UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

Hiperbolicidad Relativa Débil de los Grupos Modulares de Superficies Orientables

T E S I N A

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matematicas

presenta

José Joaquín Domínguez Sanchez.

Director: Jesús Hernandez Hernández.

Morelia, Michoacan, México.
Junio del 2023.

Agradecimientos

Quiero aprovechar este espacio para agradecer a todos aquellos quienes de alguna forma contribuyeron para que pudiese realizar este trabajo y en consecuencia, concluir con mis estudios de maestría.

Primeramente me gustaría agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por el soporte económico brindado mediante proyecto UNAM-PAPIIT IN114323 "Grupos modulares de superficies y aplicaciones de topología a análisis de datos".

También agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) porque durante la elaboración de esta tesina fui apoyado parcialmente por el proyecto Ciencia de Frontera 2019 217392 titulado "Cerrando brechas y extendiendo puentes en Geometría y Topología".

Estos apoyos no pudieron haber sido posibles sin la gestión de mi asesor el Dr. Jesús Hernández Hernández, a quien además agradezco por sus consejos, su paciencia, por ser una inspiración y por su orientación en este trabajo.

Agradezco también a quienes durante mi maestría fueron mis profesores porque con gran ímpetu y paciencia compartieron sus conocimientos.

Un agradecimiento especial a mi gran amigo Carlos Adrián Pérez Estrada por escucharme, por tomarse el tiempo para resolver algunas de mis dudas, por ayudarme a estudiar para mis exámenes generales y por estar conmigo en momentos muy difíciles.

Agradezco profundamente a mi madre, Rosibel Sánchez Sánchez, y a mi padre, José Domínguez Márquez, quienes con mucho esfuerzo y amor me han dado su apoyado moral y económico para que yo pueda alcanzar mis metas. Juntamente, quiero agradecer a mis hermanas y a mi hermano porque aún en la distancia han sabido demostrarme que están cerca, por el gran cariño que sienten hacia mí y por las palabras de ánimo que me dan cuando paso por malos momentos.

Abstract

The mapping class group and the curve graph are two objects that we associate to a surface. In this work we give a brief introduction to this concepts, we talk about a natural action of the mapping class group over the curve graph and we prove using a quasi-isometry in the curve graph that the mapping class group of an orientable surface with genus at least two is weakly hyperbolic relative to a finite collection of curves stabilizers.

Key words: Large-scale geometry, hyperbolic groups, weakly relative hyperbolic groups, coned-off Cayley graphs, curve graph.

Resumen

El grupo modular y el grafo de curvas son dos objetos que se asocian a una superficie. En este trabajo se da una introducción breve de estos conceptos, se habla de una acción del grupo modular en el complejo de curvas y se prueba, usando una cuasiisometría al grafo de curvas, que el grupo modular de una superficie orientable de género al menos dos es débilmente hiperbólico relativo a una colección finita de estabilizadores de curvas.

Palabras clave: Geometría a gran escala, grupos hiperbólicos, grupos débilmente hiperbólicos relativos, grafos de Cayley aconados, grafo de curvas.

Índice

1. Introducción

Algunos de los objetivos de la teoría geométrica de grupos son estudiar a los grupos como objetos geométricos y sus invariantes a gran escala, es decir, las propiedades que se preservan bajo cuasiisometrías. La hiperbolicidad es una de estas invariantes. Se dice que un grupo finitamente generado es hiperbólico si la realización geométrica de alguno de sus grafos de Cayley respecto a un conjunto generador finito es hiperbólico en el sentido de Gromov.

Varias propiedades algebraicas y algorítmicas de los grupos hiperbólicos se pueden deducir a través del estudio de su geometría, como por ejemplo, que son finitamente presentados, que tienen el problema de la palabra y el problema de la conjugación solubles, que tienen una cantidad finita de tipos de conos y que tienen una cantidad finita de clases de conjugación de subgrupos finitos [BH99].

Existen grupos que tienen un comportamiento parecido al de los grupos hiperbólicos pero que no lo son. Tal es el caso de los grupos modulares de superficies orientables, los cuales en su mayoría no son hiperbólicos pero tienen varias propiedades de estos, por mencionar algunas, son finitamente presentados (ver [FM12], [HT80]), tiene una cantidad finita de clases de conjugación de subgrupos finitos (ver, por ejemplo, [Bri00, Stu04]) y tienen una cantidad finita de tipos de conos ([Mos95, NS97]).

El teorema de clasificación de superficies afirma que una superficie orientable, de tipo finito, conexa y con frontera compacta, es homeomorfa de forma única a una suma conexa de $g \geq 0$ toros con una esfera de dimensión dos $\mathbb{S}^2$ menos $n \geq 0$ puntos y $b \geq 0$ discos abiertos con cerraduras disjuntas. A g se le conoce como el género de la superficie, a b como el número de componentes de frontera y a n como el número de ponchaduras. Se denota por $S_{g,n}$ a la superficie orientable de género g con n ponchaduras y frontera vacía. A $S_{g,0}$ se denota simplemente como S_g.

El grupo modular de una superficie S, denotado por $\mathrm{Mod}(S)$, se define como el grupo de clases de isotopía relativa a la frontera de homeomorfismos de S en sí misma tales que preservan la orientación de S, son la identidad en su frontera y preservan el conjunto de ponchaduras. Como se mencionó anteriormente, los grupos modulares "tienen un comportamiento" como el de los grupos hiperbólicos, sin embargo, de entre las superficies de característica de Euler negativa, las únicas cuyo grupo modular es un grupo hiperbólico son la esfera con tres ponchaduras, la esfera con cuatro ponchaduras y el toro con una ponchadura. Se pueden verificar fácilmente que los grupos modulares de las demás no son grupos hiperbólicos corroborando que contienen subgrupos abelianos de rango dos (los cuales son generados por giros de Dehn en torno a clases isotopía de curvas esenciales disjuntas y no isotópicas en la superficie, ver el Corolario 2.13 y la Observación 3.5).

Para incluir en una lista más amplia a los grupos hiperbólicos y aquellos grupos que, como los grupos modulares, presentan comportamientos parecidos a la de los grupos hiperbólicos, Farb en [Far98] formula el concepto de un grupo débilmente hiperbólico relativo, el cual es una generalización del concepto de un grupo hiperbólico. Un grupo G finitamente generado es *débilmente hiperbólico relativo a* $\{H_1, \ldots, H_n\}$ a una colección finita de subgrupos finitamente generados de G si la realización geométrica del grafo de Cayley aconado por $\{H_1, \ldots, H_n\}$ es hiperbólico (ver Sección 2.2).

El objetivo de este trabajo es probar que para $g \geq 2$, el grupo $\mathrm{Mod}(S_g)$ es débilmente hiperbólico relativo a una colección finita de subgrupos finitamente generados. Para esto será necesario estudiar una acción natural de grupo $\mathrm{Mod}(S_g)$ en un espacio métrico particular.

Harvey en [Har81] asocia a una superficie S un complejo simplicial de dimensión finita, al cual le llama *complejo de curvas*. Los vértices del complejo de curvas son las clases de isotopías de curvas esenciales en S y los simplejos son colecciones de clases de curvas tales que dos a dos son disjuntas y tienen representantes disjuntas. El 1-esqueleto del complejo de curvas de S se le conoce como *grafo de curvas* y es cuasiisometríco al complejo de curvas. Para $\mathbb{S}^2$, $S_{0,1}$, $S_{0,2}$, $S_{0,3}$ el grafo de curvas es vacío; para el T^2, $S_{1,1}$ y $S_{0,4}$ es una unión numerable disjunta de puntos; y para $S_{g,n}$ con $3g + n \geq 5$, es un grafo conexo, de diámetro infinito e hiperbólico.

El grupo modular $\mathrm{Mod}(S)$ actúa por isometrías de forma natural en el grafo de curvas de S. Cuando $S = S_g$ con $g \geq 2$, tal acción permite construir un cuasiisometría entre el grafo de curvas de S y el grafo de Cayley de $\mathrm{Mod}(S)$ aconado por una colección finita de estabilizadores de clases de curvas. En consecuencia, el grupo modular $\mathrm{Mod}(S)$ es débilmente hiperbólico relativo a una colección finita de subgrupos finitamente generados.

2. Preliminares

2.1. Cuasiisometrías

Una *cuasiisométria* entre espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) es una función $f : X \to Y$ para el cual se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Existen constantes $\lambda \geq 1$, $B \geq 0$ tales para cualesquiera $x, x' \in X$,

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - B \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + B;$$

2. Existe $C \geq 0$ tal que para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ el cual satisface que

$$d_Y(y, f(x)) \leq C.$$

Una función que satisface la primera condición, se le llama *encaje cuasiisométrico*; una que satisface la segunda, se dice que tiene imagen *cuasiidensa*. Se dice que X y Y son *cuasiisométricos* si hay una cuasiisometría entre ellos, esto se denota por $X \sim_{\mathrm{QI}} Y$.

