



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**LA ESTRUCTURA DE LOS ESPACIOTIEMPOS QUE  
REPRESENTAN A LOS AGUJEROS DE GUSANO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**DOCTORA EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA**

PRESENTA:

**NADIEZHDA MONTELONGO GARCÍA**

ASESOR:

**DR. THOMAS ZANNIAS**

MORELIA, MICHOACÁN, AGOSTO 2009.



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción a los agujeros de gusano</b>	<b>7</b>
1.1	Introducción . . . . .	7
1.2	El concepto de agujero de gusano . . . . .	9
1.3	La Historia de los agujeros de gusano . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Las ecuaciones de Einstein y los agujeros de gusano</b>	<b>23</b>
2.1	Las ecuaciones de Einstein y la conservación del tensor de energía momento . . . . .	23
2.2	La formulación del problema de valores iniciales . . . . .	31
2.3	Las condiciones de la energía y la existencia de la garganta . .	37
2.4	Modelos de la materia exótica . . . . .	46
2.5	La construcción de Morris-Thorne . . . . .	48
<b>3</b>	<b>La existencia global de los agujeros de gusano</b>	<b>55</b>
3.1	Acerca de la existencia local de los agujeros de gusanos . . . . .	55
3.2	Acerca de la existencia global de los agujeros de gusano . . . . .	59
3.3	La determinación de la presión tangencial . . . . .	76

3.4	La determinación de la tensión . . . . .	77
3.5	La construcción del espaciotiempo . . . . .	78
3.6	Agujeros de gusano cuasi-Schwarzschild . . . . .	80
3.7	Agujeros de gusano con simetría reflexiva . . . . .	86
3.8	Agujeros de gusano asintóticamente planos . . . . .	89
3.9	Apéndice 3A: El Teorema de Picard-Lindeloff . . . . .	102
3.10	Apéndice 3B: Acerca de la masa de Komar . . . . .	106
3.11	Apéndice 3C: La presión tangencial en la coordenada de curvatura . . . . .	108
3.12	Apéndice 3D: La masa ADM y su relación con la masa Misner-Sharp . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Los agujeros de gusanos soportados por la energía fantasma</b>	<b>113</b>
4.1	La materia exótica y las ecuaciones de estado . . . . .	113
4.2	Agujeros de gusano soportadas por K-esencia y Klein-Gordon . . . . .	126
4.3	Una nueva norma . . . . .	129
4.4	Una familia bi-paramétrica de agujeros de gusano . . . . .	133
4.5	Apéndice 4A: Ecuaciones de Einstein en la nueva norma . . . . .	139
4.6	Apéndice 4B: La equivalencia del formalismo de Morris-Thorne con el formalismo de este trabajo . . . . .	142
<b>5</b>	<b>Conclusiones y problemas abiertos</b>	<b>145</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>157</b>

# Convenciones

En esta tesis nuestras convenciones para la signatura de la métrica, el tensor de Riemann, el tensor de Ricci, el tensor de Einstein, las ecuaciones de Einstein, y la segunda forma fundamental, son las mismas que en el libro de Wald [1].

En particular tomamos  $G(\mathbf{g}) = \hat{k}T$  para las ecuaciones de Einstein o  $G_{\mu\nu} = \hat{k}T_{\mu\nu}$  con respecto a una carta arbitraria, en donde  $\hat{k} = \frac{8\pi G}{c^4}$ .

A lo largo de esta tesis varias veces consideramos una variedad riemanniana  $(\Sigma, \gamma)$ , con  $\dim\Sigma = 3$  y donde  $\gamma$  se puede escribir como:

$$\gamma = \rho^2(V, x^1, x^2)dV + \gamma_{ij}(V, x^1, x^2)dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

con  $V = \text{cte}$  que denota la imagen de una familia de embebimientos y  $(x^1, x^2)$  son las coordenadas sobre  $V = \text{cte}$ . Las componentes coordenadas de la curvatura extrínseca  $K_{ij}$  asociada a  $V = \text{cte}$ , así como su traza  $K$  respectivamente están dadas por:

$$K_{ij} = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial V}, \quad K = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial V}.$$

En varias ocasiones en el capítulo 3 utilizaremos los siguientes espacios de funciones:

$$C^k[(a, b)] = \{f|f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ k-veces continuamente diferenciable}\},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$C^0[(a, b)] \equiv C[(a, b)]$  denota el espacio de funciones continuas.

Para una  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto denotamos:

$$C^k(\Omega) = \{f|f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ todas sus k-derivadas parciales e incluso de orden } k \text{ existen y son continuas}\}.$$

# Capítulo 1

## Introducción a los agujeros de gusano

### 1.1 Introducción

En esta tesis hacemos una contribución a la teoría de los agujeros de gusano introduciendo una nueva manera de construir tales espaciotiempos. El ingrediente central de esta construcción es la “garganta”, y nuestra idea ha sido discutida en [12, 13]. Daremos todos los pormenores de la construcción descrita en [12, 13]. En la sección próxima definiremos precisamente la noción de “garganta” y mostramos que existe una carta local  $(t, l, \theta, \phi)$ , en donde  $\mathbf{g}$  toma la forma:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l) d\Omega^2, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad \epsilon > 0, \quad (1.1)$$

$$r(0) > 0, \quad \left. \frac{dr(l)}{dl} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d^2r(l)}{dl^2} \right|_0 > 0, \quad e^{2\Phi(0)} > 0. \quad (1.2)$$

implicando que la garganta esta colocada en  $l = 0$ .

En el capítulo (2) analizamos las restricciones que imponen las ecuaciones de Einstein sobre:  $(\Phi(l), r(l))$  y las componentes del tensor de energía momento, que soporta a la métrica  $\mathbf{g}$  en (1.1). En el capítulo (2) a través de las ecuaciones de Einstein derivamos un problema de valores iniciales (PVI) cuyas soluciones pueden ser empleadas para la construcción de espaciotiempos que representan los agujeros de gusano. También en el mismo capítulo presentamos una discusión crítica entre las similitudes y diferencias del formalismo empleado por Morris y Thorne y el nuestro. En el capítulo (3) estudiamos el PVI que hemos construido en el capítulo (2), y mostramos la existencia de las soluciones globales de dicho PVI. Con la ayuda de estas soluciones mostramos la existencia de una familia infinita de espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  que representan a los agujeros de gusano. En el mismo capítulo avanzamos con una nueva caracterización de los agujeros de gusano del tipo cuasi-Schwarzschild.

En el capítulo (4) a través de una combinación de técnicas analíticas y numéricas demostraremos la existencia de agujeros de gusano soportados por materia cuyo tensor de energía momento con respecto al marco de ortonormal de los observadores de Killing tomará la forma de un “fluido perfecto” que poseerá presiones no isotrópicas las cuales se sujetarán a las constricciones:  $\tau = \lambda \rho c^2$ ,  $P = \mu \rho c^2$ . Mostraremos que bajo restricciones sobre  $(\lambda, \mu)$ , existe una familia de agujeros de gusano esféricas asintóticamente planas de cuatro

parámetros. También presentamos un modelo de materia exótica a través de una combinación de K-esencia sin masa y el campo real de Klein-Gordon, y mostramos la existencia de una 2-paramétrica familia de agujeros de gusano. Las propiedades de esta familia son discutidas.

En el capítulo (5) discutimos críticamente la posibilidad que los agujeros de gusano sean ingredientes del universo. Analizamos brevemente la estructura del potencial efectivo para entender el comportamiento de las geodésicas temporales y nulas alrededor de la garganta para un agujero de gusano esférico arbitrario. Además obtenemos una expansión de la métrica válida sobre y en una vecindad de la garganta. Concluiremos con el hecho que en esta tesis solo trataremos la existencia matemática de los agujeros de gusanos esféricos. Brevemente discutimos problemas abiertos como el mecanismo o mecanismos de formación de agujeros de gusano, y en particular problemas asociadas con la estabilidad de estos espacios tiempos.

## **1.2 El concepto de agujero de gusano**

El espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  de Schwarzschild con masa positiva es la solución más conocida de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Esta es una solución con simetría esférica, y en las coordenadas de curvatura la métrica  $\mathbf{g}$ , tiene la forma <sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Para esta sección, tomamos las unidades  $G = c = 1$ .

$$\mathbf{g} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.3)$$

$$r \in (2m, \infty), \quad -\infty < t < \infty, m > 0. \quad (1.4)$$

Como es bien conocido, la singularidad de  $\mathbf{g}$  en  $r \rightarrow 2m$  es removible, y  $\mathbf{g}$  se extiende suavemente a través de esta singularidad de coordenadas. La extensión analítica máxima de  $(M, \mathbf{g})$ , la cual denotamos por  $(\tilde{M}, \mathbf{g})$  es conocida, y  $\mathbf{g}$  en las coordenadas de Kruskal  $(T, X, \theta, \phi)$  toma la forma:

$$\mathbf{g} = \frac{32m^3 e^{-\frac{r}{2m}}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2, T, X \in (-\infty, \infty), \quad (1.5)$$

donde  $r = r(T, X)$ . La relación entre las coordenadas  $(t, r)$  y  $(T, X)$ , está dada por -véase [1, 2]-:

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}} = X^2 - T^2, \quad (1.6)$$

$$\frac{t}{2m} = \ln \left(\frac{T+X}{X-T}\right) = 2 \tanh^{-1} \left(\frac{T}{X}\right), \quad (1.7)$$

y la estructura de  $(\tilde{M}, \mathbf{g})$ , se ve como en la figura (1.1).

No es de nuestro interés discutir el diagrama dado en la figura (1.1), ni tampoco analizar la estructura causal de  $(\tilde{M}, \mathbf{g})$  -véase la sección (6.4) de [1] o [2]-. Nos enfocaremos en las regiones I y IV de la figura (1.1) y consideremos las hipersuperficies espaciales  $t = \text{cte}$ . Tales hipersuperficies son definidas invariantes, debido a que son ortogonales al campo vectorial de Killing temporal  $\xi$  en las regiones I y IV. Con respecto a las coordenadas de curvatura, la métrica inducida  $\gamma$  sobre tales hipersuperficies, esta toma la forma:

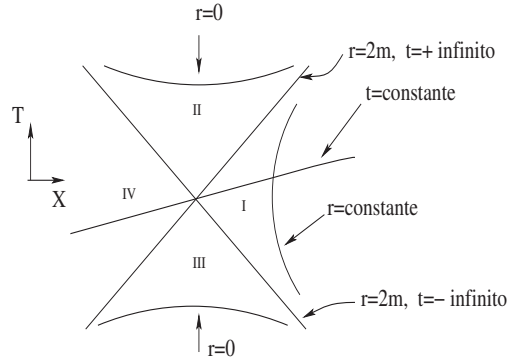


Figura 1.1: La extensión de Kruskal del espaciotiempo de Schwarzschild

$$\gamma = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad r > 2m \quad (1.8)$$

y aun  $\gamma$  parece singular en  $r \rightarrow 2m$ , en realidad es sólo una singularidad de coordenadas. Para ver lo anterior, introducimos una nueva coordenada  $l$  a través de:

$$\frac{dl(r)}{dr} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad r > 2m \quad (1.9)$$

de donde tenemos:

$$l(r) = \int_{2m}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r'}}}, \quad r > 2m, \quad (1.10)$$

mientras que  $\gamma$  toma la forma:

$$\gamma = dl^2 + r^2(l)d\Omega^2, \quad l > 0. \quad (1.11)$$

Aunque la integral en (1.10) puede expresarse en términos de funciones elementales, para nuestro objetivo, es suficiente el comportamiento de  $l(r)$  en el límite cuando  $r \rightarrow 2m$ . De (1.10) obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 2m} l(r) &= \lim_{r \rightarrow 2m} \int_{2m}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r'}}} \\ &= 2m \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2} + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{3/2} + O\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{3/2} \right], \end{aligned} \quad (1.12)$$

Invertiendo esta relación, obtenemos:

$$r(l) \approx \frac{2m}{1 - \left(\frac{l}{2m}\right)^2} = 2m \left[ 1 + \left(\frac{l}{2m}\right)^2 + O\left(\frac{l}{2m}\right)^4 \right], \quad l \in (0, \epsilon) \quad (1.13)$$

entonces (1.11), toma la forma:

$$\gamma = dl^2 + (2m)^2 \left[ 1 + \left(\frac{l}{2m}\right)^2 + O\left(\frac{l}{2m}\right)^4 \right]^2 d\Omega^2, \quad l \in [0, \epsilon), \quad (1.14)$$

implicando que  $\gamma$  se extiende hasta incluso en  $l = 0$ . Aunque esta conclusión es válida para ‘la parte’ de las hipersuperficies espaciales  $t = \text{cte}$  que se encuentra en la región I, el mismo análisis es válido para ‘la parte’ de  $t = \text{cte}$  que se encuentra en la región IV. Si introducimos de nuevo la coordenada  $l$ , pero ahora vía:

$$\frac{dl(r)}{dr} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}, \quad r > 2m. \quad (1.15)$$

Un análisis similar al anterior, lleva a

$$r(l) \approx \frac{2m}{1 - \left(-\frac{l}{2m}\right)^2} = 2m \left[ 1 + \left(-\frac{l}{2m}\right)^2 + O\left(-\frac{l}{2m}\right)^4 \right], l \in (-\epsilon, 0), (1.16)$$

en este caso (1.11), se lee como:

$$\gamma = dl^2 + (2m)^2 \left[ 1 + \left(\frac{l}{2m}\right)^2 + O\left(\frac{l}{2m}\right)^4 \right]^2 d\Omega^2, l \in (-\epsilon, 0]. \quad (1.17)$$

Por otro lado, las componentes de la segunda forma fundamental  $K_{ij}(l)$  de las 2-esferas  $l = \text{cte}$  embebidas en  $t = \text{cte}$ , debido a la simetría esférica, tienen la forma -véase página 3, convenciones-:

$$K_{ij}(l) = \frac{1}{2}K(l)\hat{\gamma}_{ij}, \quad K(l) = \frac{2}{r(l)} \frac{dr(l)}{dl}, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (1.18)$$

en donde  $\hat{\gamma}_{ij}$  son las componente, de la 2-métrica inducida sobre  $l = \text{cte}$ . Evaluando  $K_{ij}(l)$ , para  $l \in (-\epsilon, \epsilon)$  y apelando (1.13,1.16) vemos las  $K_{ij}(l)$  son continuas en  $l = 0$ . Esto implica que las ‘partes’ sobre  $t = \text{cte}$  hipersuperficies que están en la región I y en la región IV, se unen suavemente a lo largo de la 2-esfera de bifurcación  $r = 2m$ . Recordemos que la esfera de bifurcación  $r = 2m$ , es definida como la intersección de los dos horizontes de eventos -véase figura (1.1)-. El campo vectorial de Killing temporal  $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$  en las regiones I y IV tiene la propiedad ser cero en la esfera de bifurcación  $r = 2m$ .

Un entendimiento más completo de la geometría de las  $t = \text{cte}$  hipersuperficies espaciales, viene a través del empleo de las coordenadas isotrópicas  $(t, \rho, \theta, \phi)$  donde -para una introducción a estas coordenadas véase [3]-:

$$r(\rho) = \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2 \rho, \quad \rho \in \left(\frac{m}{2}, \infty\right), \quad (1.19)$$

$$(1.20)$$

mientras que  $\rho(r)$  está dado por:

$$\rho(r) = \frac{1}{2}[(r - m) \pm \sqrt{r(r - 2m)}], \quad r > 2m, \quad (1.21)$$

en donde elegimos el signo '+' para la 'parte' de las hipersuperficies espaciales  $t = \text{cte}$  que se encuentra en la región I, y el signo '-' para la 'parte' que se encuentra en la región IV. Con esta elección notamos que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2} \left[1 - \frac{m}{r} + \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}\right] = \infty \quad (1.22)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2} \left[1 - \frac{m}{r} - \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}\right] = 0, \quad (1.23)$$

mientras que para ambos signos se tiene  $\lim_{r \rightarrow 2m} \rho(r) = \frac{m}{2}$ . Sin importar la elección del signo la métrica dada por (1.4) toma la forma [3]:

$$\mathbf{g} = - \left(\frac{1 - \frac{m}{2\rho}}{1 + \frac{m}{2\rho}}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2], \quad (1.24)$$

$$\rho \in \left(\frac{m}{2}, \infty\right) \cup \left(\frac{m}{2}, 0\right),$$

y la 3-métrica inducida  $\gamma$  sobre  $t = \text{cte}$  está dada por:

$$\gamma = \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2], \rho \in \left(\frac{m}{2}, \infty\right) \cup \left(\frac{m}{2}, 0\right), \quad (1.25)$$

Debido a que  $\gamma$  es regular en  $\rho = \frac{m}{2}$ , extendemos el rango de  $\rho$  al intervalo  $(0, \infty)$ . Con esta extensión el área  $A(\rho)$  de las superficies  $\rho = \text{cte}$  es:

$$A(\rho) = 4\pi\rho^2 \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4, \rho \in (0, \infty). \quad (1.26)$$

De esta expresión se ve que:

$$\frac{dA(\rho)}{d\rho} = \frac{\pi (2\rho + m)^3 (2\rho - m)}{2\rho^3} \quad (1.27)$$

ello implica que  $A(\rho)$  tiene un punto crítico en  $\rho = \frac{m}{2}$ . Evaluando la segunda derivada de  $A(\rho)$  en dicho punto se sigue:

$$\frac{d^2 A(\rho)}{d\rho^2} \Big|_{\frac{m}{2}} = \frac{\pi (2\rho + m)^2 (4\rho^2 + 3m^2 - 4\rho m)}{2\rho^4} \Big|_{\frac{m}{2}} = 64\pi > 0, \quad (1.28)$$

entonces  $A(\rho)$  posee un mínimo global en  $\rho = \frac{m}{2}$ , debido a que:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A(\rho) = \infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} A(\rho) = \infty, \quad (1.29)$$

Además de (1.25) se ve que en límite  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\gamma$  es asintóticamente euclidiana<sup>2</sup>, y esta propiedad es válida también en el límite  $\rho \rightarrow 0$ , lo cual podemos

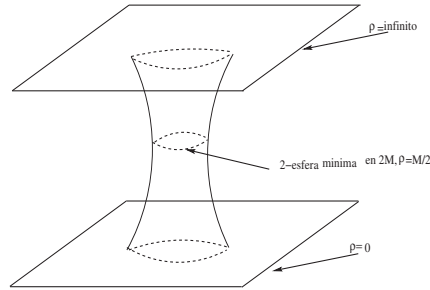


Figura 1.2: Esta imagen es un esquema de la estructura de la superficie  $\Sigma = \mathbb{R} \times S^2$ . La garganta está denotada por  $\rho = \frac{m}{2}$  y las regiones asintóticas con  $\rho = \infty$  y  $\rho = 0$ .

ver a través del cambio de coordenada  $\hat{r} = \frac{1}{\rho}$ .

El análisis anterior muestra que las  $t = \text{cte}$  hipersuperficies espaciales, a través de la esfera de bifurcación poseen una estructura geométrica interesante. Primeramente, debido a la invariancia traslacional, a lo largo de las orbitas del vector de Killing temporal, la geometría intrínseca y extrínseca de cada una de estas hipersuperficies es invariante. Por tanto es suficiente restringir nuestra atención sobre una de estas hipersuperficies, sea  $t = 0$ , la cual denotaremos como  $\Sigma$ . Tal hipersuperficie tiene dos regiones asintóticamente euclidianas, que poseen masa ADM finita  $m_{ADM} = m$ . Las dos regiones asintóticas están conectadas a través de una garganta, la cual es la 2-esfera de bifurcación  $r = 2m$ . En particular el área  $A(\rho)$  de las 2-esferas  $\rho = \text{cte}$ , satisface:

---

<sup>2</sup>Más adelante definiremos precisamente a que nos referimos con: ‘la hipersuperficie embebida en el espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  es asintóticamente Euclidiana’.

$$\frac{dA(\rho)}{d\rho}\Big|_{\frac{m}{2}} = 0, \quad \frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2}\Big|_{\frac{m}{2}} > 0,$$

como lo ilustra la figura (1.2). Aun  $\Sigma$  es conexa, de la figura (1.1) se aprecia que un observador colocado en la región  $I$  no puede viajar via la garganta hacia la región  $IV$  y viceversa. Debido a la presencia de las regiones  $II$  y  $III$  en la figura (1.1) tal viaje no puede ser posible. Recordemos que las regiones  $II$  y  $III$  corresponden al agujero negro y al agujero blanco para los observadores en la región  $I$ . Por la orientación del campo de Killing temporal  $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$  ocurre lo opuesto para observadores colocados en la región  $IV$ , así la región  $III$  corresponde al agujero negro mientras que la región  $II$  al agujero blanco.

En la literatura frecuentemente  $(\tilde{M}, \mathbf{g})$  es llamado agujero de gusano ‘no transitable’, debido a la topología de  $\Sigma = \mathbb{R} \times S^2$  y la presencia de las regiones  $I$  y  $IV$ , las cuales que son asintóticamente planas. El termino ‘no transitable’ se refiere a la propiedad de que en  $(\tilde{M}, \mathbf{g})$ , los observadores físicos no pueden viajar de la región  $I$  a la región  $III$ , así como los observadores de la región  $III$  no puedan entrar a la región  $I$ .

Las conclusiones de esta sección se han derivado de la estructura causal del espaciotiempo  $(\tilde{M}, \mathbf{g})$  de Schwarzschild, en donde recordamos que  $\mathbf{g}$  es *Ricci-flat*, es decir,  $R_{icci}(\mathbf{g}) = 0$ . Sin embargo este análisis lleva a preguntarse si existen espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  con  $\mathbf{g}$  solución de las ecuaciones Einstein, que en contraste con  $(\tilde{M}, \mathbf{g})$  sean ‘transitables’. La condición necesaria para que tales viajes sean posibles es que  $(M, \mathbf{g})$  no posea las regiones que representan

agujeros negros, y esto ocurre cuando  $(M, \mathbf{g})$  es globalmente estático.

Motivados por las propiedades de la hipersuperficie espacial  $\Sigma$ , decimos que  $(M, \mathbf{g})$  representa un agujero de gusano ‘transitable’, estático y esférico, si  $(M, \mathbf{g})$  satisface las siguientes condiciones:

- $(M, \mathbf{g})$  es globalmente estático, y esféricamente simétrico.
- Cada hipersuperficie espacial ortogonal al vector de Killing temporal es topológicamente  $\mathbb{R} \times S^2$ , cuyas regiones asintóticas son asintóticamente euclidianas.
- Existe una garganta de área finita que conecta a estas dos regiones asintóticas.
- $(M, \mathbf{g})$  es libre de singularidades de curvatura.

Asumimos por el momento que tales  $(M, \mathbf{g})$  existen. Primeramente estaticidad implica que existan coordenadas  $(t, x^1, x^2, x^3)$ , en donde  $\mathbf{g}$  y el campo vectorial de Killing estático  $\xi$ , toman la forma:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(x^1, x^2, x^3)} dt^2 + \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.30)$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.31)$$

Por otro lado, la simetría esférica permite elegir coordenadas locales sobre las  $t = \text{cte}$  hipersuperficies espaciales, tal que -véase [1]-:

$$\mathbf{g} = -e^{2\phi(r)} dt^2 + f(r) dr^2 + g(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.32)$$

La presencia de la garganta da la posibilidad de introducir una coordenada privilegiada, la cual es la coordenada  $l$  que aparece en (1.11). Por definición la garganta es una 2-esfera con el área finita embebida en las hipersuperficies espaciales  $t = cte$ . Utilizando esta 2-esfera introducimos las coordenadas gaussianas a través del siguiente procedimiento -para una introducción a estas coordenadas véase [1]-.

Sean  $(\theta, \phi)$  las coordenadas estándares sobre la 2-esfera unitaria  $(S^2, \hat{\gamma})$ , y sea  $\mathbf{n}$  el campo normal a  $(S^2, \hat{\gamma})$ . Para cada punto  $A$  en  $(S^2, \hat{\gamma})$ , consideremos la geodésica espacial que pasa a través de  $A$  y tal que  $\mathbf{n}|_A$  es su vector tangente. Introducimos  $l$  como la longitud propia a lo largo de tal la geodésica con  $l = 0$  en  $A$ , y transportamos las coordenadas  $(\theta, \phi)$  que cubren una vecindad abierta de  $A$  a lo largo de tal geodésica. De esta manera, se define una carta coordenada local  $(l, \theta, \phi)$  que cubre una vecindad abierta de la garganta. Respecto a esta carta, la métrica  $\mathbf{g}$  toma la forma:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l) d\Omega^2, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (1.33)$$

en donde  $l$  representa la longitud propia a lo largo de las geodésicas espaciales ortogonales a la garganta. Fijamos  $l$  de tal manera que  $l = 0$  corresponde a la garganta, y demandando que el campo vectorial coordenado  $\frac{\partial}{\partial t}$  sea unitario. Con respecto a estas coordenadas el área  $A(l)$  de las 2-esferas

$l = \text{cte}$  es  $A(l) = 4\pi r^2(l)$ ,  $l \in (-\epsilon, \epsilon)$ , y el requerimiento que  $l = 0$  represente la garganta demanda que  $r(l)$  satisfaga:

$$r(0) > 0, \quad \left. \frac{dr(l)}{dl} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d^2r(l)}{dl^2} \right|_0 > 0, \quad (1.34)$$

mientras la estáticidad implica que la magnitud del vector de Killing temporal  $\xi$  satisfice:

$$\mathbf{g}(\xi, \xi) = \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -e^{2\Phi(l)} \neq 0.$$

Regularidad de curvatura se requiere que el factor de corrimiento  $\Phi(l)$  sea suave  $\forall l \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Esta carta coordenada local  $(t, l, \theta, \phi)$  será muy útil al discutir la existencia, la construcción y las propiedades de espaciotiempos que representen agujeros de gusano.

En los capítulos siguientes veremos que las ecuaciones de Einstein y restricciones sobre la estructura del tensor de energía momento permiten extender esta carta local a una carta global que cubre a  $(M, \mathbf{g})$ , el cual representa un agujero de gusano ‘transitable’. Pero antes de entrar a aspectos técnicos discutiremos como se ha dado la evolución del concepto del agujero de gusano.

### 1.3 La Historia de los agujeros de gusano

Como es bien conocido, desde el punto de vista de la relatividad general, la gravitación se manifiesta como la curvatura del espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$ . En

esta teoría las ecuaciones de Einstein son  $G(\mathbf{g}) = \hat{k}T$ , y relacionan la curvatura del espaciotiempo con la distribución de la materia a través del tensor de energía momento  $T$ . No es la finalidad en esta sección discutir el significado físico y matemático de las ecuaciones de Einstein, ni tampoco sus consecuencias y predicciones -para esto véase los libros [1, 2, 3, 4]-. Recordaremos sólo que desde el punto de vista de la gravitación relativista, la topología de la variedad  $M$  y la métrica  $\mathbf{g}$  no son especificadas *a priori*, ambas son determinadas de una manera autoconsistente con la dinámica de las ecuaciones de Einstein. Es conveniente resaltar que la primera solución de estas ecuaciones es la famosa solución de Schwarzschild, la cual hemos discutido brevemente, posee una topología no trivial, es decir,  $\tilde{M} = \mathbb{R}^2 \times S^2$ .

En 1973, H. Ellis [5] encontró un espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$ , el cual podemos decir fue el primer agujero de gusano de acuerdo con nuestra terminología. Él notó que tal espaciotiempo poseía propiedades peculiares y lo nombro *drain-hole*<sup>3</sup>. El próximo avance en la teoría de agujeros de gusano tuvo lugar en 1988, con el trabajo de Morris y Thorne [6]. Este trabajo es considerado clásico para el estudio de tales espaciotiempos. La motivación de Morris y Thorne fue una novela de ciencia ficción, y el deseo de introducir a los estudiantes de nivel licenciatura a los fundamentos de la relatividad general. Podemos decir que en [6] se fundó la teoría de los agujeros de gusano. Su trabajo ayudó a comprender que la presencia de la garganta necesita materia cuyo tensor de

---

<sup>3</sup>Como veremos más adelante el agujero de gusano descrito en [5], es soportado por K-esencia sin masa.

energía momento viola la condición de energía nula. En la terminología de [6], este material fue referido como materia exótico. El auge de la teoría de los agujeros de gusano se dió con el descubrimiento de la expansión acelerada del universo [7, 8, 9]. Esta expansión sugiere que quizá el universo es dominado por la energía oscura o la energía fantasma, términos que implican que el tensor de energía momento asociado al material cósmico viola la condición de energía fuerte o posiblemente la nula.

Aunque no existen observaciones directas que soporten la existencia de la materia exótica, de la energía oscura o la energía fantasma, los relativistas comenzaron a estudiar la dinámica de las ecuaciones de Einstein asumiendo que el tensor de energía momento viola las condiciones clásicas de la energía. En particular mucho trabajo científico tenía como enfoque las propiedades de los agujeros de gusano, parte de esta actividad de investigación está reflejada en el libro de Visser [14] publicado en 1995. Para un panorama de los avances recientes - véase [10, 11]-.

A pesar de que hemos visto en la sección anterior que la garganta de un agujero de gusano desempeña un papel importante, la mayoría de los espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  que representan agujeros de gusano estáticos y esféricos han sido derivados a través del formalismo desarrollado en [6]. En los capítulos próximos discutimos una nueva manera de construir tales espaciotiempos.

## Capítulo 2

# Las ecuaciones de Einstein y los agujeros de gusano

### 2.1 Las ecuaciones de Einstein y la conservación del tensor de energía momento

En este capítulo empezamos a estudiar la estructura de espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  los cuales representan a los agujeros de gusano<sup>1</sup>. Primeramente, enfocamos nuestro esfuerzo a un análisis de la geometría y la estructura del tensor de energía momento, alrededor de la garganta. Como hemos visto en el primer capítulo, un  $(M, \mathbf{g})$  que representa a un agujero de gusano, existe una carta local  $(t, l, \theta, \phi)$  la cual cubre una vecindad abierta de la garganta,

---

<sup>1</sup>En lo sucesivo utilizaremos al término el agujero de gusano en lugar del agujero de gusano transitable.

donde  $\mathbf{g}$  toma la forma:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l) d\Omega^2, l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (2.1)$$

con  $e^{2\Phi(l)} \neq 0$ ,  $l \in (-\epsilon, \epsilon)$ , mientras la regularidad de la curvatura demanda  $(\phi(l), r(l))$  sean suaves y además  $r(l)$  debe satisfacer:

$$r(0) > 0, \quad \left. \frac{dr(l)}{dl} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d^2r(l)}{dl^2} \right|_0 > 0, \quad (2.2)$$

implicando que  $l = 0$  denote a la garganta.

En esta sección estudiaremos las restricciones que imponen las ecuaciones de Einstein sobre  $\Phi(l)$  y  $r(l)$ , y la estructura del tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$ , el cual soporta a tal agujero de gusano. Lógicamente para analizar tal problema se debería especificar la naturaleza de  $T_{\mu\nu}$ , y luego investigar si existen las métricas  $\mathbf{g}$  que satisfacen  $G_{\mu\nu} = \hat{k}T_{\mu\nu}$  y además las propiedades (2.1,2.2). En esta parte inicial del problema, nosotros nos desviamos de este procedimiento. Debido a que no tenemos conocimiento del tipo de materia que puede soportar a un agujero de gusano atacaremos el problema de un ángulo distinto.

