

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

**CUALITATIVIZACIÓN DE FUNCIONES,
APLICACIÓN A DIAGRAMAS DE
BIFURCACIÓN**

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

presenta
Héctor Rodríguez Rangel

Dr. Juan José Flores Romero
Director de Tesis

Agosto 2009

*A mis padres Héctor y Guillermina,
y a mi hermana Sandra, sin su apoyo
incondicional este paso no habría sido posible.*

*Al Dr. Juan José Flores Romero por servir
de guía a lo largo de esta parte del camino.*

*Al Dr. Juan Antonio Ortega Ramírez por su
interés, y comentarios realizados a este trabajo.*

A mis amigos por su entera confianza y lealtad.

Glosario

Áreas falsas	Son áreas que aparecen al evaluar la derivada cualitativa de cada punto, estas aparecen porque en algunas zonas el cambio cualitativo ocurre primero en algún sentido (horizontal o vertical).
Derivada Cualitativa	Es obtenida utilizando el filtro descrito en la sección 3.4, y consiste en evaluar la pendiente horizontal y vertical de cada punto contenido en la función.
Diagrama de Bifurcación	Representación gráfica del sistema dinámico.
EDOs	Ecuaciones Diferenciales Ordinal.
F	es el conjunto de regiones que conforma la función.
Landmark	Es un nombre simbólico para un valor cuantitativo en particular (el valor numérico puede ser conocido o no), el cual rompe el conjunto de valores continuos en regiones con diferentes características cualitativas.
l	Símbolo referido a un landmark.
Linemark	Segmento con forma de línea que tiene derivada cualitativa con valor de cero, y es la frontera entre dos regiones.
HS	Contiene las secuencias horizontales de las derivadas ⁵ cualitativas de una región.
$k(w_i)$	Llamada función kernel, determina la derivada cualitativa del punto i .

QD	Contiene las derivadas cualitativas de una región
QS	Espacio cuantitativo de la representación cualitativa.
QSIM	Qualitative Simulation (Simulación Cualitativa)
Razonamiento Cualitativo	Es una alternativa a las soluciones analíticas a las ecuaciones diferenciales realizadas tradicionalmente para el análisis un sistema dinámico.
Región	Con forma rectangular, divide a la función en distintas partes, una región esta formada por segmentos donde los puntos que conforman al segmento tienen una misma derivada cualitativa.
Representación Cualitativa	Traslada los datos cuantitativos del diagrama de bifurcación a información cualitativa mediante la descripción de las características esenciales del objeto.
Simulación Cualitativa	Predice el comportamiento de un sistema dinámico partiendo de la representación cualitativa del sistema.
SQDE	Semi-Qualitative Differential Equations (Ecuación diferencial semicualitativa).
V	VARIABLES de la representación cualitativa.
VS	Contiene las secuencias verticales de las derivadas cualitativas de una región.
Xppaut	X -Windows Phase Plane plus Auto.

Índice general

1. Introducción	9
1.1. Definición del Problema	10
1.2. Objetivo General	13
1.2.1. Objetivos Específicos	13
1.3. Justificación	13
1.4. Antecedentes	14
1.4.1. Confluencias	14
1.4.2. Teoría Cualitativa de Procesos	15
1.4.3. Ecuaciones Diferenciales Cualitativas	16
1.4.4. Identificación Semi-Cualitativa de Sistemas	17
1.4.5. Aprendizaje de Tendencias Financieras Utilizando Ar- boles Cualitativos	17
1.5. Contenido de la Tesis	18
2. Sistemas Dinámicos	21
2.1. Antecedentes de los Sistemas Dinámicos	22
2.2. Sistemas Discretos y Continuos	23
2.2.1. Sistemas Discretos	23
2.2.2. Sistemas Continuos	24
2.3. Sistemas Lineales y No Lineales	25
2.3.1. Sistemas Lineales	25
2.3.2. Sistemas No Lineales	25

2.4.	Estabilidad	26
2.5.	Geometría	26
2.6.	Bifurcaciones	28
2.6.1.	Bifurcación Nodo-Silla	29
2.6.2.	Bifurcación Transcrítica	30
2.6.3.	Bifurcación de Pitchfork	31
2.6.4.	Salto e Histéresis	33
2.7.	Conclusiones	35
3.	Razonamiento Cualitativo	37
3.1.	Introducción	37
3.2.	Características del Razonamiento Cualitativo	38
3.3.	Simulación Cualitativa.	39
3.3.1.	Ejemplo: Tanques Comunicados (U-Tube)	41
3.3.2.	Comportamiento Cualitativo	43
3.4.	Identificación Semi-Cualitativa de Sistemas.	48
3.4.1.	Formación de una Tendencia Semi-Cualitativa	49
3.5.	Conclusiones	53
4.	Cualitativización de Funciones	55
4.1.	Introducción	55
4.2.	Representación Cualitativa	56
4.3.	Filtro de Ruido Cualitativo	60
4.4.	Derivadas Cualitativas	61
4.5.	Detección de Áreas de Transición	63
4.6.	Identificación de Regiones	65
4.7.	Identificación y Ajuste de Landmarks	69
4.8.	Identificación de Segmentos de Derivada Cero	72
4.9.	Conclusiones	72

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
5. Resultados	75
5.1. Ejemplo de una Función	75
5.2. Ejemplo de Diagrama de Bifurcación	83
5.3. Conclusiones	85
6. Conclusiones	87

Índice de figuras

1.1. Diagrama de bifurcación del sistema representado por la ecuación diferencial $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$	11
1.2. Diagrama cualitativo del diagrama de bifurcación de la Figura 1.1.	12
1.3. Representación cualitativa del diagrama de bifurcación de la Figura 1.1.	12
1.4. Proceso de predicción del comportamiento.	14
2.1. Estabilidad	26
2.2. Puntos fijos de la Ecuación 2.5	27
2.3. Puntos fijos y estabilidad.	28
2.4. Ejemplo de una bifurcación.	29
2.5. Variación del parámetro r en la Ecuación 2.9	29
2.6. Diagrama de bifurcación de la Ecuación 2.9	30
2.7. Variación del parámetro r en la ecuación 2.10	31
2.8. Diagrama de bifurcación transcritica.	31
2.9. Variación del parámetro r en la ecuación 2.11	32
2.10. Diagrama de bifurcación de la ecuación 2.11.	33
2.11. Diagrama de bifurcación de la Ecuación 2.12	33
2.12. Diagrama de bifurcación de la Ecuación 2.13	34
2.13. Ejemplo de saltos e histéresis.	35

3.1. Simulación cualitativa y ecuaciones diferenciales, ambas abstracciones del comportamiento actual.	40
3.2. Ejemplo de tanques comunicados.	42
3.3. Comportamiento del ejemplo de tanques comunicados.	47
3.4. Casos para determinar el signo.	51
4.1. Una región de una función f	58
4.2. La representación cualitativa de la Figura 4.1 y sus tres segmentos cualitativos.	58
4.3. Ejemplo de una función con ruido.	61
4.4. Resultado de aplicar el filtro a una función.	62
4.5. Los puntos necesarios para obtener la derivada cualitativa de $(r_{i,j}, h_{i,j}, x_{i,j})$	63
4.6. Derivadas cualitativas de la función f	64
4.7. Resultado de aplicar el proceso de detección de áreas de transición.	64
4.8. Derivadas cualitativas de una función.	68
4.9. Región resultante de la identificación de regiones	69
4.10. Landmarks identificados de una región.	69
4.11. Representación cualitativa de la Figura 4.10.	70
4.12. Primer caso de ajuste de landmarks.	70
4.13. Segundo caso de ajuste de landmarks	71
4.14. Tercer caso de ajuste de landmarks.	71
4.15. Ejemplo de identificación de linemarks.	73
5.1. Gráfica de la función $Seno(xy)$	76
5.2. Segmento del Arreglo Bi-dimensional inicial.	76
5.3. Segmento del arreglo que contiene las derivadas cualitativas.	77
5.4. Derivadas cualitativas corregidas.	77
5.5. Regiones Identificadas.	78
5.6. Identificación de Landmarks.	79

5.7. Ajuste en Landmarks.	80
5.8. Linemarks identificados.	81
5.9. Vista cualitativa de la función $\text{Sen}(x,y)$	82
5.10. Diagrama de bifurcación del sistema definido por $\dot{x} = h + rx - x^3$	83
5.11. Diagrama de bifurcación cualitativo de la Figura 5.10.	84

Resumen

El Razonamiento Cualitativo es una alternativa a las soluciones analíticas a las ecuaciones diferenciales realizadas tradicionalmente para el análisis de un sistema dinámico. Es necesaria una representación cualitativa del sistema para inferir el comportamiento de éste. No existe una representación universal, mejor, única, sino un gran número de ellas; cada una con sus ventajas y desventajas dependiendo de la aplicación. En este trabajo se propuso una representación cualitativa para funciones en tres dimensiones, la cual forma regiones constituidas por tres segmentos. Dos segmentos con derivadas diferentes de cero y un segmento que representa la frontera entre las dos regiones; esta región con derivada cero. Además, este trabajo propone una metodología que permite identificar regiones con las características descritas. Finalmente, estas regiones son traducidas a la representación cualitativa propuesta. La metodología parte de los puntos que conforman la función contenidos en un arreglo bi-dimensional y genera la representación cualitativa de la función.

Actualmente existen aplicaciones que al realizar una simulación cualitativa, predice el comportamiento de un sistema dinámico. Para realizar la simulación cualitativa del sistema, este tipo de aplicaciones necesitan como entrada una representación cualitativa del sistema. El proceso de generar la representación cualitativa del sistema era llevado a cabo manualmente. El propósito de este trabajo es automatizar el proceso de generación de la representación cualitativa del sistema.

Abstract

An alternative to analytic solutions applied to dynamical systems is the Qualitative Reasoning. To predict the behavior of a dynamical system usually a qualitative representation is needed. Reasoning about a dynamical system expressed by differential equations in a qualitative level a qualitative representation is needed. As we know, there is not a single, universal, best qualitative representation, there are a great variety of them. In this work we present a qualitative representation for functions in three dimensions. We segment the function into regions; each region may have three segments. Two segments with a derivative different from zero and the other segment, the boundary segment, has a zero derivative and divides the other two segments. Besides the proposed representation, we present a methodology that given a discrete qualitative representation of a three-dimensional function, generates the proposed qualitative representation. From a bi-dimensional array that contains the points of the function the methodology generates the qualitative representation of the function.

There are applications that generate a qualitative simulation that predicts the behavior of a dynamical system. For the qualitative simulation a qualitative representation of the system is needed. Actually this process is made by hand. The goal of this work is generate the qualitative representation of a function.

Capítulo 1

Introducción

A través de la historia el ser humano ha intentado entender y predecir el mundo que lo rodea, por lo que ha surgido la necesidad de crear modelos que representen algún fenómeno del mundo real. Algunos fenómenos pueden ser modelados utilizando lo que llamamos sistemas dinámicos.

Los modelos de sistemas dinámicos sirven para entender como los procesos de la naturaleza cambian en el tiempo. Existen distintos tipos de modelos de sistemas dinámicos como discretos, continuos, lineales y no-lineales, donde el modelado del sistema dinámico puede ser realizado utilizando un conjunto de ecuaciones diferenciales.

Un punto de bifurcación ocurre en un sistema dinámico cuando su comportamiento cualitativo cambia como resultado de la variación en alguno(s) de sus parámetros; por lo que un diagrama de bifurcación de un sistema dinámico será la representación gráfica del conjunto de puntos de bifurcación del sistema.

En ocasiones la solución de las ecuaciones diferenciales del sistema dinámico es muy compleja, no es exacta, o puede llevar demasiado tiempo en su resolución, el razonamiento cualitativo es una alternativa para la resolución del sistema dinámico.

Actualmente, utilizando razonamiento cualitativo, existen aplicaciones

que a partir del conjunto de ecuaciones diferenciales, generan el diagrama de bifurcación [Barrera 2008]. Existen también sistemas que dada la representación cualitativa del diagrama de bifurcación, predicen o simulan el comportamiento del sistema como el trabajo de Flores y Proskurowski [Flores 2006], o el trabajo de Ortiz [Ortiz 2009]. Como puede notarse, no todo el sistema se realiza de manera automatizada; esta investigación se centró en la generación de la representación cualitativa de diagramas de bifurcación. Esta aplicación servirá para completar el proceso que parte del conjunto de ecuaciones diferenciales hasta la predicción del comportamiento del sistema dinámico.

1.1. Definición del Problema

La producción de un diagrama de bifurcación de un sistema dinámico se realizaba tradicionalmente resolviendo analítica o numéricamente el conjunto de ecuaciones diferenciales del sistema. Ésto en ocasiones toma bastante tiempo, o no es posible obtener la solución analítica. Basados en el diagrama de bifurcación, los expertos en el área predicen el comportamiento del sistema, para realizar esta actividad es necesario contar con conocimiento suficiente y experiencia en el área; es por ésto que se han buscado alternativas a este tipo de soluciones.

Actualmente existen aplicaciones, que dado el conjunto de ecuaciones diferenciales, (sin resolver analíticamente) generan el diagrama de bifurcación del sistema [Barrera 2008]. Además, existen aplicaciones que a partir de la representación cualitativa de un diagrama de bifurcación, predicen o simulan el comportamiento del sistema dinámico [Flores 2006, Ortiz 2009]. Para realizar este tipo de simulaciones es necesario que el diagrama de bifurcación se encuentre en una representación cualitativa; actualmente la generación de la representación cualitativa del diagrama de bifurcación se lleva a cabo manualmente.

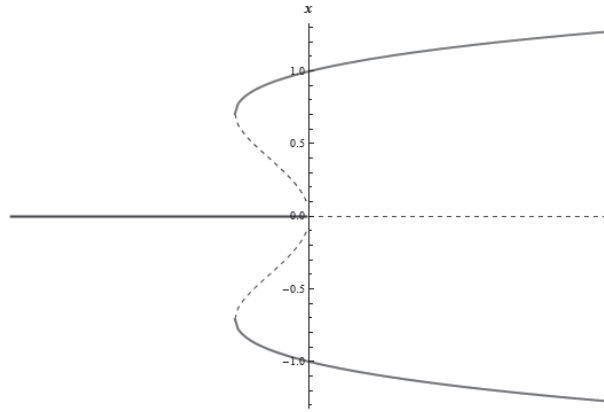


Figura 1.1: Diagrama de bifurcación del sistema representado por la ecuación diferencial $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$

La propuesta de esta tesis consiste en generar la representación cualitativa del diagrama de bifurcación, partiendo de los datos cuantitativos generados en el proceso anterior (ya sea analíticamente, o mediante las aplicaciones como Xppuat [Ermentrout 2002] o PSO [Barrera 2008]). Esta representación cualitativa representará la entrada del proceso de simulación del sistema dinámico. Como se sabe, no existe una representación universal, lo que llevó a tomar la representación utilizada en trabajos como el de Simulación Cualitativa [Kuipers 1994], trabajo realizado por Ben Kuipers. Esta representación, es útil, o suficiente para sistemas de dos dimensiones, pero al trabajar con sistemas de más de dos dimensiones ya no es posible plasmar la información en esta representación por lo que fue necesario proponer una nueva representación, basándose en la representación de kuipers.

Por ejemplo, si el sistema dinámico está definido por la ecuación $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$ donde x representa cualquier parametro y \dot{x} representa la derivada de x definida por $\dot{x} = dx/dt$, el diagrama de bifurcación correspondiente a este sistema se muestra en la Figura 1.1. El diagrama cualitativo de éste se muestra en la Figura 1.2 y su representación cualitativa se muestra en la Figura 1.3.

1.2. Objetivo General

Realizar una aplicación que genere la representación cualitativa de un diagrama de bifurcación en dos y tres dimensiones a partir de datos cuantitativos.

1.2.1. Objetivos Específicos

- Proponer una representación cualitativa para diagramas en tres dimensiones, basándose en representaciones propuestas por Kuipers y Flores et al [Kuipers 1994, Kuipers 1986, Flores 2006].
- Desarrollar e implementar un algoritmo que permita generar la representación cualitativa propuesta en el punto anterior.

1.3. Justificación

La manera tradicional de modelar un sistema dinámico es mediante la utilización de ecuaciones diferenciales; al resolver estas analítica o numéricamente se genera el diagrama de bifurcación. Este proceso puede ser tardado o sumamente complejo, por lo que existen otras alternativas que generan el diagrama de bifurcación sin la necesidad de resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales, como la propuesta por Barrera et al [Barrera 2008] o Xppaut [Ermentrout 2002].