En [Lï7] y en [BH99] se enuncian otras versiones de cuasiisometría equivalentes a la enunciada en este trabajo. En tales versiones se puede visualizar con mejor claridad que la relación de cuasiisometría es una relación de equivalencia entre espacios métricos.

Ejemplo 2.1. 1. La inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ es un encaje cuasiisométrico, más aún, es una cuasiisometría ya que todo número real está a distancia a lo más uno de algún número entero. En general, $\mathbb{R}^n \sim_{QI} \mathbb{Z}^n$ con las métricas usuales.

2. Dado un espacio métrico (X, d_x) y $A \subset X$, del diámetro de A se define como

$$\text{diám}(A) := \sup\{d_X(x, x') \,:\, x, x' \in A\}.$$

Se dice que X es de diámetro finito si $\text{diám}(X) < \infty$. No es difícil probar que los espacios métricos de diámetro finito son cuasiisométricos entre sí. En particular, $\mathbb{Z}$ (con la métrica inducida por $\mathbb{R}$) no es cuasiisométrico a un espacio de diámetro finito.

3. Dados un grupo G finitamente generado y $\Lambda \subset G$ un conjunto generador finito de G, se tiene que G con la métrica de las palabras inducida por Λ es cuasiisométrico a $|\text{Cay}(G, \Lambda)|$ la realización geométrica del grafo de Cayley de G respecto a Λ con la métrica de caminos [Lï7].

4. Sean Λ y Λ' dos conjuntos generadores finitos de un grupo G. Entonces (G, d_Λ) y $(G, d_{\Lambda'})$ son cuasiisométricos. Más aún, cualquier automorfismo de G es una cuasiisometría. Para más detalles puede consultar, por ejemplo, [Lï7] o [ABO19].

Proposición 2.2. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos funciones entre espacios métricos. Sunpóngase que existen $\lambda_0, \lambda_1 \geq 1$ y $B_0, B_1 \geq 0$ tales que para cualesquiera $x, x' \in X$,

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda_0 d_X(x, x') + B_0 \tag{1}$$

y para cualesquiera $y, y' \in Y$,

$$d_X(g(y), g(y')) \leq \lambda_1 d_Y(y, y') + B_1. \tag{2}$$

Si $g \circ f$ es la función identidad en X, entonces f es un encaje cuasiisométrico.

Demostración. De la desigualdad 2 se tiene que para cualesquiera $x, x' \in X$,

$$d_X(g(f(x)), g(f(x'))) \leq \lambda_1 d_Y(f(x), f(x')) + B_1.$$

Ahora bien, dado que $g \circ f$ es la función identidad en X, la desigualdad anterior implica que

$$\frac{1}{\lambda_1} d_X(x, x') - \frac{B_1}{\lambda_1} \leq d_Y(f(x), f(x')). \tag{3}$$

Sean $\lambda = \text{máx}\{\lambda_0, \lambda_1\}$ y $B = \text{máx}\{B_0, B_1/\lambda_1\}$, entonces de las desigualdades 1 y 3 se deduce que

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - B \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + B.$$

Por lo tanto, f es un encaje cuasiisométrico.

□

La igualdad $g \circ f = Id_X$ de la Proposición 2.2 puede sustituirse por la condición de que exista $c \geq 0$ tal que para cualesquiera $x \in X$, $d_X(x, g \circ f(x)) \leq c$. A una función que satisface la condición 1 se le conoce como *Lipchitz gruesa*.

El lema de Schwarz-Milnor, también conocido como el Resultado Fundamental de la Teoría Geométrica de Grupos, permite describir la geometría de grupo a partir de cómo actúa en espacios métricos. Para poder dar un enunciado de este lema es conveniente recordar las definiciones siguientes:

Definición 2.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que X es *propio* si para toda $r \in \mathbb{R}^+$ y toda $x \in X$, la bola cerrada $\{x' \in X : d(x, x') \leq r\}$ es compacta respecto a la topología inducida por métrica d.

Definición 2.4. Sea X un espacio topológico localmente compacto. Se dice que una acción $G \times X \to X$ es:

1. *Propia* si para todo subconjunto compacto $B \subset X$ el conjunto $\{g \in G : g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ es finito.

2. *Cocompacta* si el espacio cociente $G \backslash X$ es compacto con la topología cociente.

Ahora sí se tiene lo necesario para enunciar el lema de Schwarz-Milnor.

Lema 2.5 (Schwarz-Milnor, cf. Corolario 5.4.2, Capítulo 5 de [LÏ7])**.** Sean G un grupo y X un espacio métrico, geodésico y propio. Si G actúa en X por isometrías de forma propia y cocompacta, entonces G es finitamente generado y para todo $x \in X$ la función

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es una cuasiisometría. Más aún, si se considera a G actuando en sí mismo por multiplicación izquierda, esta cuasiisometría es equivariante.

En el lema anterior, G tiene la métrica de las palabras inducida por el conjunto generador finito. El lema de Schwarz-Milnor, como se verá en la siguiente sección, permite encontrar ejemplos de grupos hiperbólicos.

2.2. Hiperbolicidad de Gromov

Hiperbolicidad en espacios

Sea (X, d) un espacio métrico geodésico. Un *triángulo geodésico* en X es una tercia $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ donde cada $\gamma_i : [0, L_i] \to X$ es una geodésica en X y

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0).$$

En lo consiguiente, se identificará a cada geodésica γ_i con su imagen en X. Ahora, si $A \subset X$, la *δ-vecindad (cerrada) de A* es $N_\delta(A)$ la unión de bolas cerradas de radio δ centradas en elementos de A

Se dice que X es un espacio *hiperbólico* (*en el sentido de Gromov*) si existe $\delta \geq 0$ tal que para cualquier triángulo geodésico $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, se cumple que la δ-vecindad de la unión de cualesquiera dos lados contiene al tercero, esto es, si

$$\gamma_0 \subset N_\delta(\gamma_1 \cup \gamma_2),$$
$$\gamma_1 \subset N_\delta(\gamma_0 \cup \gamma_2),$$
$$\gamma_2 \subset N_\delta(\gamma_0 \cup \gamma_1).$$

A δ se le conoce como la *constante de hiperbolicidad* de X.

En la Figura 1, se puede apreciar una ilustración de un triángulo en el que la δ-vecindad $\gamma_0 \cup \gamma_1$ contiene a γ_2.

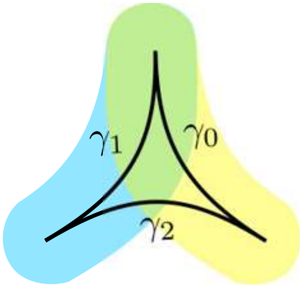

Figura 1: La región amarilla es δ-vencindad de γ_0 y la región azúl es la de γ_1. La unión de estás contiene a γ_2.

Ejemplo 2.6.

1. El espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ es hiperbólico en el sentido de Gromov con su métrica usual (ver Corolario 1.33 de [Roe03]).
2. Para $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ no es hiperbólico. En efecto, para cualquier $\delta \geq 0$ se puede encontrar un triángulo rectángulo suficientemente grande tal que uno de sus lados no está contenido dentro de la δ-vecindad de la unión de sus otros lados.
3. Los espacios métricos de diámetro finito son hiperbólicos, con constante de hiperbolicidad igual al diámetro del espacio.
4. Las realizaciones geométricas de árboles son hiperbólicos, con constante de hiperbolicidad igual a cero.

El siguiente teorema relaciona la teoría de espacios hiperbólicos con la teoría de espacios cuasiisométricos, su demostración no es sencilla y requiere un estudio más profundo de las teorías. Una demostración, se puede consultar, por ejemplo, en [BH99].

Teorema 2.7 (cf. Teorema 1.9, Capítulo III.H de [BH99])**.** Sean X y X' espacio métricos geodésicos y sea $f : X' \to X$ un encaje cuasiisométrico. Si X es hiperbólico entonces X' es hiperbólico.

Observación 2.8. En particular, este teorema, prueba que la hiperbolicidad es un invariante cuasiisométrico, esto es que, si X y Y son espacios cuasiisométricos y uno de ellos es hiperbólico, entonces el otro también lo es.

Hiperbolicidad en grupos

Dados un grupo G y $\Lambda \subseteq G$ conjunto generador finito de G, considérese $\mathrm{Cay}(G, \Lambda)$ *el grafo de Cayley de G respecto* Λ, es decir el grafo que tiene a G como conjunto de vértices y $f, h \in G$ forman un arista si $f^{-1}h \in \Lambda \cup \Lambda^{-1} - \{e\}$, donde Λ^{-1} es el conjunto de los elementos inversos de los elementos de Λ y e el elemento neutro de G. Se dice que G es un grupo *hiperbólico* si la realización geométrica $|\mathrm{Cay}(G, \Lambda)|$ es un espacio hiperbólico.

