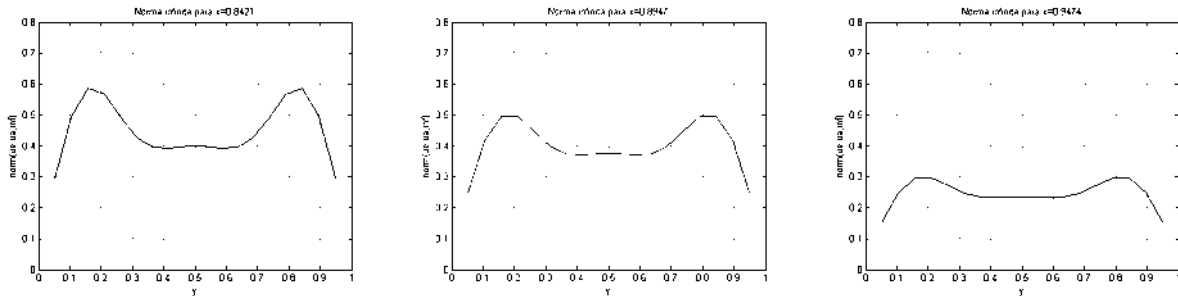
los nodos de  $y$  y  $z$ , como se aprecia gráficas anteriores y en la figura (4.5), este tipo de representaciones son rebanadas del cubo donde se observa la disipación del calor. Al restar la solución aproximada y la solución analítica, obtenemos matrices donde cada valor de estas matrices es resultado de dicha resta, por lo que a cada una de estas matrices se les aplica la norma infinita renglón por renglón recorriendo todos los renglones de cada matriz por separado, obteniendo un elemento por cada renglón, los cuales forman un vector por cada matriz, resultando en 18 vectores por cada tiempo recordando que son 24 los subintervalos en que se dividió el tiempo, dichos errores se graficaron usando el comando *plot* de Matlab para así obtener la representación de la norma infinita del error, como se muestra a continuación para ciertos  $x$  en el tiempo  $t = 0.05$ ,



(a) Norma infinita del error para  $x = 0.05$  (b) Norma infinita del error para  $x = 0.105$  (c) Norma infinita del error para  $x = 0.157$



(d) Norma infinita del error para  $x = 0.421$  (e) Norma infinita del error para  $x = 0.4736$  (f) Norma infinita del error para  $x = 0.526$



(g) Norma infinita del error para  $x = 0.8421$  (h) Norma infinita del error para  $x = 0.8947$  (i) Norma infinita del error para  $x = 0.947$

Figura 4.9: Norma infinita del error entre la solución exacta y la solución aproximada para  $t = 0.05$ .











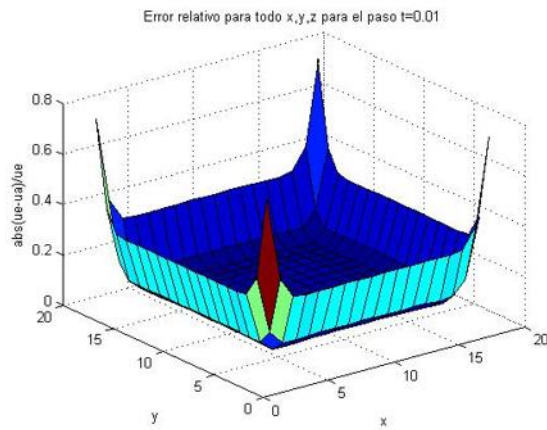
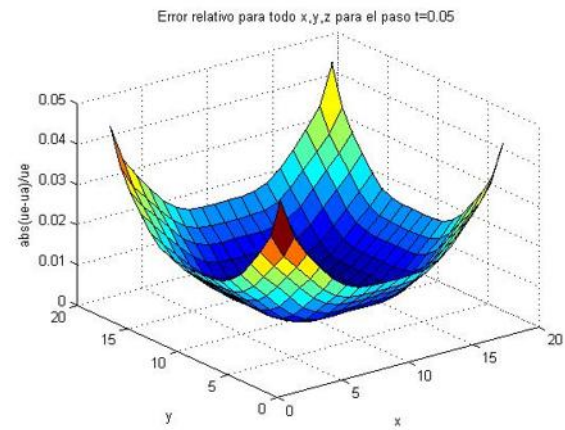
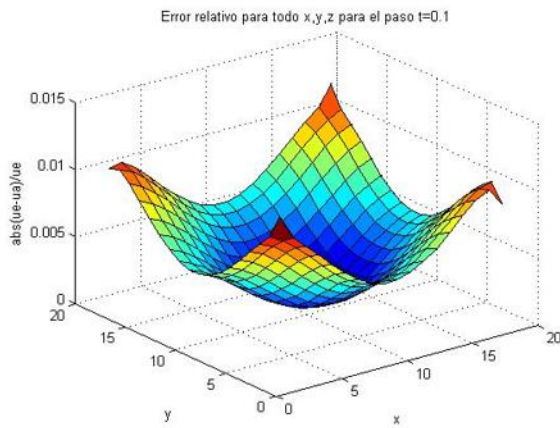
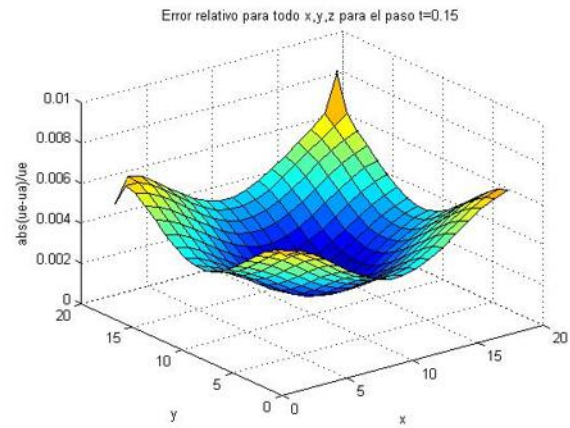
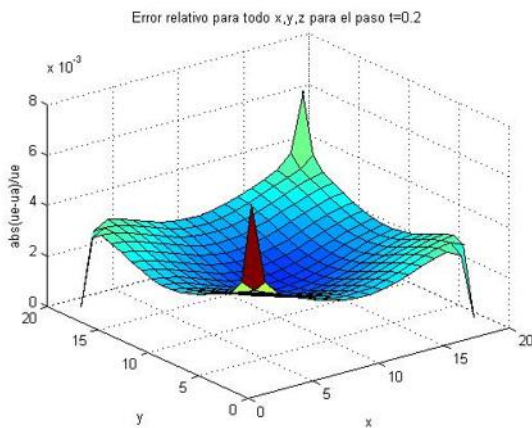
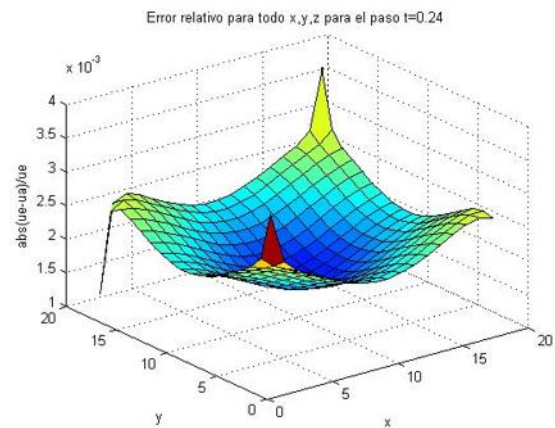
(a) Error relativo al tiempo  $t = 0.01$ (b) Error relativo al tiempo  $t = 0.05$ (c) Error relativo al tiempo  $t = 0.1$ (d) Error relativo al tiempo  $t = 0.15$ (e) Error relativo al tiempo  $t = 0.2$ (f) Error relativo al tiempo  $t = 0.24$ 

Figura 4.16: Error relativo en distintos tiempos.

Es notable como con el paso del tiempo el error relativo y el error absoluto disminuye, también se observa que en las fronteras es donde el error es un poco más alto, pero es

---

claro que gracias al esquema IVP se pueden utilizar una cantidad mayor de tiempos usando matrices temporales de  $2 \times 2$  y ayudar a que los errores no se propaguen.

---

# Capítulo 5

## DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES DE DIFERENCIACIÓN.

---

### SECTION 5.1

#### Transformada de Fourier.

La transformada de Fourier es una transformada matemática con muchas aplicaciones, como lo es encontrar la solución a modelos de física e ingeniería, que se representan por medio de ecuaciones diferenciales parciales con dominios finito e infinitos.

La transformada de Fourier tiene su origen en las series de Fourier, las cuales son herramientas para resolver ecuaciones en regiones acotadas como son los problemas en rectángulos, discos y esferas. Pero hay problemas que modelan ciertos fenómenos físicos sobre regiones no acotadas. Por ejemplo la distribución de la temperatura un alambre aislado muy largo. Para resolver este tipo de problemas se tiene que generalizar la noción de las series de Fourier.

### 5.1.1 Representación de la integral de Fourier.

Para poder entender y apreciar el objetivo de esta sección se muestra la representación del teorema de las series de Fourier, las cuales se usarán en esta tesis para encontrar la solución de la ecuación de calor (4.16) y (7.21). Dada una función  $2p$ -periódica  $u$ , tenemos que

$$u(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right). \quad (5.1)$$

Donde

$$a_0 = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p u(t) dt, \quad (5.2)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p u(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) dt, \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p u(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right) dt. \quad (5.3)$$

Ahora se supone que  $u$  es definida en toda la recta real pero no es periódica.

**Teorema 1.** *Supongase que  $u$  es suave a trozos en todo intervalo finito y que  $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x) dx| < \infty$ . Entonces  $u$  tiene la siguiente representación de la integral de Fourier*

$$u(x) \sim \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw, \quad (-\infty < x < \infty), \quad (5.4)$$

donde, para toda  $w \geq 0$ ,

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos wtdt; \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin wtdt. \quad (5.5)$$

La integral (5.4) converge a  $u(x)$  si  $u$  es continua en  $x$ . En caso de que no sea continua la integral converge al valor medio del salto en el punto medio de discontinuidad.<sup>1</sup>

Nótese la similaridad de la integral de Fourier y las series de Fourier, en donde los coeficientes para la integral se obtuvieron sobre un rango continuo y los coeficientes para las series se obtuvieron para un rango discreto. La condición  $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x) dx| < \infty$  se expresa para decir que  $u$  es absolutamente integrable en cualquier intervalo finito en la recta real. Esta condición asegura la existencia de las integrales impropias definidas en  $A(w)$  y  $B(w)$ .

### 5.1.2 La Transformada de Fourier

Se utiliza la función exponencial compleja para describir la representación de la integral de Fourier (5.4) en su forma compleja. Esta es una nueva representación de un par de transformadas : La transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier. El concepto

---

<sup>1</sup>La prueba de este teorema se encuentra en [16]. ”

de transformada proporciona una forma conveniente para poder establecer las propiedades fundamentales de operación de la transformada de Fourier, la cuál es muy útil en la solución de problemas de valores a la frontera.