Al tener el diagrama de bifurcación un experto en la materia puede predecir, basado en su experiencia, el comportamiento del sistema. Actualmente en el área de Razonamiento cualitativo se ha trabajado en predecir el comportamiento de un sistema dinámico, partiendo de la información cualitativa del sistema, ejemplos de este tipo se pueden encontrar en trabajos realizados por Flores [Flores 2006] y Ortiz [Ortiz 2009].

La información del sistema al resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales se encuentra en una forma cuantitativa; para predecir el compor-

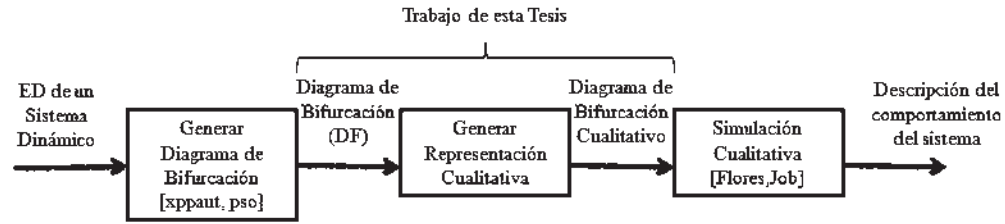


Figura 1.4: Proceso de predicción del comportamiento.

tamiento del sistema es necesario que esta información sea trasladada a una representación cualitativa, este proceso actualmente es elaborado manualmente.

La presente investigación consistió en traducir los datos cuantitativos generados al resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales, hacia una representación cualitativa.

La Figura 1.4 muestra el proceso de predecir el comportamiento de un sistema dinámico partiendo de sus ecuaciones diferenciales de manera automatizada.

1.4. Antecedentes

Se puede decir que el razonamiento cualitativo es un área reciente, por lo que no existen muchos trabajos relacionados al problema especificado con anterioridad. A continuación mencionaremos algunos trabajos realizados en el área de razonamiento cualitativo (QR).

1.4.1. Confluencias

Las confluencias son ecuaciones lineales multivariable acerca de la variación de parámetros en una aproximación casi-estática, donde los valores de las variables toman valores cualitativos. El término de confluencia fue introducido por de Kleer y Brown en el año de 1984.

En este trabajo, un sistema es descrito por tres tipos de elementos: materiales, componentes y conductos. Los componentes actúan sobre los materiales y los conductos transportan a los materiales de un componente a otro. Un componente es descrito por un conjunto de variables, un conjunto de confluencias y un conjunto de conexiones. El sistema global se obtiene ensamblando los diferentes componentes del sistema.

El rango de valores que una variable puede tomar se reduce solo al conjunto de valores $\{-,0,+ \}$. Las confluencias expresan las restricciones ligando las variaciones de los parámetros (variables) de los componentes vecinos en un punto de equilibrio. Las confluencias pueden ser derivas de ecuaciones diferenciales físicas de una instancia.

Un sistema puede tener distintos modelos, donde cada uno es descrito por un conjunto de confluencias. Para resolver las confluencias es necesario establecer un álgebra de signos, un cálculo cualitativo o una técnica de propagación de restricciones.

La solución presenta todos aquellos estados permitidos que cumplieron las restricciones derivadas de las confluencias, los estados permitidos son presentados en orden cronológico.

1.4.2. Teoría Cualitativa de Procesos

La teoría cualitativa de procesos define una notación de procesos físicos e introduce el término de espacios cuantitativos en términos de desigualdades.

Este trabajo fue realizado por Kenneth D. Forbus en 1984 y se centra sobre el concepto de proceso. La descripción de un sistema recae en la identificación de todos los procesos que ocurren dentro de un sistema físico, para posteriormente encontrar solo aquellos procesos activos que hacen que el sistema evolucione.

Un proceso es asociado a un conjunto de objetos o también llamado vistas individuales (individual views). Las vistas individuales son introducidas para describir los objetos y las propiedades de los objetos que cambian drás-

ticamente con el tiempo. Los objetos corresponden a elementos físicos del sistema, los cuales puede estar agrupados en vistas individuales.

En este trabajo, un cambio cualitativo ocurre solo cuando es influido directa o indirectamente por un proceso.

1.4.3. Ecuaciones Diferenciales Cualitativas

Este trabajo fue realizado por Ben Kuipers en 1986, implementando el sistema QSIM, donde un sistema fijo es descrito mediante tres tipos de elementos que son: variables, restricciones y regiones operativas. Las regiones operativas definen los diferentes modelos del sistema, de una manera diferente a la del trabajo realizado sobre confluencias. Las variables toman un valor cualitativo distinto, las restricciones especifican la relación entre variables dada una región operativa. Las relaciones entre variables son expresadas utilizando los siguientes operadores:

- Derivada. $\text{DERIV}(x,y)$ significa $y=dx/dt$.
- Suma. $\text{ADD}(x,y,z)$ significa $z=x+y$.
- Producto. $\text{MULT}(x,y,z)$ significa $z= x*y$.
- Monotonicidad. $\text{M+}(x,y)$ significa $y=f(x)$ cuando f es una función monotónicamente creciente.
- Monotonicidad. $\text{M-}(x,y)$ significa $y=f(x)$ cuando f es una función monotónicamente decreciente.

La simulación realizada en QSIM parte de un estado inicial. El algoritmo encuentra todos los posibles estados sucesores utilizando una tabla de transiciones permitidas. El segundo paso utiliza el modelo de ecuaciones diferenciales cualitativas para filtrar aquellos estados inconsistentes. Generalmente será posible tener más de un estado sucesor, por lo que la simulación se puede ramificar.

1.4.4. Identificación Semi-Cualitativa de Sistemas

La identificación de sistemas toma un espacio de posibles modelos de un flujo de datos observados, e intenta identificar el elemento del espacio del modelo que mejor describa al modelo observado. Regularmente el espacio de modelos es especificado mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales. Este trabajo fue introducido por Kay, Rinner and Kuipers en el año 2000 [Kay 2000]. En este trabajo se propone una metodología para la identificación del sistema, donde el espacio de modelos potenciales es definido mediante una ecuación diferencial semi-cualitativa (SQDE). Esta SQDE está definida por funciones cualitativas y funciones monotónicas, así como intervalos numéricos del conjunto de posibles modelos.

El simulador predice un comportamiento semi-cualitativo a partir del SQDE, la identificación se realiza describiendo el conjunto de datos observados en términos semi-cualitativos e intersectando las dos descripciones con los límites cuya diferencia sea la más estrecha en el espacio del modelo.

Un proceso de esta metodología define la manera de obtener una región monotónica, eliminado el ruido ocasionado por imprecisión numérica, obtención de datos, etc. Este proceso de obtención de una región con comportamiento cualitativo común es utilizado en la propuesta de esta tesis y extendido para tres dimensiones. El proceso de formación de una región monotónica es descrito en la Sección 3.4.1 de este documento.

1.4.5. Aprendizaje de Tendencias Financieras Utilizando Árboles Cualitativos

Este trabajo, realizado por Roselló, Sánchez, Agell & Prats en 2007 [Roselló 2007] propone la utilización de árboles cualitativos para el aprendizaje acerca de tendencias financieras; el modelo es obtenido utilizando el algoritmo QUIN (Qualitative Induction). QUIN se enfoca en la construcción de modelos utilizando árboles cualitativos. Un árbol cualitativo define una partición

del espacio de los atributos en zonas con comportamiento común de una variable específica. Un árbol cualitativo es un árbol binario con nodos internos llamados splits, y sus hojas son las restricciones cualitativas (QFC del Inglés Qualitative Function Constraint). Los nodos internos definen las particiones del espacio de atributos.

Inicialmente el algoritmo intenta todas las QFC utilizando solamente una variable para continuar evaluando todas las QFCs con dos variables y así sucesivamente. Un QFC es consistente con un vector de cambios si todas las predicciones del QFC son no negativas con al menos una positiva. Si existen positivos y negativos en las predicciones se dice que cayó en ambigüedad.

Para cada QFC se define una función de costo a partir del número de vectores consistentes y ambiguos. Esta función de costo determina la medida de aptitud de cada QFC.

El algoritmo QUIN parte de arriba hacia abajo, determinando la función de costo de cada QFC contenida en el árbol, y escoge la partición que minimiza el error.

En el trabajo de Rosello [Roselló 2007] propone la cualitativización de funciones, pero lo realiza de manera totalmente diferente a la representación propuesta en esta tesis, su propuesta consiste en segmentar la función en arboles cualitativos mientras que la propuesta de este trabajo de tesis consiste en segmentar la función en regiones con determinadas características descritas posteriormente en este documento en la sección 4.2.

1.5. Contenido de la Tesis

El presente documento se encuentra organizado de la siguiente manera; el Capítulo 2 Sistemas Dinámicos menciona los conceptos básicos, clasificación de los sistemas, así como el concepto de diagrama de bifurcación. En el Capítulo 3 Razonamiento Cualitativo se menciona el concepto de razonamiento cualitativo, a qué se dedica esta área, además de explicar a detalle

los trabajos de Ben Kuipers que sirvieron como base de esta investigación, específicamente el trabajo de Simulación Cualitativa y el trabajo de Identificación Semi-Cuantitativa de Sistemas. En el Capítulo 4 se describe la forma de generar la representación cualitativa de una función dado el conjunto de puntos de una función. En el Capítulo 5 se muestra los resultados obtenidos de generar una representación cualitativa. En el Capítulo 6 se describen las conclusiones del trabajo realizado.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos

La Dinámica es el estudio del cambio; un sistema dinámico describe cómo las variables de un sistema interactúan y cambian con el tiempo. Un sistema dinámico consta de dos partes, un vector de estado, el cual describe exactamente la situación de un sistema real o hipotético, y una función, la cual dado el estado actual del sistema, determina cual será el estado del sistema en el próximo instante de tiempo.

Los sistemas dinámicos se dividen en sistemas determinísticos y sistemas estocásticos. Un sistema determinístico es aquel en el que un cambio específico en una de sus variables producirá un resultado particular con certeza. Al contrario de un sistema determinístico, un sistema estocástico no siempre produce la misma salida, dada una misma entrada.

Un ejemplo de un sistema dinámico se puede ver en una especie de peces que se reproduce de tal forma que este año la cantidad de peces es x_k el próximo año será x_{k+1} . De esta manera podemos nombrar la cantidad de peces que habrá en k años como: x_0 para el primer año, x_1 para el siguiente año, x_k para el año k .

Como se puede observar $x_{k+1} = F(x_k, x_{k-1}, \dots, x_0)$ se cumple para cualquier año k , lo cual significa que la cantidad de peces se puede determinar si se sabe la cantidad del año anterior.

El presente capítulo incluye una breve descripción de los antecedentes de los sistemas dinámicos, desde sus inicios hasta nuestros días, se incluye de la clasificación de los sistemas dinámicos, conceptos básicos, diagramas de bifurcación y los distintos tipos de bifurcaciones que ocurren en un sistema dinámico.

2.1. Antecedentes de los Sistemas Dinámicos

Actualmente la dinámica es una materia interdisciplinaria, pero originalmente fue una rama de la física. Esta materia inició a mediados de 1600s, cuando Newton descubrió las ecuaciones diferenciales, descubriendo las leyes de movimiento y de la gravitación universal. Al combinar las ecuaciones diferenciales, explicaron las leyes de Kepler del movimiento planetario; específicamente, resolvió el problema de dos cuerpos (calcular el movimiento de la tierra alrededor del sol) [Strogatz 2000].

Al final de los 1800s Poincaré introdujo una aproximación geométrica. Además fue la primera persona que introdujo la posibilidad del caos, donde los sistemas determinísticos exhiben un comportamiento periódico que depende de las condiciones iniciales. Pero el caos se mantuvo de lado a principios de 1900s, para concentrarse en osciladores no-lineales y sus aplicaciones en la física e ingeniería. Los osciladores no-lineales jugaron un papel importante en el desarrollo de tecnologías como el radio, el radar, etc [Strogatz 2000].

La invención de la computadora de alta velocidad en 1950s permitió experimentar con ecuaciones diferenciales como nunca se había realizado, permitiendo así a Lorenz descubrir en 1963 un movimiento caótico sobre un atractor extraño. Lorenz encontró que las soluciones a estas ecuaciones nunca llegaban a un punto de equilibrio o a un estado periódico, sino que continuaban oscilando de una manera irregular. Lorenz demostró que existía una estructura en el caos; al graficarlo en tres dimensiones, la solución mostró un conjunto de puntos con forma de mariposa, ahora lo conocemos como un

ejemplo de fractales.

El trabajo de Lorenz tuvo impacto hasta los años 1970s, cuando Ruelle y Takens propusieron una nueva teoría para fluidos turbulentos, basados en consideraciones abstractas acerca de atractores extraños. Años después May encontró ejemplos de caos al interactuar mapas de crecimiento de poblaciones biológicas. Después vino uno de los descubrimientos más sorprendentes, realizado por Feigenbaum, quien descubrió que hay ciertas leyes universales que gobiernan la transformación de un comportamiento regular a uno caótico (sistemas diferentes pueden llegar a una misma forma caótica). Su trabajo estableció el enlace entre el caos y las transiciones de fase [Strogatz 2000].

En los 70s Mandelbrot codificó y popularizó los fractales, al producir gráficas computarizadas de ellos, y Winfree aplicó métodos geométricos a oscilaciones biológicas, especialmente en ritmos cardiacos [Strogatz 2000].

2.2. Sistemas Discretos y Continuos

Los sistemas dinámicos pueden dividirse en dos grandes clases: aquellos en los que el tiempo varía continuamente y en los que el tiempo transcurre en intervalos. Los sistemas dinámicos de tiempo continuo se expresan mediante ecuaciones diferenciales (DEs). Por otro lado, si el tiempo es discreto se describen por medio de ecuaciones de diferencias, también conocidas como mapas iterados.

2.2.1. Sistemas Discretos

El estudio de la dinámica de sistemas es el estudio de cómo ciertas cantidades cambian en función de otra, también variable, que suele ser el tiempo. Matemáticamente se puede definir como el estudio de iteraciones de funciones $f : S \rightarrow S$, donde S es un conjunto. Si consideramos que esas cantidades cambian a pequeños saltos tenemos un sistema dinámico discreto.

Informalmente, un sistema dinámico discreto es una sucesión de números definidos mediante una relación de recurrencia. Es decir, existe una regla que relaciona cada número de la sucesión con los anteriores.

Por ejemplo, si se abre una cuenta bancaria con un monto inicial de \$100 y una tasa de interés anual del 6%, el próximo estado será el próximo año, dado que la tasa de interés es anual. Por lo que podemos escribir la regla que define el cambio de un estado a otro como:

$$X_{k+1} = 1.06 * X_k \quad (2.1)$$

2.2.2. Sistemas Continuos

En el ejemplo anterior el cambio ocurre anualmente (en intervalos de tiempo), sin embargo no todos los sistemas pueden ser descritos mediante intervalos. Existen sistemas donde el próximo estado no puede ser descrito, dado que el sistema cambia continuamente; es por eso que se le da una diferente perspectiva al próximo instante de tiempo utilizando la letra t (en lugar de k) utilizada para denotar el tiempo, donde t es un número real, no negativo, iniciando en $t = 0$.

Dado que no es posible definir una regla para el próximo instante de tiempo, se describe la manera en que el sistema cambia en cualquier instante de tiempo. Por ejemplo, una pelota es arrojada verticalmente. Este sistema puede ser descrito en cualquier instante de tiempo por dos números reales, h para definir la altura de la pelota y v para definir la velocidad de la pelota. Sabemos que la velocidad está definida por $dh/dt = v$ y la gravedad es un factor que afecta a la pelota definido por $dv/dt = -g$. Con esto definimos el cambio del sistema de la siguiente manera:

$$\dot{h}(t) = v(t) \quad (2.2)$$

$$\dot{v}(t) = -g \quad (2.3)$$

2.3. Sistemas Lineales y No Lineales

En geometría el término lineal lo utilizamos para denotar objetos como líneas, planos. Estos objetos siempre mantienen una misma forma al variar la escala con la que se observa el objeto. Un objeto no lineal puede ser una esfera; este tipo de objetos tienen una apariencia distinta dependiendo de la escala con la que se observa el objeto. Por ejemplo cuando observamos el objeto demasiado cerca, el objeto parece un plano, y cuando observamos el objeto suficientemente lejos, el objeto parece un punto.