Observación 2.9. La inclusión natural $G \hookrightarrow |\mathrm{Cay}(G, \Lambda)|$ es una cuasiisometría. Por tanto, si se quiere ver que G es hiperbólico, es suficiente encontrar una cuasiisometría entre un espacio hiperbólico y G.

Proposición 2.10. Sean G y H grupos finitamente generados, si G es cuasiisométrico a H, entonces G es hiperbólico si y sólo si H también lo es.

Demostración. Sean X y Y conjuntos generadores finitos de G y H, respectivamente. De acuerdo con la observación anterior, las inclusiones $G \hookrightarrow |\mathrm{Cay}(G, X)|$ y $H \hookrightarrow |\mathrm{Cay}(H, Y)|$ son cuasiisometrías. Por la transitividad de la relación de cuasiisometrías, se tiene que $|\mathrm{Cay}(G, X)| \sim_{QI} |\mathrm{Cay}(H, Y)|$. Entonces la veracidad de la proposición viene en consecuencia de la Observación 2.8. $\square$

De la proposición anterior y del Ejemplo 2.1(3), se deduce que la hiperbolicidad de un grupo no depende del junto generador finito seleccionado, esto es que si G es hiperbólico respecto a un conjunto generado finito entonces también lo será respecto a cualquier otro conjunto generador finito.

Ejemplo 2.11.
1. Los grupos finitos son hiperbólicos, ya que sus grafos de Cayley respecto a cualquier conjunto generados son de diámetro finito y por el Ejemplo 2.6(3) estos son hiperbólicos.
2. El grupo libre en n generadores es un grupo hiperbólico, ya que ya su grafo de Cayley respecto a un conjunto generador libre es un árbol y de acuerdo con el Ejemplo 2.6(4), éstos son hiperbólicos. En particular, el grupo de los enteros $\mathbb{Z}$ es un grupo hiperbólico.
3. El grupo abeliano $\mathbb{Z}^2$ no es hiperbólico, pues este actúa en $\mathbb{R}^2$ de forma propia y cocompacta. Así, por el Teorema 2.5, $\mathbb{Z}^2$ es cuasiisométrico a $\mathbb{R}^2$ el cual no es hiperbólico. En general, para $n > 1$, $\mathbb{Z}^n$ no es hiperbólico.
4. Los grupos virtualmente $\mathbb{Z}$ son grupos hiperbólicos. Donde un grupo es virtualmente $\mathbb{Z}$ si tiene algún subgrupo de índice finito isomorfo a $\mathbb{Z}$.
5. Los grupos fundamentales de superficies cerradas de género al menos 2 son hiperbólicos, pues estos actúan por isometrías en su cubriente universal Riemanniano (el plano hiperbólico) de forma propia y cocompacta.

La siguiente proposición enmarca una propiedad esencial de los grupos hiperbólicos, la cual se puede consultar como el Corolario 3.10 de la Sección 3 del Capítulo III.Γ de [BH99].

Proposición 2.12. Sea G un grupo hiperbólico y $g \in G$ un elemento de orden infinito. Entonces se cumple que

1. La función $\mathbb{Z} \to G$ dada por $n \mapsto g^n$ es un encaje cuasiisométrico.
2. $\langle g \rangle$ es de índice finito en el centralizador de g en G.

Corolario 2.13. Los grupos hiperbólicos no contienen subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}^n$ con $n \geq 2$.

Demostración. Sea G un grupo hiperbólico y H subgrupo de G isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ para algún $n \geq 2$. Sea $g \in H$ un elemento distinto del elemento neutro, entonces g es de orden infinito. Se sigue del punto 2 de la Proposición 2.12 que $C_G(g)$ el centralizador de g en G es virtualmente $\mathbb{Z}$, y por lo tanto es hiperbólico.

Por otro lado, como H es abeliano, se tiene que $H \cong \mathbb{Z}^2$ es un subgrupo de $C_G(g)$. Lo que contradice que $C_G(g)$ es virtualmente $\mathbb{Z}$. □

Este resultado permite identificar de manera rápida cuando un grupo no es hiperbólico, simplemente verificando si este tiene subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}^2$. Esto servirá en la Sección 3 para probar que los grupos modulares de superficies, salvo una cantidad finita de casos, no son grupos hiperbólicos.

Hiperbolicidad relativa débil

Existe varios grupos que si bien no son hiperbólicos se compartan como si lo fuesen, pues poseen varias propiedades de estos, como por ejemplo los grupos modulares de superficies; esto ha llevado a debilitar el concepto de grupo hiperbólico para poder de alguna forma englobarlos. En esta sección se verá el concepto "más débil" de hiperbolicidad de un grupo, el cual involucra una modificación del grafo de Cayley del grupo.

Sean G un grupo y $\mathscr{P} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ una colección finita de subgrupos propios finitamente generados de G. Considérese $X \subset G$ un conjunto generador finito de G y el grafo $\mathrm{Cay}(G, X)$. Se construye un nuevo grafo como sigue: Para cada $H_i \in \mathscr{P}$ y cada clase lateral fH_i se añade a $\mathrm{Cay}(G, X)$ un vértice v_{fH_i}, llamado vértice cono; se pone una arista de longitud $\frac{1}{2}$ ente v_{fH_i} y cada elemento de fH_i. A este nuevo grafo se le denota por $\widehat{\mathrm{Cay}}(G, X)$ y se dice que es $\mathrm{Cay}(G, X)$ aconado por $\mathscr{P}$. Se dice que G es *débilmente hiperbólico relativo a* $\mathscr{P}$ si la realización geométrica $|\widehat{\mathrm{Cay}}(G, X)|$ es un espacio hiperbólico. Farb demostró que esta definición no depende del conjunto generador finito de G seleccionado.

Observación 2.14. Sea V_C el conjunto de los vértices conos de $\widehat{\text{Cay}}(G,X)$. Se cumple que la inclusión $G \cup V_C \hookrightarrow |\widehat{\text{Cay}}(G,X)|$ es una cuasiisometría. Así, si se quiere probar que $|\widehat{\text{Cay}}(G,X)|$ es hiperbólico, es suficiente con encontrar una cuasiisometría entre un espacio hiperbólico y $G \cup V_C$.

Es fácil de verificar que todo grupo hiperbólico es débilmente hiperbólico relativo a cualquier colección finita de subgrupos finitamente generados (por ejemplo, respecto al conjunto que consiste de únicamente el subgrupo trivial). El siguiente ejemplo prueba que existen grupos que son débilmente hiperbólicos relativos a una colección finita de subgrupos finitamente generados, pero que no son hiperbólicos.

Ejemplo 2.15. Consideremos $\mathbb{Z}^2$ con los generadores canónicos $e_0 = (1,0)$ y $e_1 = (0,1)$, y H el subgrupo generado por e_0. Se tiene entonces que la realización geométrica del grafo de Cayley de $\mathbb{Z}$ respecto a $\{e_0, e_2\}$ aconado respecto a H, es cuasiisométrico a $\mathbb{Z}$, y por la tanto es hiperbólico. Así, $\mathbb{Z}^2$ es débilmente hiperbólico relativo a {H}. Un bosquejo del grafo de Cayley de $\mathbb{Z}^2$ aconado respecto a $\{H\}$ se puede apreciar en la Figura 2.

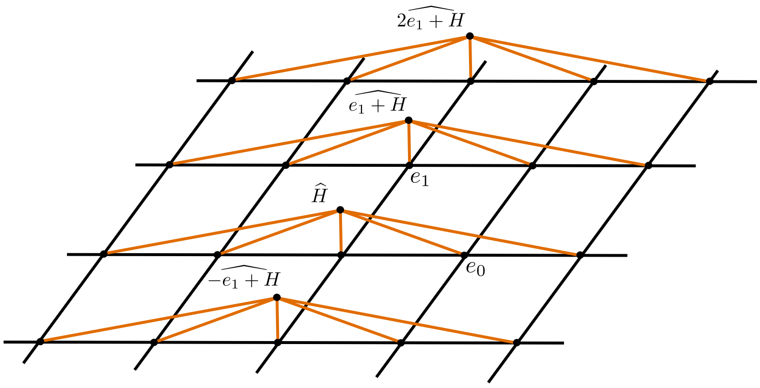

Figura 2: Grafo de Cayley de $\mathbb{Z}^2$ respecto a $\{e_0, e_1\}$ aconado respecto a $H = \langle e_0 \rangle$.

2.3. Curvas y superficies

Superficies

En este trabajo, a menos que se especifique lo contrario, una *superficie* será una 2-variedad orientable, conexa, de tipo finito y con frontera compacta (en caso de no ser vacía). Se comenzará enunciando el teorema de clasificación de este tipo de superficies. Para más detalles puede consultar, por ejemplo, [Mas91].