Asumimos que con respecto al marco de referencia ortonormal:

$$\mathbf{u} = e^{-\Phi(l)} \frac{\partial}{\partial t}, \quad X = \frac{\partial}{\partial l}, \quad Y = \frac{1}{r(l)} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad Z = \frac{1}{r(l) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (2.3)$$

el cual es portado por los observadores de Killing, consecuentemente las componentes de  $T_{\mu\nu}$  toman la forma:

$$T_{\mu\nu} = \rho(l)c^2 u_\mu u_\nu + P_1(l)X_\mu X_\nu + P_2(l)Y_\mu Y_\nu + P_3(l)Z_\mu Z_\nu. \quad (2.4)$$

Esta descomposición implica que los observadores de Killing midan  $\rho(l)c^2$  como la densidad de energía,  $P_1(l)$  como la presión radial, y  $P_1(l), P_2(l)$  como las presiones tangenciales. Con respecto a (2.1), las componentes coordenadas del tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  distintas de cero son:

$$G_{00} = G\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -\frac{e^{2\Phi(l)}}{r^2(l)} \left( 2r(l) \frac{d^2 r(l)}{dl^2} - 1 + \left( \frac{dr(l)}{dl} \right)^2 \right), \quad (2.5)$$

$$G_{ll} = G\left(\frac{\partial}{\partial l}, \frac{\partial}{\partial l}\right) = \frac{1}{r^2(l)} \left( 2r(l) \frac{dr(l)}{dl} \frac{d\Phi(l)}{dl} - 1 + \left( \frac{dr(l)}{dl} \right)^2 \right), \quad (2.6)$$

$$G_{\theta\theta} = G\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = r^2(l) \left\{ \frac{1}{r(l)} \left( \frac{dr(l)}{dl} \frac{d\Phi(l)}{dl} + \frac{d^2 r(l)}{dl^2} \right) + \frac{d^2 \Phi(l)}{dl^2} + \left( \frac{d\Phi(l)}{dl} \right)^2 \right\}, \quad (2.7)$$

$$G_{\phi\phi} = G\left(\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right) = r^2(l) \sin^2 \theta \left\{ \frac{1}{r(l)} \left( \frac{dr(l)}{dl} \frac{d\Phi(l)}{dl} + \frac{d^2 r(l)}{dl^2} \right) + \frac{d^2 \Phi(l)}{dl^2} + \left( \frac{d\Phi(l)}{dl} \right)^2 \right\}. \quad (2.8)$$

Entonces las ecuaciones de Einstein,  $G_{\mu\nu} = \hat{k}T_{\mu\nu}$  demandan:

$$-\frac{1}{r^2(l)} \left( 2r(l) \frac{d^2 r(l)}{dl^2} - 1 + \left( \frac{dr(l)}{dl} \right)^2 \right) = \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{r^2(l)} \left( 2r(l) \frac{dr(l)}{dl} \frac{d\Phi(l)}{dl} - 1 + \left( \frac{dr(l)}{dl} \right)^2 \right) = \hat{k}P_1(l), \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{r(l)} \left( \frac{dr(l)}{dl} \frac{d\Phi(l)}{dl} + \frac{d^2r(l)}{dl^2} \right) + \frac{d^2\Phi(l)}{dl^2} + \left( \frac{d\Phi(l)}{dl} \right)^2 = \hat{k}P_2(l), \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{r(l)} \left( \frac{dr(l)}{dl} \frac{d\Phi(l)}{dl} + \frac{d^2r(l)}{dl^2} \right) + \frac{d^2\Phi(l)}{dl^2} + \left( \frac{d\Phi(l)}{dl} \right)^2 = \hat{k}P_3(l). \quad (2.12)$$

Nótese que las dos últimas ecuaciones demandan  $P_2(l) = P_3(l)$ . Pero tal restricción viene naturalmente de la conservación del tensor de energía momento, es decir,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

Una manera de ver el contenido de esta ecuación es proyectar (2.13) a lo largo de  $\mathbf{u}$ :

$$u_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.14)$$

y en direcciones ortogonales a  $\mathbf{u}$ , esto es:

$$h_\mu^\sigma \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.15)$$

en donde  $h_\nu^\mu \equiv \delta_\nu^\mu + u^\mu u_\nu$  es el tensor proyector, el cual satisface  $h_\nu^\mu u_\mu = 0$ , y  $h_\nu^\mu h_\xi^\nu = \delta_\xi^\mu$ . La ecuación (2.14) es equivalente a:

$$\nabla_\nu (T^{\mu\nu} u_\mu) - T^{\mu\nu} \nabla_\nu u_\mu = 0,$$

y utilizando  $T_{\mu\nu}$  dado por (2.4) se sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\nu[-\rho(l)c^2u^\nu] - [\rho(l)c^2u^\mu u^\nu + P_1(l)X^\mu X^\nu + P_2Y^\mu Y^\nu + P_3Z^\mu Z^\nu]\nabla_\nu u_\mu \\ &= -u^\nu\nabla_\nu(\rho c^2) - \rho c^2\theta_K - \rho(l)c^2u^\mu a_\mu - P_1(l)X^\mu X^\nu\nabla_\nu u_\mu - P_2Y^\mu Y^\nu\nabla_\nu u_\mu \\ &\quad - P_3Z^\mu Z^\nu\nabla_\nu u_\mu, \end{aligned}$$

en donde  $\theta_K = \nabla_\nu u^\nu$  es la expansión de la congruencia temporal de líneas del universo asociada al campo de Killing y  $a^\mu = u^\nu\nabla_\nu u^\sigma$  las componentes de la 4-aceleración de tal congruencia. Por la estaticidad:

$$\theta_K = \nabla_\nu u^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}u^\mu) = \frac{1}{e^{\Phi(l)}r^2(l)}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(e^{\phi(l)}r^2(l)u^t\delta_t^\mu) = 0,$$

$$a^\sigma = u^\nu\nabla_\nu u^\sigma = \frac{\partial\Phi(l)}{\partial l}\delta_l^\sigma.$$

$$u^\nu\nabla_\nu\rho c^2 = \frac{1}{[-\xi^\mu\xi_\mu]^{1/2}}\xi^\mu\nabla_\mu(\rho c^2) = 0.$$

Por otro lado:

$$\nabla_\nu u_\mu = e^{\Phi(l)}\frac{d\Phi(l)}{dl}\delta_\mu^t\delta_\nu^l \quad (2.16)$$

se ve fácilmente,

$$X^\mu X^\nu\nabla_\nu u_\mu = Y^\mu Y^\nu\nabla_\nu u_\mu = Z^\mu Z^\nu\nabla_\nu u_\mu = 0. \quad (2.17)$$

Tomando en cuenta estas relaciones y la identidad

$$u^\mu a_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu a^\nu = g_{\mu\nu} e^{-\Phi(l)} \frac{\partial \Phi(l)}{\partial l} \delta_t^\mu \delta_l^\nu = 0$$

se sigue que (2.14) es idénticamente satisfecha.

Consideramos en seguida la ecuación (2.15), la cual reescribimos como:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu(T^{\nu\mu}h_\mu^\sigma) - T^{\mu\nu}\nabla_\nu h_\mu^\sigma &= \nabla_\nu(T^{\nu\mu}h_\mu^\sigma) - T^{\mu\nu}\nabla_\nu(u^\sigma u_\mu) \quad (2.18) \\ &= \nabla_\nu(T^{\nu\mu}h_\mu^\sigma) - T^{\mu\nu}u^\sigma\nabla_\nu u_\mu - T^{\mu\nu}u_\mu\nabla_\nu u^\sigma = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo la forma de  $T_{\mu\nu}$  vía (2.4), y tomando en cuenta  $h_\mu^\sigma u^\mu = 0$  obtenemos:

$$\begin{aligned} &\nabla_\nu[P_1(l)X^\sigma X^\nu + P_2(l)Y^\sigma Y^\nu + P_3Z^\sigma Z^\nu] \\ &-[\rho(l)c^2u^\mu a_\mu + P_1(l)X^\mu X^\nu\nabla_\nu u_\mu + P_2(l)Y^\mu Y^\nu\nabla_\nu u_\mu + P_3(l)Z^\mu Z^\nu\nabla_\nu u_\mu]u^\sigma \\ &+ \rho(l)c^2a^\sigma = 0. \end{aligned}$$

Como una consecuencia de que  $u^\mu a_\mu = 0$  y (2.17), la expresión previa se reduce a:

$$\nabla_\nu[P_1(l)X^\sigma X^\nu + P_2(l)Y^\sigma Y^\nu + P_3Z^\sigma Z^\nu] + \rho(l)c^2a^\sigma = 0. \quad (2.19)$$

Desarrollando el primer término de lado izquierdo se llega a:

$$X^\sigma X^\nu\nabla_\nu P_1(l) + Y^\sigma Y^\nu\nabla_\nu P_2(l) + Z^\sigma Z^\nu\nabla_\nu P_3(l)$$

$$+P_1(l)X^\nu\nabla_\nu X^\sigma + P_2(l)Y^\nu\nabla_\nu Y^\sigma + P_3(l)Z^\nu\nabla_\nu Z^\sigma$$

$$+P_1X^\sigma\nabla_\nu X^\nu + P_2Y^\sigma\nabla_\nu Y^\nu + P_3(l)Z^\sigma\nabla_\nu Z^\nu + \rho(l)c^2a^\sigma = 0. \quad (2.20)$$

Por la simetría esférica y las propiedades de los campos  $X, Y$  y  $Z$  se tiene:

$$Y^\nu\nabla_\nu P_2(l) = Z^\nu\nabla_\nu P_3(l) = X^\nu\nabla_\nu X^\sigma = \nabla_\nu Z^\nu = 0,$$

entonces (2.20) se simplifica a la forma:

$$\begin{aligned} X^\sigma X^\nu\nabla_\nu P_1(l) + P_2(l)Y^\nu\nabla_\nu Y^\sigma + P_3(l)Z^\nu\nabla_\nu Z^\sigma \\ + P_1X^\sigma\nabla_\nu X^\nu + P_2Y^\sigma\nabla_\nu Y^\nu + \rho(l)c^2a^\sigma = 0. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que:

$$a^\sigma = u^\mu\nabla_\mu u^\sigma = \frac{\partial\Phi(l)}{\partial l}\delta_l^\sigma, \quad Y^\nu\nabla_\nu Y^\sigma = -\frac{1}{r(l)}\frac{dr(l)}{dl}\delta_l^\sigma, \quad (2.21)$$

$$Z^\nu\nabla_\nu Z^\sigma = -\frac{1}{r(l)\sin\theta}\frac{dr(l)}{dl}\delta_l^\sigma - \frac{\cot\theta}{2\sin\theta r^2(l)}\delta_\theta^\sigma, \quad (2.22)$$

$$\nabla_\nu X^\nu = \frac{d\Phi(l)}{dl} + \frac{2}{r(l)}\frac{dr(l)}{dl}, \quad \nabla_\nu Y^\nu = \frac{\cot\theta}{2r(l)}, \quad (2.23)$$

la ecuación (2.15) se reduce a:

$$\begin{aligned} \delta_\mu^l \left[ P_1(l) \left( \frac{2}{r(l)} \frac{dr(l)}{dl} + \frac{d\Phi(l)}{dl} \right) + \frac{dP_1(l)}{dl} - \frac{P_2(l)}{r(l)} \frac{dr(l)}{dl} + \rho(l)c^2 \frac{d\Phi(l)}{dl} \right] \\ + \delta_\mu^\theta \left[ -\frac{P_3(l)}{\tan\theta} + \frac{P_2(l)}{\tan\theta} \right] = 0, \quad \mu = l, \theta, \phi. \end{aligned} \quad (2.24)$$

De esta ecuación si tomamos una vez  $\mu = \theta$  y luego  $\mu = l$  obtenemos:

$$P_2(l) = P_3(l), \quad (2.25)$$

$$\frac{dP_1(l)}{dl} = -(\rho(l)c^2 + P_1(l))\frac{d\Phi}{dl} + \frac{2}{r(l)}\frac{dr(l)}{dl}(P_2(l) - P_1(l)). \quad (2.26)$$

las cuales son el contenido de  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

En lo sucesivo es conveniente introducir la tensión  $\tau(l)$  vía  $\tau(l) = -P_1(l)$ , así  $T_{\mu\nu}$  descrito en (2.4) toma la forma:

$$T_{\mu\nu} = \rho(l)c^2 u_\mu u_\nu - \tau(l)X_\mu X_\nu + P(l)(Y_\mu Y_\nu + Z_\mu Z_\nu). \quad (2.27)$$

Con este análisis las ecuaciones de Einstein y la conservación del tensor de energía momento toman la forma:

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = (\rho(l)c^2 - \tau(l))\frac{d\Phi(l)}{dl} - \frac{2(\tau(l) + P(l))}{r(l)}\frac{dr(l)}{dl}. \quad (2.28)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)}\left(2r(l)\frac{d^2r(l)}{dl^2} - 1 + \left(\frac{dr(l)}{dl}\right)^2\right) = \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{r^2(l)}\left(2r(l)\frac{dr(l)}{dl}\frac{d\Phi(l)}{dl} - 1 + \left(\frac{dr(l)}{dl}\right)^2\right) = -\hat{k}\tau(l), \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r(l)}\left(\frac{dr(l)}{dl}\frac{d\Phi(l)}{dl} + \frac{d^2r(l)}{dl^2}\right) + \frac{d^2\Phi(l)}{dl^2} \\ &+ \left(\frac{d\Phi(l)}{dl}\right)^2 = \hat{k}P(l). \end{aligned} \quad (2.31)$$

La ecuación (2.28) representa una generalización de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV); es decir, la condición necesaria para que el agujero de gusano se encuentre en equilibrio hidrostático [1, 4]. Si asumimos  $P_1(l) = P_2(l) = P_3(l) = P(l)$ , entonces (2.4) toma la forma:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \rho(l)c^2 u_\mu u_\nu + P(l)[X_\mu X_\nu + Y_\mu Y_\nu + Z_\mu Z_\nu] \\ &= \rho(l)c^2 u_\mu u_\nu + P(l)(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) = [\rho(l)c^2 + P(l)]u_\mu u_\nu + P(l)g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

que corresponde a un “fluido perfecto”, que posee presiones isotópicas, mientras (2.28) se reduce a:

$$\frac{dP(l)}{dl} = -(\rho(l)c^2 + P(l))\frac{d\Phi(l)}{dl} \quad (2.33)$$

que es en realidad la ecuación TOV como veremos más precisamente en la sección (2.4).

El sistema de ecuaciones (2.28-2.31) parece complicado pero a través de una redefinición de las variables independientes, su estructura será más clara.

## 2.2 La formulación del problema de valores iniciales

Introducimos nuevas variables  $\Lambda(l), K(l)$  definidas por:

$$\Lambda(l) = \frac{d\Phi(l)}{dl}, \quad (2.34)$$

$$K(l) = \frac{2}{r(l)} \frac{dr(l)}{dl}, \quad (2.35)$$

en donde, como hemos visto en el primer capítulo,  $K(l)$  es la curvatura extrínseca de las  $l = \text{cte}$ , 2-esferas embebidas en las hipersuperficies espaciales  $t = \text{cte}$ . Con la ayuda de estas nuevas variables, el sistema (2.28-2.31) toma la forma:

$$-\frac{dK(l)}{dl} - \frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} = \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (2.36)$$

$$K(l)\Lambda(l) - \frac{1}{r^2(l)} + \frac{1}{4}K^2(l) = -\hat{k}\tau(l), \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{2}K(l)\Lambda(l) + \frac{1}{2}\frac{dK(l)}{dl} + \frac{K^2(l)}{4} + \frac{d\Lambda(l)}{dl} + \Lambda^2(l) = \hat{k}P(l), \quad (2.38)$$

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = (\rho(l)c^2 - \tau(l))\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l). \quad (2.39)$$

Resolviendo para las primeras derivadas tenemos:

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda(l)}{dl} &= -\frac{1}{2}K(l)\Lambda(l) + \frac{1}{2}\hat{k}\rho(l)c^2 - \frac{1}{2r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{8} - \Lambda^2(l) \\ &+ \hat{k}P(l), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = (\rho(l)c^2 - \tau(l))\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l), \quad (2.42)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\tau(l) + \Lambda(l)K(l) = 0. \quad (2.43)$$

Eliminamos el término  $\Lambda(l)K(l)$  de (2.41) con ayuda de (2.43), la ecuación (2.41) toma la forma:

$$\frac{d\Lambda(l)}{dl} = -K(l)\Lambda(l) - \Lambda^2(l) + \frac{\hat{k}}{2}[\rho(l)c^2 - \tau(l) + 2P(l)], \quad (2.44)$$

Entonces a través de las variable  $(\Lambda(l), K(l))$ , el sistema (2.28-2.31) se reduce a:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{1}{2}K(l)r(l), \quad (2.45)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (2.46)$$

$$\frac{d\Lambda(l)}{dl} = -K(l)\Lambda(l) - \Lambda^2(l) + \frac{\hat{k}}{2}[\rho(l)c^2 - \tau(l) + 2P(l)], \quad (2.47)$$

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = (\rho(l)c^2 - \tau(l))\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l), \quad (2.48)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\tau(l) + \Lambda(l)K(l) = 0. \quad (2.49)$$

La última ecuación es una constricción algebraica, y esperamos que esta constricción se preserve bajo la 'evolución' generada por (2.45-2.48). Para investigar esto, sea la función:

$$F(l) = -\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \Lambda(l)K(l) + \hat{k}\tau(l), \quad (2.50)$$

donde  $(r(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l))$  una solución no singular de (2.45-2.48). Consideremos:

$$\frac{dF(l)}{dl} = \frac{1}{r^2(l)}K(l) + \left(\frac{1}{2}K(l) + \Lambda(l)\right)\frac{dK(l)}{dl} + K(l)\frac{d\Lambda}{dl} + \hat{k}\frac{d\tau(l)}{dl},$$

y substituímos  $\frac{dK(l)}{dl}$ ,  $\frac{d\Lambda}{dl}$  y  $\frac{d\tau(l)}{dl}$  a través de las ecuaciones (2.46-2.48) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dF(l)}{dl} &= \frac{1}{r^2(l)}K(l) + \left(\frac{1}{2}K(l) + \Lambda(l)\right) \left[ -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho(l)c^2 \right] \\ &+ K(l) \left[ -K(l)\Lambda(l) - \Lambda^2(l) + \frac{\hat{k}}{2}[\rho(l)c^2 - \tau(l) + 2P(l)] \right] \\ &+ \hat{k}[(\rho(l)c^2 - \tau(l))\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l)] \end{aligned}$$

la cual se reduce a:

$$\frac{dF(l)}{dl} = -F(l)[K(l) + \Lambda(l)] - \frac{K(l)}{2}F(l) = -F(l)\left[\frac{3}{2}K(l) + \Lambda(l)\right].$$

De la linealidad se sigue que si  $F(l_0) = 0$  entonces  $F(l) = 0$ ,  $\forall l$ , implicando que (2.49) está preservada. Esta propiedad de la constricción (2.49) será muy útil más adelante, y referimos (2.49) como la constricción Hamiltoniana.

Estamos interesados en soluciones de (2.45-2.49), que puedan emplearse para construir agujeros de gusano, cuya garganta tiene el área  $A(0) = 4\pi r^2(0) > 0^2$ . Por el hecho que el area  $A(l)$  de las 2-esferas  $l = \text{cte}$  es  $A(l) = 4\pi r^2(l)$ , al

---

<sup>2</sup>De aquí en adelante, cualquier función  $f(l)$  evaluada en  $l = 0$ , sera denotada por  $f(0)$ , por ejemplo  $A(l = 0) = A(0)$ ,  $r(l = 0) = r(0)$ , etc.

CAPÍTULO 2. LAS ECUACIONES DE EINSTEIN Y LOS AGUJEROS DE GUSANO

---

combinar este resultado con la definición de la traza de la curvatura extrínseca

$K(l) = \frac{2}{r(l)} \frac{dr(l)}{dl}$ , resulta:

$$\frac{dA(l)}{dl} \Big|_0 = 8\pi r(l) \frac{dr(l)}{dl} \Big|_0 = A(l)K(l) \Big|_0, \quad (2.51)$$

entonces si demandamos  $\frac{dA(l)}{dl} \Big|_0 = 0$ , combinando con  $A(0) \neq 0$ , concluimos que:

$$K(0) = 0. \quad (2.52)$$

Por otro lado tenemos:

$$\frac{d^2 A(l)}{dl^2} \Big|_0 = \left[ A(l) \frac{dK(l)}{dl} + K(l) \frac{dA(l)}{dl} \right] \Big|_0, \quad (2.53)$$

y al reemplazar  $\frac{dK(l)}{dl}$  vía (2.46) y  $\frac{dA(l)}{dl}$  vía (2.51), obtenemos:

$$\frac{d^2 A(l)}{dl^2} \Big|_0 = \pi \left[ r^2(l) K^2(l) + 4\pi [1 - \hat{k}r^2(l)\rho(l)c^2] \right] \Big|_0, \quad (2.54)$$

El requisito  $\frac{d^2 A(l)}{dl^2} \Big|_0 > 0$  se cumple sujeto a:

$$[1 - \hat{k}r^2(0)\rho(0)c^2] > 0. \quad (2.55)$$

y esta desigualdad será útil más adelante. Por otro lado, si evaluamos la constricción (2.49) sobre la garganta tenemos:

$$-\frac{1}{r^2(0)} + \hat{k}\tau(0) = 0 \implies \hat{k}\tau(0) = \frac{1}{r^2(0)} > 0, \quad (2.56)$$

que relaciona  $\tau(0)$  con el tamaño de la garganta, y además implica  $\tau(0) > 0$ . Combinando (2.56) con (2.55) obtenemos:

$$(\tau(0) - \rho(0)c^2) > 0. \quad (2.57)$$

Esta desigualdad posee restricciones fuertes sobre la naturaleza de materiales capaces de soportar la garganta de un agujero de gusano. Es interesante notar que la presencia de la garganta no impone ninguna restricción sobre  $\Lambda(0) = \Lambda_0$ , más adelante discutiremos su significado físico.

En resumen, (2.1,2.2) y las ecuaciones de Einstein combinadas con el tensor de energía momento (2.4), nos llevan a un “problema de valores iniciales”<sup>3</sup> -PVI, de aquí en adelante-:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{r(l)K(l)}{2} \quad (2.58)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (2.59)$$

---

<sup>3</sup>El uso de las comillas es necesario, pues el sistema (2.58,2.64) contiene 6-incógnitas, es decir,  $r(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l), \rho(l)c^2, P(l)$ : cuatro ecuaciones dinámicas y una restricción. Entonces no constituye estrictamente un PVI en el sentido matemático. Más adelante tratamos este problema.

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda(l)}{dl} &= -\frac{1}{2}K(l)\Lambda(l) + \frac{1}{2}\hat{k}\rho(l)c^2 - \frac{1}{2r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{8} - \Lambda^2(l) \\ &+ \hat{k}P(l), \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = (\rho(l)c^2 - \tau(l))\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l), \quad (2.61)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\tau(l) + \Lambda(l)K(l) = 0, \quad (2.62)$$

$$r(0) = \left( \frac{A(0)}{4\pi} \right)^{1/2}, \quad K(0) = 0, \quad \Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \tau(0) = \frac{1}{\hat{k}r^2(0)}, \quad (2.63)$$

$$\tau(0) - \rho(0)c^2 > 0, \quad (2.64)$$

Antes de empezar el estudio de este PVI, primero discutiremos las implicaciones físicas de la desigualdad (2.64).

### 2.3 Las condiciones de la energía y la existencia de la garganta

En la sección previa hemos visto que en la garganta la tensión  $\tau(0)$  y la densidad  $\rho(0)c^2$  satisfacen  $\tau(0) > 0$  y además  $\tau(0) - \rho(0)c^2 > 0$ . Esta desigualdad nos dice que cualquier tipo de materia que sea capaz de soportar a la garganta, debe tener la tensión mayor a la densidad de energía, al menos con respecto a los observadores de Killing. Normalmente en los materiales que se construyen en laboratorios terrestres, la densidad de energía domina presiones principales. Para ver las consecuencias de  $\tau(0) - \rho(0)c^2 > 0$

será útil recordar que en la teoría de la relatividad general, el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  asociado a alguna distribución de materia o algún campo, primeramente satisface:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.65)$$

pero se imponen restricciones adicionales, referidas como condiciones de la energía<sup>4</sup> -para una discusión más rigurosa de las condiciones de energía y sus implicaciones dentro de la relatividad general véase [1, 2]- . Por ejemplo en el contexto de física clásica es aceptable que la densidad de energía de la materia, medida por observadores con 4-velocidad  $\mathbf{u}$ , sea no negativa en cualquier evento,

$$T_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} \geq 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -1. \quad (2.66)$$

y esta suposición es conocida como *la condición de la energía débil*. Otra condición de energía que es ampliamente aceptada es la condición de energía

---

<sup>4</sup>Para formular tales condiciones asumimos un espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  orientable en el tiempo, en donde es definida alguna distribución de material cuyo tensor de energía momento con respecto a un sistema de coordenadas tiene las componentes  $T_{\mu\nu}$ . Las condiciones de energía son condiciones locales que restringen a  $T_{\mu\nu}$  para cada evento  $p \in M$ . Para algún evento  $p$  y cada vector temporal futuro dirigido  $\mathbf{u}$  podemos elegir una triada de vectores espaciales  $\{X_{(i)}\}$   $i = 1, 2, 3$ , tal que,  $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -1$ ,  $g(X_{(i)}, X_{(j)}) = \delta_{(i)(j)}$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, X_{(i)}) = 0$ . Tal representación de las componentes de  $\mathbf{g}$  será útil al investigar si un tensor  $T_{\mu\nu}$  cumple las condiciones de energía.

fuerte. Si  $T$  es la traza de  $T_{\mu\nu}$ , la condición fuerte demanda que para cada vector temporal unitario  $\mathbf{u}$ :

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + \frac{1}{2}T \geq 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -1. \quad (2.67)$$

Finalmente si la condición (2.66) es válida incluso en el límite cuando  $\mathbf{u}$  es nulo, esto es,

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu \xi^\nu \geq 0, \quad g(\xi, \xi) = 0 \quad (2.68)$$

decimos que  $T_{\mu\nu}$  satisface la condición de energía nula<sup>5</sup>.

Investigamos en seguida si el tensor:

$$T_{\mu\nu} = \rho(l)c^2 u_\mu u_\nu - \tau(l)X_\mu X_\nu + P(l)(Y_\mu Y_\nu + Z_\mu Z_\nu), \quad l \in (-\epsilon, \epsilon)$$

que posee las propiedades  $\tau(0) > 0$ , y  $\tau(0) - \rho(0)c^2 > 0$  satisface la condición de energía débil o la nula. Por eso consideremos un observador con 4-vector de velocidad  $\hat{\mathbf{u}}$ , en algún evento, colocada en  $l = 0$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{u} + \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{X}, \quad (2.69)$$

---

<sup>5</sup>Otra condición de energía importante es referida como la condición de la energía dominante. Tal condición afirma, para cada vector temporal futuro dirigido  $\mathbf{u}$ , es el vector  $J^\mu = -T^{\mu\nu}u_\nu$  deberá ser un vector temporal o nulo, futuro dirigido.

donde  $v$  denota la 3-velocidad de este observador respecto a los observadores de Killing. La densidad de energía de la materia medida por tal observador es:

$$T_{\nu\mu}\hat{\mathbf{u}}^\nu\hat{\mathbf{u}}^\nu|_{l=0} = \frac{-(\tau(0) - \rho(0)c^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \tau(0). \quad (2.70)$$

El lado derecho de esta ecuación puede ser negativo en el límite  $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 1$ , debido a  $(\tau(0) - \rho(0)c^2) > 0$  y  $\tau(0) > 0$ , concluimos que existen observadores para los cuales:

$$T_{\nu\mu}\hat{\mathbf{u}}^\nu\hat{\mathbf{u}}^\nu|_{l=0} < 0. \quad (2.71)$$

implicando que  $T_{\mu\nu}$ , dado por (2.27) viole la condición de energía débil sobre la garganta y por continuidad se viola tal condición, por lo menos en una vecindad abierta de la garganta.

Ahora veamos si  $T_{\mu\nu}$  dado por (2.27) satisface la condición de energía nula. Consideremos los vectores nulos:

$$\hat{l}_\pm = \pm e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}, \quad g(\hat{l}, \hat{l}) = 0 \quad (2.72)$$

y evaluamos:

$$T_{\mu\nu}\hat{l}_\pm^\mu\hat{l}_\pm^\nu|_0 = -(\tau(0) - \rho(0)c^2) < 0, \quad (2.73)$$

implicando que  $T_{\mu\nu}$  definido en (2.27) viola la condición de energía nula en la garganta.

La materia cuyo tensor de energía momento viola la condición de energía nula es referida en lo sucesivo como ‘materia exótica’. Entonces el análisis de este capítulo llegamos a una conclusión importante. No cualquier material es capaz de soportar la garganta de un agujero de gusano. El material debe ser exótico al menos en una vecindad de la garganta.

Pero tal conclusión nos lleva a preguntar: ¿Existen materiales o configuraciones físicas que representan materia exótica? ¿Hay evidencias astrofísicas y cosmológicas que soportan la existencia de material exótica?

Como hemos mencionado en la sección de introducción, el estudio de los agujeros de gusano, toma auge después del descubrimiento de la expansión acelerada del universo. Recordamos para una métrica  $\mathbf{g}$  de Friedman-Robertson-Walker:

$$\mathbf{g} = -dt^2 + a^2(t)\gamma, \quad (2.74)$$

donde  $\gamma$  la métrica Riemanniana de curvatura constante en  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^3$  y  $H^3$ , el espacio hiperbólico, las ecuaciones de Einstein demandan que el factor de escala  $a(t)$  satisfaga:

$$\frac{d^2a(t)}{dt^2} = -4\pi G a(t)(\rho c^2 + 3P), \quad (2.75)$$

en donde,  $(\rho c^2, P)$  es la densidad y la presión isotrópica medidas por los

observadores que ven la expansión homogénea e isotrópica.

Observaciones después de 1995 sugieren que el universo se encuentra en expansión acelerada [7, 8], es decir,  $\ddot{a}(t) > 0$ . Las consecuencias de esta expansión han sido investigadas intensamente y es difícil presentar una revisión de todo este trabajo. Sin embargo tal expansión es fácilmente incorporada en la relatividad general, comprendiendo que el tensor de energía momento, que describe el contenido del universo en épocas recientes viola la condición fuerte. Para un tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  cuyas componentes con respecto a los observadores que se mueven de manera conjunta con la expansión cosmológica tienen la forma:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad \mathbf{u} = u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.76)$$

Evaluando

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + \frac{1}{2}T = \rho c^2 + 3P \quad (2.77)$$

entonces la desigualdad  $(\rho c^2 + 3P) < 0$  acoplada con (2.75) es suficiente para implicar que  $\ddot{a}(t) > 0$ . Pero la restricción  $\rho c^2 + 3P < 0$  implica que el tensor  $T_{\mu\nu}$  que representa el material cósmico viola la condición de energía fuerte.