- Transformada de Fourier:

$$\hat{u}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp(iwx) dx, \quad (-\infty < w < \infty). \quad (5.6)$$

- Transformada inversa de Fourier:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iwx) \hat{u}(w) dw, \quad (-\infty < x < \infty). \quad (5.7)$$

2

### 5.1.3 Método de la Transformada de Fourier

Las ecuaciones diferenciales en la mayoría de los casos son definidas en regiones finitas como por ejemplo las ecuaciones diferenciales que modelan la transferencia de calor en una barra finita, la vibración de una membrana rectangular, etc. Estos problemas dependen esencialmente de las condiciones de frontera. Pero hay problemas sobre regiones muy grandes al menos en una dimensión. A menudo se puede idealizar la situación de que el problema se extiende infinitamente en una o más dimensiones. Dichos problemas son modelados matemáticamente por ecuaciones diferenciales definidas en una región infinita. El caso finito puede tratarse usando funciones de soporte finito, por lo cuál el uso de la transformada de Fourier es de importancia en este tipo de problemas.

### 5.1.4 Transformada de Fourier de la derivada.

La función  $u(x, t)$  es una función de dos variables  $x$  y  $t$ , donde  $-\infty < x < \infty$  y  $t > 0$ . Es importante identificar la variable con respecto a quien opera la transformada de Fourier, por ejemplo para un  $t$  fijo la función  $u(x, t)$  se convierte en una función de una sola variable la espacial  $x$  y por lo cuál la transformada de Fourier se toma con respecto a  $x$ , denotando su transformación por  $\hat{u}(w, t)$ . Así que

$$\mathcal{F}(u(x, t))(w) = \hat{u}(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \exp -iwx dx. \quad (5.8)$$

---

<sup>2</sup>La obtención de la transformada de Fourier y la Transformada inversa de Fourier se puede ver detalladamente en [17].”

Con lo cuál obtenemos las siguientes identidades para la transformada de Fourier de las derivadas parciales. Dada una función  $u(x, t)$  con  $-\infty < x < \infty$  y  $t > 0$ , tenemos que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x, t)\right)(w) = \frac{d}{dt}\hat{u}(w, t); \quad (5.9)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(x, t)\right)(w) = \frac{d^n}{dt^n}\hat{u}(w, t); \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x, t)\right)(w) = iw\hat{u}(w, t); \quad (5.11)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x, t)\right)(w) = (iw)^n\hat{u}(w, t); \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

$$(5.13)$$

### 5.1.5 Transformada Discreta de Fourier

La transformada de Fourier es una herramienta muy importante para resolver problemas de valores a la frontera, sin embargo en aplicaciones prácticas una función es medida sobre un conjunto discreto de valores, por otra parte en ocasiones se desea calcular la transformada de Fourier de una función muy complicada que de manera analítica no se puede. Por estas razones es importante el obtener una forma numérica de cálculo por la transformada de Fourier la cuál se llama DFT. Es esta transformada discreta de Fourier es un método comúnmente utilizado para aproximar la transformada de Fourier.

$$\hat{u}(w) = \sum_{j=1}^{N-1} u(j) \exp\left(2\pi i \frac{jn}{N}\right), \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (5.14)$$

Esta DFT sobre el conjunto de  $N$  de  $u(x)$  es otro conjunto de  $N$   $\hat{u} = (\hat{u}(1), \dots, \hat{u}(N-1))$ . Que denotamos como  $\hat{u}(w) = \mathcal{F}_N(u)$

La DFT tiene inversa a la cuál se le conoce como la inversa de la transformada discreta de Fourier (IDFT),

$$\mathcal{F}_N^{-1}(\hat{u}(j)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \hat{u}(j) \exp\left(-i2\pi n \frac{j}{N}\right). \quad (5.15)$$

La DFT se puede obtener de manera rápida y eficiente haciendo uso del algoritmo numérico conocido como la tranformada rápida de Fourier (FFT).

## SECTION 5.2

## Diagonalización de la matriz de diferenciación trigonométrica.

Las matrices de diferenciación trigonométricas que se deducieron en la sección (2.3), que se representan en concreto por la ecuación (2.21) se pueden diagonalizar, esto se observa al derivar el polinomio  $(f_k)_j = \exp(it_j k)$  en forma exacta, donde  $j = 1, 2, \dots, L$  con  $L = 2N + 1$  tal que

$$Df_k = ikf_k, \quad (5.16)$$

siempre que  $k = -(N - 1)/2, \dots, (N - 1)/2$  ya que en estos casos  $f_k$  es un polinomio de grado menor que  $(N - 1)/2$  esto puede observarse de la sección (2.3) que este polinomio es derivable en forma exacta por la matriz  $D$ . La ecuación (5.16) se puede ver como un problema de eigenvalores, tal que

$$Df = \lambda f. \quad (5.17)$$

Para diagonalizar la matriz  $D$ , escribamos la ecuación (5.16) en forma de producto de matrices. Empezamos por construir la matriz  $F$  como aquella que tiene en su primer columna al vector  $(f_{-(N-1)/2})_j$ , la segunda columna como el vector  $(f_{-(N-1)/2+1})_j$ , así hasta la última columna que es el vector  $(f_{(N-1)/2})_j$ . Tal que

$$F = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{(N-1)}{2}t_1\right) & \exp\left(-i\left(\frac{(N-1)}{2} + 1\right)t_1\right) & \dots & \exp\left(i\frac{(N-1)}{2}t_1\right) \\ \exp\left(-i\frac{(N-1)}{2}t_2\right) & \exp\left(-i\left(\frac{(N-1)}{2} + 1\right)t_2\right) & \ddots & \exp\left(i\frac{(N-1)}{2}t_2\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp\left(-i\frac{(N-1)}{2}t_{2l+1}\right) & \exp\left(-i\left(\frac{(N-1)}{2} + 1\right)t_{2l+1}\right) & \dots & \exp\left(i\frac{(N-1)}{2}t_{2l+1}\right) \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

ya que  $t$  es un conjunto de puntos arbitrarios en  $-\pi < t_1 < t_2 < \dots < t_{2l+1} \leq \pi$ , podemos escribir a  $t$  como

$$t_j = -\pi + \frac{2\pi}{L}j, \quad j = 1, \dots, 2l + 1, \quad (5.19)$$

y  $\Lambda$  como la matriz diagonal que contiene a los valores propios

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{-(N-1)}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-(N-1)}{2} + 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{N-1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Así que podemos escribir la ecuación (5.16) como:

$$DF = iF\Lambda. \quad (5.21)$$

Al despejar al operador  $D$  obtenemos la diagonalización de la matriz de diferenciación trigonométrica,

$$D = iF\Lambda F^{-1}. \quad (5.22)$$

### SECTION 5.3

## Matrices de diferenciación rápidas.

Utilizando (5.18) y (5.19) se puede describir la matriz  $F$  como

$$F_{jk} = \exp\left(i\frac{(N+1)}{2}\pi\right) \exp\left(-i\frac{(N+1)}{N}\pi j\right) \exp\left(i\frac{2\pi jk}{N}\right) \exp(-i\pi k), \quad (5.23)$$

en donde se observa la presencia del término  $\exp\left(i\frac{2\pi jk}{N}\right)$  que es la transformada discreta de Fourier, que denotaremos como  $\mathcal{F}$ . La ecuación (5.23) se puede escribir en forma más compacta, ya que el  $\exp(-i\pi k)$  evaluado en cada uno de los valores de  $k$  forma una matriz diagonal la que llamaremos  $\Delta_2$  y el término izquierdo de (5.23) es  $\exp\left(i\frac{(N+1)}{2}\pi\right) \exp\left(-i\frac{(N+1)}{N}\pi j\right)$  también es una matriz diagonal que llamaremos  $\Delta_1$ , por lo que

$$F = \Delta_1 \mathcal{F} \Delta_2 \quad (5.24)$$

de esta manera es fácil observar cuál es la forma que tiene  $F^{-1}$

$$F^{-1} = \Delta_2^{-1} \mathcal{F}^{-1} \Delta_1^{-1}, \quad (5.25)$$

en donde  $\mathcal{F}^{-1}$ , es la transformada inversa discreta de Fourier.

Sustituyendo (5.24) y (5.25) en (5.22) obtenemos la siguiente representación matricial

$$D = i\Delta_1 \mathcal{F} \Delta_2 \Lambda \Delta_2^{-1} \mathcal{F}^{-1} \Delta_1^{-1}, \quad (5.26)$$

esta ecuación se puede compactar aun más dado que el producto entre  $\Delta_2 \Lambda \Delta_2^{-1}$  es una matriz diagonal la cuál llamaremos  $\Delta_3$ , de tal manera que la ecuación (5.26) la podemos reescribir como

$$D = i\Delta_1 \mathcal{F} \Delta_3 \mathcal{F}^{-1} \Delta_1^{-1}. \quad (5.27)$$

La ecuación (5.27), es lo que llamamos matriz de diferenciación rápida, ya que tanto  $\mathcal{F}$  como  $\mathcal{F}^{-1}$ , facilitan el encontrar a  $D$  de manera rápida y para una gran cantidad de puntos.

### 5.3.1 Algoritmo de la matriz de diferenciación rápida.

Se describe el algoritmo que se implementó en Matlab para la matriz de diferenciación rápida (5.27), en donde se utiliza los comando propios de Matlab *fft* y *ifft*, que son la IDFT y la DFT respectivamente que se propuso en (5.25) y (5.24) respectivamente,

---



---

! Algoritmo para calcular la matriz de diferenciación trigonométrica rápida.

```
function [u] = algt(N, f)
N = 2N + 1; ! Determina el tamaño de la matriz de diferenciación.
k = 1 : N; j = 1 : N; ! Determinan la dimensión de las matrices que conforman a F en
(5.23)

!-----
!-----Formulación de la matriz de eigenvectores Fjk-1
!-----f es el polinomio sobre el cuál opera la matriz de diferenciación
f1 = exp(i * pi * (j.') * (N + 1)/N) .* exp(-i * 2 * pi * (j - 1) ./ N) .* f;
!-----fft es el comando de Matlab para mandar llamar a la IDFT descrita en (5.15).
dft = fft(f1);
Fi = (1/sqrt(N)) * exp(-i * pi * (N + 1)/2) * exp(-i * 2 * pi / N) .* exp(i * 2 * pi * (k - 1) ./ N) .* ... *
dft;
!-----
!-----Formulación de la matriz diagonal con los valores propios Lambda

LA = (i * (-(N - 1)/2 + j.' - 1));
!-----
!-----Formulación de la matriz de eigenvectores Fjk

f2 = (exp(-i * pi * k.') .* exp(i * 2 * pi * (k - 1) ./ N)) .* (LA .* Fi); st2 = N * ifft(f2);
F = (1/m) * (1/sqrt(N)) * exp(i * pi * (N + 1)/2) * exp(i * 2 * pi / N) ... *
exp(-i * pi * (j.') * (N + 1)/N) .* exp((i * 2 * pi / N) * (j - 1) ./ N) .* st2;
u = real(F); ! Derivada aproximada Df.
```

---

#### SECTION 5.4

### Matriz de diferenciación trigonométrica par.

Considerese la derivada de  $g_k(t) = \exp(it/2)f_k(t)$ , con respecto a  $t$ , obtenemos

$$\frac{dg_k(t)}{dt} = \left( \frac{i}{2} \exp\left(\frac{it}{2}\right) f_k(t) + \exp\left(\frac{it}{2}\right) \frac{df_k(t)}{dt} \right), \quad (5.28)$$

factorizando  $\exp(i\frac{t}{2})$  del lado derecho de la ecuación (5.28), obtenemos

$$\frac{dg_k(t)}{dt} = \exp\left(\frac{it}{2}\right) \left( \frac{if_k(t)}{2} + \frac{df_k(t)}{dt} \right).$$

Discretizando la ecuación anterior obtenemos

$$D_t g = \Delta \left( \frac{i}{2} f + f' \right), \quad (5.29)$$

donde  $\Delta$  es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales están dados por  $\exp(it_k/2)$ , al despejar a  $f'$  obtenemos la representación de la diferenciación de  $f$

$$f' = \Delta^{-1} (D_t g) - \frac{i}{2} f, \quad (5.30)$$

se factoriza  $f$  en la ecuación anterior, y ya que  $g = \Delta f$ , la ecuación (5.31) representa la siguiente matriz de diferenciación

$$f' = \left( \Delta^{-1} (D_t \Delta) - \frac{i}{2} I \right) f, \quad (5.31)$$

en donde

$$D_p = \left( \Delta^{-1} (D_t \Delta) - \frac{i}{2} I \right), \quad (5.32)$$

es la representación matricial a las derivadas para el caso par que llamamos matriz de diferenciación trigonométrica par. Estas matrices de diferenciación son importantes ya que su inversa se utiliza como la antiderivad, esto se explicara en la siguiente sección.