Teorema 2.16 (Teorema de clasificación de superficies)**.** Sea S una superficie, entonces S es homeomorfa (de forma única) a la suma conexa de una esfera (de dimensión 2) con $g \geq 0$ toros, removiendo $n \geq 0$ puntos y $b \geq 0$ discos abiertos con cerraduras disjuntas.

En el Teorema 2.16, a g se le conoce como el *género* de la superficie, a b como el número de *componentes de frontera* y n como el número de *ponchaduras*. En el caso de que n sea cero, la superficie es una superficie compacta.

Así, cualquier superficie se puede etiquetar con la tripleta (g,b,n) de enteros no negativos. Se denotará por $S_{g,n}$ a una superficie de género g con n ponchaduras y frontera vacía; tal superficie es homeomorfa al interior de una superficie compacta de género g con n componentes de frontera. Además, para una superficie cerrada (es decir, compacta y con frontera vacía) de género g, se abreviará a $S_{g,0}$ como S_g.

Con la notación anterior, se tiene que la *característica de Euler* $\chi(S)$ de una superficie S etiquetada por (g,b,n), satisface que

$$\chi(S) = 2 - 2g - (b+n).$$

Puesto que $\chi(S)$ es invariante de la clase de homeomorfismos de S, se sigue que una superficie S está determinada, salvo homeomorfismo, por cualquier terna formada por los números g, b, n, y $\chi(S)$.

Curvas

Sea S una superficie. Una *curva* en S es un encaje topológico $\alpha : \mathbb{S}^1 \to S$, esto significa que α es un homeomorfismo entre el círculo unitario $\mathbb{S}^1$ y $\alpha(\mathbb{S}^1)$.[1] Además, se dice que α es *esencial* si no es frontera de un disco ponchado, ni es homotópica a un punto y tampoco homotópica a una componente de frontera de S.

Observación 2.17. En este trabajo, al igual que en la literatura, se hará un abuso de la notación para llamar *curva* tanto a el encaje α como a su imagen.

En la Figura 3 se presentan ejemplos de curvas en S_2.

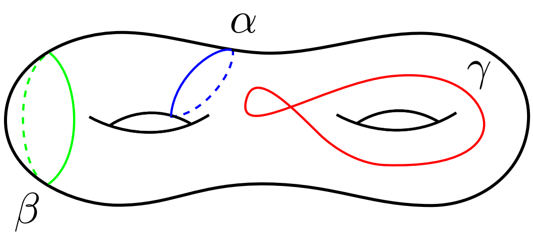

Figura 3: α es una curva esencial y β es no es esencial, mientas que γ, en este contexto, no se considera una curva.

Clasificación de curvas

Se denotará por $\mathcal{CE}(S)$ al conjunto de curvas esenciales en una superficie S. En $\mathcal{CE}(S)$ definimos la relación $\alpha \sim_h \beta$ si y sólo si existe un homeomorfismo $\phi : S \to S$ que preserva la orientación con la propiedad de que $\phi(\alpha) = \beta$. Es fácil de verificar que $\sim_h$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{CE}(S)$. A la clase de equivalencia de una curva bajo esta relación se le llama su *tipo topológico*. El objetivo de esta sección será ver que hay una cantidad finita de tipos topológicos de curvas esenciales en una superficie. Para esto es oportuno convenir el significado de cortar a una superficie.

Dada una curva α en una superficie cerrada S, *cortar* a S a lo largo α es el proceso que consiste de quitarle a S el interior de una vecindad regular (cerrada) de α. Esto genera una superficie compacta (no necesariamente conexa) S_α con dos componentes de frontera.

Se dice que una curva α en una superficie S es *separadora* si la superficie resultante de cortar a S sobre α no es conexa. En la Figura 4 se ilustra una curva separadora y otra que no lo es.

Observación 2.18. Nótese que si α no es separadora, entonces α es esencial.

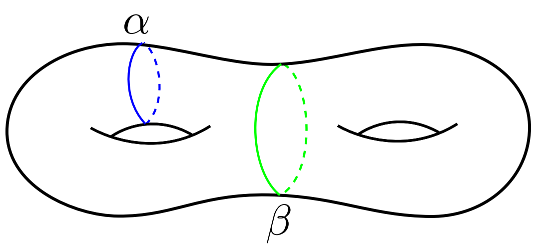

Figura 4: β es una curva separadora mientras que α no lo es.

Lema 2.19. Sea S es un superficie cerrada de género $g > 0$ y α una curva en S que no es separadora. Entonces, S_α es una superficie de género $g - 1$ con dos componentes de frontera.

Demostración. Sea N una vecindad vecindad regular de α con la que se obtiene S_α. Luego, las dos componentes de frontera de S_α provienen de la frontera de N y son precisamente las componentes conexas de $S_\alpha \cap N$.

[1] Típicamente, esta es la definición de una *curva cerrada simple* que se utiliza en topología algebraica, en donde una curva solamente es una función continua del $[0, 1]$ a la superficie.

Dado que S es una superficie cerrada de género g y S_α tiene dos componentes de frontera, se tiene que

$$\begin{aligned}\chi(S) &= 2-2g,\\ \chi(S_\alpha) &= 2-2g'-2=-2g'.\end{aligned}$$

Donde g' es el género de S_α. Luego, $S = S_\alpha \cup N$, y por tanto

$$\chi(S)=\chi(S_\alpha)+\chi(N)-\chi(S_\alpha\cap N),$$

Puesto que N es homeomorfo a un anillo y $S_\alpha \cap N$ es homeomorfo a una unión disjunta de dos copias de $\mathbb{S}^1$, se tiene que $\chi(N) = 0 = \chi(S_\alpha \cap N)$. Por tanto, $2-2g = -2g'$, de donde se deduce que $g' = g-1$. □

Observación 2.20. El lema anterior y el teorema de clasificación de superficies implican que hasta homeomorfismo, S_α no depende de la vecindad regular de α seleccionada. Además que, los homeomorfismos preservan la propiedad de separación de una curva, esto es que, para cualquier homeomorfismo $\phi : S \to S$, se tiene que una curva α es separadora si y sólo si $\phi(\alpha)$ es separadora. Esto último se debe a que bajo homeomorfismos los complementos van a complementos de manera homeomorfa.

Lema 2.21. Sea S una superficie cerrada de género $g \geq 1$. Si α y β son dos curvas en S que no son separadoras, entonces hay un homeomorfismo $\phi : S \to S$ tal que $\phi(\alpha) = \beta$. Más aún, se puede pedir que ϕ preserve la orientación.

Demostración. Sean N_α y N_β vecindades regulares cerradas de α y β, respectivamente. Se tiene que $S_\alpha = S - int(N_\alpha)$ y $S_\beta = S - int(N_\beta)$, y ambas son de género $g-1 \geq 0$ y tienen dos componentes de frontera. Además

$$\begin{aligned}\partial S_\alpha &= S_\alpha \cap N_\alpha = \partial N_\alpha,\\ \partial S_\beta &= S_\beta \cap N_\beta = \partial N_\beta.\end{aligned}$$

Por el teorema de clasificación de superficies, existe un homeomorfismo $\mu : S_\alpha \to S_\beta$. En particular, $\mu|_{\partial S_\alpha} : \partial S_\alpha \to \partial S_\beta$ es un homeomorfismo.

Ahora, como N_α y N_β son ambos homeomorfos a un anillo y α y β están en el interior de N_α y N_β respectivamente, existe $\eta : N_\alpha \to N_\beta$ un homeomorfismo tal que $\eta(\alpha) = \beta$. Más aún, se puede hacer que $\eta|_{\partial N_\alpha} = \mu|_{\partial S_\alpha}$.

Luego, por el lema del pegado (véase Lema 12.2 de [Kos80]), se tiene que la función $\phi : S \to S$ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} \mu(x) & \text{si } x \in S_\alpha, \\ \eta(x) & \text{si } x \in N_\alpha, \end{cases}$$

es continua. Más aún, como μ y η son homeomorfismos, ϕ también lo es. Finalmente, se tiene que $\phi(\alpha) = \beta$.

Si se quiere un homeomorfismo que preserve la orientación, entonces si es necesario se puede post-componer a ϕ con un homeomorfismo que invierta la orientación de S y fije a β. □

Observación 2.22. El lema anterior tiene como consecuencia que el conjunto de curvas no separadoras es un tipo topológico en $\mathcal{CE}(S)$.

Ahora bien, si α es una curva separadora esencial, entonces la superficie S_α que resulta de cortar a S sobre α tiene dos componentes conexas, cada una de estas partes tiene exactamente una componente de frontera, las que provienen de borrar en S el interior de una vecindad regular de α. Haciendo una cuenta similar a la realizada en la demostración del Lema 2.19, se llega a que una de las componentes conexas de S_α tiene género $k \geq 1$ y la otra $g-k$. Al mínimo entre g y $g-k$ se le llama el *género* de α.