En cosmología frecuentemente se impone una ‘ecuación de estado’ -EDE- de la forma  $w = \frac{P}{\rho c^2}$ . Nótese que  $P$  y  $\rho c^2$  son la presión isotrópica y la densidad

de energía medida por los observadores co-moviéndose con la expansión. La suposición que la EDE para la materia cósmica satisface

$$w = \frac{P}{\rho c^2} < -\frac{1}{3} \implies \rho c^2 + 3P < 0, \quad (2.78)$$

corresponde al material que representa la energía oscura.

Por otro lado observaciones más recientes de la radiación cósmica de microondas, lentes gravitacional y supernovas [7] favorecen a la materia cuya EDE es

$$w = \frac{P}{\rho c^2} < -1, \quad (2.79)$$

y tal materia es llamada energía fantasma. La posibilidad que el fluido cósmico este en un estado de energía fantasma tiene otras consecuencias. De (2.76) y cada vector nulo  $\hat{l}$  se obtiene:

$$T_{\mu\nu}\hat{l}^\mu\hat{l}^\nu = (\rho c^2 + P)(\hat{l}^\mu u_\mu)^2. \quad (2.80)$$

La desigualdad (2.79) acoplada con  $\rho c^2 > 0$ , implica que el tensor de energía momento que describe energía fantasma viola la condición de energía nula y por tanto la energía fantasma, es el tipo de materia exótica que es requerido para soportar un agujero de gusano [6].

Aunque las observaciones cosmológicas sugieren la existencia de material que viola algunas de las condiciones clásicas de la energía a escalas cos-

mológicas, todavía no se ha llegado a una conclusión definitiva. Nuestra postura con respecto a la existencia del material exótico está de acuerdo con la presentada en el artículo de Morris y Thorne [6], la cual tomamos textualmente de su artículo:

*It may well be that the fundamental laws of physics forbid exotic material on the macroscopic scales required for wormholes building; but the authors know of no way to prove so and, in fact, would not be extremely surprised if a quantum-field-theoretic example of such material were found in the near future. The search for such an example, or an impossibility proof, is an interesting challenge.*

También es interesante ver la evolución de la actitud de la comunidad científica con respecto a las condiciones de la energía<sup>6</sup>. A principios de 1961, una creencia universal fue que la traza del tensor de energía momento, debía ser siempre positiva, así que en un medio con presión isotrópica  $P$  y densidad de masa  $\rho$ , la presión nunca podía exceder a un tercio de la densidad de masa,  $P \leq \frac{1}{3}\rho c^2$ . Sin embargo, en 1961, Zel'dovich [15] dio un ejemplo explícito, en la teoría de campo cuántico, de un campo que permitía macroscópicamente una ecuación de estado con  $P = \rho c^2$ . De manera similar, otra creencia en los sesentas e inicio de los setentas, fue que la materia debía siempre poseer densidad de energía y satisfacer  $|P| \leq \rho c^2$ , incluso en las escalas de longitud microscópica, pero actualmente sea ha realizado que no es el caso.

---

<sup>6</sup>Los antecedentes históricos los hemos tomado del artículo de Morris y Thorne[6]

En seguida discutimos un campo observado en el laboratorio, cuyo tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  respeta ala condición de energía débil, pero viola la condición fuerte. El campo corresponde al pion de masa  $m$  lo denotamos como  $\Phi$  el cual satisface:

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu - m^2)\Phi = 0, \quad (2.81)$$

y tiene como tensor de energía momento

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \Phi \nabla_\sigma \Phi + m^2 \Phi^2 g_{\mu\nu}. \quad (2.82)$$

Para cualquier solución  $\Phi$  de (2.81), un observador con 4-velocidad  $\mathbf{u}$  ve:

$$\rho c^2 = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{1}{2} (u^\mu \nabla_\mu \Phi)^2 + \frac{1}{2} (X^\mu \nabla_\mu \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \geq 0, \quad (2.83)$$

mientras:

$$(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) u^\mu u^\nu = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + \frac{1}{2} T = \quad (2.84)$$

$$= (u^\mu \nabla_\mu \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 g(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (2.85)$$

debido a que  $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -1$ , el lado derecho puede ser negativo, implicando que (2.82) viola la condición fuerte. Aunque el campo pion no puede considerarse como un campo clásico, debido a que una vez que tomamos las unidades:

$$m \rightarrow \frac{mc}{\hbar},$$

sin embargo el modelo es sugestivo. Puede ser un candidato para entender la energía oscura.

## 2.4 Modelos de la materia exótica

A pesar de que hemos visto no hay observaciones que muestren la existencia de materia exótica, energía fantasma o energía oscura, a nivel teórico existen una cantidad grande de modelos teóricos que describen tal material. Un modelo popular es la teoría de K-esencia que fue introducida en [16, 17]. Tal teoría ha surgido como motivaciones de la teoría de cuerdas e involucra un campo escalar real  $\Phi$  cuya Lagrangiana tiene la forma

$$L = K(\Phi)X(\nabla^\alpha\Phi\nabla_\alpha\Phi), \tag{2.86}$$

implicando que el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  esta dada por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial X} \nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi + Lg_{\mu\nu}. \tag{2.87}$$

Dependiendo de la estructura de las funciones  $K$  y  $X$  puede ser una teoría altamente no lineal. Para esta sección consideramos el caso particular

$$K(\Phi) = -1, \quad X(\nabla^\alpha\Phi\nabla_\alpha\Phi) = -\frac{1}{2}\nabla^\alpha\Phi\nabla_\alpha\Phi.$$

y por tal elección (2.87) se reduce a:

$$T_{\mu\nu} = -\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\Phi\nabla_\alpha\Phi \quad (2.88)$$

A continuación, veremos que (2.88) viola la condición de energía débil y fuerte. Por eso sea que  $\mathbf{u}$  es un vector temporal unitario dirigido al futuro. Usando (2.88) se obtiene:

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\frac{1}{2}[(u^\mu\nabla_\mu\Phi)^2 + (X_{(i)}^\mu\nabla_\mu\Phi)(X^{(i)\nu}\nabla_\nu\Phi)] \quad (2.89)$$

$$(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)u^\mu u^\nu = -(u^\mu\nabla_\mu\Phi)^2 \quad (2.90)$$

donde en la derivación de ambas relaciones se ha utilizado

$$g_{\mu\nu} = -u_\mu u_\nu + X_{(i)\mu}X_{(j)\nu}\delta^{(i)(j)}.$$

Estas relaciones muestran que (2.88) viola las condiciones de la energía, la débil y la fuerte. Tal  $T_{\mu\nu}$ , también viola la condición de energía dominante. Recordemos que esta condición requiere que el flujo de energía y momento  $J^\mu$  percibido por un observador de cuatro velocidad  $\mathbf{u}$  debe ser un vector temporal o nulo futuro dirigido [1, 2]. Evaluando  $J^\mu = -T^\mu{}_\nu u^\nu$  and  $J^\mu J_\mu$ , se encuentra

$$J^\mu = -\frac{1}{2}[(u^\alpha\nabla_\alpha\Phi)^2 + (X_{(i)}^\nu\nabla_\nu\Phi)(X^{(i)\alpha}\nabla_\alpha\Phi)]u^\mu \quad (2.91)$$

$$+ [(u^\alpha\nabla_\alpha\Phi)(X_{(i)}^\nu\nabla_\nu\Phi)]X^{(i)\mu},$$

$$J^\mu J_\mu = -\frac{1}{4}[(u^\mu\nabla_\mu\Phi)^2 - (X_{(i)}^\nu\nabla_\nu\Phi)(X^{(i)\alpha}\nabla_\alpha\Phi)]^2 \quad (2.92)$$

La segunda relación implica que  $J^\mu$  no es un vector espacial, mientras la primera nos dice que  $J^\mu$  no es futuro dirigido, así que concluimos que (2.88), viola la condición dominante de la energía. Finalmente nótese que para algún vector nulo  $l$ ,

$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = -(l^\mu \nabla_\mu \Phi)^2,$$

así que (2.88), viola también la condición nula de la energía. Entonces el campo escalar  $\Phi$ , cuyo tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  es descrito por (2.88) modela materia exótica. Más adelante discutiremos este modelo con más detalles<sup>7</sup>.

## 2.5 La construcción de Morris-Thorne

Como hemos mencionado en el primer capítulo existe un enorme trabajo sobre los agujeros de gusanos y también un gran número de soluciones conocidas que representan a los agujeros de gusanos esféricos y asintóticamente planos por ejemplo -véase [8, 9]-. La mayoría de dichas soluciones han sido construidos a través de una adaptación de la técnica introducida en el artículo

---

<sup>7</sup>Cabe mencionar que para un campo escalar de Klein-Gordon  $\hat{\Phi}$  sin masa, el correspondiente tensor de energía momento  $\hat{T}_{\mu\nu}$  está dado por:

$$\hat{T}_{\nu\mu} = \nabla_\mu \hat{\Phi} \nabla_\nu \hat{\Phi} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \hat{\Phi} \nabla_\sigma \hat{\Phi}.$$

En contraste de (2.88), este tensor de energía momento cumple las condiciones de energía débil, fuerte, nula y dominante.

de Morris y Thorne. En esta sección discutiremos la técnica de Morris y Thorne, y la comparamos con la nuestra.

Morris y Thorne comenzaron con una métrica  $\mathbf{g}$  en las coordenadas de curvatura, la cual representaba ‘la parte superior’<sup>8</sup> del agujero de gusano estático y esférico:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad b(r_0) \equiv b_0 > 0, \quad r \in (b_0, \infty), \quad (2.93)$$

donde la función  $b(r)$  es referida como la función *shape*, y  $\Phi(r)$  el factor de corrimiento en [6]. Como segundo paso, ellos asumieron un tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  para el cual los observadores de Killing medían la densidad de energía  $\rho(r)c^2$ , la presión radial  $P_r = -\tau(r)$  y las presiones tangenciales  $P_\theta(r) = P_\phi(r) = P(r)$ , es decir, las componentes de  $T_{\mu\nu}$  tienen la forma:

$$T_{\mu\nu} = \rho(r)c^2 u_\mu u_\nu + P_r(r) X_\mu X_\nu + P(r)(Y_\mu Y_\nu + Z_\mu Z_\nu), \quad (2.94)$$

en donde

$$\mathbf{u} = \frac{1}{e^{\Phi(r)}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{X} = \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{Y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \mathbf{Z} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Para tal  $T_{\mu\nu}$  las ecuaciones de Einstein en la norma (2.93) son:

---

<sup>8</sup>Esta terminología es debida al hecho que la carta (2.93), no cubre toda la variedad. Las componentes de  $\mathbf{g}$  son singulares en  $r \rightarrow b_0$ , donde  $b_0$  denota a la garganta.

$$\frac{db(r)}{dr} = \hat{k}\rho c^2 r^2, \quad r \in (b_0, \infty), \quad (2.95)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{-\hat{k}r^3\tau + b}{2r(r-b)}, \quad (2.96)$$

$$\frac{d\tau(r)}{dr} = (\rho c^2 - \tau)\frac{d\Phi}{dr} - \frac{2(P + \tau)}{r}. \quad (2.97)$$

Eligiendo *a priori*  $\Phi(r)$  y  $b(r)$  consistentes con asintóticamente plano, regularidad y existencia de la garganta, ellos invierten este sistema, para obtener:

$$\rho(r)c^2 = \frac{1}{\hat{k}r^2} \frac{db(r)}{dr}, \quad (2.98)$$

$$\tau(r) = \frac{1}{\hat{k}r^2} \left[ \frac{b(r)}{r} - 2[r - b(r)]\frac{d\Phi(r)}{dr} \right] \quad (2.99)$$

$$P(r) = \frac{r}{2} \left[ (\rho(r)c^2 - \tau(r))\frac{d\Phi}{dr} - \frac{d\tau(r)}{dr} \right] - \tau(r) \quad (2.100)$$

Estas relaciones definen la estructura del tensor de energía momento necesario para soportar la ‘parte superior’ del agujero de gusano. Para completar el espaciotiempo, la ‘parte superior’ debe ser extendida de tal manera que sea consistente con las ecuaciones de Einstein, que su topología sea  $\mathbb{R}^2 \times S^2$  y además que el espaciotiempo resultante sea geodesicamente completo. Esta extensión no es la única; al comenzar por la ‘parte superior’ se tienen muchas opciones posibles para elegir la parte ‘inferior del agujero de gusano’. El requisito que las ecuaciones de Einstein estén satisfechas sobre la garganta no es difícil de conseguir. La extensión depende de las características que se deseen para la ‘parte inferior del agujero de gusano’.

Debido a la relación entre este formalismo y el nuestro, discutiremos algunos aspectos del formalismo de Morris y Thorne. Primeramente nos preguntamos: ¿Cuándo la métrica  $\mathbf{g}$  dada en (2.93), se puede extender hasta  $r = b_0$ ?

Para entender este problema introducimos la coordenada  $l$  a través de:

$$\frac{dl(r)}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}, \quad r \in (b_0, \infty) \quad (2.101)$$

y pedimos  $l(b_0) = 0$ , la cual asegura que la garganta se encuentra en una distancia finita. Entonces una condición necesaria para la extendibilidad es:

$$\lim_{r \rightarrow b_0} l(r) = \lim_{r \rightarrow b_0} \int_{b_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}} = 0 \quad (2.102)$$

Por otro lado (2.98) combinada con  $b(r_0) = b_0$  se obtiene:

$$b(r) = b_0 + \hat{k} \int_{b_0}^r \rho(r') c^2 r'^2 dr'. \quad (2.103)$$

En el límite  $r \rightarrow b_0$ :

$$b(r) = b_0 + \hat{k} \rho_0 c^2 b_0^2 (r - b_0) + O(r - b_0)^2 \quad (2.104)$$

la cual implica que:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{b(r)}{r} &= \frac{r - b(r)}{r} = \frac{(r - b_0)(1 - \hat{k} \rho_0 c^2 b_0^2) + O(r - b_0)^2}{b_0 + (r - b_0)} \\ &= \frac{(r - b_0)(1 - \hat{k} \rho_0 c^2 b_0^2)}{b_0} [1 + O(r - b_0)]. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Bajo la asunción que

$$1 - \hat{k}\rho_0 c^2 b^2 > 0, \quad (2.106)$$

vemos que  $l$  es real y además

$$\lim_{r \rightarrow b_0} \int_{b_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}} = 0 \quad (2.107)$$

Ahora bien en [6] demandan que  $\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{d\Phi}{dr}$  es acotado, lo cual implica que vía (2.99):

$$\hat{k}\tau(0) = \frac{1}{b_0^2}. \quad (2.108)$$

Es interesante observar que las restricciones (2.106,2.108) son las mismas que las dadas en nuestro formalismo.

Nuestra manera de construir los agujeros de gusano es distinta al formalismo realizado por Morris y Thorne. En contraste con lo anterior, nosotros comenzamos con una norma en donde la  $\mathbf{g}$  toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l)\Omega^2, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon), \epsilon > 0, \\ r(0) &> 0, \quad \frac{dr(l)}{dl}\Big|_0 = 0, \quad \frac{d^2r(l)}{dl^2}\Big|_0 > 0. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Como consecuencia de que las componentes coordenadas de  $\mathbf{g}$  son regulares sobre y alrededor de la garganta, las ecuaciones de Einstein dan origen

*CAPÍTULO 2. LAS ECUACIONES DE EINSTEIN Y LOS AGUJEROS DE GUSANO*

---

a un sistema regular sobre y alrededor de la garganta. Entonces de nuestra manera no necesitamos unir el ‘universo superior’ con el ‘universo inferior’ a través de la garganta. La manera en la que funciona nuestra construcción la veremos en el capítulo siguiente. Más adelante mostramos que el formalismo en [6] y el nuestro son equivalentes, pero fuera de la garganta.

*CAPÍTULO 2. LAS ECUACIONES DE EINSTEIN Y LOS AGUJEROS  
DE GUSANO*

---

# Capítulo 3

## La existencia global de los agujeros de gusano

### 3.1 Acerca de la existencia local de los agujeros de gusano

En esta sección comenzamos el estudio del PVI que hemos definido en la sección (2.2):

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{r(l)K(l)}{2} \quad (3.1)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda(l)}{dl} &= -\frac{1}{2}K(l)\Lambda(l) + \frac{1}{2}\hat{k}\rho(l)c^2 - \frac{1}{2r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{8} - \Lambda^2(l) \\ &+ \hat{k}P(l), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = (\rho(l)c^2 - \tau(l))\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l), \quad (3.4)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\tau(l) + \Lambda(l)K(l) = 0, \quad (3.5)$$

$$r(0) = \left(\frac{A(0)}{4\pi}\right)^{1/2}, \quad K(0) = 0, \quad \Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \tau(0) = \frac{1}{\hat{k}r^2(0)}, \quad (3.6)$$

$$\tau(0) - \rho(0)c^2 > 0, \quad (3.7)$$

en donde de la derivación en la sección (2.1,2.4), la variable independiente  $l$  toma sus valores en  $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ . Como hemos mencionado<sup>1</sup> este es un sistema que contiene más incógnitas que ecuaciones y para estudiar el comportamiento de sus soluciones debemos resolver esta indeterminación. Abordaremos este problema de las siguientes maneras:

- Primero estudiaremos este sistema para el caso particular donde  $(\rho c^2, \tau)$  y  $P$  serán libres de alguna restricción. Tal tratamiento en realidad será análogo al realizado por Morris y Thorne en [6]. Como ya hemos discutido, Morris y Thorne especifican primero los dos grados de libertad asociados a la métrica  $\mathbf{g}$ , y después detriminan el tensor de energía momento requerido para soportar el agujero de gusano. Nosotros debido a la ausencia de ecuaciones de estado -EDE-, especificamos en primer lugar los dos grados de libertad asociados con la materia exótica. En este capítulo se discutirá el comportamiento de las soluciones de (3.1-3.4), y cual de estas soluciones representan a los agujeros de gusano.

---

<sup>1</sup>Ver comentario en la página (8).

- En el capítulo próximo estudiaremos las soluciones del PVI para el caso donde  $(\rho c^2, \tau)$  y  $P$  estarán sujetas a restricciones referidas como ‘ecuaciones de estado’ -EDE-. Como y porque elegimos ciertas -EDE- lo discutiremos en el capítulo 4.
- Tercero, en el mismo capítulo 4 estudiaremos las soluciones del PVI (3.1-3.4), cuando el tensor de energía momento describe una combinación de K-esencia y un campo real de Klein-Gordon sin masa. En este caso  $(\rho c^2, \tau)$  y  $P$  como veremos serán especificados a través del campo escalar de K-esencia y Klein Gordon.

Comenzamos abordando la primera situación, asumiendo que  $(\rho c^2, \tau, P)$  no están sujetas a ninguna restricción. Para remover la indeterminación, consideramos  $(\rho c^2, P)$  como funciones a priori conocidas. Bajo esta asunción las ecuaciones (3.1-3.4) constituyen un PVI para  $(r(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l))$ , la constrictión (3.5), como hemos discutido en la sección (2.2) si es valida en algún  $l_0$  es valida para  $\forall l$ . La desigualdad (3.6), la forzamos eligiendo que  $\tau(0)$  y  $\rho(0)c^2$  la satisfagan. Para analizar la existencia de soluciones de este PVI, es conveniente introducimos el vector columna:

$$\mathbf{x}(l) \equiv [r(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l)]^T,$$

en donde  $T$  significa transpuesta. A través de esta notación (3.1-3.4), pueden ser escritas de la forma compacta:

$$\frac{d\mathbf{x}(l)}{dl} = \mathbf{F}(l, \mathbf{x}(l)), \quad l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (3.8)$$

$$\mathbf{x}(0) = \left[ \left( \frac{A(0)}{4\pi} \right)^{1/2}, 0, \Lambda(0), \frac{4\pi}{\hat{k}A(0)} \right], \quad (3.9)$$

donde la función  $\mathbf{F}$  es definida por:

$$\mathbf{F} : (-\epsilon, \epsilon) \times [r_0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4 : \quad (3.10)$$

$$(l, x, y, z, t) \mapsto \mathbf{F}(l, x, y, z, t) = \left[ \frac{xy}{2}, -\frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{x^2} - \hat{k}\rho(l)c^2, \right. \\ \left. -\frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}\hat{k}\rho(l)c^2 - \frac{1}{2x^2} - z^2 + \hat{k}P(l), (\rho(l) - t)z + (t + P(l))y \right].$$

El teorema de Picard-Lindeloff, bajo algunas restricciones sobre  $\mathbf{F}$ , afirma la existencia local y unicidad de las soluciones de (3.8,3.9). Debido a la relevancia de este teorema en esta sección y el próximo capítulo discutimos su contenido en apéndice 3A de este capítulo. Mostramos en el apéndice 3A, si las funciones libres  $(\rho c^2, P)$  son continuas, entonces la función  $\mathbf{F}$  satisface la condición de Lipshitz localmente. Aplicando al teorema de Picard-Lindeloff a (3.8,3.9), concluimos que existe una única solución  $\mathbf{x}(l) = (r(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l))$  de clase  $C^1$  definida en  $[-a, a] \subset (-\epsilon, \epsilon)$ . Desafortunadamente tal conclusión no es suficiente para nuestro objetivo. La función  $r(l)$ , la cual aparece en la métrica  $\mathbf{g}$  dada por (2.1), debe ser suave, distinta de cero, que posea un mínimo global en  $l = 0$ , que sea monótona creciente en  $(0, \infty)$  y monótona decreciente en  $(-\infty, 0)$ , mientras la suavidad de  $\Phi(l)$  implica que  $\Lambda(l) = \frac{d\Phi(l)}{dl}$ , debe ser suave  $\forall l \in \mathbb{R}$ .

El reto al que nos enfrentamos ahora es averiguar bajo que condiciones sobre las funciones libres  $(\rho c^2, P)$ , las soluciones locales predecidas por el teorema de Picard-Lindeloff, pueden extenderse de tal manera que incorporen la propiedades requeridas para  $r(l)$  y  $\Phi(l)$ , y tal análisis lo presentamos en la sección próxima.

## 3.2 Acerca de la existencia global de los agujeros de gusano esféricos y estáticos

Analizar las propiedades de las soluciones globales de (3.8,3.9), es un problema de considerable complejidad matemática. Afortunadamente como  $\rho(l)c^2$  y  $P(l)$  son conocidas *a priori*, tal problema es tratable. Primero notamos que

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{r(l)K(l)}{2}, r(0) = \sqrt{\frac{A(0)}{4\pi}}, l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (3.11)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho(l)c^2, K(0) = 0, l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (3.12)$$

constituye un sistema cerrado. Entonces si logramos entender el comportamiento de sus soluciones para una  $\rho c^2$  especificada a priori, una parte grande del problema será resuelta. Por otro lado el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda(l)}{dl} &= -\frac{1}{2}K(l)\Lambda(l) + \frac{1}{2}\hat{k}\rho(l)c^2 - \frac{1}{2r^2(l)} \\ &+ \frac{K^2(l)}{8} - \Lambda^2(l) + \hat{k}P(l), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (3.14)$$

se determina  $\Lambda(l)$ , debido a que las funciones de lado derecho son conocidas del paso previo y combinado con el hecho que  $P$  es *a priori* especificada. Como discutiremos más adelante, el estudio del comportamiento de las soluciones de (3.13,3.14) es un problema difícil. La manera en la que evitaremos tal dificultad será también discutida más adelante. Una vez que  $r(l), K(l), \Lambda(l), P(l)$ , son conocidas de los pasos anteriores, la tensión  $\tau(l)$  requerida para mantener el equilibrio hidrostático es determinado por la solución del PVI lineal:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau(l)}{dl} &= (\rho(l)c^2 - \tau(l))\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l), \quad (3.15) \\ \tau(0) &= \frac{1}{\hat{k}r^2(0)}, l \in (-\epsilon, \epsilon). \end{aligned}$$

Entonces considerando la estructura de (3.1-3.7) y la asunción de que  $(\rho c^2, \Lambda)$  son especificadas *a priori*, nos lleva a estudiar tres PVI.

Comenzamos con el PVI (3.11,3.12), tenemos en mente que  $\rho c^2$  es *a priori* conocida. Introduciendo una nueva variable  $x(l) = \frac{1}{r(l)}$ , obtenemos la forma equivalente

$$\frac{dx(l)}{dl} = -\frac{1}{2}K(l)x(l), \quad x(0) = \frac{1}{r(0)}, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (3.16)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + x^2(l) - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad K(0) = 0, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (3.17)$$

El teorema de Picard-Lindeloff, se aplicado a este sistema entonces existe una

solución local única  $(x(l), K(l))$  de clase  $C^1$ , definida sobre algún  $[-\alpha, \alpha] \subset (-\epsilon, \epsilon)$ . Antes de entrar al problema de extendibilidad de la solución, examinaremos algunas propiedades de este sistema.

Primeramente por “inspección” se ve que:

$$x(l) = x(0), K(l) = 0, \hat{k}\rho(l)c^2 = x^2(0), \forall l \in \mathbb{R},$$

es una solución global de (3.16,3.17). Desafortunadamente tal solución no nos lleva algo interesante. Fácilmente se ve que la métrica resultante no corresponde a un agujero de gusano, por lo cual descartamos esta solución de aquí en adelante.

Por otro lado evaluamos el lado derecho de (3.17) en  $l = 0$ , y obtenemos:

$$\left. \frac{dK(l)}{dl} \right|_0 = x^2(0) \left[ 1 - \frac{\hat{k}\rho(0)c^2}{x^2(0)} \right] = \frac{1}{r^2(0)} [1 - r^2(0)\hat{k}\rho(0)c^2]. \quad (3.18)$$

la cual implica que cuando

$$[1 - r^2(0)\hat{k}\rho(0)c^2] > 0, \quad (3.19)$$

cada solución local  $(x(l), K(l))$  tiene la propiedad que  $K(l)$  es estrictamente monótona una vecindad abierta de  $l = 0$ , mientras de (3.16) se sigue que en esta vecindad  $x(l)$  es estrictamente positiva.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>En realidad el dominio en donde  $K(l)$  es estrictamente monótona y  $x(l)$  es estrictamente positiva es un subconjunto  $(-\hat{a}, \hat{a}) \subset [-\hat{a}, \hat{a}]$ . Por simplicidad denotamos  $\hat{a} = a$ .

En la figura (3.1) damos unos esquemas del comportamiento de las soluciones locales predecidas por el teorema de Picard-Lindeloff.

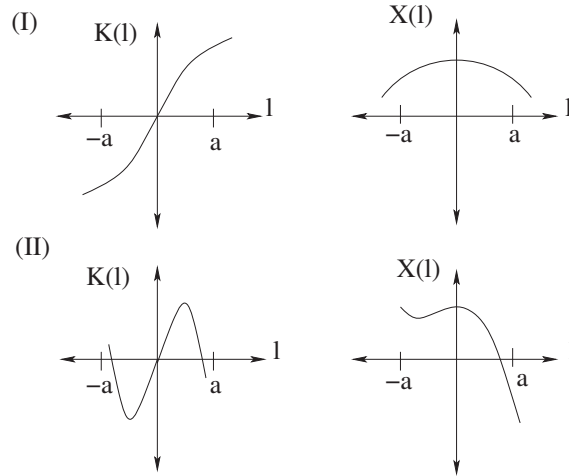


Figura 3.1: Esquema del comportamiento de las soluciones locales predecidas por el teorema de Picard-Lindeloff. Nótese que siempre existe algún  $(-\hat{a}, \hat{a}) \subset [-a, a]$ , en donde  $K(l)$  es estrictamente monótona creciente y  $x(l)$  es estrictamente positiva.

Motivados por las gráficas mostradas en (3.1), la idea es la siguiente: Eligiendo  $\rho c^2$  apropiadamente, extendemos  $x(l), K(l)$  en  $l \in (-\infty, \infty)$  de tal manera que su gráfica sea como en la figura (3.2). Como conseguimos esto lo discutimos en seguida.

La clave es aprovechar la estricta monotonía de  $K(l)$  y la estricta positividad de  $x(l)$  predicha por el teorema de Picard-Lindeloff. Consideremos  $x$  como variable independiente. Argumentos de continuidad aseguran que en

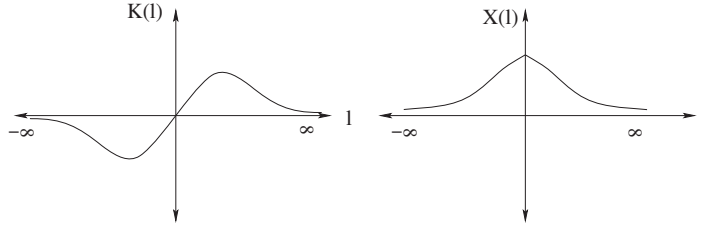


Figura 3.2: Representación de una solución del sistema (3.16,3.17), la cual refleja las propiedades deseables para nuestro problema. Nótese que  $K(l)$  es cero solo en  $l = 0$  y en el límite  $l \rightarrow \pm\infty$ , mientras  $x(l)$  es estrictamente positiva en  $l \in (-\infty, \infty)$ , con  $\lim_{l \rightarrow \pm\infty} x(l) = 0$ .

el intervalo  $(0, a)$ :

$$\frac{dx(l_1)}{dl_1} = -\frac{1}{2}K(l_1)x(l_1) < 0, \quad l_1 \in (0, \alpha), \quad (3.20)$$

y por el teorema de la función inversa la función  $x(l_1)$  tiene inversa  $l_1(x)$  en  $(0, a)$ , la cual satisface:

$$\frac{dl_1(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dl_1}|_{l_1}}, \quad x \in (\hat{a}, x_0). \quad (3.21)$$

De manera análoga de:

$$\frac{dx(l_2)}{dl_2} = -\frac{1}{2}K(l_2)x(l_2) > 0, \quad l_2 \in (-\alpha, 0), \quad (3.22)$$

concluimos la existencia de  $l_2(x)$ , la cual satisface:

$$\frac{dl_2(x)}{dl_2} = \frac{1}{\frac{dx(l_2)}{dl_2}|_{l_2}}, \quad x \in (\hat{a}, x_0)$$

Las funciones  $l_1(x)$  y  $l_2(x)$ , satisfacen:

$$\frac{dl_1(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx(l_1)}{dl_1}|_{l_1(x)}} = -\frac{2}{K_1(x)x}, \quad K_1(x) > 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0), \quad (3.23)$$

$$\frac{dl_2(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx(l_2)}{dl_2}|_{l_2(x)}} = -\frac{2}{K_2(x)x}, \quad K_2(x) < 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0), \quad (3.24)$$

Por otro lado através de la transformación  $l = l(x)$  con  $x \in [\hat{a}, x_0)$ , introducimos las funciones:

$$K_1(x) \equiv K(l_1(x)), \quad K_2(x) \equiv K(l_2(x)), \quad x(0, a).$$

$$\rho_1(x) = \rho(l_1(x)), \quad \rho_2(x) = \rho(l_2(x)), \quad x \in (0, a)$$

en donde  $K_1, K_2$  son  $C^1$ , mientras  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son  $C^0$ . De la definición de  $K_1(x)$  tenemos :

$$\frac{dK_1^2(x)}{dx} = 2K_1(x) \frac{dK(l_1(x))}{dl_1} \frac{dl_1(x)}{dx}.$$

y debido a que  $K(l_1)$  satisface (3.17) y  $l_1(x)$  (3.23), vemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dK_1^2(x)}{dx} &= -\frac{4}{x} \left[ -\frac{3}{4}K^2(x) + x^2 - \hat{k}\rho_1(x)c^2 \right] \\ &= \frac{3}{x}K_1^2(x) - 4\frac{x^2 - \hat{k}\rho_1(x)c^2}{x}, \quad x \in (\hat{a}, x_0), \end{aligned}$$

A través de un procedimiento análogo,  $K_2^2(x)$  satisface:

$$\frac{dK_2^2(x)}{dx} = \frac{3}{x}K_2^2(x) - 4\frac{x^2 - \hat{k}\rho_2(x)c^2}{x}, \quad x \in (\hat{a}, x_0).$$

Entonces, empleando  $x$  como variable independiente, hemos mostrado que cada solución local  $(x(l), K(l))$  implica que  $(l_1(x), K_1(x), \rho_1(x))$ , y  $(l_2(x), K_2(x), \rho_2(x))$  satisfacen:

$$\frac{dl_1(x)}{dx} = -\frac{2}{K_1(x)x}, \quad l_1(x_0) = 0, \quad K_1(x) > 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0) \quad (3.25)$$

$$\frac{dK_1^2(x)}{dx} = \frac{3}{x}K_1^2(x) - 4\frac{x^2 - \hat{k}\rho_1(x)c^2}{x}, \quad K_1^2(x_0) = 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0). \quad (3.26)$$

y

$$\frac{dl_2(x)}{dx} = -\frac{2}{K_2(x)x}, \quad l_2(x_0) = 0, \quad K_2(x) < 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0) \quad (3.27)$$

$$\frac{dK_2^2(x)}{dx} = \frac{3}{x}K_2^2(x) - 4\frac{x^2 - \hat{k}\rho_2(x)c^2}{x}, \quad K_2^2(x_0) = 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0). \quad (3.28)$$

Estos PVI ofrecen el punto de partida para mostrar la existencia de la solución global de (3.16,3.17), mientras la figura (3.1) representa el comportamiento deseado para dicha solución. Debido a que  $K_1^2(x)$  y  $K_2^2(x)$  satisfacen ecuaciones lineales de primer orden, es fácil estudiar la manera en la que las densidades  $\rho_1c^2, \rho_2c^2$  afectan su comportamiento.

