



*UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO*

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Estudio de estrellas TOV con el método de SPH

Tesis que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias en el Área de Física

P R E S E N T A

Jesús Misráyim Rueda Becerril

Director: Dr. José Antonio González Cervera

Morelia, Mich. septiembre de 2011

*“Todos los hombres, en algún momento de su vida, se sienten solos; y más:
todos los hombres están solos.”*

Octavio Paz

*“When one does a thing, it appears good, otherwise one would not write it.
Only later comes reflection, and one discards or accepts the thing. Time is
the best censor, and patience a most excellent teacher.”*

Fryderyk Franciszek Chopin

“El corazón tiene razones que la razón desconoce.”

Blais Pascal

*“For someone who was never meant for this world, I must confess I’m
suddenly having a hard time leaving it. Of course, they say every atom in our
bodies was once part of a star. Maybe I’m not leaving... maybe I’m going
home.”*

(Gattaca)

Índice general

Índice general	V
Agradecimientos	VIII
Resumen	X
1. Introducción	1
2. Relatividad General	4
2.1. Conceptos fundamentales	4
2.1.1. Producto escalar	5
2.2. Foliación del espacio-tiempo	5
2.2.1. El vector normal. La función lapso	6
2.2.2. Proyector ortogonal	8
2.2.3. Espacio-tiempos globalmente hiperbólicos y foliacion	9
2.2.4. Coordenadas adaptadas a la foliación. El vector desplazamiento	10
2.2.5. Las componentes de la métrica en la forma 3+1	11
2.3. Respecto a los observadores y líneas de mundo	13
2.4. Ecuaciones de campo de Einstein	15
2.5. Conclusiones	16
3. Hidrodinámica	17
3.1. Introducción	17
3.2. Ecuaciones de movimiento de un fluido	19
3.2.1. Conservación de la masa	19
3.2.2. Ecuación de Euler	21
3.2.3. Ecuación de la energía	22
3.2.4. Ecuación de estado	23
3.3. Hidrodinámica relativista	25
3.3.1. Derivada lagran-giana	25
3.3.2. Conservación del número bariónico	25

3.3.3.	Tensor de energía-momento	27
3.3.4.	Fluido perfecto	28
3.3.5.	Conservación de la energía y momento	28
3.4.	Conclusiones	30
4.	El método de partículas suavizadas (SPH)	32
4.1.	Fundamentos	32
4.1.1.	Interpolación de funciones	33
4.1.2.	Interpolación de las derivadas de una función	34
4.2.	Ecuaciones de la hidrodinámica a la SPH	34
4.2.1.	Ecuación de continuidad	35
4.2.2.	Ecuación de momento	36
4.2.3.	Ecuación de la energía	37
4.3.	El kernel	37
4.3.1.	La longitud de suavizado	38
4.4.	Viscosidad artificial	39
4.4.1.	Viscosidades de bulto y von Neumann-Richtmayer	40
4.4.2.	Viscosidad artificial en la formulación SPH	41
4.5.	Pruebas: SPH clásico	41
4.5.1.	Tubo de Choque tipo Sod (Sod shocktube)	42
4.5.2.	Colapso isotérmico	44
4.6.	Conclusiones	45
5.	SPH relativista	48
5.1.	(Re-) Formulación	48
5.2.	Las ecuaciones de HDR en la formulación SPH	49
5.2.1.	Ecuación de continuidad relativista	50
5.2.2.	Ecuación del momento relativista	50
5.2.3.	Ecuación de la energía relativista	51
5.3.	Viscosidad artificial en el tensor de energía-momento	51
5.4.	Pruebas de SPH en HDR	52
5.4.1.	Shock Tube (Sod shocktube)	52
5.4.2.	Partícula de polvo en una métrica de Schwarzschild	54
5.5.	Conclusiones	55
6.	Estrellas en equilibrio tipo TOV	58
6.1.	Espacio-tiempo esféricamente simétricos	58
6.2.	La solución interior: Estrellas esféricas	59
6.3.	Resolviendo las ecuaciones TOV	61
6.4.	Evolucionando con el método de SPH	64
6.5.	Resultados	67

7. Conclusiones	74
A. Herramientas numéricas	77
A.1. Predictor-Corrector	77
A.2. Newton-Raphson	78
A.3. Runge-Kutta de cuarto orden	78
A.4. Método de aceptación y rechazo	79
Bibliografía	81

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por su enorme apoyo incondicional durante toda la maestría (y todo lo que llevo de vida), por escucharme atentamente cada vez que lo necesitaba y por aconsejarme sabiamente. A mi hermana Montse por estar al pendiente de mí en todo momento y preocuparse desde lejos. A Osiris por creer en mí, por escucharme hablar de sábanas (en el buen sentido) y por esperar(me). A mi asesor Dr. Jose A. González C. por enseñarme a ser autosuficiente y no depender de NADIE para lograr mi objetivo. A mis sinodales el Dr. Ricardo Becerril B. y en particular al Dr. Francisco S. Guzmán M. (Paco) por su apoyo a lo largo de toda la maestría, por sus sabios consejos, por sus enseñanzas y por transmitirme un aguerrido espíritu científico, pero sobretodo por ser un gran amigo. A “ese” Miguel y a Naser por ser tan buenos amigos, por apoyarme y ayudarme en cualquier circunstancia (literalmente). A mis compañeros de la maestría Anabel, Eliana y Juan Antonio por su apoyo durante y hasta el final de la misma. A los compañeros del IFM: Fabio, Alejandro, Julio, Iraís, Edison, Max, Juan de Dios, Pietro, etc., por su apoyo, por soportarme y entenderme en esta etapa; pero principalmente a Juan Pablo que estuvo ahí para ayudarme en los momentos de crisis, por sentarse a discutir los N problemas que se presentaron durante la elaboración de esta tesis y llegar a resultados y conclusiones valiosas. A Leomar, Beto, Alex y César por el apoyo a distancia y por preservar tan buena amistad a pesar de que los caminos nos han separado. A mi familia por estar al pendiente desde lejos. Al IFM por brindarme tanto conocimiento durante toda la maestría y enseñarme cosas muy valiosas tanto para mi carrera como físico como para la vida en general. Agradezco a CONACyT por brindarme la beca de maestría.

Resumen

En astrofísica es común toparse con problemas que involucren fronteras con geometrías irregulares, problemas en los que las cantidades hidrodinámicas presenten discontinuidades o ambas circunstancias simultáneamente. Los métodos en los que se discretiza el dominio en una malla han mostrado ser bastante útiles, a tal grado que en la actualidad son los métodos más empleados para dichas simulaciones. Sin embargo, al momento de su implementación pueden aparecer dificultades debido al método numérico mismo.

En años recientes se ha encontrado en los métodos que no involucran mallas una herramienta prometedora pues su formulación tiene la intención de resolver numéricamente el sistema de ecuaciones de la hidrodinámica de manera precisa y estable para fronteras con cualquier tipo de geometría. De entre ellos se encuentra el método de hidrodinámica de partículas suavizadas (SPH por sus siglas en inglés: Smoothed Particle Hydrodynamics), el cual se desarrolló en el presente trabajo de tesis.

El propósito del presente trabajo de tesis fue implementar el método de SPH a fluidos relativistas con simetría esférica que inicialmente se encuentren en equilibrio hidrostático; esto es a aquellos fluidos cuya estructura interna esté inicialmente descrita por la solución de las ecuaciones Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

En el presente trabajo se logró resolver con buenos resultados las ecuaciones de la hidrodinámica para fluidos newtonianos con el método de SPH, superando la prueba de un tubo de choque y de un colapso isotérmico. También se logró resolver a una buena aproximación las ecuaciones de la Hidrodinámica Relativista (HDR) mediante el método de SPH relativista en una dimensión (en coordenadas cartesianas) para un tubo de choque relativista, en una métrica de Minkowski fija.

En ese mismo marco de la Relatividad General (RG), se resolvieron las ecuaciones TOV para generar las condiciones iniciales de un fluido en equilibrio hidrostático. A partir de estas se resolvieron las ecuaciones de la HDR nuevamente usando el método de SPH relativista en tres dimensiones explícitamente, con la solución de las ecuaciones TOV como métrica de fondo fija; es decir, no evolucionamos la geometría. No obstante, hemos encontrado que con la implementación hecha y bajo las condiciones descritas en el presente trabajo no se logra mantener un fluido en equilibrio hidrostático. Aunque por otro lado, nuestro código preserva el número bariónico para tiempos razonables (≥ 100 veces la masa total del fluido, en unidades geométricas).

Capítulo 1

Introducción

La física de las estrellas se puede considerar como un punto de partida para adentrarse en el estudio de la astrofísica por varias razones. En primer lugar por ser quizá el área mejor entendida dentro de la astrofísica. En segundo lugar, existen más que suficientes datos observacionales confiables involucrados en la física de las estrellas, lo cual a su vez motiva para desarrollar modelos teóricos más precisos y sofisticados, así como la comparación de dichos modelos con las observacionales. Y finalmente, la física de las estrellas conforma la base para el estudio de otras áreas relacionadas tales como la astronomía y la cosmología.

Sin embargo, hablar de estrellas involucra principalmente tres cosas: formación, estructura y evolución.

Con respecto a la formación de estrellas, en la actualidad existe suficiente evidencia observacional para creer que las estrellas se forman cuando la condensación local de gas en una galaxia, contraído por la misma auto-gravedad, alcanza temperaturas centrales lo suficientemente altas para desencadenar reacciones nucleares que se automantienen en el centro. A pesar de no tomar en cuenta otros factores relevantes en la formación de estrellas tales como: rotación del gas, campos magnéticos, etc.; esta idea parece estar confirmada tanto teórica como observacionalmente. Tal es el grado de precisión en sus predicciones que le dan pauta a los astrofísicos de estimar propiedades importantes de las estrellas hasta cierto grado de precisión [35].

Para que la etapa de formación concluya y tener como resultado una estrella *per se*, debe llegar un momento en que la fuerza gravitacional que indujo

inicialmente el colapso del gas se encuentre en equilibrio hidrostático con la presión debido al gas caliente (reacciones termonucleares cuya energía se libera a manera de radiación) en el interior. En este punto el gas que en un principio se encontraba disperso, ahora tiene una estructura bien definida que mantendrá dicho estado de equilibrio [35]. El modelo más empleado y que mejor aproxima la estructura de una estrella en esta etapa es el de equilibrio hidrostático Newtoniano^a:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{m(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (1.1)$$

donde $P(r)$ y $\rho(r)$ son la presión y la densidad de masa, respectivamente, a un radio r , y $m(r)$ es la masa contenida dentro de la esfera de radio r .

Sin embargo, esta no es la única forma en la que la microfísica puede contrarrestar la fuerza de gravedad en simetría esférica. Es claro que eventualmente el combustible termonuclear de una estrella tiene que terminar y que las condiciones de ésta no permitirán más la generación de energía nuclear suficiente en el interior para contrarrestar la gravedad. Este proceso corresponde a la evolución de la estrella, cuya conclusión tiene dos posibilidades: 1) otra estrella en equilibrio hidrostático sostenida por presiones no térmicas (enanas blancas y estrellas de Neutrones), o 2) nunca alcanza el equilibrio y su estado final es el colapso gravitacional (agujeros negros) [21].

En el primer caso, la nueva estrella comprende las mismas tres etapas que la estrella Newtoniana mencionada previamente: 1) formación, en la que el fluido sucumbe ante la gravedad, 2) la estructura de la nueva estrella y 3) la evolución de ésta. Para describir la estructura de esta última fase en la vida de una estrella no es suficiente un enfoque Newtoniano debido a las altas densidades involucradas en el fluido que conforma nuestro sistema. En estos casos es obligatorio recurrir a la teoría de la RG. Este es el sistema físico que se pretende abordar en el presente trabajo.

Por otro lado, al tratar de entender y explicar sistemas astrofísicos uno se topa con que conforme los modelos se hacen más realistas, las ecuaciones involucradas se vuelven más complicadas de resolver analíticamente. Como salida a esta encrusijada uno recurre a los métodos numéricos y las computadoras que permiten aproximar con cierto grado de precisión la solución a ciertos problemas. En la actualidad esta forma de atacar un problema, no solamente en astrofísica sino de la física en general, se encuentra en constante crecimiento.

^aA lo largo de todo el trabajo usamos la convención de unidades geométricas, esto es $c = G = 1$.

Esto tiene como consecuencia una vasta gama de herramientas con las cuales atacar el problema de la estructura y evolución de una estrella en su etapa final.

En el presente trabajo se recurrió a un método numérico conocido en la jerga común de la hidrodinámica numérica como el de SPH, cuya motivación inicial fue poder estudiar la evolución de sistemas astrofísicos.

En el Cap. 2 daremos una breve introducción a la Relatividad General (RG) en el marco de la formulación 3+1, definiendo las cantidades geométricas principales que nos permitirán describir la dinámica del fluido en el espacio-tiempo. En el Cap. 3 describiremos brevemente lo que es la hidrodinámica clásica así como la relativista; durante la descripción de la hidrodinámica clásica lo haremos tanto desde el enfoque Lagrangiano como Euleriano de un fluido –de los cuales hablaremos ahí mismo con mas detalle–, mientras que en la relativista nos restringiremos únicamente a la descripción Lagrangiana. En el Cap. 4 describiremos con detalle el método de SPH desde el punto de vista de la mecánica Newtoniana y se presentarán pruebas del código computacional en tres dimensiones desarrollado por el autor basado en dicho método. En el Cap. 5 describiremos el método de SPH para fluidos relativistas en espacio-tiempos curvos (en general) y se mostrarán pruebas del código desarrollado por el autor basado en este método. Finalmente, en el Cap. 6 trataremos el modelo de fluido perfecto (neutro) en equilibrio hidrostático, esféricamente simétrico y cuya métrica satisface las Ecuaciones de campo de Einstein (EE), mejor conocido como estrellas TOV, y presentaremos los resultados obtenidos de evolucionar dicha estrella mediante el método de SPH desarrollado previamente.

A lo largo del presente trabajo se usarán unidades geométricas: $c = G = 1$. Se usará la convención de suma para índices griegos y los índices latinos cuyas letras sean i, j . Los índices griegos corresponderán a las coordenadas en el espacio-tiempo, es decir $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$; mientras que $i, j = 1, 2, 3$ corresponderán a las coordenadas espaciales. Los índices latinos a, b corresponderán en la formulación de SPH de la hidrodinámica a cada partícula que conforma el fluido.

Capítulo 2

Relatividad General

En este capítulo se hablará a grandes rasgos de los fundamentos de la RG partiendo de considerar que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable. Más detalle sobre lo que es una variedad y en general sobre geometría diferencial se puede encontrar en libros avanzados de geometría diferencial y cálculo en variedades, por ejemplo [8, 43]. Un razonamiento heurístico sobre el carácter de variedad del espacio-tiempo se desarrolla en [21, 41, 50].

Las referencias básicas en las que uno se puede auxiliar como introducción a la RG son [9, 21, 44, 49, 50], mientras que para mayor profundidad tanto de la RG como para la el formalismo 3+1 tratado en este capítulo se recurrió a [1, 4, 19, 29, 53].

2.1. Conceptos fundamentales

Sea $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ un espacio-tiempo donde \mathcal{M} es una variedad \mathcal{C}^∞ –diferenciable de dimensión 4 y \mathbf{g} es una métrica Lorentziana en \mathcal{M} con signatura $(-, +, +, +)$ y *tiempo-orientable*^a. Denotamos con ∇ la conexión afín asociada a \mathbf{g} . Asumiremos de ahora en adelante que ∇ es una *conexión métrica*, es decir, que satisface

$$\nabla \mathbf{g} = 0. \tag{2.1}$$

^aUna variedad se dice que es tiempo-orientable si es posible reconocer de forma continua por toda \mathcal{M} cada cono de luz en dos partes: *pasado* y *futuro*.

Sea $p \in \mathcal{M}$, denotamos con $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ al *espacio tangente de \mathcal{M}* , es decir, el espacio de 4-vectores en p . Y a su espacio dual (el *espacio cotangente de \mathcal{M}*), constituido por las formas lineales en p , lo denotamos con $\mathcal{T}_p^*(\mathcal{M})$.

Sea $\{\vec{e}_\alpha\}$ una base del espacio tangente $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ y $\{\bar{\omega}^\alpha\}$ la base dual asociada, es decir la base de $\mathcal{T}_p^*(\mathcal{M})$ tal que $\bar{\omega}^\alpha(\vec{e}_\alpha) = \delta^\alpha_\beta$. Sea \mathbf{T} un tensor de tipo $\binom{r}{s}$, donde $r, s \in \mathbb{N}$. Dadas sus componentes $T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}$ respecto a las bases $\{\vec{e}_\alpha\}$ y $\{\bar{\omega}^\alpha\}$ \mathbf{T} está dado por la expansión^b:

$$\mathbf{T} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} \vec{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{\alpha_r} \otimes \bar{\omega}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \bar{\omega}^{\beta_s}. \quad (2.2)$$

2.1.1. Producto escalar

Por lo general se acostumbra denotar al producto interno entre dos vectores con respecto a la métrica \mathbf{g} de la siguiente manera:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M}), \quad \cdot \cdot \cdot : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

o en concreto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v}) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu. \quad (2.4)$$

También denotaremos de esta forma la acción de una 1-forma \bar{w} sobre un 4-vector \vec{v} , es decir

$$\forall (\bar{w}, \vec{v}) \in \mathcal{T}_p^*(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M}), \quad \bar{w} \cdot \vec{v} = w_\mu v^\mu. \quad (2.5)$$

2.2. Foliación del espacio-tiempo

Antes de hablar formalmente de la formulación 3+1 y de foliación propiamente es necesario mencionar algunos conceptos importantes como el de hipersuperficie, vector normal y espacio-tiempos globalmente hiperbólicos.

Sea $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ un espacio-tiempo. Una *hipersuperficie* Σ en \mathcal{M} es una sub-variedad 3-dimensional, es decir la imagen de una variedad 3-dimensional \mathcal{S} debido al encajamiento^c $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$.

^bMás detalles sobre el álgebra de vectores, formas lineales y multilineales a un nivel básico se encuentra en [9, 44], mientras que ya a un nivel más avanzado en [29, 53]

^cCabe recordar que un encajamiento es un homeomorfismo, es decir un mapeo, Φ , inyectivo (uno-a-uno) tal que Φ y Φ^{-1} son continuos.

Nótese que el encajamiento Φ manda curvas de \mathcal{S} a \mathcal{M} , y por ende también vectores. En otras palabras, define el mapeo $\Phi_* : \mathcal{T}_p(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$, mejor conocido en la literatura como *push-forward respecto a Φ* . De manera inversa Φ induce otro mapeo, esta vez entre las formas lineales en $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ y $\mathcal{T}_p(\mathcal{S})$; es decir, $\Phi^* : \mathcal{T}_p^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_p^*(\mathcal{S})$, conocido como *pull-back respecto a Φ* .

El *pull-back* es directamente extendible a formas multi-lineales en $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$. Un caso importante de dicha extensión es el *pull-back* de la métrica del espacio-tiempo g , el cual define la *métrica inducida sobre Σ* :

$$\boldsymbol{\eta} := \Phi^* g. \quad (2.6)$$

A $\boldsymbol{\eta}$ también se le conoce como la *primera forma fundamental de Σ* o *3-métrica*. En términos del sistema de coordenadas cartesianas $x^i = (x, y, z)$ de Σ :

$$\eta_{ij} = g_{ij}. \quad (2.7)$$

Se dice que una hipersuperficie es:

- *tipo-espacio*: si y sólo si la métrica $\boldsymbol{\eta}$ es positiva definida, es decir que tiene signatura $(+, +, +)$,
- *tipo-tiempo*: si y sólo si la métrica $\boldsymbol{\eta}$ es Lorentziana, es decir que tiene signatura $(-, +, +)$,
- *nula*: si y sólo si la métrica $\boldsymbol{\eta}$ es degenerada, es decir que tiene signatura $(0, +, +)$.

2.2.1. El vector normal. La función lapso

Dado un campo escalar t en \mathcal{M} tal que la hipersuperficie Σ_t esté definida como una superficie de nivel de t , esto es, dado $t = \text{const.}$,

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad p \in \Sigma_t \iff t(p) = \text{constante}. \quad (2.8)$$

La 1-forma gradiente $\bar{\mathbf{d}}t$ es ortogonal a Σ_t en el sentido de que para cualquier vector $\vec{\mathbf{v}}$ tangente a Σ_t , $\bar{\mathbf{d}}t \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$. El dual de $\bar{\mathbf{d}}t$, es decir el 4-vector $\vec{\nabla}t^{\text{d}}$ es

^dEn términos de sus componentes, $\vec{\nabla}t$ es:

$$\nabla^\alpha t = g^{\alpha\mu} \nabla_\mu t = g^{\alpha\mu} (\bar{\mathbf{d}}t)_\mu. \quad (2.9)$$

un vector ortogonal a Σ_t , que a su vez resulta ser el vector tangente a la curva (diferenciable) $\lambda(t) = t$, y además satisface las siguientes propiedades:

- $\vec{\nabla}t$ es tipo-tiempo sí y sólo si Σ_t es tipo-espacio,
- $\vec{\nabla}t$ es tipo-espacio sí y sólo si Σ_t es tipo-tiempo,
- $\vec{\nabla}t$ es nulo sí y sólo si Σ_t es nula.

Una característica importante de $\vec{\nabla}t$ es que define de manera única la dirección ortogonal a Σ_t y cualquier otro vector perpendicular a Σ_t debe ser colineal a él. Cabe mencionar también que si $\vec{\nabla}t$ es tipo-tiempo y además apunta hacia el futuro, la curva $\lambda(t) = t$ se dice que es tipo-tiempo dirigida hacia el futuro. Más aun, si $\vec{\nabla}t$ apunta hacia el futuro y es tipo-tiempo o nulo, decimos que $\lambda(t) = t$ es una *curva causal dirigida hacia el futuro*.

Para los casos en que Σ_t no es nula es posible normalizar $\vec{\nabla}t$ con el fin de contar con un vector unitario. Esto se logra definiendo

$$\vec{n} := \left(\pm \vec{\nabla}t, \vec{\nabla}t \right)^{-1/2} \vec{\nabla}t, \quad (2.10)$$

donde el signo (+) corresponde a hipersuperficies tipo-tiempo y el signo (−) las tipo-espacio. Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{n} &= -1 && \text{si } \Sigma_t \text{ es tipo-espacio,} \\ \vec{n} \cdot \vec{n} &= 1 && \text{si } \Sigma_t \text{ es tipo-tiempo.} \end{aligned}$$

De ahora en adelante nos enfocaremos en hipersuperficies tipo-espacio, es decir hipersuperficies cuya métrica inducida sea positiva definida y cuyo vector ortonormal sea tipo-tiempo.

Redefiniendo el campo normal \vec{n} de la siguiente manera:

$$\vec{n} := -\alpha \vec{\nabla}t, \quad (2.11)$$

con

$$\alpha := (-\vec{\nabla}t \cdot \vec{\nabla}t)^{-1/2} = (-\bar{\mathbf{d}}t \cdot \vec{\nabla}t)^{-1/2} \quad (2.12)$$

donde el signo menos se elige para que \vec{n} esté orientado hacia el futuro si el campo escalar t aumenta hacia el futuro. El valor de α asegura que la magnitud

de \vec{n} sea unitario: $\vec{n} \cdot \vec{n} = -1$. A este campo escalar α se conoce como la *función lapso*.

Nótese que por construcción $\alpha > 0$. En particular, la función lapso nunca es cero para foliaciones regulares.