Usando una versión del teorema de clasificación de superficies para superficies compactas no conexas, se puede probar que si α y β son dos curvas separadoras esenciales en una superficie S con el mismo género, entonces existe un homeomorfismo $\phi : S \to S$ tal que $\phi(\alpha) = \beta$.

Lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 2.23. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{CE}(S)$, entonces $\alpha \sim_h \beta$ si y sólo si S_α y S_β son homeomorfas.

Esto se traduce como que el género de una curva separadora esencial determina su tipo topológico. Por lo tanto, hay $\lfloor g/2 \rfloor$ tipos topológicos de curvas separadoras esenciales en una superficie S_g de género $g \geq 2$, puesto que hay $\lfloor g/2 \rfloor$ formas distintas de obtener (hasta homeomorfismo) superficies no conexas cortando a S_g sobre una curva esencial.

Lo anterior demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2.24. Sea $g \geq 1$, entonces $|\mathcal{CE}(S_g)/\sim_h| = \lfloor g/2 \rfloor + 1$.

Isotopía de curvas

Dadas dos curvas α y β en una superficie S, una *isotopía* entre α y β es una homotopía $H : \mathbb{S}^1 \times I \to S$ tal que $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{t\}}$ es una curva para todo $t \in I$, $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}} = \alpha$ y $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{1\}} = \beta$. Las isotopías de curvas inducen una relación de equivalencia en $\mathcal{CE}(S)$, a las clases de equivalencia bajo esta relación se les llama *clases de isotopía de curvas.*

Dada una isotopía de curvas en S, ésta se puede extender a una isotopía de S, a la cual se le llama *isotopía ambiente*. Esto se enmarca en el siguiente teorema.

Teorema 2.25 (cf. Teorema 1.3, Capítulo 8, [Hir76])**.** Sea S una superficie. Si $F : \mathbb{S}^1 \times I \to S$ es una isotopía de curvas, entonces existe una isotopía $H : S \times I \to S$ tal que $H|_{S \times \{0\}}$ es la identidad en S y $H(F(s, 0), t) = F(s, t)$ para todo $(s, t) \in \mathbb{S}^1 \times I$.

3. Grupo Modular

Dada una superficie S, una *isotopía de homeomorfismos* S es una homotopía $H : S \times I \to S$ tal que $H|_{S \times \{t\}}$ es un homeomorfismo para cada $t \in I$. Se dice que dos homeomorfismos $\phi, \varphi : S \to S$ son *isotópicos* si existe una isotopía H tal que $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}} = f$ y $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{1\}} = g$.

Sea S una superficie de género $g \geq 0$, $b \geq 0$ componentes de frontera y $n \geq 0$ ponchaduras. Se denota por $\mathrm{Homeo}^+(S; \partial S)$ al grupo de homeomorfismos de S que preservan la orientación y son la identidad en la frontera de S. El *grupo modular de* S [2], denotado por $\mathrm{Mod}(S)$, se define como $\mathrm{Homeo}^+(S; \partial S)$ módulo isotopía relativa a la frontera, es decir, $\mathrm{Mod}(S)$ es el grupo de clases de isotopía de homeomorfismos de S que preservan la orientación y restringidos a la frontera de S son la identidad.

Ejemplo 3.1.

1. Sea D^2 el disco cerrado, entonces $\mathrm{Mod}(D^2)$ es trivial. Este resultado es conocido como el *Lema de Alexander*, se puede encontrar como el Lema 2.1 de [FM12].

2. Sea A el anillo cerrado $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, se tiene que $\mathrm{Mod}(A)$ es isomorfo al grupo abeliano libre en un generador $\mathbb{Z}$ [FM12]. En la Observación 3.3 se muestran generadores que dejan este resultado.

Giros de Dehn

Considérense el anillo A del Ejemplo 3.1(2) y el encaje topológico de A en el plano (θ, r) dado por la función $(\theta, t) \mapsto (\theta, t + 1)$. Con esto, dótese a A con la orientación inducida por la orientación estándar del plano.

Definición 3.2. La función $T : A \to A$ dada por la fórmula

$$T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$$

se le llama *giro (izquierdo)* de A.

Observación 3.3. T es un homeomorfismo de A que preserva su orientación y que es la identidad en la frontera de A. Si se usa $\theta - 2\pi t$ en lugar de $\theta + 2\pi t$ en la asignación de T, se obtiene lo que se conoce como *giro derecho*. Estos giros son precisamente generadores de $\mathrm{Mod}(A)$ que te dejan el resultado del Ejemplo 3.1(2).

[2]También conocido en literatura como *grupo modular de Teichmuller, grupo de homeotopía o grupo de difeotopía*

Sean S un superficie y sea α una curva en S. Considérense N una vecindad regular cerrada de α y $\phi : A \to N$ un homeomorfismo que preserva la orientación. El *giro de Dehn en torno a* α es el homeomorfismo $T_\alpha : S \to S$ dado por

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & \text{si } x \in N, \\ x & \text{si } x \in S - N. \end{cases}$$

Una descripción gráfica de un giro de Dehn se puede apreciar en la Figura 5.

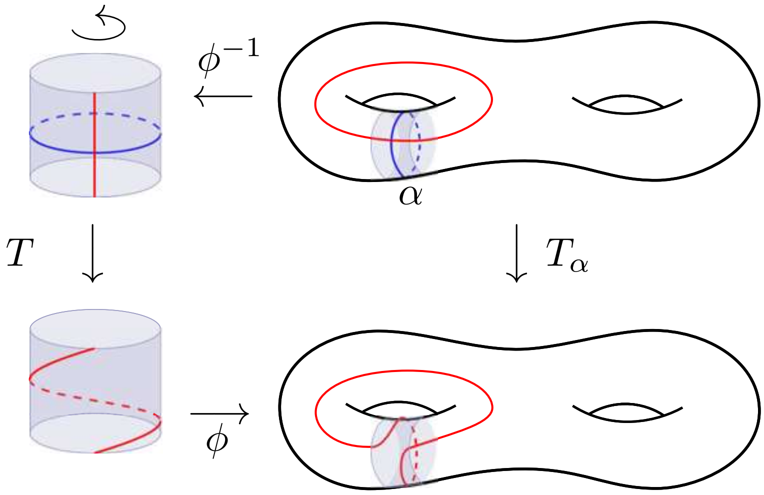

Figura 5: Ilustración del giro de Dehn en torno a α.

Observación 3.4. T_α depende de la vecindad regular N y de la función ϕ. Sin embargo, la clase de isotopía de T_α no depende de ninguno de los dos puntos recién mencionados. Esto es que, si N' es otra vecindad regular cerrada de α y $\varphi' : A \to N'$ es otro homeomorfismo que preserva la orientación, entonces T'_α, definido análogamente a T_α usando N' y ϕ', es isotópico a T_α.

Se tiene que si α y β son dos curvas isotópicas en S, entonces T_α y T_β también son isotópicos. El Hecho 3.6 de [FM12] asegura que el converso también se cumple.

Por otro lado, se tiene que si α es una curva esencial, entonces la clase de isotopía de T_α es un elemento de orden infinito en $\mathrm{Mod}(S)$ (ver Proposición 3.2 de [FM12]).

Si α y β son dos curvas disjuntas entonces las clases de isotopías de T_α y T_β conmuntan en $\mathrm{Mod}(S)$, este hecho se puede ver de forma rápida observando que los giros de Dehn mencionados tienen soporte disjunto.

Observación 3.5. De lo recién mencionado se deduce que si α y β son dos curvas esenciales disjuntas que no son isotópicas, entonces las clases de isotopía de T_α y T_β generan un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ en $\mathrm{Mod}(S)$. Para $g \geq 2$, siempre se pueden encontrar (al menos) dos curvas esenciales disjuntas en S_g cuyas clases de isotopías son distintas, y por lo tanto $\mathrm{Mod}(S_g)$ tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}^2$. Se sigue del Corolario que para $g \geq 2$ 2.13 que $\mathrm{Mod}(S_g)$ no es un grupo hiperbólico.

Se finalizará esta sección enunciando el teorema siguiente, el cual garantiza que el grupo modular de una superficie cerrada es finitamente generado.

Teorema 3.6 (Teorema de Dehn-Lickorish)**.** Para $g \geq 0$, el grupo modular $\mathrm{Mod}(S_g)$ está generado por una colección finita de giros de Dehn en torno a clases de curvas no separadoras.

En la Figura 6 se pueden apreciar una colección finita de curvas cuyos giros de Dehn respectivos generan a $\mathrm{Mod}(S_g)$. Para más detalles se puede consultar la Sección 4 de [FM12], en particular la demostración del Teorema 4.1.