2.3.1. Sistemas Lineales

Un sistema dinámico es lineal si cumple

$$\dot{x} = F(ax + by) = aF(x) + bF(y) \quad (2.4)$$

es decir, es lineal si la función F que relaciona la tasa de incremento de las variables de estado con sus valores actuales cumple con el principio de superposición. Este principio se refiere que si la entrada es una combinación lineal de varias señales, entonces la salida correspondiente es la combinación lineal de las salidas correspondientes a cada una de dichas señales.

2.3.2. Sistemas No Lineales

Un sistema es no lineal, si no cumple con las propiedades de linealidad. Regularmente las funciones no lineales presentan grandes problemas para resolverlas; en ocasiones lleva bastante tiempo en encontrar la solución o prácticamente es imposible resolverla. El rango de comportamiento de un sistema no lineal es mucho más amplio comparado con un sistema lineal.

Es por eso que se han buscado alternativas para encontrar soluciones a este tipo de sistemas.

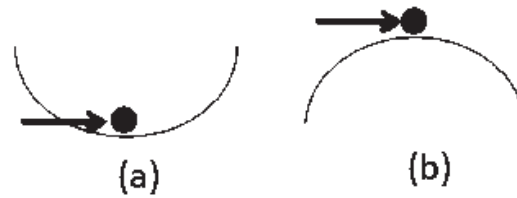


Figura 2.1: Estabilidad

2.4. Estabilidad

Un sistema estable es aquel en que entradas pequeñas producen salidas que no divergen, es decir salidas acotadas. Un sistema es inestable si pequeñas entradas producen salidas que divergen; por ejemplo, en la Figura 2.1 se muestra una pelota descansando sobre dos distintos tipos de superficie, donde si aplicamos un pequeño impulso en la pelota de la Figura 2.1 (a) esta regresará al mismo punto (sistema estable). Esto no ocurrirá si aplicamos un pequeño impulso en la pelota de la Figura 2.1 (b) (sistema inestable).

2.5. Geometría

Si consideramos la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = \text{seno}(x) \quad (2.5)$$

Para resolverla analíticamente es necesario separar las variables e integrar

$$dt = \frac{dx}{\text{seno}(x)} \quad (2.6)$$

$$t = \int \csc(x) dx = -\ln | \csc(x) + \cot(x) | + C \quad (2.7)$$

Al evaluar la constante C , con $x = x_0$, tenemos

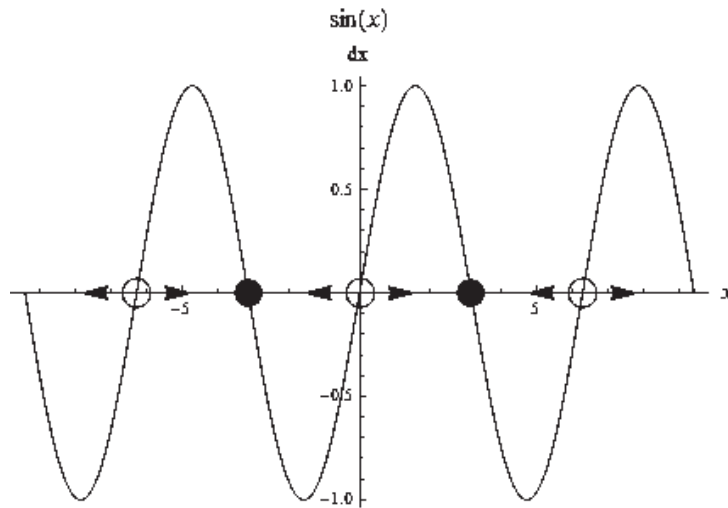


Figura 2.2: Puntos fijos de la Ecuación 2.5

$$t = \ln \left| \frac{\csc(x_0) + \cot(x_0)}{\csc(x) + \cot(x)} \right| \quad (2.8)$$

El resultado obtenido es exacto pero difícil de interpretar. Al graficar la velocidad de la partícula \dot{x} en cada punto x se observa la solución a la Ecuación diferencial 2.5 en la Figura 2.2. La cual muestra gráficamente los puntos fijos y su estabilidad de la Ecuación 2.5

Las flechas indican el flujo del sistema y van hacia la derecha si $\dot{x} > 0$ y a la izquierda si $\dot{x} < 0$ cuando $\dot{x} = 0$ no existe flujo. Estos puntos son llamados puntos fijos.

En la Figura 2.2 se observan dos tipos de puntos fijos, los puntos negros representan a los puntos fijos estables o también llamados atractores porque el flujo es dirigido hacia ellos, y los círculos blancos que representan a los puntos fijos inestables o también llamados repulsores.

Por ejemplo, para encontrar los puntos fijos y su estabilidad del sistema definido por $\dot{x} = x^2 - 1$, es necesario encontrar cuando la derivada sea cero $f(x)' = 0$, al resolver encontramos que $x = \pm 1$ satisface la condición anterior. Graficamos para determinar la estabilidad de cada punto y obtenemos que

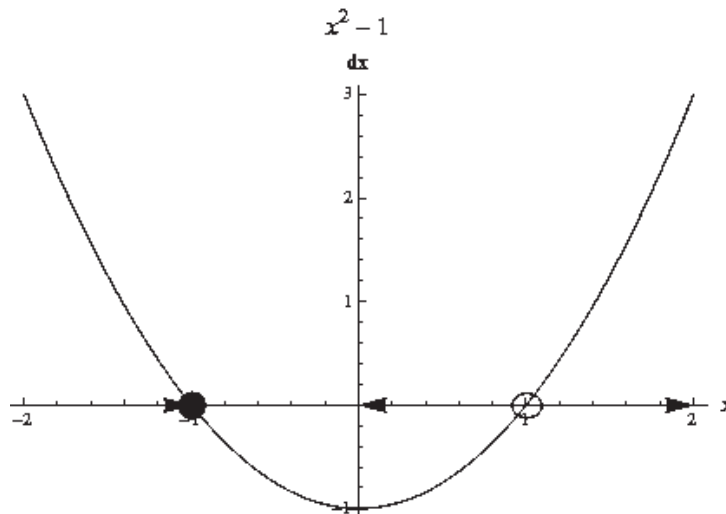


Figura 2.3: Puntos fijos y estabilidad.

cuando $x = 1$ el punto es inestable y cuando $x = -1$ el punto es estable, recordando que el flujo es hacia la derecha si $\dot{x} > 0$ y a la izquierda si $\dot{x} < 0$.

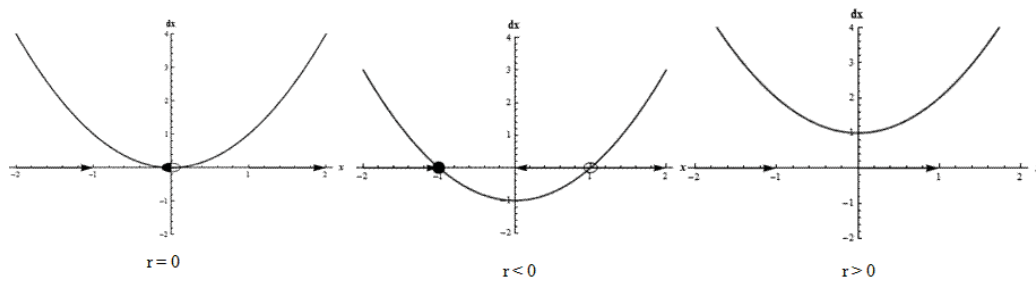
La Figura 2.3 muestra gráficamente los puntos fijos del ejemplo anterior y su estabilidad.

2.6. Bifurcaciones

Una bifurcación de un sistema ocurre cuando al variar algunos de sus parámetros el comportamiento cualitativo del sistema cambia. Un punto de bifurcación es el valor de la(s) variable(s) donde ocurrió una bifurcación. Por ejemplo, si tenemos una columna la cual sostiene un objeto de peso x , al incrementar el peso del objeto (variar en alguno de sus parámetros), llegará un punto donde la columna colapsará. La Figura 2.4 muestra el cambio cualitativo del sistema al variar en alguno de sus parámetros.



Figura 2.4: Ejemplo de una bifurcación.

Figura 2.5: Variación del parámetro r en la Ecuación 2.9

2.6.1. Bifurcación Nodo-Silla

La bifurcación nodo-silla ocurre cuando dos puntos fijos uno estable y otro inestable se aproximan, hasta llegar a ser el mismo punto. El punto nodo-silla es un punto limitante entre las zonas estables e inestables. Por ejemplo si tenemos el siguiente sistema:

$$\dot{x} = r + x^2 \quad (2.9)$$

Donde r es un parámetro que puede ser positivo, cero o negativo, cuando r es negativo, existen dos puntos fijos, uno estable y otro inestable. Cuando r lo aproximamos a cero los dos puntos fijos se aproximan a un mismo punto, por lo que cuando $r = 0$ los dos puntos fijos se encuentran en un mismo punto, dando lugar al nodo-silla. Este punto de un lado es estable y del otro es inestable, si $r > 0$ no encontramos ningún punto fijo. Ver Figura 2.5.

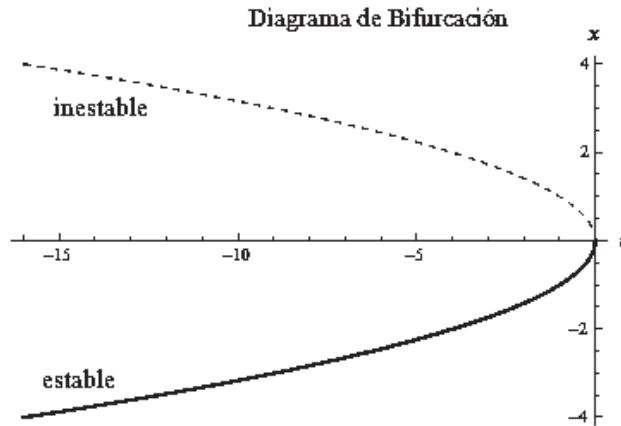


Figura 2.6: Diagrama de bifurcación de la Ecuación 2.9

Un diagrama de bifurcación está constituido por los puntos fijos del sistema, la Figura 2.6 es el diagrama de bifurcación del sistema anterior (Ecuación 2.9).

2.6.2. Bifurcación Transcrítica

Existen situaciones en las que un punto fijo debe de existir para todos los valores de un parámetro, por ejemplo en los modelos de crecimiento de las especies existe un punto fijo cuando la población es cero, sin embargo, el punto fijo puede variar de estabilidad al variar algún parámetro del modelo. La forma normal de una bifurcación transcritical está dada por la Ecuación 2.10

$$\dot{x} = rx - x^2 \quad (2.10)$$

La Figura 2.7 muestra que sin importar el valor de r , siempre existe un punto fijo para $x = 0$.

Si $r < 0$ existe un punto fijo inestable cuando $x = r$ y un punto estable cuando $x = 0$. Si $r > 0$ el origen cambia a inestable y cuando $x = r$ es estable. Se dice que ha ocurrido un cambio de estabilidad entre dos puntos fijos.

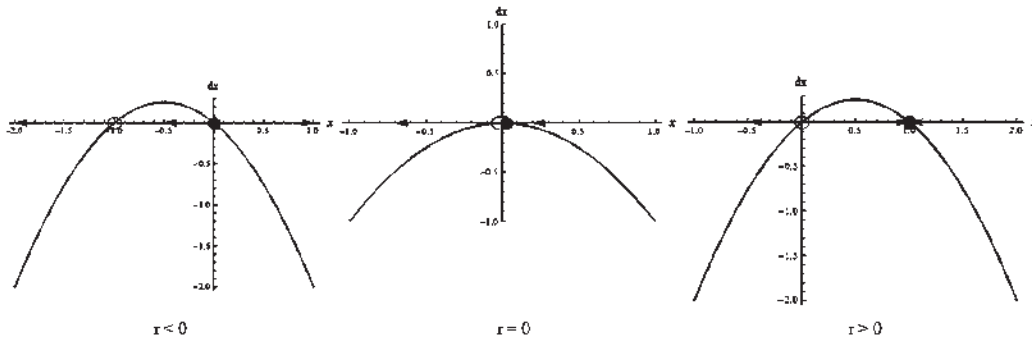
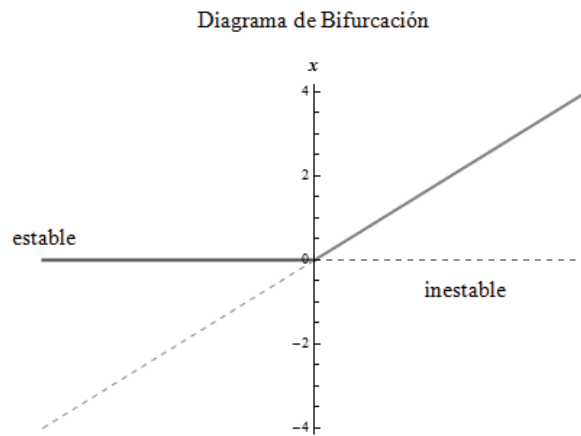
Figura 2.7: Variación del parámetro r en la ecuación 2.10

Figura 2.8: Diagrama de bifurcación transcritical.

La diferencia entre un nodo silla y una bifurcación transcritical es que en esta última, los dos puntos fijos no desaparecen después de la bifurcación simplemente cambian de estabilidad. La Figura 2.8 es el diagrama de bifurcación de la Ecuación 2.10

2.6.3. Bifurcación de Pitchfork

Este tipo de bifurcación es común en los sistemas simétricos, donde los puntos fijos aparecen y desaparecen en pares. Existen dos tipos diferentes de bifurcación de Pitchfork, la bifurcación supercrítica y la bifurcación subcrítica.

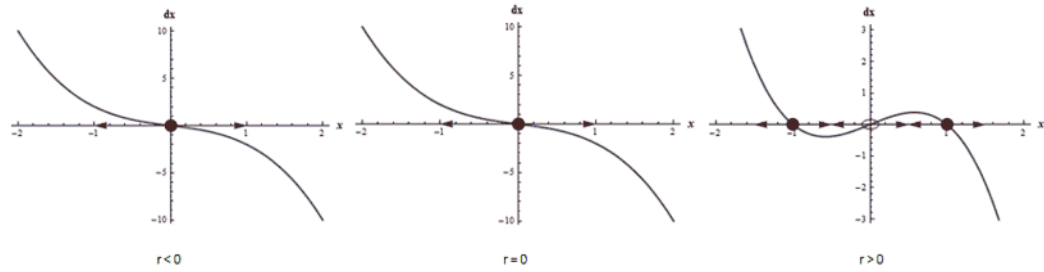


Figura 2.9: Variación del parametro r en la ecuación 2.11

ca.

La forma normal de una bifurcación de Pitchfork supercrítica está dada por la Ecuación 2.11

$$\dot{x} = rx - x^3 \quad (2.11)$$

Note que esta ecuación es invariante al cambio de variables de $x \rightarrow -x$, porque al sustituir x por $-x$ y cancelar los signos menos de ambos lados de la ecuación regresamos a la ecuación inicial. La Figura 2.9 muestra el comportamiento de la variación del parametro r .

Cuando $r \leq 0$ el origen es el único punto fijo y es estable, si $r > 0$ el origen es inestable y aparecen dos puntos fijos a un costado del origen, simétricamente localizados en $x = \pm\sqrt{r}$. La Figura 2.10 muestra el diagrama de bifurcación de la ecuación 2.11.

La forma normal de una bifurcación de Pitchfork subcrítica está dada por la Ecuación 2.12. Note que a diferencia de la Ecuación 2.11, donde el término cúbico era el estabilizante, ahora este término desestabiliza al sistema.

$$\dot{x} = rx + x^3 \quad (2.12)$$

La Figura 2.11 muestra la bifurcación de pitchfork subcrítica, comparada con la Figura 2.10, ahora la orca (pitchfork) está invertida. Los punto fijos que no se encuentran sobre el eje r ($x = \pm\sqrt{r}$), son inestables. Además el

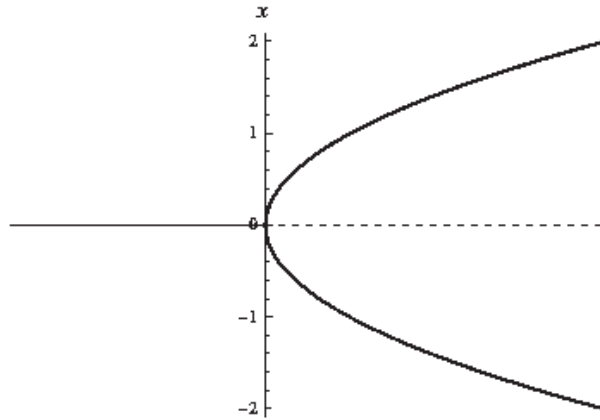


Figura 2.10: Diagrama de bifurcación de la ecuación 2.11.