2.2.2. Proyector ortogonal

En cada punto $p \in \Sigma_t$, el espacio $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ puede descomponerse ortogonalmente en

$$\mathcal{T}_p(\mathcal{M}) = \mathcal{T}_p(\mathcal{S}) \oplus \text{Vect}(\vec{n}), \quad (2.13)$$

donde $\text{Vect}(\vec{n})$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{T}_p(\mathcal{S})$, es decir, es el subespacio 1-dimensional de $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ generado por \vec{n} .

Definimos al *proyector ortogonal sobre Σ_t* como aquel operador $\hat{\eta}$ asociado con (2.13) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{\eta} : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{T}_p(\Sigma_t) \\ \vec{v} &\longmapsto \vec{v} + (\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como un caso particular tomemos la proyección ortogonal de \vec{n} :

$$\hat{\eta}(\vec{n}) = \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{n})\vec{n} = 0, \quad (2.15)$$

donde se tomó en cuenta que \vec{n} es tipo-tiempo. Sea \mathcal{O}_E aquel observador cuya 4-velocidad es \vec{n} . A tal observador se le conoce como *observador Euleriano*. Obsérvese que el proyector ortogonal se reduce al operador identidad para cualquier vector $\vec{v} \in \mathcal{T}_p(\Sigma_t)$:

$$\hat{\eta}(\vec{v}) = \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{v}. \quad (2.16)$$

Las componentes de $\hat{\eta}$ con respecto a alguna base $\{\vec{e}_\alpha\}$ de $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ son

$$\eta^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta. \quad (2.17)$$

Es interesante notar que el mapeo $\hat{\eta}$ es el “camino de regreso” del *push-forward* mencionado anteriormente puesto que manda elementos de $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ a

$\mathcal{T}_p(\Sigma_t)$. Esto nos motiva a construir de la misma forma un mapeo tal que le corresponda al *pull-back*, es decir:

$$\hat{\eta}^* : \mathcal{T}_p^*(\Sigma_t) \longrightarrow \mathcal{T}_p^*(\mathcal{M}), \quad (2.18)$$

de tal forma que para cualquier $\bar{\omega} \in \mathcal{T}_p^*(\Sigma_t)$,

$$\begin{aligned} \hat{\eta}^* \bar{\omega} : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \bar{v} &\longmapsto \bar{\omega}(\bar{\eta}(\bar{v})). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Este último mapeo define una forma lineal perteneciente a $\mathcal{T}_p^*(\mathcal{M})$. La extensión a un tensor de tipo $\binom{r}{s}$, es automática. En efecto, sea \mathbf{T} un tensor de tipo $\binom{r}{s}$ en \mathcal{M} , denotamos por $\hat{\eta}^* \mathbf{T}$ a otro tensor en \mathcal{M} del mismo tipo tal que sus componentes en cualquier base $\{e_\alpha\}$ de $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ estén dadas en términos de las de \mathbf{T} de la siguiente manera:

$$(\hat{\eta}^* \mathbf{T})^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_r} = \gamma^{\alpha_1}_{\mu_1} \dots \gamma^{\alpha_r}_{\mu_r} \gamma^{\nu_1}_{\beta_1} \dots \gamma^{\nu_s}_{\beta_s} T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}. \quad (2.20)$$

Notemos que para cualquier tensor \mathbf{T} , $\hat{\eta}^* \mathbf{T}$ es tangente a Σ_t , en el sentido de que $\hat{\eta}^* \mathbf{T}$ dará como resultado cero si uno de sus argumentos es $\bar{\mathbf{n}}$ o su dual $\bar{\mathbf{n}}$.

2.2.3. Espacio-tiempos globalmente hiperbólicos y foliación

Decimos que una hipersuperficie tipo tiempo $\Sigma_t \in \mathcal{M}$ es una *superficie de Cauchy* si cualquier curva causal abierta –es decir una curva causal sin considerar sus extremos–, intersecta a Σ_t una sola vez. A dicho espacio-tiempo que admite una superficie de Cauchy se dice que es *globalmente hiperbólico*.

De acuerdo con el Teorema 8.3.14 de [53] cualquier espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ que sea globalmente hiperbólico puede ser foliado completamente en una familia de hipersuperficies tipo-tiempo $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, donde el campo escalar t es una función en \mathcal{M} tal que para $t = \text{constante}$ se puede identificar a cada hipersuperficie como una superficie de nivel de t . Dicha función puede ser interpretada como una función de tiempo global.

2.2.4. Coordenadas adaptadas a la foliación. El vector desplazamiento

En cada hipersuperficie Σ_t definimos un sistema de coordenadas $(x^i) = (x^1, x^2, x^3)$. Si este sistema coordenado varía suavemente entre hipersuperficies contiguas, entonces $(x^\alpha) = (t, x^1, x^2, x^3)$ constituye un sistema coordenado bien comportado en \mathcal{M} . Al sistema coordenado $(x^i) = (x^1, x^2, x^3)$ se le conoce como *coordenadas espaciales*.

Sea $(\vec{\partial}_\alpha) = (\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_i), i \in \{1, 2, 3\}$, la base natural de $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ asociada con las coordenadas (x^α) , donde $\vec{\partial}_0$ es tangente a las líneas cuyas coordenadas espaciales son constantes y, para cualquier $i \in \{1, 2, 3\}$, el vector $\vec{\partial}_i$ es tangente a Σ_t ; es decir, $\vec{\partial}_i, i \in \{1, 2, 3\}$.

La base dual asociada a $(\vec{\partial}_\alpha)$ es la base de 1-formas $(\bar{\mathbf{d}}x^\alpha)$, que es una base del espacio $\mathcal{T}_p^*(\mathcal{M})$. En otras palabras

$$\bar{\mathbf{d}}x^\alpha \cdot \vec{\partial}_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad (2.21)$$

En particular

$$\bar{\mathbf{d}}t \cdot \vec{\partial}_0 = 1. \quad (2.22)$$

Sin embargo, de la ecuación (2.12) podemos ver que

$$\bar{\mathbf{d}}t \cdot (\alpha \vec{\mathbf{n}}) = \alpha^2 \bar{\mathbf{d}}t \cdot \vec{\nabla}t = 1. \quad (2.23)$$

Esto nos dice que tanto $\alpha \vec{\mathbf{n}}$ como $\vec{\partial}_0$ obedecen las mismas propiedades. Esto no nos dice que necesariamente sean iguales, pues en general no lo son. Ellos coinciden solamente si las coordenadas espaciales (x^i) son tales que las líneas $x^i = \text{constante}$ sean ortogonales a las hipersuperficies Σ_t . De lo contrario, la diferencia entre $\vec{\partial}_0$ y $\alpha \vec{\mathbf{n}}$ es un vector $\vec{\beta}$ conocido como *vector desplazamiento* tal que

$$\vec{\partial}_0 := \alpha \vec{\mathbf{n}} + \vec{\beta}. \quad (2.24)$$

De esta definición podemos ver que

$$\bar{\mathbf{d}}t \cdot \vec{\beta} = \bar{\mathbf{d}}t \cdot \vec{\partial}_0 - \bar{\mathbf{d}}t \cdot (\alpha \vec{\mathbf{n}}) = 1 - 1 = 0, \quad (2.25)$$

o lo que es equivalente, dado que $\bar{\mathbf{d}}t = -\alpha^{-1} \bar{\mathbf{n}}$,

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \vec{\beta} = 0, \quad (2.26)$$

lo cuál significa que $\vec{\beta}$ es tangente a las hipersuperficies Σ_t . A partir de este resultado podemos decir que la ecuación (2.24) es una descomposición 3 + 1 del vector temporal $\vec{\partial}_0$.

Introducimos las componentes de $\vec{\beta}$ y $\bar{\beta}$ con respecto a las coordenadas espaciales (x^i) de acuerdo con:

$$\vec{\beta} =: \beta^i \vec{\partial}_i \quad \text{y} \quad \bar{\beta} =: \beta_i \bar{\mathbf{d}}x^i. \quad (2.27)$$

De la ecuación (2.24) podemos encontrar las componentes del vector normal \vec{n} con respecto a la base natural ($\vec{\partial}_\alpha$) en términos de la función α y $\vec{\beta}$:

$$n^\alpha = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^1}{\alpha}, -\frac{\beta^2}{\alpha}, -\frac{\beta^3}{\alpha} \right). \quad (2.28)$$

Mientras que las componentes covariantes respecto a la base $\bar{\mathbf{d}}x^\alpha$ se obtienen de la relación $\bar{\mathbf{n}} = -\alpha \bar{\mathbf{d}}t$,

$$n_\alpha = (-\alpha, 0, 0, 0). \quad (2.29)$$

La interpretación física que se le da a α es justamente como el lapso en el tiempo propio, $d\tau$, del observador Euleriano con 4-velocidad \vec{n} entre las hipersuperficies Σ_t y Σ_{t+dt} . En cuanto al vector desplazamiento $\vec{\beta}$ se interpreta como la velocidad relativa entre el observador Euleriano y la línea de $x^i = \text{constante}$; es decir que la diferencia entre x^i en Σ_t y x^i en Σ_{t+dt} es $\beta^i dt$ [1].

2.2.5. Las componentes de la métrica en la forma 3+1

Sean η_{ij} las componentes de la 3-métrica $\boldsymbol{\eta}$ con respecto a las coordenadas espaciales (x^i)

$$\boldsymbol{\eta} =: \eta_{ij} \bar{\mathbf{d}}x^i \otimes \bar{\mathbf{d}}x^j, \quad (2.30)$$

y análogamente sean $g_{\alpha\beta}$ las componentes de la 4-métrica \boldsymbol{g} con respecto a las coordenadas (x^α)

$$\boldsymbol{g} =: g_{\alpha\beta} \bar{\mathbf{d}}x^\alpha \otimes \bar{\mathbf{d}}x^\beta. \quad (2.31)$$

Cada componente de la 4-métrica se puede calcular de la siguiente manera:

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{g}(\vec{\partial}_\alpha, \vec{\partial}_\beta). \quad (2.32)$$

Con ella y los resultados encontrados en la Sec. 2.2.4 podemos encontrar: la componente g_{00}

$$\begin{aligned} g_{00} &= \mathbf{g}(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_0) = \vec{\partial}_0 \cdot \vec{\partial}_0 \\ &= -\alpha^2 + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = -\alpha^2 + \eta_{ij}\beta^i\beta^j \\ &= -\alpha^2 + \beta_i\beta^i, \end{aligned} \quad (2.33)$$

y la componente g_{0i}

$$\begin{aligned} g_{0i} &= \mathbf{g}(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_i) = (\alpha\vec{n} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\partial}_i \vec{\beta} \cdot \vec{\partial}_i \\ &= \vec{\beta} \cdot \vec{\partial}_i = \beta_j \bar{d}x^j \cdot \vec{\partial}_i = \beta_j \delta_j^i \\ &= \beta_i. \end{aligned} \quad (2.34)$$

El mismo procedimiento se sigue para la componente g_{0j} para llegar a que $g_{0j} = \beta_j$. En cuanto a la componente g_{ij} , puesto que $\vec{\partial}_i$ y $\vec{\partial}_j$ son tangentes a Σ_t ,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathbf{g}(\vec{\partial}_i, \vec{\partial}_j) = \boldsymbol{\eta}(\vec{\partial}_i, \vec{\partial}_j) \\ &= \eta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Podemos ahora escribir las componentes de la 4-métrica en su forma matricial en términos del vector desplazamiento, de la función lapso y la 3-métrica.

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k\beta^k & \beta_j \\ \beta_i & \eta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

o, como elemento de línea:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\alpha^2 dt^2 + \eta_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt). \quad (2.37)$$

Las componentes de la métrica inversa se obtienen invirtiendo matricialmente (2.36):

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{0j} \\ g^{i0} & g^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} & \frac{\beta^j}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^i}{\alpha^2} & \eta^{ij} - \frac{\beta^i\beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

donde $\eta^{ij} = (\eta_{ij})^{-1}$.

Consideremos ahora los determinantes de las 4- y 3-métricas, $g := \det g_{\alpha\beta}$ y $\eta = \det \eta_{ij}$ ^e. Con un poco de álgebra elemental se puede demostrar que

$$g^{00} = \frac{\eta}{g}, \quad (2.39)$$

^eNótese que g y η dependen de la elección de coordenadas (x^α) debido a que son densidades escalares y no meros escalares.

o lo que es equivalente, usando el valor de g^{00} obtenido en (2.38),

$$\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\eta}. \quad (2.40)$$

2.3. Respecto a los observadores y líneas de mundo

De acuerdo con la cinemática, una partícula puntual es descrita completamente por la trayectoria que ésta sigue. Consideremos una partícula puntual en el espacio-tiempo. A dicha trayectoria se le conoce como *línea de mundo*, \mathcal{L} . Se dice que una línea de mundo es *tipo tiempo* si cualquier vector tangente asociado a cada evento de la línea de mundo se encuentra dentro del cono de luz asociado a dicho evento.

Previamente se definió como observador Euleriano, \mathcal{O}_E , aquel cuya 4-velocidad es el vector tipo tiempo, ortonormal a las hipersuperficies Σ_t , \vec{n} . De esta definición se sigue que la línea de mundo de dicho observador es ortogonal a las hipersuperficies Σ_t . Ésto físicamente significa que la hipersuperficie Σ_t es (localmente) el conjunto de eventos que son simultáneos^f desde el punto de vista del observador Euleriano \mathcal{O}_E .

El *tiempo propio* $d\tau_0$ correspondiente a un desplazamiento $d\vec{x}$ –con componentes dx^α –, a lo largo de \mathcal{L} no es otra cosa mas que la magnitud de $d\vec{x}$:

$$d\tau_0 = \sqrt{-g(d\vec{x}, d\vec{x})}. \quad (2.41)$$

La 4-velocidad \vec{u} de nuestra partícula, con componentes $dx^\alpha/d\tau_0$, se define como

$$\vec{u} := \frac{d\vec{x}}{d\tau_0}. \quad (2.42)$$

Por construcción \vec{u} es un 4-vector unitario con respecto a g , tangente a \mathcal{L}

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = -1, \quad (2.43)$$

además de que no está definido respecto a algún observador.

Sea $p \in \Sigma_t$. Sea \mathcal{O} un observador en p con línea de mundo tipo tiempo \mathcal{L} y tiempo propio τ_0 . A un tiempo coordenado $t + dt$, \mathcal{O} se encuentra en

^fDe acuerdo con la convención de simultaneidad de Einstein.

$q \in \Sigma_{t+dt}$. El tiempo propio $\tau + d\tau$ de q medido por \mathcal{O}_E se obtiene de proyectar ortogonalmente a q sobre su línea de mundo, es decir, sobre el vector \vec{n} . Sea $d\vec{l}$ el vector desplazamiento infinitesimal que une dicha proyección con q y $d\tau_0$ el tiempo propio transcurrido entre el punto p y q a lo largo de \mathfrak{L} . Definimos el *factor de Lorentz* entre el observador Euleriano \mathcal{O}_E y \mathcal{O} como el factor de proporcionalidad γ entre $d\tau_0$ y τ ; esto es

$$d\tau = \gamma d\tau_0. \quad (2.44)$$

Una vez más por construcción tenemos que

$$d\tau_0 \vec{u} = d\tau \vec{n} + d\vec{l}. \quad (2.45)$$

Aplicando el producto escalar con \vec{n} y usando el hecho de que $\vec{n} \cdot d\vec{l} = 0$ junto con la ecuación (2.43) llegamos a que

$$\gamma = -\vec{n} \cdot \vec{u} = -n_\alpha u^\alpha = \alpha u^0, \quad (2.46)$$

llegando a un valor concreto de γ en términos de u^0 . Así que desde un punto de vista puramente geométrico podemos afirmar que el factor de Lorentz es el negativo del producto interno entre dos 4-velocidades sujetos a dos observadores. En nuestro caso serían el \mathcal{O}_E y \mathcal{O} .

La velocidad de \mathcal{O} respecto a \mathcal{O}_E se define como el cociente entre el desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$ y el tiempo propio $d\tau$ de \mathcal{O}_E , esto es:

$$\vec{V} := \frac{d\vec{l}}{d\tau}. \quad (2.47)$$

Nótese que por construcción \vec{V} es tangente a Σ_t . Podemos ahora reescribir la identidad (2.45) de la siguiente forma:

$$\vec{u} = \gamma(\vec{n} + \vec{V}), \quad (2.48)$$

la cual vendría siendo la descomposición ortogonal 3 + 1 de la 4-velocidad de \mathcal{O} , \vec{u} . De (2.43) llegamos al siguiente resultado relevante:

$$\gamma = (1 - \vec{V} \cdot \vec{V})^{-1/2} = (1 - \eta_{ij} V^i V^j)^{-1/2}. \quad (2.49)$$

donde el último miembro viene del producto interno con respecto a la 3-métrica curva, η ; a diferencia de la relatividad especial que la 3-métrica siempre es plana.

Introducimos ahora la *velocidad coordenada*, definida de la siguiente manera:

$$\vec{v} := \frac{d\vec{x}_c}{dt}, \quad (2.50)$$

donde $d\vec{x}$ es el desplazamiento correspondiente a la desviación de \mathfrak{L} con respecto a la línea de $x^i = \text{constante}$. Considerando las componentes de la 4-velocidad de la partícula, u^α , las componentes de la velocidad coordenada son

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{u^i}{u^0} = \frac{\alpha}{\gamma} u^i, \quad (2.51)$$

donde la última igualdad se obtuvo de (2.46).

Recordando que $\vec{\beta}dt$ es el corrimiento de la línea $x^i = \text{constante}$ de la línea de mundo \mathcal{O}_E entre las hipersuperficies Σ_t y Σ_{t+dt} , tenemos

$$d\vec{l} = dt\vec{\beta} + d\vec{x}. \quad (2.52)$$

Dividiendo esta relación entre $d\tau$

$$\frac{d\vec{l}}{d\tau} = \vec{\beta} \frac{dt}{d\tau} + \frac{d\vec{x}}{d\tau} \quad (2.53)$$

obtenemos la relación entre la velocidad Euleriana y la velocidad coordenada

$$\vec{V} = \frac{1}{\alpha}(\vec{\beta} + \vec{v}). \quad (2.54)$$

2.4. Ecuaciones de campo de Einstein

En relatividad general, el campo gravitacional se mide por la curvatura del espacio-tiempo, y la curvatura es generada por la presencia de materia. La energía, el momento y esfuerzo de la materia esta representado por el tensor de energía momento \mathbf{T} , con componentes $T_{\mu\nu}$ (del cual hablaremos con más detalle en el siguiente capítulo), el cual es un campo tensorial en \mathcal{M} . Todas aquellas fuentes no gravitacionales de energía y momento en el Universo contribuyen en $T_{\mu\nu}$.

Considerando a $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ globalmente hiperbólico y sea $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ una foliación de \mathcal{M} por una familia de hipersuperficies tipo espacio. Las Ecuaciones de

Einstein (EE) conectan la geometría del espacio-tiempo con el contenido de materia local en el Universo de acuerdo con

$$\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T} \quad (2.55)$$

donde \mathbf{G} es el tensor de Einstein dado por

$$\mathbf{G} = \mathbf{R} - \frac{1}{2}R\mathbf{g}, \quad (2.56)$$

donde \mathbf{R} es el *tensor de Ricci* asociado a \mathbf{g} , R el *escalar de curvatura*[§].

2.5. Conclusiones

Con el fin de establecer un sistema de ecuaciones adecuado para un enfoque Lagrangiano de la hidrodinámica relativista –el cual describiremos en el siguiente capítulo– es necesario separar al espacio y al tiempo. Esto se puede lograr usando el formalismo 3+1, descrito en el presente capítulo. Esta formulación nos permitirá plantear problemas en RG como problemas de condiciones iniciales, como en la dinámica convencional.

[§]El procedimiento para calcular el tensor de Einstein es el siguiente:

1. Calcular los símbolos de Christoffel,
2. Calcular el tensor de curvatura,
3. Calcular el tensor de Ricci y
4. Calcular el escalar de curvatura.

Capítulo 3

Hidrodinámica

La hidrodinámica es la rama de la física que estudia a los fluidos (líquidos y gases). En este capítulo se deducen las ecuaciones de la hidrodinámica tanto clásicas como relativistas.

3.1. Introducción

Se consideran fluidos a aquellos materiales que no resisten fuerzas de corte por mucho tiempo [1]; esto es que son materiales que pueden ser deformados sin sentir oposición de su parte. Cuando se habla de un fluido en general uno se refiere a líquidos y gases ya que ambos presentan estas propiedades, a diferencia de los sólidos que tienen una forma bien definida y cuya dinámica interna y reacción ante agentes externos es completamente distinta. Otra característica importante cuando se entra en el tema de fluidos es que este medio se considera como un *continuo* en el sentido de que sus componentes más fundamentales (moléculas, átomos, electrones, neutrones, etc.) son lo suficientemente pequeños que nos permite considerar elementos de fluido infinitesimales (con respecto a las dimensiones del fluido) lo suficientemente grandes como para despreciar el movimiento individual y errático de dichas componentes. Sin embargo, las propiedades macroscópicas del fluido mismo aún son las que caracterizan a ese elemento de fluido.

Para describir matemáticamente el estado de un fluido en movimiento [25] necesitamos encontrar funciones que nos den la distribución de la velocidad del

fluido $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ (éstas corresponden a las velocidades coordenadas definidas en Sec. 2.3) y de cualesquiera dos cantidades termodinámicas características del fluido en cada punto de éste. Es bien sabido en la literatura [13, 15] que para un fluido homogéneo –aquel cuya composición interna es la misma en todas partes del fluido– compuesto de una sola componente química, las cantidades termodinámicas podrán ser conocidas dadas dos de ellas y la respectiva ecuación de estado (de la cual hablaremos más adelante). Por lo tanto, si además de esas dos cantidades conocemos las tres componentes de la velocidad \vec{v} para un instante dado, entonces, como veremos más adelante, podremos determinar el estado del fluido en ese instante.

Para describir un fluido existen dos tipos de enfoques:

1. *Euleriano*: consiste en describir al fluido desde la perspectiva de un observador fijo y fuera del fluido, analizando las propiedades físicas que describen el estado del fluido en movimiento. Por llamarlo de alguna manera, esta descripción corresponde a la de un observador “espectador”. En términos matemáticos, el cambio en el tiempo de cualquier cantidad en un punto equivale a calcular la derivada parcial, $\partial/\partial t$, evaluada en dicho punto [10].
2. *Lagrangiano*: consiste en describir el fluido desde el punto de vista de un elemento de fluido. Esto es analizar cómo cambian las cantidades inherentes al fluido en dicho elemento de volumen, lo cual implica que nuestro sistema de referencia se mueve junto con el elemento de fluido. A este sistema de referencia se le llama *comóvil*, y el cambio en el tiempo de cualquier cantidad en dicho elemento de volumen estará descrita por la derivada Lagrangiana (o también llamada sustancial por algunos autores), D/Dt .

