



UNIVERSIDAD MICHOCANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TESIS:

DISPERSIÓN NO ESTACIONARIA
DE ONDAS PLANAS SOBRE CUÑAS BIDIMENSIONALES

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ANEL ESQUIVEL NAVARRETE

ASESOR:

DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS ANATOLI MERZON

MORELIA, MICHOCÁN; JUNIO DE 2014

Índice general

1. El método de las características complejas	15
1.1. Planteamiento del problema de dispersión	15
1.2. Reducción al problema “estacionario” con parámetro	17
1.3. Reducción del problema en el plano	19
1.3.1. Reducción del problema al primer cuadrante	19
1.3.2. Extensión al plano. Datos de Cauchy	21
1.4. Transformada de Fourier	24
1.5. La ecuación de conexión y la fórmula general de la solución	25
1.5.1. Levantamiento sobre la cubierta universal	26
1.5.2. Ecuación de Conexión	28
1.5.3. La forma de la solución en los términos de los datos de Cauchy	29
1.6. Reducción a la ecuación en diferencias	30
1.6.1. Eliminación de dos datos de Cauchy en la ecuación de conexión	30
1.6.2. Automorfismos	33
1.6.3. La ecuación en diferencias	33
2. Solución explícita del Problema de Neumann	37
2.1. Solución particular del sistema (1.83)	37
2.2. Solución del sistema homogéneo correspondiente a (1.83)	39
2.3. La solución “correcta” del sistema (1.83)	42
2.4. La solución del problema estacionario con parámetro	43
2.5. Representación de la Transformada de Fourier-Laplace del campo total “estacionario”	44
2.6. Descomposición de \hat{u} en las densidades de las ondas incidente, reflejada y difractada	47
2.7. Fórmula explícita para la onda difractada	54
2.7.1. Transformada de Fourier-Laplace inversa de la función $\hat{w}_d(\rho, \theta, t)$	54
2.7.2. Demostración de la representación para la onda difractada	55
2.8. El campo total para el problema de Neumann	56
3. Propiedades de la solución del problema de Neumann y aplicaciones	59
3.1. El Principio de Amplitud Límite	59
3.2. La velocidad de convergencia de la amplitud límite	63
3.3. El caso del semiplano	66

4. Anexo	69
4.1. Anexo A1. Algunas relaciones entre los ángulos α y Φ	69
4.2. Anexo A2. Algunos hechos de las funciones trigonométricas	70
4.3. Anexo A3. Aplicación del Operador de Laplace a la función discontinua v_τ	71
4.4. Anexo A4. Algunas identidades de la trigonometría hiperbólica	75
4.5. Anexo A5. Propiedades de la función H_N	76
4.6. Anexo A6. Saltos de las ondas reflejada y drifractada sobre las direcciones “críticas”	80
4.7. Anexo A7. Ayuda para el comportamiento asintótico de la solución	81

Resumen

RESUMEN

Esta tesis está enfocada a la descripción matemática del proceso de dispersión no estacionaria de ondas planas sobre cuñas bidimensionales. Esta dispersión (o difracción) se describe mediante un problema mixto en el que aparecen la ecuación de onda, las condiciones de frontera y las condiciones iniciales. En este caso abordaremos el problema NN (Neumann-Neumann) que corresponde al caso en que ambas condiciones de frontera satisfacen el operador de Neumann. Para obtener una representación de la Transformada de Fourier-Laplace del campo total estacionario se aplica el Método de las Características Complejas. Con ello se da una descomposición de dicha transformada en la suma de las densidades de las ondas incidente, reflejada y difractada. Uno de los grandes logros de esta tesis es el de dar una fórmula explícita para la onda difractada por el vértice de la cuña, la cual nos permite establecer el campo total para el problema de Neumann. También se analizan algunas propiedades de la solución como el Principio de Amplitud Límite y la velocidad de la convergencia de dicha amplitud límite. Se comparan nuestros resultados con los de artículos previos relativos al mismo tema en el caso del semiplano.

PALABRAS CLAVE: Dispersión, Cuña, Neumann, Ondas planas, Problema mixto, Fórmula exacta, Amplitud Límite.

ABSTRACT

This work focuses on the mathematical description of the process of non-stationary scattering of plane waves on bidimensional wedges. This scattering (or diffraction) is described by a mixed problem where we have the wave equation, the boundary conditions and the initial conditions. Here we will solve the NN-problem (Neumann-Neumann problem) which corresponds to the case where both boundary conditions satisfy the Neumann operator. To obtain a representation of the Fourier-Laplace transform of the total stationary field we use the Method of the Complex Characteristics. We decompose the mentioned transform as the sum of the densities of the incident, reflected and diffracted waves. One of the great achievements of this thesis is to give an explicit formula for the wave diffracted by the vertex of the wedge, which allows us to establish the total field for the Neumann problem. Also, some properties of the solution like the limit amplitude principle and speed of convergence of the limit amplitude are discussed. We compare our results with those of previous articles on the same subject in the case of the half-plane.