---

# Capítulo 6

## MATRICES DE INTEGRACIÓN .

---

### SECTION 6.1

#### Antiderivadas rápidas.

La matriz de antiderivadas es el problema inverso a las derivas, tal que sí  $G = F'$  y su discretización es

$$g = Df$$

entonces su antiderivada es  $F = \int G$ , la cuál discretizamos para así obtener

$$f = D^{-1}g,$$

donde  $D^{-1}$  se le llama la matriz antiderivada y se expresa como la matriz de diferenciación trigonométrica (5.22) inversa, tal que

$$D^{-1} = -iF\Lambda^{-1}F^{-1},$$

esta matriz antiderivada cuando se aplica a  $g$ , encuentra una solución entre toda la familia de soluciones a este problema. Si queremos incrementar el orden de la antiderivada, por ejemplo hacer dos veces la antiderivada de una polinomio, se debe elevar la potencia de la antiderivada a  $D^{-2}$  lo cuál solo afecta a la matriz diagonal  $\Lambda$  y al signo que la precede el cuál se obtiene de elevar a la potencia deseada el número imaginario  $i$ , por lo cuál la antiderivada de segundo orden es

$$D^{-2} = -F\Lambda^{-2}F^{-1}.$$

La matriz antiderivada se puede convertir en una matriz de integración si se tienen problemas con condiciones de frontera y condiciones iniciales como se observa en las siguientes dos secciones.

### SECTION 6.2

## Condiciones iniciales.

Dado un IVP,

$$y' = F(t), \quad y(0) = \alpha. \quad (6.1)$$

Al utilizar la matriz antiderivada lo que obtenemos es una familia de funciones de la solución exacta,

$$y \approx I(s) + c$$

donde

$$I(s) = \int_0^s F(s) ds$$

por lo cuál tenemos que utilizar las condiciones iniciales, para obtener solo la solución que estamos buscando. La condiciones iniciales se utilizan para encontrar el valor de  $c$  la constante de integración. De manera que para

$$y(0) = c + I(0),$$

podemos sustituir la condición inicial (6.1)

$$\alpha = c + I(0),$$

por lo tanto  $c = \alpha - I(0)$ , al sustituir la constante de integración  $c$  en la ecuación (6.1), obtenemos la solución al problema IVP

$$y(x) \approx I + \alpha - I(0).$$

Ademas de encontrar matrices de integración rápidas para IVP con miles de puntos.

### SECTION 6.3

## Condiciones de frontera.

Dado un PVF ,

$$y'' = g(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (6.2)$$

Para encontrar su solución se aplica dos veces la matriz antiderivada para obtener

$$y(x) \approx I(s) + c_1x + c_2,$$

las constantes de integración  $c_1$  y  $c_2$ , se obtienen al sustituir los valores de las condiciones a la frontera, lo cuál forma dos ecuaciones lineales,

$$\alpha = I(0) + c_1x_0 + c_2$$

$$\beta = I(N) + c_1x_N + c_2.$$

Al resolver las ecuaciones anteriores encontramos

$$c_1 = \frac{\alpha - \beta - (I(x_0) - I(x_N))}{(x_0 - x_N)}, \quad c_2 = \frac{\alpha x_N - \beta x_0 - x_N I(x_0) + x_0 I(x_N)}{x_0 - x_N}$$

al sustituir los valores de  $c_1$  y  $c_2$  en (6.2), encontramos una aproximación a la solución exacta para el problema de valores a la frontera (6.2) utilizando matrices de diferenciación rápidas para miles de puntos.

---

# Capítulo 7

---

## APLICACIONES.

---

### SECTION 7.1

#### Ecuación de Calor.

Se considera resolver el problema de conducción de calor en  $1 + 1$  dimensiones sobre una barra de longitud entre  $x \in [0, 1]$ ,

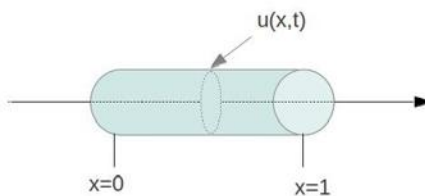


Figura 7.1: Barra sólida conductora de calor.

El problema es del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0 \quad (7.1)$$

en donde  $k = 0.01$  es la constante de difusividad térmica y sus condiciones de frontera no

homogéneas son las siguientes

$$u(0, t) = 20, \quad y \quad u(1, t) = 40, \quad (7.2)$$

y la condición inicial del sistema es

$$u(x, 0) = 100, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (7.3)$$

Considérese que las dimensiones transversales son tan pequeñas que la temperatura  $u$  puede considerarse constante en cualquier sección transversal dada. Por lo que  $u$  es una función sólo de la coordenada axial  $x$  y del tiempo.

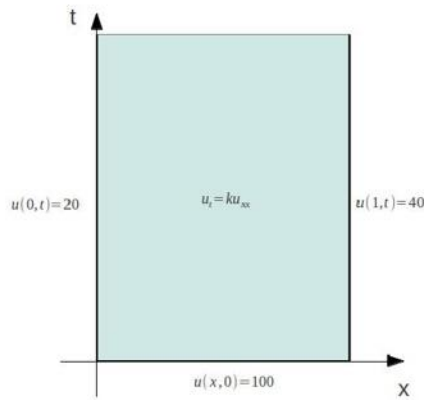


Figura 7.2: Problema con valores a la frontera para la ecuación de conducción de calor.

### 7.1.1 Solución exacta.

La solución exacta el problema (7.1), se obtiene mediante la técnica de separación de variables, tomando en cuenta que el problema tiene condiciones de frontera no homogéneas. Se procede a reducir el problema a un problema que tiene condiciones de frontera homogéneas

$$\tilde{u}(0, t) = 0, \quad \tilde{u}(1, t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.4)$$

Proponiendo el producto entre dos funciones,  $X(x)$  dependiente de  $x$  y  $T(t)$  dependiente de  $t$ , el producto de ambas genera una solución particular de la ecuación de calor,

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (7.5)$$

Sustituyendo (7.5) en la ecuación de calor (7.1) se obtiene

$$XT' = kX''T$$

y se agrupan en el mismo lado los términos dependientes de la misma variable

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X}. \quad (7.6)$$

La ecuación anterior es válida en el dominio de  $0 < x < 1$  para  $t > 0$ . Igualamos ambos términos de la ecuación (7.6) a una misma constante  $\mathcal{C}$ ,

$$\frac{T'}{kT} = \mathcal{C}, \quad (7.7)$$

$$\frac{X''}{X} = \mathcal{C}. \quad (7.8)$$

De tal manera que obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$T' - kT\mathcal{C} = 0, \quad (7.9)$$

$$X'' - X\mathcal{C} = 0. \quad (7.10)$$

Aplicamos las condiciones de frontera en la ecuación (7.10), suponiendo que  $\mathcal{C} = -\mu^2$ , en donde  $\mu \rightarrow \mu_n$ ,  $\mu_n = n\pi$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , por lo cuál solución de  $X$ , es

$$X \rightarrow X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.11)$$

Por otra parte sustituyendo la equivalencia de  $\mathcal{C}$  en (7.9), se obtiene la siguiente ecuación de primer orden

$$T' + k \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 T = 0, \quad (7.12)$$

cuya solución general es

$$T_n = B_n \exp(-\lambda_n^2 t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.13)$$

donde

$$\lambda_n = \sqrt{k}(n\pi)$$

sustituyendo la solución (7.13) y (7.11) en la ecuación (7.5) y usando el principio de superposición se obtiene

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\lambda_n^2 t) \sin(n\pi x). \quad (7.14)$$

El siguiente paso es determinar el coeficiente de  $B_n$  el cuál debe satisfacer la condición inicial, para esto se requiere el uso de las series de Fourier para resolver la ecuación de calor al tiempo  $t = 0$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) \\ &= 100 \end{aligned} \quad (7.15)$$

usando la ortogonalidad de las funciones  $\sin(n\pi x)$ , se tiene que

$$B_n = 2 \int_0^1 100 \sin(n\pi x) dx. \quad (7.16)$$

Nótese que se obtiene la solución exacta a la ecuación de calor con condiciones de frontera homogéneas. Ya que la ecuación de calor es lineal se puede escribir su solución en términos de dos funciones  $v(x)$  y  $w(x, t)$ ,

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t), \quad (7.17)$$

imponemos que  $v(x)$  sea la función que cumpla con las condiciones de frontera no homogéneas. Por lo tanto las condiciones de frontera que satisface  $w(x, t)$  son homogéneas ya que

$$w(x, t) = u(x, t) - v(x). \quad (7.18)$$

Por lo que se ha establecido hasta el momento,  $w(x, t)$ , es equivalente a la solución aproximada con condiciones de frontera homogéneas (7.14). Para saber que forma tiene la función  $v(x)$  se sustituye en la ecuación de calor,

$$v''(x) = 0. \quad (7.19)$$

De manera que la solución de la ecuación diferencial anterior es,

$$v(x) = 20x + 20, \quad (7.20)$$

con lo cuál ya se tiene la solución exacta a la (7.1) es

$$u(x, t) = 20x + 20 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-n^2\pi^2 kt) \sin(n\pi x). \quad (7.21)$$