Para encontrar la derivada Lagrangiana consideremos una cantidad Q en un elemento de fluido que se encuentra en una posición \vec{r} a un tiempo t . Al

tiempo $t + \delta t$ el elemento de fluido se encuentra en la posición $\vec{r} + \delta\vec{r}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{DQ}{Dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [Q(\vec{r} + \delta\vec{r}, t + \delta t) - Q(\vec{r}, t)] \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [Q(\vec{r}, t + \delta t) - Q(\vec{r}, t) + Q(\vec{r} + \delta\vec{r}, t + \delta t) - Q(\vec{r}, t + \delta t)] \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\frac{\partial Q(\vec{r}, t)}{\partial t} \delta t + \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} Q(\vec{r}, t + \delta t) \right] \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\frac{\partial Q(\vec{r}, t)}{\partial t} \delta t + \delta\vec{r} \cdot \left\{ \vec{\nabla} Q(\vec{r}, t) + \delta t \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q(\vec{r}, t) + \dots \right\} \right].
\end{aligned}$$

Despreciando los términos de segundo orden en $\delta\vec{r}$ y tomando el límite cuando $\delta t \rightarrow 0$, llegamos finalmente a que la derivada lagrangiana es

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} Q(\vec{r}, t), \quad (3.1)$$

donde \vec{v} es la velocidad del fluido. Obsérvese que, además de la derivada temporal (evolución para un observador Euleriano), aparece un término resultado del hecho que el elemento de fluido ha cambiado a una posición donde Q tiene un valor distinto. A este término se le conoce como *derivada convectiva* [3, 10].

3.2. Ecuaciones de movimiento de un fluido

3.2.1. Conservación de la masa

Sea V un volumen fijo completamente sumergido en un fluido y envuelto por la superficie S . Sea $\rho(\vec{r}, t)$ la densidad de masa del fluido en el punto \vec{r} al tiempo t , la razón de cambio de la masa contenida en V es

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\vec{r}, t) d^3x. \quad (3.2)$$

Si en V no existen fuentes o sumideros de materia, entonces, para que ésta se conserve, la expresión (3.2) debe ser igual al flujo de material que atraviesa S .

El flujo de materia del fluido que atraviesa el elemento de superficie, $d\vec{\sigma}$,

hacia afuera de V es $\rho \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}^a$. Entonces, la masa que pierde el volumen V es

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) d^3x.$$

Por lo tanto

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d^3x = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) d^3x, \quad (3.3)$$

o bien, dado que esto es válido para cualquier V ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.4)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de continuidad (Euleriana) o ley de conservación de la masa [3, 10, 14, 25].

En el caso Lagrangiano, partiendo de (3.1) y usando (3.4),

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \\ &= -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \\ &= -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

o bien,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.6)$$

De (3.6) encontramos automáticamente la definición de un fluido incompresible:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

Esto además de decirnos que ρ es constante en nuestro elemento de fluido (no todo el fluido), implica $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Esto último quiere decir que dentro de nuestro elemento de fluido ningún agente externo (presión, por ejemplo) hará que las líneas de campo de velocidades converjan a un punto; o en otras palabras, el volumen de nuestro elemento de fluido se preservará a lo largo de su trayecto mientras no haya cambios en la materia contenida en él.

^aPara ver esto supongamos que \vec{v} en $d\vec{\sigma}$ forma un ángulo θ con el vector normal $d\vec{\sigma}$. La distancia recorrida por las partículas del fluido por unidad de tiempo en la dirección $d\vec{\sigma}$ es $l := v \cos(\theta) = \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} / |d\vec{\sigma}|$. La masa del fluido que atraviesa la superficie en ese instante es finalmente $\rho l |d\vec{\sigma}| = \rho \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$

3.2.2. Ecuación de Euler

Consideremos nuevamente la superficie S sumergida en un fluido incompresible. Recordemos que a nivel microscópico las moléculas de un fluido se encuentran en un estado de movimiento aleatorio. La presión que “siente” S debido al fluido no es otra cosa mas que el flujo de momento asociado a estos movimientos aleatorios [10]. Si además consideramos que estos movimientos son isotrópicos, es decir que las fuerzas de corte resultantes son nulas^b podemos en ese caso afirmar que la fuerza neta que siente S es

$$\begin{aligned}\vec{F} &= - \oint_S P d\vec{\sigma} \\ &= - \int_V \vec{\nabla} P d^3x,\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde P es la presión que ejerce el fluido sobre S , y en la última relación se uso el teorema de la divergencia para un campo escalar. Siguiendo nuestro elemento de volumen, la aceleración de éste es

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P.\tag{3.8}$$

Cualquier densidad de fuerza externa (\vec{F}) que actúe sobre el fluido deberá ser agregada a la parte derecha de esta ecuación:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{F}.\tag{3.9}$$

Por ejemplo, si Φ es el potencial gravitacional Newtoniano entonces $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$. Esta ecuación es la forma Lagrangiana de la ecuación de conservación de momento. Desde el punto de vista de un observador Euleriano, la ecuación equivalente a (3.9) es

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{F}.\tag{3.10}$$

^bLas fuerzas de corte se definen como aquellas que son tangentes a la superficie de los elementos de volumen del fluido y pueden ser de dos tipos: debido a la presión entre fluidos —si no es isotrópica llevan a la presencia de momento angular en los elementos de fluido— y debido a las fuerzas de corte. Las primeras en general no se toman en cuenta en los modelos puesto que se consideran elementos de fluido tan pequeños que no presentan momento angular intrínseco. Con respecto a las segundas son las responsables de la deformación de nuestro elemento de fluido, relacionadas obviamente producto de la viscosidad [23].

3.2.3. Ecuación de la energía

De la primera ley de la termodinámica sabemos que $dU = dW + dQ$, donde dU es el cambio de la energía interna, $dW = -PdV$ es el trabajo realizado y dQ cualquier otra manifestación de transferencia de energía que no sea mecánica en nuestro sistema. Para nuestro elemento de fluido

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -P \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \dot{q}_e \\ &= \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} - \dot{q}_e, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde u es la energía interna específica^c y \dot{q}_e es una función de “enfriamiento”, en el sentido de que será positiva si nuestro elemento de volumen pierde calor (por unidad de masa) de alguna forma y negativa si sufre algún proceso externo de calentamiento.

Definimos ahora la *densidad de energía total* del sistema

$$\varepsilon := \rho \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + u + \Phi \right), \quad (3.12)$$

donde Φ es la energía potencial de alguna fuerza que actúe sobre el fluido, por ejemplo: la fuerza gravitacional. En esta expresión podemos reconocer cada término como energía cinética, energía interna y energía potencial, respectivamente. El cambio de ε en el tiempo en nuestro elemento de fluido es

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} &= \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + u + \Phi \right) \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + u + \Phi \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{Du}{Dt} + \frac{D\Phi}{Dt} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} - \dot{q}_e + \frac{D\Phi}{Dt} \right). \end{aligned}$$

Usando la ecuación de continuidad (3.6), y la conservación de momento (3.9),

^cDe aquí en adelante se denotarán con minúsculas a las cantidades termodinámicas específicas. Por simplicidad las llamaremos con el mismo nombre que sus correspondientes intensivas a menos que se especifique lo contrario.

llegamos a que

$$\begin{aligned}
\frac{D\varepsilon}{Dt} &= -\varepsilon\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \rho\left(-\frac{1}{\rho}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}P - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi - \frac{P}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \dot{q}_e + \frac{D\Phi}{Dt}\right) \\
&= -\varepsilon\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}P - \rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi - P\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \rho\dot{q}_e + \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi \\
\frac{D\varepsilon}{Dt} &= -(\varepsilon + P)\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}P - \rho\dot{q}_e + \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Este resultado es la ecuación de *conservación de la energía* para un elemento de fluido. La versión Euleriana de (3.13) la obtenemos usando la definición de derivada Lagrangiana (3.1):

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\varepsilon = -(\varepsilon + P)\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}P - \rho\dot{q}_e + \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

o bien,

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot[(\varepsilon + P)\vec{v}] = \rho\dot{q}_e + \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{3.14}$$

3.2.4. Ecuación de estado

Recordando de la termodinámica clásica que para cualquier fluido es posible encontrar una relación entre sus parámetros termodinámicos, por ejemplo: la presión P , la densidad ρ y la entropía específica s ; la cual represente los estados en equilibrio posibles del sistema [15, 13, 23]. A dicha relación se le conoce como *ecuación de estado*, y en general es de la forma

$$f(P, \rho, s) = 0, \tag{3.15}$$

donde V es el volumen, P la presión y T la temperatura. Esta ecuación puede resolverse para cualquiera de sus tres variables, digamos la presión:

$$P = P(\rho, s). \tag{3.16}$$

Fluido perfecto

Consideremos un fluido perfecto en el que únicamente ocurren procesos adiabáticos en sus elementos, es decir que la entropía se mantiene constante; sin embargo, esto no implica que globalmente la entropía sea constante pues

ésta puede variar de un elemento de fluido a otro. La ecuación de estado para este sistema es

$$P = (\Gamma - 1)u\rho \quad (3.17)$$

donde Γ es el cociente entre calores específicos. La derivación de (3.17) es directa: sabemos *a priori* que la energía interna U de un gas ideal es función únicamente de la temperatura y no del volumen, es decir $U = U(T)$. Esto nos lleva automáticamente a que

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT = C_V dT, \quad (3.18)$$

que al integrarla llegamos a que

$$U = C_V T, \quad (3.19)$$

donde C_V es el calor específico a volumen constante, y la constante de integración se asumió como cero. Sustituyendo T de la ecuación de estado de un mol de gas ideal $PV = RT$, donde R la constante de los gases ideales, en la ecuación anterior llegamos a que

$$U = \frac{C_V}{R} PV = \frac{C_V}{C_P - C_V} PV = \frac{1}{\Gamma - 1} PV \quad (3.20)$$

donde el penúltimo miembro se obtuvo del hecho de que para un gas ideal $R = C_P - C_V$, mientras que en el último $\Gamma = C_P / C_V$. Finalmente, considerando la energía interna específica u y el volumen específico, es decir la densidad de masa ρ , llegamos a (3.17).

Fluido barotrópico

Supongamos ahora que tenemos una columna de algún fluido perfecto. Este fluido se dice que es *barotrópico* si las superficies de presión constante coinciden con las superficies de densidad constante. Esto permite establecer una ecuación de estado genérica para este tipo de fluidos:

$$P = P(\rho). \quad (3.21)$$

En otras palabras un fluido barotrópico se refiere tanto a fluidos isoentrópicos como a fluidos isotérmicos. Con el fin de tener un fluido isoentrópico podemos asumir que la temperatura global de éste se encuentra muy cercana al cero absoluto [45, 44, 36].

Un caso muy útil y sencillo de un fluido barotrópico en equilibrio está dado por la ecuación de estado politrópica:

$$P = K\rho^\Gamma = \kappa\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (3.22)$$

donde K es la *constante politrópica*, y se define la cantidad n , conocida como el *índice politrópico*. Modelos estelares que satisfacen (3.22) se les conoce como *sistemas politrópicos*, o simplemente *polítropas*.

3.3. Hidrodinámica relativista

3.3.1. Derivada lagrangiana

En relatividad general la derivada lagrangiana toma una forma muy sencilla. Partiendo de su definición clásica (3.1) y de la forma de la velocidad coordenada dada en (2.51),

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{u^0}{u^0} \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{u^i}{u^0} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{u^0} \left(u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \frac{\alpha}{\gamma} u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.3.2. Conservación del número bariónico

La ecuación de conservación indispensable para el estudio de fluidos es la del número bariónico

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}_B = 0, \quad (3.24)$$

donde

$$\vec{\mathbf{J}}_B := n_B \vec{\mathbf{u}} \quad (3.25)$$

es la *4-corriente del número bariónico*, y n_B la *densidad de número bariónico*. Definimos entonces la *densidad de número bariónico medida por un observador Euleriano* \mathcal{O}_E :

$$\mathcal{N}_B := -\vec{\mathbf{J}}_B \cdot \vec{\mathbf{n}}. \quad (3.26)$$

Combinando las ecuaciones (2.46) y (3.25) obtenemos

$$\mathcal{N}_B = \gamma n_B. \quad (3.27)$$

Esto era de esperarse puesto que tanto \mathcal{N}_B como n_B son densidades; es decir que $[\mathcal{N}_B] = [n_B] = L^{-3}$, por lo que están propensas a una contracción de Lorentz en la dirección de movimiento del elemento de fluido en cuestión.

De igual forma, la 4-corriente del número bariónico medida por \mathcal{O}_E está dada por la proyección ortogonal de $\vec{\mathcal{J}}_B$ sobre Σ_t , esto es:

$$\vec{\mathcal{J}}_B := \hat{\eta}(\vec{\mathcal{J}}_B). \quad (3.28)$$

Tomando en cuenta la ecuación (2.48) es obvio que $\hat{\eta}(\vec{u}) = \gamma\vec{V}$, y por tanto

$$\vec{\mathcal{J}}_B = \mathcal{N}_B \vec{V}. \quad (3.29)$$

Es directo generalizar la ley de conservación del número bariónico a la de conservación de masa bariónica si suponemos que la masa en reposo por barión m es constante^d. De esta forma la densidad de masa bariónica en reposo $\rho = mn_B$, o simplemente *densidad de masa en reposo*, satisface

$$\nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0. \quad (3.30)$$

De manera análoga a n_B definimos la *densidad relativista de masa en reposo medida por un observador Euleriano \mathcal{O}_E* :

$$\mathcal{D} := \gamma\rho. \quad (3.31)$$

Recordando que estamos en busca de las ecuaciones hidrodinámicas en su forma lagrangiana aplicamos (3.23) a \mathcal{D} ,

$$\begin{aligned} \frac{D\mathcal{D}}{Dt} &= \gamma \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D\gamma}{Dt} \\ &= -\mathcal{D}\nabla \cdot \vec{v} + \rho \frac{D\gamma}{Dt}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sin embargo, con el fin práctico de tener una ecuación de continuidad similar (en forma) a (3.6) re-definimos la densidad relativista de masa de la siguiente forma:

$$\mathcal{D}^* := \sqrt{-g} \frac{\gamma}{\alpha} \rho = \sqrt{\eta} \gamma \rho = \sqrt{\eta} \mathcal{D}. \quad (3.33)$$

^dRecordemos que los bariones más estables en la naturaleza son los neutrones y protones, y cuyas masas en reposo son aproximadamente iguales. Esto nos permite asumir una sola masa en reposo global para los bariones en nuestro sistema.

Calculemos ahora la derivada lagrangiana de \mathcal{D}^* usando (3.23):

$$\begin{aligned}
\frac{D\mathcal{D}^*}{Dt} &= \frac{\alpha}{\gamma} u^\mu \frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial x^\mu} = \frac{\alpha}{\gamma} u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} \frac{\gamma}{\alpha} \rho \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (u^\mu \sqrt{-g} \rho) - \sqrt{-g} \frac{\gamma}{\alpha} \rho \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\alpha}{\gamma} u^\mu \right) \\
&= -\mathcal{D}^* \frac{\partial v^i}{\partial x^i},
\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde la última igualdad se obtuvo usando (3.30) y (2.51). Obsérvese que esta última ecuación, a diferencia de la ecuación (3.33), no presenta derivadas del factor de Lorentz. El hecho de que en el lado derecho de la ecuación (3.32) aparezca una derivada temporal da la impresión de que se tiene un término “fuente”, además de que al momento de resolverlas numericamente dicho término puede generar errores e inestabilidades [46]. Eso es lo que hace a la ecuación (3.34) apropiada para cálculos numéricos; principalmente para el método SPH, del que hablaremos con mucho más detalle en el capítulo siguiente.

3.3.3. Tensor de energía-momento

El tensor de energía-momento \mathbf{T} , como se vió en el capítulo 2, es un campo tensorial en una variedad \mathcal{M} que describe la materia contenida en el espacio-tiempo. \mathbf{T} es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ que es simétrico y, dado un observador Euleriano \mathcal{O}_E con 4-velocidad $\vec{\mathbf{n}}$, satisface las siguientes propiedades:

- La densidad de energía total relativista medida por \mathcal{O}_E es

$$E = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{n}}) \tag{3.35}$$

- La densidad de momento relativista medido por \mathcal{O}_E es

$$\vec{\mathbf{p}} = -\mathbf{T}(\vec{\mathbf{n}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}(\cdot)), \tag{3.36}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ es el proyector ortogonal sobre la hipersuperficie Σ , visto en el capítulo 2.

- El tensor de esfuerzos medido por \mathcal{O}_E es

$$\mathbf{S} = \hat{\boldsymbol{\eta}}^* \mathbf{T}. \tag{3.37}$$

3.3.4. Fluido perfecto

Las variables que caracterizan completamente a un fluido perfecto son la 4-velocidad \vec{u} de un observador que se mueve con el fluido, la densidad de masa bariónica en reposo ρ , la energía interna específica u , y la presión isotrópica P en el sistema de referencia del fluido [24]. Todas ellas medidas desde el sistema de referencia local del fluido. En el análisis del fluido también son útiles la densidad de energía interna ρu , la densidad de masa-energía $\rho(1 + u)$ y la densidad de energía portadora de inercia ρw , donde $w = 1 + u + P/\rho$ es la entalpía relativista.

El modelo de un fluido perfecto es completamente definido por el siguiente tensor energía-momento:

$$\mathbf{T} = \rho w \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + P \mathbf{g} \quad (3.38)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ es la 1-forma asociada a la 4-velocidad \vec{u} y w la entalpía específica relativista. En una base coordenada de Ec. (3.38) se escribe

$$T_{\mu\nu} = \rho w u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}. \quad (3.39)$$

3.3.5. Conservación de la energía y momento

Es natural y fundamental comenzar el análisis del comportamiento de fluidos (relativistas) con las leyes de conservación. En primer lugar tenemos la ley de conservación (local) de la energía y momento del fluido^e

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = 0, \quad (3.40)$$

donde $\vec{\nabla} \cdot (\cdot) \equiv \nabla^\mu$ es el operador divergencia covariante. Las componentes de (3.40) en una base son

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} \nabla_\mu T_{\alpha\nu} = \nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad (3.41)$$

donde la penúltima igualdad se obtiene de considerar que ∇_μ es una conexión métrica (Cap. 2).

La expresión final a la que se llega después de desarrollar (3.41) es

$$\frac{D}{Dt}(w u_\mu) = -\frac{1}{\mathcal{D}^*} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} (P \sqrt{-g}) - \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\alpha\beta} \right]. \quad (3.42)$$

^eEn el presente trabajo se asume que el fluido en cuestión se encuentra aislado y que no está cargado.

Conservación del momento relativista

De la ecuación (3.42) obtenemos la ecuación de conservación de momento tomando las componentes espaciales; es decir tomando los valores espaciales, $\mu = i$, y considerando

$$u_i = g_{i\nu}u^\nu = \beta_i \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} \eta_{ij}v^j = \gamma \eta_{ij}U^j, \quad (3.43)$$

donde se usaron las entradas g_{i0} y g_{ij} de (2.36) junto con (2.54). Así pues, llegamos a

$$\frac{DS_i}{Dt} = -\frac{1}{\mathcal{D}^*} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (P\sqrt{-g}) - \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{\alpha\beta} \right], \quad (3.44)$$

donde se introdujo el *momento específico relativista*, $S_i := w\gamma\eta_{ij}U^j$, a partir de $\mathcal{D}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{p}}$.

Conservación de la energía relativista

De la ecuación (3.42) obtenemos la ecuación de conservación de momento tomando las componentes espaciales; es decir tomando la coordenada temporal, $\mu = 0$, y considerando

$$\frac{D}{Dt}(wu_0) = -\frac{1}{\mathcal{D}^*} \left[\frac{\partial}{\partial t} (P\sqrt{-g}) - \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} g_{\alpha\beta} \right]. \quad (3.45)$$

Sin embargo, esta forma no es tan conveniente debido a que contiene derivadas temporales de las variables hidrodinámicas en ambos lados de la ecuación.

Tomando en cuenta que

$$u_0 = g_{0\nu}u^\nu = (\beta^i\beta_i - \alpha^2) \frac{\gamma}{\alpha} + \beta_i \frac{\gamma}{\alpha} v^i = \gamma(\beta_i U^i - \alpha), \quad (3.46)$$

donde se usaron las componentes g_{00} y g_{0i} de (2.36), y (2.54), podemos reescribir el lado izquierdo de (3.45) como

$$wu_0 = -\alpha w\gamma + \beta^i S_i. \quad (3.47)$$

Por otro lado, reescribiendo el primer término del lado derecho de (3.45)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{D}^*} \frac{\partial}{\partial t} (P\sqrt{-g}) &= \frac{1}{\mathcal{D}^*} \frac{D}{Dt} (P\sqrt{-g}) - \frac{v^i}{\mathcal{D}^*} \frac{\partial}{\partial x^i} (P\sqrt{-g}) \\ &= \frac{D}{Dt} \left(\sqrt{-g} \frac{P}{\mathcal{D}^*} \right) - \frac{1}{\mathcal{D}^*} \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i P\sqrt{-g}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Combinando ambos resultados llegamos finalmente a la siguiente ecuación:

$$\frac{D\hat{e}}{Dt} = -\frac{1}{\mathcal{D}^*} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} P v^i) - \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{\alpha\beta} \right], \quad (3.49)$$

donde se define $\hat{e} := \alpha e - \beta^i S_i$, donde e es la energía específica total relativista,

$$e = w\gamma - \frac{P}{\mathcal{D}}, \quad (3.50)$$

que se relaciona con la densidad de energía total relativista definida en la ecuación (3.35) como $\mathcal{D}e = E$.

Para cerrar nuestro sistema de ecuaciones hidrodinámicas (3.33), (3.44) y (3.49) hace falta incluir un ecuación de estado de la forma (3.16). En el caso de un gas ideal la ecuación de estado esta dada por (3.17). El hecho de que la ecuación de estado dependa de ρ y u , y que se usen las 3-velocidades v^i para mover las partículas nos obliga a calcular las cantidades hidrodinámicas primitivas ρ , \vec{V} y P a partir de las variables que evolucionamos: \mathcal{D}^* , \vec{S} y \hat{e} . Esta transformación se obtiene resolviendo un sistema de ecuaciones algebraico altamente no lineal. En efecto, el sistema de ecuaciones a resolver para recuperar nuestras variables primitivas es

$$\rho = \frac{\mathcal{D}^* \alpha}{\gamma \sqrt{g}}, \quad (3.51)$$

$$V^i = \frac{1}{w\gamma} \eta^{ij} S_j. \quad (3.52)$$

En cuanto a la presión, ésta se obtiene a partir de recuperar la energía específica total relativista, $e = (\hat{e} + \beta^i S_i)/\alpha$, y la entalpía específica relativista w .

3.4. Conclusiones

La descripción de un fluido se puede realizar desde dos enfoques: el Euleriano y el Lagrangiano. El primero lo hace desde un sistema de referencia fijo afuera del fluido, mientras que el segundo lo hace desde el punto de vista de un elemento de fluido. Dependiendo del enfoque que se quiera asumir para describir un fluido serán las ecuaciones que se deberán resolver. Por ejemplo, el método de SPH, como veremos más adelante, es un método Lagrangiano en el sentido que pretende resolver las ecuaciones de la hidrodinámica vistas desde el punto de vista de un observador Lagrangiano.

En el caso de la HDR, gracias a la formulación 3+1 vista en el Cap. 2, fue posible plantear las ecuaciones de evolución para un fluido de manera consistente. También se definieron nuevas variables de evolución más convenientes para el método de SPH, a partir de las cuales se pueden recuperar las variables primitivas.

Capítulo 4

El método de partículas suavizadas (SPH)

En el presente capítulo describiremos lo más detallado posible el método de SPH para fluidos no relativistas (Newtoniano).

4.1. Fundamentos

El método de SPH es un método que nació con el objetivo de poder simular fenómenos astrofísicos sin simetrías y más generales, además de que fuera sencillo para trabajar y cuya precisión fuese razonable [30].

A diferencia de los métodos que se basan en formar una malla para construir las derivadas espaciales, tales como diferencias finitas o el *particles in cell*, SPH ocupa las derivadas analíticas de una función de interpolación.