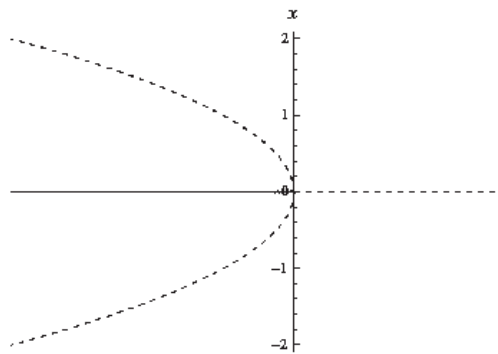


Figura 2.11: Diagrama de bifurcación de la Ecuación 2.12

origen es estable cuando $r < 0$.

2.6.4. Saltos e Histéresis

Considere el sistema definido por la Ecuación 2.13

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5 \quad (2.13)$$

cuyo diagrama de bifurcación se muestra en la Figura 2.12. La Figura 2.12 muestra que el origen es localmente estable cuando $r < 0$, dos ramas simétricas

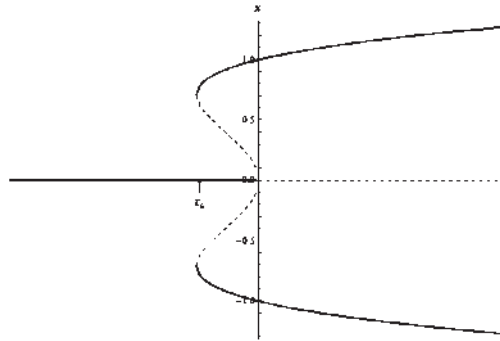


Figura 2.12: Diagrama de bifurcación de la Ecuación 2.13

cas parten del origen en $r = 0$ hasta $r = r_s$. El término x^5 hace que a partir de $r = r_s$ las ramas doblen y cambien de estabilidad de inestable a estable, continuando para todo $r > r_s$.

Existen varias características a detallar de la Figura 2.12:

1. En el rango de $r_s < r < 0$, existen dos estados cualitativos diferentes.
2. La existencia de diferentes estados permite la posibilidad de saltos e histéresis conforme r varía. Por ejemplo, si el estado inicial está dado en $x = 0$, al incrementar el valor de r , el estado permanece en el origen hasta $r = 0$. Cuando el estado pierde su estabilidad, en este punto, un pequeño incremento causará un salto hacia alguna de las dos ramas. Si continuamos incrementando a r el estado continuará en la misma rama. Si decrementamos el valor de r el estado continúa en la misma rama hasta que $r = r_s$. Al decrementar el valor de r a un valor menor a r_s , el estado salta nuevamente al origen. A este fenómeno de no regresar al estado anterior se le llama histéresis.
3. La bifurcación en r_s , es una bifurcación nodo-silla, donde dos puntos fijos (uno estable y otro inestable) nacen al incrementar el valor de r .

La Figura 2.13 muestra un ejemplo de saltos e histéresis.

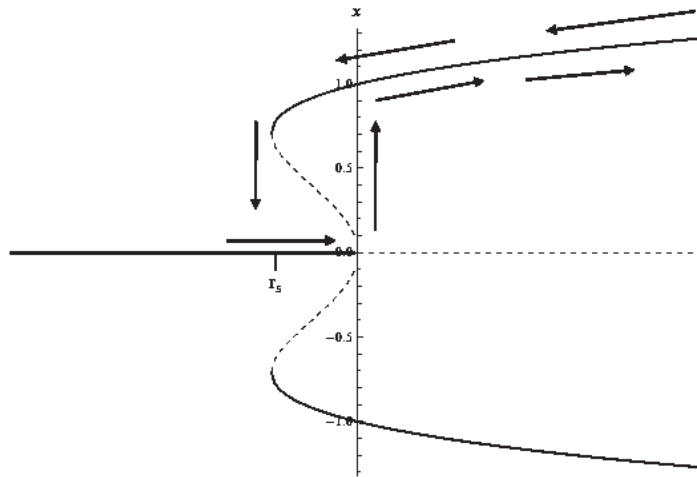


Figura 2.13: Ejemplo de saltos e histéresis.

2.7. Conclusiones

En este capítulo se describieron los conceptos básicos acerca de los sistemas dinámicos, se definió de un diagrama de bifurcación y se dieron algunos ejemplos de estos. En el siguiente capítulo se hará una descripción del razonamiento cualitativo, así como se detallarán dos trabajos relacionados con el razonamiento cualitativo, la simulación cualitativa [Kuipers 1994, Kuipers 1986] e identificación semi-cualitativa de sistemas [Kay 2000].

Capítulo 3

Razonamiento Cualitativo

El estudio del comportamiento de sistemas físicos, usualmente es basado en modelos matemáticos, utilizando leyes físicas o métodos basados en la identificación de parámetros de un modelo. El razonamiento cualitativo es una alternativa, la cual descarta la relación numérica que existe entre los parámetros. Estudia la manera de representar simbólicamente a esas estructuras matemáticas que representan a las entidades físicas. En la sección 3.3 y 3.4 describe los trabajos de Simulación Cualitativa e Identificación Semi-Cualitativa de Sistemas desarrollados por Benjamin Kuipers.

3.1. Introducción

El razonamiento cualitativo es el área de la inteligencia artificial que crea las representaciones para aspectos continuos del mundo real, como el espacio, el tiempo y cantidad, el cual puede razonar con poca información y es motivado por dos aspectos:

- La gente realiza conclusiones acerca del mundo real sin la necesidad de la utilización de las ecuaciones diferenciales.
- Los ingenieros y científicos utilizan un razonamiento cualitativo para

entender un problema, o para interpretar los resultados de un problema.

En esta área no existe una representación universal, mejor o correcta. Actualmente existen diversas representaciones para modelar un problema, donde cada una tiene sus ventajas y desventajas para determinadas tareas. Pero cada una de las representaciones tiene dos características, resolución y composición:

- Resolución: Se refiere al nivel de detalle que se encuentra en la representación. Esto es importante debido a que la meta del razonamiento cualitativo es llegar a conclusiones útiles con la utilización de poca información. Una baja resolución puede llegar a tener conclusiones ambiguas, lo que podría sugerir la necesidad de recabar una mayor información (ampliar la resolución).
- Composición: Se refiere a la habilidad de combinar representaciones para diferentes aspectos de un fenómeno o sistema con el fin de crear una representación del fenómeno o sistema como un todo.

En el presente capítulo se mencionan las principales características de Razonamiento Cualitativo; también se detallan dos trabajos realizados por Benjamin Kuipers: Simulación Cualitativa [Kuipers 1994, Kuipers 1986] e Identificación Semi-Cuantitativa de Sistemas [Kay 2000].

3.2. Características del Razonamiento Cualitativo

El Razonamiento cualitativo intenta resolver problemas de distintas áreas y desarrolla una variedad de teorías y sistemas.

Existe un número prominente de características que son típicas en los trabajos desarrollados. Algunas de las más importantes son:

- **Ontología:** El razonamiento cualitativo provee una representación explícita en la capa del modelado, en lugar de solo una expresión matemática. Esta capa es crucial para cualquier intento de modelado y ha sido uno de los puntos críticos de este campo.
- **Causalidad:** El analizar y explicar el comportamiento de un sistema en términos de la relación causa-efecto; parte de la mente humana busca relaciones entre las cosas y particularmente entre acciones y sus consecuencias como modo de entender el mundo y adaptarse al mismo.
- **Modelado por Componentes:** Casi todos los sistemas de razonamiento cualitativo adoptan una vista reduccionista del mundo y construyen bibliotecas elementales independientes. Esta característica es la base para la automatización de los componentes del modelo y la re-utilización de modelos.
- **Inferir el Comportamiento de una Estructura:** Muchos sistemas requieren como entrada solamente la descripción estructural de un escenario. Construyen el modelo del comportamiento automáticamente y generan una descripción del comportamiento mediante una simulación cualitativa.
- **Cualitatividad:** Este término significa incluir solamente aquellas distinciones en el modelo del comportamiento que son esenciales para la solución de una tarea en particular.

3.3. Simulación Cualitativa.

Un sistema físico puede ser modelado utilizando ecuaciones diferenciales en términos de un conjunto de variables de estado y restricciones. La solución de éstas puede ser representada mediante una función que representa el comportamiento del sistema en el tiempo. Un sistema de simulación cualitativa

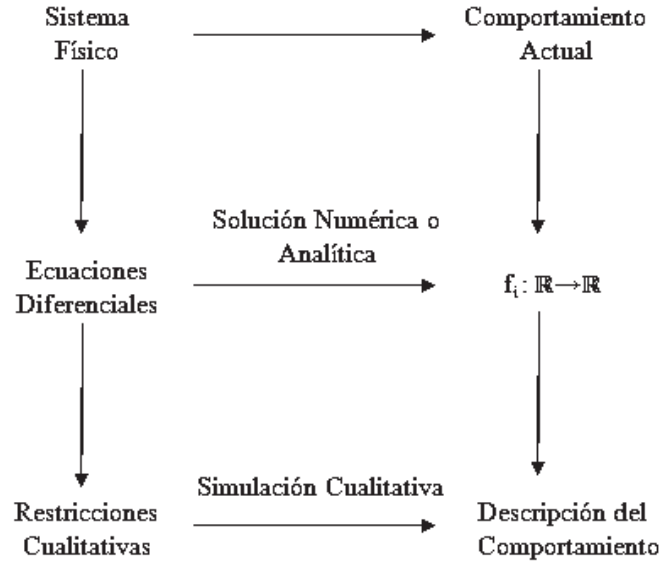


Figura 3.1: Simulación cualitativa y ecuaciones diferenciales, ambas abstracciones del comportamiento actual.

a partir de las ecuaciones diferenciales del sistema produce un conjunto de comportamientos posibles del sistema, generando y filtrando la totalidad de posibles transiciones a partir de un estado cualitativo.

La Figura 3.1 muestra la simulación cualitativa y las ecuaciones diferenciales, ambas son abstracciones del comportamiento actual de un sistema.

En la simulación cualitativa, todas las cantidades son representadas en términos de landmarks, el valor de un landmark es un nombre simbólico para un número real en particular. Este valor numérico puede ser conocido o no, además puede ser descrito como un punto donde la función es dividida en regiones cualitativamente distintas. Un espacio cuantitativo está formado por el conjunto ordenado de landmarks (la cantidad es descrita en términos de la relación de orden entre los landmarks).

El sistema de simulación cualitativa inicia con la descripción de la estructura de un sistema físico y un estado inicial, produce un grafo dirigido que consiste en los posibles estados del sistema y de su estado inmediato superior

de cada estado. La estructura de un sistema es descrita mediante un conjunto de símbolos representando los parámetros físicos del sistema y un conjunto de restricciones que describen la relación entre parámetros.

Cada parámetro físico es una función diferenciable continua en el tiempo. Su valor en un punto dado en el tiempo es especificado cualitativamente en términos de su relación con el conjunto de landmarks ordenados. El estado cualitativo de un parámetro consiste en su relación ordinal de landmarks y su dirección de cambio.

El tiempo es presentado totalmente como un conjunto ordenado de puntos simbólicos en el tiempo. El tiempo actual se puede encontrar en o entre dos puntos distinguidos.

El conjunto de restricciones de parámetros físicos de un sistema solo es válido en una región operativa definida mediante rangos permitidos. Estos rangos permitidos son intervalos cerrados donde los límites de estos intervalos constituyen los valores de landmarks del parámetro.

El estado inicial de un sistema es definido por la región operativa y un conjunto de valores cualitativos. La simulación cualitativa genera todos los posibles valores cualitativos permitidos por cada parámetro. Si más de un cambio cualitativo es posible, el estado actual tiene múltiples sucesores, la simulación se ramifica.

3.3.1. Ejemplo: Tanques Comunicados (U-Tube)

El ejemplo de tanques comunicados consiste en dos tanques parcialmente llenos y conectados por un tubo delgado en el fondo de los tanques. Se agrega agua en el tanque A cuanto ambos tanques se encuentran en equilibrio. El sistema alcanza un nuevo equilibrio con un nivel de agua mayor en ambos tanques. La Figura 3.2 muestra el ejemplo de tanques comunicados (U-Tube).

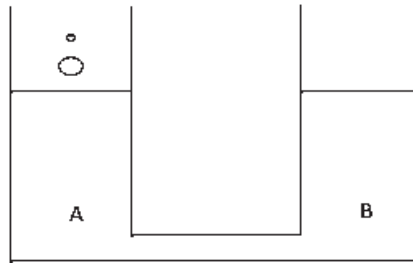


Figura 3.2: Ejemplo de tanques comunicados.

Restricciones

- Cada tanque tiene una presión en relación a la cantidad de agua contenida en él.
- El flujo del tubo delgado depende de la diferencia de presiones.
- El flujo en el tubo delgado incrementa la cantidad de agua en un tanque mientras disminuye en el otro.

Comportamiento

- Después del incremento de agua en el Tanque A, la cantidad de agua y la presión son incrementadas en A, permitiendo flujo de agua del Tanque A al B.
- El agua fluye del Tanque A al B. El nivel de A disminuye mientras en B se incrementa, la diferencia de presión de A a B y el flujo entre los Tanques se aproxima a cero.
- La diferencia de presión y el flujo entre los tanques es cero cuando el sistema alcanza el nuevo equilibrio con el nivel de ambos tanques incrementado.

El Razonamiento Cualitativo intenta determinar el comportamiento del sistema. Los niveles iniciales de los tanques no son necesarios ni la cantidad de

agua incrementada. Tampoco se conoce el incremento en el nivel de ambos tanques, ni cuanto tiempo se tarda en alcanzar el nuevo equilibrio. Sin embargo, se garantiza que mientras el nivel del tanque A disminuye, el nivel del tanque B se incrementa. El sistema obtiene un nuevo punto de equilibrio, y no puede regresar a su estado de equilibrio inicial.

La Figura 3.3 muestra un gráfico cualitativo que describe el comportamiento cualitativo de un parámetro.

3.3.2. Comportamiento Cualitativo

Un sistema físico es caracterizado por un número de parámetros, los cuales varían en el tiempo. El dominio y el rango de una función f son intervalos cerrados dentro de los reales. La descripción del comportamiento cualitativo se define como una función simple diferenciable continua:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^* \quad (3.1)$$

Para $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^*$ se define f como una función razonable si:

1. f es continua en $[a, b]$.
2. f es diferenciable continua en (a, b)
3. f tiene un número finito de puntos críticos en un intervalo cerrado.
4. $\lim_{t \downarrow a} f'(t)$ y $\lim_{t \uparrow b} f'(t)$ existe en \mathbb{R} , define a $f'(a)$ y a $f'(b)$ igual a esos límites.

donde f es una función razonable, $t \in [a, b]$ es un punto destacado en el tiempo. Estos puntos destacados son puntos donde algo importante sucede al valor de f . Una función razonable tiene un conjunto finito de puntos destacados.

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \quad (3.2)$$

Y un conjunto de valores de landmarks

$$l_1 < l_2 < \dots < l_k \quad (3.3)$$

Se define un estado cualitativo de f en t , en términos de su relación ordinal con sus landmarks y su dirección de cambio. Esta notación de la descripción cualitativa de una función continua permiten un cambio arbitrario en el conjunto de landmarks, utiliza un solo término para la descripción de la magnitud y la derivada de la función.