## SECTION 7.2

### Matrices de diferenciación rápidas aplicadas a la Ecuación de Calor.

Se discretiza la ecuación de calor (7.1) con el fin de poder utilizar la  $\mathcal{D}_{xx}$  matriz de diferenciación trigonométrica rápida como el operador que sustituye la derivada espacial de segundo orden y la matriz  $\mathcal{D}_t$  que es la matriz de diferenciación algebraica temporal que discretiza a la derivada parcial temporal,

$$\mathcal{D}_t u = k\mathcal{D}_{xx} u \quad (7.22)$$

el resultado de discretiza la ecuación de calor en  $1 + 1$  dimensiones es obtener una ecuación matricial en donde las matrices son los operadores discretos de las derivadas de dicha ecuación. El dominio de la ecuación de calor se representa por  $a < x < b$ , se necesita una transformación lineal para respetar el dominio del problema en cuestión pues como se hizo

notar las secciones (2.3) y (5.2) las matrices de diferenciación trigonométricas trabajan sobre el dominio  $-\pi < x \leq \pi$ , y la manera de escoger los nodos son  $x_j = -\pi + \frac{2\pi}{L}j$ , para  $j = 1, \dots, 2 * N + 1$ , la transformación lineal es la siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{(b-a)}{2\pi}x + \frac{(a+b)}{2} \\ &= mx + \frac{(a+b)}{2}, \end{aligned} \tag{7.23}$$

en donde  $m$  es la pendiente. Ya que la matriz de diferenciación parcial  $D_{xx}$  es la que discretiza a la derivada espacial entonces de la transformación (7.23), se observa que

$$dx = m d\tilde{x} \tag{7.24}$$

por lo que

$$d\tilde{x} = \frac{1}{m} dx \tag{7.25}$$

lo cuál nos indica que la matriz de diferenciación trigonométrica de segundo orden es

$$D_{xx} = \frac{1}{m^2} F \Lambda F^{-1}. \tag{7.26}$$

Para terminar la discretización que se planteo en (7.22), se utiliza la matriz de diferenciación algebraica para discretizar la derivada parcial temporal  $\mathcal{D}_t$ . La idea principal es utilizar el método que se usó en la sección de IVP, esto quiere decir que todo el dominio en  $x$  es continuo y el dominio en  $t$  se divide en subintervalos y se resuelve para cada subintervalo del tiempo

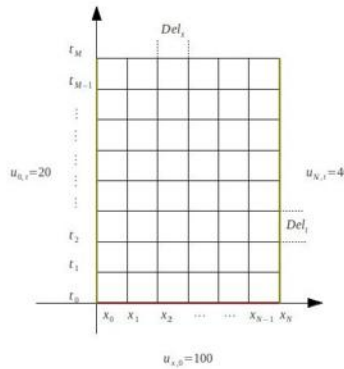


Figura 7.3: Dominio discretizado.

El primer paso es resolver sobre el subintervalo temporal que comprende a  $t_0 < t < t_1$ ,  $\forall x$ , dicho subintervalo se puede particionar en tantos subintervalos como se quiera, en este caso como queremos tomar matrices de 2 por 2 en la parte temporal, los subintervalos no se particionan más ya que solo necesitamos el primer valor que es la condición inicial para poder saber el siguiente valor en el siguiente tiempo como se observa la siguiente gráfica

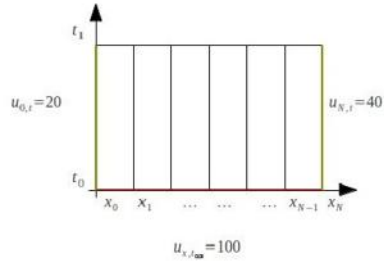


Figura 7.4: Esquema del primer subintervalo de tiempo.

esto se hace fácilmente ya que se escoge que el tamaño de la matriz de diferenciación algebraica con respecto al tiempo sea de dimensión 2 y la dimensión de la matriz de diferenciación total con respecto a  $x$  es de 101. El procedimiento para resolver el sistema discreto es el siguiente para el primer subintervalo de tiempo

$$d_{1j}u_{x_j,t_0} + \tilde{\mathcal{D}}_t u_{x_j,t_1} = \mathcal{D}_{xx}u_{x_j,t_0}, \quad (7.27)$$

en donde

$$u_{x_j,t_0} = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 100 \\ \vdots \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

El vector anterior es la condición inicial para  $t_0$ , así que despejando  $\tilde{\mathcal{D}}_t u$ , se tiene que

$$\tilde{\mathcal{D}}_t u_{x_j,t_1} = \mathcal{D}_{xx}u_{x_j,t_0} - d_{1j}u_{x_j,t_0}. \quad (7.29)$$

Para encontrar la solución en el siguiente tiempo  $u_{x_j,t_1}$  solo integramos numéricamente, lo cual quiere decir multiplicar por  $\tilde{\mathcal{D}}_t^{-1}$  toda la ecuación anterior, tal que

$$u_{x_j,t_1} = \tilde{\mathcal{D}}_t^{-1}(\mathcal{D}_{xx}u_{x_j,t_0} - d_{1j}u_{x_j,t_0}). \quad (7.30)$$

Una vez que encontramos la solución en  $u_{x_j,t_1}$  podemos proceder a calcular la solución para el siguiente subintervalo  $t_1 < t \leq t_2$

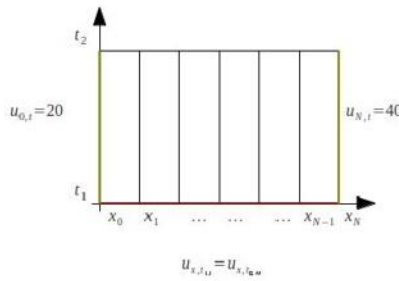


Figura 7.5: Esquema del segundo subintervalo de tiempo.

en donde ahora la condición inicial en este subintervalo es la solución del primer subintervalo  $u(x_j, t_1)$ . Las condiciones de frontera no cambian y la manera de proceder para encontrar la solución en este nuevo subintervalo es la misma

$$d_{1j}u_{x_j,t_1} + \tilde{\mathcal{D}}_t u_{x_j,t_2} = \mathcal{D}_{xx}u_{x_j,t_1}, \quad (7.31)$$

por lo cuál su solución es

$$u_{x_j,t_2} = \tilde{\mathcal{D}}_t^{-1}(\mathcal{D}_{xx}u_{x_j,t_1} - d_{1j}u_{x_j,t_1}). \quad (7.32)$$

Se procede de la misma forma hasta encontrar todas las soluciones en cada uno de los subintervalos.

## 7.2.1 Sustitución de parámetros y obtención de resultados gráficos.

Se procede a hacer los cálculos utilizando un espaciamiento  $\delta_x = 0.0101$ , con  $N = 101$  nodos en el dominio de  $0 < x \leq 1$ ,  $N$  es la dimensión de  $D_{xx}$ , se escoge un  $\delta_t = 0.001$  para  $t > 0$ , hasta  $t = 0.03$ , por lo cual el tiempo se dividió en 30 intervalos donde cada intervalo de tiempo se subdivide en  $R = 2$  que es la dimensión para  $D_t$  las matrices de diferenciación algebraicas para la discretización temporal, por lo cuál las dimensiones para las matrices de diferenciación parcial  $\mathcal{D}_{xx}$  y  $\tilde{\mathcal{D}}_t$  es de  $\tilde{\mathcal{N}} = 101$ , ya que las dimensiones de la submatriz  $\tilde{\mathcal{D}}_t$  es de uno y como se mostro en la sección (2.5) las dimensiones de las matrices de diferenciación parciales son equivalentes al producto entre las dimensiones de las matrices de diferenciación que discretizan el problema en este caso la dimensión de  $D_{xx}$  y  $D_t$ , la constante de disipación es  $k = 0.011$ . Una vez que se sustituyen los parámetros encontramos las siguientes soluciones,

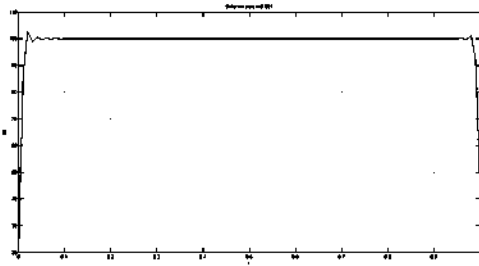
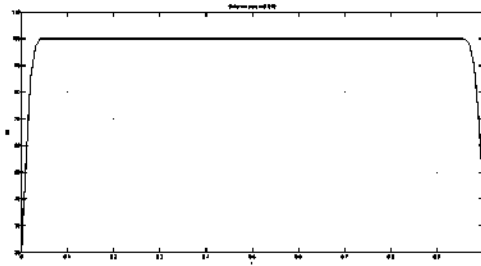
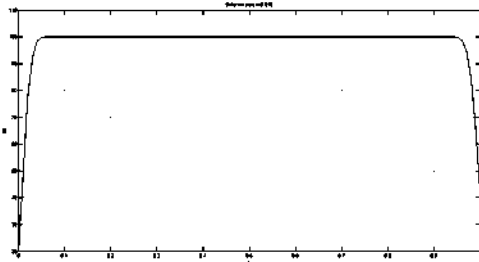
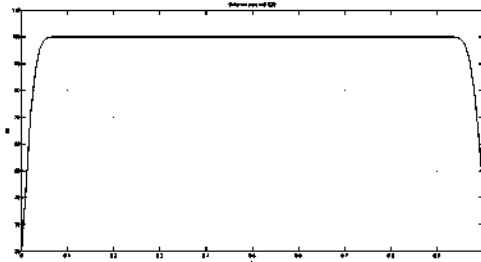
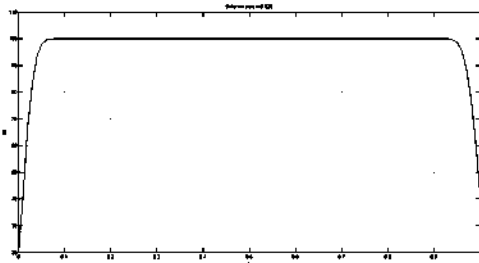
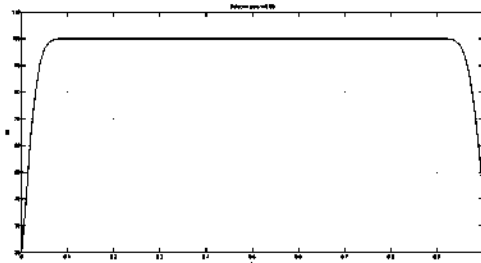
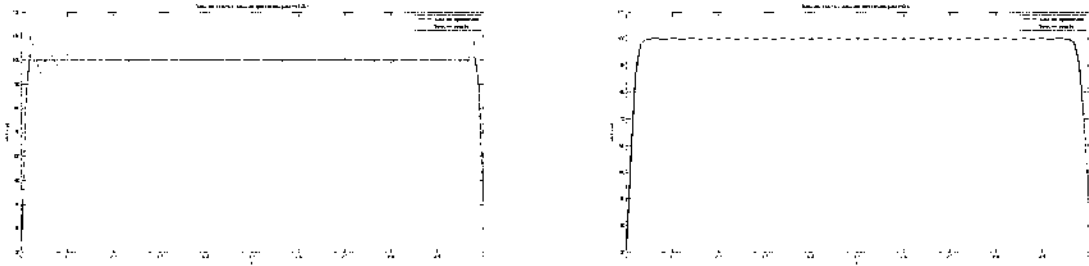
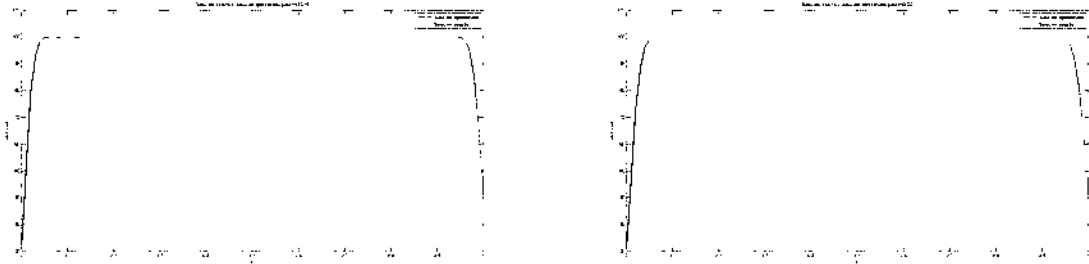
(a) Solución a la ecuación de calor para  $t = 0.001$ (b) Solución a la ecuación de calor para  $t = 0.010$ (c) Solución a la ecuación de calor para  $t = 0.015$ (d) Solución a la ecuación de calor para  $t = 0.02$ (e) Solución a la ecuación de calor para  $t = 0.025$ (f) Solución a la ecuación de calor para  $t = 0.03$ 

Figura 7.6: Soluciones a la ecuación de calor para diversos tiempos.