El método de SPH se basa en el enfoque Lagrangiano (descrito en la sección 3.1). Esto quiere decir que las ecuaciones de movimiento a resolver serán (3.6), (3.9) y (3.13).

4.1.1. Interpolación de funciones

Como ya se mencionó arriba, la base en la que recae el método de SPH es un método de interpolación de cualquier función $f(\vec{r})$ expresada en términos de sus valores en un conjunto de puntos [16, 28, 30], que en nuestro caso vendrán siendo los elementos de volumen del fluido de los que se habla en el enfoque Lagrangiano, a los cuales por simplicidad les llamaremos *partículas*.

La aproximación $\tilde{f}_h(\vec{r})$ de $f(\vec{r})$ la obtenemos de

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \int f(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3x' \\ &= \int f(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3x' + O(h^2), \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde identificamos al primer término de (4.1) como nuestra interpolación

$$\tilde{f}_h(\vec{r}) = \int f(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3x', \quad (4.2)$$

donde $W(\vec{r} - \vec{r}', h)$ es el kernel de interpolación o de suavizado (o simplemente *kernel*), el cual es una función de soporte compacto, diferenciable; y h es la *longitud de suavizado*, la cual determina el ancho del kernel. La propiedad que uno siempre pide en una interpolación como esta es recuperar la función original en el límite cuando la longitud de suavizado tienda a cero; esto es,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{f}_h(\vec{r}) = f(\vec{r}), \quad (4.3)$$

así como también se pide que satisfaga

$$\int W(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3x' = 1, \quad (4.4)$$

lo cual quiere decir que en el límite cuando $h \rightarrow 0$ el kernel debe aproximarse a la distribución δ de Dirac.

Para poder llegar a una aproximación discreta uno puede re-escribir (4.2) como

$$\tilde{f}_h(\vec{r}) = \int \frac{f(\vec{r}')}{\rho(\vec{r}')} W(\vec{r} - \vec{r}', h) \rho(\vec{r}') d^3x', \quad (4.5)$$

donde $\rho(\vec{r})$ es la densidad de masa del fluido. De esta forma podemos discretizar la integral a una suma sobre todas las partículas, cuyas masas m_a resultan de

discretizar $\rho(\vec{r})d^3x$; esto es

$$\tilde{f}(\vec{r}_a) = \int f(\vec{r}')W(\vec{r} - \vec{r}', h)d^3x' \approx \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} f_b W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h), \quad (4.6)$$

donde N es el número total de partículas^a y el subíndice b indica que la función se está evaluando en el punto \vec{r}_b .

4.1.2. Interpolación de las derivadas de una función

En cuanto a las derivadas de $f(\vec{r})$, éstas se pueden obtener por diferenciación ordinaria ya que conocemos analíticamente el kernel; es decir, no hay necesidad de recurrir a diferencias finitas, y es justo este punto que mantiene a SPH lejos de la necesidad de construir una malla. Por ejemplo, el gradiente de $f(\vec{r})$ en la formulación de SPH tiene la forma

$$\vec{\nabla}_a f(\vec{r}_a) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} f_b \vec{\nabla}_a W(\vec{r}_a - \vec{r}_b). \quad (4.7)$$

De igual manera, dado un vector $\vec{A}(\vec{r})$

$$\vec{A}(\vec{r}_a) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \vec{A}(\vec{r}_b) W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h), \quad (4.8)$$

$$\vec{\nabla}_a \cdot \vec{A}(\vec{r}_a) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \vec{A}(\vec{r}_b) \cdot \vec{\nabla}_a W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h), \quad (4.9)$$

$$\vec{\nabla}_a \times \vec{A}(\vec{r}_a) = - \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \vec{A}(\vec{r}_b) \times \vec{\nabla}_a W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h). \quad (4.10)$$

4.2. Ecuaciones de la hidrodinámica a la SPH

Las ecuaciones que se resuelven con el método SPH son la ecuación de continuidad, de momento y de energía interna en su descripción lagrangiana. A continuación se deduce su forma para el formalismo de SPH.

^aDe ahora en adelante se asumirá que las sumas son sobre todas las partículas.

4.2.1. Ecuación de continuidad

Sea $f(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$. A partir de la ecuación (4.6) podemos conocer el valor interpolado de la densidad de la partícula a -ésima, y cuya expresión es la siguiente

$$\rho(\vec{r}_a) = \sum_b m_b W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h), \quad (4.11)$$

la cual es equivalente a la ecuación de continuidad.

Sea $\vec{A} = \vec{v}$ en (4.9), obtenemos:

$$\vec{\nabla}_a \cdot \vec{v}_a = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \vec{v}_b \cdot \vec{\nabla}_a W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h), \quad (4.12)$$

Esta última expresión, así como las ecuaciones (4.7), (4.9) y (4.10), nos dan una idea de la forma en como se reescribirán los lados derechos de las ecuaciones de evolución de la hidrodinámica en la formulación de SPH [38]. Sin embargo, para el caso de las ecuaciones de la hidrodinámica no es la forma más precisa de hacer la interpolación del lado derecho de las ecuaciones de evolución, o RHS por sus siglas en inglés (Right Hand Side). Se sugiere –y se verá más adelante por qué– para compensar este hecho agregar la densidad dentro de los operadores diferenciales [30]. Como ejemplo apliquemos esto al caso de $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$. La expresión a interpolar sería

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho. \quad (4.13)$$

Usando los resultados obtenidos hasta el momento,

$$\rho_a (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})_a = \sum_b m_b \vec{v}_b \cdot \vec{\nabla}_a W_{ab} - \vec{v}_a \cdot \sum_b m_b \vec{\nabla}_a W_{ab}, \quad (4.14)$$

$$= \sum_b m_b (\vec{v}_b - \vec{v}_a) \cdot \vec{\nabla}_a W_{ab}, \quad (4.15)$$

donde por simplicidad se cambió la notación $W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h) \rightarrow W_{ab}$. Recordando la ecuación de continuidad en la formulación lagrangiana (3.6) obtenemos la ecuación de continuidad en el formalismo de SPH,

$$\frac{D\rho_a}{Dt} = \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \vec{\nabla}_a W_{ab}, \quad (4.16)$$

donde nuevamente por simplicidad se intercambia de notación $\vec{v}_a - \vec{v}_b \rightarrow \vec{v}_{ab}$.

4.2.2. Ecuación de momento

Con lo que sabemos hasta ahora es sencillo deducir la ecuación de conservación de momento (3.8). Una forma de deducirla es considerando únicamente la “segunda regla de oro” de SPH mencionada arriba; esto es, interpolando $\vec{\nabla}P = [\vec{\nabla}(\rho P) - P\vec{\nabla}\rho]/\rho$,

$$\frac{D\vec{v}_a}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla}_a P_a}{\rho_a} = \frac{1}{\rho_a^2} \sum_b m_b (P_a - P_b) \vec{\nabla}_a W_{ab}. \quad (4.17)$$

Sin embargo, hacer esto es hasta cierto punto imprudente ya que, a pesar de que (4.17) se anula correctamente cuando la presión es constante, debido a la antisimetría del gradiente del kernel, $\vec{\nabla}_a W_{ab} = -\vec{\nabla}_b W_{ab}$, la tercera ley de Newton no se satisface pues en general $P_a \neq P_b$, cuya consecuencia inmediata es que el momento lineal y angular en general no se conserven.

Para mayor precisión es conveniente calcular la interpolación de

$$\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} = \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \vec{\nabla}\rho, \quad (4.18)$$

esto es,

$$\frac{\vec{\nabla}_a P_a}{\rho_a} = \sum_b m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \vec{\nabla}_a W_{ab} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \vec{\nabla} W_{ab} \quad (4.19)$$

$$= \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \vec{\nabla} W_{ab}. \quad (4.20)$$

De donde la ecuación de momento en la formulación SPH resultante es

$$\frac{D\vec{v}_a}{Dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \vec{\nabla} W_{ab}. \quad (4.21)$$

Este último resultado muestra una clara simetría en las presiones bajo un intercambio de índices, por lo que las fuerzas que ejerce la partícula b sobre la partícula a son iguales pero en direcciones opuestas, respetando la tercera ley de Newton y asegurando la conservación tanto de momento lineal como de momento angular^b.

^bHasta el momento no se ha hablado sobre la dependencia temporal de la longitud de suavizado. Es claro que una dependencia en el tiempo de h no asegura que (4.21) sea una ecuación de conservación. Más adelante se propondrán formas de lidiar con dicho inconveniente derivado de la formulación misma, pero que una vez resuelta será una fortaleza para ella puesto que el éxito del método de SPH radica en sus excelentes propiedades de conservación [40].

4.2.3. Ecuación de la energía

Asumiendo que en los elementos de volumen ocurren procesos adiabáticos, trivialmente la ecuación de la energía interna (3.11) en la formulación de SPH es

$$\begin{aligned} \frac{Du_a}{Dt} &= \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{D\rho_a}{Dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{D}{Dt} \left(\sum_b m_b W_{ab} \right) \\ &= \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \vec{\nabla}_a W_{ab}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde se usó el resultado

$$\frac{DW_{ab}}{Dt} = \vec{v}_{ab} \cdot \vec{\nabla}_a W_{ab}. \quad (4.23)$$

4.3. El kernel

Habíamos mencionado previamente que el kernel $W(\vec{r} - \vec{r}', h)$ debía ser una función de soporte compacto. De acuerdo con [30], con esta propiedad aseguramos que para distancias $|\vec{r} - \vec{r}'| > 2h$ las interacciones son exactamente cero.

Otra propiedad que generalmente se pide en un kernel para este tipo de formulaciones es que sea radial, esto es que dependa únicamente de la distancia entre las partículas interpolantes y la interpolada, $W(\vec{r} - \vec{r}', h) = W(|\vec{r} - \vec{r}'|, h)$. Una propiedad importante en este tipo de kernels es que garantizan que el momento angular se conserve^c.

En el mismo trabajo, [30], el autor considera como regla de oro en SPH considerar siempre al kernel como una función Gaussiana dado que esto permite dar una interpretación física a las ecuaciones que de ésta se deriven. Sin

^cDado un sistema de N partículas cuya posición está dada por \vec{r}_i , con $i = 1, \dots, N$. Si éstas obedecen la ley fuerte de acción y reacción, es decir que las fuerzas \vec{F}_{ij} entre dos partículas, además de satisfacer que $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, están sobre la recta que las une $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, entonces los torques entre partículas son nulos,

$$\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = 0,$$

donde $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Esto significa que si no existen torques debido a fuerzas externas entonces el momento angular total es constante [17].

embargo, computacionalmente dicha consideración es absurda ya que una función Gaussiana es nula en $\pm\infty$. Es por ello que se propone kernels basados en “splines”, que han mostrado ser computacionalmente eficientes.

Con respecto a la forma del kernel Liu y Liu [26] hacen una exhaustiva búsqueda de aquellos que satisfacen las propiedades anteriores. De entre todos ellos usaremos el famoso *cubic spline*. Se ha comprobado que el rendimiento de dicho kernel en la práctica es mucho mejor que los otros. Sin embargo, cabe mencionar que pueden existir otros kernels de orden mayor o más eficientes que el cubic spline, pero es este último el kernel estándar.

Su forma es la siguiente:

$$W(q) = \frac{1}{\sigma h^d} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & \text{para } 0 \leq q < 1, \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3 & \text{para } 1 \leq q < 2, \\ 0 & \text{para } q > 2, \end{cases} \quad (4.24)$$

donde $q = |\vec{r} - \vec{r}'|/h$, d es el número de dimensiones en las que se aborda el problema y σ es una constante de normalización que toma los valores $2/3, 10/7\pi, 1/\pi$ para una, dos y tres dimensiones, respectivamente.

4.3.1. La longitud de suavizado

Un parámetro muy importante en la formulación SPH es la longitud de suavizado, pues es a la que se le puede asociar el concepto de resolución (espacial) en el método SPH. Si quisiéramos de alguna manera buscar similitudes entre SPH y el método de diferencias finitas, tomar una h constante en SPH sería como considerar diferencias finitas una malla en la que la distancia entre vértices no cambia. Sin embargo, hacer esto en SPH puede llevar a problemas de resolución cuando la longitud característica del problema cambie abruptamente [24]. Por otro lado, si introducimos una longitud de suavizado variable en el espacio y en el tiempo a las ecuaciones de SPH puede llevarnos a inconsistencias pues éstas fueron deducidas suponiendo que la longitud de suavizado era constante tanto en el espacio como en el tiempo. Una formulación consistente con una h variable lleva a la aparición de términos extra en dichas ecuaciones: los famosos términos “grad-h” [20, 39, 38, 40, 48]. No obstante, si asumimos que la escala alrededor de la cual la longitud de suavizado varía significativamente es mucho menor que la misma longitud de suavizado, estos términos “grad-h” serán pequeños comparados con los términos físicos en las ecuaciones y por tanto podemos omitirlos.

Con respecto a la elección y evolución de la longitud de suavizado hasta la fecha no existe una forma óptima para hacerlo pues de acuerdo a lo que se busque será la forma en como se actualice h . Por ejemplo, existe una forma que pretende mantener el número de vecinos aproximadamente constante en cada partícula [22]. Una segunda forma consiste en reducir la longitud de suavizado donde la densidad de las partículas aumente e incrementarla en caso contrario [5]. Esto lo conseguimos diferenciando la siguiente ley de escalamiento:

$$h = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \quad (4.25)$$

donde h_0 es la longitud de suavizado inicial y ρ_0 la densidad inicial. Así pues, calculando la derivada lagrangiana en ambos lados de (4.25) y usando la Ec. (3.6) obtenemos

$$\frac{Dh_a}{Dt} = \frac{1}{3} h_a \vec{\nabla}_a \cdot \vec{v}_a. \quad (4.26)$$

Una tercera forma conveniente de evolucionar h es de acuerdo a

$$h_a = \zeta \left(\frac{m_a}{\rho_a} \right)^{1/3}, \quad (4.27)$$

donde se sugiere que $1.2 \leq \zeta \leq 1.5$ [16, 40].

4.4. Viscosidad artificial

Es muy común en astrofísica toparse con sistemas cuya solución involucra “shocks” –u ondas de choque–, es decir discontinuidades en las cantidades hidrodinámicas, incluso en aquellos casos en los que las condiciones iniciales presenten un perfil suave.

Existen dos tipos de estrategias que permiten lidiar numéricamente con este tipo de situaciones:

1. Hacer uso de la solución analítica de un problema de Riemann entre dos elementos computacionales adyacentes;
2. Términos que “producen” entropía en el frente de la onda de choque, tal como lo haría la viscosidad física, pero a una escala razonable para cálculos numéricos.

Para lograr este último caso se requiere agregar términos disipativos “artificiales” extra al flujo [30, 40]. Una forma de hacerlo es que agregar dichos términos en forma de presiones.

4.4.1. Viscosidades de bulto y von Neumann-Richtmayer

En problemas que involucran choques cuyas escalas de longitud son mucho mayores que el grosor de la superficie de choque^d, se deben satisfacer los siguientes requisitos:

1. No ocurre una discontinuidad real,
2. El grosor de la membrana de choque debe ser en todos lados del orden del camino libre medio de las partículas del gas l^e , la cual será nuestro longitud parámetro,
3. No aparecen efectos notables lejos del frente de la onda de choque,
4. Las relaciones de Rankine-Hugoniot[25].

Motivados por esto, von Neumann y Richtmayer [52] propusieron como presión artificial:

$$q_{NR} = c_2 \rho l^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2, \quad (4.28)$$

donde $c_2 \sim 1$ es una constante adimensional. Esta nueva presión mostró buenos resultados para *shocks* fuertes, aunque permitía la aparición de oscilaciones en las regiones post-shock. Para evitarlas por lo general se agrega un termino más que se disipa más lentamente que tiene la forma de una viscosidad de bulto:

$$q_{NR} = c_1 \rho c_s l (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}), \quad (4.29)$$

donde c_s es la velocidad del sonido y $c_1 \sim 1$ es una constante. Sumando ambos términos llegamos a que la presión viscosa artificial,

$$q_{visc} = -c_1 \rho c_s l (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + c_2 \rho l^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2. \quad (4.30)$$

^dUna onda de choque a nivel macroscópico se puede considerar como una superficie cuyo grosor es nulo si las discontinuidades son grandes. Sin embargo, dicha superficie en realidad tiene tanto estructura como grosor a nivel microscópico o cuando la discontinuidad es pequeña, en cuyo caso lo que se tiene en realidad es una capa de transición. De acuerdo con [25], para determinar la estructura y grosor se debe tomar en cuenta la viscosidad y la conductividad térmica del fluido, aunque estas sean despreciables.

^eLa deducción de la relación entre el grosor de la membrana de choque y el camino libre medio de las partículas se puede encontrar en [25].

4.4.2. Viscosidad artificial en la formulación SPH

La forma más directa de aplicar estas ideas en la formulación SPH es sustituyendo (4.9) en (4.30), identificando la densidad y velocidad del sonido con las cantidades propias de las partículas y a la longitud de suavizado como la longitud parámetro. Sin embargo, existe otra aproximación hecha en [31] que se ha convertido en la expresión de viscosidad artificial para SPH estándar. Dicha expresión es:

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ab} \mu_{ab} + \beta \mu_{ab}^2}{\bar{\rho}_{ab}} & \vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab} < 0, \\ 0 & \vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab} > 0, \end{cases} \quad (4.31)$$

donde $\alpha \sim \frac{1}{2}\beta \sim 1$ constantes^f, $\bar{\rho}_{ab} = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b)$, $\bar{c}_{ab} = \frac{1}{2}(c_a + c_b)$, $\vec{v}_{ab} = \vec{v}_a - \vec{v}_b$, $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$, y

$$\mu_{ab} = \frac{\bar{h}_{ab} \vec{r}_{ab} \cdot \vec{v}_{ab}}{r_{ab}^2 + \epsilon \bar{h}_{ab}}, \quad (4.32)$$

donde $\bar{h}_{ab} = \frac{1}{2}(h_a + h_b)$, $\epsilon = 0,01$ y $r_{ab} = |\vec{r}_a - \vec{r}_b|$.

Tomando en cuenta la viscosidad artificial, la ecuación de conservación de momento queda de la siguiente forma

$$\frac{D\vec{v}_a}{Dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \vec{\nabla}_a W_{ab} \quad (4.33)$$

y la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{Du_a}{Dt} = \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{1}{2} \Pi_{ab} \right) \vec{v}_{ab} \cdot \vec{\nabla}_a W_{ab}. \quad (4.34)$$

4.5. Pruebas: SPH clásico

En esta sección se presentan algunos resultados de nuestro código en el marco clásico.

^fEn investigaciones más recientes se ha recurrido a estrategias que permite distinguir choques de movimientos de corte permitiendo suprimir la viscosidad artificial en el último caso [2]. Otra propuesta de viscosidad dinámica es tomando $\beta = 2\alpha$, por lo que cada partícula tiene su propio coeficiente de viscosidad, α_a , el cuál se deduce resolviendo una ecuación de evolución [20, 33, 38, 40]. Ambos tratamientos no se profundizarán en el presente trabajo.

4.5.1. Tubo de Choque tipo Sod (Sod shocktube)

El famoso tubo de choque es una prueba estándar para comprobar la precisión de códigos computacionales para fluidos. En la literatura es mejor conocido como *Sod shocktube* en honor a Gary A. Sod por ser quien estudió a profundidad dicho problema [47]. La prueba consiste en un problema de Riemann[§], que lleva a la descripción de tres características principales que corresponden a la velocidad de desplazamiento de cada una de las ondas que aparecen durante la evolución del sistema, de las cuales hablaremos enseguida.

El problema de Riemann que abordaremos más frecuentemente será el de un fluido perfecto en dos fases distintas: una con presión y densidad altos (generalmente en los perfiles corresponde a la región de la izquierda), y el otro (región de la derecha) con presión y densidad bajos; ambas separadas por una membrana impermeable que a un tiempo $t = 0$ se remueve permitiendo la interacción entre ambas fases. Es a partir de este momento que aparecen tres ondas mencionadas arriba (ver Fig. 4.5.1):

- **Onda e choque.** A partir de que se retira la membrana que separa a nuestro fluido en regiones con densidades distintas una onda de choque (shock) aparece desplazándose hacia la zona de menor densidad, induciendo un drástico cambio en la densidad (y las otras cantidades hidrodinámicas) del fluido de la derecha.
- **Onda de rarefacción.** Al igual que la onda de choque, una onda de rarefacción aparece desplazándose en dirección opuesta reduciendo suavemente –a diferencia de la onda de choque cuya discontinuidad es evidente– la densidad presión y energía interna.
- **Discontinuidad de contacto.** Aparece entre la onda de choque y la onda de rarefacción. Tiene la peculiar característica que en dicha discontinuidad la presión es constante.

Con el fin de resolver este problema numericamente se desarrolló un código numérico en una dimensión basado en el método de SPH. Para la integración de (4.33) y (4.34) se recurrió a un integrador tipo predictor-corrector (Ver

[§]Un problema de Riemann consiste en probar una ley de conservación en un sistema unidimensional cuyos datos iniciales son constantes a trozos. Muy útil para entender problemas de ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólicas [51].

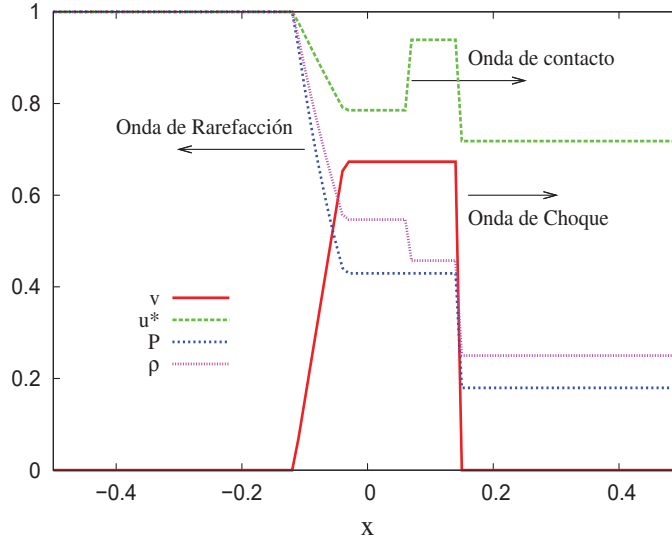


Figura 4.1: Solucion exacta del problema del tubo de choque para la velocidad tangencial v , energía interna normalizada con el valor mayor de ésta u^* , presión P y densidad ρ a un tiempo $t = 0.1$ [18]. En la figura se representa con flechas la dirección de movimiento de las tres ondas características que aparecen en el problema de un tubo de choque: onda de contacto, onda de choque y onda de rarefacción.

Apéndice A). Para la parte del predictor se usó el método de Euler

$$\begin{aligned}\vec{r}_{k+1} &= \vec{r}_k + \Delta t \vec{v}_k, \\ \vec{v}_{k+1} &= \vec{v}_k + \Delta t \left(\frac{D\vec{v}}{Dt} \right)_k,\end{aligned}$$

mientras que para el corrector se usó el método de Euler modificado

$$\vec{r}_{k+1} = \vec{r}_j + \frac{1}{2}\Delta t (\vec{v}_k + \vec{v}_{k+1}), \quad (4.35)$$

$$\vec{v}_{k+1} = \vec{v}_k + \frac{1}{2}\Delta t \left[\left(\frac{D\vec{v}}{Dt} \right)_k + \left(\frac{D\vec{v}}{Dt} \right)_{k+1} \right], \quad (4.36)$$

donde $k = 0, \dots, N_t$ representa la k -ésima iteración en el tiempo.