Empezamos con  $\rho_1, \rho_2 \in C[(0, x_0)]$ , es decir,

$$\rho_1 : (0, x_0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho_2 : (0, x_0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.29)$$

dos funciones continuas, las cuales están sujetas a las restricciones:

$$x_0^2 - \hat{k}\rho_1(x_0)c^2 > 0, \quad x_0^2 - \hat{k}\rho_2(x_0)c^2 > 0, \quad \rho_1(x_0) = \rho_2(x_0). \quad (3.30)$$

Primero estudiaremos el comportamiento de las soluciones de (3.26-3.28):  $K_1^2(x)$ , y  $K_2^2(x)$  respectivamente.

Por simplicidad primero consideremos el caso donde

$$\rho_1(x) = \rho_2(x) = \rho(x), \quad \forall x \in (0, x_0].$$

Por tal elección las ecuaciones (3.26,3.28) son idénticas, así que en lo sucesivo consideramos solo una de estas. Multiplicando (3.26) por  $x^3$  resulta:

$$\frac{1}{x^3} \frac{dK^2(x)}{dx} - \frac{3}{x^4} K_1^2(x) = -\frac{4}{x^4} [x^2 - \hat{k}\rho_1(x)c^2]$$

de lo cual se ve:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{K^2(x)}{x^3} \right) = -\frac{4}{x^4} [x^2 - \hat{k}\rho_1(x)c^2]$$

y la solución de esta ecuación, que satisface  $K_1^2(x_0) = 0$ , es:

$$K^2(x) = 4x^3 \int_x^{x_0} \frac{x'^2 - \hat{k}c^2\rho(x')}{x'^4} dx' = x^3 F(x), \quad (3.31)$$

en donde

$$F(x) = 4 \int_x^{x_0} \frac{x'^2 - \hat{k}c^2\rho(x')}{x'^4} dx'. \quad (3.32)$$

Aun la solución descrita por (3.31) esta bien definida en algún  $(\hat{a}, x_0]$ , hay la posibilidad que  $\lim_{x \rightarrow y} K^2(x) = 0$  para algún  $y \in (0, x_0]$ . Para evitar este comportamiento, requerimos que la densidad  $\rho c^2$  satisfice:

$$x_0^2 - \hat{k}c^2\rho^2(x_0) > 0, \quad (3.33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \hat{k}c^2\rho(x) = A^2 x^\epsilon (1 + O(x^{1+\epsilon})), A \neq 0, \epsilon > 0, \quad (3.34)$$

$$F(x) = 4 \int_x^{x_0} \frac{x'^2 - \hat{k}c^2\rho(x')}{x'^4} dx' > 0, \forall x \in (0, x_0). \quad (3.35)$$

La condición (3.33) garantizan que  $\lim_{x \rightarrow x_0} K^2(x) = 0$ , la condición (3.34) asegura  $\lim_{x \rightarrow 0} K^2(x) = 0$ , mientras (3.35) garantiza  $K^2(x) > 0, \forall x \in (0, x_0)$ . En lo subsecuente asumimos que  $\rho$  satisface las condiciones (3.33-3.35).

Dado que  $K^2(x)$  está bien definida en  $(0, x_0]$  introducimos:

$$K_1(x) \equiv \sqrt{K^2(x)}, K_2(x) \equiv -\sqrt{K^2(x)}, x \in (0, x_0), \quad (3.36)$$

y regresamos a (3.25,3.27), cuyas soluciones son:

$$l_1(x) = 2 \int_x^{x_0} \frac{dx'}{\sqrt{K^2(x')x'}}, x \in (0, x_0), \quad (3.37)$$

$$l_2(x) = -2 \int_x^{x_0} \frac{dx'}{\sqrt{K^2(x')x'}}, \quad x \in (0, x_0), \quad (3.38)$$

las cuales son estrictamente monótonas sobre  $(0, x_0)$ . Además notamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} l_1(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} 2 \int_x^{x_0} \frac{dx'}{\sqrt{K^2(x')x'}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} 2 \int_x^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x'^3 F(x')x'}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} 2 \int_x^{x_0} \frac{1}{\sqrt{F(x')x'^{5/2}}} \approx \lim_{x \rightarrow x_0} (x_0 - x)^{1/2} = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

de manera análoga para  $\lim_{x \rightarrow x_0} l_2(x)$ . Como consecuencia de (3.31) se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{K^2(x)} = x^{3/2}(1 + O(x)) \quad (3.40)$$

implicando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} l_1(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} l_2(x) = -\infty. \quad (3.41)$$

En resumen, hemos mostrado que  $\forall \rho c^2 \in C[ (0, x_0) ]$  sujeta a:

- $x_0^2 - \hat{k}\rho^2(x_0)c^2 > 0$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \hat{k}c^2\rho(x) = A^2x^\epsilon(1 + O(x^{1+\epsilon})), A \neq 0, \epsilon > 0$ ,
- $F(x) = 4 \int_x^{x_0} \frac{x'^2 - \hat{k}c^2\rho(x')}{x'^4} dx' > 0, \forall x \in (0, x_0)$ ,

CAPÍTULO 3. LA EXISTENCIA GLOBAL DE LOS AGUJEROS DE GUSANO

---

existen soluciones únicas  $(K_1^2(x), l_1(x))$  de (3.25,3.26), y  $(K_2^2(x), l_2(x))$  de (3.27,3.28), definidas para  $\forall x \in (0, x_0)$ , las cuales satisfacen:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} K_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} K_2(x) = 0$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0} K_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} K_2(x) = 0$ ,
- $K_1^2(x) > 0, \forall x \in (0, x_0)$  y  $K_2^2(x) > 0, \forall x \in (0, x_0)$ ,
- $l_1(x)$  es estrictamente monótona creciente en  $(0, x_0)$ , mientras  $l_2(x)$  es estrictamente monótona decreciente en  $(0, x_0)$ .

Nuestro próximo paso es utilizar el par  $(K_1(x), l_1(x))$ ,  $(K_2(x), l_2(x))$ , para construir la solución global  $(x(l), K(l))$  del sistema original:

$$\frac{dx(l)}{dl} = \frac{1}{2}K(l)x(l), \quad x(0) = \frac{1}{r(0)}, \quad (3.42)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + x^2(l) - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad K(0) = 0. \quad (3.43)$$

La idea bajo esta construcción es sencilla y es la siguiente; la monotonía estricta de  $l_1(x)$  y  $l_2(x)$  implica que son invertibles en  $(0, x_0)$ . Sean  $x(l_1), x(l_2)$  sus correspondientes inversas en  $l_1 \in (0, \infty)$  y  $l_2 \in (-\infty, 0)$ . Con ayuda  $x(l_1), x(l_2)$  definimos:

$$K_1(l_1) = K_1(x(l_1)), \quad K_2(l_2) = K_2(x(l_2))$$

$$\rho_1(l_1) = \rho(x(l_1)), \quad \rho_2(l_2) = \rho(x(l_2))$$

y mostramos que  $x(l_1), K_1(l_1)$  y  $x(l_2), K_2(l_2)$  se ‘unen’ suavemente en  $l = 0$  y además que definen una solución global del sistema (3.42,3.43), llegando así a nuestro objetivo. A continuación discutiremos con detalle esta construcción.

Primero a través de las funciones inversas:

$$x(l_1), l_1 \in (0, \infty), \quad x(l_2), l_2 \in (-\infty, 0),$$

definimos:

$$x(l) = \begin{cases} x(l_1), & l_1 \in (0, \infty), \\ x_0 = r_0^{-1}, & l = 0, \\ x(l_2), & l_2 \in (-\infty, 0), \end{cases} \quad (3.44)$$

De manera similar definimos:

$$K(l) = \begin{cases} K_1(l) = K_1(x(l_1)), & l_1 \in [0, \infty), \\ K(0) = 0, & l = 0, \\ K_2(l) = K_2(x(l_2)), & l_2 \in (-\infty, 0], \end{cases} \quad (3.45)$$

Las funciones  $x(l_1)$  y  $x(l_2)$  satisfacen:

$$\frac{dx(l_1)}{dl_1} = -\frac{1}{2}K_1(x(l_1))x(l_1), \quad l_1 \in (0, \infty), \quad (3.46)$$

$$\frac{dx(l_2)}{dl_2} = -\frac{1}{2}K_2(x(l_2))x(l_2), \quad l_2 \in (-\infty, 0). \quad (3.47)$$

y además:

$$\lim_{l_1 \rightarrow 0} x(l_1) = \lim_{l_2 \rightarrow 0} x(l_2) = x_0 \quad (3.48)$$

$$\lim_{l_1 \rightarrow 0} \frac{dx(l_1)}{dl_1} = -\frac{1}{2} \lim_{l_1 \rightarrow 0} K_1(x(l_1))x(l_1) = 0 \quad (3.49)$$

$$\lim_{l_2 \rightarrow 0} \frac{dx(l_2)}{dl_2} = -\frac{1}{2} \lim_{l_2 \rightarrow 0} K_2(x(l_2))x(l_2) = 0. \quad (3.50)$$

Tenemos la libertad de elegir  $\frac{dx(l)}{dl}|_{l=0} = 0$ , lo cual hace que la función  $x(l)$  definida por (3.44) es  $C^1$  en  $(-\infty, \infty)$ . Por otro lado vía la regla de cadena y el teorema de la función inversa,  $K_1(l_1)$  satisface:

$$\begin{aligned} \frac{dK_1(l_1)}{dl_1} &= \frac{dK_1(x(l_1))}{dx} \frac{dx(l_1)}{dl_1} = \frac{dK_1(x(l_1))}{dx} \frac{1}{\frac{dl_1(x)}{dx}|_{x(l_1)}} \\ &= \frac{dK_1(x(l_1))}{dx} \left( -\frac{K_1(x(l_1))x(l_1)}{2} \right) = -\frac{1}{4} \frac{dK_1^2(x(l_1))}{dx} x(l_1), \end{aligned}$$

Debido a (3.26), la ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{dK_1(l_1)}{dl_1} = -\frac{3}{4} K_1^2(l_1) + x^2(l_1) - \hat{k}c^2 \rho(l_1), \quad l_1 \in (0, \infty), \quad (3.51)$$

Una manipulación idéntica implica que  $K_2(l_2)$  satisface:

$$\frac{dK_2(l_2)}{dl_2} = -\frac{3}{4} K_2^2(l_2) + x^2(l_2) - \hat{k}c^2 \rho(l_2), \quad l_2 \in (-\infty, 0). \quad (3.52)$$

De estas dos ecuaciones y el hecho que  $\rho(l_1 = 0) = \rho(l_2 = 0)$ , resulta:

$$\lim_{l_1 \rightarrow 0^+} \frac{dK_1(l_1)}{dl_1} = \lim_{l_2 \rightarrow 0^-} \frac{dK_2(l_2)}{dl_2} = x^2(0) - \hat{k}c^2\rho(0). \quad (3.53)$$

Como  $K_1(0) = K_2(0)$ , extendemos  $K_1(l_1), K_2(l_2)$  de tal manera que sean  $C^1$  en  $(-\infty, \infty)$  a través de:

$$\left. \frac{dK_1(l_1)}{dl_1} \right|_{l_1=0} = \left. \frac{dK_2(l_2)}{dl_2} \right|_{l_2=0} = x^2(0) - \hat{k}c^2\rho(0), \quad (3.54)$$

resultando el par  $(x(l), K(l))$ ,  $l \in (-\infty, \infty)$  satisface (3.16, 3.17). Por construcción  $\lim_{l \rightarrow \pm\infty} x(l) = 0$ , and  $\lim_{l \rightarrow \pm\infty} K(l) = 0$ , y además la gráfica de estas soluciones son como en la figura (3.2).

La solución global  $(x(l), K(l))$ ,  $l \in (-\infty, \infty)$  que hemos construido se bazo en la asunción que las densidades  $\rho_1, \rho_2$  que aparecen en los sistemas (3.25, 3.26) y (3.27, 3.28) estaban sujetas a la restricción:

$$\rho_1(x) = \rho_2(x), \quad \forall x \in (0, x_0].$$

Es relativamente fácil mostrar que la construcción anterior pueden ser extendida a el caso general en donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son arbitrarias, pero sujetas a:

$$x_0^2 - \hat{k}\rho_1(x_0)c^2 > 0, \quad x_0^2 - \hat{k}\rho_2(x_0)c^2 > 0, \quad \rho_1(x_0) = \rho_2(x_0) \quad (3.55)$$

Para comenzar con la construcción partamos de:

$$\frac{dl_1(x)}{dx} = -\frac{2}{K_1(x)x}, \quad l_1(x_0) = 0, \quad K_1(x) > 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0) \quad (3.56)$$

$$\frac{dK_1^2(x)}{dx} = \frac{3}{x}K_1^2(x) - 4\frac{x^2 - \hat{k}\rho_1(x)c^2}{x}, \quad K_1^2(x_0) = 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0) \quad (3.57)$$

y

$$\frac{dl_2(x)}{dx} = -\frac{2}{K_2(x)x}, \quad l_2(x_0) = 0, \quad K_2(x) < 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0) \quad (3.58)$$

$$\frac{dK_2^2(x)}{dx} = \frac{3}{x}K_2^2(x) - 4\frac{x^2 - \hat{k}\rho_2(x)c^2}{x}, \quad K_2^2(x_0) = 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0) \quad (3.59)$$

Las soluciones de (3.56-3.59) son <sup>3</sup>:

$$K_1^2(x, \rho_1) = 4x^3 \int_x^{x_0} \frac{x'^2 - \hat{k}c^2\rho_1(x')}{x'^4} dx' = x^3 F(x, \rho_1), \quad (3.60)$$

$$K_2^2(x, \rho_2) = 4x^3 \int_x^{x_0} \frac{x'^2 - \hat{k}c^2\rho_2(x')}{x'^4} dx' = x^3 F(x, \rho_2), \quad (3.61)$$

Con la finalidad de que  $K_1^2(x) > 0$  en  $(0, x_0)$  y  $K_2^2(x) > 0$  en  $(0, x_0)$  demandamos que individualmente  $\rho_1, \rho_2$  estén sujetas a restricciones:

$$x_0^2 - \hat{k}c^2\rho_1^2(x_0) > 0, \quad (3.62)$$

---

<sup>3</sup>Debido a que las ecuaciones (3.57,3.59) son distintas y para evitar confusión denotamos  $K_1^2(x, \rho_1)$  y  $K_2^2(x, \rho_2)$  las soluciones de estas ecuaciones. La presencia de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  en los argumentos indica cual de las densidades utilizamos para la construcción de la solución.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \hat{k}c^2 \rho_1(x) = A^2 x^\epsilon (1 + O(x^{1+\epsilon})), A \neq 0, \epsilon > 0, \quad (3.63)$$

$$F(x, \rho_1) = 4 \int_x^{x_0} \frac{x'^2 - \hat{k}c^2 \rho_1(x')}{x'^4} dx' > 0, \forall x \in (0, x_0). \quad (3.64)$$

y

$$x_0^2 - \hat{k}c^2 \rho_2^2(x_0) > 0, \quad (3.65)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \hat{k}c^2 \rho_2(x) = B^2 x^\epsilon (1 + O(x^{1+\epsilon})), B \neq 0, \epsilon > 0, \quad (3.66)$$

$$\tilde{F}(x, \rho_2) = 4 \int_x^{x_0} \frac{x'^2 - \hat{k}c^2 \rho_2(x')}{x'^4} dx' > 0, \forall x \in (0, x_0). \quad (3.67)$$

Utilizando  $K^2(x, \rho_1)$  y  $K^2(x, \rho_2)$  definimos:

$$K_1(x, \rho_1) = \sqrt{K^2(x, \rho_1)}, \quad K_2(x, \rho_2) = -\sqrt{K^2(x, \rho_2)} \quad (3.68)$$

y sean  $l_1(x)$ ,  $l_2(x)$  las soluciones de (3.25) y (3.27) en donde  $K_1(x)$  y  $K_2(x)$  son reemplazadas por  $K_1(x, \rho_1)$  y  $K_2(x, \rho_2)$  respectivamente, es decir,

$$\frac{dl_1(x, \rho_1)}{dx} = -\frac{2}{K_1(x, \rho_1)x}, \quad l_1(x_0) = 0, \quad K_1(x, \rho_1) > 0, \quad (3.69)$$

$$\frac{dl_2(x, \rho_2)}{dx} = -\frac{2}{K_2(x, \rho_2)x}, \quad l_2(x_0) = 0, \quad K_2(x, \rho_2) < 0, \quad (3.70)$$

Las soluciones de (3.69,3.70) son:

$$l_1(x, \rho_1) = 2 \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{K^2(x, \rho_1)}}, \quad \forall x \in (0, x_0), \quad (3.71)$$

$$l_2(x, \rho_2) = -2 \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{K^2(x, \rho_2)}}, \quad \forall x \in (0, x_0), \quad (3.72)$$

y debido a las restricciones sobre  $\rho_1, \rho_2$ , se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} l_1(x, \rho_1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} l_2(x, \rho_2) = 0, \quad (3.73)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} l_1(x, \rho_1) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} l_2(x, \rho_2) = -\infty. \quad (3.74)$$

El próximo paso es invertir  $l_1(x, \rho_1)$  y  $l_2(x, \rho_2)$ , y definir:

$$x(l_1), \quad l_1 \in (0, \infty), \quad (3.75)$$

$$x(l_2), \quad l_2 \in (-\infty, 0), \quad (3.76)$$

$$K_1(l_1) = K_1(x(l_1), \rho_1), \quad l_1 \in (0, \infty) \quad (3.77)$$

$$K_2(l_2) = K_2(x(l_2), \rho_2), \quad l_2 \in (-\infty, 0) \quad (3.78)$$

$$\rho_1(l_1) = \rho_1(x(l_1)), \quad \rho_2(l_2) = \rho_2(x(l_2)). \quad (3.79)$$

Siguiendo los mismos pasos que en el caso en donde  $\rho_1 = \rho_2$ , se sigue que  $K_1(l_1)$ , y  $K_2(l_2)$  satisfacen análogamente (3.51) y (3.52), con la única diferencia que ahora aparece  $\rho_1$  y  $\rho_2$  en lugar de  $\rho$ . Debido a la restricción  $\rho_1(x_0) = \rho_2(x_0)$  concluimos que la relación (3.54) es válida. En resumen, dadas dos densidades  $\rho_1, \rho_2 \in C[(0, x_0)]$  las cuales cumplen:

$$x_0^2 - \hat{k}\rho_1(x_0)c^2 > 0, \quad x_0^2 - \hat{k}\rho_2(x_0)c^2 > 0, \quad (3.80)$$

y sujetas además a las restricciones (3.62-3.64) y (3.65-3.67). Entonces el sistema:

$$\frac{dx(l)}{dl} = -\frac{1}{2}K(l)x(l), \quad x(0) = \frac{1}{r(0)}, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (3.81)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + x^2(l) - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad K(0) = 0, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (3.82)$$

admite una solución única  $(x(l), K(l))$  de clase  $C^1$ , la cual satisface:

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} x(l) = 0, \quad \lim_{l \rightarrow -\infty} x(l) = 0, \quad (3.83)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} K(l) = 0, \quad \lim_{l \rightarrow -\infty} K(l) = 0. \quad (3.84)$$

Las funciones  $\rho(l)$  que aparecen en (3.82) se obtienen de  $\rho_1, \rho_2 \in C[(0, x_0)]$  una vez que hemos construido  $l_1 = l_1(x)$ ,  $l_2 = l_2(x)$ . Ni modo esta bien definida y continua  $\forall l \in \mathbb{R}$ , debido a la restricción  $\rho_1(x_0) = \rho_2(x_0)$ .

### 3.3 La determinación de la presión tangencial

Con los resultados de la sección anterior, regresamos ahora al PVI:

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda(l)}{dl} &= -\frac{1}{2}K(l)\Lambda(l) + \frac{1}{2}\hat{k}\rho(l)c^2 - \frac{1}{2r^2(l)} \\ &+ \frac{K^2(l)}{8} - \Lambda^2(l) + \hat{k}P(l), \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (3.86)$$

Para este PVI, las funciones  $(\rho(l)c^2, K(l), r(l) = x^{-1}(l))$  son asumidas conocidas mientras  $P$  es por el momento arbitraria, solo sujeta a la restricción

que es continua. Nos gustaría saber bajo que restricciones sobre  $P \in C[\mathbb{R}]$ , la solución de (3.85,3.86) estaría bien definida y acotada  $\forall l \in \mathbb{R}$ . Desafortunadamente el problema es más complicado. La ecuación (3.85) es reconocida como la ecuación de Ricatti, y sus soluciones pueden ser no acotadas para un  $l$  finito. Si  $\Lambda(l)$  no es acotado implicaría que el campo de Killing temporal  $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$  sería nulo o la curvatura del espaciotiempo se volvería no acotada. Sin embargo como  $(\rho, P)$  no están sujetas a ninguna restricción, la dificultad puede ser evitada de la manera siguiente. Veamos la ecuación (3.85) de manera distinta. En lugar de considerar a  $P(l)$  como función libre, tomemos a  $\Lambda(l)$  como conocida y entonces la ecuación (3.85) la utilizamos para determinar a  $P(l)$ . Desde este punto de vista elijamos alguna  $N \in C^1[\mathbb{R}]$  que obedece  $N(0) = \Lambda_0$  identificamos  $\Lambda(l) = N(l)$ , y tomamos:

$$\hat{k}P(l) = \frac{dN(l)}{dl} + N^2(l) + \frac{1}{2} \frac{dK(l)}{dl} + \frac{K^2(l)}{4} + \frac{K(l)N(l)}{2}. \quad (3.87)$$

donde el lado izquierdo es interpretado como la presión tangencial requerida para mantener el agujero de gusano en equilibrio. Así que en lo que resta de este capítulo consideramos como funciones dadas a  $(\rho c^2, N)$ , con  $\rho c^2 \in C[\mathbb{R}]$ , mientras  $N \in C^1[\mathbb{R}]$ .

### 3.4 La determinación de la tensión

Con la reinterpretación del sistema (3.85,3.86), regresamos a especificar la tensión  $\tau$ , a través de:

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = [\rho(l)c^2 - \tau(l)]\Lambda(l) - [\tau(l) + P(l)]K(l), \quad (3.88)$$

$$\tau(0) = \frac{1}{\hat{k}r^2(0)}, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (3.89)$$

Como el lado derecho de (3.88) es continuo y acotado, se tiene que este PVI admite una solución única y acotada sobre la línea real entera. La solución de este PVI es

$$\begin{aligned} \tau(l) = & e^{-\int_0^l [\rho(l')c^2 + K(l')] dl'} \\ & \left[ \tau(0) + \int_0^l e^{\int_0^{l'} [\rho(l'')c^2 + K(l'')] dl''} [\rho(l')c^2 N(l') - P(l')K(l')] dl' \right], \quad l \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (3.90)$$

En síntesis para el par de funciones  $(\rho c^2, N)$  que satisfacen las restricciones ya discutidas, así como para un  $\Lambda_0$  y  $A(0) = 4\pi r^2(0)$  que elegimos *a priori*, hemos mostrado que el sistema (3.1-3.7) admite una solución única  $(r(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l), P(l))$  definida  $\forall l \in (-\infty, \infty)$ .

### 3.5 La construcción del espaciotiempo

En esta sección discutimos la manera en la cual utilizamos el resultado obtenido para construir un espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  que posee la topología  $M = \mathbb{R}^2 \times S^2$ . Para esta construcción sean  $(\rho c^2, N)$  dos funciones que satisfacen las restricciones discutidas en la sección previa. También sean  $A = 4\pi r^2(0)$ , y  $\Lambda_0$  elegidas *a priori*. Del análisis realizado en las secciones anteriores, se tiene que existe una solución única  $(r(l), K(l), P(l), \tau(l), \Lambda(l))$

CAPÍTULO 3. LA EXISTENCIA GLOBAL DE LOS AGUJEROS DE GUSANO

---

definida  $\forall l \in (-\infty, \infty)$  la cual satisface (3.1-3.7). Primero de la función  $\Lambda(l)$  definimos el factor shift  $\Phi(l)$  vía:

$$\Phi(l) = \Phi_0 + \int_0^l \Lambda(l') dl' = \Phi_0 + \int_0^l N(l') dl', \quad (3.91)$$

el cual es  $C^2$  y esta bien definida  $\forall l \in (-\infty, \infty)$ . Debido a que por construcción  $r(l) \neq 0 \quad \forall l \in (-\infty, \infty)$ , consideremos la variedad  $M = \mathbb{R}^2 \times S^2$  e introducimos la métrica lorentziana:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l) d\Omega^2, \quad l \in (-\infty, \infty), \quad (3.92)$$

Por construcción esta  $\mathbf{g}$  es regular por lo menos  $C^2$ , satisface las ecuaciones de Einstein  $G_{\mu\nu} = \hat{k}T_{\mu\nu}$ , con  $T_{\mu\nu}$  descrito por (2.27) cuyas  $\rho(l)c^2, \tau(l), P(l)$   $l \in (-\infty, \infty)$  están determinadas. Además la función del área  $A(l)$  tiene un mínimo global en  $l = 0$ . Las hipersuperficies espaciales  $t = \text{cte}$  tienen dos regiones que corresponden a  $l \rightarrow +\infty$  y  $l \rightarrow -\infty$ . Aunque  $(M, \mathbf{g})$  construida de esta manera tiene la topología de  $\mathbb{R}^2 \times S^2$ , es importante mencionar que no es necesariamente asintóticamente plana. Para conseguir esta propiedad requerimos restringir a las funciones libres  $\rho c^2$  y  $N$ , este estudio lo haremos en la sección (3.8). En la siguiente sección damos un ejemplo de la construcción de una familia de agujeros de gusanos.

### 3.6 Los agujeros de gusano cuasi-Schwarzschild

En un artículo reciente, Damour y Solodukhin [18] discutieron sobre una familia de agujeros de gusano que tienen propiedades muy interesantes. La métrica  $\mathbf{g}$  para esta familia en coordenadas de curvatura  $(t, r, \theta, \phi)$  tiene la forma:

$$\mathbf{g} = - \left( 1 - \frac{r_0}{r} + \lambda^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad r \in (r_0, \infty), \quad (3.93)$$

$$r_0 > 0, \quad \lambda \neq 0$$

La singularidad de esta  $\mathbf{g}$  en límite  $r \rightarrow r_0$  es removible. Utilizamos la coordenada  $l$  y seguimos los mismos pasos que hicimos para llegar de (1.8) a (1.14), así obtenemos:

$$\mathbf{g} = - \left[ \lambda^2 + \frac{1}{4r_0^2} l^2 (1 - O(l^2)) \right] dt^2 + dl^2 \quad (3.94)$$

$$+ r_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{l}{2r_0} \right)^2 + O \left( \frac{l}{2r_0} \right)^4 \right]^2 d\Omega^2, \quad l \in [0, a).$$

la cual muestra la extendebilidad de (3.93) hasta  $l = 0$ .

Ahora bien, Visser en su libro [14] ha introducido los agujero de gusano cuasi-Schwarzschild, como agujeros de gusano que tienen la propiedad que las métricas inducida  $\gamma$  sobre las hipersuperficies espaciales ortogonales al vector de Killing temporal tienen la forma:

$$\gamma = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad r_0 > 0, \quad r \in (r_0, \infty). \quad (3.95)$$

En esta sección damos una descripción alternativa de los agujeros de gusano cuasi-Schwarzschild que ofrecen un punto de vista mas completo.