El estado cualitativo (QS) de f en t está definido por un par de valores $\langle \text{qval}, \text{qdir} \rangle$:

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ qval} &= \begin{array}{ll} l_j & \text{Si } f(t) = l_j \\ (l_j, l_{j+1}) & \text{Si } f(t) \in (l_j, l_{j+1}) \end{array} \\ \blacksquare \text{ qdir} &= \begin{array}{ll} \text{inc,} & \text{si } f(t) > 0 \\ \text{std,} & \text{si } f(t) = 0 \\ \text{dec,} & \text{si } f(t) < 0 \end{array} \end{aligned}$$

Para puntos adyacentes destacados t_i y t_{i+1} , se define $QS(f, t_i, t_{i+1})$, al estado cualitativo de f en (t_i, t_{i+1}) . Además, el comportamiento cualitativo de f en $[a, b]$, es la secuencia de estados cualitativos de f :

$$QS(f, t_0), QS(f, t_0, t_1), QS(f, t_1), \dots, QS(f, t_{n-1}, t_n), QS(f, t_n)$$

Un sistema es un conjunto $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ de funciones razonables, donde cada función tiene definido su propio conjunto de landmarks y el conjunto de puntos destacados. Los puntos destacados de un sistema F son la unión de los distintos puntos destacados de las funciones $f_i \in F$. El estado cualitativo de un sistema F de m funciones son las m tuplas de los estados cualitativos individuales.

$$QS(F, t_i) = [QS(f_1, t_i), \dots, QS(f_m, t_i)],$$

$$QS(F, t_i, t_{i+1}) = [QS(f_1, t_i, t_{i+1}), \dots, QS(f_m, t_i, t_{i+1})]$$

Y el comportamiento cualitativo de F es la secuencia de los estados cualitativos de F :

$$QS(F, t_0), QS(F, t_0, t_1), QS(F, t_1), \dots, QS(F, t_n)$$

Estas definiciones muestran una semántica precisa para la descripción cualitativa de una función continua; además, clarifica el concepto de próximo estado. Cada estado tiene una descripción cualitativa $QS(F, t)$, pero esta descripción cambia discretamente, solamente en aquellos puntos destacados, y permanece constante durante el intervalo entre dos puntos destacados. Por lo que el próximo estado se puede definir como la próxima, distinta, descripción cualitativa del mecanismo.

Existen dos tipos de transiciones de estados cualitativos, las transiciones-P, que se mueve de un punto a un intervalo, y las transiciones-I, que se mueven de un intervalo a un punto.

Se define a las transiciones-P como un par de puntos adyacentes de f :

$$QS(f, t_i) \Rightarrow QS(f, t_i, t_{i+1}),$$

donde el primer estado es el estado cualitativo en un punto destacado. Y a las transiciones-I como:

$$QS(f, t_i, t_{i+1}) \Rightarrow QS(f, t_i)$$

Los valores correspondientes son tuplas de valores de landmarks, que las variables en alguna restricción pueden tomar. Estas tuplas proveen una restricción mutua entre el significado de una restricción en QSIM y el significado del los valores de landmarks contenido en el espacio cuantitativo.

Para agregar una restricción *suma*, provee la restricción $p + q = r$ SUMA(p, q, r).

Para el caso de especificar una restricción de una función monotónica como M^+ o M^- , se especifica utilizando un par de valores (p, q), por ejemplo la restricción:

$$nivel = M^+(cantidad),$$

Se define como:

$$((M^+cantidad\ nivel)(00)(full\ top)(inf\ inf))$$

- (00) implica que si la cantidad es cero el nivel es cero.
- (full top) la restricción indica que el significado de los valores de landmarks en sus respectivos valores de landmarks se refieren a diferentes aspectos del mismo evento.
- (inf inf) elimina la posibilidad de una asíntota vertical u horizontal.

Una ecuación diferencial cualitativa (QDE) se define como una tupla de cuatro elementos $\langle V, Q, C, T \rangle$ que se definen como:

- V es el conjunto de variables, para cada función razonable en el tiempo.
- Q es el espacio cuantitativo para cada variable en V.
- C es un conjunto de restricciones aplicables a las variables en V.
- T es el conjunto de transiciones, que definen el dominio aplicable a la QDE.

El algoritmo de simulación cualitativa que describe el comportamiento del sistema está fuera de alcance de este documento, para mayor información se puede encontrar en el artículo de Simulación Cualitativa [Kuipers 1986] o el Libro de razonamiento cualitativo [Kuipers 1994]. Sin embargo, la Figura 3.3 muestra el resultado de la simulación cualitativa del sistema de tanques comunicados.

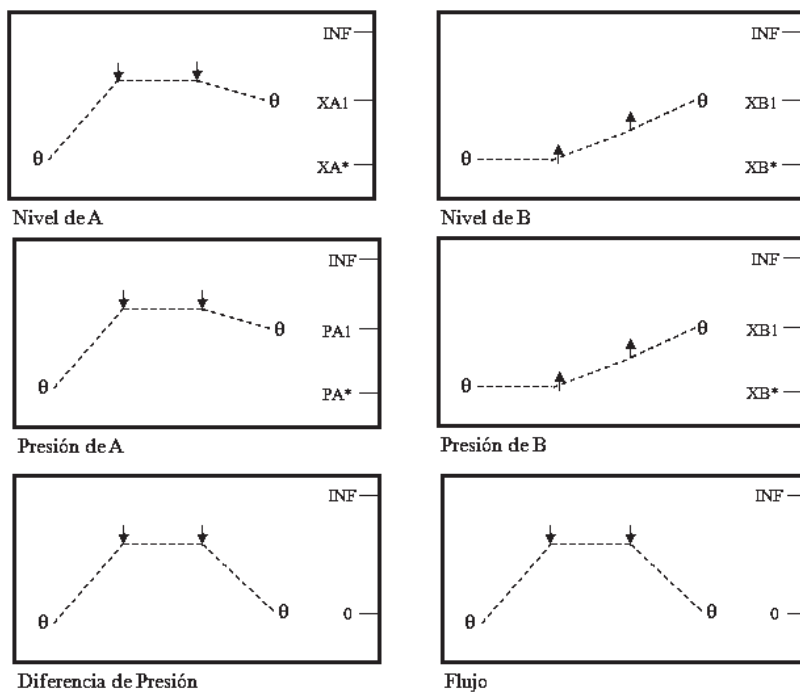


Figura 3.3: Comportamiento del ejemplo de tanques comunicados.

3.4. Identificación Semi-Cualitativa de Sistemas.

La meta de la identificación de sistemas es la construcción del modelo del mecanismo. El primer paso es llamado identificación estructural, el cual determina las propiedades cualitativas de los datos observados (romper los datos observados en regiones monotónicas). El segundo paso es llamado identificación de paramétrica, proceso mediante el cual se refinan los límites de los posibles valores numéricos que pueden tomar los parámetros del modelo.

En los métodos tradicionales para la identificación de sistemas, un sistema dinámico representado mediante una ecuación diferencial. Este trabajo presenta una alternativa basada en la representación de QSIM (visto anteriormente) [Kuipers 1994, Kuipers 1986] para modelos cualitativos y un algoritmo para la simulación cualitativa.

El espacio del modelo es representado mediante una ecuación diferencial semi-cualitativa (SQDE), la cual define un conjunto de ecuaciones diferenciales consistente con los valores de landmarks y funciones monotónicas. La descripción semi-cualitativa incluye el valor de los límites asociados a los valores de landmarks. El espacio del modelo para la SQDE es el producto de los espacios del modelo correspondientes a los valores de landmarks individuales y de las funciones monotónicas.

Para más información acerca de este trabajo ver el artículo de Semi-Cualitative System Identification [Kay 2000]. A continuación solo detallaremos como formar un trend semi-cualitativo. Esta parte explica la manera en que, a partir un flujo de datos observados del sistema, SQUID genera la representación cualitativa de ésta. Donde regularmente el flujo de datos puede presentar imprecisiones numéricas debido a la manera de recolectar los datos, esta metodología establece un filtrado para este tipo de problemas.

3.4.1. Formación de una Tendencia Semi-Cualitativa

Dado que esta metodología casa la predicción SQSIM correspondiente a las propiedades de la observación, esta descripción del comportamiento es generada mediante un proceso de filtrado cualitativo (binning) de cada variable. Este filtrado consiste en segmentar el flujo de datos observados en regiones monotónicas (bins).

Filtrado Cualitativo

El filtrado cualitativo consiste segmentar los datos observados en regiones monotónicas (crecientes o decrecientes), cada región tiene un signo asociado ($\uparrow, \theta, \downarrow$). El signo es obtenido utilizando una función kernel, la cual determina la pendiente de un punto en particular utilizando los datos vecinos. En ocasiones los datos pueden presentar errores o imprecisiones, es por eso que no es suficiente determinar la pendiente para cada punto (Ecuación 3.4). Por lo que es necesario determinar la desviación estándar de los datos observados (Ecuación 3.5) con la finalidad de determinar que la pendiente obtenida es suficientemente diferente de cero.

Función Kernel

La función del filtrado cualitativo se realiza mediante una función llamada *kernel cualitativo*. Esta función se aplica a una ventana de tamaño fijo n la cual es deslizada a lo largo del flujo de datos observados. Si la ventana inicia en el dato w_i , la función kernel $k(w_i)$ regresa uno de tres valores:

- \uparrow si w_i contiene un segmento monotónicamente creciente.
- \downarrow si w_i contiene un segmento monotónicamente decreciente
- $*$ si la monoticidad del segmento es desconocida.

Para determinar la monotonicidad la función del kernel determina la pendiente del segmento de los datos contenidos de la ventana utilizando la Ecuación 3.4 (ver [Kay 2000]):

$$pendiente = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \quad (3.4)$$

donde (t_i, y_i) es el i -ésimo dato contenido en la ventana, además \bar{y} y \bar{t} corresponde a la media de y y de t respectivamente. Debido a que los datos observados pueden contener imprecisión numerica, no es suficiente utilizar la ecuación 3.4 directamente; es necesario determinar la desviación estandar de la pendiente obtenida con los datos contenidos en la ventana. Para ésto es necesario aplicar la ecuación 3.5:

$$\sigma = \frac{\sigma_v}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}} \quad (3.5)$$

donde σ_v es la desviación estandar del flujo de datos observados. En esta implementación, el signo de la función del kernel se encuentra basado en el 3.5σ grado de confiabilidad, el cual otorga un 99% de certeza que la pendiente fuera de ese rango no es cero. Si la pendiente no cae dentro de ese rango, por ejemplo $|slope| \leq 3.5\sigma$ el valor del kernel es $*$.

Ya que se tienen las pendientes para cada punto del flujo de datos, es necesario establecer una estrategia de adyacencia de ventanas. Esta estrategia consiste en determinar los signos mediante la comparación de los signos de las ventanas adyacentes, para ésto se llama $sign(i)$ al signo del dato en la posición i , y a dos ventanas adyacentes como w_i y w_{i+1} . Existen cuatro casos posibles que son:

1. Si $k(w_i) = k(w_{i+1})$ y $k(w_i) = \downarrow$ o $k(w_i) = \uparrow$. El signo permanece sin cambio.
2. Si $k(w_i) = \downarrow$ y $k(w_{i+1}) = \uparrow$. Existe un extremo en w_{i+1} .
3. Si $k(w_i) = *$. No se asigna ningún signo.

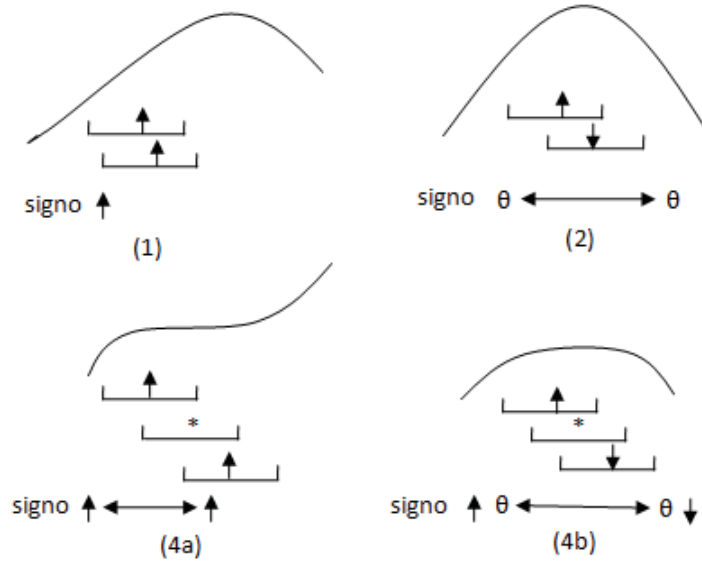


Figura 3.4: Casos para determinar el signo.

4. Si $k(w_i) = *$ y $k(w_{i+1}) = \uparrow$ o \downarrow . Existen dos casos posibles.

- a) Si $sign(i) = k(w_{i+1})$. No existe un cambio de signo.
- b) Si $sign(i) \neq k(w_{i+1})$. Existe un extremo entre j y w_i .

La Figura 3.4 muestra estos cuatro casos.

Dados estos cambios en los valores del kernel, se establece la metodología de filtrado. La salida del filtrado consiste en una secuencia de bins, donde cada bin es una secuencia continua de puntos con una misma derivada cualitativa (signo) (un bin es un conjunto de puntos continuos con una misma pendiente). En la construcción de las regiones monotónicas se utilizan dos tipos de bins, los cbins, que contienen a los puntos cuya monotonicidad es conocida y los ubins que contiene a los puntos cuya monotonicidad no es conocida.

El algoritmo se encuentra definido de la siguiente manera

```
new(ubin);new(cbin)
i ← 1; sign(cbin) ← *
```

```

while( $i \leq n - N + 1$ ) do
  if( $k(w_i \neq *) \wedge (\text{sign}(\text{cbin}) = *)$ ) then
     $\text{sign}(\text{cbin}) \leftarrow k(w_i)$ 
  endif
  if( $k(w_i) = *$ ) then
     $\text{ubin} \leftarrow \text{ubin} + \text{data}(i)$ 
  else if ( $k(w_i) = \text{sign}(\text{cbin})$ ) then
     $\text{cbin} \leftarrow \text{cbin} + \text{ubin} + \text{data}(i)$ 
     $\text{ubin} \leftarrow \phi$ 
  else
    output( $\text{cbin}$ )
     $\text{new}(\text{cbin}); \text{sign}(\text{cbin}) \leftarrow \theta$ 
     $\text{cbin} \leftarrow \text{ubin} + w_i$ 
     $\text{ubin} \leftarrow \phi$ 
    output( $\text{cbin}$ )
     $\text{new}(\text{cbin}); \text{sign}(\text{cbin}) \leftarrow k(w_i)$ 
     $i \leftarrow i + (N - 1)$ 
  endif
   $i \leftarrow i + 1$ 
end

```

Esta estrategia divide el flujo de datos observados de cada variable en regiones monotónicas utilizando el algoritmo de filtrado. El algoritmo inicia definiendo dos listas la lista de los bins actuales (cbins) y la lista de los bins desconocidos (ubins). El signo es definido por el primer signo diferente de * ($\text{sign}(\text{cbin})$). El algoritmo continúa avanzado, si durante la evaluación se encuentra con el signo *, los datos se almacenan en la lista ubin. Cada dato evaluado es almacenado en cbins si mantiene el mismo signo definido en $\text{sign}(\text{cbin})$. Si al evaluar un bin existe un cambio de signo, se guarda la lista contenida en cbins más la contenida en ubin.

3.5. Conclusiones

El razonamiento cualitativo es un área de la inteligencia artificial que presenta una solución alterna a problemas de la dinámica. Regularmente el modelado de algún sistema físico es realizado utilizando un conjunto ecuaciones diferenciales. La solución analítica o numérica de éstas representa el comportamiento del sistema. En ocasiones la solución es muy costosa o es imposible generar, por esta razón se ha buscado una alternativa a este tipo de soluciones. En este capítulo se describieron secciones pertenecientes a dos trabajos realizados por Benjamin Kuipers los cuales fueron determinantes para la elaboración de esta tesis. Los trabajos son Qualitative Simulation [Kuipers 1994, Kuipers 1986] y Semi-Qualitative System Identification [Kay 2000].

En el siguiente capítulo se describirá el proceso de generar una representación cualitativa de una función en tres dimensiones, proponiendo una representación cualitativa basándose en trabajos realizados anteriormente por Kuipers [Kuipers 1994, Kuipers 1986], Flores [Flores 2006] y Ortiz [Ortiz 2009].

Capítulo 4

Cualitativización de Funciones

La meta del Razonamiento Cualitativo es llegar a conclusiones útiles acerca de un sistema o de una situación, utilizando tan poca información del sistema como sea posible. Esta información representa el modelo del sistema, donde la información numérica del mismo puede o no ser conocida. El problema ahora, es detectar la características esenciales del sistema y denotarlas en una representación establecida.