Ya en la prueba concreta del código desarrollado para SPH clásico, consideramos un fluido perfecto con $\Gamma = 1.4$ (ver Ec. (3.17)), unidimensional, en reposo ($v = 0$) y con las siguientes características iniciales: del lado izquierdo de la discontinuidad $\rho_L = 1$ y $P_L = 1$, y del lado derecho $\rho_R = 0.25$ y $P_R = 0.1795$. Los resultados se muestran en la Fig. 4.5.1).

Con el fin de mostrar el cambio de la solución numérica variando el valor inicial de la longitud de suavizado, h_0 , se hizo una prueba para tres valores

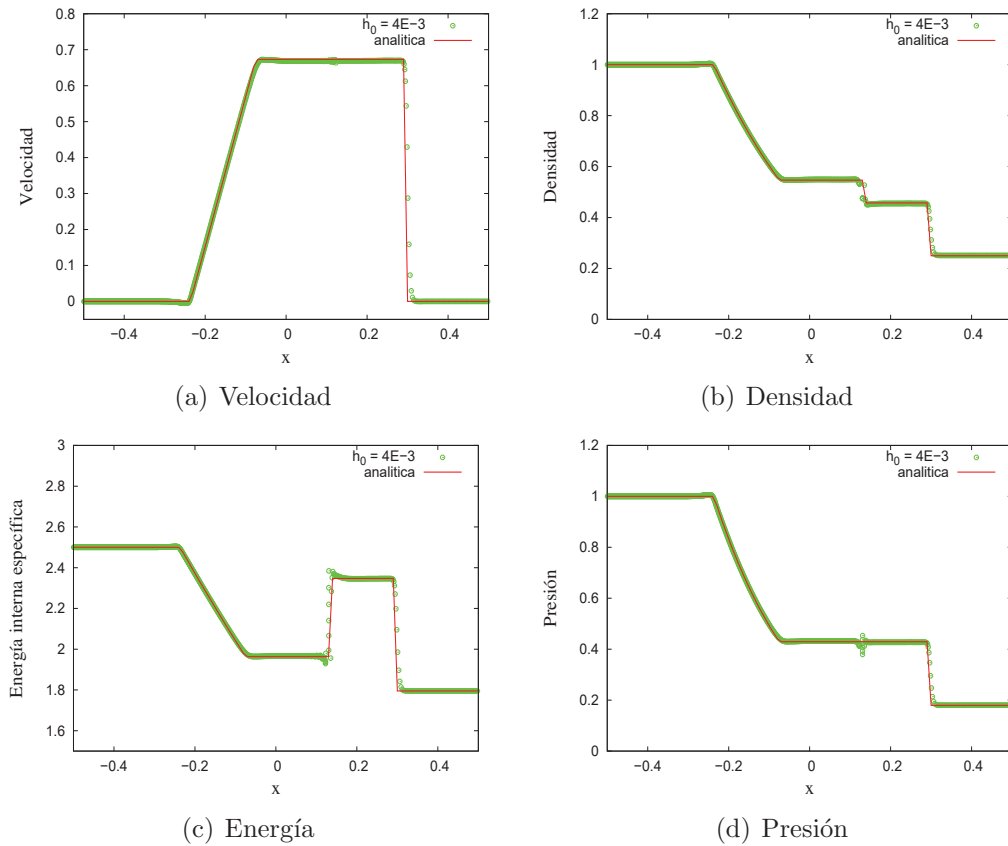


Figura 4.2: Resultados obtenidos de resolver el *Sod shocktube* clásico con el código de SPH, comparados con la solución analítica a un tiempo $t = 0.2$, usando un paso de tiempo fijo $\Delta t = 0.001$. En este caso se usó una longitud de suavizado inicial $h_0 = 0.004$, $\Gamma = 1.4$ y número de partículas $N = 1000$. Podemos ver cómo la solución numérica empalma bastante bien con la solución analítica.

distintos manteniendo el resto de los parámetros iniciales iguales para los tres casos. Los resultados se muestran en la Fig. 4.5.1.

4.5.2. Colapso isotérmico

Como una prueba más para comprobar que nuestro código funciona adecuadamente se realizó un colapso isotérmico clásico. Con colapso isotérmico nos referimos a la evolución de un fluido perfecto autogravitante con una distribución de densidad esféricamente simétrica y que inicialmente en todas partes se encuentra a la misma temperatura. Este sistema es inicialmente inestable y

por ello el inminente colapso gravitacional. Sin embargo, durante la evolución, el carácter de fluido mismo inducirá al sistema a tender a un estado final de equilibrio entre la gravedad y la hidrodinámica.

La fuerza gravitacional entre partículas se aproxima con el modelo de Plummer dada por

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gm_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{(|\vec{r} - \vec{r}_i|^2 + \epsilon^2)^{3/2}}, \quad (4.37)$$

donde ϵ es la longitud de suavizado gravitacional. Un estudio cuantitativo de éste sistema ha sido analizado en otros trabajos [32]. Puesto que no está dentro de los objetivos de la presente tesis hacer un análisis a profundidad sólo se realizó una prueba con la siguiente configuración: $\epsilon = 0.1$, $N = 1000$, $\Delta = 0.005$, $M = R = G = 1$, $\Gamma = 5/3$, $h_0 = 1.2$. En cuanto a las condiciones iniciales se tomó: $\vec{v}_i = 0$, $u_i = 0.05GM/R$ y las posiciones de las partículas se obtuvieron a partir del método de aceptación y rechazo (ver Apéndice A) con respecto a la densidad

$$\rho = \frac{M}{2\pi R^2 r}. \quad (4.38)$$

Los resultados obtenidos para este sistema se muestran en la Figura 4.4

4.6. Conclusiones

El método de SPH es un método numérico lagrangiano relativamente nuevo cuyo objetivo es resolver problemas de hidrodinámica a partir de la interpolación de las cantidades hidrodinámicas. En el presente capítulo se mostró que SPH puede lidiar con choques en un fluido clásico al agregarle un término de viscosidad a las ecuaciones de evolución. Los resultados obtenidos son bastante aceptables en el sentido de que la solución numérica empalma con la solución exacta.

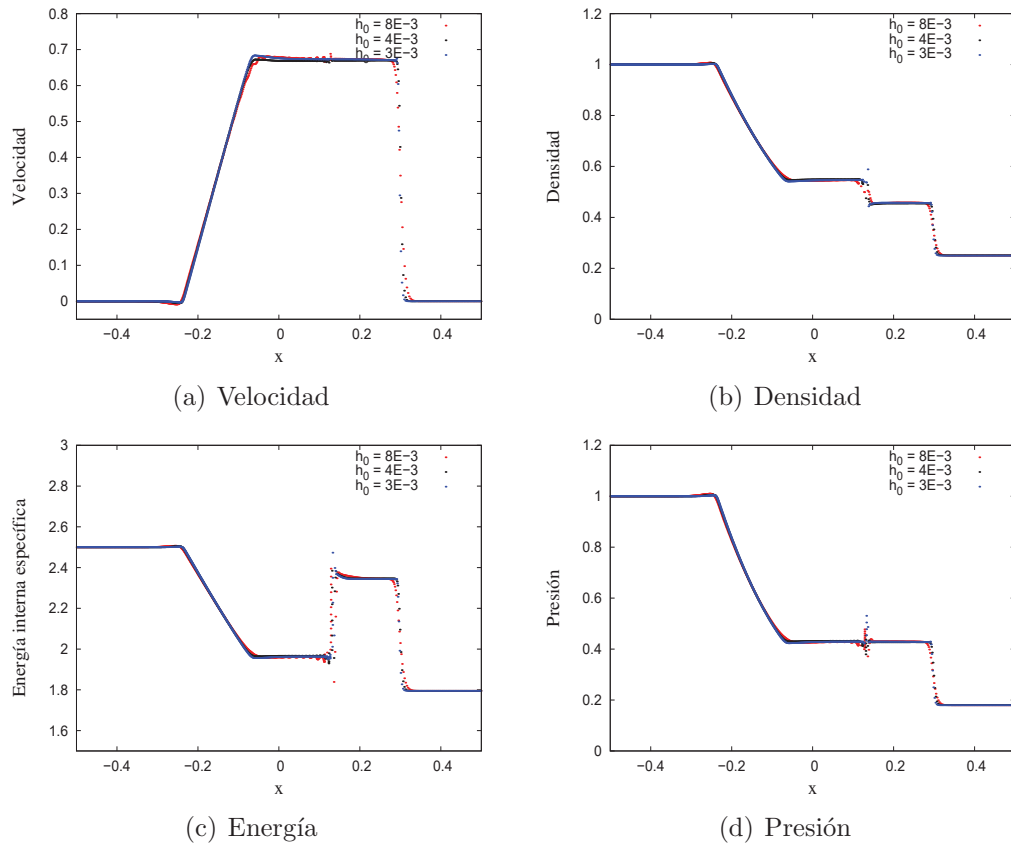


Figura 4.3: Resultados obtenidos de resolver el *Sod shocktube* clásico con el método de SPH para tres longitudes de suavizado iniciales h_0 distintas, a un tiempo $t = 0.2$, usando un paso de tiempo fijo $\Delta t = 0.001$ $N = 1000$ y $\Gamma = 1.4$. En las cuatro figuras se puede notar como para una h_0 mayor, la solución se vuelve más suave en las discontinuidades, mientras que para h_0 pequeña el ruido en la superficie de contacto crece; principalmente en 4.3(b), 4.3(c) y 4.3(d). Es para el valor intermedio $h = 0.004$ que se notó una solución no tan suave en las discontinuidades y cuyo ruido en la superficie de contacto se aminoró. Esto se debe en principio a que la amplitud del kernel crece conforme disminuya h . Una forma de contrarrestar este efecto es aumentando el número de partículas.

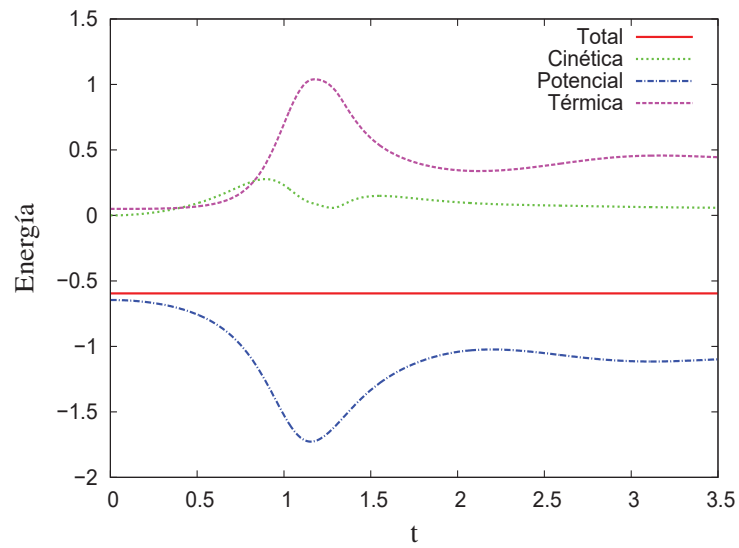


Figura 4.4: Gráfica del comportamiento de las energías cinética, potencial, térmica correspondientes al colapso.

Capítulo 5

SPH relativista

En este capítulo desarrollaremos las ecuaciones de la HDR en la formulación SPH.

5.1. (Re-) Formulación

Con el método de discretización mencionado anteriormente (Sec. 4.1) podemos derivar las ecuaciones SPH correspondientes a nuestro sistema de ecuaciones hidrodinámicas relativistas (3.33), (3.44), (3.49), más la ecuación de estado (3.16). En principio uno puede pensar que para poder discretizar de esta forma en geometrías más generales el integrando de (4.2) debe contener dentro del nuevo kernel más general algún factor de peso que lleve la información de la geometría (no trivial) tal que al final se satisfaga la condición de normalización que aparece en (4.4) [24, 34]; en otras palabras, dada una función $f(\vec{r})$, con $\vec{r} = \{x^i\}$, y sea $\bar{W}(\vec{r}, \vec{r}', h)$ el kernel de interpolación en geometrías más generales, entonces la función interpolada $\tilde{f}_h(\vec{r})$ es

$$\tilde{f}_h(\vec{r}) = \int f(\vec{r}') \bar{W}(\vec{r} - \vec{r}', h) \sqrt{\eta'} d^3x', \quad (5.1)$$

donde $\sqrt{\eta'} d^3x'$ es el elemento de volumen propio en Σ_t (donde estamos haciendo la interpolación).

Con el fin de que $\bar{W}(\vec{r} - \vec{r}')$ satisfaga

$$\int \bar{W}(\vec{r} - \vec{r}', h) \sqrt{\eta} d^3x' = 1, \quad (5.2)$$

lo cual no es directo pues nuestra geometría ya no es plana, se asume que

$$\bar{W}(\vec{r} - \vec{r}', h) = \bar{K}(\vec{r}) W(\vec{r} - \vec{r}', h), \quad (5.3)$$

donde $W(\vec{r} - \vec{r}', h)$ es el kernel para espacios planos (para diferenciarlo de \bar{W} lo llamaremos de ahora en adelante como el *kernel Newtoniano*), definido en Sec. 4.1, y $\bar{K}(\vec{r})$ una función de normalización. Eligiendo $\bar{K}(\vec{r}) = 1/\sqrt{\eta}$ se logra satisfacer la condición de normalización para W , (4.4), [24, 34]. Si bien esto es cierto, es conveniente mencionar que multiplicar al kernel Newtoniano por el factor $1/\sqrt{\eta}$ hace que para espacio-tiempos curvos \bar{W} en general sea anisotrópico, violando así la calidad del kernel de ser invariante bajo traslaciones, conduciendonos inevitablemente a términos adicionales cuando aproximamos derivadas con SPH [46]. Como veremos a continuación, con la relación (3.33) las ecuaciones relativistas de SPH se pueden deducir en la forma estándar de SPH.

Bajo este esquema en el cual se considera innecesario modificar el método SPH para un espacio-tiempo de fondo dado si la ecuación de continuidad se usa en su forma conservativa (Ec. (3.34)) sin fuentes.

5.2. Las ecuaciones de HDR en la formulación SPH

Como se mencionó arriba, aplicaremos la forma estándar de SPH aunque con una leve transformación a la Ec. (4.6): $\rho \rightarrow \mathcal{D}^*$. El resultado es:

$$\tilde{f}(\vec{r}_a) = \sum_b \frac{m_b}{\mathcal{D}_b^*} f_b W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h). \quad (5.4)$$

Esta transformación es válida gracias al hecho de que la masa en reposo de cada partícula^a $m_b = \mathcal{D}_b \sqrt{\eta_b} \Delta \mathcal{V}_b = \mathcal{D}_b^* \Delta \mathcal{V}_b$, donde $\sqrt{\eta_b} \Delta \mathcal{V}_b$ es el elemento de volumen correspondiente a la b -ésima partícula.

^aRecordemos que con partícula nos referimos a los elementos de volumen.

5.2.1. Ecuación de continuidad relativista

Aplicando (5.4) directamente a \mathcal{D}^* como primer caso obtenemos la representación en SPH de la densidad de masa en reposo relativista

$$\mathcal{D}_a^* = \sum_b m_b W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h). \quad (5.5)$$

Análogamente a lo realizado para obtener (4.16), pero esta vez haciendo uso de la identidad

$$\mathcal{D}^* \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\mathcal{D}^* \vec{v}) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{D}^*, \quad (5.6)$$

donde $\vec{\nabla} \equiv \partial/\partial x^i$ y $\vec{v} \equiv \vec{v} = \{v^i\}$ es la velocidad coordenada (ver Sec. 2.3), obtenemos la forma en SPH de la ecuación de continuidad relativista:

$$\frac{D\mathcal{D}_a^*}{Dt} = \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \vec{\nabla}_a W_{ab}, \quad (5.7)$$

donde nuevamente $\vec{v}_{ab} = \vec{v}_a - \vec{v}_b$.

5.2.2. Ecuación del momento relativista

Para obtener la ecuación de momento relativista en su forma de SPH partimos de la Ec. (3.44). Antes de aplicar el método como tal, reescribamos el gradiente de presión como

$$\frac{1}{\mathcal{D}^*} \vec{\nabla} (\sqrt{-g}P) = \sqrt{-g} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\mathcal{D}^*} \right) + \frac{P}{\mathcal{D}^{*2}} \frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial x^i} \right] + \frac{P}{\mathcal{D}^*} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i}. \quad (5.8)$$

Esta relación nos conducirá, como en el caso Newtoniano, a una forma simétrica en el ya suavizado gradiente de presiones que preservará el momento lineal y el momento angular en SPH. Sustituyendo este resultado en (3.44) y aplicando (5.4) al lado derecho de la misma obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{D(S_i)_a}{Dt} = & -\sqrt{-g_a} \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\mathcal{D}_a^{*2}} + \frac{P_b}{\mathcal{D}_b^{*2}} \right) \vec{\nabla}_a W_{ab} \\ & - \frac{\sqrt{-g_a}}{\mathcal{D}_a^*} \left[P_a \vec{\nabla}_a (\log \sqrt{-g})_a - \frac{1}{2} T_a^{\mu\nu} \vec{\nabla}_a (g_{\mu\nu})_a \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.2.3. Ecuación de la energía relativista

Para el caso de la forma en SPH de la ecuación de la energía relativista hacemos uso de la siguiente identidad:

$$\frac{1}{\mathcal{D}^*} \vec{\nabla} \cdot (\sqrt{-g} P \vec{v}) = \frac{\sqrt{-g}}{\mathcal{D}^*} \vec{\nabla} \cdot (P \vec{v}) + \frac{P}{\mathcal{D}^*} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \sqrt{-g}. \quad (5.10)$$

Podemos a su vez reemplazar el primer término de esta última expresión por

$$\frac{1}{\mathcal{D}^*} \vec{\nabla} \cdot (P \vec{v}) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{v} \cdot \left[\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\mathcal{D}^*} \right) + \frac{P}{\mathcal{D}^{*2}} \vec{\nabla} \mathcal{D}^* \right] + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{P}{\mathcal{D}^*} \vec{v} \right) + \frac{P}{\mathcal{D}^{*2}} \vec{\nabla} \cdot (\mathcal{D}^* \vec{v}) \right\}. \quad (5.11)$$

Una vez hechas estas sustituciones a (3.49) le aplicamos (5.4), quedándonos como resultado

$$\begin{aligned} \frac{D\hat{e}_a}{Dt} = & -\frac{\sqrt{-g}}{2} \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\mathcal{D}_a^{*2}} + \frac{P_b}{\mathcal{D}_b^{*2}} \right) (\vec{v}_a + \vec{v}_b) \cdot \vec{\nabla} W_{ab} \\ & - \frac{\sqrt{-g_a}}{\mathcal{D}_a^*} \left[P_a \vec{v}_a \cdot \vec{\nabla}_a (\log \sqrt{-g})_a + \frac{1}{2} T_a^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \right)_a \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.3. Viscosidad artificial en el tensor de energía-momento

Existe un inconveniente con el uso de viscosidad artificial de la forma (4.31) y es que ésta solamente es invariante bajo transformaciones de Galileo y no bajo transformaciones de Lorentz, por lo que para fluidos relativistas dicha viscosidad violaría el principio de causalidad de Einstein.

Existe una forma alternativa de agregar viscosidad artificial a las ecuaciones de la HDR y que sea invariante bajo transformaciones de Lorentz. Ésta consiste en agregar una presión “extra” al tensor de energía-momento [12, 46], es decir

$$T_{\mu\nu} = (\rho w + q) u_\mu u_\nu + (P + q) g_{\mu\nu} \quad (5.13)$$

donde w es la entalpía y q es la *presión viscosa artificial*.

En esta formulación las ecuaciones (3.44) y (3.49) sufren una pequeña transformación $P \rightarrow P + q$, mientras que las ecuaciones Ec. (5.9) y (5.12) cambian

a la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{D(S_i)_a}{Dt} &= -\sqrt{-g_a} \sum_b m_b \left(\frac{P_a + q_{ab}}{\mathcal{D}_a^{*2}} + \frac{P_b + q_{ab}}{\mathcal{D}_b^{*2}} \right) \vec{\nabla}_a W_{ab} \\ &\quad - \frac{\sqrt{-g_a}}{\mathcal{D}_a^*} \left[(P_a + q_a) \vec{\nabla}_a (\log \sqrt{-g})_a - \frac{1}{2} T_a^{\mu\nu} \vec{\nabla}_a (g_{\mu\nu})_a \right], \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\hat{e}_a}{Dt} &= -\frac{\sqrt{-g}}{2} \sum_b m_b \left(\frac{P_a + q_{ab}}{\mathcal{D}_a^{*2}} + \frac{P_b + q_{ab}}{\mathcal{D}_b^{*2}} \right) (\vec{v}_a + \vec{v}_b) \cdot \vec{\nabla} W_{ab} \\ &\quad - \frac{\sqrt{-g_a}}{\mathcal{D}_a^*} \left[(P_a + q_a) \vec{v}_a \cdot \vec{\nabla}_a (\log \sqrt{-g})_a + \frac{1}{2} T_a^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \right)_a \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde

$$q_a = \frac{1}{2} \sum_b m_b \left(\frac{q_{ab}}{\mathcal{D}_a^*} + \frac{q_{ba}}{\mathcal{D}_b^*} \right) W_{ab} \quad (5.16)$$

con

$$q_{ab} = \begin{cases} \rho_a w_a [-\tilde{\alpha} c_a h_a (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})_{ab} + \tilde{\beta} h_a^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})_{ab}^2] & (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})_{ab} < 0 \\ 0 & (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})_{ab} > 0, \end{cases} \quad (5.17)$$

donde a su vez $c_a = \sqrt{\Gamma P_a / (\rho_a w_a)}$ es ahora la velocidad del sonido relativista en el sistema de referencia en reposo local del fluido, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \sim 1$ y $\tilde{\epsilon} = 0,1$ son parámetros numéricos, similares a los que aparecen en Ec. (4.31), y

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})_{ab} \approx \frac{\vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab}}{|\vec{r}_{ab}|^2 + \tilde{\epsilon} h_{ab}}. \quad (5.18)$$

Observemos que (5.17) tiene una forma muy similar a Π_{ab} en (4.31). A pesar de que esta forma de viscosidad artificial es únicamente invariante bajo transformaciones de Galileo; es decir, a pesar de que no sea invariante de Lorentz, ha mostrado precisión a la hora de tratar los choques [12, 46], por ello fue la viscosidad usada en el presente trabajo.

5.4. Pruebas de SPH en HDR

5.4.1. Shock Tube (Sod shocktube)

Como se mencionó antes, una prueba obligada en cualquier código que intente resolver las ecuaciones de la hidrodinámica son los tubos de choques.

Como se mencionó también al final del Cap. 3, en la HDR se tienen ecuaciones de evolución para \mathcal{D}^* , \vec{S} y \hat{e} de las cuales se reconstruyen las variables primitivas ρ , \vec{V} y P . Dicha transformación sufre ciertas modificaciones si tomamos en cuenta la viscosidad q de la sección anterior.