Tal description la obtenemos como una aplicación del formalismo desarrollado en este capitulo. Primero mostramos que existe una familia de agujeros de gusano, la cual tiene la propiedad que la densidad  $\rho c^2$  medida por los observadores de Killing es idénticamente nula. Tomando  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 0$ , el sistema (3.1-3.6) se reescribe como:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{1}{2}K(l)r(l), \quad (3.96)$$

$$\frac{dK(K)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)}, \quad (3.97)$$

$$\frac{d\Lambda(l)}{dl} = -\frac{1}{2}K(l)\Lambda(l) - \frac{1}{2r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{8} - \Lambda^2(l) + \hat{k}P(l) \quad (3.98)$$

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = -\tau(l)\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l) \quad (3.99)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\tau(l) + \Lambda(l)K(l) = 0 \quad (3.100)$$

$$r(0) = \left(\frac{A(0)}{4\pi}\right)^{1/2}, \quad K(0) = 0, \quad (3.101)$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \tau(0) = \frac{1}{\hat{k}r^2(0)}.$$

Por el hecho que  $\rho(0)c^2 = 0$ , la desigualdad  $\tau(0) - \hat{k}\rho(0)c^2 > 0$ , es satisfecha. Nuestro objetivo es mostrar que tal sistema admite soluciones globales, y además que con dichas soluciones se pueden construir espaciotiempos

$(M, \mathbf{g})$  que representan a los agujeros de gusanos de tipo Cuasi-Schwarzschild. Las ecuaciones (3.57,3.59), que hemos visto en sección (3.2) bajo la asunción  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  toman la forma:

$$\frac{dK^2(x)}{dx} = \frac{3}{x}K^2(x) - 4x, K(x_0) = 0, x \in (0, x_0) \quad (3.102)$$

mientras (3.56,3.58) se quedan invariantes:

$$\frac{dl_1(x)}{dx} = -\frac{2}{K_1(x)x}, \quad l_1(x_0) = 0, \quad K_1(x) > 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0), \quad (3.103)$$

$$\frac{dl_2(x)}{dx} = -\frac{2}{K_2(x)x}, \quad l_2(x_0) = 0, \quad K_2(x) < 0, \quad x \in (\hat{a}, x_0) \quad (3.104)$$

La solución de (3.102) es

$$K^2(x) = 4x^3\left[-\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x}\right], \quad x \in (0, x_0) \quad (3.105)$$

y copiando los pasos que hemos discutido en la sección (3.2), introducimos:

$$\tilde{K}_1(x) \equiv \sqrt{K^2(x)} = \frac{2x}{\sqrt{x_0}}\sqrt{x_0 - x}, \quad x \in (0, x_0), \quad (3.106)$$

$$\tilde{K}_2(x) \equiv -\sqrt{K^2(x)} = -\frac{2x}{\sqrt{x_0}}\sqrt{x_0 - x}, \quad x \in (0, x_0). \quad (3.107)$$

Las ecuaciones (3.103,3.104) tienen como solución:

$$l_1(x) = \int_x^{x_0} \frac{x_0^{1/2} dx'}{\sqrt{(x_0 - x')x'^2}}, \quad x \in (0, x_0), \quad (3.108)$$

$$l_2(x) = - \int_x^{x_0} \frac{x_0^{1/2} dx'}{\sqrt{(x'_0 - x')x'^2}}, \quad x \in (0, x_0). \quad (3.109)$$

Estas integrales pueden expresarse en términos de funciones elementales, pero desafortunadamente, aun existan las funciones inversas  $x(l_1)$  y  $x(l_2)$   $\forall l_1 \in (0, \infty), (-\infty, 0)$  no se pueden escribir en términos de funciones elementales. Aún si la función  $x(l) = r^{-1}(l)$ :

$$x(l) = \begin{cases} x_1(l), & l \in (0, \infty), \\ x_0 = r_0^{-1}, & l = 0, \\ x_2(l), & l \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

está bien definida. Es conveniente expresar las soluciones en términos de la función  $r(l) = \frac{1}{x(l)}$  que satisface:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{r_0}{r(l)}}, \quad r(0) = r_0, \quad l \in (-\infty, \infty). \quad (3.110)$$

La resultante  $K(l)$  es descrita por:

$$K(l) = \pm \frac{2}{r(l)} \frac{dr(l)}{dl} = \pm \frac{2}{r(l)} \left[ 1 - \frac{r_0}{r(l)} \right]^{1/2}, \quad l \in (-\infty, \infty), \quad (3.111)$$

donde el signo mas (+) corresponde a  $l \in (0, \infty)$  mientras (-) para  $l \in (-\infty, 0)$ . Partiendo de la constricción hamiltoniana

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\tau(l) + \Lambda(l)K(l) = 0, \quad (3.112)$$

y para  $N \in C^1[\mathbb{R}]$  la tensión requerida es:

$$\hat{k}\tau(l) = \frac{r_0}{r^3(l)} - \frac{2N(l)}{r(l)} \left[1 - \frac{r_0}{r(l)}\right]^{1/2}, \quad l \in [0, \infty), \quad (3.113)$$

y la presión tangencial  $P(l)$ , la obtenemos a través de (3.98) y esta es:

$$\begin{aligned} \hat{k}P(l) &= \frac{dN(l)}{dl} + N^2(l) \\ &+ \frac{N(l)}{r(l)} \left[1 - \frac{r_0}{r(l)}\right]^{1/2} + \frac{r_0}{2r^3(l)}, \quad l \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (3.114)$$

mientras  $\tau(l)$  y  $P(l)$  para  $l \in (-\infty, 0]$ , están dadas por:

$$\hat{k}\tau(l) = \frac{r_0}{r^3(l)} + \frac{2N(l)}{r(l)} \left[1 - \frac{r_0}{r(l)}\right]^{1/2}, \quad l \in (-\infty, 0], \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \hat{k}P(l) &= \frac{dN(l)}{dl} + N^2(l) \\ &- \frac{N(l)}{r(l)} \left[1 - \frac{r_0}{r(l)}\right]^{1/2} + \frac{r_0}{2r^3(l)}, \quad l \in (-\infty, 0]. \end{aligned} \quad (3.116)$$

La métrica  $\mathbf{g}$  que resulta se lee:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(0)+2 \int_0^l N(l')dl'} dt^2 + dl^2 + r^2(l)d\Omega^2, \quad l \in (-\infty, \infty), \quad (3.117)$$

CAPÍTULO 3. LA EXISTENCIA GLOBAL DE LOS AGUJEROS DE GUSANO

---

con  $\Phi(0)$  una constante arbitraria y  $r(l)$  se interpreta como la solución global de (3.110).

El espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  con  $\mathbf{g}$  dada por (3.117), representa un agujero de gusano que esta soportado por  $(\tau(l), P(l))$  definidas anteriormente, y  $N(l)$  como una función libre. Este  $(M, \mathbf{g})$  caracteriza a la familia de agujeros de gusano llamada cuasi-Schwarzschild. Sintetizando, dicha familia se caracteriza por un grado de libertad, es decir, la función libre  $N(l) \in C^1[\mathbb{R}]$  y el tamaño de la garganta  $A(0) = 4\pi r^2(0)$ . Como veremos en la sección (3.8) bajo restricciones adicionales sobre  $N$  son también asintóticamente planas.

Debido a que  $N(l)$  puede elegirse arbitrariamente, hacemos la siguiente elección:

$$N(l) = \frac{r_0}{2r^2(l)} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r(l)}}}{\left(1 - \frac{r_0}{r(l)} + \lambda^2\right)}, \quad \lambda \neq 0, \quad l \in [0, \infty), \quad (3.118)$$

$$r_0 = (A(0)/4\pi)^{1/2}, \quad (3.119)$$

$$N(-l) = -N(l), \quad l \in (-\infty, 0], \quad (3.120)$$

Por esta elección se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{k}P(l) &= \frac{r_0^2 \lambda^2}{4r^4(l)} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r(l)} + \lambda^2\right)^2} \\ &+ \frac{r_0 \lambda^2}{2r^3(l)} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r(l)} + \lambda^2\right)}, \quad l \in (-\infty, \infty), \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\hat{k}\tau(l) = \frac{r_0\lambda^2}{r^3(l)} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r(l)} + \lambda^2\right)}, \quad l \in (-\infty, \infty), \quad (3.122)$$

con  $r(l)$  sujeta a:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{r_0}{r(l)}}, \quad r(0) = r_0, \quad l \in (-\infty, \infty). \quad (3.123)$$

Si eliminamos en (3.117) a la coordenada  $l$  en lugar de la coordenada radial  $r$  a través de la relación anterior obtenemos:

$$g = -\left(1 - \frac{r_0}{r} + \lambda^2\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2d\Omega^2, \quad r \in (r_0, \infty), \quad (3.124)$$

la cual corresponde a la solución de Damour y Solodukhin [18]. Es importante mencionar que la carta  $(t, r, \theta, \phi)$  en (3.124) solo cubre la “parte superior” y la “parte inferior” del espaciotiempo. Como referencia algunas propiedades interesantes de esta familia son discutidas en [12, 13, 19].

### 3.7 Agujeros de gusano con simetría reflexiva

Es conveniente en este momento discutir una propiedad útil del sistema:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{r(l)K(l)}{2} \quad (3.125)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (3.126)$$

$$\frac{d\Lambda(l)}{dl} = -\frac{1}{2}K(l)\Lambda(l) + \frac{1}{2}\hat{k}\rho(l)c^2 - \frac{1}{2r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{8} - \Lambda^2(l)$$

$$+\hat{k}P(l), \quad (3.127)$$

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = (\rho(l)c^2 - \tau(l))\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l), \quad (3.128)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\tau(l) + \Lambda(l)K(l) = 0, \quad (3.129)$$

$$r(0) = \left(\frac{A(0)}{4\pi}\right)^{1/2}, \quad K(0) = 0, \quad (3.130)$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \tau(0) = \frac{1}{\hat{k}r^2(0)},$$

$$\tau(0) - \rho(0)c^2 > 0. \quad (3.131)$$

Sea  $(r(l), K(l), \tau(l), P(l))$  alguna solución generada por  $(\rho(l)c^2, \Lambda(l))$  que satisfacen (3.125-3.129) en  $l \in [0, \infty)$ . Siguiendo los pasos de la sección (3.5), y con la ayuda de esta solución construimos la parte superior de  $(M, \mathbf{g})$ .

Ahora queremos mostrar que para la parte inferior existe una extensión especial definida de la siguiente manera. Primero sobre  $(-\infty, 0]$  definimos las funciones

$$(\bar{r}(l), \bar{K}(l), \bar{\Lambda}, \bar{\tau}(l), \bar{P}(l), \bar{\rho}(l))$$

a través de:

$$(\bar{r}(-l), \bar{K}(l), \bar{\Lambda}(-l), \bar{\tau}(-l)) = (r(l), -K(l), -\Lambda(l), \tau(l)), \quad l \in [0, \infty) \quad (3.132)$$

y al mismo tiempo consideramos la extensión par de  $\rho c^2$  sobre  $(-\infty, 0]$ , es decir,

$$\rho(-l)c^2 = \rho(l)c^2, \quad \forall l \in [0, \infty).$$

Debido a que  $K(0) = 0$ , la extensión impar de  $K(l)$ ,  $l \in [0, \infty)$  es diferenciable en  $l = 0$  y coincide con  $\bar{K}(-l)$ . Si  $\Lambda(0) = 0$ , entonces la extensión impar de  $\Lambda(l)$ ,  $l \in [0, \infty)$  es diferenciable en  $l = 0$  y coincide con  $\bar{\Lambda}(-l)$ . Además  $(\bar{r}(-l), \bar{K}(-l), \bar{\Lambda}(-l), \bar{\tau}(-l))$  satisface (3.125-3.129) en  $l \in (-\infty, 0]$ , y se unen suavemente con  $(r(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l))$  a través de  $l = 0$ . Mientras que de

$$\Phi(l) = \Phi(0) + \int_0^l \Lambda(l') dl',$$

se sigue que  $\Phi(l) = \Phi(-l)$ . Con ayuda de las funciones  $\Phi(l), r(l), K(l), \rho(l)$  definidas para  $l \in (-\infty, 0]$  construimos la parte inferior de  $(M, \mathbf{g})$ , y de esta manera completamos el espaciotiempo. Por construcción tenemos:

$$\Phi(l) = \Phi(-l), \quad r(l) = r(-l), \tag{3.133}$$

llegamos a la conclusión que:

$$\mathbf{g}(l) = \mathbf{g}(-l), \quad \forall l \in (-\infty, \infty),$$

y esta simetría es compartida también con  $(\rho(l)c^2, P(l), \tau(l))$ . Los agujeros de gusano que satisfacen esta propiedad se dice que son simétricos reflexivos. Cuando  $\Lambda(0) \neq 0$  se generan los agujeros de gusano no simétricos reflexivos -más propiedades de los agujeros de gusano simétricos reflexivos son discutidas en [12, 13]-.

### 3.8 Agujeros de gusano asintóticamente planos

En esta sección, determinaremos el comportamiento que el dato libre  $(\rho, N)$  deberá exhibir para que el espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  construido en la sección (3.5) sea asintóticamente plano en ambos extremos de  $(M, \mathbf{g})$ . Primero queremos definir el concepto que el espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  es asintóticamente plano. Como es bien conocido la definición de que  $(M, \mathbf{g})$  sea asintóticamente plano es algo delicado, y hay más de una manera de definir este concepto -véase [1] y [2]-.

Por fortuna los espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  son globalmente estáticos, y para tales espaciotiempos existe una estándar formulación del concepto de asintóticamente plano - véase la definición dada en [24]-: Decimos que un espaciotiempo  $(M', \mathbf{g}')$  estático es asintóticamente plano si existe una  $N \subset M'$  con  $N \simeq \mathbb{R} \times \Sigma$ , en donde  $\Sigma$  denota una hipersuperficie espacial que tiene la siguiente propiedad<sup>4</sup>:

- $\Sigma$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}^3 - \overline{S(0, R)}$ , en donde  $\overline{S(0, R)}$  es la esfera cerrada de radio  $R$ , para algún  $R > 0$  grande.
- Existe coordenadas  $(t, x^1, x^2, x^3)$  tales que en  $\mathbb{R} \times \Sigma$  la métrica  $\mathbf{g}'$  toma la forma

---

<sup>4</sup>Nótese que para un  $(M, \mathbf{g})$  la región  $N$  no es necesariamente única. Obsérvese también que  $(M, \mathbf{g})$  no es necesariamente globalmente estático. Por ejemplo, el espaciotiempo  $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$  de Schwarzschild como hemos visto admite dos regiones  $N$  y  $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$  no es globalmente estático.

$$\mathbf{g}' = -V^2(x^1, x^2, x^3)dt^2 + \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j \quad (3.134)$$

- Al respecto de este carta las componentes de  $\mathbf{g}'$  exhiben la siguiente tasa de decaimiento:

$$V = 1 - \frac{c_1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \gamma_{ij} = \left(1 + \frac{c_2}{r}\right)\delta_{ij} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (3.135)$$

en donde  $r^2 = x^1 + x^2 + x^3$ .

Mostramos en seguida que bajo restricciones sobre  $(\rho c^2, N)$ , los espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  que construimos en esta sección (3.6) son asintóticamente planos. Más precisamente demostramos los espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  construidos en la sección (3.6) admiten dos regiones  $N$  que cumplen con las propiedades de la definición anterior.

Por eso empezamos con una  $(M, \mathbf{g})$  construida como en la sección (3.6), con  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g} = e^{2\Phi(l)}dt^2 + dl^2 + r^2(l)d\Omega^2, \quad l \in (-\infty, \infty). \quad (3.136)$$

Como ya hemos visto cada hipersuperficie espacial  $t = \text{cte}$  es  $\mathbb{R} \times S^2$  y tiene dos regiones que corresponden a  $l \rightarrow \infty$  y  $l \rightarrow -\infty$  respectivamente. La idea es restringir apropiadamente  $(\rho c^2, N)$ , de manera que permitan concluir la existencia de dos regiones  $N$  y  $N'$ , que cumplan con las propiedades de la

CAPÍTULO 3. LA EXISTENCIA GLOBAL DE LOS AGUJEROS DE GUSANO

---

definición anterior. Para este análisis es conveniente eliminar la coordenada  $l$  por la coordenada arrial  $r$  vía:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{1}{2}K(l)r(l), \quad (3.137)$$

$$K(l) > 0, l \in (0, \infty) \quad (3.138)$$

$$K(l) < 0, l \in (-\infty, 0). \quad (3.139)$$

Debido a que  $K(l), r(l) \neq 0 \forall l \in (0, \infty)$  o  $l \in (-\infty, 0)$  esta transformación es regular en  $l \in (0, \infty) \cup (-\infty, 0)$ . En cada dominio  $(0, \infty)$  o  $(-\infty, 0)$ , eliminando la coordenada  $l$  a favor de la coordenada  $r$  obtenemos:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + \frac{4dr^2}{K^2(r)r^2} + r^2d\Omega^2, \quad r \in (r_0, \infty), \quad (3.140)$$

donde

$$\Phi(r) = \Phi(l(r)), \quad K(r) = K(l(r)).$$

De la ecuación (3.31) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{K^2(x)}{4x^2} &= x \int_x^{x_0} \frac{x'^2 - \hat{k}\rho(x')c^2}{x'^4} dx' = x \left[ \int_x^{x_0} \frac{dx'}{x'^2} - \int_x^{x_0} \frac{\hat{k}\rho(x')c^2}{x'^4} dx' \right] \\ &= 1 - x \left[ \frac{1}{x_0} + \int_x^{x_0} \frac{\rho(x')}{x'^4} dx' \right], \quad x \in (0, x_0), \end{aligned} \quad (3.141)$$

Recordemos que  $x(r) = \frac{1}{r}$ , se sigue que:

$$\frac{K^2(r)r^2}{4} = 1 - \frac{2}{r} \left[ \frac{r(0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{r(0)}^r \hat{k}\rho(r')c^2r'^2 dx' \right] = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (3.142)$$

donde  $m(r)$  es definida por

$$m(r) = \frac{r_0}{2} + \frac{\hat{k}c^2}{2} \int_{r_0}^r r'^2 \rho(r') dr'.$$

Entonces las componentes de (3.140) en la “parte superior” e “inferior” toman la forma<sup>5</sup>:

$$\mathbf{g} = -e^{2\tilde{\Phi}(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad r \in (r_0, \infty), \quad (3.143)$$

$$m(r) = \frac{r_0}{2} + \frac{\hat{k}c^2}{2} \int_{r_0}^r r'^2 \rho(r') dr'. \quad (3.144)$$

Para estudiar la estructura asintótica de  $\mathbf{g}$  en el límite  $r \rightarrow \infty$ , sera conveniente transformar la solución  $(r(l), \Lambda(l), K(l), \rho(l), P(l), \tau(l))$  en la norma de (3.143). Debido que en  $(0, \infty)$  y  $(-\infty, 0)$  la transformación (3.140,3.142) es inyectiva y suprayectiva, así como  $C^1$ , las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(r) &= \Phi(l(r)), & \tilde{\Lambda}(r) &= \Lambda(l(r)), & \tilde{K}(r) &= K(l(r)), \\ \tilde{\tau}(r) &= \tau(l(r)), & \tilde{P}(r) &= P(l(r)), \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Es obvio de (3.137,3.140) que se requieren más de dos cartas para cubrir  $(M, \mathbf{g})$ . En el análisis que sigue nos restringimos a la “parte superior” con el entendido que el mismo análisis es valido para la “parte inferior”.

están bien definidas<sup>6</sup>. De (3.142) vemos:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{1}{2}K(l)r(l) = \pm \left(1 - \frac{2m(r(l))}{r(l)}\right)^{1/2} \quad (3.145)$$

entonces

$$\frac{dl(r)}{dr} = \frac{1}{\frac{dr(l)}{dl}|_{l(r)}} = \pm \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1/2}. \quad (3.146)$$

De la constricción hamiltoniana

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\tau(l) + \Lambda(l)K(l) = 0, \quad (3.147)$$

se obtiene:

$$\Lambda(l) = \frac{1}{K(l)} \left[ \frac{1}{r^2(l)} - \frac{K^2(l)}{4} - \hat{k}\hat{\tau}(l) \right] = \frac{4 - K^2(l)r^2(l) - 4r^2(l)\hat{k}\tau(l)}{4K(l)r^2(l)},$$

Tomando en cuenta que  $\Lambda(l) = \frac{d\Phi(l)}{dl}$  tenemos:

$$\frac{d\Phi(l)}{dl} = \frac{4 - K^2(l)r^2(l) - 4r^2(l)\hat{k}\tau(l)}{4K(l)r^2(l)} \quad (3.148)$$

y multiplicando la expresión anterior por ambos lados con  $\frac{dl(r)}{dr}$  que es distinta de cero en  $(r_0, \infty)$ , así obtenemos:

---

<sup>6</sup>Para simplificar la notación retiramos los tildes en lo sucesivo.

$$\frac{dl(r)}{dr} \frac{d\Phi(l)}{dl} = \frac{dl(r)}{dr} \frac{4 - K^2(l(r))r^2 - 4r^2\hat{k}\tau(l(r))}{4K(l(r))r^2} \quad (3.149)$$

la cual a través de  $\Phi(r) = \Phi(l(r))$ , se obtiene:

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{4 - r^2K^2(r) - 4r^2\hat{k}\tau(r)}{2K^2(r)r^3}, \quad (3.150)$$

y utilizando (3.142) obtenemos:

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{-\hat{k}\tau(r)r^3 + 2m(r)}{2r(r - 2m(r))}, \quad r \in (r_0, \infty), \quad (3.151)$$

Por otro parte de la definición de  $m(r)$  se obtiene:

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{\hat{k}c^2}{2}r^2\hat{\rho}(r), \quad r \in (r_0, \infty). \quad (3.152)$$

Apelando a (3.87) y transformando todos los términos en la norma de (3.143) encontramos después de una larga algebra (ver apéndice):

$$\begin{aligned} \hat{k}P(r) = & -\frac{1}{8}K^2(r) + \frac{1}{2r^2} - \frac{\hat{k}\rho(r)c^2}{2} + \frac{N^2(r)r^2K^2(r)}{4} + \frac{1}{8}K^2(r)rN(r) \\ & + \frac{N(r)}{2r} - \frac{\hat{k}\rho c^2 r N(r)}{2} + \frac{K^2(r)r^2}{4} \frac{dN(r)}{dr}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

De manera similar  $\tau(r) = \tau(l(r))$ , gracias a (3.87,3.88) satisfice:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\hat{k}\tau(r)}{dr} = & - \left( \frac{N(r)}{2} + \frac{1}{r} \right) \hat{k}\tau(r) + \hat{k}\rho(r)c^2N(r) - \frac{N(r)K^2(r)}{8} \\ & - \frac{N(r)}{2r^2} - \frac{rK^2(r)}{4} \frac{dN(r)}{dr} + \frac{K^2(r)}{8r} - \frac{1}{2r^3} + \frac{\hat{k}\rho(r)c^2}{2r} - \frac{rN^2(r)K^2(r)}{4}. \end{aligned} \quad (3.154)$$

CAPÍTULO 3. LA EXISTENCIA GLOBAL DE LOS AGUJEROS DE GUSANO

---

Eliminado el termino  $\frac{rK^2(r)}{4} \frac{dN(r)}{dr}$  de esta ecuación utilizando (3.153) obtenemos:

$$\frac{d\tau(r)}{dr} = (\rho c^2 - \tau) \frac{d\Phi}{dr} - \frac{2(P + \tau)}{r}. \quad (3.155)$$

Si definimos  $2m(r) \equiv b(r)$  (3.151,3.152) y (3.155) toman la forma:

$$\frac{db(r)}{dr} = \hat{k}\rho c^2 r^2, \quad r \in (b_0, \infty), \quad (3.156)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{-\hat{k}r^3\tau + b}{2r(r-b)}, \quad (3.157)$$

$$\frac{d\tau(r)}{dr} = (\rho c^2 - \tau) \frac{d\Phi}{dr} - \frac{2(P + \tau)}{r}. \quad (3.158)$$

las cuales son idénticas a las ecuaciones (2.95-2.97) las cuales aparecen en el formalismo de [6]. Entonces hemos mostrado que si las funciones:

$$r(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l), \rho(l), P(l),$$

satisfacen las ecuaciones (3.1-3.7) y además  $K(l) \neq 0$ ,  $r(l) \neq 0$  en  $l \in (0, \infty)$ , estas definen una solución que satisfacen las ecuaciones (3.156-3.158):  $(\Phi(r), m(r), \tau(r), \rho(r), P(r))$  en  $(r_0, \infty)$ .

Además como una consecuencia de (3.156-3.158), la función  $V(r) \equiv e^{\Phi(r)}$  satisface -ver apéndice 1-:

$$\nabla^2 V(r) = \frac{\hat{k}V(r)}{2} [\rho(r)c^2 - \tau(r) + 2P(r)], \quad r \in (r_0, \infty), \quad (3.159)$$

donde el Laplaciano  $\nabla^2$  es calculado utilizando la métrica espacial (3.143).

Para estudiar la estructura asintótica asumimos que los datos libres  $(\rho, N)$  satisfacen:<sup>7</sup>

$$\hat{k}c^2\rho(r) = \frac{A_1}{r^{2+\epsilon}} + \frac{A_2}{r^3} + \frac{A_3}{r^{3+\epsilon}} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (3.162)$$

$$A_1, A_2, A_3 \neq 0, \quad \epsilon > 0,$$

$$N(r) = \frac{b_1}{r^2} + \frac{b_2}{r^{2+\epsilon'}} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad b_1 \neq 0. \quad (3.163)$$

Para esta  $\rho(r)$ , encontramos que (3.144):

$$\frac{2m(r)}{r} = \frac{A_1}{1-\epsilon} \frac{1}{r^\epsilon} + \frac{A_2 \log r}{r} + \frac{2c}{r} + \frac{A_3}{\epsilon} \frac{1}{r^{1+\epsilon}} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (3.164)$$

mientras de (3.91) y(3.163) obtuvimos:

<sup>7</sup>Invirtiendo (3.137) y utilizando (3.140) obtenemos:

$$\frac{dl(r)}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}, \quad \frac{dl(r)}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}, \quad r \in (r_0, \infty), \quad (3.160)$$

lo cual muestra que si el extremo  $l \rightarrow \infty$ , respectivamente  $l \rightarrow -\infty$  son asintóticamente planos, entonces esperaríamos que:

$$l(r) = \pm r \left[ 1 + O\left(\frac{1}{r^m}\right) + O\left(\frac{\log r}{r^m}\right) \right], \quad m > 0, n > 0, \quad (3.161)$$

es decir, la coordenada arrial  $r$  y la longitud propia  $l$  satisfacen la misma relación como el espaciotiempo plano, correcciones de la curvatura modulo. Integrando (3.160) nosotros encontramos que la razón de decaimiento para que  $\rho c^2$  sea compatible con (3.161).

$$\Phi(r) = \hat{\Phi}_0 + \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^{1+\epsilon}} + \frac{c_3}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (3.165)$$

El comportamiento asintótico de  $\tau(r)$  se obtuvo a través de (3.157):

$$\begin{aligned} \hat{k}\tau(r) &= \frac{2m(r)}{r^3} - \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} + O\left(\frac{1}{r^{3+\epsilon}}\right) = \frac{A_1}{(1-\epsilon)r^{2+\epsilon}} + \frac{A_2 \log r}{r^3} + \\ &+ (c - 2c_1) \frac{1}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^{3+\epsilon}}\right), \end{aligned} \quad (3.166)$$

mientras que el comportamiento asintótico de la presión tangencial  $P(r)$  se obtiene a través de (3.158):

$$\begin{aligned} 2\hat{k}P(r) &= -2\hat{k}\tau(r) - r\hat{k} \frac{d\tau(r)}{dr} + O\left(\frac{1}{r^{3+\epsilon}}\right) \\ &= \frac{A_1\epsilon}{1-\epsilon} \frac{1}{r^{2+\epsilon}} + A_2 \frac{\log r}{r^3} + (c - 2c_1 - A_2) \frac{1}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^{3+\epsilon}}\right). \end{aligned} \quad (3.167)$$

Es importante notar que  $(\rho, \tau, P)$  decae como  $O(r^{2+\epsilon})$ , pero la combinación  $(\hat{k}\rho(r)c^2 - \hat{k}\tau(r) + 2\hat{k}P(r))$  decae de acuerdo a:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \hat{k}\rho(r)c^2 - \hat{k}\tau(r) + 2\hat{k}P(r) \right) = O\left(\frac{1}{r^{3+\epsilon}}\right). \quad (3.168)$$

La masa de Komar  $M_K$  de un extremo del agujero de gusano es definida por -como referencia ver [1]-:

$$\frac{8\pi G M_K}{c^2} = - \lim \oint \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla^\gamma \xi^\delta = \lim \oint \nabla_i V^2 ds^i, \quad (3.169)$$

donde el límite es tomado cuando  $r \rightarrow \infty$ . En vista de que  $V(r) = e^{\Phi(r)}$ , obtenemos:

$$V(r) = e^{\Phi(0)} \left[ 1 - \frac{2GM'_K}{c^2 r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right]. \quad (3.170)$$

y por imposición  $\mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -1$  en el extremo definido por  $l \rightarrow \infty$  tal que:

$$V(r) = e^{\Phi(r)} = 1 - \frac{2GM'_K}{c^2 r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Combinando estas expresiones con (3.169), se sigue que la constante  $M'_K$  es la masa de Komar del correspondiente extremo.

Para un agujero de gusano con simetría reflexiva y como  $N$  satisface (3.163), se tiene que ambos extremos poseen masas de Komar bien definidas e iguales. Sin embargo esta propiedad no es sostenida para agujeros de gusano sin simetría reflexiva. En este caso el lado derecho de (3.170) es multiplicado por el factor arbitrario  $e^{\Phi(0)}$  implicando que la  $M'_K$  del extremo  $l \rightarrow -\infty$  sea ambigua.

Esta propiedad de la masa de Komar parece una primera señal de algo turbio. Nosotros solo mencionaremos que en [20], fue mostrado que para un espaciotiempo asintóticamente plano, de topología no trivial, un campo de Killing temporal puede dar distintas expresiones para la masa de Komar. Aclaración de este comportamiento de la masa de Komar y posibles implicaciones serían bien recibidas.

Finalmente integrando (3.159) sobre  $l \in (0, \infty)$  obtenemos la identidad:

$$\frac{8\pi GM_K}{c^2} = \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r_0} A(0) + \frac{\hat{k}}{2} \int V(r) [\rho(r)c^2 - \tau(r) + 2P(r)] \sqrt{\gamma} dx^3, \quad (3.171)$$

la cual en combinación con (3.168) confirma que  $M_K$  es finita.

Ahora cambiamos nuestra atención a la masa ADM de la métrica espacial:

$$\gamma^{(3)} = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad r \in (r_0, \infty). \quad (3.172)$$

asumiendo que esta  $\gamma^{(3)}$  describe el extremo  $l \rightarrow \infty$  -las consideraciones que siguen son aplicables para el otro extremo también-. La simetría esférica implica que  $\gamma^{(3)}$  es conformalmente plana y entonces esta puede ser escrita en la forma:

$$\gamma = \hat{\Omega}^2(R) [dR^2 + R^2 d\Omega^2] = \hat{\Omega}^2(\mathbf{x}) [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] \quad (3.173)$$

$$\hat{\Omega}^2 \equiv \left( \frac{dr(R)}{dR} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{2m(r(R))}{r(R)}}, \quad (3.174)$$

donde  $R(r)$  satisface:

$$\left( \frac{dR(r)}{dr} \right)^2 = \frac{1}{f(r)} \frac{R^2(r)}{r^2}, \quad f(r) = \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right). \quad (3.175)$$

integrando esta ecuación el comportamiento asintótico de  $R(r)$  puede ser deducido, y esto nos ayudara a determinar el comportamiento asintótico de  $\hat{\Omega}^2(R)$ . Apelando a la constricción hamiltonian:  $R(\gamma) = 2\hat{k}\rho c^2$  la cual en la norma (3.173) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{\hat{\Omega}^4(R)} \frac{d^2 \hat{\Omega}^2(R)}{dR^2} - \frac{4}{\hat{\Omega}^4(R)R} \frac{d\hat{\Omega}^2(R)}{dR} \\
 & + \frac{3}{2\hat{\Omega}^6(R)} \left( \frac{d\hat{\Omega}^2(R)}{dR} \right)^2 = 2\hat{k}\rho(R)c^2.
 \end{aligned} \tag{3.176}$$

Como  $\rho c^2$  decae de acuerdo a (3.162), entonces (3.176) implica:

$$\hat{\Omega}^2(R) = 1 + \frac{A_1}{\epsilon(1-\epsilon)} \frac{1}{R^\epsilon} + \frac{c_2}{R} + \frac{A_2 \log R}{R}, \tag{3.177}$$

entonces  $\gamma^3$  decae muy despacio.