4.1. Introducción

Se propone una representación cualitativa para funciones en tres dimensiones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es representada utilizando un arreglo bidimensional, el cual representa los puntos de la función f . El proceso de cualitativizar inicia determinando la derivada cualitativa de cada punto contenido en el arreglo, este proceso es realizado utilizando el filtro de ruido descrito en la sección 3.4 de este documento, el filtro es utilizado para eliminar posibles errores numéricos en los datos (ver Sección 4.3). Continuamos segmentando el arreglo en regiones rectangulares con ciertas características, para finalmente, generar la representación cualitativa propuesta utilizando las regiones segmentadas.

El resto del capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera, la Sección 4.2 propone una representación cualitativa para funciones en tres dimensiones. La Sección 4.3 describe el filtrado de ruido y cualitativización, propuesto para funciones en tres dimensiones, el cual es una extensión del propuesto por Kay et al [Kay 2000]. La Sección 4.4 describe la manera de utilizar el Filtro Cualitativo, el cual consiste en asignar la dirección de la derivada para cada punto de la función. La Sección 4.5 provee de las reglas para la detección y sustitución de regiones de transición, que resultan de aplicar el Filtro Cualitativo. La Sección 4.6 explica el algoritmo utilizado para la segmentación de regiones, el cual consiste en dividir el dominio de la función en regiones con características cualitativas uniformes. La Sección 4.7 describe la manera de identificar y ajustar los landmarks para regiones adyacentes. La Sección 4.8 explica la manera de determinar los llamados linemarks (regiones con derivada cero).

4.2. Representación Cualitativa

La representación cualitativa de un sistema es la descripción de las características esenciales del objeto. Es obvio que no existe una representación cualitativa única, universal, correcta o mejor; existen una gran cantidad de representaciones, cada una con sus propias ventajas y desventajas, para una determinada tarea. Lo que todas ellas tienen en común es que proveen una notación para describir y razonar acerca de las propiedades continuas del mundo físico, Forbus [Forbus 1996] propone dos tópicos claves para la representación cualitativa: resolución y composición. La resolución se refiere al nivel de información detallada en la representación; éste es un tema clave, dado que el razonamiento cualitativo intenta llegar a conclusiones útiles utilizando poca información. La composición se refiere a la habilidad de combinar representaciones de diferentes aspectos de un fenómeno o sistema para crear una representación del fenómeno o sistema como un todo. La composi-

ción es también importante, debido a que la física cualitativa a partir de los componentes que conforman al sistema, intenta definir el modelo del sistema completo y su comportamiento.

Un landmark es un nombre simbólico para un valor cuantitativo en particular (el valor numérico puede ser conocido o no), el cual rompe el conjunto de valores continuos en regiones con diferentes características cualitativas.

Un punto variable distinguido v^* para la variable v es tal que $f(v^*) = l$, donde l es un landmark de v . Para funciones de dos variables, un par de puntos distinguidos (v_1^*, v_2^*) para las variables v_1 y v_2 , son tal que $f(v_1^*, v_2^*) = l$, donde l es un landmark de f .

En este trabajo se propone segmentar la función en regiones rectangulares, donde cada región puede tener dos segmentos con diferentes pendientes cualitativas y entre los dos segmentos con diferente pendiente cualitativa se encuentra un segmento con pendiente cero. Por ejemplo, la Figura 4.1 muestra una región de una función f , la cual muestra tres segmentos de la función: dos de ellos tienen diferente valor cualitativo en sus derivadas, y la línea que los divide presenta una derivada cero (i.e borde). La Figura 4.2 muestra la representación cualitativa y sus tres segmentos de la región f .

Los límites de los segmentos son $((r_1, h_1), (r_2, h_2))$, los segmentos 1 y 3 tienen diferente derivada cualitativa y el segmento 2 representa el límite entre las regiones 1 y 3, es una región (en una dimensión) con derivada cero.

La representación cualitativa propuesta en este trabajo es una tupla de tres elementos, $\langle V, QS, F \rangle$, los cuales son descritos a continuación:

- V es el conjunto de variables de la función.
- QS es el conjunto de los espacios cuantitativos para cada variable en V .
- F es el conjunto de regiones de las que se conforma la función.

Los tres segmentos son representados como:

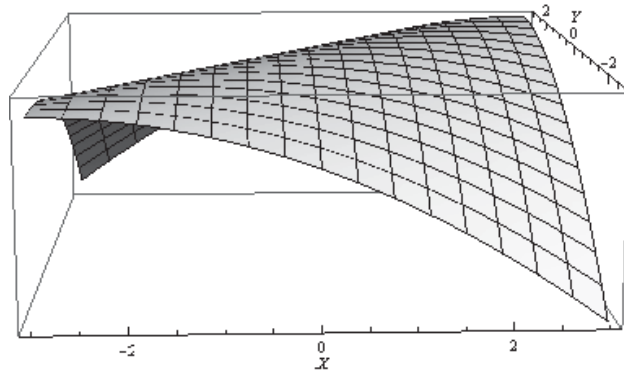
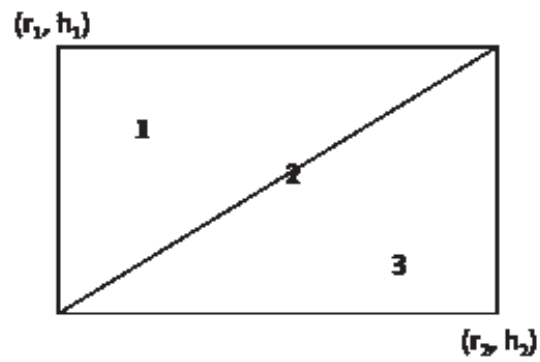
Figura 4.1: Una región de una función f 

Figura 4.2: La representación cualitativa de la Figura 4.1 y sus tres segmentos cualitativos.

- Variables $V = \{r, h, x\}$.
- $QS = \{r = \{r_1, r_2\}, h = \{h_1, h_2\}, x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\}$.
- $F = \{S_1, S_2, S_3\}$

Y defimos a cada S_i como:

- $S_1 = \langle ((r_1, r_2), (h_1, h_2)), (M + (r, h), (r_1, h_1), (r_2, h_2)), \rangle, ((r_1, h_1, x_1), (r_2, h_1, x_2), (r_1, h_2, x_3)), (+, +) \rangle$
- $S_2 = \langle ((r_1, r_2), (h_1, h_2)), (M + (r, h), (r_1, h_1), (r_2, h_2)), =, ((r_2, h_1, x_2), (r_1, h_2, x_3)), (0, 0) \rangle$
- $S_3 = \langle ((r_1, r_2), (h_1, h_2)), (M + (r, h), (r_1, h_1), (r_2, h_2)), \langle, ((r_2, h_2, x_4), (r_2, h_1, x_2), (r_1, h_2, x_3)), (-, -) \rangle$

En general la representación cualitativa se define como:

$$v = \{r, h, x\}$$

donde $x = f[r, h]$

$$QS = \{r = \{lr_1, lr_2, \dots, lr_{nr}\}, h_1 = \{lh_1, lh_2, \dots, lh_{nh}\}, x = \{lx_1, lx_2, \dots, lx_{nx}\}\}$$

donde $lk_j < lk_{j+1}, \forall k = \{r, h, x\}$, y $\forall j = \{1, 2, \dots, n_k\}$

$$F = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}, m = \text{número de segmentos de } f.$$

Cada región S_i se define como:

$$S_i = \langle qv(r, h), fs(r, h), reg, qdir(x), \vartheta \rangle$$

Donde $qv(r, h)$ define los límites de cada región, $fs(r, h)$ define la frontera entre dos regiones con diferente derivada cualitativa. Para expresar la relación entre r y h , se utilizan regiones monotónicas, en el mismo sentido que proponen Kay en [Kay 2000]. $(M * (r, h), (r_1, h_1), (r_2, h_2))$ y $* \in \{+, -\}$. $reg \in \{\langle, =, \rangle\}$ especifica una determinada región, (i. e. ' \langle ' especifica segmento frontera, ' \rangle ' especifica el segmento ubicado por encima de la frontera, y ' \langle ' especifica el segmento por debajo de la frontera), $qdir(x)$ define la magnitud de x para cada extremo del segmento y $\vartheta = (\partial_r x, \partial_h x)$, donde $\partial_r x = |dx/dr|$

y $\partial_h x = |dx/dh|$ son las derivadas cualitativas de x con respecto a r y h respectivamente y $|a| = \text{signo}(a)$.

Para generar la representación cualitativa de una función f , se recibe como entrada un arreglo bi-dimensional que contiene los valores numéricos para cada punto de la función f . El proceso inicia determinando la derivada cualitativa de cada punto contenida en el arreglo, debido a que los datos pueden presentar ruido, se utiliza el filtro descrito en la sección 3.4 de este documento. Este filtro genera la derivada cualitativa para cada punto contenido en el arreglo bi-dimensional. El siguiente paso es el de segmentar la función en regiones que preserven las características explicadas anteriormente. Después del proceso de segmentación, es necesario realizar una identificación y ajuste de landmarks. Finalmente la información obtenida es trasladada a la representación descrita anteriormente.

4.3. Filtro de Ruido Cualitativo

El proceso de filtrado de ruido cualitativo produce la derivada cualitativa para cada punto de la función. El filtro es necesario ya que los puntos que se reciben de entrada pueden presentar ruido. El ruido presente en los datos de entrada puede ser debido a imprecisión numérica, error de lectura en los datos, errores en los aparatos de medición, etc.

El filtro cualitativo presentado por Kay, Rinner y Kuipers [Kay 2000] opera aplicando una función de kernel cualitativo a una ventana de tamaño definido n . Esta ventana se desliza a lo largo del arreglo. Iniciamos la ventana en el índice i de la función, w_i . La función del kernel $k(w_i(t, y))$ regresa uno de los siguientes tres posibles valores:

- + si w_i contiene un segmento monotónicamente creciente.
- - si w_i contiene un segmento monotónicamente decreciente.
- * si la monotonicidad de w_i es desconocida.

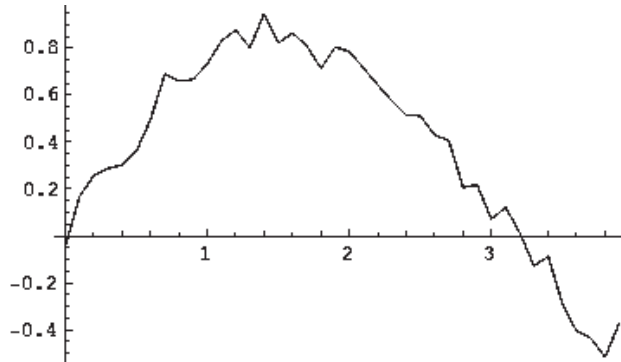


Figura 4.3: Ejemplo de una función con ruido.

Para determinar la monoticidad, la función del kernel determina la pendiente utilizando la Ecuación 3.4. Dado a que los datos pueden presentar ruido, el valor obtenido directamente de la Ecuación 3.4 puede presentar errores; por eso la desviación estándar es necesaria para determinar si la pendiente obtenida es suficientemente válida. La desviación estándar de la pendiente contenida en la ventana se define en la Ecuación 3.5. La implementación está basada en un nivel de 3.5σ de confianza, el cual da un 99.9% de certeza que la pendiente fuera de ese rango no es cero. Si la pendiente no cae dentro de este rango el valor del kernel es * (desconocido).

El proceso de filtrado será utilizado en las próximas fases del proceso para la determinación de las derivadas cualitativas de f . Sin la utilización del filtro, cada par de puntos determinarían una derivada cualitativa. Esto conllevaría a errores como los mostrados en la Figura 4.3, donde se muestra una función en dos dimensiones con ruido. La aplicación del filtrado de la función puede verse en la Figura 4.4.

4.4. Derivadas Cualitativas

Una región se encuentra formada por tres segmentos, dos de ellos con diferente derivada cualitativa (ϑ) y el otro segmento representa el límite entre

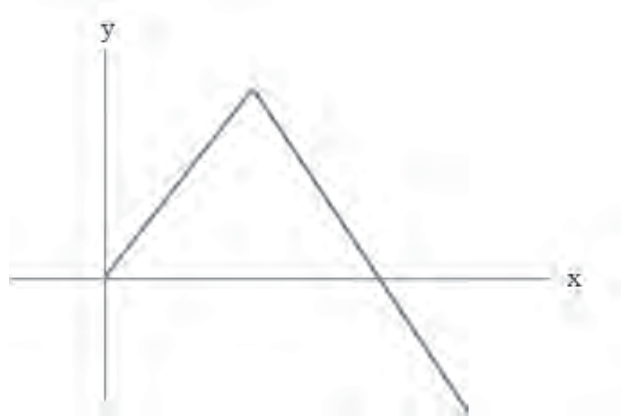


Figura 4.4: Resultado de aplicar el filtro a una función.

las dos regiones con derivada diferente. Cada segmento está formado por un conjunto de puntos contiguos del arreglo con la misma derivada cualitativa ϑ .

Cada punto del arreglo está definido por tres valores numéricos, que corresponden a las tres variables (r, h, x) de la función. La derivada cualitativa es definida por $\vartheta = (\vartheta r_{i,j}, \vartheta h_{i,j})$ donde:

$$\vartheta r_{i,j} = k(w_{i,j}(r, x)) \quad (4.1)$$

$$\vartheta h_{i,j} = k(w_{i,j}(h, x)) \quad (4.2)$$

donde k es la función kernel definida en la sección anterior aplicada a un vector de datos horizontal y otro vertical, definidos por:

$$w_{i,j}(r, x) = \{(r_{i,j}, x_{i,j}), (r_{i,j+1}, x_{i,j+1}), \dots, (r_{i,j+n-1}, x_{i,j+n-1})\} \quad (4.3)$$

$$w_{i,j}(h, x) = \{(h_{i,j}, x_{i,j}), (h_{i+1,j}, x_{i+1,j}), \dots, (h_{i+n-1,j}, x_{i+n-1,j})\} \quad (4.4)$$

$(r_{i,j}, h_{i,j}, x_{i,j})$	$(r_{i,j+1}, h_{i,j+1}, x_{i,j+1})$...	$(r_{i,j+n-1}, h_{i,j+n-1}, x_{i,j+n-1})$
$(r_{i+1,j}, h_{i+1,j}, x_{i+1,j})$			
...			
$(r_{i+n-1,j}, h_{i+n-1,j}, x_{i+n-1,j})$			

Figura 4.5: Los puntos necesarios para obtener la derivada cualitativa de $(r_{i,j}, h_{i,j}, x_{i,j})$.

La Figura 4.5 muestra los puntos necesarios para determinar las derivadas cualitativas de un punto $(r_{i,j}, h_{i,j}, x_{i,j})$.

Para simplificar la notación de las derivadas cualitativas de $(r_{i,j}, h_{i,j}, x_{i,j})$, se estableció una notación mas simple, definida por:

- $\vartheta = 1$ si $\partial_r x = +$ y $\partial_h x = +$
- $\vartheta = 2$ si $\partial_r x = +$ y $\partial_h x = -$
- $\vartheta = 3$ si $\partial_r x = -$ y $\partial_h x = +$
- $\vartheta = 4$ si $\partial_r x = -$ y $\partial_h x = -$
- $\vartheta = 0$ si $\partial_r x = *$ y/o $\partial_h x = *$

Al final de esta fase, se ha obtenido un arreglo bi-dimensional con valores cuantitativos de la dirección de la derivada para cada punto de la función.

4.5. Detección de Áreas de Transición

Al encontrarse en la frontera de dos segmentos el proceso del filtrado puede encontrarse con áreas de transición . Debido a la pendiente que divide a los dos segmentos puede crecer (o decrecer) más rápidamente en una dirección que en la otra. Como resultado, el filtro produce áreas falsas de transición. Por ejemplo la Figura 4.6 muestra un ejemplo donde áreas falsas de transición aparecen. Esto es, aparece una región que va de $(+,+) \Rightarrow (+,-) \Rightarrow (-,-)$.

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	2	4	4
2	1	1	1	4	4	4
3	1	1	2	4	4	4
4	1	1	2	4	4	4
5	1	1	2	4	4	4
6	1	2	4	4	4	4

Figura 4.6: Derivadas cualitativas de la función f .