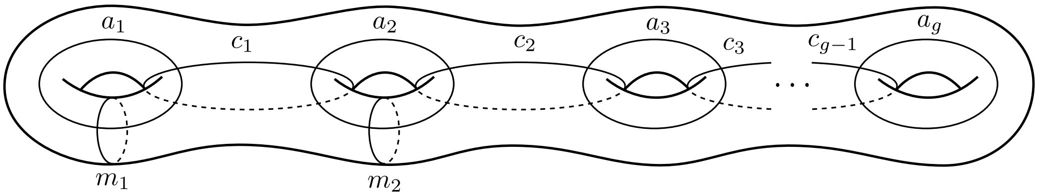

Figura 6: Los giros de Dehn en torno a estas $2g+1$ curvas generan a $\mathrm{Mod}(S_g)$.

3.1. Acción del $\mathrm{Mod}(S)$ en $\mathcal{C}(S)$

El *grafo de curvas de una superficie* S es el grafo $\mathcal{C}(S)$ que tiene como vértices a las clases de isotopía de curvas esenciales tales que dos clases forman una arista si tienen representantes disjuntos. $\mathcal{C}(S)$ es el 1-esqueleto del complejo de curvas definido originalmente por Harvey en [Har81], en el cual los simplejos están formados por clases de isotopía de curvas con representantes disjuntos. Para $g \geq 2$, el grafo de curvas $\mathcal{C}(S_g)$ es conexo; Masur y Minsky prueban en [MM99] que $\mathcal{C}(S_g)$ es hiperbólico y de diámetro infinito.

El grupo modular $\mathrm{Mod}(S)$ actúa por isometrías sobre el grafo de curvas $\mathcal{C}(S)$ de la siguiente forma: Sean $[\phi] \in \mathrm{Mod}(S)$ y $[\alpha] \in \mathcal{C}(S)$. Se define naturalmente $[\phi]\cdot[\alpha] := [\phi(\alpha)]$. Esta definición no depende de los representantes seleccionados de $[\phi]$ y $[\alpha]$. En efecto, si ϕ es isotópico a φ y α es isotópico a β, entonces existen isotopías $H : S \times I \to S$ de ϕ a φ y $F : \mathbb{S}^1 \times I \to S$ de α a β. Luego, $F' : \mathbb{S}^1 \times I \to S$ dada $F'(z,t) = H(F(z,t),t)$ es una isotopía entre $\phi(\alpha)$ y $\varphi(\beta)$. El hecho de que la acción sea por isometrías es consecuencia de que los homeomorfismos y las isotopías preservan el número de intersección geométrico de las clases de isotopía de curvas.

Ahora bien, si $\mathcal{O}[\alpha]$ y $\mathcal{O}[\beta]$ denotan las órbitas de $[\alpha]$ y $[\beta]$, respectivamente, y son iguales, entonces por definición existe $[\phi] \in \mathrm{Mod}(S)$ tal que

$$[\phi]\cdot[\beta] = [\phi(\beta)] = [\alpha].$$

De esto se sigue que $\phi(\beta)$ es isotópico α. Luego, la isotopía H del Teorema 2.25, aplicado a $\phi(\beta)$ y α, satisface que $H|_{S\times\{1\}} : S \to S$ es un homeomorfismo que manda $\phi(\beta)$ a α, lo que implica que $\phi(\beta) \sim_h \alpha$. Por definición $\beta \sim_h \phi(\beta)$ y de la transitividad de la relación $\sim_h$ en $\mathcal{CE}(S)$, se sigue que $\beta \sim_h \alpha$.

Ahora bien, si $\tilde{\alpha}$ denota el tipo topológico de una curva α en S, entonces por lo descrito previamente, se tiene que

$$\begin{aligned} \zeta : {}^{\mathcal{C}(S)}/_{\mathrm{Mod}(S)} &\longrightarrow {}^{\mathcal{CE}(S)}/_{\sim_h}, \\ \mathcal{O}[\alpha] &\longmapsto \tilde{\alpha}. \end{aligned}$$

es una función bien definida.

Proposición 3.7. La función $\zeta : \mathcal{C}(S)/\mathrm{Mod}(S) \to \mathcal{CE}(S)/\sim_h$ es una biyección.

Demostración. Es fácil ver que ζ es sobreyectiva: para cada $\tilde{\alpha} \in \mathcal{CE}(S)/\sim_h$, se tiene que $\zeta(\mathcal{O}[\alpha]) = \tilde{\alpha}$. Resta verificar que ζ es inyectiva.

Sean $\mathcal{O}[\alpha], \mathcal{O}[\beta] \in {}^{\mathcal{C}(S)}/_{\mathrm{Mod}(S)}$ tales que $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$. Se sigue que $\alpha \sim_h \beta$, lo que significa que existe un homeomorfismo $\phi : S \to S$ tal que $\phi(\alpha) = \beta$. Luego, $[\phi]\cdot[\alpha] = [\phi(\alpha)] = [\beta]$. Esto prueba que $[\beta]$ está en la órbita de $[\alpha]$, lo que implica que $\mathcal{O}[\alpha] = \mathcal{O}[\beta]$. Por lo tanto, ζ es inyectiva. $\square$

Del resultado anterior y del Teorema 2.24 se deduce el siguiente corolario.

Corolario 3.8. ${}^{\mathcal{C}(S)}/_{\mathrm{Mod}(S)}$ es finito.

4. Resultado principal

En lo consiguiente, S denotará a una superficie cerrada de género al menos dos, y para hacer la lectura más amena, se usarán las letras latinas f, h para denotar clases de isotopías de homeomorfismos de S y las letras latinas a, b, c para denotar clases de isotopía de curvas de S. Con esta convención, es natural denotar por $f(a)$ a $f \cdot a$.

Por el Corolario 3.8, se puede fijar $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una colección finita de representantes de las órbitas de aristas la acción del grupo $\mathrm{Mod}(S)$ en el grafo $\mathcal{C}(S)$. Para cada $1 \leq i \leq n$, sea H_{a_i} el estabilizador de a_i en $\mathrm{Mod}(S)$, es decir,

$$H_{a_i} := \{h \in \mathrm{Mod}(S) \,:\, h(a_k) = a_k\}.$$

Los grupos H_{a_i} son subgrupos finitamente generados de $\mathrm{Mod}(S)$, esto forma parte de la demostración del Teorema 4.11 de [FM12]. El objetivo principal este trabajo es probar el siguiente teorema

Teorema 4.1. El grupo $\mathrm{Mod}(S)$ es débilmente hiperbólico relativo a $\{H_{a_1}, \ldots, H_{a_k}\}$.

Para demostrar este teorema, es necesario previamente hacer algunas construcciones y probar algunos resultados.

De la definición del conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$, de deduce que para cada $b \in \mathcal{C}(S)$ existe un único $a_k \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ tal que b está en la misma órbita que a_k. Considérese el subconjunto

$$H_b := \{h \in \mathrm{Mod}(S) \,:\, h(a_k) = b\}$$

del grupo modular.

Lema 4.2. Para cada $b \in \mathcal{C}(S)$, con las descripciones previamente mencionadas, se tiene $f \in H_b$ si y sólo si $H_b = fH_{a_k}$.

Demostración. Evidentemente si $H_b = fH_{a_k}$ entonces $f \in H_b$, pues $f \in fH_{a_k}$.

Si $f \in H_b$ y $h \in fH_{a_k}$, entonces existe $h' \in H_{a_k}$ tal que $h = fh'$. Luego,

$$h(a_k) = fh'(a_k) = f(h'(a_k)) = f(a_k) = b,$$

implica que $h \in H_b$. Se sigue que la clase lateral fH_{a_k} está contenida en H_b. Por otro lado, si $g \in H_b$ entonces $f^{-1}g(a_k) = f^{-1}(g(a_k)) = f^{-1}(b) = a_k$, de donde se sigue que $g \in fH_{a_k}$, por lo tanto H_b está contenido en fH_{a_k}. Esto prueba que $H_b = fH_{a_k}$ si $f \in H_{a_k}$. □

El lema anterior, en particular prueba que para cada $b \in \mathcal{C}(S)$ el conjunto H_b es exactamente igual a una clase lateral de un único H_{a_k}. Entonces, si se considera un conjunto generador finito Λ de $\mathrm{Mod}(S)$ y se denota por $\widehat{\Gamma}$ al conjunto de vértices de $\mathrm{Cay}(\mathrm{Mod}(S), \Lambda)$ aconado respecto a $\{H_{a_1}, \ldots, H_{a_k}\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{C}(S) &\longrightarrow \widehat{\Gamma}, \\ b &\longmapsto v_{H_b}, \end{aligned}$$

es una función bien definida.

Teorema 4.3. La función $\Psi : \mathcal{C}(S) \longrightarrow \widehat{\Gamma}$ es una cuasiisometría.