Hay más de una manera en la que podemos evaluar la masa ADM para los dos extremos. La primera forma se basa en la presencia de la simetría esférica. Tal simetría nos permite emplear la formula de Misner-Sharp para la masa cuasi-local  $M(r)$ , y estudiar su límite  $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r)$ . La segunda manera es la más general, y hace uso de la siguiente expresión para  $M_{ADM}$  -mostrada y discutida en [21]-:

$$\begin{aligned}
 M_{ADM} = & \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \left[ {}^3R(\gamma) + \frac{1}{4} \gamma^{mn} \gamma^{ab} \gamma^{cd} (2\gamma_{mn,d} \gamma_{ac,b} - 2\gamma_{ma,d} \gamma_{nc,b} \right. \\
 & \left. + \gamma_{dm,b} \gamma_{nc,a} - \gamma_{cd,a} \gamma_{mn,b}) \right] \sqrt{\gamma} d^3x,
 \end{aligned} \tag{3.178}$$

donde la integral de volumen se toma sobre alguno de los extremos de la hipersuperficie  $t = \text{cte}$ . Imponiendo  ${}^3R(\gamma) = 2\hat{k}c^2\rho$  y apelando a (3.173), encontramos:

$$M_{ADM} = \int_{\Sigma} \left[ \frac{2\hat{k}c^2 A_1}{R^{2+\epsilon}} + \frac{2\hat{k}c^2 A_2}{R^3} - \frac{1}{2\hat{\Omega}^6(R)} \left( \frac{d\hat{\Omega}^2}{dR} \right)^2 \right] \sqrt{\gamma} d^3x. \quad (3.179)$$

como

$$\frac{2}{\hat{\Omega}^6(R)} \left( \frac{d\hat{\Omega}^2(R)}{dR} \right)^2 = \frac{1}{R^{2+2\epsilon}},$$

se sigue que para  $\epsilon > \frac{1}{2}$  la contribución del último término es convergente. Sin embargo como  $A_1 A_2 \neq 0$ , los dos primeros términos dejan una divergencia lineal y logarítmica.

Para que la masa ADM  $M_{ADM}$  sea finita se requiere que la fórmula asintótica de  $\hat{k}\rho(r)c^2$  dada en (3.162) tenga  $A_1 = A_2 = 0$ , así la densidad deberá decaer como  $\frac{1}{R^{3+\epsilon}}$ ,  $\epsilon > 0$  o más rápido. Por tanto las densidades que decaen de acuerdo a (3.162) implican masa de Komar finita, pero infinita masa ADM.

Otra manera de llegar a la misma conclusión es a través del estudio de la función de masa energía de Misner-Sharp. Recordemos que para un espacio-tiempo  $(M, \mathbf{g})$ , el cual es esféricamente simétrico, la masa energía asociada con  $SO(3)$  esfera está dada por:

$$M(A) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \left( 1 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{g}(dA^{1/2}, dA^{1/2}) \right) \quad (3.180)$$

en donde  $A$  es el área propia de las 2-esferas generadas por  $SO(3)$  y  $dA$  la 1-forma asociada a la función del área. Evaluemos (3.180) en el caso donde

la métrica esta dada por (3.142). Debido a que  $A(r) = 4\pi r^2$ ,  $r \in (r_0, \infty)$ , se tiene:

$$M(r) = m(r) = \frac{r_0}{2} + \frac{\hat{k}c^2}{2} \int_{r_0}^r r'^2 \rho(r') dr'. \quad (3.181)$$

Bajo la asunción que

$$\lim_{r' \rightarrow \infty} \rho(r') = \frac{A}{r^{3+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0, \quad (3.182)$$

tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \text{cte}, \quad (3.183)$$

implicando  $M_{ADM}$  finita.

### 3.9 Apéndice 3A: El Teorema de Picard-Lindeloff

En este apéndice primero recordamos el teorema de Picard-Lindeloff y en seguida investigamos si la función  $\mathbf{F}$  definida en (3.10) cumple las condiciones que requiere este teorema.

**Teorema 1 (Picard-Lindeloff)** *Sea*

$$f: (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

CAPÍTULO 3. LA EXISTENCIA GLOBAL DE LOS AGUJEROS DE GUSANO

---

con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto, y sea  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in (a, b) \times \Omega$  y además  $c > 0$ ,  $a > 0$  tal que  $[t_0, t_0 + c] \times \bar{S}(\mathbf{x}_0, 2a) \subset (a, b) \times \Omega$  y la restricción de que  $\mathbf{f}$  en  $[t_0, t_0 + c] \times \bar{S}(\mathbf{x}_0, 2a)$  es continua y además satisface la condición Lipshitz local, es decir:

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \forall (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in [t_0, t_0 + c] \times \bar{S}(\mathbf{x}_0, 2a),$$

sea  $L$  una cota de  $\mathbf{f}$ , es decir:

$$|\mathbf{f}| \leq L, \forall (t, \mathbf{x}) \in [t_0, t_0 + c] \times \bar{S}(\mathbf{x}_0, 2a).$$

Entonces el PVI:

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{a}(t)), \quad \mathbf{a}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

admite una única  $\mathbf{a}$  definida en

$$\mathbf{a} : [t_0, t_0 + b] \rightarrow (a, b) \times \Omega,$$

en donde  $b > 0$  y  $b \leq \frac{a}{L}$ ,  $b < \frac{1}{K}$ .

Para aprovechar la conclusión de este teorema, la función  $\mathbf{F}$  en (3.10) debe cumplir las condiciones del teorema 1. Debido a que la dependencia de  $\mathbf{F}$  con respecto a la variable  $l$  es a través de las funciones  $(P, \rho)$ , de aquí en adelante asumimos  $\rho(l)$  y  $P(l)$  continuas en  $(-\epsilon, \epsilon)$  y por tal elección  $\mathbf{F}$  es continua con respecto a la variable  $l$ .

La demostración que  $\mathbf{F}$  satisface localmente la condición de Lipshitz con respecto a la variable  $\mathbf{x} = (x, y, z, t)$ , es sencilla debido a que las componentes de  $\mathbf{F}$  son  $C^1$  en  $(r_0 \times \infty) \times \mathbb{R}^3$ . Por completos daremos los argumentos que

garantizan esta conclusión. Primero extendemos el dominio de definición de  $\mathbf{F}$  sobre  $D = (-\epsilon, \epsilon) \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ . En este dominio  $\mathbf{F}$  es continuamente diferenciable con respecto a  $\mathbf{x} = (x, y, z, t)$ . Por el hecho que  $D$  es abierto existe  $(l_0 - \epsilon, l_0 + \epsilon)$  y una bola abierta  $S(\mathbf{x}_0, \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , tal que:

$$(l_0 - \epsilon, l_0 + \epsilon) \times S(\mathbf{x}_0, \epsilon) \subset D.$$

La bola cerrada  $\overline{S(\mathbf{x}_0, \epsilon)}$  y el conjunto cerrado  $[l_0 - \frac{\epsilon}{2}, l_0 + \frac{\epsilon}{2}]$ , satisfacen:

$$[l_0 - \epsilon/2, l_0 + \epsilon/2] \times \overline{S(\mathbf{x}_0, \epsilon/2)} \subset (l_0 - \epsilon, l_0 + \epsilon) \times S(\mathbf{x}_0, \epsilon).$$

y consideramos la restricción de  $\mathbf{F}$  en  $[l_0 - \frac{\epsilon}{2}, l_0 + \frac{\epsilon}{2}] \times \overline{S(\mathbf{x}_0, \frac{\epsilon}{2})}$ . El teorema de valor medio garantiza la existencia de un  $\mathbf{z}$  que se encuentra en la línea recta que une a  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y} \in [l_0 - \epsilon/2, l_0 + \epsilon/2] \times \overline{S(\mathbf{x}_0, \epsilon/2)}$  tal que:

$$F^i(l, \mathbf{x}) - F^i(l, \mathbf{y}) = DF^i|_{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.184)$$

donde  $F^i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  son las proyecciones de  $\mathbf{F}$ , i.e.:

$$F^i = Pr^i \circ \mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 4$$

y  $DF^i$  el gradiente de  $F^i$ :

$$DF^i|_{\mathbf{z}} = \left( \frac{\partial F^i}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F^i}{\partial x^n} \right) |_{\mathbf{z}}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

De la relación (3.184) tenemos:

$$|F^i(l, \mathbf{x}) - F^i(l, \mathbf{y})| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \mathbf{z} (x^j - y^j) \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \mathbf{z} \right| |x^j - y^j|,$$

debido a que  $\frac{\partial F^i}{\partial x^j}$  son continuas en  $(l-\epsilon/2, l+\epsilon/2) \times S(\mathbf{x}_0, \epsilon/2)$ , también son continuas en el conjunto compacto  $[l-\epsilon/2, l+\epsilon/2] \times \overline{S(\mathbf{x}_0, \epsilon/2)}$ . La continuidad de las  $F^i$  en este conjunto implican que existen  $k^i \in \mathbb{R}^+$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , tal que:

$$|F^i(l, \mathbf{x}) - F^i(l, \mathbf{y})| \leq k^i |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.185)$$

Pero esta propiedad de las proyecciones  $F^i, i = 1, \dots, 4$ , nos dice que  $\mathbf{F}$  satisface la condición Lipshitz en  $[l_0 - \frac{\epsilon}{2}, l_0 + \frac{\epsilon}{2}] \times \overline{S(\mathbf{x}_0, \frac{\epsilon}{2})}$ . Tal propiedad se ve más rápido, si empleamos

$$|\mathbf{x}| = |x^1| + \dots + |x^n|,$$

como la norma de  $\mathbb{R}^n$ . Con respecto a esta norma tenemos:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in [l_0 - \frac{\epsilon}{2}, l_0 + \frac{\epsilon}{2}] \times \overline{S(\mathbf{x}_0, \frac{\epsilon}{2})} \subset (l_0 - \epsilon, l_0 + \epsilon) \times S(\mathbf{x}_0, \epsilon),$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}(l, \mathbf{x}) - \mathbf{F}(l, \mathbf{y})| &= |F^1(l, \mathbf{x}) - F^1(l, \mathbf{y})| + \dots + |F^4(l, \mathbf{x}) - F^4(l, \mathbf{y})| \\ &\leq k^1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \dots + k^4 |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq k |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \end{aligned} \quad (3.186)$$

en donde

$$k = \max\{k^i, i = 1, 2, 3, 4, \}$$

la cual muestra que  $\mathbf{F}$  satisface la condición de Lipshitz localmente con respecto a  $\mathbf{x}$ .

### 3.10 Apéndice 3B: Acerca de la masa de Kommar

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j \\ &= -V^2(r) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad r \in (r_0, \infty) \end{aligned} \quad (3.187)$$

donde  $\gamma$  es la 3-métrica espacial, y  $V(r) \equiv e^{\Phi(r)}$ . A continuación derivaremos la identidad (3.159) utilizada en la sección (3.4). Sea  $\nabla^2$  el operador Laplaciano con respecto a la métrica espacial  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2. \quad (3.188)$$

Por definición

$$\nabla^2 V(r) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial x^\nu} \right)$$

se sigue:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(r) &= \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \frac{d^2 V(r)}{dr^2} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{dV(r)}{dr} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \frac{dV(r)}{dr} \end{aligned} \quad (3.189)$$

tomando en cuenta que  $V(r) = e^{\Phi(r)}$

$$\frac{d}{dr} V(r) = V(r) \frac{d\Phi}{dr} = V(r) \Lambda(r)$$

y

$$\frac{r^2 K^2(r)}{4} = 1 - \frac{2m(r)}{r}$$

la expresión (3.189) se reduce a:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(r) &= V(r) \left\{ \left( \frac{d\Lambda(r)}{dr} + \Lambda^2(r) + \frac{2\Lambda(r)}{r} \right) \frac{r^2 K^2(r)}{4} \right. \\ &\left. + \frac{\Lambda(r)}{2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 K^2(r)}{4} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.190)$$

si  $\Lambda(r)$ ,  $K(r)$  satisfacen:

$$\begin{aligned} \frac{K^2(r)r^2}{4} \frac{d\Lambda(r)}{dr} &= -\frac{1}{8} K^2(r) + \frac{1}{2r^2} - \frac{\hat{k}\rho(r)c^2}{2} + \frac{\Lambda^2(r)r^2 K^2(r)}{4} + \frac{1}{8} K^2(r)r\Lambda(r) \\ &+ \frac{\Lambda(r)}{2r} - \frac{\hat{k}\rho c^2 r \Lambda(r)}{2} - \hat{k}P(r), \end{aligned} \quad (3.191)$$

$$\frac{dK(r)}{dr} = -\frac{3}{4} K^2(r) + \frac{1}{r^2} - \hat{k}\rho(r)c^2, \quad (3.192)$$

las cuales son parte de las ecuación de Einstein como hemos visto en la sección (3.4). Entonces (3.190) se simplifica y toma la forma:

$$\nabla^2 V(r) = V(r) \left[ -\frac{1}{2r^2} + \frac{K^2(r)}{8} + \frac{1}{4}\Lambda(r)K^2(r)r + \frac{\hat{k}\rho(r)c^2}{2} + \hat{k}P(r) \right] \quad (3.193)$$

la constricción Hamiltoniana (2.49) en la norma (3.187) toma la forma:

$$-\frac{1}{2r^2} + \frac{K^2(r)}{8} + \frac{\hat{k}\tau(r)}{2} + \frac{K^2(r)\Lambda(r)r}{4} = 0 \quad (3.194)$$

finalmente utilizando la constricción Hamiltoniana, llegamos a la identidad (3.159):

$$\nabla^2 V(r) = V(r) \left[ -\frac{\hat{k}\tau(r)}{2} + \frac{\hat{k}\rho(r)c^2}{2} + \hat{k}P(r) \right] \quad (3.195)$$

### 3.11 Apéndice 3C: La presión tangencial en la coordenada de curvatura

Derivación de las ecuaciones:

$$\hat{k}P(l) = \Lambda(2)(l) + \frac{d\Lambda(l)}{dl} + \frac{1}{2} \frac{dK(l)}{dl} + \frac{K^2(l)}{4} + \frac{K(l)\Lambda(l)}{2}, \quad (3.196)$$

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = (\rho(l)c^2 - \tau(l))\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l), \quad (3.197)$$

en la norma (3.187). Comencemos por (3.197):

$$\frac{d\tau(l)}{dl} \frac{dl}{dr} = (\rho(l(r))c^2 - \tau(l(r))) \frac{d\Phi(l)}{dl} \frac{dl}{dr} - (\tau(l(r)) + P(l(r)))K(l(r)) \frac{dl}{dr}$$

como  $\frac{dl}{dr} = \pm \frac{2}{rK(r)}$  se sigue

$$\frac{d\tau(r)}{dr} = (\rho(r)c^2 - \tau(r))\Lambda(r) - \tau(r)K(r)\frac{2}{rK(r)} - P(r)K(r)\frac{2}{rK(r)}$$

simplificando finalmente encontramos (4.28) :

$$\frac{d\tau(r)}{dr} = (\rho(r)c^2 - \tau(r))\Lambda(r) - \frac{2}{r}(\tau(r) + P(r)). \quad (3.198)$$

Ahora derivemos (3.196) en al norma (3.187). Para ello primero derivemos (2.46) en esta norma:

$$\frac{dl}{dr} \frac{dK}{dl} = \frac{dl}{dr} \left[ -\frac{3}{4}K^2(l(r)) + \frac{1}{r^2} - \hat{k}\rho(l(r))c^2 \right],$$

se sigue:

$$\frac{dK}{dr} = \frac{2}{rK(r)} \left[ -\frac{3}{4}K^2(r) + \frac{1}{r^2} - \hat{k}\rho(r)c^2 \right]$$

simplificando:

$$\frac{dK}{dr} = -\frac{3}{2} \frac{K(r)}{r} + \frac{2}{r^3 K(r)} - \frac{2\hat{k}\rho(r)c^2}{rK(r)} \quad (3.199)$$

ahora si regresemos a (3.196):

$$\hat{k}P(l(r)) = \left( \frac{d\Phi}{dr} \frac{dr}{dl} \right)^2 + \frac{dr}{dl} \frac{d}{dr} \left( \frac{dr}{dl} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{1}{2} \frac{dr}{dl} \frac{dK}{dr} + \frac{K^2}{4} + \frac{K}{2} \frac{dr}{dl} \frac{d\Phi}{dr}$$

utilizando que  $\Lambda(r) \equiv \frac{d\Phi}{dr}$  y  $\frac{r^2 K^2(r)}{4} = \left(\frac{dl}{dr}\right)^2$  se sigue que:

$$P(r) = \frac{K^2(r)r^2}{4} \left[ \Lambda^2 + \frac{d\Lambda(r)}{dr} + \frac{2\Lambda(r)}{r} + \Lambda(r) \frac{dK(r)}{dr} \right] + \frac{K^2(r)}{4} \quad (3.200)$$

sustituyendo (3.199) en (3.200) encontramos finalmente (3.153):

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{\Lambda^2(r)K^2(r)r^2}{4} + \frac{r^2 K^2(r)}{4} \frac{d\Lambda(r)}{dr} - \frac{1}{8} K^2(r) \\ &+ \frac{1}{8} r K^2(r) \Lambda(r) + \frac{\Lambda(r)}{2r} - r \frac{\Lambda(r)}{2} \hat{k} \rho(r) c^2 + \frac{1}{2r^2} - \frac{\hat{k} \rho(r) c^2}{2} \end{aligned} \quad (3.201)$$

### 3.12 Apéndice 3D: La masa ADM y su relación con la masa Misner-Sharp

En este apéndice discutimos brevemente la relación entre la masa ADM  $M_{ADM}$  y la masa de Misner-Sharp, las cuales hemos definido en la sección (3.8).

Primero un recordemos: Sea un espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  asintóticamente plano y  $\Sigma$  una hipersuperficie espacial, la cual es asintóticamente euclidiana. Sea  $(\gamma_{ab}, K_{ab})$  la métrica inducida y la segunda forma fundamental asociadas a  $\Sigma$ .

Definimos la masa total  $m$  asociada con tal  $\Sigma$  como:

$$E = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint \left( \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial x^a} - \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial x^b} \right) N^b dA, \quad (3.202)$$

*CAPÍTULO 3. LA EXISTENCIA GLOBAL DE LOS AGUJEROS DE GUSANO*

---

en donde  $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ ,  $N = N^a \frac{\partial}{\partial x^a}$  es el vector normal unitario a la esfera  $r = \text{cte}$ . El hecho que  $\Sigma$  es asintóticamente euclidiana implica que  $\frac{\Sigma_-}{S(o,R)}$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}^3 - S(0, R)$ , y además en  $\frac{\Sigma_-}{S(o,R)}$  existen coordenadas tale que:

*CAPÍTULO 3. LA EXISTENCIA GLOBAL DE LOS AGUJEROS DE  
GUSANO*

---

## Capítulo 4

# Los agujeros de gusanos soportados por la energía fantasma

### 4.1 La materia exótica y las ecuaciones de estado

En el capítulo anterior hemos mostrado que bajo la asunción que la densidad  $\rho c^2$ , la tensión  $\tau$ , y la presión tangencial  $P$  fueran libres de alguna restricción, existe una familia infinita de agujeros de gusanos generada por algún par  $(N, \rho c^2)$  sujeto a las restricciones ya especificadas. Como consecuencia del formalismo desarrollado, hemos dado una nueva representación para la familia de agujeros de gusano cuasi-Schwarchild. Pero como discuti-

mos en [13] y [22] los resultados no son satisfactorios físicamente, debido a la presencia de funciones libres en la métrica  $\mathbf{g}$ , la cual representa el agujero de gusano. La presencia de funciones libres en  $\mathbf{g}$  hace que la teoría pierda su capacidad de predecir. Cabe comentar que cualquier configuración astrofísica puede ser modelada por un agujero de gusano -véase la discusión en [22]-. Por otro lado, mencionamos al inicio de los capítulos 2 y 3 que el origen de las funciones libres se debía a nuestra ignorancia sobre la naturaleza de la materia exótica. Las preguntas que en este capítulo abordamos son las siguientes:

¿Qué pasaría si a un nivel fenomenológico asumimos que  $(\rho c^2, \tau, P)$  están sujetas a restricciones elegidas *a priori*? ¿Existen soluciones del sistema (3.1-3.7) que representen a los agujeros de gusano? ¿Si existen dichas soluciones, estas contienen parámetros libres o funciones libres?.

Con la motivación de responder estas preguntas y como ya lo hemos comentado en la página (40) estudiaremos ahora el sistema:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{r(l)K(l)}{2} \quad (4.1)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (4.2)$$

$$\frac{d\Lambda(l)}{dl} = -K(l)\Lambda(l) - \Lambda^2(l) + \frac{\hat{k}}{2}[\rho(l)c^2 - \tau(l) + 2P(l)], \quad (4.3)$$

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = (\rho(l)c^2 - \tau(l))\Lambda(l) - (\tau(l) + P(l))K(l), \quad (4.4)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\tau(l) + \Lambda(l)K(l) = 0, \quad (4.5)$$

$$r(0) = \left( \frac{A(0)}{4\pi} \right)^{1/2}, \quad K(0) = 0, \quad (4.6)$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0 \quad \tau(0) = \frac{1}{\hat{k}r^2(0)},$$

$$\tau(0) - \rho(0)c^2 > 0, \quad (4.7)$$

pero <sup>1</sup> asumiendo que  $(\rho c^2, \tau, P)$  están sujetas a restricciones que referimos como ecuaciones de estado (EDE). En general no hay una manera única en donde tales EDE puedan ser elegidas, a menos que especifiquemos la estructura  $T_{\mu\nu}$ , el cual modela la material exótica. En este capítulo para responder a las preguntas que hemos planteado al inicio procedemos de la siguiente manera:

- Primero, especificamos a mano las ecuaciones de estado.
- Segundo, modelamos la materia exótico a través de la combinación de los campos escalares sin masa K-esencia y Klein Gordon.

Para ambos casos mostramos que el sistema (4.1-4.7) admite soluciones que representan a los agujeros de gusano. Estas soluciones contienen parámetros libres y no funciones libres.

Comenzamos abordando el primer caso, asumimos una familia monoparamétrica de ecuaciones de estado

$$\tau = F(\rho), \quad P = G(\rho)$$

---

<sup>1</sup>Nótese, que para las necesidades de este capítulo es más conveniente considera la ecuación que satisface  $\Lambda(l)$ , en la forma (4.3) -véase la sección (2.2)-.

con  $F, G$  funciones suaves. Para tales EDE el sistema (4.1-4.7) toma la forma:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{r(l)K(l)}{2}, \quad (4.8)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (4.9)$$

$$\frac{d\Lambda(l)}{dl} + K(l)\Lambda(l) + \Lambda^2(l) = \frac{1}{2}\hat{k}\rho(l)c^2 - \hat{k}F[\rho(l)] + \hat{k}G[\rho(l)] \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF(\rho)}{d\rho} \frac{d\rho(l)}{dl} &= \{\rho(l)c^2 - F[\rho(l)]\}\Lambda(l) \\ &- \{F[\rho(l)] + G[\rho(l)]\}K(l) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}F[\rho(l)] + \Lambda(l)K(l) = 0. \quad (4.12)$$

$$r(0) = \sqrt{\frac{A(l)}{4\pi}}, K(0) = 0, \Lambda(0) = \Lambda_0, F[\rho(0)] = \frac{1}{\hat{k}r^2(0)} > 0, \quad (4.13)$$

$$F[\rho(0)] - \rho(0)c^2 > 0, F(\rho) \neq 0. \quad (4.14)$$

La existencia de la garganta demanda  $F(\rho) - \rho c^2 > 0$  y  $F(\rho) > 0$ , como se ve en (4.13,4.14). El sistema anterior define un PVI para  $(r(l), K(l), \Lambda(l), \rho(l))$ . Una vez que  $\rho(l)$  es conocido, la tensión  $\tau$  y la presión tangencial  $P$  se obtienen a través de  $\tau = F(\rho)$ ,  $P = G(\rho)$ .

Asumimos por simplicidad que  $\frac{dF(\rho)}{d\rho} \neq 0$ , entonces (4.11) es una ecuación regular. Por tal elección el teorema de Picard-Lindeloff se aplica. A pesar de que tal teorema garantiza la existencia de la solución local en algún  $[-a, a] \subset (-\epsilon, \epsilon)$ , no tenemos ningún conocimiento sobre el comportamiento de la solución maximal. Con la finalidad de entender la naturaleza de tales soluciones, y motivados por los modelos cosmológicos que involucran la en-

CAPÍTULO 4. LOS AGUJEROS DE GUSANOS SOPORTADOS POR LA ENERGÍA FANTASMA

---

ergía fantasma, elegimos  $F(\rho)$  y  $G(\rho)$  que cumplen:

$$\tau = \lambda\rho c^2, \quad P = \mu\rho c^2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (4.15)$$

donde  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$  son parámetros libres. Por tal EDE el sistema (4.8-4.14) toma la forma:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{1}{2}K(l)r(l), \quad (4.16)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (4.17)$$

$$\frac{d\Lambda(l)}{dl} = -K(l)\Lambda(l) - \Lambda^2(l) + (1 - \lambda + 2\mu)\frac{\hat{k}\rho(l)c^2}{2}, \quad (4.18)$$

$$\frac{d\rho(l)}{dl} = \rho(l) \left[ \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\Lambda(l) - \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)K(l) \right], \quad (4.19)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\rho(l)c^2\lambda + \Lambda(l)K(l) = 0. \quad (4.20)$$

$$r(0) = \sqrt{\frac{A(0)}{4\pi}}, \quad K(0) = 0, \quad (4.21)$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \lambda\rho(0) = \frac{1}{\hat{k}c^2r^2(0)} > 0, \quad (4.21)$$

$$(\lambda - 1)\rho c^2 > 0. \quad (4.22)$$

Debido a que simultáneamente  $(\lambda, \rho(0))$  están sujetas a

$$\lambda\rho(0) > 0, \quad (\lambda - 1)\rho(0)c^2 > 0,$$

distinguiamos dos casos:

(1)

$$\rho(0) > 0, \text{ y } \lambda > 1, \quad (4.23)$$

(2)

$$\rho(0) < 0, \text{ y } \lambda < 0. \quad (4.24)$$

Por otro lado haciendo referencia al concepto de energía fantasma que hemos comentado en la sección (2.3), introducimos el parámetro:

$$w \equiv \frac{P_l}{\rho c^2} = -\frac{\tau}{\rho c^2} = -\frac{\lambda \rho c^2}{\rho c^2} = -\lambda,$$

debido a (4.23,4.24) resulta:

- $w = -\lambda < -1$ ,
- $w = -\lambda > 0$ .

Cuando  $w < -1$  y recordando la discusión dada en la sección (2.3) interpretamos que

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 u_\mu u_\nu - \lambda \rho c^2 X_\mu X_\nu + \mu \rho c^2 (Y_\mu Y_\nu + Z_\mu Z_{\nu u}),$$

describe energía fantasma. Mientras para  $w > 0$ , este  $T_{\mu\nu}$  describe materia exótica<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Es importante mencionar que hacemos una extrapolación grande. Mientras en cosmología el parámetro  $w$  es definido por  $w = \frac{P}{\rho c^2}$ , en donde  $P$  es la presión isotrópica medida por los observadores que se mueven en conjunto con la expansión cosmológica,

*CAPÍTULO 4. LOS AGUJEROS DE GUSANOS SOPORTADOS POR LA ENERGÍA FANTASMA*

---

Aun hemos elegido una familia de EDE simple, la estructura de (4.16-4.22) es más complicada matemáticamente que la del sistema que teníamos en el capítulo anterior. Involucra cuatro ecuaciones acopladas para las funciones no conocidas  $(r(l), K(l), \Lambda(l), \rho(l))$ , con  $(\lambda, \mu)$  parámetros libres. Aun así, en esta sección mostraremos que el sistema (4.16-4.22) admite soluciones que representan a los agujeros de gusano.

Para llegar a esta conclusión, sea que elegimos datos  $(\lambda, \rho(0)c^2)$  consistentes con (4.23) o (4.24), y sea  $(r(0), \Lambda_0)$  dadas. A través del teorema de Picard-Lidloff, existe una una solución única

$$(r(l), K(l), \Lambda(l), \rho(l)), l \in [-a, a],$$

que satisface tal sistema. Pero desafortunadamente no sabemos si tal solución pueda ser extendida a toda la recta real, y si la métrica resultante  $\mathbf{g}$  y el espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  serán asintóticamente planos.

Nuestra estrategia es investigar el comportamiento de las soluciones (4.16-4.20) en el límite  $l \rightarrow \pm\infty$ . Para tal análisis es conveniente cambiar de la coordenada  $l$  a la coordenada de la curvatura  $r$ . En la sección (3.8) del capítulo anterior mostramos que en la parte ‘superior’  $l \in (0, \infty)$  o en la parte “inferior”  $l \in (-\infty, 0)$ , la métrica  $\mathbf{g}$  puede ser escrita en la forma

---

en el contexto presente tenemos  $P_l = -\tau_l$ , y además  $P$  la presión tangencial. Entonces hay una ambigüedad en el término energía fantasma. Nuestra terminología es solo por analogía.

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad r > r_0 = r(0) > 0, \quad (4.25)$$

$$m(r) = \frac{r_0}{2} + \frac{\hat{k}c^2}{2} \int_{r_0}^r r'^2 \rho(r') dr'. \quad (4.26)$$

en donde  $(m(r), \Phi(r), \tau(r), \rho(r), P(r))$  satisfacen:

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{\hat{k}c^2}{2} r^2 \hat{\rho}(r), \quad r \in (r_0, \infty), \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau(r)}{dr} &= [\rho(r)c^2 - \tau(r)] \frac{d\Phi(r)}{dr} \\ &\quad - \frac{2[P(r) + \tau(r)]}{r}, \quad r \in (r_0, \infty), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{-\hat{k}\tau(r)r^3 + 2m(r)}{2r(r - 2m(r))}, \quad r \in (r_0, \infty). \quad (4.29)$$

Además hemos mostrado que dados  $(r(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l), \rho(l), P(l))$  las cuales satisfacen (4.1-4.7), podemos construir  $(m(r), \Phi(r), \tau(r), P(r), \rho(r))$  que satisfacen (4.27-4.29) en  $(r_0, \infty)$ . Para los fines de esta sección mostraremos el sentido converso de esta propiedad.