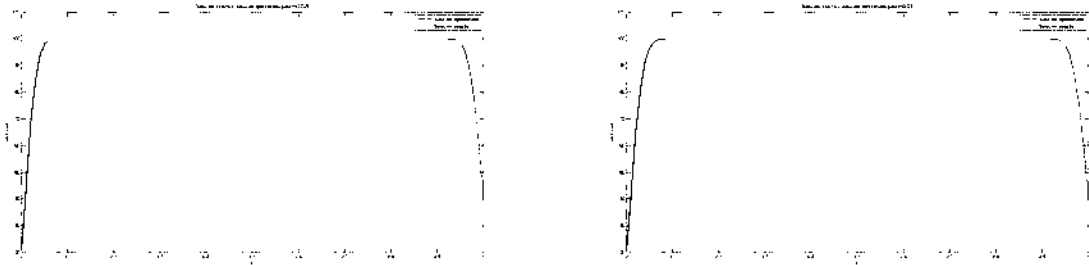
Se observa en las figuras anteriores las soluciones aproximadas para ciertos tiempos, la disipación entre cada una de las soluciones es mínimo debido a que la constante de disipación es pequeña y el paso de tiempo entre cada una de las soluciones muy pequeño, se necesita una mayor cantidad de nodos en el tiempo para observar mayor disipación. Ahora comparemos la solución exacta (7.21) la cuál se distinguirá en rojo con la solución aproximada que será en azul en las siguientes figuras en donde se superponen ambas soluciones



(a) Solución aproximada y solución exacta  $t = 0.001$  (b) Solución aproximada y solución exacta  $t = 0.01$



(c) Solución aproximada y solución exacta  $t = 0.015$  (d) Solución aproximada y solución exacta  $t = 0.02$



(e) Solución aproximada y solución exacta  $t = 0.025$  (f) Solución aproximada y solución exacta  $t = 0.03$

Figura 7.7: Soluciones superpuestas para diversos tiempos.

En las figuras anteriores se observa como la solución exacta oscila mucho al inicio para los primeros tiempos entre  $0 < t < 0.001$ , mostrando el fenómeno de Gibbs ya que la solución exacta, es una solución que hace uso de las series de Fourier las cuales cercas de los puntos de discontinuidad rebasan los valores limites, como se observa cercas de las fronteras donde existen discontinuidades para la ecuación de calor y se forman oscilaciones cercanas a los puntos frontera donde hay discontinuidades. Como ejemplo ilustrativo de que las matrices de diferenciación se pueden usar para miles de puntos, proponemos diez mil subintervalos de tiempo con el mismo  $\delta_t = 0.001$  y manteniendo los mismos parametros para  $D_{xx}$  se observa

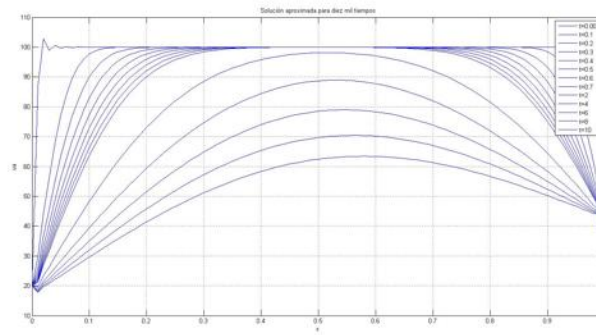


Figura 7.8: Solución para los diez mil subintervalos en los que se dividió el problema.

Se observa que se pueden utilizar una gran cantidad de puntos en el tiempo.

### 7.2.2 Propagación del Error

Se calcula el error relativo, el cuál se obtiene del valor absoluto de la diferencia entre la solución aproximada y la solución exacta (7.21) y dividido entre el valor absoluto de la solución exacta. Cuando se utilizan treinta subintervalos de tiempo y 101 puntos en el espacio (7.7(a))-(7.7(f)).

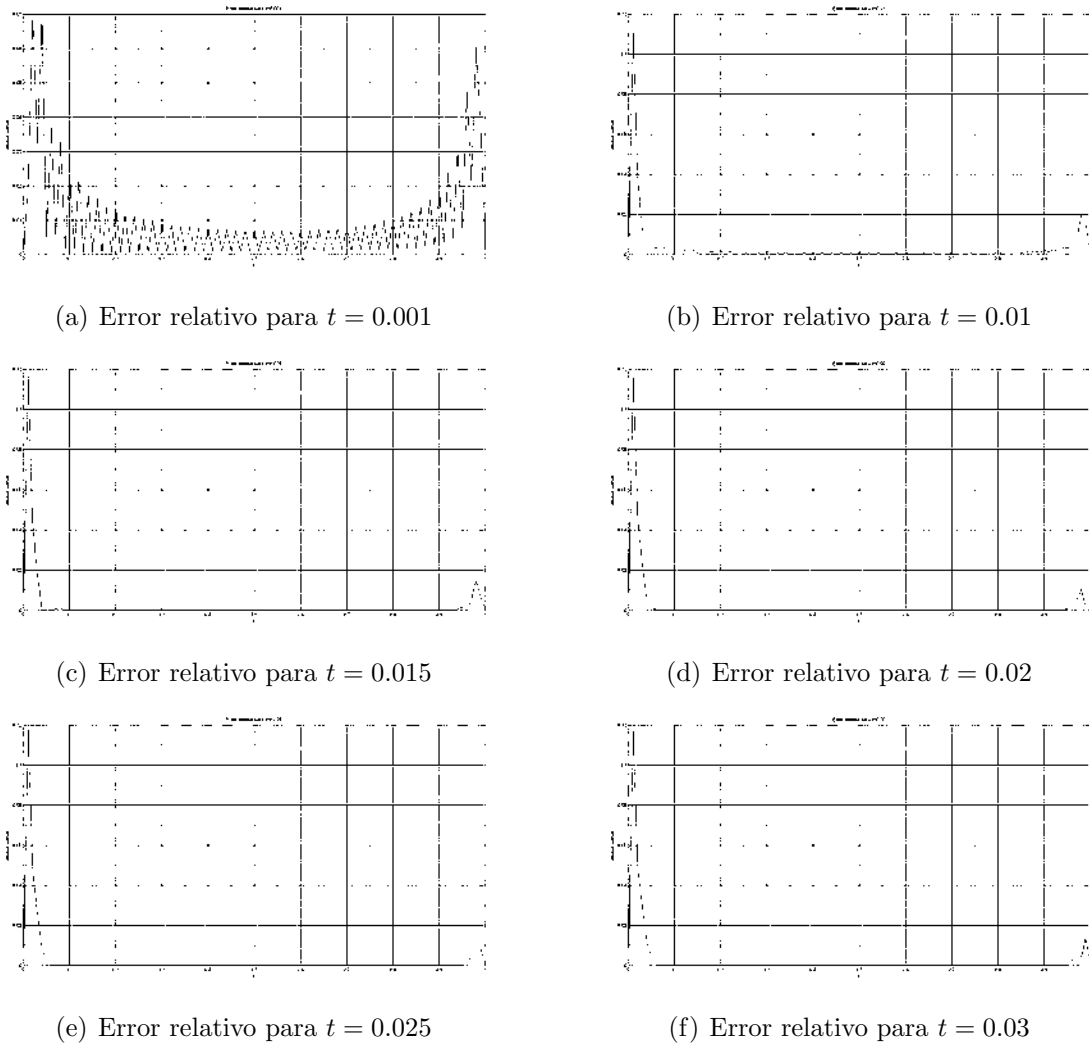


Figura 7.9: Error relativo para para diversos tiempos.

en la figura anterior se observan los errores relativos en distintos tiempos. Se observa que el error va disminuyendo con el paso del tiempo y que es más alto al inicio, esto se debe a que al inicio la solución exacta tiene oscilaciones en valores de  $u$  cercanos a la frontera por el fenómeno de Gibbs. También se hicieron comparaciones entre los tiempos de obtención de la solución exacta y la solución aproximada, la solución aproximada se obtuvo en el tiempo de  $t_{ca} = 0.015008$  segundos y la solución exacta en un tiempo de  $t_{ce} = 0.0288$  segundo, lo cual muestra que la solución aproximada se obtiene más rápidos, también se cálculo el tiempo en el que se obtuvo la solución para diez mil subintervalos de tiempo, el cuál fue de  $t_{ca} = 46.987$  segundos.

## SECTION 7.3

**Ecuación de Burgers.**

La ecuación de Burgers es fundamental en las ecuaciones diferenciales parciales en dinámica de fluidos. Esta ecuación se aplica en varias áreas de la matemática aplicada, así como en la modelación de dinámica de gases y el tráfico vehicular. Toma el nombre de ecuación de Burgers gracias al físico alemán Johanes Martinus Burgers(1895-1981) quien fue pionero en la deducción de esta ecuación.

Dicha ecuación se puede obtener de la ecuación de Navier-Stokes, la cuál rige el movimiento de un fluido en dinámica de fluidos, esta ecuación tiene sus orígenes en la segunda ley de Newton para un fluido en movimiento mejor conocida como la ley de movimiento de Cauchy y la ecuación constitutiva, dicha ecuación para un flujo incompresible  $\nabla \cdot u = 0$ , se escribe como

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 u_j + \rho g_j, \quad (7.33)$$

en donde

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u, \quad (7.34)$$

es la derivada material de la velocidad  $u$ ,  $p$  es la presión,  $\rho$  es la densidad,  $\nu$  es el coeficiente de viscosidad,  $f$  es la fuerza externa aplicada(e.g gravedad), si los términos de la presión y la fuerza externa no se consideran, lo que obtenemos es la famosa ecuación de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.35)$$

Cuando el fluido es invíscido,  $\nu = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7.36)$$

la ecuación resultante se le conoce como la ecuación de Burgers invíscida la cuál es un prototipo para las ecuaciones cuyas soluciones modelan las ondas de choque

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0 \quad (7.37)$$

Más que para modelar un problema físico en particular, esta ecuación se desarrollo como un modelo simple que ayuda a encontrar ideas claves en la dinámica de gases y en el tráfico vehicular, gracias a el término no lineal  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  y al término viscoso  $\nu$ . Alrededor de los años 50, Hope e independientemente Cole, mostraron que la solución exacta para la ecuación no lineal (7.35) puede encontrarse usando lo que ahora se conoce como la “ transformación de Cole-Hopf”

$$u = -2\nu \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7.38)$$

Esto reduce la ecuación (7.35) a la ecuación lineal de calor

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (7.39)$$

La solución general a la ecuación de calor se conoce por series como se mostro anteriormente (7.14) y se puede escribir como

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa) \exp\left(-\frac{(x-\kappa)^2}{4\nu t}\right) d\kappa, \quad \varphi(x, 0) = f(x), \quad (7.40)$$

en donde  $f(x)$  es lo que se conoce como la condición inicial. La solución para la ecuación de Burgers es

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\kappa}{t} \exp\left(-\frac{G}{2\nu}\right) d\kappa}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{G}{2\nu}\right) d\kappa}, \quad G(\kappa; x, t) = \int_0^{\kappa} f(\eta') d\eta' + \frac{(x-\kappa)^2}{2t}, \quad (7.41)$$

a  $f(\kappa)$  se le llama la condición inicial cuando  $t = 0$ .