Usando la expresión para la entalpía específica relativista

$$w = 1 + \frac{P}{B\rho} \quad (5.19)$$

donde $B := 1 - 1/\Gamma$, la energía total específica relativista se puede reescribir de la siguiente manera:

$$e = \left(\gamma - \frac{B}{\gamma}\right) w + \frac{B}{\gamma} + \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{q}{\rho}. \quad (5.20)$$

Resolviendo la ecuación (5.20) para w llegamos a la expresión siguiente

$$w = \frac{\tilde{e}\gamma - B}{\gamma^2 - G} - \frac{q}{\rho}, \quad (5.21)$$

donde

$$\tilde{e} = e + \frac{q}{\Gamma\mathcal{D}}. \quad (5.22)$$

Haciendo uso de

$$S^2 = \eta^{ij} S_i S_j = \left(w + \frac{q}{\rho}\right)^2 (\gamma^2 - 1) \quad (5.23)$$

junto con la ecuación (5.21) llegamos a la siguiente expresión:

$$(S^2 - \tilde{e}^2)\gamma^4 + 2B\tilde{e}\gamma^3 + (\tilde{e}^2 - 2BS^2 - B^2)\gamma^2 - 2B\tilde{e}\gamma + B^2(1 + S^2) = 0, \quad (5.24)$$

la cual podemos resolver, dados B , S^2 y \tilde{e} , para el factor de Lorentz, γ . Esto se realizó dentro del mismo código mediante el método Newton-Raphson (ver Apéndice A).

Una vez conocido el factor de Lorentz podemos calcular la densidad de masa en reposo ρ de (3.33), luego calculamos la entalpía w de (5.21), posteriormente calculamos la presión P de (5.19), y finalmente la velocidad Euleriana \vec{V} la obtenemos de

$$V^i = \frac{\eta^{ij} S_j}{\left(w + \frac{q}{\rho}\right) \gamma}. \quad (5.25)$$

En el presente trabajo se construyó un código numérico que resolviera las ecuaciones de la HDR en un espacio-tiempo fijo usando el método de SPH como

se describió anteriormente. Para el tubo de choque de prueba se consideró un sistema con las siguientes características: a la izquierda del origen un fluido con $\rho = 10$ y $P = 40/3$, y a la izquierda otro fluido con $\rho = 1$ y $P = 4 \times 10^{-6}/6$. Los perfiles numéricos obtenidos así como la solución exacta se muestran el Fig. 5.4.1.

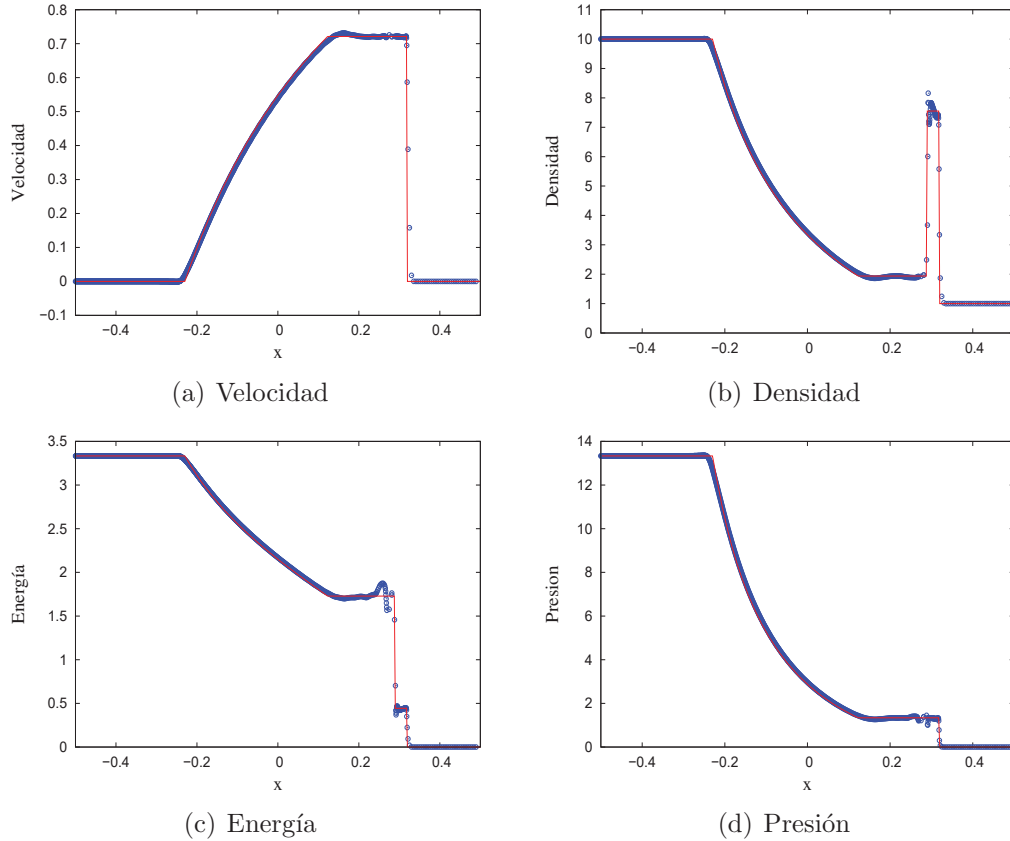


Figura 5.1: Resultados obtenidos de resolver el *Sod shocktube relativista*, en una métrica de Minkowski con el código de SPH, comparados con la solución exacta usando un paso de tiempo $\Delta t = 0.001$. En este caso se usó $h_0 = 0.003$, $\Gamma = 1.4$ y $N = 1000$. Con respecto a la viscosidad artificial se usó $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 2$ y $\tilde{\epsilon} = 0.1$

5.4.2. Partícula de polvo en una métrica de Schwarzschild

Con el fin de corroborar que la parte de la geometría en nuestro código fue implementada adecuadamente y que también las ecuaciones de evolución se

resuelven correctamente en 3 dimensiones se hizo una prueba de una partícula de polvo en torno a un agujero negro. Para ello se consideró un espacio-tiempo de Kerr expresado en coordenadas de Kerr-Schild (t, x, y, z) , descompuestas en la forma 3+1 y con momento angular $a = 0$ (Schwarzschild) [42]. Esto es

$$\eta_{ij} = \delta_{ij}, \quad (5.26)$$

$$\alpha = 1, \quad (5.27)$$

$$\vec{\beta} = \sqrt{\frac{2M}{r}} \vec{e}_r, \quad (5.28)$$

donde δ_{ij} es la métrica Euleriana, r es la coordenada radial de área, \vec{e}_r es el vector unitario Euclidiano en la dirección radial y M es la masa del agujero negro. El horizonte de eventos se localiza en $r = 2M$.

La teoría nos dice que una partícula de prueba (masa despreciable) colocada a una distancia r del centro de un agujero negro y con velocidad inicial tangencial $v_t = r\sqrt{M/r^3}$, seguirá una trayectoria circular en torno al agujero negro. En la Fig. 5.2 se presenta una vista del plano $x - y$ de la evolución de varias partículas de polvo colocadas a una distancia $r = 6M, 10M, 15M, 20M$. En ella podemos ver que, en efecto, la trayectoria de la partícula es una circunferencia cerrada.

Por otro lado, sabemos que nuestro integrador en el tiempo (predictor-corrector), al ser un método numérico tiene ciertas limitaciones. Con el fin de encontrar una escala de tiempo a la que éste falla se dejó evolucionar una partícula de polvo al rededor del mismo agujero negro en la órbita circular más cercana y más estable $r_{ISCO} := 6M$ (por sus siglas en inglés Innermost Stable Circular Orbit). La teoría nos dice que la partícula debe permanecer dando órbitas circulares por un tiempo indefinido, pero se encontró que después de un tiempo $t \approx 4000M$ (≈ 8000 iteraciones) la partícula de polvo comienza a salir de su trayectoria circular para comenzar a caer en espiral hasta atravesar $r = 2M$ (ver Fig. 5.3).

5.5. Conclusiones

El método de SPH en sus orígenes estaba enfocado a sistemas Newtonianos. Sin embargo, también es extendible a sistemas relativistas, como se demostró en el presente capítulo.

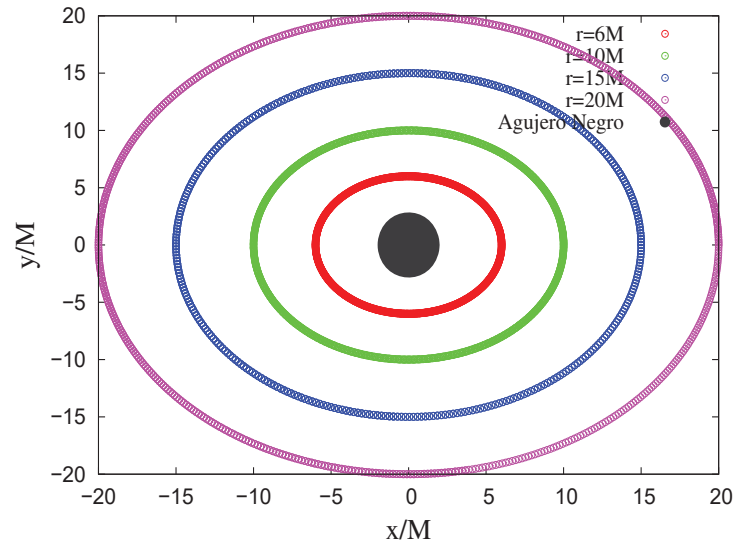


Figura 5.2: Trayectorias circulares de partículas de polvo. En la figura se muestran los resultados obtenidos al evolucionar una partícula de polvo en torno a un agujero negro de Schwarzschild. Inicialmente se colocaron varias partículas en $r = x = 6M, 10M, 15M$ y $20M$. El tiempo de evolución de las 4 trayectorias fue de $1000M$ con un paso de tiempo $\Delta t = 0.5M$.

Con el código numérico desarrollado se lograron resultados aproximados a la solución exacta para un tubo de choques. Así como también se encontró un régimen de iteraciones dentro de las cuales podemos confiar de nuestro integrador en el tiempo.

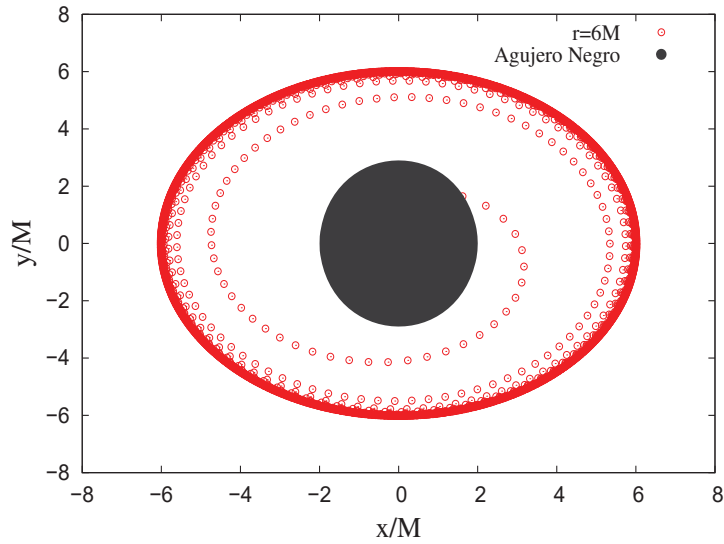


Figura 5.3: Trayectoria de una partícula de polvo. Resultados de evolucionar una partícula de polvo en torno a un agujero negro. Inicialmente se colocó a dicha partícula en $r = x = 6$. El tiempo de evolución fue de $t = 4396M$, que es el momento en que la partícula atraviesa $r = 2M$. Al monitorear el comportamiento de la partícula, es al rededor de $t = 4000M$ que la partícula comienza a salir de la trayectoria circular para comenzar a caer en espiral hacia el agujero negro. El paso de tiempo empleado fue de $\Delta t = 0.5M$.

Capítulo 6

Estrellas en equilibrio tipo TOV

En este capítulo hablaremos de la solución a las EE para el interior de sistemas astrofísicos esféricamente simétricos; por ejemplo: estrellas. Comenzando con el planteamiento de las EE al tiempo inicial para un fluido perfecto estático con simetría esférica, su solución numérica para plantear las condiciones iniciales del sistema y la evolución de la hidrodinámica mediante el método de SPH.

6.1. Espacio-tiempo esféricamente simétricos

Como se acostumbra en la literatura proponemos la siguiente métrica que representa un espacio-tiempo esféricamente simétrico, estático:

$$ds^2 = -e^{2\varphi(r)} dt^2 + e^{2\psi(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.1)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$, y se usan exponenciales para los coeficientes de la coordenada radial y temporal con el fin de que asegurar que la signatura de la métrica no cambie.

Las componentes no nulas del tensor de Einstein (2.56) para esta métrica

son:

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2(\varphi-\psi)} \left(2r \frac{\partial \psi}{\partial r} - 1 + e^{2\psi} \right), \quad (6.2)$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 1 - e^{2\psi} \right), \quad (6.3)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\psi} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right], \quad (6.4)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2(\theta) G_{\theta\theta}. \quad (6.5)$$

Gracias al teorema de Birkhoff, en la actualidad se sabe *a priori* que la única solución a las EE en el vacío con simetría esférica es la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.6)$$

donde M se interpreta como la masa de Schwarzschild. Esta es la métrica que describe el espacio-tiempo afuera de cualquier objeto esféricamente simétrico; por ejemplo, una estrella. O en otras palabras, una partícula afuera de dicha estrella seguirá una trayectoria regida por la métrica de Schwarzschild.

6.2. La solución interior: Estrellas esféricas

Ahora bien, cuando no nos encontramos en el vacío, es decir cuando el lado derecho de (2.55) es distinto de cero, la métrica cambia.

Consideremos un fluido perfecto con simetría esférica, dado por el tensor energía-momento (3.38), donde ρ , w y P serán funciones de r únicamente, que se encuentra en equilibrio hidrostático –le llamaremos *estrella* por simplicidad–. Esto último nos permite seguir asumiendo que φ y ψ en (6.1) no dependen de t . Esto último a su vez nos da pauta para tomar a la 4-velocidad como tipo-tiempo. Ya normalizada la forma de la 4-velocidad y su dual son:

$$\vec{\mathbf{u}} = (e^{-\varphi}, 0, 0, 0), \quad \bar{\mathbf{u}} = (-e^{\varphi}, 0, 0, 0). \quad (6.7)$$

De esta forma las componentes del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ en forma ma-

tricial se verían de la siguiente forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho w e^{2\varphi} & & & \circ \\ & P e^{2\psi} & & \\ & & P r^2 & \\ \circ & & & P r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Tomando (6.8) con el sistema (6.2)–(6.5) llegamos a que las EE se reducen al siguiente sistema de 3 ecuaciones diferenciales independientes:

$$\frac{1}{r^2} e^{-2\psi} \left(2r \frac{\partial \psi}{\partial r} - 1 + e^{2\psi} \right) = 8\pi(\rho w - P), \quad (6.9)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-2\psi} \left(2r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 1 - e^{2\psi} \right) = 8\pi P, \quad (6.10)$$

$$e^{-2\psi} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] = 8\pi P, \quad (6.11)$$

Definiendo la función

$$m(r) := \frac{r}{2} (1 - e^{-2\psi}) \quad (6.12)$$

o, de manera equivalente,

$$e^{2\psi} = \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1}, \quad (6.13)$$

quedándonos el elemento de línea de la siguiente forma:

$$ds^2 = -e^\varphi dt^2 + \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.14)$$

y las ecuaciones (6.9)–(6.11) se reduce después de manipulaciones algebraicas a

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho (1 + u), \quad (6.15)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho w \frac{m(r) - 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]} \quad (6.16)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]}, \quad (6.17)$$

donde en la primera ecuación se usó el hecho de que $w = 1 + u + P/\rho$. El sistema de ecuaciones (6.15)–(6.17) se conocen como las ecuaciones *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* o ecuaciones TOV. En particular la ecuación (6.17) es la ecuación de *equilibrio hidrostático relativista*.

Para tener un sistema de ecuaciones cerrado es necesario contar con una ecuación de estado para el fluido.

La cantidad $m(r)$ tiene la interpretación de ser la masa-energía total contenida dentro del radio r . Integrando (6.15) del centro hasta el radio de la estrella $r = R$ (es decir, aquel radio para el que $P = 0$) tenemos la masa total de la estrella

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(1 + u) dr. \quad (6.18)$$

Nótese que ésta contiene todas las contribuciones a la masa: la energía potencial gravitacional (negativa), la energía interna y la masa total en reposo de la estrella, M_0 . La masa total en reposo de la estrella se obtiene recordando que el elemento de volumen propio en Σ_t es $\sqrt{\eta} d^3x = (1 - 2m(r)/r)^{-1/2} r^2 dr d\Omega$ de tal forma que

$$M_0 = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1/2} dr. \quad (6.19)$$

En sistemas ligados siempre se tiene que $M < M_0$. La diferencia entre M y M_0 se puede interpretar como la energía de enlace gravitacional^a E_B , la cual es siempre positiva:

$$E_B = M_0 - M. \quad (6.20)$$

6.3. Resolviendo las ecuaciones TOV

Dada la complejidad de resolver analíticamente el sistema (6.15)-(6.17) junto con una ecuación de estado (3.16)^b se procedió a resolverlas por medios numéricos para construir modelos estelares.

^aLa energía de enlace se define como la energía necesaria para separar un sistema ligado en sus partes individuales. Esto tiene sentido para sistemas en los que sus partes son fácilmente identificables como el núcleo del átomo. En el caso de sistemas astrofísicos, por ejemplo, el concepto se refiere a la energía que se necesita llevar todo el material del que esta compuesto nuestro sistema a infinito. En RG este concepto es un tanto ambiguo en general; no así para estrellas con simetría esférica.

^bEn la literatura por lo general se presentan como soluciones analíticas de las ecuaciones TOV los casos particulares: 1) densidad $\rho = \text{constante}$ con la ecuación de estado politrópica (3.22) [9, 44, 53], y 2) la solución encontrada por Buchdahl para la ecuación de estado $\rho = 12(p_* p)^{1/2} - 5p$ [6, 44]. Aunque ambos casos no tienen una justificación física.

Existe un gran número de estrellas físicas que pueden modelarse con una ecuación de estado politrópica (3.22) como primera aproximación, por lo que adoptamos una ecuación de estado de este tipo para cerrar nuestro sistema de ecuaciones. Más aún, con una ecuación de estado politrópica siempre es posible reescalar la constante K . En unidades geométricas $K^{n/2}$ tiene unidades de longitud por lo que uno puede introducir un nuevo sistema de cantidades adimensionales:

$$\begin{aligned}\bar{r} &\equiv K^{-n/2}r, & \bar{\rho} &\equiv K^n\rho, & \bar{\rho}_c &\equiv K^n\rho_c, \\ \bar{P} &\equiv K^n P, & \bar{M} &\equiv K^{-n/2}M, & \bar{M}_0 &\equiv K^{-n/2}M_0.\end{aligned}$$

Esto nos permite tomar a $K = 1$ en la integración numérica de las ecuaciones TOV y usar las relaciones anteriores para escalar los resultados a valores de K que tengan un sentido más físico. Por conveniencia en el resto del trabajo usaremos estas cantidades adimensionales por lo que se omitirá la barra.

Las ecuaciones TOV son un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden por lo que requerimos para su solución una condición de frontera. Para la ecuación (6.15) requerimos que $m(r=0) = 0$. En el caso de (6.16) primero elegimos un valor arbitrario para la densidad de masa en reposo central, ρ_c , y con (3.22) obtenemos el valor de la presión en el centro de la estrella P_c .

Para la ecuación de la función métrica, (6.17), como lo dice el teorema de Birkhoff, se debe satisfacer que afuera de la estrella la métrica corresponda a la de Schwarzschild; es decir que

$$\varphi(r = R) = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{2M}{R} \right), \quad (6.21)$$

por lo que una vez resueltas (6.15) y (6.16), integramos (6.17) hacia adentro de la estrella. Sin embargo, ya en la práctica es mucho más conveniente resolver simultáneamente las ecuaciones TOV dándo un valor arbitrario a $\varphi(r = 0)$, además de que el sistema (6.15)-(6.17) es un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado [11, 21, 27]. Más aún, puesto que la ecuación (6.17) es lineal en φ , uno puede sumar una constante a la solución en todas partes de tal forma que pegue suavemente a la solución de Schwarzschild en la superficie.

Los resultados obtenidos para la función lapso $\alpha(r) = e^{\varphi(r)}$ se muestran en la Fig. 6.1

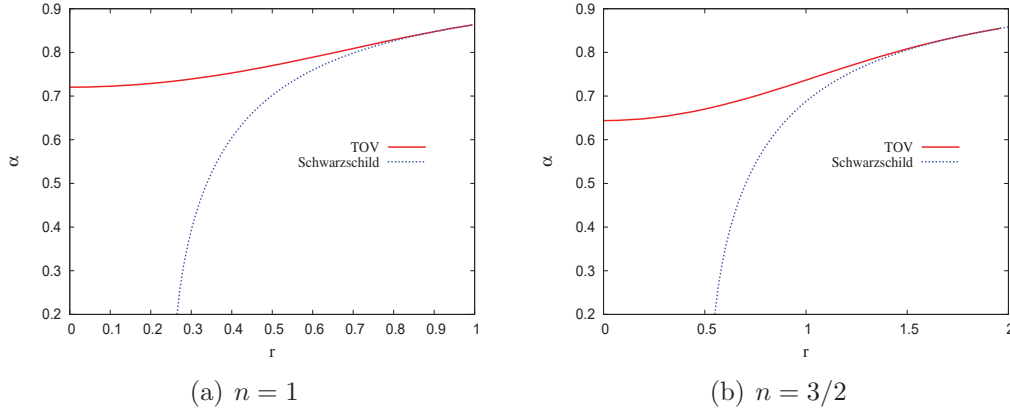


Figura 6.1: Función lapso en función de la coordenada radial. En las figuras se muestran la función lapso para la métrica de Schwarzschild (línea punteada) y para la métrica de una TOV más la ecuación de estado politrópica con $K = 1$, $n = 1$ (Fig. 6.1(a)) con $\rho_c = 0.1$, y $n = 3/2$ (Fig. 6.1(b)) $\rho_c = 0.05$. Se puede apreciar que conforme uno se aleja del origen y se acerca al radio de la estrella TOV ($R = 0.995$ para la figura de la izquierda y 1.962 para la figura de la derecha), ambos lapsos empalman suavemente.

	$\Delta r = 0,01$	$\Delta r = 0,005$	$\Delta r = 0,0025$
M_{max}	0.16158	0.16269	0.16327
$M_{0,max}$	0.17699	0.17849	0.17925
R_{max}	0.71000	0.73000	0.74500

Tabla 6.1: Convergencia del método RK4. En esta tabla se muestran los valores correspondientes a aquella TOV politrópica con masa total máxima M_{max} . A esta configuración le corresponde una densidad central de 0.418 .

En cuanto a la solución del sistema (6.15)-(6.17) se usó el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) para calcularla. La forma de comprobar que la implementación del método numérico es probando la convergencia del RK4 (ver Tabla 6.3).

En la figura 6.2 mostramos una gama de sistemas estelares politrópicos con $K = 1$ y $n = 1, 3/2$ en equilibrio hidrostático. En dicha figura se presenta el comportamiento de la masa total M como función de la densidad de masa-energía central de la estrella. Sin embargo, no todas ellas son dinámicamente estables. De acuerdo con [4] aquellas estrellas que son dinámicamente estables se encuentran en la figura a la izquierda del máximo.