El sistema (4.27-4.29) es singular en los puntos donde  $r - 2m(r) = 0$ , por ello debemos ser cuidadosos. Primero sea  $(m(r), \Phi(r), \tau(r), \rho(r), P(r))$ , las cuales satisfacen dichas ecuaciones en  $[R, \infty)$ , tal que  $r - 2m(r) \neq 0 \forall r \in [R, \infty)$ .

Consideramos el PVI:

$$\frac{dl(r)}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}, \quad l(R) = \pm l_0 > 0, \quad \forall r \in [R, \infty). \quad (4.30)$$

CAPÍTULO 4. LOS AGUJEROS DE GUSANOS SOPORTADOS POR  
LA ENERGÍA FANTASMA

---

La solución  $l(r)$  de este PVI está bien definida en  $[l_0, \infty)$  “o”  $(-\infty, -l_0]$ .  
En el apéndice (4.6) mostramos que las siguientes funciones:

$$\Lambda(l) = \frac{d\tilde{\Phi}}{dl}, \tilde{\rho}(l) = \rho(r(l)), \tilde{P}(l) = P(r(l)), \tilde{K}(l) = K(r(l)), \quad (4.31)$$

satisfacen las ecuaciones (4.1-4.5) en  $l \in [l_0, \infty)$  o  $[-\infty, l_0]$ . Además si la  
solución  $(m(r), \Phi(r), \tau(r), \rho(r), P(r))$  decae cuando  $r \rightarrow \infty$ , lo mismo sucede  
para  $(r(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l), \rho(l), P(l))$ .

Ahora bien tomando en cuenta EDE (4.15) e introduciendo las nuevas vari-  
ables  $(W(r), R(r))$  a través:

$$W(r) = \frac{2m(r)}{r}, \quad R(r) = \hat{k}\rho(r)c^2r^2, \quad (4.32)$$

el sistema (4.27-4.29) se reescribe como:

$$r \frac{dW(r)}{dr} = -W(r) + R(r), \quad (4.33)$$

$$r \frac{dR(r)}{dr} = -\frac{2\mu}{\lambda}R(r) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \frac{-\lambda R(r) + W(r)}{2(1 - W(r))}R(r), \quad (4.34)$$

$$r \frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{-\lambda R(r) + W(r)}{2(1 - W(r))}. \quad (4.35)$$

Queremos investigar si tal sistema admite soluciones que decaigan en  
el límite  $r \rightarrow \infty$ . Si tales soluciones existen, con la propiedad que hemos  
mencionado, entonces podemos construir

$$r^{-1}(l), K(l), \Lambda(l), \tau(l), P(l), \rho(l)$$

una solución de 4.1-4.5), que tiene la propiedad de decaer a cero cuando  $l \rightarrow \pm\infty$ .

Sea entonces el intervalo  $[R_0, \infty)$ , en donde  $R_0$  es suficientemente grande de manera que  $W(r) < 1$ ,  $\forall r \in [R_0, \infty)$ . En tal intervalo tomamos el *ansatz*:

$$W(r) = \frac{c}{r} + \frac{c_1}{r^{1+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0, \quad r \in [R_0, \infty), \quad (4.36)$$

con  $c, c_1$  constantes. Sustituyendo esta representación en (4.33,4.35), y a través de un poco de algebra obtenemos:

$$W(r) = \frac{c}{r} + \frac{c_1}{r^{\frac{2\mu}{\lambda}}} + O\left(\frac{1}{r^{\frac{2\mu}{\lambda}+1}}\right), \quad (4.37)$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{r^{2+\frac{2\mu}{\lambda}}} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (4.38)$$

$$\rho_0 = -\left(\frac{2\mu}{\lambda} - 1\right)c_1, \quad (4.39)$$

$$\Phi(r) = \Phi_0 - \frac{c}{2r} - \frac{c_1\lambda(1+2\mu-\lambda)}{4\mu} \frac{1}{r^{2\frac{\mu}{\lambda}}} + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (4.40)$$

De esta representación vemos que los parámetros  $(\lambda, \mu)$  determinan el comportamiento asintótico de las soluciones. Primero, sean elegidos  $(\lambda, \mu)$  tal que:

$$\frac{2\mu}{\lambda} = 1 + \epsilon, \quad \epsilon > 0. \quad (4.41)$$

Para esta elección de (4.37-4.40) tenemos:

$$W(r) = \frac{c}{r} + \frac{c_1}{r^{1+\epsilon}}, \quad (4.42)$$

$$\rho(r) = -\frac{\left(\frac{2\mu}{\lambda} - 1\right) c_1}{r^{2+\frac{2\mu}{\lambda}}} = -\frac{\epsilon c_1}{r^{3+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0, \quad (4.43)$$

$$\Phi(r) = \Phi_0 - \frac{c}{2r} - \frac{c_1 \lambda (1 + 2\mu - \lambda)}{4\mu} \frac{1}{r^{1+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0. \quad (4.44)$$

Ahora bien sean elegidos  $(\lambda, \mu)$  de tal manera que:

$$\frac{2\mu}{\lambda} = 1 - \epsilon, \quad \epsilon > 0. \quad (4.45)$$

En este caso tenemos:

$$W(r) = \frac{c}{r} + \frac{c_1}{r^{1-\epsilon}}, \quad \epsilon > 0, \quad (4.46)$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{r^{2+\frac{2\mu}{\lambda}}} = \frac{\epsilon c_1}{r^{3-\epsilon}}, \quad \epsilon > 0, \quad (4.47)$$

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{c}{2r} - \frac{c_1(1 + 2\mu - \lambda)}{4\mu} \frac{1}{r^{1-\epsilon}}, \quad \epsilon > 0. \quad (4.48)$$

Aun ambas familias de soluciones asintóticas (4.42-4.44) y (4.46-4.48) decaen asintóticamente, hay una diferencia importante. La primera familia tiene masa ADM finita, mientras para la segunda familia tiene la masa ADM divergente. Como hemos visto en el capítulo anterior la masa-energía de Misner-Sharp  $M(r)$  está dada por

$$M(r) = \int_R^r \rho(r') r'^2 dr' = -\left(\frac{2M}{\lambda} - 1\right) c_1 \int_R^r \frac{r'^2}{r'^{2+\frac{2\mu}{\lambda}}} dr', \quad (4.49)$$

Entonces si  $\frac{2\mu}{\lambda} = 1 + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  se sigue que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \hat{c} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

implicando que la masa  $M_{ADM}$  es finita. Por otro lado para el caso donde  $\frac{2\mu}{\lambda} = 1 - \epsilon$ , vemos que  $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) \rightarrow \infty$  implicando que estas soluciones no tienen  $M_{ADM}$  finita, entonces no son asintóticamente planas.

En resumen, hemos establecido que al menos para los valores de los parámetros  $(\lambda, \mu)$ , tales que  $\frac{2\mu}{\lambda} = 1 + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , existen soluciones del sistema (4.33-4.35) que representan soluciones asintóticamente planas. Esta conclusión en combinación con la existencia de soluciones locales del sistema (4.33-4.35), nos lleva a la siguiente pregunta:

¿Es posible que las soluciones locales del PVI (4.16-4.22) se extiendan de tal manera que se unan con las soluciones asintóticamente planas?.

Desafortunadamente esta es una pregunta difícil de contestar analíticamente, pero a través de simulaciones numéricas se puede contestar. A continuación discutiremos un procedimiento, que transforma al sistema (4.16-4.22) a una forma lista para un análisis numérico.

Primero cambiamos a la variable dependiente vía una inversión:

$$r(l) \rightarrow \hat{r}(l) = \frac{1}{r(l)},$$

implicando que (4.16-4.22) se transforma a:

$$\frac{d\hat{r}(l)}{dl} = -\frac{1}{2}K(l)\hat{r}(l), \quad (4.50)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \hat{r}^2(l) - \hat{k}\rho(l)c^2, \quad (4.51)$$

$$\frac{d\Lambda(l)}{dl} = -K(l)\Lambda(l) - \Lambda^2(l) + (1 - \lambda + 2\mu)\frac{\hat{k}\rho(l)c^2}{2}, \quad (4.52)$$

$$\frac{d\rho(l)}{dl} = \rho(l) \left[ \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\Lambda(l) - \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)K(l) \right], \quad (4.53)$$

$$-\hat{r}^2(l) + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\rho(l)c^2\lambda + \Lambda(l)K(l) = 0. \quad (4.54)$$

$$\hat{r}(0) = \left( \frac{4\pi}{A(0)} \right)^{1/2}, \quad K(0) = 0, \quad \Lambda(0), \quad \rho(0) = \frac{4\pi}{\lambda\hat{k}c^2A(0)}. \quad (4.55)$$

Como segundo paso definimos una nueva coordenada  $x$  a través de

$$l(x) = \frac{r_0x}{1-x^2}, \quad \frac{dl(x)}{dx} = \frac{r_0(1+x^2)}{(1-x^2)^2}, \quad x \in (-1, 1), \quad r_0 = r(0). \quad (4.56)$$

que mapea  $l \rightarrow \pm\infty$  dentro de  $x \rightarrow \pm 1$ ,  $l = 0$  sobre  $x = 0$ . Entonces el sistema (4.16-4.19) se transforma como:

$$(1-x^2)^2 \frac{d\hat{r}(x)}{dx} = -\frac{r_0}{2}(1+x^2)K(x)\hat{r}(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (4.57)$$

$$(1-x^2)^2 \frac{dK(x)}{dx} = r_0(1+x^2) \left[ -\frac{3}{4}K^2(x) + \hat{r}^2(x) - \hat{k}\rho(x)c^2 \right], \quad (4.58)$$

$$(1-x^2)^2 \frac{d\Lambda(x)}{dx} = r_0(1+x^2) \left[ -K(x)\Lambda(x) - \Lambda^2(x) + \frac{\hat{k}\rho(x)c^2}{2}(1-\lambda+2\mu) \right], \quad (4.59)$$

$$(1-x^2)^2 \frac{d\rho(x)c^2}{dx} = r_0(1+x^2) \left[ \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) \Lambda(x) - \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) K(x) \right] \rho(x)c^2, \quad (4.60)$$

$$\hat{r}(0) = \left( \frac{4\pi}{A(0)} \right)^{1/2}, \quad K(0) = 0, \quad \Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \rho(0) = \frac{4\pi}{\lambda \hat{k} c^2 A(0)}. \quad (4.61)$$

En esta forma el sistema esta listo para integrarse numéricamente. La idea ahora es simple se gráficán las soluciones de este sistema para valores distintos de  $(\lambda, \mu)$  y  $(\hat{r}(0), \Lambda_0)$ . A través de simulaciones numéricas mostramos que existe una cuatro paramétrica familia de agujeros de gusano esféricos y asintóticamente planos. Esta familia es parametrizada por el área de la garganta  $A(0)$ , el gradiente del factor *red shift* evaluado sobre la garganta  $\Lambda_0$ , así como tambien por  $(\lambda, \mu)$ , los cuales están sujetos a la restricción  $\frac{2\mu}{\lambda} = 1 + \epsilon$ . Para más detalle -véase [23]-. Con la combinado de estos resultados numéricos con el análisis analítico se logra mostrar la existencia de soluciones globales que representan a los agujeros de gusano, asintóticamente plano.

## 4.2 Agujeros de gusano soportadas por K-esencia y Klein-Gordon

Hasta este momento, hemos asumido que  $(\rho c^2, \tau, P)$  están restringidas por las EDE descritas por (4.15), pero no hemos realizado ningún modelo concreto de materia exótica, del cual resulten estas EDE. En esta sección discutimos una especificación de las EDE (4.15) a través de la combinación de los campos escalares sin masa de K-esencia y Klein Gordon.

CAPÍTULO 4. LOS AGUJEROS DE GUSANOS SOPORTADOS POR LA ENERGÍA FANTASMA

---

Recordemos que la sección (2.4) hemos visto que la teoría de K-esencia sin masa involucra un campo escalar real  $\phi$ , cuyo tensor de energía momento es

$$T_{\mu\nu} = -\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^a\phi\nabla_a\phi = -\left[\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^a\phi\nabla_a\phi\right], \quad (4.62)$$

mientras la restricción  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  demanda que  $\phi$  satisfaga

$$\nabla^\mu\nabla_\mu\phi = 0. \quad (4.63)$$

Consideramos una configuración que consiste de un campo de K-esencia sin masa  $\phi$ , y un campo de Klein-Gordon real  $\hat{\phi}$  sin masa, en donde ambos campos  $(\phi, \hat{\phi})$  están acoplados minimamente con la gravedad. Para tal sistema las ecuaciones de Einstein son:

$$G_{\mu\nu} = \hat{k}(T_{\mu\nu} + \hat{T}_{\mu\nu}), \quad (4.64)$$

$$T_{\mu\nu} = -\left[\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^a\phi\nabla_a\phi\right], \quad (4.65)$$

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \nabla_\mu\hat{\phi}\nabla_\nu\hat{\phi} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^a\hat{\phi}\nabla_a\hat{\phi}, \quad (4.66)$$

$$\nabla^a\nabla_a\phi = \nabla^a\nabla_a\hat{\phi} = 0. \quad (4.67)$$

Nuestro enfoque es estudiar si este sistema admite agujeros de gusano esféricos, así como son sus propiedades. Asumimos entonces una carta local  $(t, l, \theta, \phi)$ , en donde  $\mathbf{g}$  toma la forma:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(l)}dt^2 + dl^2 + r^2(l)d\Omega^2, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (4.68)$$

$$\frac{dr(l)}{dl} = 0, \frac{dr^2(l)}{dl^2} > 0, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (4.69)$$

Con respecto a la base ortonormal que portan los observadores de Killing:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{e^\phi} \frac{\partial}{\partial t}, \quad X = \frac{\partial}{\partial l}, \quad Y = \frac{1}{r(l)} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad Z = \frac{1}{r(l) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (4.70)$$

se tiene:

$$\rho(l)c^2 = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial l} \right)^2, \quad (4.71)$$

$$-\tau(l) = T_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial l} \right)^2, \quad (4.72)$$

$$P(l) = T_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu = T_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu = - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial l} \right)^2 \right], \quad (4.73)$$

De esta representación se ve que  $(\rho c^2, \tau, P)$ , los cuales son medidos por los observadores de Killing satisfacen:

$$\tau = \lambda \rho c^2, \quad P = \mu \rho c^2 = \frac{1-\lambda}{2} \rho c^2, \quad \lambda = -1. \quad (4.74)$$

y  $1 - \lambda + 2\mu = 0$ . Además los campos  $\phi, \hat{\phi}$  están sujetos a:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{-\mathbf{g}}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \sqrt{-\mathbf{g}} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right] = 0, \quad (4.75)$$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{-\mathbf{g}}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \sqrt{-\mathbf{g}} g^{\mu\nu} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^\nu} \right] = 0. \quad (4.76)$$

Debido a la estaticidad y la simetría esférica estas ecuaciones en la norma (4.69) se reducen a:

$$\frac{d}{dl} \left( e^{\Phi(l)} r^2(l) \frac{d\phi(l)}{dl} \right) = 0, \quad \frac{d}{dl} \left( e^{\Phi(l)} r^2(l) \frac{d\hat{\phi}(l)}{dl} \right) = 0, \quad (4.77)$$

y mientras las ecuaciones (4.16-4.20) toman la forma:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{1}{2} K(l) r(l), \quad (4.78)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4} K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k} \rho c^2, \quad (4.79)$$

$$\frac{d\Lambda(l)}{dl} = -\Lambda^2(l) - \Lambda(l) K(l), \quad (4.80)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k} \tau(l) + \Lambda(l) K(l) = 0, \quad (4.81)$$

$$\frac{d\tau(l)}{dl} = (\rho(l) c^2 - \tau(l)) \Lambda(l) - (\tau(l) + P(l)) K(l) \quad (4.82)$$

$$r(0) = \sqrt{\frac{A(0)}{4\pi}}, \quad K(0) = 0, \quad \Lambda(0), \quad \lambda \rho(0) = \frac{1}{\hat{k} c^2 r^2(0)} > 0, \quad (4.83)$$

$$(\lambda - 1) \rho c^2 > 0. \quad (4.84)$$

en donde  $(\rho c^2, \tau(l), P(l))$  están dados por (4.71-4.73). Nuestro problema es investigar si tal sistema admite soluciones que representen agujeros de gusano.

### 4.3 Una nueva norma

Aunque hasta ahora la coordenada  $l$  fue muy útil, desafortunadamente no hemos podido obtener las soluciones de los PVI en términos de funciones

elementales, incluso en el caso más sencillo como lo son los agujeros de gusano de cuasi-Schwarzschild. Debido a este problema, en esta sección introducimos una nueva coordenada, la cual hará más fácil la integración del PVI. Para ello sea  $x = x(l)$ ,  $l \in (-\epsilon, \epsilon)$  una función suave al menos  $C^2$ , tal que:

$$\frac{dx(l)}{dl} \neq 0, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (4.85)$$

Eliminando en (4.68) la coordenada  $l$  obtenemos:

$$\mathbf{g} = -e^{2\tilde{\Phi}(x)} dt^2 + \left(\frac{dl}{dx}\right)^2 dx^2 + \tilde{r}^2(x)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad x \in (-a, a), \quad (4.86)$$

en donde<sup>3</sup>

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(l(x)), \quad \tilde{r}(x) = r(l(x)).$$

Reescribimos (4.86) en la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -e^{2\tilde{\Phi}} dt^2 + \left(\frac{dl}{dx}\right)^2 [dx^2 + \tilde{r}^2(x) \frac{1}{\left(\frac{dl}{dx}\right)^2} d\Omega^2] = \\ &= -e^{2\tilde{\Phi}(x)} dt^2 + A^2(x)[dx^2 + B^2(x)d\Omega^2], \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$A^2(x) = \left(\frac{dl}{dx}\right)^2, \quad B^2(x) = \tilde{r}^2(x) \frac{1}{\left(\frac{dl}{dx}\right)^2}. \quad (4.88)$$

Debido a la libertad que tenemos al elegir la función  $x(l)$ , en lo sucesivo imponemos la restricción:

---

<sup>3</sup>El intervalo  $(-a, a)$  es la imagen de  $(-\epsilon, \epsilon)$  bajo la función  $x(l)$ .

$$\left(\frac{dl(x)}{dx}\right)^2 = e^{-2\tilde{\Phi}(x)} \Rightarrow e^{\tilde{\Phi}(x)} \frac{dl(x)}{dx} = \pm 1, \quad (4.89)$$

y elegimos en lo subsecuente el signo '+', es decir, imponemos:

$$e^{\tilde{\Phi}(x)} \frac{dl(x)}{dx} = 1. \quad (4.90)$$

En tal norma (4.87) toma la forma:

$$\mathbf{g} = -e^{2\tilde{\Phi}} dt^2 + e^{-2\tilde{\Phi}} [dx^2 + \tilde{r}^2(x) e^{2\tilde{\Phi}} d\Omega^2], \quad x \in (-a, a), \quad (4.91)$$

mientras el área  $A(x)$  de las orbitas de  $SO(3)$  es:

$$A(x) = 4\pi \tilde{r}^2(x), \quad x \in (-a, a), \quad (4.92)$$

y la traza de la curvatura extrínseca  $K(x)$  es -véase su definición en el apartado de notación y convenciones-:

$$\tilde{K}(x) = 2 \frac{e^{\tilde{\Phi}(x)}}{\tilde{r}(x)} \frac{d\tilde{r}(x)}{dx}, \quad (4.93)$$

mientras que por definición

$$\frac{d}{dl} = e^{\tilde{\Phi}(x)} \frac{d}{dx}. \quad (4.94)$$

A través de un calculo largo, las ecuaciones (4.78-4.82) en la nueva norma toman la forma:

$$\frac{d}{dx} \left[ e^{2\Phi(x)} r^2(x) \frac{d\Phi(x)}{dx} \right] = \frac{\hat{k}}{2} [\rho(x)c^2 - \tau(x) + 2P(x)] r^2(x), \quad (4.95)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ e^{2\Phi} r(x) \frac{dr(x)}{dx} \right] = 1 - \frac{\hat{k}}{2} [\tau(x) + \rho(x)c^2] r^2(x) \quad (4.96)$$

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = [\rho(x)c^2 - \tau(x)] \frac{d\Phi(x)}{dx} - [\tau(x) + P(x)] \frac{2}{r(x)} \frac{dr}{dx} \quad (4.97)$$

$$-\frac{1}{r^2(x)} + \frac{e^{2\Phi}}{r^2(x)} \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 + \hat{k}\tau(x) + \frac{2e^{2\Phi}}{r(x)} \frac{d\Phi}{dx} \frac{dr}{dx} = 0, \quad (4.98)$$

mientras las condiciones iniciales son:

$$\left. \frac{dr(x)}{dx} \right|_{x_0} = 0, \quad \hat{k}\tau(x_0) = \frac{1}{r^2(x_0)}, \quad \left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_{x_0} = \Lambda_0, \quad (4.99)$$

en donde por simplicidad en lo sucesivo escribimos  $\Phi(x), r(x)$  en lugar de  $\tilde{\Phi}(x), \tilde{r}(x)$ . Como una primera aplicación de esta nueva norma, en la siguiente sección integraremos este sistema para el caso donde:

$$\rho(l)c^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial l} \right)^2, \quad (4.100)$$

$$\tau(l) = - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial l} \right)^2 \right], \quad (4.101)$$

$$P(l) = - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial l} \right)^2 \right], \quad (4.102)$$

y mostramos que este sistema admite una familia bi-paramétrica de soluciones que representan agujeros de gusano.

## 4.4 Una familia bi-paramétrica de agujeros de gusano

Cuando  $(\rho c^2, \tau, P)$  están debidas a la materia exótica generada por la combinación de los campos escalares sin masa de K-esencia y Klein-Gordo se tiene:

$$\rho(x)c^2 - \tau(x) + 2P(x) = 0,$$

$$\tau(x) + \rho(x)c^2 = 0.$$

Entonces el sistema (4.95-4.98) se reduce a:

$$\frac{d}{dx} \left[ e^{2\Phi(x)} r^2(x) \frac{d\Phi(x)}{dx} \right] = 0, \quad (4.103)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ e^{2\Phi} r(x) \frac{dr(x)}{dx} \right] = 1, \quad (4.104)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{b_1}{r^2(x)e^{2\Phi(x)}}, \quad \frac{d\hat{\phi}}{dx} = \frac{a_1}{r^2(x)e^{2\Phi(x)}}, \quad (4.105)$$

$$\hat{k} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \hat{k} \left( \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right)^2 = -\frac{2}{r^2(x)} \left[ \frac{d\Phi}{dx} \frac{dr^2}{dx} + \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 - e^{-2\Phi(x)} \right] \quad (4.106)$$

Sumado (4.103,4.104) se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2} [e^{2\Phi(x)} r^2(x)] = 2, \quad (4.107)$$

por tanto,

$$e^{2\Phi(x)}r^2(x) = x^2 + Bx + C,$$

en donde  $(B, C)$  son constantes de integración. Debido a que la transformación:

$$x \rightarrow \tilde{x} = x + a \tag{4.108}$$

deja invariante a

$$\mathbf{g} = -e^{2\tilde{\Phi}} dt^2 + e^{-2\tilde{\Phi}} [dx^2 + \tilde{r}^2(x)e^{2\tilde{\Phi}} d\Omega^2], \quad x \in (-a, a),$$

se puede elegir de tal manera que:

$$e^{2\Phi(x)}r^2(x) = x^2 + C, \tag{4.109}$$

y de esta forma se ve que el signo de  $C$  juega un papel importante. Si asumimos  $C = -r_0^2$  entonces:

$$e^{2\Phi(x)}r^2(x) = x^2 - r_0^2, \tag{4.110}$$

cuando  $x^2 = r_0^2$  se tiene  $e^{2\Phi(x_0^2)}r^2(x_0^2) = 0$ , lo cual implica:

- $e^{2\Phi(x_0^2)} = 0$ , y  $r^2(x_0^2) = 0$ .
- $e^{2\Phi(x_0^2)} = 0$ , y  $r^2(x_0^2) \neq 0$ .

CAPÍTULO 4. LOS AGUJEROS DE GUSANOS SOPORTADOS POR LA ENERGÍA FANTASMA

---

- $e^{2\Phi(x_0^2)} \neq 0$ , y  $r^2(x_0^2) = 0$ .

Ninguna de estas posibilidades son aceptable, así que en lo sucesivo elegimos  $C = r_0^2$ :

$$e^{2\Phi(x)}r^2(x) = x^2 + r_0^2, \quad r_0 > 0. \quad (4.111)$$

Por tal elección la integración de las ecuaciones restantes nos llevan a:

$$\Phi(x) = \frac{2x_0}{r_0} \tan^{-1} \left( \frac{x}{r_0} \right) - \frac{x_0\pi}{2r_0}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (4.112)$$

$$\phi(x) = \frac{b_1}{r_0} \tan^{-1} \left( \frac{x}{r_0} \right) - \frac{b_1\pi}{2r_0}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (4.113)$$

$$\hat{\phi}(x) = \frac{a_1}{r_0} \tan^{-1} \left( \frac{x}{r_0} \right) - \frac{a_1\pi}{2r_0}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (4.114)$$

$$b_1^2 - a_1^2 = \frac{2}{k}(x_0^2 + r_0^2), \quad (4.115)$$

donde hemos fijamos las constantes de integración requiriendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi = \lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{\phi} = 0.$$

La métrica del espaciotiempo se lee:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(x)}dt^2 + e^{-2\Phi(x)}[dx^2 + (x^2 + r_0^2)d\Omega^2] \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (4.116)$$

la cual se ve fácilmente que describe un agujero de gusano asintóticamente plano, una de las regiones asintóticas corresponde a  $x \rightarrow \infty$ , mientras la otra

a  $x \rightarrow -\infty$ . Las dos regiones asintóticas están conectadas vía la garganta de área  $A(x_0)$  localizada en  $x = x_0$ .

Nótese que al tomar  $a_1 = 0$  este agujero de gusano se reduce a una solución que describe un agujero de gusano. Por primera vez, esta solución fue descubierta por H. Ellis -véase [5].

. Cuando nosotros asumimos  $b_1 = 0$ , entonces (4.115) demanda  $a_1 = x_0 = r_0 = 0$ , y la solución se colapsa a un espaciotiempo plano con un campo escalar Klein-Gordon trivial. El cual es un resultado esperado, ya que el tensor de energía momento asociado al campo escalar de Klein-Gordon tiene la propiedad de cumplir la condición de energía dominante. Además combinado esta propiedad con el resultado de Gibbons, el cual es que el sistema de Einstein y Klein-Gordon admiten soluciones estáticas no triviales, es decir, los solitones no singulares y asintóticamente planos.

A veces es conveniente representar la métrica  $\mathbf{g}$  en (4.116) en una nueva carta en donde la métrica inducida  $\gamma$  sobre las hipersuperficies espaciales  $t = \text{cte}$  posee la representación:

$$\gamma = \Omega^2(x, y, z)[dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (4.117)$$

es decir,  $\gamma$  es conformalmente plana. Para construir tal carta, sea  $R = R(x)$  una función suave tal que  $\frac{dR(x)}{dx} \neq 0$  en algún intervalo  $x \in (a, b)$ . Eliminando  $x$  en términos de  $R$  obtenemos:

$$\gamma = e^{-2\Phi(x)}[dx^2 + (x^2 + r_0^2)d\Omega^2 d\Omega^2] = \quad (4.118)$$

$$= e^{-2\Phi(x)} \left( \frac{dx(R)}{dR} \right)^2 \left[ dR^2 + \frac{x^2 + r_0^2}{\left( \frac{dx(R)}{dR} \right)^2} d\Omega^2 \right]. \quad (4.119)$$

Elegimos  $x = x(R)$  de tal manera que satisfice:

$$x^2 + x_0^2 = R^2 \left( \frac{dx}{dR} \right)^2, \quad (4.120)$$

cuya solución es:

$$R(x) = \pm(x + \sqrt{x^2 + r_0^2}), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (4.121)$$

Tomando el signo '+' y realizando la transformación y através de una inversión obtenemos:

$$x(R) = \frac{R^2 - r_0^2}{2R}, \quad R \in (0, \infty), \quad (4.122)$$

mientras (4.118) toma la forma

$$\gamma = e^{-2\Phi(R)} \frac{(R^2 + r_0^2)^2}{4R^4} [dR^2 + R^2 d\Omega^2], \quad (4.123)$$

la cual es la forma que estábamos buscando. A través de un rescalamiento de la coordenada  $R$  obtenemos la métrica  $\mathbf{g}$  de (4.116) se transforma a:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(R)} dt^2 + e^{-2\Phi(R)} \frac{(R^2 + r_0^2)^2}{R^4} [dR^2 + R^2 d\Omega^2], \quad R \in (0, \infty), \quad (4.124)$$

en donde  $\Phi(x), \phi(x), \hat{\phi}(x)$  toman la forma:

$$\begin{aligned} \Phi(R) &= \frac{2x_0}{r_0} \tan^{-1} \left( \frac{R^2 - r_0^2}{2Rr_0} \right) - \frac{x_0\pi}{2r_0} \\ &= \frac{2x_0}{r_0} \tan^{-1} \left( \frac{R}{r_0} \right) - \frac{x_0\pi}{2r_0} \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} \phi(R) &= \frac{b_1}{r_0} \tan^{-1} \left( \frac{R^2 - r_0^2}{2Rr_0} \right) - \frac{b_1\pi}{2r_0} \\ &= \frac{b_1}{r_0} \tan^{-1} \left( \frac{R}{r_0} \right) - \frac{b_1\pi}{2r_0} \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(R) &= \frac{a_1}{r_0} \tan^{-1} \left( \frac{R^2 - r_0^2}{2Rr_0} \right) - \frac{a_1\pi}{2r_0} \\ &= \frac{a_1}{r_0} \tan^{-1} \left( \frac{R}{r_0} \right) - \frac{a_1\pi}{2r_0} \end{aligned} \quad (4.127)$$

Estas identidades provienen como consecuencia que:

$$R(x) = x + \sqrt{x^2 + r_0^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (4.128)$$

es un difeomorfismo con inversa:

$$x(R) = \frac{R^2 - r_0^2}{2R}. \quad (4.129)$$

El siguiente diagrama establece estas identidades.

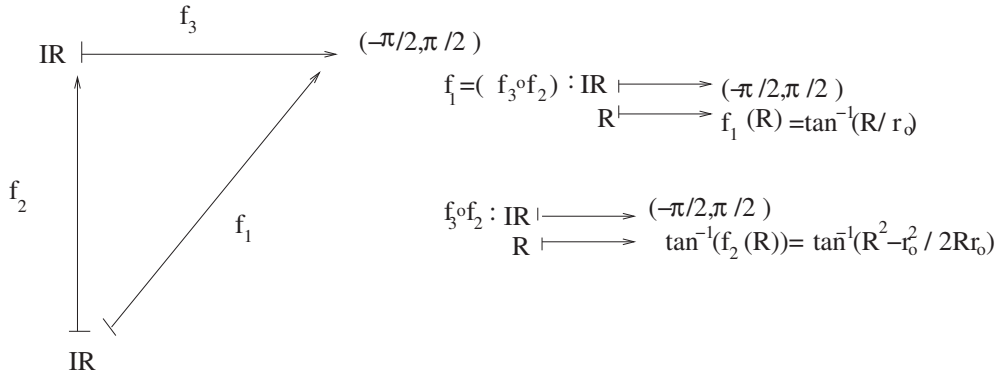


Figura 4.1: Este diagrama establece las identidades (4.125-4.127).