En resumen, la transformación no lineal de Cole-Hopf elimina el término no lineal y reduce la ecuación de Burgers a la ecuación de calor la cuál tiene una solución explícita que proporciona una solución explícita para la ecuación de Burgers con viscosidad. La ecuación de Burgers invíscida es una ecuación diferencial de primer orden y su solución se puede construir utilizando el método de las características.

## SECTION 7.4

### Matrices de diferenciación rápidas aplicadas a la ecuación de Burgers.

En esta sección se utilizará el método de las matrices de diferenciación rápidas en conjunto con las matrices de diferenciación algebraicas para resolver dos ecuaciones, la ecuación de Burger con viscosidad y la ecuación Korteweg-de Vries-Burgers (como se utilizo en la sección (7.2)). La ecuación es un ejemplo prototípico con soluciones de tipo solitón en medios dispersivos.

#### 7.4.1 Solución exacta y aproximada a la Ecuación de Burgers.

Se considera la ecuación de Burgers (7.35). La solución exacta de (7.35) es una onda solitaria, la cual se encuentra utilizando la transformación de Cole-Hopf [11]

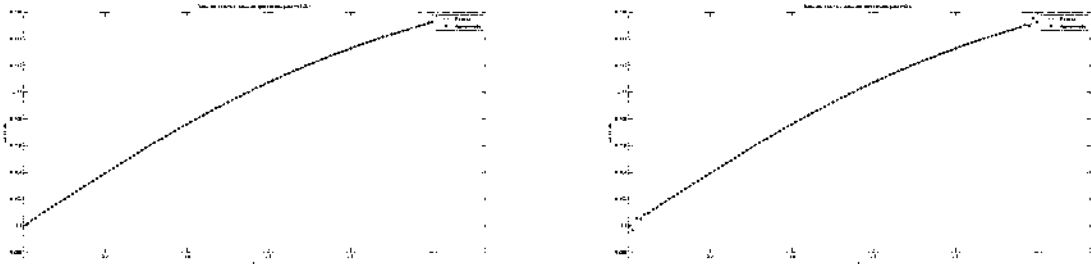
$$u(x, t) = \frac{k}{\alpha} + \left(\frac{2\nu}{\alpha}\right) \tanh(x - kt), \quad x \in [a, b], \quad t \geq 0. \quad (7.42)$$

La condición inicial y las condiciones de frontera se extraen de la solución exacta (7.42) para la ecuación de Burgers.

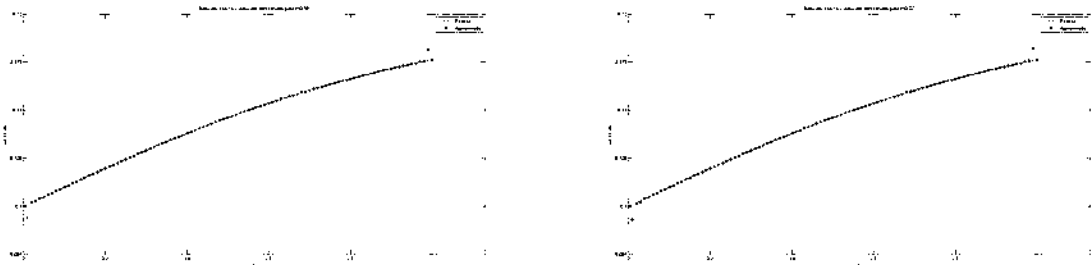
Se discretiza la ecuación de Burgers (7.35) para proceder a resolver utilizando las matrices de diferenciación, primeramente se discretiza la parte espacial utilizando matrices de diferenciación rápidas y luego la parcial con respecto del tiempo se discretiza utilizando la matriz de diferenciación algebraica

$$\mathcal{D}_t u = -\alpha u \mathcal{D}_x u + \nu \mathcal{D}_{xx} u \quad (7.43)$$

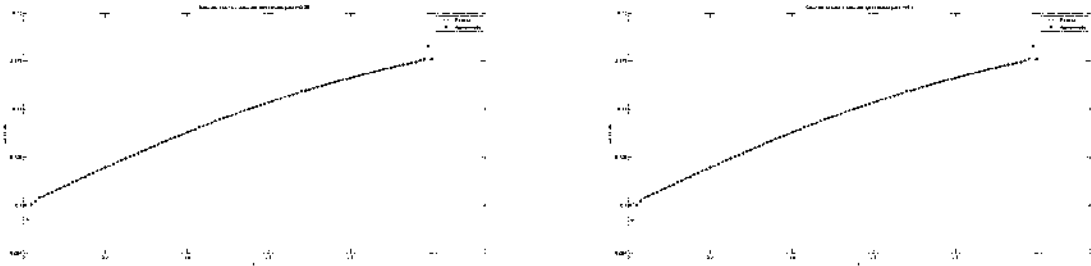
esta ecuación se resuelve de la misma manera que la ecuación de la sección (7.2), para  $N = 101$  nodos en el espacio en el intervalo de  $x \in [0, 1]$ , con matrices de diferenciación algebraicas de tamaño  $R = 2$  con las cuáles recorremos los 101 subintervalos en el tiempo con un  $\delta_t = 0.001$  para matrices de diferenciación algebraicas de dimensión dos, con  $\alpha = 0.1$ ,  $k = 0.1$ ,  $\nu = 0.001$  y el dominio temporal es  $0 < t < 0.1$ . Procediendo a resolver la ecuación discreta (7.43) (como se realizó en la sección (7.2)), se obtienen los siguientes resultados, se comparan con la solución exacta (7.42) superponiendo ambas soluciones como se observa a continuación



(a) Solución Exacta  $u_e$  y solución aproximada  $u_a$  para  $t = 0.001$  (b) Solución Exacta  $u_e$  y solución aproximada  $u_a$  para  $t = 0.01$



(c) Solución Exacta  $u_e$  y solución aproximada  $u_a$  para  $t = 0.05$  (d) Solución Exacta  $u_e$  y solución aproximada  $u_a$  para  $t = 0.07$



(e) Solución Exacta  $u_e$  y solución aproximada  $u_a$  para  $t = 0.09$  (f) Solución Exacta  $u_e$  y solución aproximada  $u_a$  para  $t = 0.1$

Figura 7.10: Solución exacta y solución aproximada para diversos pasos de tiempo.

El siguiente paso es calcular el error relativo (4.29) entre ambas soluciones el cuál mostraremos para diversos tiempos

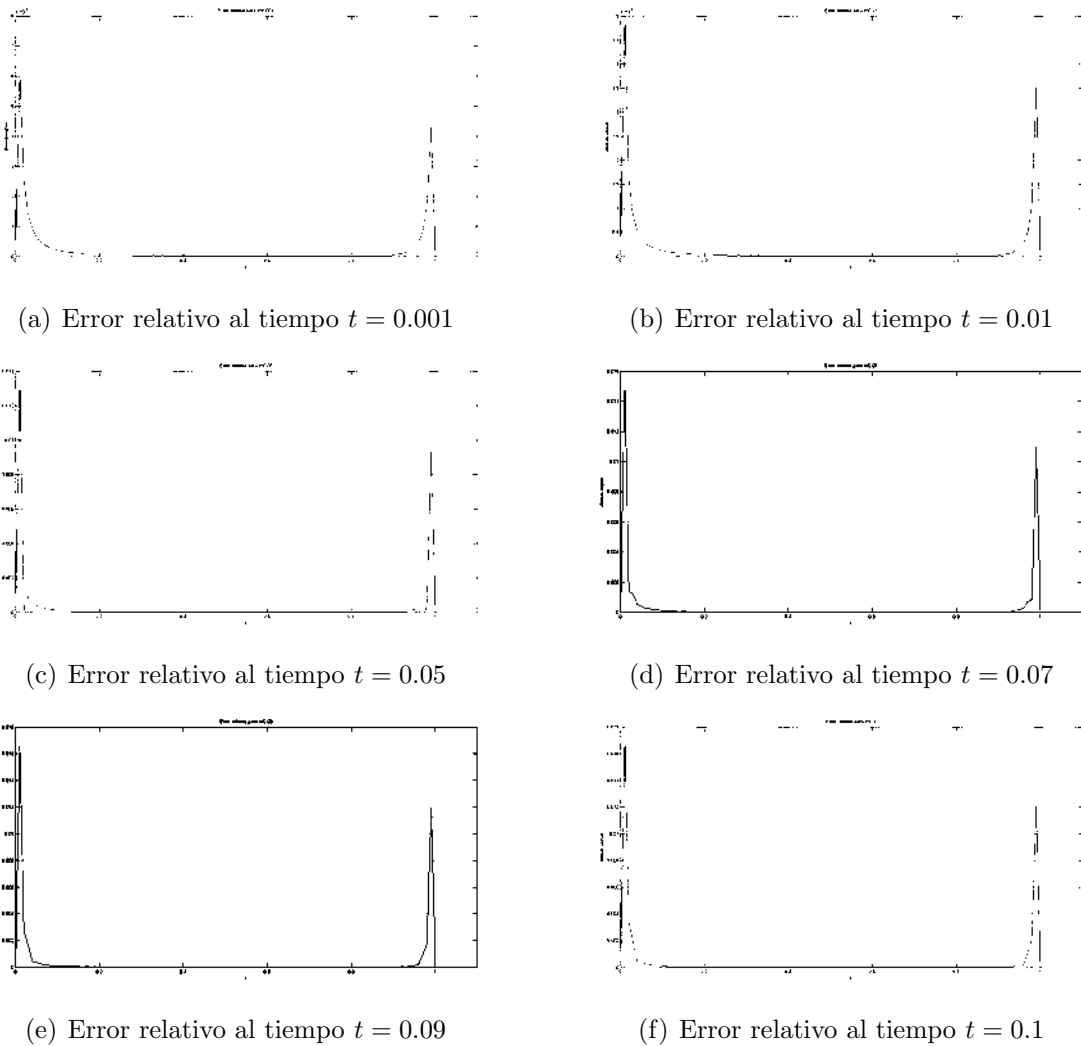


Figura 7.11: Error relativo para diversos pasos de tiempo.

Con el fin de mostrar el comportamiento global del error en el tiempo, usamos la norma máxima del error.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>.El método propuesto en esta sección se comparó con el método de líneas para la misma ecuación de Burgers con parámetros similares pero menos nodos en el espacio ( $N = 10$  nodos en el espacio)[12]. El MOL es un método que discretiza el espacio utilizando diferencias finitas y resuelve integrando por medio de Runge Kutta de cuarto orden. Los resultados con los parámetros establecidos son del orden de  $10^{-6}$ , con el método propuesto en esta tesis y el método de líneas.”