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	4	4	4
2	1	1	1	4	4	4
3	1	1	4	4	4	4
4	1	1	4	4	4	4
5	1	1	4	4	4	4
6	1	4	4	4	4	4

Figura 4.7: Resultado de aplicar el proceso de detección de áreas de transición.

Como se puede observar en la Figura 4.6 algunas áreas falsas aparecen. Para corregir estas áreas falsas, la derivada cualitativa de estas regiones falsas de transición son reemplazadas por la derivada cualitativa vecina hacia el oeste. En este ejemplo se va de $\vartheta = 1$ a $\vartheta = 4$ y entre esos segmentos $\vartheta = 2$ aparece. La derivada cualitativa $\vartheta = 2$ es reemplazada por la derivada vecina hacia el oeste $\vartheta_{i,j} = \vartheta_{i,j-1}$ ($\vartheta_{i,j} = 4$). La Figura 4.7 muestra el resultado de aplicar este proceso al ejemplo ilustrado en la Figura 4.6.

Una vez aplicada la corrección a todas las regiones de transición, el algoritmo procede a identificar las regiones rectangulares que preservan un valor cualitativo uniforme en sus derivadas.

4.6. Identificación de Regiones

La representación propuesta está definida por regiones rectangulares con características definidas, es por eso que la meta de esta metodología es segmentar la función en regiones rectangulares. Para iniciar este proceso de identificación de regiones rectangulares es necesaria la utilización de dos arreglos bi-dimensionales; el primero contiene las derivadas cualitativas (obtenidas en procesos anteriores), el segundo arreglo (arreglo de verificación) tiene las mismas dimensiones que el primer arreglo y es utilizado para controlar los puntos del primer arreglo que ya pertenecen a una determinada región y cuales no. Cada celda del arreglo puede tomar dos valores, cero (0) para puntos que todavía no pertenecen a una región y uno (1) para puntos que ya pertenecen a una región.

Se recorre el arreglo utilizando un algoritmo de llenado. Se inicia en el punto Noroeste del arreglo (posición (0,0)). En este momento la región es un punto. Se intenta que la región crezca lo mas posible, alternando los lados este y sur. En el momento que algún lado no pueda crecer, se busca que el otro lado crezca lo mas posible. Dado que una región está formada por dos segmentos con derivadas diferentes, estos segmentos deben ser contiguos y la frontera que los divide debe de ser monotónica. Solo se pueden permitir regiones que inicien con un número y cambien al menos una vez a un número diferente (i.e. un par de derivadas direccionales diferentes).

Este proceso puede ser visto como una máquina de estados finitos, que permite solo ciertas configuraciones y descarta aquellas que no son permitidas. Este autómata es implementado en forma de patrones o reglas. Se inicia definiendo tres reglas, usadas para determinar si un punto pertenece a una región o no. La primera regla guarda las dos diferentes derivadas cualitativas (diferentes de cero). Para este caso se guarda la derivada en el punto $P_{i,j} = \vartheta_1$, la segunda regla define las posibles secuencias horizontales (HS) que la región rectangular puede presentar. En este momento se almacena una secuencia como $\{\vartheta_1, \vartheta_1\}$. La tercera regla define las posibles secuencias ver-

tales (VS) que la región rectangular puede presentar. En este momento se almacena una secuencia como $\{\vartheta_1, \vartheta_1\}$. Al inicio las reglas se definen como:

$$QD = \{\vartheta_1*\}$$

$$HS = \{\{\vartheta_1, \vartheta_1\}\}$$

$$VS = \{\{\vartheta_1, \vartheta_1\}\}$$

En el segundo paso se evalúan los puntos vecinos hacia el este de la región analizada. Si todos los puntos evaluados cumplen las tres reglas, se continúa evaluando los vecinos ubicados en el sur de la región definida. Si todos los puntos vecinos en ambas direcciones cumplen con las tres reglas, incrementamos la región; si alguna dirección (este o sur) no cumple con las tres reglas, se continúa evaluando hacia la otra dirección. Cuando ambas direcciones no cumplen con las tres reglas, el proceso se detiene.

Si una derivada cualitativa (ϑ_2) diferente aparece, y en QD solo se ha definido una derivada cualitativa (ϑ_1), se almacena ϑ_2 en QD y se almacenan las posibles secuencias horizontales y verticales de la región. Al momento de almacenar ϑ_2 , las reglas no sufrirán ninguna modificación en el futuro.

Dado que una región puede contener solo dos valores diferentes en sus derivadas, las reglas nos sirven para detectar cuando se debe terminar una región y comenzar otra. Estas reglas son formuladas de manera automática por el programa, al recorrer la región.

Al aparecer la segunda derivada cualitativa, el programa definirá las reglas como:

$$QD = \{\vartheta_1, \vartheta_2\}$$

$$HS = \{\{\vartheta_1, \vartheta_1\}, \{\vartheta_2, \vartheta_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$$

$$VS = \{\{\vartheta_1, \vartheta_1\}, \{\vartheta_2, \vartheta_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$$

Las reglas funcionan de la siguiente manera: cada punto $P_{i,j} = \vartheta^*$ tiene una derivada cualitativa, la cual debe ser una de las dos derivadas cualitativas definidas en (QD); la primer regla establece que $\vartheta^* = \vartheta_1$ ó ϑ_2 . Para la segunda regla, es necesario considerar la derivada cualitativa vecina ubicada en la dirección oeste $P_{i,j-1} = \vartheta^{**}$ respecto al punto actual ($P_{i,j}$); con estos datos se define la secuencia $\{\vartheta^{**}, \vartheta^*\}$. Esta secuencia debe de estar definida en la segunda regla $\{\vartheta^*, \vartheta^{**}\} \in \{\{\vartheta_1, \vartheta_1\}, \{\vartheta_2, \vartheta_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$. Para la tercera regla, es necesario considerar la derivada cualitativa vecina ubicada en la dirección norte $P_{i-1,j} = \vartheta^{***}$ respecto al punto actual ($P_{i,j}$). Con esta información se define la secuencia $\{\vartheta^{***}, \vartheta^*\}$; esta secuencia debe definirse en la tercera regla $\{\vartheta^*, \vartheta^{***}\} \in \{\{\vartheta_1, \vartheta_1\}, \{\vartheta_2, \vartheta_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$.

Para poder continuar, cada punto debe cumplir con las tres reglas y el valor en el arreglo de validación en la misma posición del punto debe ser cero. Por ejemplo, la Figura 4.8 contiene las derivadas cualitativas de una función. Si se evalúa el punto $P_{3,4}$ se tiene:

$$\vartheta_{3,4} = 3$$

$$\vartheta_{3,3}^* = 2$$

$$\vartheta_{2,4}^{**} = 3$$

Las reglas son definidas como:

$$QD = \{2, 3\}$$

$$HS = \{\{2, 2\}, \{3, 3\}\{2, 3\}\}$$

$$VS = \{\{2, 2\}, \{3, 3\}\{3, 2\}\}$$

Como se puede observar:

$$\vartheta_{3,4} \in QD$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	3	3	3	2	2	2
2	2	2	3	3	3	2	2	2
3	2	2	2	3	3	3	3	2
4	2	2	2	2	3	3	3	3
5	2	2	2	2	2	3	3	3
6	2	2	2	2	2	3	3	3

Figura 4.8: Derivadas cualitativas de una función.

$$\{\vartheta^*, \vartheta_{3,4}\} \in HS$$

$$\{\vartheta^{**}, \vartheta_{3,4}\} \in VS$$

Otro caso relevante, se da al continuar evaluando y llegar al punto $P_{1,6}$, las derivadas necesarias se definen por:

$$\vartheta_{1,6} = 2$$

$$\vartheta_{1,5}^* = 3$$

$$\vartheta_{0,6}^{**} = Unknown$$

Se puede observar:

$$\vartheta_{1,6} \in QD$$

$$\{\vartheta^*, \vartheta_{1,5}\} \notin HS$$

En el momento que una regla no se cumple, el proceso es detenido en esa dirección. Si no se puede avanzar en ambas direcciones (este y sur) se detiene el proceso de incrementar la región. La Figura 4.9 muestra la región resultante del ejemplo anterior.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	3	3	3	2	2	2
2	2	2	3	3	3	2	2	2
3	2	2	2	3	3	3	3	2
4	2	2	2	2	3	3	3	3
5	2	2	2	2	2	3	3	3
6	2	2	2	2	2	3	3	3

Figura 4.9: Región resultante de la identificación de regiones

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	4	4
2	1	1	1	4	4	4
3	1	1	1	4	4	4
4	1	1	1	4	4	4
5	1	1	1	4	4	4
6	1	1	4	4	4	4

Figura 4.10: Landmarks identificados de una región.

4.7. Identificación y Ajuste de Landmarks

Después de haber segmentado la función en regiones rectangulares, el siguiente paso es encontrar la frontera que divide los dos segmentos con diferente derivada cualitativa de cada región obtenida. Este procedimiento se realiza verificando cada punto a lo largo del perímetro de la región; cuando aparece un cambio de derivada, el cambio es almacenado (aparecen nuevos landmarks). En una región solo pueden ocurrir dos cambios. La Figura 4.10 muestra dos landmarks identificados, uno entre los puntos (1,4) y (1,5) y el otro landmark entre los puntos (6,2) y (6,3). La Figura 4.11 muestra el diagrama cualitativo de la Figura 4.10.

En el momento en que se ha realizado la identificación de la frontera, algunos landmarks pueden no alinearse con los landmarks en las regiones adyacentes. El principio de continuidad indica que en la mayoría de los casos estos landmarks se deben de ajustar, por lo que el proceso no debe de crear

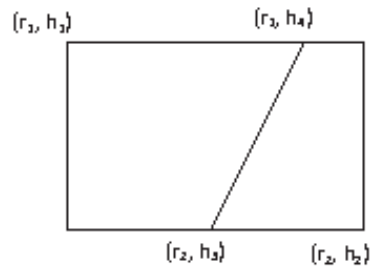


Figura 4.11: Representación cualitativa de la Figura 4.10.

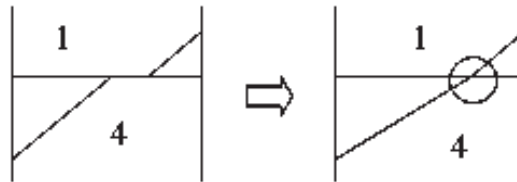


Figura 4.12: Primer caso de ajuste de landmarks.

dos nuevos landmarks sino unicamente uno. Por eso es necesario un ajuste de landmarks. Existen tres casos posibles, para ajustar landmarks los cuales son:

1. El landmark en una región no ajusta con el landmark en la región contigua. En este caso el landmark se ajusta al landmark de la región contigua. La Figura 4.12 muestra un ejemplo.
2. No existe un landmark contiguo en la región adyacente, pero un límite de la región adyacente se encuentra entre los dos landmarks. En este caso existen dos posibles soluciones, dependiendo de la continuidad en las derivadas. La solución es mover el landmark a alguno de los extremos de la región adyacente. La Figura 4.13 muestra un ejemplo.
3. No existe ningun landmark en la región adyacente que se encuentre dentro de la frontera entre las dos regiones adyacentes. En este caso, el

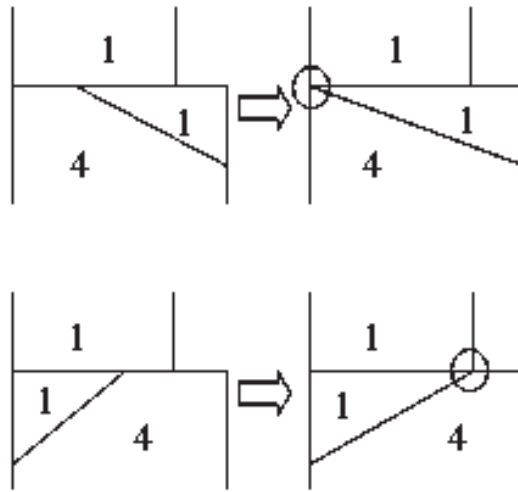


Figura 4.13: Segundo caso de ajuste de landmarks

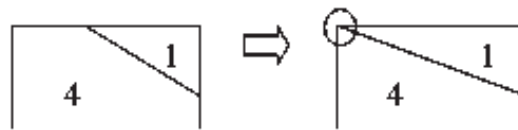


Figura 4.14: Tercer caso de ajuste de landmarks.

landmark se mueve hacia una de las esquinas de la región. La Figura 4.14 ilustra este caso.

Estas reglas de ajustes de landmarks se aplican a todas las parejas de regiones adyacentes para minimizar el número de landmarks generados y proporcionar continuidad a las regiones.

Al finalizar este proceso se han identificado las regiones rectangulares de la función; además se han encontrado las fronteras de los segmentos de cada región (derivada cero). Pero aún no se han detectado todos los segmentos de la función. En ocasiones se pierde la continuidad de las derivadas entre regiones, es por eso que es necesario detectar ese cambio, agregando un nuevo segmento (linemark).

4.8. Identificación de Segmentos de Derivada Cero

La función es segmentada en regiones rectangulares, formadas por dos segmentos con diferente derivada cualitativa y un segmento que los divide con derivada cero. Hasta este momento no se han detectado cambios entre regiones. El último paso es identificar las regiones que cambian cualitativamente, y que no cuentan con un segmento con derivada cero que las divide. A estos segmentos los llamamos linemarks; la representación para estos segmentos es la misma que se utiliza para los segmentos con derivada cero explicada anteriormente.

La identificación se realiza checando dos regiones contiguas; si no existe continuidad se crea una nueva región, a esta región le llamamos linemark. Con esta información se genera la representación cualitativa de la función explicada anteriormente.

Tomando solo dos regiones donde un linemark aparece del ejemplo anterior, en la Figura 4.15 se ilustra un ejemplo de identificación de linemarks. Puede observarse que entre la región con derivada cualitativa 4 y la región con derivada cualitativa 2, no existe ningún segmento frontera que las divide. En estos casos se genera un segmento cualitativo con derivada cero entre ambas regiones llamado linemark.

4.9. Conclusiones

En este capítulo se describió el proceso de generar una representación cualitativa de una determinada función en tres dimensiones, partiendo de un arreglo bi-dimensional que contiene los puntos cuantitativos de la función. El capítulo inicia proponiendo una representación cualitativa para funciones en tres dimensiones; esta representación está basada en las representaciones cualitativas propuestas en los trabajos de Kuipers [Kay 2000], Flores [Flores

Capítulo 5

Resultados

En capítulos anteriores se propuso una representación cualitativa para funciones en tres dimensiones. Además se propuso una metodología que parte de los datos numéricos de la función en tres dimensiones (contenidos en un arreglo bi-dimensional). Genera la representación cualitativa propuesta. En este capítulo se detallará un ejemplo de la metodología propuesta anteriormente.

5.1. Ejemplo de una Función

La función a ejemplificar está definida por $f[x, y] = \text{seno}(xy)$ dentro del dominio de $-3 < x < 1$ y $-3 < y < 1$, se utilizó este dominio porque ejemplifica varios caso interesantes descritos a lo largo de este Capítulo. La Figura 5.1 ilustra gráficamente la función f .

La finalidad de esta metodología es de segmentar la función en regiones con particulares características. Recibe de entrada un arreglo bi-dimensional que contiene los datos numéricos de la función f . Un segmento del arreglo bi-dimensional (datos de entrada) se muestra en la Figura 5.2.

El primer paso es la detección de las derivadas cualitativas para cada punto contenido en el arreglo. Este proceso se realiza utilizando el filtrado

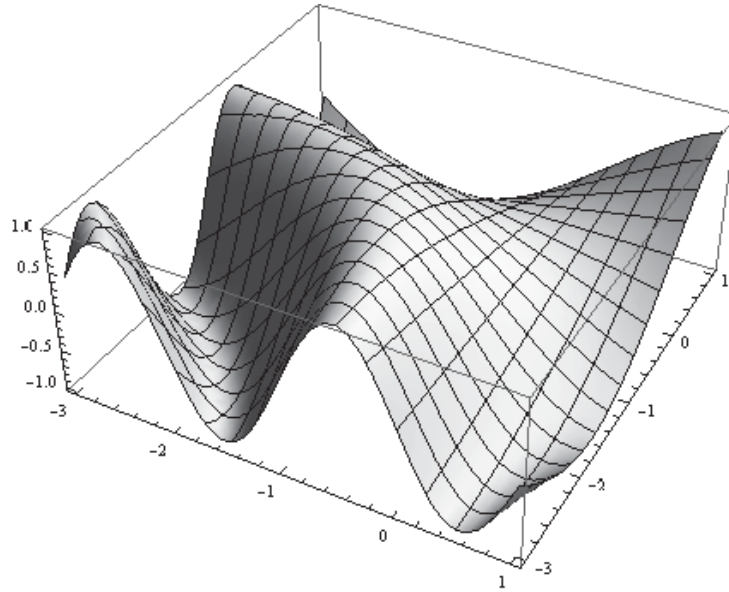


Figura 5.1: Gráfica de la función $\text{Seno}(xy)$.