Antes de dar una demostración de este teorema, es conveniente probar un par de lemas.

Lema 4.4. Sean K y L dos grafos conexos, $\eta : K \to L$ una función. Si existe $D \geq 1$ tal que para cualquier par vértices a, b adyacentes en K se cumple que $d_L(\eta(a), \eta(b)) \leq D$ entonces para cualquier par de vértices u, v en K se cumple que $d_L(\eta(u), \eta(v)) \leq D d_K(u, v)$.

Demostración. Sean u, v dos vértices arbitrarios en K y $n = d_K(u, v)$. Se tiene que existe un camino $(x_0, x_1, \ldots x_n)$ de u a v que realiza la distancia de u a v, esto significa que, $x_0 = u$, $x_n = v$ y que x_i y x_{i+1} forman una arista de K, para todo $0 \leq i \leq n-1$. Usando la desigualdad del triángulo y la hipótesis del lema, se obtiene que

$$\begin{aligned} d_L(\eta(u), \eta(v)) &\leq d_L(\eta(u), \eta(x_1)) + \cdots + d_L(\eta(x_{n-1}), \eta(v)) \\ &\leq nD \\ &= D d_K(u, v). \end{aligned}$$

□

Lema 4.5. La función $\Psi : \mathcal{C}(S) \longrightarrow \widehat{\Gamma}$ es inyectiva y su imagen es el conjunto de los vértices conos de $\widehat{\text{Cay}}(\text{Mod}(S), \Lambda)$.

Demostración. Sean $b, b' \in \mathcal{C}(S)$ tales que $v_{H_b} = v_{H_{b'}}$. Por el Lema 4.2, se sabe que $H_b = H_{b'} = fH_{a_k}$ para algún $f \in \text{Mod}(S)$ y algún $k \in \{1, \ldots, n\}$. Se sigue que $f \in H_b \cap H_{b'}$, lo que significa que $b = f(a_k) = b'$. Por lo tanto, Ψ es inyectiva.

Recuérdese que un vértice cono $v_{hH_{a_k}}$ en $\widehat{\text{Cay}}(\text{Mod}(S), \Lambda)$ corresponde a una clase lateral hH_{a_k}. Considérese $b = h(a_k) \in \mathcal{C}(S)$. Por definición, se tiene que $h \in H_b$. Del Lema 4.2, $hH_{a_k} = H_b$ y se sigue que $\Psi(b) = v_{H_b} = v_{hH_{a_k}}$. Esto prueba que el conjunto de los vértices conos de $\widehat{\text{Cay}}(\text{Mod}(S), \Lambda)$ es la imagen de Ψ. □

En particular, Ψ tiene imagen cuasidensa, pues cada vértice en $\widehat{\Gamma}$ está a distancia de a lo más $\frac{1}{2}$ de un vértice cono.

Demostración del Teorema 4.3. Se ha probado ya que Ψ tiene imagen cuasidensa, entonces solo resta probar que Ψ es un encaje cuasiisométrico. En virtud del la Proposición 2.2, es suficiente con encontrar una función $\Phi : \widehat{\Gamma} \to \mathcal{C}(S)$ con $\Phi \circ \Psi$ igual a la identidad en $\mathcal{C}(S)$ y constantes $\lambda, \lambda' \geq 1$ tal que para cualesquiera $b, b' \in \mathcal{C}(S)$ se cumple que

$$d_{\widehat{\Gamma}}(v_{H_b}, v_{H_{b'}}) \leq \lambda d_{\mathcal{C}}(b, b')$$

y para cualesquiera vértices v, v' en $\widehat{\Gamma}$ se satisface que

$$d_{\mathcal{C}}(\Phi(v), \Phi(v')) \leq \lambda' d_{\widehat{\Gamma}}(v, v').$$

Nótese que, salvo la acción del $\text{Mod}(S)$ en $\mathcal{C}(S)$, hay una cantidad finita de pares (b, b') de clases de curvas esenciales disjuntas en $\mathcal{C}(S)$ (es decir, pares que forma una arista en $\mathcal{C}(S)$). Sea $\{(b_j, b_j')\}_{j=1}^m$ una enumeración de estos pares. Se tiene que para cada a_i existe algún b_j en la misma órbita de a_i, esto significa que existe $f \in \text{Mod}(S)$ tal que $f(a_i) = b_j$. Sea $f_{ji} \in \text{Mod}(S)$ un elemento fijo tal que $f_{ji}(a_i) = b_j$. De manera análoga, se define $f_{jk}' \in \text{Mod}(S)$, $f_{jk}'(a_k) = b_j'$. Este proceso da como resultado una lista finita de elementos del grupo $\text{Mod}(S)$, y por tanto existe una constante $D \geq 0$ tal que la longitud de cada f_{ji} y f_{ji}' (respecto a la métrica de las palabras en $\text{Mod}(S)$ inducida por Λ) es menor o igual que C.

Sean b y b' elementos de $\mathcal{C}(S)$ a distancia uno en $\mathcal{C}(S)$. Se sigue que existen $h \in \text{Mod}(S)$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $h(b_j) = b$ y $h(b_j') = b'$. Además, existen $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ con la propiedad de que $f_{ji}(a_i) = b_j$ y $f_{jk}'(a_k) = b_j'$. Se sigue que $hf_{ji}(a_i) = h(b_j) = b$ y que $hf_{jk}'(a_k) = h(b_j') = b'$. Lo que implica que $hf_{ji} \in H_b$ y que $hf_{jk} \in H_{b'}$. Por lo tanto

$$d_{\widehat{\Gamma}}(hf_{ji}, v_{H_b}) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad d_{\widehat{\Gamma}}(hf_{jk}, v_{H_{b'}}) = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Ahora bien, la multiplicación izquierda del grupo $\text{Mod}(S)$ es una acción por isometrías del $\text{Mod}(S)$ en sí mismo, y por lo tanto se cumple que

$$d_{\widehat{\Gamma}}(hf_{ji}, hf_{jk}) \leq d_{\Lambda}(hf_{ji}, hf_{jk}) = d_{\Lambda}(f_{ji}, f_{jk}) \leq 2D. \tag{5}$$

La última desigualdad es por la desigualdad del triángulo y porque las longitudes de f_{ji} y f_{jk} son menores a D. Ahora bien, usando las desigualdades (4) y (5) y una vez más la desigualdad de triángulo, se tiene que

$$d_{\widehat{\Gamma}}(v_{H_b}, v_{H_{b'}}) \leq d_{\widehat{\Gamma}}(v_{H_b}, hf_{ji}) + d_{\widehat{\Gamma}}(hf_{ji}, hf_{jk}) + d_{\widehat{\Gamma}}(hf_{jk}, v_{H_b}) \leq 2D + 1.$$

Así, por el Lema 4.4, para cualesquiera $b, b' \in \mathcal{C}(S)$ se satisface que

$$d_{v_{\Gamma}}(v_{H_b}, v_{H_{b'}}) \leq (2D + 1) d_{\mathcal{C}}(b, b').$$

Ahora se procederá a demostrar la existencia de la función $\Phi : \widehat{\Gamma} \to \mathcal{C}(S)$. Para cada $f \in \mathrm{Mod}(S)$ se define $A_f \subset \mathcal{C}(S)$ como $A_f := \{f(a_i) \,:\, i \leq n\}$. Puesto que la acción de $\mathrm{Mod}(S)$ en $\mathcal{C}(S)$ es por isometrías, se tiene que para cada $f \in \mathrm{Mod}(S)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{diám}(A_g) &= \mathrm{máx}\{d_{\mathcal{C}}(a, a') \,:\, a, a' \in A_g\}, \\
&= \mathrm{máx}\{d_{\mathcal{C}}(g(a_i), g(a_j)) \,:\, i, j \leq n\}, \\
&= \mathrm{máx}\{d_{\mathcal{C}}(a_i, a_j) \,:\, i, j \leq n\}, \\
&= \mathrm{diám}(A_{Id}),
\end{aligned}$$

donde Id es el elemento neutro del grupo $\mathrm{Mod}(S)$. Esto indica que el diámetro de A_f no depende de f y como A_{Id} es finito, existe una constante $D_1 \geq 1$ tal que $\mathrm{diám}(A_f) \leq D_1$ para todo $f \in \mathrm{Mod}(S)$.