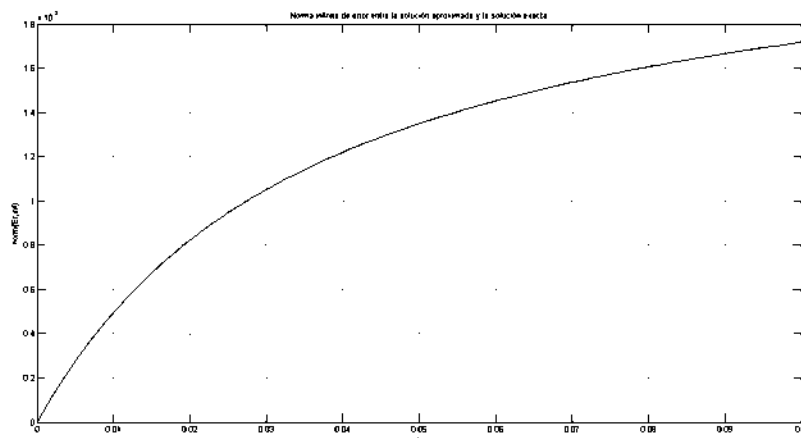


Figura 7.12: Norma infinita.

## 7.4.2 Ecuación de Burgers

El siguiente ejemplo ilustra el movimiento de una onda, la cual se obtiene utilizando el método que involucra las matrices de diferenciación rápidas para la parte espacial y las matrices de diferenciación algebraicas para la parte temporal, este método no se compara con la solución exacta. Consideramos resolver la ecuación de Burgers (7.35), con la condición inicial

$$u(x, 0) = 4x(x - 1), \quad x \in [0, 1], \quad (7.44)$$

y las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.45)$$

Escogemos los valores de los parámetros que determinan la cantidad de nodos en el espacio y el tiempo con  $N = 101$ , con un espaciamiento entre cada nodo de  $\delta_x = 0.01$ , con  $R = 2$ , que es el tamaño de las matrices de diferenciación temporal con las cuales recorreremos los 101 subintervalos para el tiempo y un  $\delta_t = 0.001$  hasta el tiempo final  $t_f = 1$ , con los valores de los parámetros  $\alpha = 1$ ,  $\nu = 0.01$ . La ecuación de Burgers se discretiza y se resuelve utilizando el método de matrices de diferenciación como en los ejemplos anteriores y se obtiene una solución que representa una onda en movimiento,

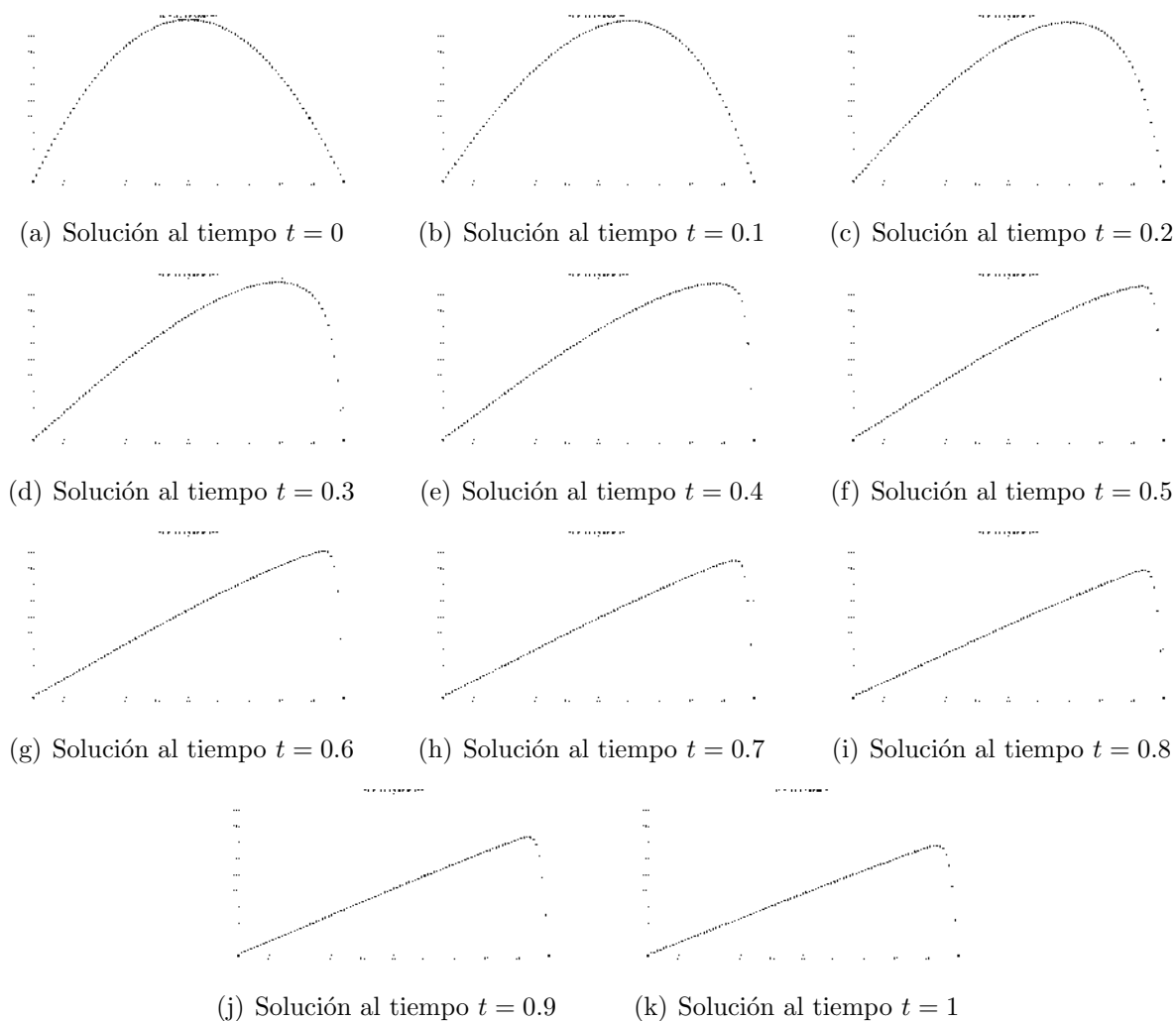


Figura 7.13: Solución aproximada de la ecuación de Burgers.

### 7.4.3 Solución exacta y aproximada a la Ecuación de KdV-Burgers.

Se considera la ecuación KdV-Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial u^3}{\partial x^3}, \quad (7.46)$$

con  $\alpha$ ,  $\nu$  y  $\mu$  como constantes arbitrarias. Una solución es una onda solitaria [11]

$$u(x, t) = A[9 - 6 \tanh(B(x - Ct)) - 3 \tanh^2(B(x - Ct))], \quad x \in [a, b], \quad t > 0 \quad (7.47)$$

donde

$$A = \frac{\nu^2}{(25\varepsilon\mu)}, \quad B = \frac{\nu}{(10\mu)} \quad y \quad C = \frac{6\nu^2}{(25\mu)}. \quad (7.48)$$

La condición inicial

$$u(x, t = 0) = A[9 - 6 \tanh(B(x)) - 3 \tanh^2(B(x))], \quad x \in [a, b], \quad (7.49)$$

y las condiciones de frontera

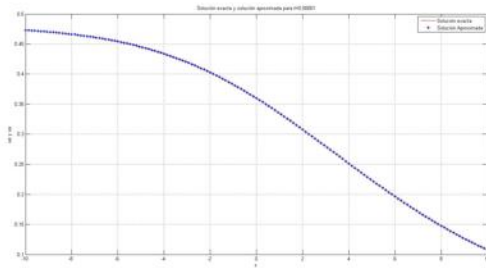
$$u(x = a, t) = A[9 - 6 \tanh(B(a - Ct)) - 3 \tanh^2(B(a - Ct))], \quad (7.50)$$

$$u(x = b, t) = A[9 - 6 \tanh(B(b - Ct)) - 3 \tanh^2(B(b - Ct))], \quad (7.51)$$

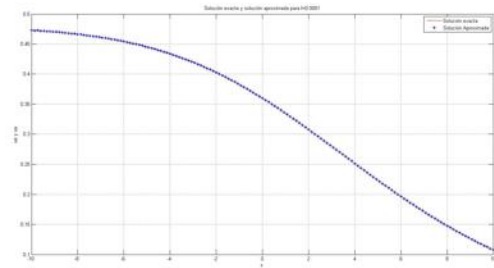
para todo  $t > 0$ . Se discretiza la ecuación Kdv-Burgers (7.46) para resolverla numéricamente, utilizando las matrices rápidas de diferenciación trigonométricas para discretizar las derivadas parciales con respecto a  $x$  y se utilizan las matrices de diferenciación algebraicas para discretizar la derivada parcial con respecto a  $t$ , de manera que obtenemos la siguiente ecuación

$$\mathcal{D}_t = -\alpha u \mathcal{D}_x u + \nu \mathcal{D}_{xx} u + \mu \mathcal{D}_{xxx} u, \quad (7.52)$$

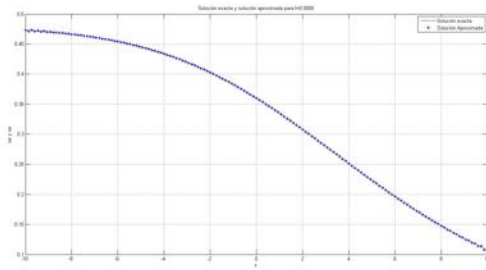
dicha ecuación se resuelve como se procedió en la sección (7.2) con la ecuación discreta para el calor. Se toman  $N = 151$  nodos para la matrices de diferenciación  $\mathcal{D}_x$ ,  $\mathcal{D}_{xx}$  y  $\mathcal{D}_{xxx}$  y con 101 subintervalos para el tiempo con matrices de diferenciación algebraicas para el tiempo  $\mathcal{D}_t$  de tamaño  $R = 2$  con las cuales se recorren los 101 subintervalos temporales resolviendo en el dominio espacial  $-10 < x \leq 10$ , utilizando  $\alpha = 1$ ,  $\nu = 0,01$ ,  $\mu = 0,01$  y  $\varepsilon = 0,01$ . Se procede de la misma manera antes mencionada para los ejemplos ya mostrados a fin de encontrar las siguientes soluciones que muestran que tanto se asemejan la solución aproximada con la solución exacta,



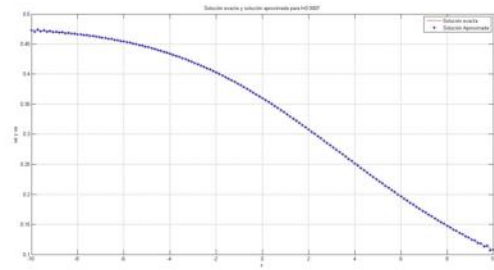
(a) Solución exacta y solución aproximada al tiempo  $t = 0.00001$



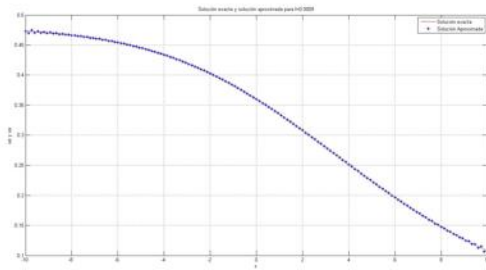
(b) Solución exacta y solución aproximada al tiempo  $t = 0.0001$



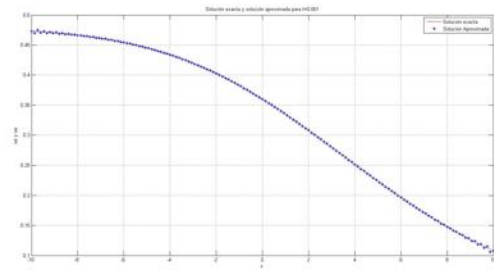
(c) Solución exacta y solución aproximada al tiempo  $t = 0.0005$



(d) Solución exacta y solución aproximada al tiempo  $t = 0.0007$



(e) Solución exacta y solución aproximada  $t = 0.0009$



(f) Solución exacta y solución aproximada al tiempo  $t = 0.001$

Figura 7.14: Solución aproximada y solución exacta de la ecuación de KdV-Burgers en diversos tiempos.