$x \backslash y$	-3	-2.8	-2.6	-2.4	-2.2	-2
-3	0.412118	0.854599	0.998543	0.793668	0.311541	-0.279415
-2.8	0.854599	0.999902	0.839746	0.423055	-0.122874	-0.631267
-2.6	0.998543	0.839746	0.458951	-0.0431719	-0.533882	-0.883455
-2.4	0.793668	0.423055	-0.0431719	-0.499642	-0.843188	-0.996165
-2.2	0.311541	-0.122874	-0.533882	-0.843188	-0.991869	-0.951602
-2	-0.279415	-0.631267	-0.883455	-0.996165	-0.951602	-0.756802

Figura 5.2: Segmento del Arreglo Bi-dimensional inicial.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	4
3	1	1	1	1	1	2	2	4	4	4
4	1	2	2	2	4	4	4	4	4	4
5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Figura 5.3: Segmento del arreglo que contiene las derivadas cualitativas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4
3	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4
4	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Figura 5.4: Derivadas cualitativas corregidas.

cualitativo. La Figura 5.3 muestra un subconjunto del arreglo donde se define las derivada cualitativas obtenidas en el proceso de filtrado.

Como puede observarse en la Figura 5.3 algunas áreas de transición aparecen. Estas áreas son remplazadas por derivadas vecinas y el resultado de este proceso se muestra en la Figura 5.4.

El próximo paso es el de segmentar la función en regiones con las características definidas en la sección 4.2, los segmentos identificados por este proceso se ilustran en la Figura 5.5

Para cada región identificada en la Figura 5.5 es necesario detectar los landmarks del segmento con derivada cero, aplicando el proceso de identificación, continuando con el ajuste de éstos. El proceso de ajuste es realizado para mantener la continuidad entre dos landmarks de dos regiones contiguas. La Figura 5.6 ilustra la identificación de landmarks y la Figura 5.7 muestra el ajuste realizado a los landmarks obtenidos en el proceso de identificación de landmarks. Las líneas punteadas representan la posición donde aparecen

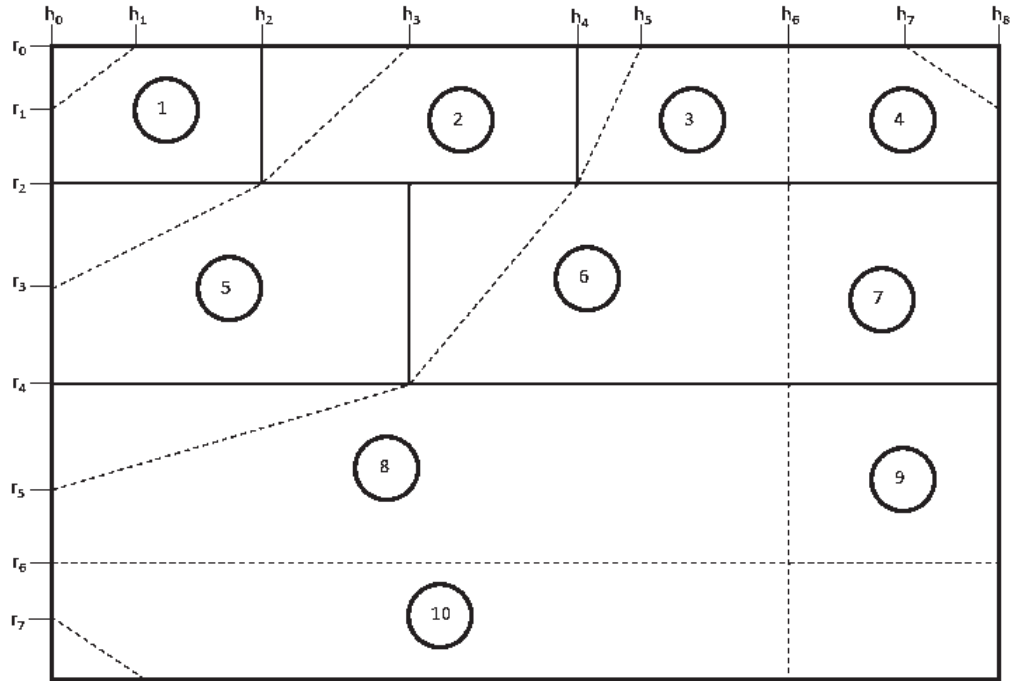


Figura 5.9: Vista cualitativa de la función $\text{Sen}(x,y)$.

derivada cero y muestra los valores cualitativos de las variables r y h .

Con esta información se genera la representación cualitativa como se muestra a continuación:

- Variables $V = \{r, h, x\}$.
- $QS = \{r = \{r_0, r_1, r_2, \dots, r_7\}, h = \{h_0, h_1, h_2, h_3, \dots, h_8\}, x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{34}\}\}$.
- $F = \{R_1, R_2, \dots, R_{10}\}$

Y defimos a $R_1 = \{S_1, S_2, S_3\}$ como:

- $S_1 = \langle ((r_1, r_2), (h_1, h_2)), (M + (r, h), (r_1, h_1), (r_2, h_2)), \rangle, \langle ((r_1, h_1, x_1), (r_2, h_1, x_2), (r_1, h_2, x_3)), (+, +) \rangle$
- $S_2 = \langle ((r_1, r_2), (h_1, h_2)), (M + (r, h), (r_1, h_1), (r_2, h_2)), =, \langle ((r_2, h_1, x_2), (r_1, h_2, x_3)), (0, 0) \rangle$

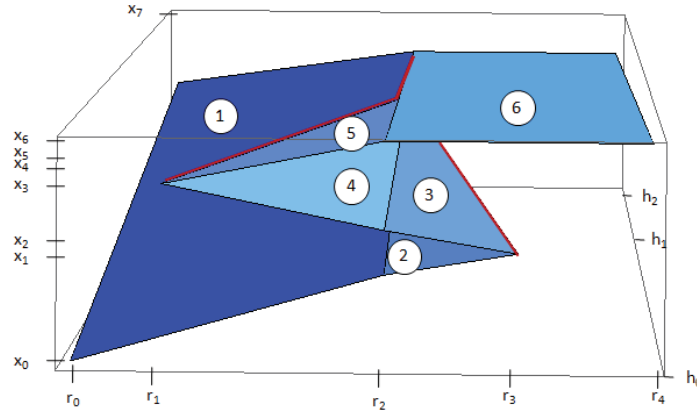


Figura 5.11: Diagrama de bifurcación cualitativo de la Figura 5.10.

tativas diferentes de cero, y tres segmentos con derivada cero (linemarks). El diagrama cualitativo se ilustra en la Figura 5.10, las líneas rojas representan a los linemarks identificados.

La representación cualitativa está definida por:

- Variables $V = \{r, h, x\}$.
- $QS = \{r = \{r_0, r_1, r_2, r_3, r_4\}, h = \{h_0, h_1, h_2\}, x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\}$.
- $F = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9\}$
- $S_1 = \langle ((r_0, r_2), (h_0, h_2)), ((r_0, h_0, x_0), (r_2, h_0, x_1), (r_0, h_2, x_3), (r_2, h_2, x_3)), (+, +) \rangle$
- $S_2 = \langle ((r_2, r_3), (h_0, h_1)), (M - (r, h), (r_3, h_0), (r_2, h_1)), \langle, ((r_2, h_0, x_1), (r_3, h_0, x_2), (r_2, h_1, x_5)), (+, +) \rangle$
- $S_3 = \langle ((r_2, r_3), (h_0, h_1)), (M - (r, h), (r_3, h_0), (r_2, h_1)), \langle, ((r_2, h_0, x_3), (r_3, h_0, x_2), (r_2, h_1, x_5)), (-, -) \rangle$

- $S_4 = \langle ((r_1, r_2), (h_0, h_1)), (M + (r, h), (r_1, h_0), (r_2, h_1)), \langle, ((r_2, h_0, x_3), (r_1, h_0, x_4), (r_2, h_1, x_5)), (-, -) \rangle \rangle$
- $S_5 = \langle ((r_1, r_2), (h_0, h_1)), (M + (r, h), (r_1, h_0), (r_2, h_1)), \langle, ((r_2, h_0, x_6), (r_1, h_0, x_4), (r_2, h_1, x_5)), (+, -) \rangle \rangle$
- $S_6 = \langle ((r_2, r_4), (h_0, h_2)), ((r_2, h_0, x_6), (r_2, h_2, x_7), (r_4, h_0, x_6), (r_4, h_2, x_7)), (-, -) \rangle \rangle$
- $S_7 = \langle ((r_2, r_3), (h_0, h_1)), (M - (r, h), (r_3, h_0), (r_2, h_1)), =, ((r_3, h_0, x_2), (r_2, h_1, x_5)), (0, 0) \rangle \rangle$
- $S_8 = \langle ((r_1, r_2), (h_0, h_1)), (M + (r, h), (r_1, h_0), (r_2, h_1)), =, ((r_1, h_0, x_4), (r_2, h_1, x_5)), (0, 0) \rangle \rangle$
- $S_9 = \langle ((r_2, r_2), (h_1, h_2)), (M + (r, h), (r_2, h_1), (r_2, h_2)), =, ((r_2, h_1, x_5), (r_2, h_2, x_6)), (0, 0) \rangle \rangle$

5.3. Conclusiones

En este capítulo se ilustraron dos ejemplos de la metodología propuesta en el capítulo anterior. Un ejemplo de una función $f = \text{Seno}(xy)$ y otro ejemplo un diagrama de bifurcación en tres dimensiones definido por $\dot{x} = h + rx - x^3$.

En el ejemplo de la función $f = \text{Seno}(xy)$, inicia determinando las derivadas cualitativas de cada punto de la función utilizando el filtro descrito en la sección 4.3 de este documento. Identifica y corrige las áreas falsas detectadas, para después dividir la función en regiones rectangulares utilizando las reglas descritas en la sección 4.6; las regiones rectangulares deben de cumplir las características descritas en la sección 4.2. Para cada región se identifican y ajustan los landmarks de acuerdo a los casos descritos en la sección 4.7. Finalmente para mantener la continuidad entre regiones se realiza una identificación de linemarks. Con la información obtenida se genera la representación cualitativa de la función.

En el caso del diagrama de bifurcación inicialmente fue necesario segmentar el diagrama manualmente, se realizó el proceso de cualitativizar en cada segmento y después se unió manualmente.

Los experimentos fueron realizados en la plataforma de Mathematica 6 [Mathematica 1999].

Capítulo 6

Conclusiones

El Razonamiento cualitativo intenta inferir el comportamiento de un sistema con poca información del mismo, la resolución y la composicionalidad son temas clave del razonamiento cualitativo. Se propuso una representación cualitativa partiendo del principio de resolución que define el nivel de detalle de la representación necesario para inferir el comportamiento del sistema.

Se sabe que no existe una representación única, mejor, universal, sino una gran variedad de estas, cada una con sus ventajas y desventajas dependiendo de la tarea a la que se aplica.

En este trabajo de tesis se propuso una representación cualitativa para funciones en tres dimensiones, tomando de base las representaciones propuestas en trabajos anteriores como los realizados por kuipers [Kuipers 1994, Kuipers 1986, Kay 2000], Flores [Flores 2006] y Ortiz [Ortiz 2009].

Dada la representación cualitativa se estableció una metodología que genera la representación cualitativa propuesta. Partiendo de un arreglo bi-dimensional, el cual contiene los puntos de la función.

La metodología inicia determinando las derivadas cualitativas para cada punto contenido en el arreglo bi-dimensional. Este proceso se realiza utilizando un filtro cualitativo de ruido. El filtro es necesario debido a que los datos obtenidos pueden contener errores provenientes de ruido, imprecisión

numérica, etc.

Con las derivadas cualitativas obtenidas se realiza la identificación de regiones con características particulares definidas en la sección de Representación Cualitativa. Por cada región identificada se obtienen los landmarks que parten a la región en segmentos con derivadas cualitativas iguales. Este segmento que parte a los dos segmentos tiene derivada cero.

En ocasiones los landmarks obtenidos no cazan con aquellos de la región adyacente. Por lo que para mantener la continuidad y reducir el número de landmarks se realiza un ajuste en ellos.

Se continúa identificando segmentos con derivada cero o linemarks que aun no han sido identificado. Con esta información se procede a generar la representación cualitativa de la función.

Existen otros propósitos utilizados en la cualitativización de funciones, pero son aplicados a otros dominios. En nuestro caso, se necesita una representación cualitativa de una función para representar un diagrama de bifurcación, para razonar acerca del sistema. Ejemplos de este tipo se pueden encontrar en Flores y Proskurowski [Flores 2006], y Ortiz [Ortiz 2009].

En el trabajo realizado por Ortiz [Ortiz 2009], se realiza la simulación cualitativa de un diagrama de bifurcación en tres dimensiones. La representación cualitativa en su trabajo es realizada manualmente, el propuso una representación cualitativa con forma rectangular. Al tratar de generar una representación cualitativa utilizando su representación se presentaton problemas; dado que con la representación solo se pueden representar diagramas con forma rectangular. La representación propuesta en este trabajo resuelve estos problemas.

La representación cualitativa propuesta en este trabajo fue dirigida a funciones y no funciones en tres dimensiones; aunado a esto se propuso una metodología, la cual genera la representación cualitativa de la función. Sin embargo, como trabajo futuro se podrá trabajar en extender la metodología para que genere la representación cualitativa un diagrama de bifurcación en

tres dimensiones que no cumpla con las propiedades de una función. Por ejemplo la Figura 5.11 presenta un doblés que hace que x no sea una función (en el sentido matemático de la definición de función de r y h). Por lo que se queda como tema pendiente de este trabajo.

Además como trabajo futuro, se podría buscar la manera de extender la representación y la metodología de obtención de la representación cualitativa para diagramas de bifurcación de más de tres dimensiones.

Bibliografía

- [Kuipers 1994] Benjaming Kuipers.: Qualitative Reasoning. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1994.
- [Kay 2000] Herbert Kay, Bernhard Rinner, Benjamin Kuipers.: Semi-Qualitative System Identification, Artificial Intelligence 119 (2000), 103 - 140.
- [Forbus 1996] Kenneth D. Forbus.: Qualitative Reasoning, Chapter for the CRC Handbook of Computer Science, 1996.
- [Roselló 2007] Lorenc Roselló, Monica Sánchez, Nuria Angell, Francesc Prats.: Learning Financial Rating Tendencies with Qualitative Tress, American Association for Artificial Intelligence, 2007.
- [Forbus 1984] Kenneth D. Forbus.: Qualitative Process Theory, Artificial Intelligence 24 (1984) 85 - 168.
- [Kuipers 1986] Benjamin Kuipers.: Qualitative Reasoning, Artificial Intelligence 29 (1986) 289 - 338.
- [Strogatz 2000] Steven H. Strogatz.: Nonlinear Dynamics and Chaos, Westview Press, 2000.

- [Flores 2006] Juan J. Flores and Andrzej Proskurowski.: Qualitative Reasoning and Bifurcations in Dynamic Systems, MICAI 2006: Advances in Artificial Intelligence.
- [Ortiz 2009] 5 Ortiz Jose.: Simulacion cualitativa sobre diagramas de bifurcación, Masters Degree Tesis, Universidad Michoacana.
- [Barrera 2008] Julio Barrera, Juan Flores, Claudio Fuerte.: Generating complete bifurcation diagrams using a dynamic environment particle swarm optimization algorithm, Journal of Artificial Evolution and Applications, 2008.
- [Ermentrout 2002] Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to Xppaut for Researchers and Students, Bard Ermentrout, 2002.
- [Mathematica 1999] 16 Wolfram S.: The Mathematica Book, Cambridge press, ISBN: 0-521-64314-7 (1999).