Sea $\gamma \in \Lambda \cup \Lambda^{-1}$, la distancia entre A_g y $A_{g\gamma}$ se define como

$$\mathrm{d}(A_g, A_{g\gamma}) := \mathrm{mín}\{d_{\mathcal{C}}(a, a') \,:\, a \in A_g \text{ y } a' \in A_{g\gamma}\}$$

y satisface que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(A_g, A_{g\gamma}) &= \mathrm{mín}\{d_{\mathcal{C}}(a, a') \,:\, a \in A_g \text{ y } a' \in A_{g\gamma}\}, \\
&= \mathrm{mín}\{d_{\mathcal{C}}(g(a_i), g\gamma(a_j)) \,:\, i, j \leq n\}, \\
&= \mathrm{mín}\{d_{\mathcal{C}}(a_i, \gamma(a_j)) \,:\, i, j \leq n\} \\
&= \mathrm{mín}\{d_{\mathcal{C}}(a, a') \,:\, \alpha \in A_{id} \text{ y } a' \in A_{\gamma}\} \\
&= \mathrm{d}(A_{Id}, A_{\gamma}).
\end{aligned}$$

Ahora bien, como Λ es finito, γ puede tomar solo una cantidad finita de valores y por tanto que existe una constante $D_2 \geq 1$ tal que $\mathrm{d}(A_{id}, A_{\gamma}) \leq D_2$ para todo $\gamma \in \Lambda \cup \Lambda^{-1}$. Se sigue que $\mathrm{d}(A_f, A_{f\gamma}) \leq D_2$ para todo $f \in \mathrm{Mod}(S)$ y todo $\gamma \in \Lambda \cup \Lambda^{-1}$.

Con esto, se define $\Phi : \widehat{\Gamma} \to \mathcal{C}(S)$ dada por $v_{H_b} \mapsto b$ y $f \mapsto \Phi(f) \in A_f$ un elemento fijo cualquiera en A_f. Por el Lema 4.5, Φ es una función bien definida, ya que el conjunto de los vértices conos está en correspondencia biyectiva con $\mathcal{C}(S)$. En particular se cumple que $\Phi \circ \Psi$ es la función identidad en $\mathcal{C}(S)$.

Se tiene que en $\widehat{\mathrm{Cay}}(\mathrm{Mod}(S), \Lambda)$ los vértices adyacentes son de la forma $\{f, f\gamma\}$ con $\gamma \in \Lambda \cup \Lambda^{-1} - \{Id\}$ o de la forma $\{f, v_{H_b}\}$ con $f \in H_b$.

Si son de la primera forma, por definición se tiene $\Phi(f) \in A_f$ y $\Phi(f\gamma) \in A_{f\gamma}$ y por lo tanto

$$d_{\mathcal{C}}(\Phi(f), \Phi(f\gamma)) \leq \mathrm{diám}(A_f) + \mathrm{d}(A_f, A_{f\gamma}) + \mathrm{diám}(A_{f\gamma}) \leq 2D_1 + D_2.$$

Si son de la segunda forma, existe un único $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $f(a_k) = b$, y por lo tanto $b \in A_f$. Como por definición $\Phi(f) \in A_f$, se satisface que

$$d_{\mathcal{C}}(\Phi(v_{H_b}), \Phi(f)) = d_{\mathcal{C}}(b, \Phi(f)) \leq \mathrm{diám}(A_f) = D_1 \leq 2D1 + D_2.$$

Se sigue, del Lema 4.4, que para cualesquiera dos elementos u, v en $\widehat{\Gamma}$

$$d_{\mathcal{C}}(\Phi(u), \Phi(v)) \leq (2D_1 + D_2) d_{\widehat{\Gamma}}(u, v).$$

Por la Proposición 2.2 que Ψ es un encaje cuasiisométrico.

□

Con lo anterior finalmente se puede dar una demostración del Teorema 4.3

Demostración del Teorema 4.3. Puesto que la hiperbolicidad es un invariante cuasiisométrico y $\mathcal{C}(S)$ es hiperbólico, se sigue del Teorema 4.3 que $\widehat{\mathrm{Cay}}(\mathrm{Mod}(S), \Lambda)$ es hiperbólico. □

5. Propiedad BCP

En este trabajo se han enunciado los conceptos de un grupo hiperbólico y un grupo débilmente hiperbólico relativo; existe un concepto más relacionado con la hiperbolicidad en grupos, este es el de un *grupo hiperbólico relativo*, el cual se podría pensar como un concepto que se sitúa en medio de los otro dos, ya que es más fuerte como el concepto de un grupo débilmente hiperbólico relativo, pero no tanto como el de un grupo hiperbólico.

Existen varias caracterizaciones de un grupo hiperbólico relativo, la que se dará en esta parte se le atribuye a Farb [Far98].

En lo consiguiente, G denota un grupo finitamente generado, $\Lambda \subseteq G$ subconjunto generador finito de G y $\mathscr{P} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ un conjunto finito de subgrupos de G finitamente generados. Considérese $\widehat{\mathrm{Cay}}(G, \Lambda)$ el grafo de Cayley de G respecto a Λ aconado por $\mathscr{P}$.

Dado un camino ω en $\widehat{\mathrm{Cay}}(G, \Lambda)$, se dice que ω *penetra la clase lateral* fH_i si ω pasa por el vértice cono v_{gH_i}; un vértice v_0 (respectivamente v_1) que precede a v_{fH_i} (respectivamente, que sigue de v_{fH_i}) se llama *vértice de entrada* (respectivamente, *vértice de salida*) de ω en la clase lateral fH_i. Se dice que el camino ω en $\widehat{\mathrm{Cay}}(G, \Lambda)$ es *sin retroceso* si para cada clase lateral fH_i en la que ω penetra, ω no regresa a fH_i después de salir de fH_i.

Definición 5.1 (Propiedad BCP)**.** Se dice que el par $(G, \mathscr{P})$ satisface la propiedad BCP (bounded coset penetration) si, para cada $P \geq 0$ existe una constante $c = c(P) \geq 0$ tal que si u y v son P-cuasigeodésicas sin retroceso en $\widehat{\mathrm{Cay}}(G, \Lambda)$ con el mismo punto inicial y los puntos finales a distancia a lo más uno en $\mathrm{Cay}(G, \Lambda)$ entonces se cumple las condiciones siguientes:

1. Si u penetra la clase lateral fH_i pero v no la penetra, entonces los vértices de entrada y de salida de u en fH_i están a una distancia de lo más c en $\mathrm{Cay}(G, \Lambda)$.

2. Si ambos u y v penetran las clase lateral fH_i entonces el vértice de entrada de u y el vértice de entrada de v en la clase lateral fH_i están a distancia a lo más c en $\mathrm{Cay}(G, \Lambda)$. Similarmente con los vértices de salida.

Se dice que G es *hiperbólico relativo* a $\mathscr{P}$ si $\widehat{\mathrm{Cay}}(G, \Lambda)$ es hiperbólico y la pareja $(G, \mathscr{P})$ satisface la propiedad BCP.

Behrstock, Drutu y Mosher en [BDM09] introducen un nuevo invariante de espacios cuasiisométricos al que llaman *metrically thick*, el cual es suficiente para que un espacio métrico no sea hiperbólico relativo a cualquier colección no trivial de subconjuntos. Con esto prueban que, para el grupo $\mathrm{Mod}(S_{g,n})$, con $3g + n \geq 5$, no existe una colección finita de subgrupos propios finitamente generados tal que $\mathrm{Mod}(S_{g,n})$ se hiperbólico relativo respecto a tal colección (Corolario 8.3 de [BDM09]).

Referencias

[ABO19] Carolyn Abbott, Sahana H. Balasubramanya, and Denis Osin. Hyperbolic structures on groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 19(4):1747–1835, 2019.

[BDM09] Jason Behrstock, Cornelia Druţu, and Lee Mosher. Thick metric spaces, relative hyperbolicity, and quasi-isometric rigidity. *Math. Ann.*, 344(3):543–595, 2009.

[BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Bri00] Martin R. Bridson. Finiteness properties for subgroups of $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$. *Math. Ann.*, 317(4):629–633, 2000.

[Far98] B. Farb. Relatively hyperbolic groups. *Geom. Funct. Anal.*, 8(5):810–840, 1998.

[FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[Har81] W. J. Harvey. Boundary structure of the modular group. In *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, volume 97 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 245–251. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.

[Hir76] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Graduate Texts in Mathematics, No. 33. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[HT80] A. Hatcher and W. Thurston. A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface. *Topology*, 19(3):221–237, 1980.

[Kos80] Czes Kosniowski. *A first course in algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.

[LÏ7] Clara Löh. *Geometric group theory*. Universitext. Springer, Cham, 2017. An introduction.

[Mas91] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, volume 127 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[MM99] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1):103–149, 1999.

[Mos95] Lee Mosher. Mapping class groups are automatic. *Ann. of Math. (2)*, 142(2):303–384, 1995.

[NS97] Walter Neumann and Michael Shapiro. A short course in geometric group theory. 07 1997.

[Roe03] John Roe. *Lectures on coarse geometry*, volume 31 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Stu04] Michał Stukow. Conjugacy classes of finite subgroups of certain mapping class groups. *Turkish J. Math.*, 28(2):101–110, 2004.