Como casos particulares para este trabajo se tomaron los sistemas estelares en equilibrio con: $\rho_c = 0.1$ para la polítropa con $n = 1$ y $\rho_c = 0.05$ para la polítropa con $n = 3/2$. En la Fig. 6.3 se muestran los perfiles de: densidad de

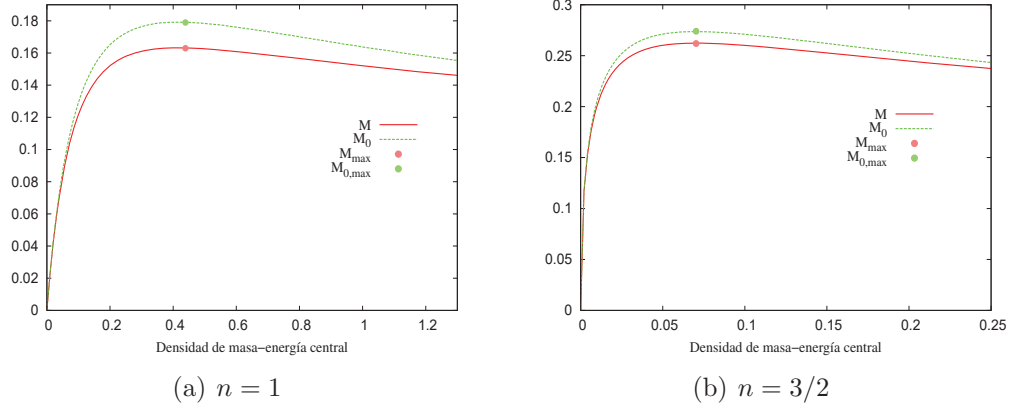


Figura 6.2: Secuencia de configuraciones de equilibrio para poltropas con $K = 1$, $n = 1$ (Fig. 6.2(a)) y $n = 3/2$ (Fig. 6.2(b)). Aquellos sistemas a la derecha de los puntos máximos (círculos sólidos) corresponden a configuraciones inestables; es decir que inevitablemente colapsan en un agujero negro o, cuando ocurra que $M_0 < M$, la estrella explotará. Del lado izquierdo se encuentran las configuraciones estables [4, 35, 45].

masa en reposo ρ , masa total de la estrella y presión P para estos dos casos.

6.4. Evolucionando con el método de SPH

Una vez que tenemos los datos iniciales para nuestro fluido, es decir los perfiles de densidad, presión y energía interna, así como la métrica $g_{\mu\nu}$ correspondiente al interior de una estrella estable, procedemos con la evolución del fluido mediante el método de SPH.

Estos perfiles a su vez nos van a permitir encontrar mediante el método de aceptación y rechazo (ver Apéndice A) la posición r^* que debe ocupar cada partícula en nuestro fluido.

Notemos que nuestras condiciones iniciales aún no están completas. El único parámetro numérico en la métrica corresponde a la componente $g_{00}(r)$; el resto tienen una forma analítica. Para encontrar el valor de $g_{00}(r^*)$, donde r^* es la posición de las partículas encontradas previamente con el método de aceptación y rechazo, hacemos uso de una interpolación de orden cero:

$$g_{00}(r^*) = (g_{00}(r_i) - g_{00}(r_{i-1})) \left[\frac{r^* - r_{i-1}}{\Delta r} \right] + g_{00}(r_{i-1}). \quad (6.22)$$

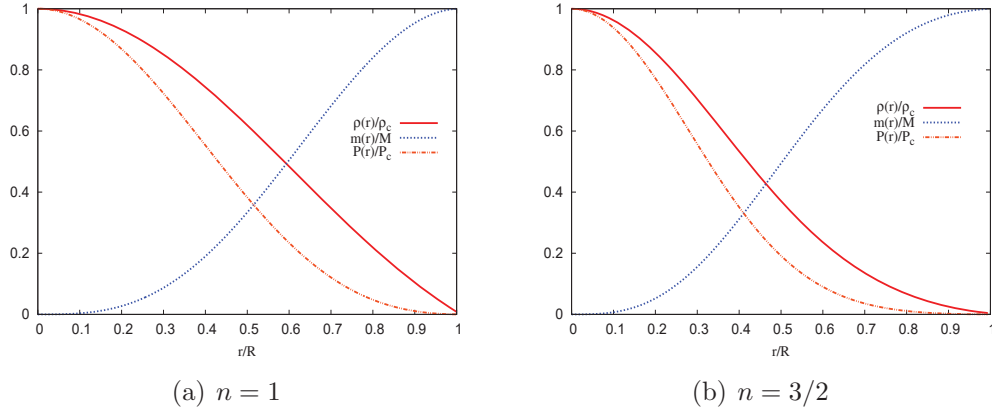


Figura 6.3: Estructura de una estrella TOV. Los perfiles se obtuvieron resolviendo las ecuaciones TOV con la ecuación de estado politrópica con $n = 1$ (Fig. 6.3(a)) y $n = 3/2$ (Fig. 6.3(b)). A un radio $r = R$ en el que la presión es (numéricamente) cero se truncó el integrador.

Es en este punto en el que llegamos al siguiente inconveniente: nuestra solución numérica de la TOV es en simetría esférica mientras que el método de SPH es 3-dimensional –en coordenadas cartesianas para ser precisos–. Más aún, en las ecuaciones (5.9) y (5.12) aparecen términos que involucran derivadas espaciales de la métrica.

Con el fin de sortear esta dificultad se procedió en primer lugar con la interpolación radial de $g'_{00}(r)$, la cual se realizó usando la misma técnica que en Sec. 5.2 de [41]:

1. Calculamos $g'_{00}(r)$ con la aproximación de diferencias finitas en cada punto de nuestro dominio

$$g'_{00}(r_i) = \frac{g_{00}(r_{i+1}) - g_{00}(r_i)}{2\Delta r} \quad (6.23)$$

2. Localizamos de puntos en una sucesión progresiva e interpolación en dichos puntos mediante la fórmula

$$g'_{00}(r^*) = (g'_{00}(r_i) - g'_{00}(r_{i-1})) \left[\frac{r^* - r_{i-1}}{\Delta r} \right] + g'_{00}(r_{i-1}), \quad (6.24)$$

donde $(')$ indica la derivada con respecto a la coordenada radial.

Con el fin de comprobar que nuestra interpolación es correcta se presentan en la Fig. 6.4 los resultados correspondientes a la componente de la métrica g_{00} y su derivada g'_{00} para las polítropas con $n = 1$ y $n = 3/2$.

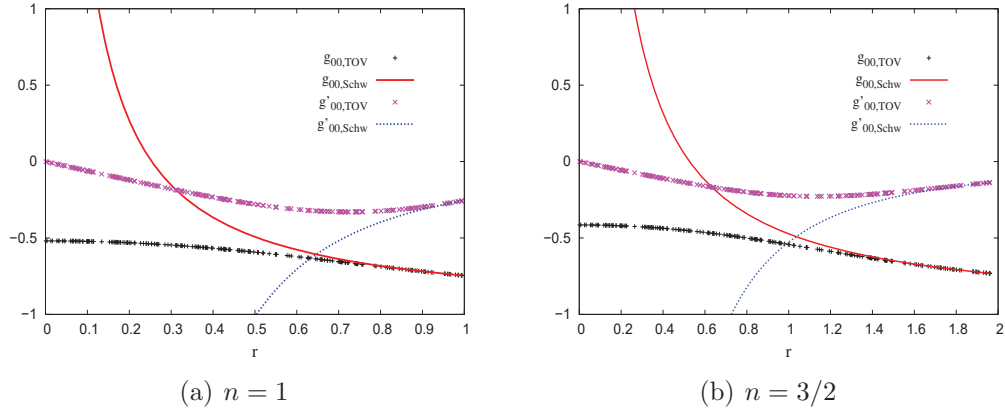


Figura 6.4: Componente g_{00} de la métrica y su derivada con respecto a la coordenada radial. En las figuras se muestran la componente g_{00} y g'_{00} tanto para la métrica de Schwarzschild (líneas) como para la métrica de una estrella TOV usando la ecuación de estado politrópica con $K = 1$, $n = 1$ (Fig. 6.4(a)) y $n = 3/2$ (Fig. 6.4(b)). Se puede apreciar como para tanto g_{00} como para g'_{00} de la TOV empalman suavemente sobre sus equivalentes para la métrica de Schwarzschild conforme nos acercamos al radio de la estrella.

Recordando del cálculo elemental que para una función que depende –en coordenadas esféricas– únicamente de la coordenada radial

$$\vec{\nabla} f(r) = \vec{e}_r f'(r). \quad (6.25)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{e}_z \\ &= \frac{x}{r} \vec{e}_x + \frac{y}{r} \vec{e}_y + \frac{z}{r} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (6.26)$$

donde $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ son una base ortonormal en coordenadas cartesianas.

Con esto en mente y haciendo uso de (6.24) podemos afirmar que

$$\vec{\nabla}_* g_{00}(r^*) = g'_{00}(r^*) \left[\frac{x^*}{r^*} \vec{e}_x + \frac{y^*}{r^*} \vec{e}_y + \frac{z^*}{r^*} \vec{e}_z \right], \quad (6.27)$$

donde $*$ indica que se trata de una cantidad evaluada en un punto obtenida con el método de aceptación y rechazo.

Una vez conocidas todas las cantidades involucradas en las ecuaciones de SPH es directo proceder con la evolución del fluido que conforma a nuestra estrella TOV.

6.5. Resultados

De acuerdo con [28] y [32], es conveniente realizar la evolución de un sistema en equilibrio con la ayuda de un amortiguamiento al integrador en el tiempo debido a la desventaja que tiene el método de SPH de dispersar los valores iniciales de la velocidad de nuestro fluido; que para un sistema en equilibrio dichas velocidades deben mantenerse iguales a cero. En el presente trabajo dicho amortiguamiento se realizó al integrador predictor-corrector de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^i &= x_k^i + \Delta t v_k^i (1 + \delta), \\ S_{i,k+1} &= \left[S_{i,k} + \Delta t \left(\frac{DS_i}{Dt} \right)_k \right] / (1 + \delta), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1}^i &= x_k^i + \frac{1}{2} \Delta t (v_k^i + v_{k+1}^i) (1 + \delta). \\ \tilde{S}_{i,k+1} &= \left\{ S_{i,k} + \frac{1}{2} \Delta t \left[\left(\frac{DS_i}{Dt} \right)_k + \left(\frac{DS_i}{Dt} \right)_{k+1} \right] \right\} / (1 + \delta) \end{aligned}$$

donde $k = 1, \dots, N_t$ -pasos en el tiempo y $\delta = 0.3$.

La evolución en el tiempo de h se realizó a partir de la Eq. (4.25), donde los h_0 corresponden a las condiciones iniciales de h asignadas a partir de la Ec. (4.27).

Con tal de corroborar que los resultados fuesen correctos se monitoreó en el tiempo el comportamiento del número bariónico, dado por la siguiente expresión:

$$N_B = - \sum_b (g_{\mu\nu})_b u_b^\mu u_b^\nu. \quad (6.28)$$

Haciendo un estudio de N_B con nuestro código –desarrollado para tres dimensiones– aplicando el método *ceteris paribus* para $\Delta t, N$ y ζ obtuvimos los resultados que se muestran en las figuras 6.5 y 6.6 para las dos polítropas que se estudiaron en el presente trabajo:

El comportamiento de las cantidades hidrodinámicas de nuestras polítropas se muestra en las Figs. 6.7 y 6.8.

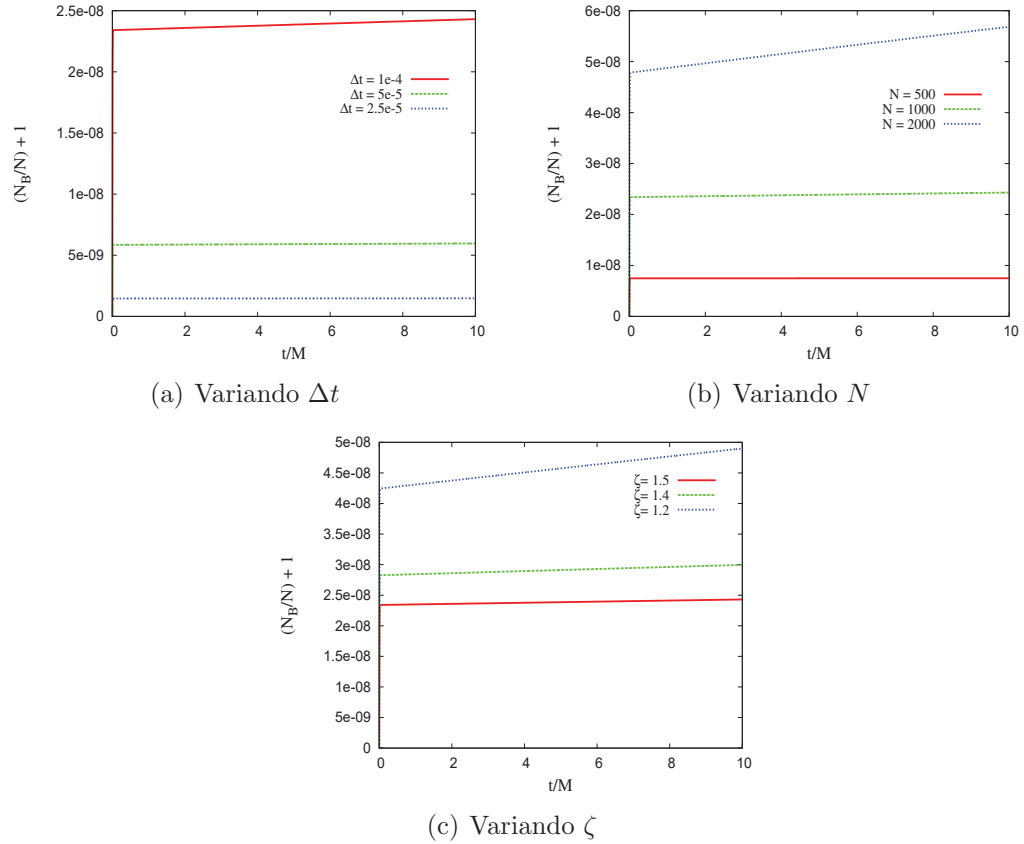


Figura 6.5: Comportamiento del número bariónico (calculado a partir de (6.28)) para una polítropa con $n = K = 1$. En la Fig. 6.5(a) se muestra la evolución del fluido para tres distintas resoluciones temporales: $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$, 5×10^{-5} y 2.5×10^{-5} . Podemos apreciar que conforme mejoramos la resolución temporal, el número bariónico de la Ec. (6.28) tiende al número de partículas N . En la Fig. 6.5(b) se muestra la evolución de la estrella para tres distintos números de partículas: $N = 500, 1000$ y 2000 . En la Fig. 6.5(c) se muestra la evolución de la estrella para tres distintas longitudes iniciales: $\zeta = 1.5, 1.4$ y 1.2 . Tanto en la Fig. 6.5(b) como en la Fig. 6.5(c) se puede apreciar que, contrario a lo esperado, no hay una convergencia del número bariónico.

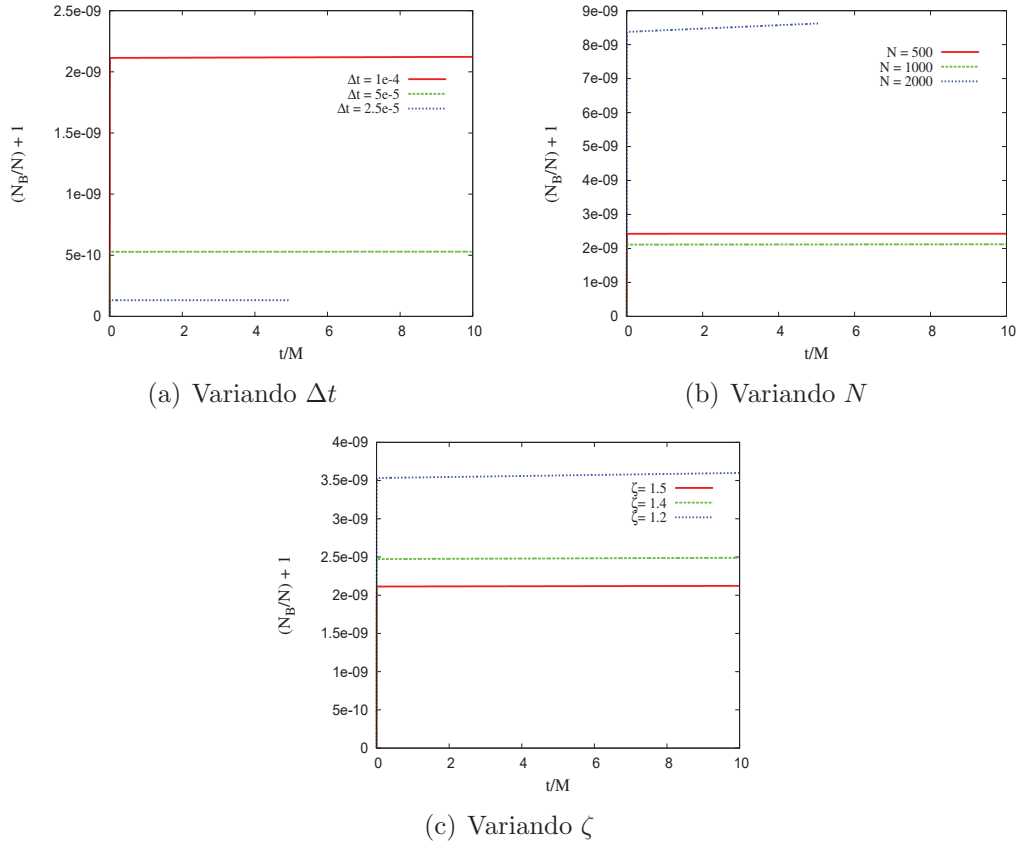


Figura 6.6: Comportamiento del número bariónico (calculado a partir de (6.28)) para una politropa con $K = 1$ y $n = 3/2$. En la Fig. 6.6(a) se muestra la evolución del fluido para tres distintas resoluciones temporales: $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$, 5×10^{-5} y 2.5×10^{-5} . Podemos apreciar que conforme mejoramos la resolución temporal el número bariónico de la Ec. (6.28) tiende al número de partículas N . En la Fig. 6.6(b) se muestra la evolución de la estrella para tres distintos números de partículas: $N = 500, 1000$ y 2000 . En la Fig. 6.6(c) se muestra la evolución de la estrella para tres distintas longitudes iniciales: $\zeta = 1.5, 1.4$ y 1.2 . Tanto en la Fig. 6.6(b) como en la Fig. 6.6(c) se puede apreciar que, contrario a lo esperado, no hay una convergencia del número bariónico.

Debido a los resultados controversiales del número bariónico para resoluciones altas, se decidió estudiar el comportamiento del número bariónico a tiempos mayores. Sin embargo, como se vio en los resultados anteriores, para tiempos mucho mayores a $1M$ los perfiles de las cantidades hidrodinámicas primitivas han cambiado del que tenían inicialmente.

En la figura podemos ver que el número bariónico N_B converge a N en cualquier combinación de los parámetros Δt , N y ζ . Sin embargo, como se prevé en las pruebas de anteriores, para los tiempos de la evolución de nuestro fluido que se muestran ahí mismo las cantidades hidrodinámicas tienen un perfil drásticamente distinto, lo cual nos dice que ya no se tiene un sistema en equilibrio hidrostático.

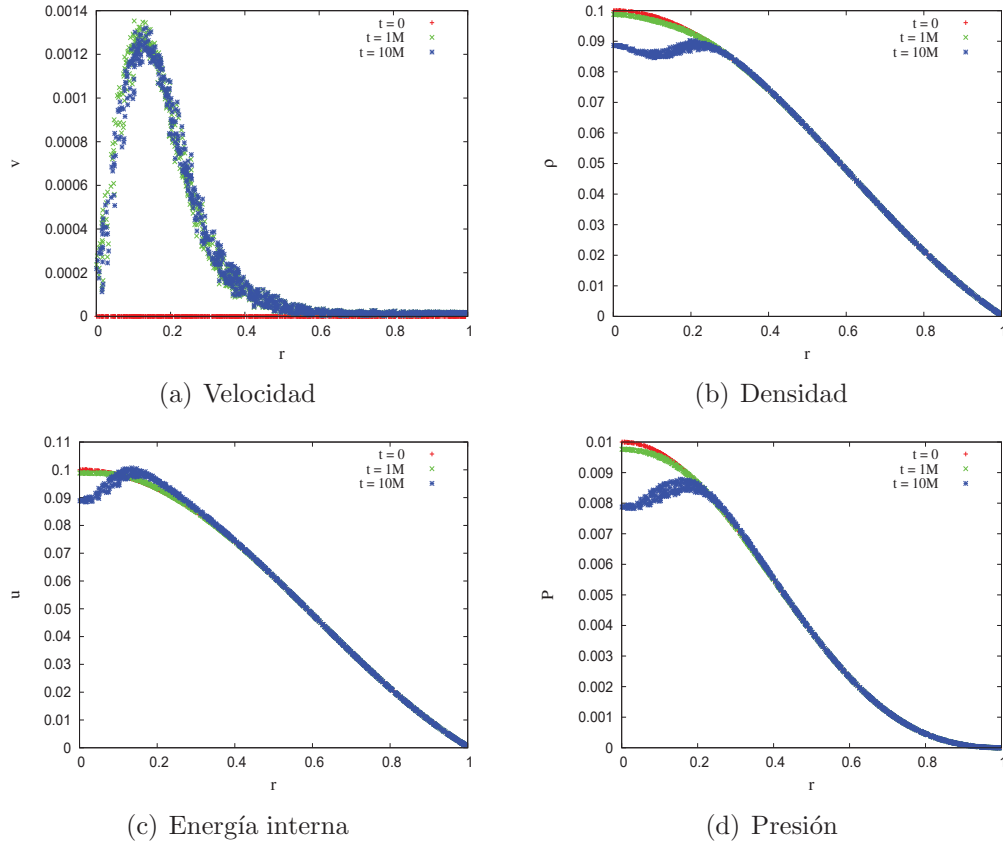


Figura 6.7: Perfiles de velocidad, densidad, energía interna y presión para una estrella politrópica con $K = n = 1$ para distintos tiempos $t = 0, 1M, 10M$. Las pruebas se realizaron para $N = 1000, \zeta = 1.5$ y $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$. Podemos ver en la Fig. 6.7(a), como era de esperarse, que la velocidad de las partículas se dispersa al iniciar la evolución. Para un tiempo $t = 10M$ se aprecia que la rapidez ha disminuido. En el resto de las figuras se puede ver que para $t = 1M$ nuestro sistema podría considerarse todavía en equilibrio. Sin embargo, conforme evoluciona nuestro sistema, los perfiles sufren una deformación, lo cual significa que nuestro sistema ha salido del equilibrio.