Se obtiene el error relativo (4.29), de la diferencia de la solución exacta y la solución aproximada,

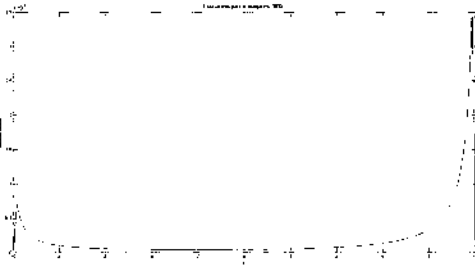
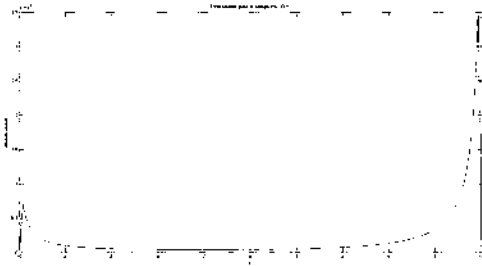
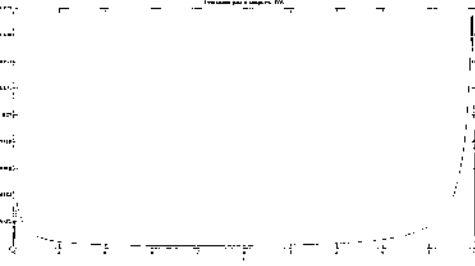
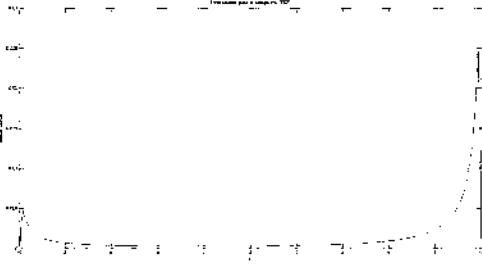
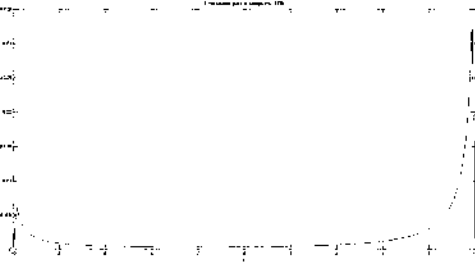
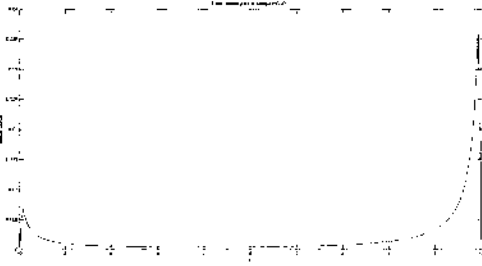
(a) Error relativo entre la solución exacta y la solución aproximada al tiempo  $t = 0.00001$ (b) Error relativo entre la solución exacta y la solución aproximada al tiempo  $t = 0.0001$ (c) Error relativo entre la solución exacta y la solución aproximada al tiempo  $t = 0.0005$ (d) Error relativo entre la solución exacta y la solución aproximada al tiempo  $t = 0.0007$ (e) Error relativo entre la solución exacta y la solución aproximada  $t = 0.0009$ (f) Error relativo entre la solución exacta y la solución aproximada al tiempo  $t = 0.001$ 

Figura 7.15: Error relativo entre la solución aproximada y la solución exacta de la ecuación de KdV-Burgers en diversos tiempos.

Ahora se procede a obtener la norma infinita<sup>2</sup> de la misma manera en como se hizo anteriormente lo cuál resulta en,

<sup>2</sup>.El método propuesto en esta sección se comparo con el método de líneas para la misma ecuación de KdV de Burgers con parametros similares pero menos nodos en el espacio ( $N = 10$  nodos en el espacio)[12]. El MOL es un método que discretiza el espacio utilizando diferencias finitas y resuelve integrando por medio de Runge Kutta de cuarto orden. Los resultados con los parametros establecidos son del orden de  $10^{-6}$ , con el método propuesto en esta tesis y el método de líneas.”

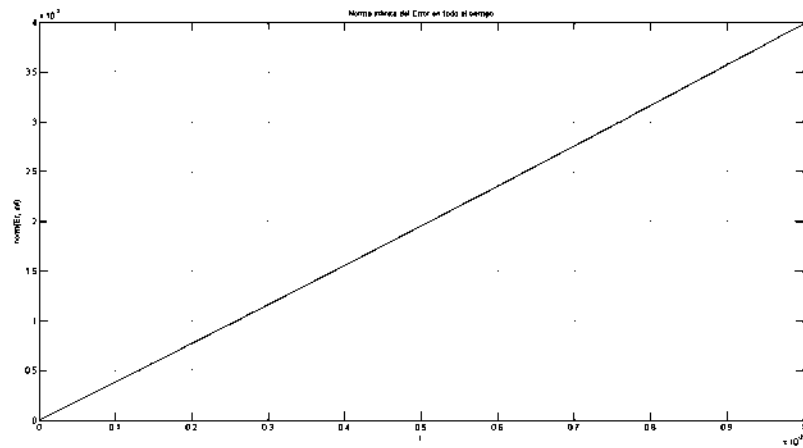


Figura 7.16: Norma infinita del error para la ecuación KdV-Burgers.

---

# Capítulo 8

## CONCLUSIONES.

---

De acuerdo con lo que se mostró en el desarrollo de los primeros capítulos de esta tesis se observa que las matrices de diferenciación es un método numérico nuevo de gran utilidad para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales como la ecuación de calor en 3+1 dimensiones de la sección (4.1.2) y la no lineales (Burgers y KdV Burgers) obteniendo buenos resultados al comparar los resultados aproximados con los resultados exactos, en dichos resultados se observa como el método de IVP de la sección (3) es de gran utilidad para resolver problemas dinámicos con una gran cantidad de tiempos, también es notorio que las matrices de diferenciación que discretizan el espacio en un problema de 3 + 1 hasta este momento no pueden ser de mayor dimensión que las que se propusieron debido a que son matrices llenas y despues de cierta dimensiones el error numérico eempieza a incrementar, el uso de matrices de diferenciación parciales utiliza una gran cantidad de memoria del ordenador y más en un problema de 3+1, lo que es un obstáculo si queremos tomar una catidad mayor de puntos a pesar de los buenos resultados que se observan en el error a la norma.

Por lo cuál es que la diagonalización de las matrices de diferenciación trigonométricas utilizando el algoritmo *fft* para calcular la transformada de Fourier discreta nos proporciona una manera más general, eficiente y rápida para resolver ecuaciones diferenciales parciales con mayor cantidad de nodos en el espacio, de la misma forma observamos que ecuaciones lineales y no lineales como lo son la ecuación de Calor, Burgers y la ecuación KdV-Burgers se pueden resolver numéricamente utilizando matrices de diferenciación rapidas en la discretización del espacio y el esquema IVP para utilizar matrices de diferenciación algebraicas de manera que tanto en el espacio como en el tiempo se puedan utilizar una cantidad de puntos mucho mayor a los que antes se podia utilizar. Es importante el enfatizar que el objetivo de esta tesis no sólo era el poder encontrar tanto matrices de diferenciación rápidas como matrices de integración rápidas, sino también el resolver de manera efectiva ecuacio-

nes diferenciales no lineales, lo cuál se lógro de buena manera, dejando en claro que las matrices de diferenciación son un método numérico eficiente ante aplicaciones en dinámica de fluidos, con lo cuál se pueden realizar proyectos más ambiciosos a futuro que involucren aplicaciones en el campo de la industria, o modelación de problemas en el medio ambiente los cuales son de vital importancia en la vida actual.

## REFERENCIAS

---

- [1] C.Canuto, M.Y. Hussaini, A.Quateroni, and T.A. Zang, *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*, Springer-Verlag, Berlin, Germany (2006.)
- [2] J.A.C. Weideman and S.C. Reddy, *A Matlab Differentiation Matrix Suite*, ACM Trans. Math. Soft., 26, (2000) 465-519.
- [3] F.Calogero, *Lagrangian interpolation and differentiation*, Lett. Nuovo Cimento, 35, (1983) 273-278.
- [4] M.Bruschi, R.G. Campos and E. Pace, *On a method for computing eigenvalues and eigenfunctions of linear differential operators*, Nuovo Cimento, B105, (1990) 131-163.
- [5] R.G. Campos and C.Meneses, *Differentiation matrices for meromorphic functions*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 12, (2006) 121-132.
- [6] R.G. Campos and F. Domínguez M., *An implementation of the collocation method for initial value problems*, (submitted) arXiv:0907.0693v1 [math.NA]
- [7] R.G. Campos and L.O. Pimentel, *A finite-dimensional representation of quantum angular momentum operator*, Il Nuovo Cimento. B116, (2012) 31-46.
- [8] Rafael G. Campos and Rafael García Ruiz, *Fast Integration of Boundary Value Problems for ODEs*, (submitted) Elsevier
- [9] Rafael G. Campos, *A limit-cycle solver for nonautonomous dynamical systems*, (submitted) Revista Mexicana de Física
- [10] Arshed Ali, Fazal-i-Haq and Iltaf Hussain, *A Numerical Meshless Technique for the solution of Some Burgers Type Equations*, World Applied Sciencess Journal, (2011) 1792-1798.
- [11] Michael B. Cutlip and Ben-Gurion, *The Numerical Method of Lines for Partial Differential Equations*
- [12] M. Javidi, *A Numerical solution of Burgers equation based on modified extended BDF scheme*, International Mathematical Forum, 1, 2006, no 32, 1565-1570.

- [13] Randall J. Leveque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge Text in applied Mathematics.
- [14] A. Vande Wouwer, Ph Saucez and W. E. Schiesser, *Adaptive Method of Lines*, Chapman and Hall/CRC
- [15] Pijush K.Kundu and Ira M. Cohen, *Fluids Mechanics*, Elsevier Academic Press.
- [16] Georgi P. Tolstov, *Fourier Series*, Dover, 1976, pp.181-188.
- [17] Nakhlé H. Asmar, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, Prentice Hall, Chapter 7, pp 334-335