KEYWORDS: Scattering, Wedge, Neumann, Plane waves, Mixed Problem, Exact Formula, Amplitude Limit.

Introducción

La tesis está dedicada a la descripción matemática del proceso de dispersión no estacionaria de ondas planas sobre cuñas bidimensionales.

Consideramos las ondas planas

$$u_{in}(y, t) := F(t - \mathbf{n}_0 \cdot y), \quad (0.1)$$

para $t \in \mathbb{R}$, $y \in Q$, donde F en general es una distribución temperada y

$$\text{supp } F \subset [0, +\infty). \quad (0.2)$$

La distribución que se indica en (0.1) tiene sentido (ver [18]). En (0.1), $\mathbf{n}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, α es el ángulo de incidencia de la onda u_{in} y $Q := \mathbb{R}^2 \setminus W$, donde

$$W := \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = \rho \cos \theta, y_2 = \rho \sin \theta, \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq \phi\}$$

es la cuña de magnitud

$$\phi \in (0, \pi) \quad (0.3)$$

y Q es el ángulo de magnitud

$$\Phi := 2\pi - \phi, \quad \Phi \in (\pi, 2\pi). \quad (0.4)$$

La frontera de la cuña es $\partial Q = Q_1 \cup Q_2$, donde $Q_1 := \{(y_1, 0) : y_1 > 0\}$ y $Q_2 := \{(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) : \rho > 0\}$, (véase la Figura 1).

La dispersión (o la difracción) de la onda (0.1) se describe por el siguiente problema mixto

$$\begin{cases} \square u(y, t) = 0, & y \in Q; & B u(y, t)|_{\partial Q} = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(y, t) = u_{in}(y, t), & y \in Q, & t < 0. \end{cases} \quad (0.5)$$

Aquí $\square := \partial_t^2 - \Delta$, $B = (B_1, B_2)$ y $B u|_{\partial Q} = (B_1 u|_{\partial Q_1}, B_2 u|_{\partial Q_2})$, donde $B_{1,2}$ son operadores lineales que pueden ser el operador identidad I , el operador de Neumann $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ (donde \mathbf{n} es un vector normal exterior a Q) o bien una combinación lineal de estos dos operadores.

El problema DD (Dirichlet-Dirichlet) corresponde al caso $B_1 = B_2 = I$. El problema NN (Neumann-Neumann) corresponde al caso $B_1 = B_2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$. El problema DN (Dirichlet-Neumann) corresponde al caso $B_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$, $B_2 = I$.

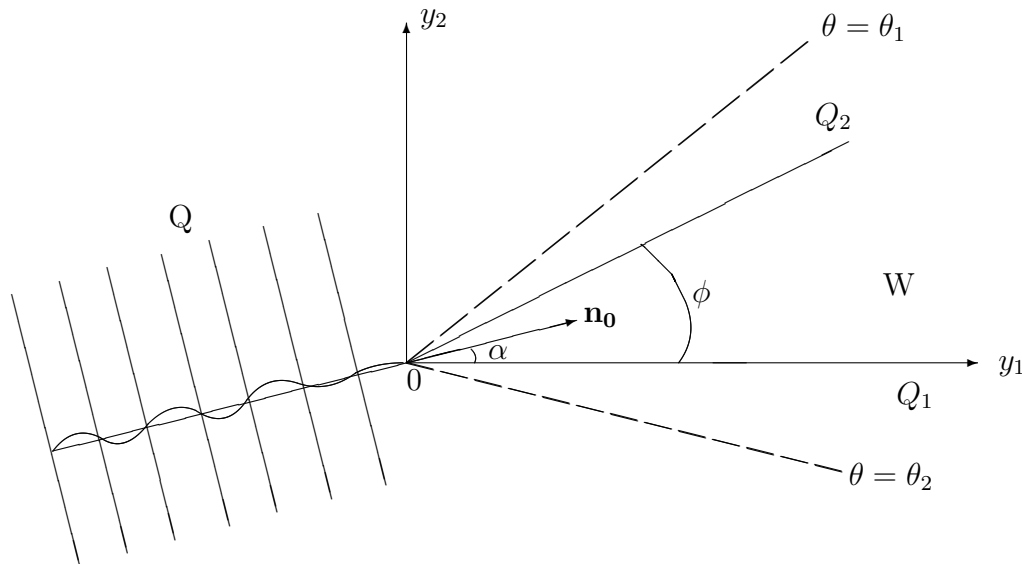


Figura 1. La onda incidente

Si u es solución del problema (0.5), entonces diremos que u es **el campo total**, véase la Figura 2.

El problema que se describe mediante el sistema (0.5) tiene el siguiente sentido físico. La onda incidente u_{in} (0.1) tiene un frente delante del cual $u_{in} = 0$. Esto se satisface pues $F(s) = 0$, para $s \leq 0$, por (0.2).