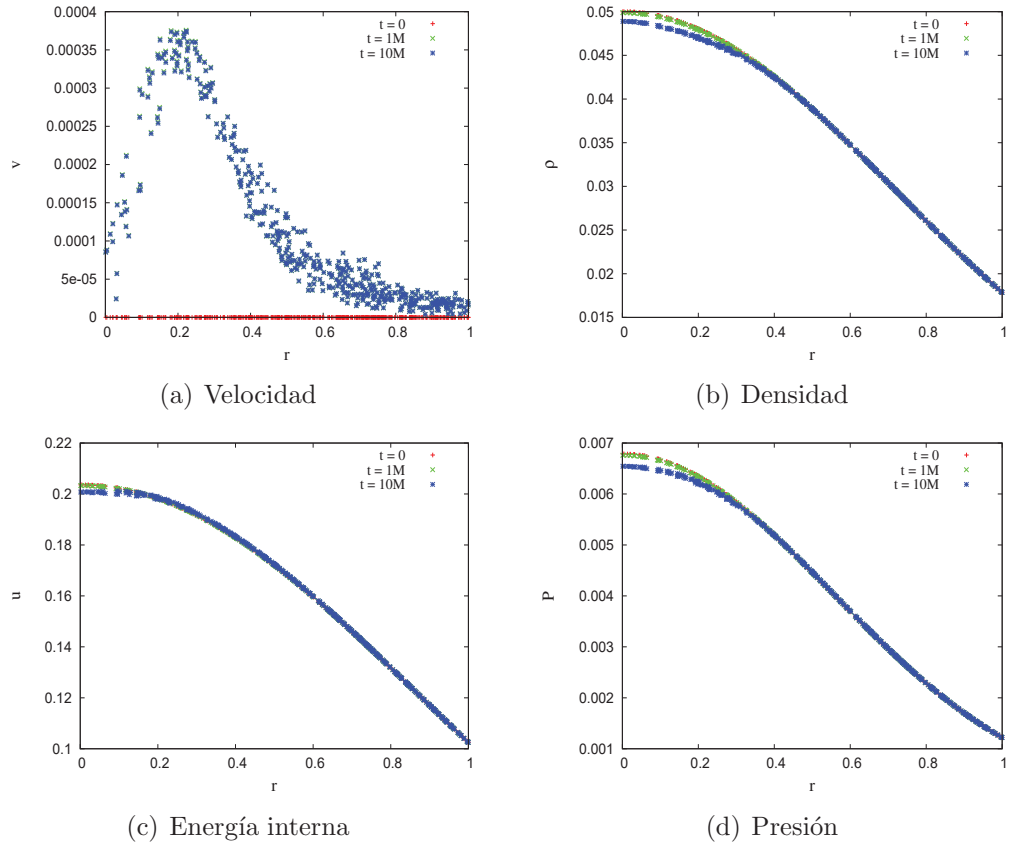


Figura 6.8: Perfiles de velocidad, densidad, energía interna y presión para una estrella politrópica con $K = 1$ y $n = 3/2$ para distintos tiempos $t = 0, 1M, 10M$. Las pruebas se realizaron para $N = 1000, \zeta = 1.5$ y $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$. Podemos ver en la Fig. 6.8(a), como era de esperarse, que la velocidad de las partículas se dispersa al iniciar la evolución. En el resto de las figuras se puede ver que para $t = 1M$ nuestro sistema podría considerarse todavía en equilibrio. Sin embargo, conforme evoluciona nuestro sistema, los perfiles sufren una deformación, lo cual significa que nuestro sistema ha salido del equilibrio.

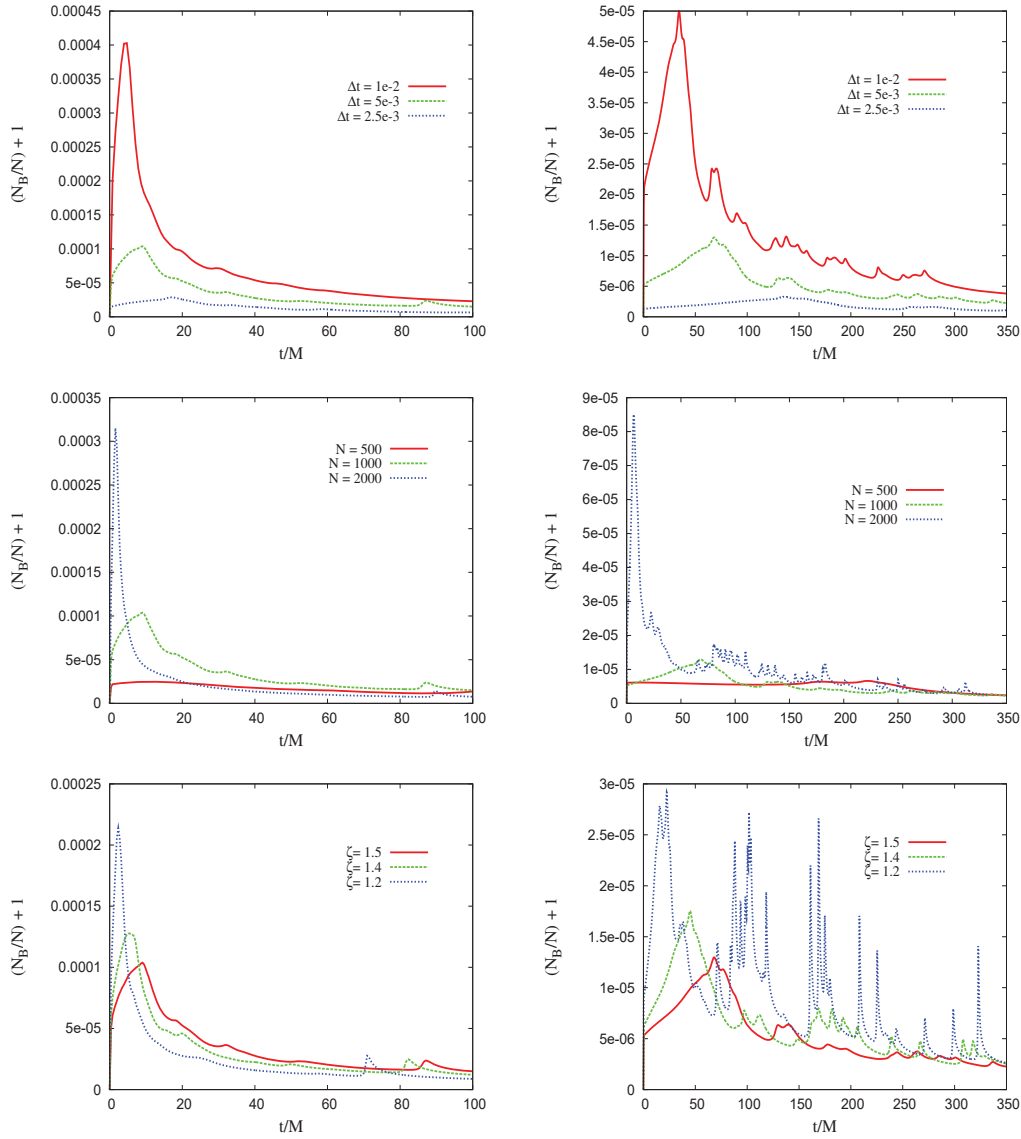


Figura 6.9: Comportamiento del número bariónico (calculado a partir de (6.28)) para una politropa con $K = 1$, $n = 1$ (Figs. de la columna izquierda) y $n = 3/2$ (Figs. de la columna derecha). En esta figura podemos apreciar que a pesar de que inicialmente el número bariónico tiende a alejarse de su valor inicial, al evolucionar nuestra estrella por más tiempo uno encuentra que el número bariónico calculado a partir de (6.28) tiende a ser igual a N .

Capítulo 7

Conclusiones

La implementación de un método numérico que pretenda simular la evolución de un sistema físico no es algo sencillo ni directo como aparenta pues éste debe pasar por pruebas más simples antes de abordar un problema complejo, es decir problemas bajo circunstancias muy particulares pero cuya solución ya haya sido estudiada o encontrada, o cuyo comportamiento sea predecible. Un ejemplo de esto último –al que se recurrió con frecuencia en la última etapa del trabajo antes de asegurar que lo que se hacía era aceptable– es el siguiente: dado un fluido perfecto con una estructura interna inicial, es intuitivo pensar que en una métrica de Minkowski tal fluido debe expandirse debido a que la única fuerza entre las partículas que lo conforman proviene de la presión hidrostática. Un buen indicador de que el código está (hasta este punto) bien construido es que la solución obtenida prediga dicho efecto.

Durante el proceso de desarrollo de un código numérico es posible toparse con la tentación de hacer uso de herramientas computacionales sofisticadas con la intención de tener un programa más eficiente. Por ejemplo: definir nuevos tipos de variables dentro de un programa. Si uno está enfocado en resolver un problema físico, implementar dichas mejoras en el *software* no serán útiles a corto plazo pues desviarán la atención del objetivo principal; peor aún, si se implementan desde el principio no se tendrá la forma de saber si efectivamente el programa final fue mejor que aquel sin la implementación de las supuestas mejoras.

Es mucho más eficiente para un físico desarrollar en primer lugar un *software* que prediga correctamente la física involucrada en el problema que se

pretende abordar. Las mejoras del software son un lujo antes que una necesidad; a menos que el problema amerite dicha mejora. Tal es el caso de la paralelización de códigos o la implementación de algoritmos numéricos que agilicen los cálculos a nivel máquina.

Con el código numérico construido por el autor a partir del método de SPH en 3 dimensiones en la forma descrita en el presente trabajo, mostramos que dicho código:

- Puede resolver las ecuaciones de la hidrodinámica clásica a una muy buena aproximación.
- Puede lidiar con choques tanto para fluidos Newtonianos como para fluidos relativistas.
- Puede mantener una estrella en equilibrio hidrostático (solución de las ecuaciones TOV) durante un tiempo corto ($\approx 1M$). Para tiempos mayores el fluido que conforma nuestra estrella pierde el estado de equilibrio a pesar de que el número bariónico se conserva.

En otras palabras: con la forma en la que se implementó el método de SPH en un código numérico no es posible mantener una estrella tipo TOV en equilibrio hidrostático para tiempos mayores a $1M$.

Los resultados obtenidos muestran también que:

- La rutina desarrollada para construir condiciones iniciales lo hace correctamente.
- La evolución del fluido preserva (a una buena aproximación) el número bariónico.

Entre las posibles razones por las cuales se considera que no fue posible mantener al fluido de la estrella tipo TOV en equilibrio hidrostático están:

- El integrador en el tiempo no era el adecuado. Hizo falta tiempo para estudiar otro tipo de integradores.

- El número de partículas usado no fue suficiente. La teoría nos dice que entre más partículas usemos, la interpolación con el método de SPH será más exacta; sin embargo, usar más partículas implica mayor tiempo de cómputo y tiempo fue lo que faltó para estudiar esos casos
- Errores en el algoritmo diseñado.
- El método de SPH dispersa las velocidades iniciales del fluido sacándolo desde un inicio del equilibrio.

Apéndice A

Herramientas numéricas

A.1. Predictor-Corrector

Los métodos Predictor-Corrector (PC) son métodos que se basan en métodos multipasos. Un método multipaso de orden m se definen de la siguiente manera:

Definición 1 *Un método multipasos de paso m para resolver el problema de valor inicial*

$$u' = f(t, u), \quad a \leq t \leq b, \quad u(a) = \alpha \quad (\text{A.1})$$

es aquel cuya ecuación de diferencias para obtener la aproximación \tilde{u}_{i+1} en el punto de red t_{i+1} puede representarse por medio de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+1} = & a_{m-1}\tilde{u}_i + a_{m-2}\tilde{u}_{i-1} + \cdots + a_0\tilde{u}_{i+1-m} + h[b_m f(t_{i+1}, \tilde{u}_{i+1}) + \\ & b_{m-1}f(t_i, \tilde{u}_i) + \cdots + b_0f(t_{i+1-m}, \tilde{u}_{i+1-m})] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

para $i = m-1, m, \dots, N-1$, donde $h = (b-a)/N$, a_0, a_1, \dots, a_{m-1} y b_0, b_1, \dots, b_m son constantes y los valores iniciales

$$\tilde{u}_0 = \alpha, \quad \tilde{u}_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad \tilde{u}_{m-1} = \alpha_{m-1}. \quad (\text{A.3})$$

Cuando $b_m = 0$, el método es *explícito*, ya que la ecuación (A.2) da entonces \tilde{u}_{i+1} de manera explícita en términos de los valores previamente determinados.

Cuando $b_m \neq 0$, el método es *implícito*, ya que \tilde{u}_{i+1} se encuentra en ambos lados de (A.2) y se especifica sólo implícitamente.

En el presente trabajo se usó como predictor al *método de Euler*

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i), \quad (\text{A.4})$$

donde h es la distancia entre los pasos t_i y t_{i+1} , mientras que el corrector con el *método de Euler modificado* [7]

$$\tilde{u}_{i+1} = u_i + \frac{1}{2}h[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})]. \quad (\text{A.5})$$

A.2. Newton-Raphson

El *método de Newton-Raphson* es una de las técnicas para encontrar la raíz p de $f(x) = 0$, la cual consiste en dar inicialmente una aproximación (arbitraria) de raíz inicial p_0 e iterando la siguiente fórmula^a:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad (\text{A.6})$$

hasta una tolerancia aceptable; la cual se considera como tal cuando

$$\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \approx 0.$$

A.3. Runge-Kutta de cuarto orden

El *método de Runge-Kutta de cuarto orden* es un método iterativo que nos permite resolver ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad (\text{A.7})$$

que se enfoca en un promedio ponderado de la pendiente en dos puntos del dominio y el punto medio entre estos [7, 37, 41].

^aEl desarrollo para llegar a esta expresión se obtiene a partir de una expansión en series de Taylor de $f(x)$ al rededor de la raíz p , despreciando los términos de segundo orden [7, 37].

La forma de construir u_{n+1} en términos de u_n es:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_n, u_n), \\
 k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\
 k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}k_2\right), \\
 k_4 &= hf(x_n + h, u_n + k_3), \\
 u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

donde k_1, k_2, k_3 y k_4 son los valores aproximados de u en $x_n, x_n + h/2$ y x_{n+1} a partir de la ecuación de la recta. Al final se hace un promedio ponderado de estas cantidades para obtener u_{n+1} .

A.4. Método de aceptación y rechazo

El método de aceptación y rechazo es una técnica muy poderosa para generar variables aleatorias cuya función de distribución $p(x)dx$ (la probabilidad de que un valor ocurra entre x y $x + dx$) es conocida. Como ejemplo del método presentaremos el procedimiento realizado para generar un conjunto de puntos aleatorios que satisficieran los perfiles estructura de los sistemas estelares encontrados en el Cap. 6.

El problema es básicamente el siguiente:

$$m(r) = \int_0^R f(r')dr' = 4\pi \int_0^R \rho(r')r'^2 dr', \tag{A.9}$$

donde $f(r)$ es nuestra función de probabilidad.

Como primer caso consideraremos una $\rho(r)$ analítica:

$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi R^2 r}, \tag{A.10}$$

donde $M, R = \text{constante}$. Sustituyendo esta ecuación en Ec. (A.9) tenemos que

$$m(r) = \int_0^R \frac{2M}{R^2} r' dr', \tag{A.11}$$

es decir que $f(r) = 2Mr/R^2$, y su máximo local es $f_{max} = 2M/R$. Sean X, Y dos números aleatorios (distintos) generados por una distribución de probabilidad uniforme. Nuestra condición de aceptación es:

$$X f_{max} \leq f(r = YR). \quad (\text{A.12})$$

Esta condición nos dice que si el valor de $X f_{max}$ no se encuentra por debajo de la curva $f(r)$, entonces rechaza el número aleatorio X .

Como segundo caso de $\rho(r)$ se consideró a ésta como numérica, es decir que no tiene una forma analítica definida. Una vez que se tiene un arreglo de puntos r_i , con $i = 0, \dots, N_a$, para los que se conoce numéricamente la función $f(r_i)$ y f_{max} , procedemos con la condición de aceptación. Al no conocer el valor de f en cualquier punto, se recurrió a una interpolación de orden cero para aproximar el valor de $f(YR)$ en el presente caso.

El resultado que se empleó en el presente trabajo se muestra en la Fig. A.1

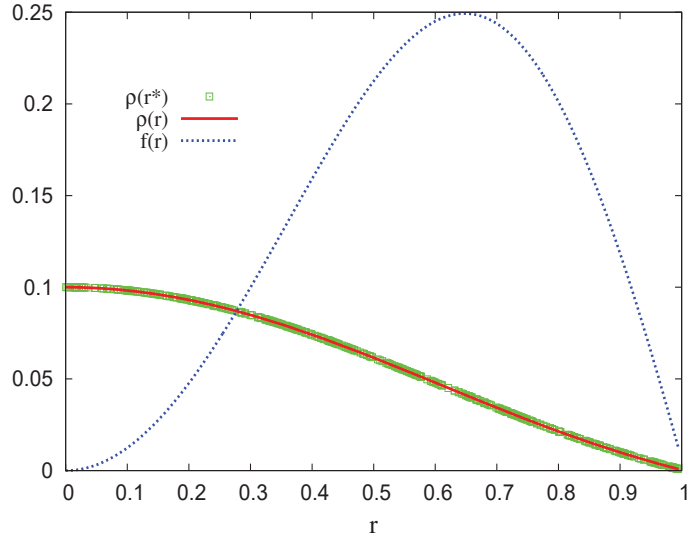


Figura A.1: Perfil de densidad y función de distribución. En la figura se muestra con líneas punteadas el perfil de densidad de masa en reposo obtenido de resolver numéricamente las ecuaciones TOV para una estrella politrópica con $n = K = 1$, mientras que con una línea continua se muestra la función de probabilidad asociada a nuestra distribución de materia $f(r) = \rho(r)r^2(1 - 2m(r)/r)^{-1/2}$. También se muestran los datos generados con el método de aceptación y rechazo para esta distribución.

Bibliografía

- [1] Alcubierre, M. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. International Series Monographs on Physics (Oxford University Press, USA, 2008).
- [2] Balsara, D. S. *Asymmetries in extragalactic radio sources*. Tesis Doctoral, Illinois Univ., Urbana-Champaign (1991).
- [3] Batchelor, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, 2000).
- [4] Baumgarte, T. W. y Shapiro, S. L. *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer* (Cambridge University Press, 2010).
- [5] Benz, W. *Smooth Particle Hydrodynamics: a Review*. En J. R. Buchler (Ed.), *Numerical Modelling of Nonlinear Stellar Pulsations Problems and Prospects*, 269– (Kluwer Academic Publishers, Les Arcs, France, 1990).
- [6] Buchdahl, H. A. *Seventeen Simple Lectures on General Relativity Theory* (Wiley, N. Y., 1981).
- [7] Burden, R. L. y Faires, J. D. *Análisis numérico* (Thomson Learning, 2002).
- [8] Carmo, M. P. d. *Riemannian geometry* (Birkhäuser, 1992).
- [9] Carroll, S. M. *Spacetime and geometry* (Addison Wesley, 2004).
- [10] Clarke, C. J. y Carswell, R. F. *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, 2007).
- [11] Cruz, J. P. *Discusión sobre la integración de las ecuaciones TOV* (2011).
- [12] Cruz, J. P. y González, J. A. *Symmetries without symmetries in Smoothed Particle Hydrodynamics* (2011). [arXiv:1105.1413v1\[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1105.1413v1).

-
- [13] Fermi, E. *Thermodynamics* (Dover, 1956).
- [14] Feynman, R. P. et al. *The Feynman Lectures on Physics*, tomo II: Mainly Electromagnetism and Matter (Pearson Addison-Wesley, 2006).
- [15] García-Colín, L. *Introducción a la termodinámica clásica* (Trillas, 1986).
- [16] Gingold, R. A. y Monaghan, J. J. *Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars*. Mon. Not. R. Astron. S., 181:(1977) 375–389.
- [17] Goldstein, H. *Mecánica Clásica*. Segunda ed. (Editorial Reverté, S. A., 2002).
- [18] González, J. A. *Analytic solution of the shock tube*. http://www.ifm.umich.mx/~gonzalez/shock_tube_norel_analytic.html.
- [19]ourgoulhon, E. *3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity* (2007). arXiv:gr-qc/0703035v1.
- [20] Griebel, M. et al. *Special-relativistic Smoothed Particle Hydrodynamics: a benchmark suite*, tomo 79, 89–103 (Springer Berlin Heidelberg, 2011).
- [21] Hartle, J. B. *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity* (Addison Wesley, 2003).
- [22] Hernquist, L. y Katz, N. *TREESPH - A unification of SPH with the hierarchical tree method*. Astrophys. J., 70:(1989) 419–446.
- [23] Huang, K. *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, Inc., 1987).
- [24] Laguna, P. et al. *Smoothed Particle Hydrodynamics Near a Black Hole*. ApJ, 404:(1993) 678–685.
- [25] Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. *Fluid Mechanics*, tomo 6 of Course of theoretical physics (Butterworth-Heinemann, 1987).
- [26] Liu, G. R. y Liu, M. B. *Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method* (World Scientific, 2003).
- [27] Lora-Clavijo, F. D. *Discusión sobre la integración de las ecuaciones TOV* (2011).
- [28] Lucy, L. B. *A numerical approach to the testing of the fission hypothesis*. The Astronomical Journal, 82:(1977) 1013–1024.

-
- [29] Misner, C. W. et al. *Gravitation*. Physics (W. H. Freeman, 1973).
- [30] Monaghan, J. J. *Smoothed Particle Hydrodynamics*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 30:(1992) 543–574.
- [31] Monaghan, J. J. y Gingold, R. A. *Shock simulation by the particle method SPH*. J. Comp. Phys., 52 (2):(1983) 374–389.
- [32] Montoya, E. A. *Estudios numéricos de los sistemas politrópicos*. Tesis de Maestría (2011).
- [33] Morris, J. P. y Monaghan, J. J. *A Switch to Reduce SPH Viscosity*. Journal of Computational Physics, 236:(1997) 41–50.
- [34] Muir, S. y Monaghan, J. *3D Relativistic SPH* (2003).
- [35] Padmanabhan, T. *Theoretical Astrophysics*, tomo II: Stars and Stellar Systems (Cambridge University Press, 2001).
- [36] Padmanabhan, T. *Theoretical Astrophysics*, tomo I: Astrophysical processes (Cambridge University Press, 2001).
- [37] Press, W. H. et al. *Numerical Recipes in Fortran 77: the art of scientific computing*, tomo 1 of Fortran Numerical Recipes (Cambridge University Press, 1992).
- [38] Price, D. J. *Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics*. J. Comp. Phys., In Press, Corrected Proof.
- [39] Price, D. J. y Monaghan, J. J. *An energy-conserving formalism for adaptive gravitational force softening in smoothed particle hydrodynamics and N-body codes*. Mon. Not. R. Astron. Soc., 374:(2007) 1347–1358.
- [40] Rosswog, S. *Astrophysical smooth particle hydrodynamics*. New Astro. Rev., 53 (4-6):(2009) 78–104.
- [41] Rueda, J. M. *Solución numérica de geodésicas nulas para la generación de lentes gravitacionales producidas por espacio-tiempos esféricamente simétricos estáticos*. Tesis de Licenciatura (2009).
- [42] Scheel, M. A. et al. *3D simulations of linearized scalar fields in Kerr spacetime*. Phys. Rev. D, 69 (104006).
- [43] Schutz, B. F. *Geometrical methods of mathematical physics* (Cambridge University Press, 1980).

-
- [44] Schutz, B. F. *A first course in General Relativity* (Cambridge University Press, 1985).
- [45] Shapiro, S. L. y Teukolsky, S. A. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars* (John Wiley & Sons, Inc., 1983).
- [46] Siegler, S. y Ruffert, H. *Smoothed particle hydrodynamics simulations of ultrarelativistic shocks with artificial viscosity*. *Astrophys. J.*, 531:(2000) 1053–1066.
- [47] Sod, G. *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 43:(1978) 1–31.
- [48] Springel, V. y Hernquist, L. *Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: the entropy equation*. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, (333):(2002) 649–664.
- [49] Stephani, H. *Relativity: An Introduction to Special and General Relativity* (Cambridge University Press, 2004).
- [50] Taylor, E. F. y Wheeler, J. A. *Exploring black holes: Introduction to General Relativity* (Addison Wesley Longman, 2008).
- [51] Toro, E. F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction* (Springer-Verlag, 2009).
- [52] von Neumann, J. y Richtmayer, R. D. *A method for the numerical calculation of hydrodynamics shocks*. *Journal of Applied Physics*, 21:(1950) 232–237.
- [53] Wald, R. M. *General Relativity* (The Chicago University Press, 1984).