## 4.5 Apéndice 4A: Ecuaciones de Einstein en la nueva norma

En este apéndice daremos algunos detalles de la derivación del sistema (4.95-4.98), para ello partimos del sistema:

$$\frac{dr(l)}{dl} = \frac{1}{2}K(l)r(l), \quad (4.130)$$

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{3}{4}K^2(l) + \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k}\rho c^2, \quad (4.131)$$

$$\frac{d\Lambda(l)}{dl} = -\Lambda^2(l) - \Lambda(l)K(l), \quad (4.132)$$

$$-\frac{1}{r^2(l)} + \frac{K^2(l)}{4} + \hat{k}\tau(l) + \Lambda(l)K(l) = 0, \quad (4.133)$$

Sea  $x = x(l)$ ,  $l \in (-\epsilon, \epsilon)$  una función suave al menos  $C^2$ , tal que:

$$\frac{dx(l)}{dl} = \pm e^{\hat{\Phi}(l)} \neq 0, \quad l \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (4.134)$$

Entonces  $l(x)$  esta bien definida, y además:

$$\frac{dl(x)}{dx} = \pm e^{-\Phi(x)}. \quad (4.135)$$

Consideremos las siguientes composiciones de funciones:

$$\tilde{r}(x) = r(l(x)), \quad \tilde{\rho}(x) = \rho(l(x)), \quad \tilde{\tau}(x) = \tau(l(x)), \quad \tilde{\Phi} = \Phi(l(x)).$$

Mientras que

$$\tilde{\Lambda}(x) = \frac{d\tilde{\Phi}(x)}{dx} = \Lambda(l(x))e^{-\tilde{\Phi}(x)}, \quad (4.136)$$

$$\tilde{K}(x) = K(l(x)) = e^{\tilde{\Phi}(x)} \frac{2}{\tilde{r}(x)} \frac{d\tilde{r}(x)}{dx}. \quad (4.137)$$

Se sigue que

$$\frac{d\tilde{r}(x)}{dx} = \frac{dr(l(x))}{dl} \frac{dl(x)}{dx} = \frac{2}{r(l(x))} \frac{dr(l(x))}{dl} \frac{dl(x)}{dx} \frac{r(l(x))}{2} = \frac{2}{\tilde{r}(x)} \frac{d\tilde{r}(x)}{dx} \frac{\tilde{r}(x)}{2},$$

entonces utilizando (4.137) se ve fácilmente que  $\tilde{r}(x)$  satisface:

$$\frac{d\tilde{r}(x)}{dx} = \frac{1}{2} e^{-\tilde{\Phi}(x)} \tilde{K}(x) \tilde{r}(x).$$

Ahora vayamos a la constricción hamiltoniana:

$$\tilde{K}(x) \tilde{\Lambda}(x) = \frac{2}{\tilde{r}(x)} e^{\tilde{\Phi}(x)} \frac{d\tilde{r}(x)}{dx} \frac{d\tilde{\Phi}(x)}{dx} = \frac{2}{r(l(x))} e^{\Phi(l(x))} \frac{dr(l(x))}{dx} \frac{d\Phi(l(x))}{dx} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2e^{\Phi(l(x))}}{r(l(x))} \frac{dr(l(x))}{dl} \frac{dl(x)}{dx} \frac{d\Phi(l(x))}{dl} \frac{dl(x)}{dx} \\
 &= \frac{2}{r(l(x))} \frac{dr(l(x))}{dl} \frac{d\Phi(l(x))}{dl} e^{\Phi(l(x))} \left( \frac{dl(x)}{dx} \right)^2 \\
 &= K(l(x))\Lambda(l(x))e^{\Phi(l(x))} \left( \frac{dl(x)}{dx} \right)^2,
 \end{aligned}$$

de la constricción hamiltoniana tenemos:

$$\Lambda(l)K(l) = \frac{1}{r^2(l)} - \frac{K^2(l)}{4} - \hat{k}\tau(l),$$

sustituyendo esta en la expresión anterior tenemos:

$$\tilde{K}(x)\tilde{\Lambda}(x) = \left[ \frac{1}{r^2(l(x))} - \frac{K^2(l(x))}{4} - \hat{k}\tau(l(x)) \right] e^{\Phi(l(x))} \left( \frac{dl(x)}{dx} \right)^2.$$

Tomando en cuenta (4.135) la expresión anterior se reduce a:

$$\tilde{K}(x)\tilde{\Lambda}(x) = \left[ \frac{1}{\tilde{r}^2(x)} - \frac{\tilde{K}^2(x)}{4} - \hat{k}\tilde{\tau}(x) \right] e^{-\tilde{\Phi}(x)}, \quad (4.138)$$

la cual es la constricción hamiltoniana en la nueva carta, o lo que es igual:

$$-\frac{1}{r^2(x)} + \frac{e^{2\Phi}}{r^2(x)} \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 + \hat{k}\tau(x) + \frac{2e^{2\Phi}}{r(x)} \frac{d\Phi}{dx} \frac{dr}{dx} = 0.$$

Ahora vamos a obtener la ecuación que satisface  $\tilde{K}(x)$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{K}(x)}{dx} &= \frac{dK(l(x))}{dl} \frac{dl(x)}{dx} \\
 &= \left[ -\frac{3}{4}K^2(l(x)) + \frac{1}{r^2(l(x))} - \hat{k}\rho(l(x))c^2 \right] \frac{dl(x)}{dx}
 \end{aligned}$$

$$= \left[ -\frac{3}{4}\tilde{K}^2(x) + \frac{1}{\tilde{r}^2(x)} - \hat{k}\tilde{\rho}(x)c^2 \right] e^{-\tilde{\Phi}(x)},$$

se sigue

$$\frac{d}{dx} \left( e^{\tilde{\Phi}(x)} \frac{2}{\tilde{r}(x)} \frac{d\tilde{r}(x)}{dx} \right) = \left[ -\frac{3}{4} \left( e^{\tilde{\Phi}} \frac{2}{\tilde{r}(x)} \frac{d\tilde{r}(x)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{\tilde{r}^2(x)} - \hat{k}\tilde{\rho}(x)c^2 \right] e^{-\tilde{\Phi}(x)},$$

utilizando la contricción en la nueva coordenadas y después de un poco de algebra llegamos:

$$\frac{d}{dx} \left[ e^{2\tilde{\Phi}} r(x) \frac{dr(x)}{dx} \right] = 1 - \frac{\hat{k}}{2} [\tau(x) + \rho(x)c^2] r^2(x). \quad (4.139)$$

De manera análoga se pueden obtener las otras ecuaciones.

## 4.6 Apéndice 4B: La equivalencia del formalismo de Morris-Thorne con el formalismo de este trabajo

En este apéndice mostramos la siguiente propiedad. Sea  $m(r)$ ,  $\Phi(r)$ ,  $\tau(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $P(r)$  satisfacen en  $[R, \infty)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dm(r)}{dr} &= \frac{\hat{k}c^2}{2} r^2 \hat{\rho}(r), \quad r \in (r_0, \infty), \\ \frac{d\tau(r)}{dr} &= [\rho(r)c^2 - \tau(r)] \frac{d\Phi(r)}{dr} \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$-\frac{2[P(r) + \tau(r)]}{r}, \quad r \in (r_0, \infty), \quad (4.141)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{-\hat{k}\tau(r)r^3 + 2m(r)}{2r(r - 2m(r))}, \quad r \in (r_0, \infty). \quad (4.142)$$

y sea  $1 - \frac{2m(r)}{r} \neq 0$  en  $r \in [R, \infty)$ . Dichas funciones definen:

$$(r(l), \Lambda(l), K(l), \tau(l), \rho(l), P(l)), \quad l \in [l_0, \infty)$$

o  $l \in (-\infty, l_0]$ , las cuales satisfacen las ecuaciones (4.1-4.5). Para mostrar esta propiedad consideremos el PVI:

$$\frac{dl(r)}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}, \quad l(R) = l_0, \quad r \in [R, \infty). \quad (4.143)$$

Por el hecho que  $1 - \frac{2m(r)}{r} \neq 0, \forall r \in [R, \infty)$ , las soluciones  $l_1(r)$  y  $l_2(r)$  son estrictamente monotonas en  $[R, \infty)$ , además sus inversas  $r(l_1), l_1 \in [l_0, \infty)$ , y  $r(l_2), l_2 \in (-\infty, l_0]$  respectivamente. Con la de estas funciones definimos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(l_1) &= \Phi(r(l_1)), \quad \tilde{K}(l_1) = K(r(l_1)), \\ \tilde{\rho}(l_1) &= \rho(r(l_1)), \quad \tilde{\tau}(l_1) = \tau(r(l_1)), \quad \tilde{P}(l_1) = P(r(l_1)). \end{aligned} \quad (4.144)$$

*CAPÍTULO 4. LOS AGUJEROS DE GUSANOS SOPORTADOS POR  
LA ENERGÍA FANTASMA*

---

## Capítulo 5

# Conclusiones y problemas abiertos

En esta tesis se contribuyo con una nueva manera de construir espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  que representan a los agujeros de gusanos estáticos, con simetría esférica y asintóticamente planos. A través de esta nueva construcción hemos mostrado en los capítulos (3) y (4) la existencia de espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  que representan a los agujeros de gusano, y los resultados de dichos capítulos están de acuerdo con la plétora de soluciones de agujeros de gusano esféricos discutidas en la literatura -véase [14, 10, 11]-.

Hemos mostrado en el capítulo (3), que existen una bi-paramétrica-infinita familia de espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  esféricos y asintóticamente planos, los cuales representan agujeros de gusano. Pero como ya comentamos la presencia de dos funciones libre, que caracterizan a tales espaciotiempos no es aceptable

físicamente. Pues es de esperarse que si un agujero de gusano esférico forma parte de este universo eventualmente, este sería de dimensiones finitas. Los resultados del capítulo (4) manifiestan tal expectativa. A pesar de que en la sección (4.2) establecimos la existencia global de los agujeros de gusano esféricos que se caracterizaban con dos parámetros, debemos remarcar que esto sólo fue para el caso particular donde  $\tau = \lambda \rho c^2$ ,  $P = \mu \rho c^2$ . Sin embargo el método que fue empleado en este capítulo, en principio es extendible para otras EDE. Nuestra metodología para construir tales soluciones posee la ventaja de adaptarse fácilmente a simulaciones numéricas. Ahora bien, el modelo de materia exótica a través de los campos fundamentales como K-esencia, y en particular la norma de la sección (4.3) ofrecen una vía para mostrar la existencia de los agujeros de gusano soportados por K-esencia no lineal.

A pesar de que en este trabajo nos hemos enfocado solamente en la construcción de espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  que representan a los agujeros de gusano con simetría esférica, es interesante desde el punto de vista matemático preguntarnos si las ecuaciones de Einstein permiten soluciones que representen agujeros de gusano que no tienen simetría esférica.

Una extensión natural de la definición de que  $(M, \mathbf{g})$  represente un agujero de gusano estático sería la siguiente:

*Decimos que un espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  representa una agujero de gusano estático si:*

- *$(M, \mathbf{g})$  es globalmente estático.*

- Cada hipersuperficie espacial  $\Sigma$ , la cual es ortogonal al campo vectorial de Killing temporal  $\xi$ , es topológicamente  $\mathbb{R} \times S^2$ , y además sus dos regiones son asintóticamente Euclidianas.
- Existe una garganta de área propia finita.
- $(M, \mathbf{g})$  no posee singularidades de curvatura.

La pregunta natural es si existen métricas  $\mathbf{g}$  que satisfagan  $G(\mathbf{g}) = \hat{k}T$ , y que además  $(M, \mathbf{g})$  cumpla con las restricciones anteriores. En la definición anterior un punto delicado es la identificación y descripción de la garganta. En el trabajo actual debido a la simetría esférica, la garganta la hemos identificado como una 2-esfera asociada a una órbita de  $SO(3)$ , cuya área  $A$  tenía un mínimo global. En ausencia de la simetría esférica, la garganta denotada por  $S$  posea propiedades muy parecidas al caso de un agujero de gusano esférico. Por lo que es natural dar la siguiente definición para la garganta:

*La garganta, matemáticamente se considera como una superficie espacial  $S$  de dimensión dos, compacta, sin frontera, estable, mínima y embebida sobre cada hipersuperficie espacial  $\Sigma$ .*

Con la idea de copiar las propiedades que la garganta posee en el caso de simetría esférica, requerimos que  $S$  sea compacta, sin frontera. Mientras que al pedir que  $S$  sea estable y mínima, se garantiza que las “variaciones locales” de  $\Sigma$  sean nuevas hipersuperficies, tales que sus áreas sean mayores que el área de  $\Sigma$ . Matemáticamente la “minimalidad” de  $S$  está expresada por la siguiente condición: *la traza de la curvatura extrínseca  $K$  de  $S$  satis-*

face  $K|_S = 0$ , mientras la “estabilidad” que cada “variación normal” de  $S$  satisfice:

$$\frac{d^2 A}{dt^2}|_0 = \int_S [|\nabla\Phi|^2 - \Phi^2(K^{ij}K_{ij} + R_{icci}(n, n))] ds > 0. \quad (5.1)$$

en donde  $K_{ij}$  son las componentes de la curvatura extrínseca de  $S$ ,  $n$  es la normal de  $S$  en  $\Sigma$  y  $R_{icci}$  las componente de Ricci. Las superficies estables y minimas has sido investigadas en matemáticas mucho antes que del desarrollo de agujeros de gusano. En particular en [25] se ha mostrado que para la existencia de una superficie estable y minima embebida en un espaciotiempo  $(M, \mathbf{g})$  estático con  $G(\mathbf{g}) = \hat{k}T$  se requiere que el tensor de energía momento  $T$  viole la condición de energía nula sobre  $S$ .

Por ejemplo asumimos que  $S$  se encuentra en un potencial cosntante es decir  $V^2 = \mathbf{g}(\xi, \xi)$  es uniforme sobre  $S$ , con  $dV|_S \neq 0$ . Bajo tal asunción el formalismo que hemos desarrollado puede ser extendido para la construcción de estos espaciotiempos.

La estaticidad implica la existencia de una carta  $(t, x^\alpha)$ , donde la métrica  $\mathbf{g}$  se escribe como:

$$\mathbf{g} = -V^2(x^\alpha)dt^2 + \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (5.2)$$

Es natural hacer un intento para construir espaciotiempos  $(M, \mathbf{g})$  que representan agujeros de gusano estáticos. Indicamos a continuación que tal construcción en principio es posible. Sea con respecto a esta carta las ecuaciones de Einstein son equivalentes a:

$$\nabla^2 V = \frac{\hat{k}}{2} V \left[ {}^4 T_{\hat{t}\hat{t}} + \sum {}^4 T_{\hat{a}\hat{a}} \right], \quad (5.3)$$

$$G_{\alpha\beta}(\gamma) = -\frac{\hat{k}}{2} \left[ T_{\hat{t}\hat{t}} + \sum {}^{(4)} T_{\hat{a}\hat{a}} \right] \gamma_{\alpha\beta} + \hat{k} {}^4 T_{\alpha\beta} + \frac{1}{V} \nabla_\alpha \nabla_\beta V, \quad (5.4)$$

en donde  $\nabla^2$  es el laplaciano de la métrica espacial,  $\nabla_\beta$  el operador derivada con respecto a la métrica  $\gamma$ ,  $G_{\alpha\beta}$ ,  $T_{\alpha\beta}$  son las componentes coordenadas,  $T_{\hat{t}\hat{t}} = T(\hat{t}, \hat{t})$ ,  $T_{\hat{a}\hat{a}} = T(\hat{a}, \hat{a})$  las componentes de  $T$  con respecto a una tétrada ortonormal.

Una vecindad abierta de la garganta  $S$  puede ser foliada a través de una familia de superficies equipotenciales  $V = c$ . Si  $dV = \nabla_\mu V dx^\mu$  es un campo de 1-forma asociado a la función  $V$ , entonces se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial V} = \frac{\nabla^\mu V}{\nabla^\alpha V \nabla_\alpha V} \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

el cual es el dual de  $dV$ , es decir,  $\langle dV, \frac{\partial}{\partial V} \rangle = 1$ . Entonces

$$\gamma\left(\frac{\partial}{\partial V}, \frac{\partial}{\partial V}\right) = \frac{1}{\nabla^\alpha V \nabla_\alpha V},$$

ahora introducimos  $\{\theta^1, \theta^2\}$  coordenadas sobre cada punto en  $S$  y luego las propagamos a lo largo de trayectorias ortogonales a  $S$ . Respecto a estas coordenadas  $\{V, \theta^1, \theta^2\}$ , donde  $V \in (V_0 - \epsilon, V_0 + \epsilon)$ , la métrica  $\mathbf{g}$  puede escribirse:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -V^2 dt^2 + \rho^2(V, \theta^1, \theta^2) dV^2 + \gamma_{ij}(V, \theta^1, \theta^2) d\theta^i d\theta^j, \\ V &\in (V_0 - \epsilon, V_0 + \epsilon), \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Con respecto a tal carta hicimos una descomposición  $(2+1)$  de las ecuaciones (5.3,5.4) y de esta manera el sistema resultante posee una estructura muy parecida al sistema fundamental que hemos derivado en el capítulo (2). Este nuevo sistema involucra ecuaciones dinámicas que propagan las componentes de la métrica inducida  $\gamma_{ij}$  y las componentes de  $K_{ij}$  de una superficie espacial  $V = \text{cte}$ , así como una restricción. Pero hay una diferencia fundamental: El sistema resultante es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales -véase [26]-.

Otra ventaja del tratamiento descrito en esta tesis es que ofrece la herramienta para estudiar procesos astrofísicos en la garganta y en las cercanías de la garganta. Por ejemplo en [12], hemos estudiado el comportamiento de las geodésicas temporales y nulas en una vecindad abierta de la garganta. Sin importar el tipo de material exótico que sea responsable de soportar a la garganta, como hemos visto en esta tesis siempre podemos escribir a la métrica en la forma:

$$\mathbf{g} = -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l)d\Omega^2, \quad (5.6)$$

$$r(0) > 0, \quad \left. \frac{dr(l)}{dl} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d^2r(l)}{dl^2} \right|_0 > 0. \quad (5.7)$$

Sobre este fondo cada geodésica temporal o nula:

$$x^\mu(\mu) = (t(\mu), l(\mu), \theta(\mu), \phi(\mu)),$$

satisface:

$$\frac{dt(\mu)}{d\mu} = -\frac{E}{g_{00}}, \quad \frac{d\phi(\mu)}{d\mu} = \frac{L}{g_{\phi\phi}}, \quad \theta(\mu) = \frac{\pi}{2}, \quad (5.8)$$

$$\left(\frac{dl(\mu)}{d\mu}\right)^2 = \frac{1}{e^{2\Phi(l)}}[E^2 - V(l, L^2)], \quad (5.9)$$

en donde  $\mu$  denota el tiempo propio para las geodésicas temporales y para las geodésicas nulas el parámetro afín, mientras que  $(E, L)$  son constantes a lo largo de una geodésica particular. La simetría esférica nos da el derecho de tomar  $\theta(\mu) = \frac{\pi}{2} \forall \mu$ . La función  $V(l, L^2)$  denota un potencial efectivo, el cual está definido a través de:

$$V(l, L^2) = e^{2\Phi(l)}\left(k + \frac{4\pi L^2}{A(l)}\right), \quad l \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (5.10)$$

en donde  $A(l) = 4\pi r^2(l)$ , mientras  $k = 1$  para geodésicas temporales y  $k = 0$  para las geodésicas nulas. Se sigue de (5.10) que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(l, L^2)}{\partial l} = e^{2\Phi(l)} \left[ 2\Lambda(l)\left(k + \frac{4\pi L^2}{A(l)}\right) \right. \\ \left. - \frac{4\pi L^2}{A^2(l)} \frac{dA(l)}{dl} \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

y como consecuencia que  $\Lambda(0) \neq 0$  se tiene que  $V(l, L^2)$  es regular sobre la garganta. Entonces algún ente que sigue una geodésica temporal o nula puede “viajar” de una región asintótica a la otra, así como tener un punto de retorno sobre la garganta. También existe la posibilidad de las geodésicas que describen un movimiento oscilatorio en las cercanías de la garganta, claro que esto depende del máximo o mínimo de  $V(l, L^2)$  sobre la garganta.

Sin embargo para  $\Lambda(0) = 0$ , el potencial efectivo  $V(l, L^2)$  posee un punto crítico sobre la garganta independientemente del valor  $L^2$  y si  $k = 1$  o  $k = 0$ . Evaluando la segunda derivada de  $V(l, L^2)$  sobre la garganta obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(l, L^2)}{\partial l^2} \Big|_0 = e^{2\Phi(0)} \left[ 2 \frac{d\Lambda(l)}{dl} \left( k + \frac{4\pi L^2}{A(l)} \right) \right. \\ \left. - \frac{4\pi L^2}{A^2(l)} \frac{d^2 A(l)}{dl^2} \right] \Big|_0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para el caso donde  $(\rho c^2, \Lambda)$  son datos libres se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(l, L^2)}{\partial l^2} \Big|_0 = e^{2\Phi(0)} \left[ 2 \frac{d\Lambda(l)}{dl} \left( k + \frac{4\pi L^2}{A(l)} \right) \right. \\ \left. - \frac{4\pi L^2}{A(l)} \left( \frac{1}{r^2(l)} - \hat{k} \rho(l) c^2 \right) \right] \Big|_0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

y el lado derecho de (5.13) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(l, L^2)}{\partial l^2} \Big|_0 = e^{2\Phi(0)} \hat{k} [k(2P(0) - a(0)) \\ + \frac{8\pi L^2}{A(0)} (P(0) - a(0))], \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde  $a(0) \equiv \tau(0) - \rho(0)c^2$ . Así cuando el dato satisface  $P(0) \geq a(0) \equiv \tau(0) - \rho(0)c^2$ , el extremo de  $V(l, L^2)$  es un mínimo local sin importar el valor de  $L^2$ , y si  $k = 1$  o  $k = 0$ . Para otros valores de  $P(0)$ , la naturaleza del extremo puede ser inferida fácilmente de (5.14). Finalmente nuestro formalismo nos permitirá dar una representación de la métrica  $\mathbf{g}$  sobre y alrededor de la garganta. Tal comportamiento de las geodésicas alrededor

de la garganta puede ofrecer una manera para identificar a los agujeros de gusano.

Por simplicidad tratamos sólo agujeros de gusano con simetría reflexiva

$$\begin{aligned} \rho(l)c^2 &= \rho(0)c^2 + \rho(1)l + \rho(2)l^2 + \rho(3)l^3 \\ &\quad + O(l^4), \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} \Lambda(l) &= \Lambda(0) + \Lambda(1)l + \Lambda(2)l^2 + \Lambda(3)l^3 \\ &\quad + O(l^5), \end{aligned} \tag{5.16}$$

elegimos  $\Lambda(0) = 0$ ,  $\hat{k}\tau(0) = r^{-2}(0)$  tal que  $\tau(0) > \rho(0)c^2$ , y además  $\rho(1) = \rho(3) = \Lambda(0) = \Lambda(2) = 0$ . A través de un poco de algebra y (4.1-4.5) se puede obtener:

$$r(l) = r(0) + \frac{\hat{k}r(0)}{4}(\tau(0) - \rho(0)c^2)l^2 + O(l^4), \tag{5.17}$$

$$K(l) = \hat{k}(\tau(0) - \rho(0)c^2)l + K(3)l^3 + O(l^5), \tag{5.18}$$

entonces como consecuencia se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{k}P(l) &= [\Lambda(1) + \frac{\hat{k}}{2}(\tau(0) - \rho(0)c^2)] \\ &\quad + \left[ \Lambda^2(1) + 2\Lambda(3) - \frac{\hat{k}\rho(2)}{2} + \frac{\hat{k}}{2}(\tau(0) - \rho(0)c^2) \right. \\ &\quad \left. (\Lambda(1) - \frac{\hat{k}\tau(0)}{2}) - \frac{\hat{k}^2}{8}(\tau(0) - \rho(0)c^2)^2 \right] l^2 + O(l^3), \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}\hat{k}\tau(l) &= \hat{k}\tau(0) - \hat{k}[\tau(0) - \rho(0)c^2][\hat{k}P(0) \\ &+ \frac{\hat{k}\tau(0) + \hat{k}\rho(0)c^2}{4}]l^2 + O(l^4),\end{aligned}\quad (5.20)$$

con  $K(3)$  descrito por:

$$\begin{aligned}K(3) &= -\frac{\hat{k}^2}{12}[(\tau(0) - \rho(0)c^2)(5\tau(0) - 3\rho(0)c^2)] \\ &+ \frac{\hat{k}\rho(2)}{3}.\end{aligned}\quad (5.21)$$

Esta series implica que la métrica  $\mathbf{g}$  puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= -[1 + \Lambda(1)l^2 + \frac{\Lambda(3)}{2}l^4 + O(l^6)]dt^2 + dl^2 \\ &+ r^2(0)[1 + \frac{\hat{k}}{4}(\tau(0) - \rho(0)c^2)l^2 + O(l^4)]d\Omega^2,\end{aligned}\quad (5.22)$$

y donde hemos elegido  $\Phi(0) = 0$ .

Ahora consideremos los agujeros de gusano de Chaplygin. Esto agujeros de gusano son soportados por un tensor de energía momento que describe un “perfecto fluido”  $T_{\alpha\beta}$ , tal que la presión isotrópico  $P$  y la densidad de energía  $\rho c^2$  satisfacen -véase [27, 28]-:

$$P(\rho) = -\frac{A}{c^2\rho}, \quad A \neq 0.$$

Elijiendo  $P = -\tau$ , la restricción  $\tau(0) - c^2\rho(0) > 0$  es satisfecha y implica  $A > \rho^2(0)$ . Si asumimos:

$$c^2\rho(l) = c^2\rho(0) + \rho(2)l^2 + O(l^4), \quad (5.23)$$

tenemos

$$\tau(l) = \frac{A}{c^2\rho(0)} \left[ 1 - \frac{\rho(2)}{c^2\rho(0)}l^2 + O(l^4) \right]. \quad (5.24)$$

Sustituyendo esta expresión en (4.1-4.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} r(l) &= r(0) + \frac{1}{4r(0)}[1 - \hat{k}\rho(0)c^2r^2(0)]l^2 \\ &+ O(l^4), \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$K(l) = \frac{4l}{r(0)} \left[ \frac{1}{4r(0)}[1 - \hat{k}\rho(0)c^2r^2(0)] + O(l^2) \right], \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(l) &= - \left[ \frac{1}{2r^2(0)}[1 - \hat{k}c^2\rho(0)r^2(0)] + \frac{\hat{k}A}{c^2\rho(0)} \right] l \\ &+ O(l^2), \end{aligned} \quad (5.27)$$

resultando:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= - \left[ 1 - \left( \frac{1 - \hat{k}c^2\rho(0)r^2(0)}{2r^2(0)} + \frac{\hat{k}A}{c^2\rho(0)} \right) l^2 + O(l^4) \right] dt^2 \\ &+ dl^2 + r^2(0) \left[ 1 + \frac{1 - \hat{k}\rho(0)c^2r^2(0)}{2r^2(0)}l^2 + O(l^4) \right] d\Omega^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$



# Bibliografía

- [1] R. M. Wald, General Relativity, Chicago. Univ. Press, (1984).
- [2] S.W. Hawking and G. F. R. Ellis, The large scale structure of space-time, Cambridge University Press,(1973).
- [3] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley and Sons Inc ,New York,1972.
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman and Company, New York, (1973).
- [5] H. G. Ellis, Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity, J. Math. Phys. **14**, 104 (1973).
- [6] M. S. Morris and K. Thorne, Am. J. Phys. **56**, 395,(1988).
- [7] A. G. Riess *et al*, ApJ **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter *et al*, Nature, **391** 51 (1998); A. G. Riess *et al*, ApJ **118**, 1009 (1999); S. Perlmutter *et al*, ApJ **517**, 565 (1999); A. G. Riess *et al*, ApJ **536**, 62 (2000); A. G. Riess *et al*, ApJ **560**, 49 (2001).

- 
- [8] C. B. Netterfield, *et al*, *Astrophys. J.* **571**, 604, (2002).
- [9] C. L. Bennett *al*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1,(2003). ArXiv: astro-ph/0302207.
- [10] J. P. S. Lemos, F. S. N. Lobo and S. Quinet de Oliveira *Phys. Rev. D* **68** 064004, ( 2003).
- [11] F. S. Lobo, *Classical and Quantum* , New York:Nova Sci. Pub, 1-78, (2008).
- [12] N. Montelongo-García and T. Zannias, On the structure of the effective potential for a spherical wormhole, *Phys. Rev. D* **78** 064003,2008.
- [13] N. Montelongo-García and T.Zannias, Constructing Spherical Traversable Wormholes: An Initial Value Approach, *Cl. Quant. Grav.* **26** 105011,2009.
- [14] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*, American Institute of Physics, New York, (1995).
- [15] Ya. B. Zel'dovich, *Zur. Eksp. Teoret. Fiz.* **41**, 1609 (1961).
- [16] C.Armendariz-Picon. T. Damour and V. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **498** (1999).
- [17] T. Chiba, T. Okabe T and M. Yanaguchi M, *Phys.Rev. D* **62**, 023511 (2000).
- [18] Damour T. and Solodukhin S.N., *Phys.Rev. D* **76** 024016,(2007).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [19] T. Damour, Phys. Rev.D **18**, 3598 (1978).
- [20] A. Ashtekar and A. Magnon-Ashtekar, J. Math. Phys. **20** 794, (1979).
- [21] N. O. Murchadha, J. Math. Phys. **27**, 2111, (1986).
- [22] N. Montelongo García and T. Zannias, Modeling massive dark objects by a wormhole throat, AIP J. **1083** 171-181, (2008).
- [23] J. A. González, F. S. Guzmán N. Montelongo-García and T. Zannias, On Wormholes supported by phantom energy, Phys.Rev. D **79** 064027, 2009.
- [24] Beig R. 1978 *Phys. Let. A* **69** 153.
- [25] Frankel T. and Galloway G. J. 1982 *Math. Z.*
- [26] J. Estevéz Delgado, N. Montelongo García, y T. Zannias, ERE 2008, AIP J. Cof. **1122**,260-266, (2009)
- [27] R. Banerjee, S. Ghosh and S. Kulkarni, Phys. Rev. D **75**, 025008 (2007).
- [28] E. F. Eiroa and C. Simeone, Phys Rev D **76**, 024021 (2007).