Supongamos que el vector de onda \mathbf{n}_0 es como se muestra en la Figura 1. En este caso para los valores del tiempo $t < 0$, la onda u_{in} no ha tocado a la cuña. En el momento $t = 0$, la onda incidente toca por primera vez a la frontera de la cuña W en su vértice y en ese momento comienza a interactuar con la cuña W . La naturaleza de la onda puede ser de distintos tipos: la onda electromagnética, la onda de sonido, la onda elástica, etc.

Las propiedades físicas de la cuña determinan el carácter de la interacción de la onda con la cuña. En electromagnetismo las condiciones DD y NN corresponden a una cuña perfectamente conductiva. Estas condiciones también se conocen como las condiciones ideales. En acústica estas condiciones corresponden al caso de la cuña idealmente rígida o idealmente suave, las condiciones DN corresponden al caso cuando un lado de W es rígido y el otro es suave. Las condiciones del tercer tipo corresponden al caso de la cuña impedance en electromagnetismo.

En todos los casos aparecen las ondas reflejadas por los lados Q_1 y Q_2 de la cuña W y la onda difractada por el vértice de la cuña W (véase la Figura 2). Las ondas reflejadas u_r se construyen según las leyes de óptica de tal forma que las condiciones de frontera se cumplen para la suma $B(u_{in} + u_r)|_{\partial Q} = 0$. La onda difractada u_d no se calcula tan fácil, de hecho su cálculo representa gran interés y gran dificultad.

En la Figura 2 se representan esquemáticamente a las ondas difractada, reflejada e incidente. La línea recta que se encuentra del lado derecho y que intersecta al ángulo, es el frente de a onda incidente en el tiempo $t > 0$. Los segmentos de línea recta que conectan los lados del ángulo con las direcciones $\theta = \theta_{1,2}$ (a las que llamaremos las direcciones críticas) son los frentes de las ondas reflejadas por los lados de acuerdo a la óptica geométrica. Aquí

$$\theta_1 := 2\phi - \alpha, \quad \theta_2 := 2\pi - \alpha. \quad (0.6)$$

Los círculos son los frentes de las ondas difractadas por el vértice. Esta última onda tiene discontinuidades en las líneas $\theta = \theta_{1,2}$ las cuales se compensan precisamente por las ondas reflejadas de tal forma que el campo total resulta ser continuo.

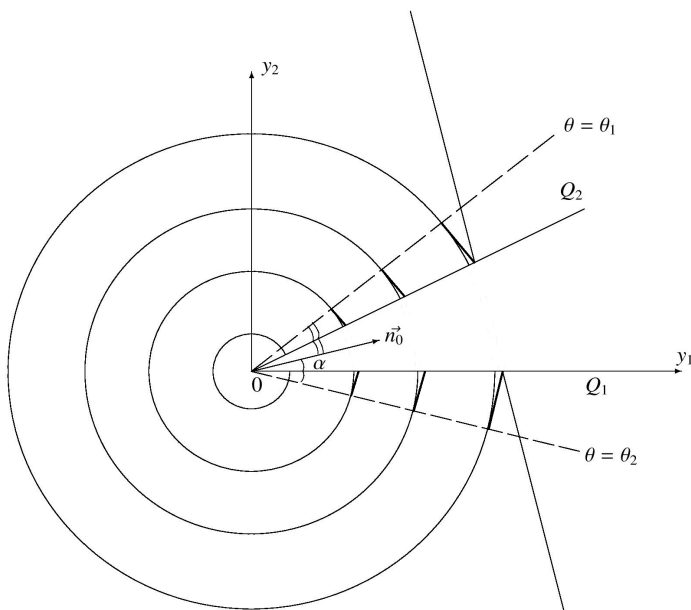


Figura 2. El campo total.

La onda reflejada u_r es el resultado de las reflexiones ópticas y están expresadas explícitamente por las condiciones de frontera (ver las fórmulas [22, (9)] y [34, (1.9)]). Así que el interés más grande y la mayor dificultad es la de encontrar u_d la onda difractada por el vértice de la cuña.

Muchos trabajos están dedicados a la teoría matemática de difracción de ondas planas sobre cuñas bidimensionales. La primera etapa fue el desarrollo de la teoría de difracción estacionaria, tema que fue propuesto por Sommerfeld [45] y que marcó el inicio de una colección de artículos dedicados al mismo tema. El problema de difracción estacionaria considera el proceso establecido cuando para valores grandes de t la onda u_{in} es periódica con respecto de t y con respecto de las variables del espacio. Esto puede suceder por ejemplo cuando

$$F(s) = A e^{-i\omega_0 s} f(s), \quad (0.7)$$

donde A es una constante, $\omega_0 \geq 0$ es la frecuencia de la onda incidente y la función f es tal que

$$f(s) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{supp } f \subset [0, +\infty), \quad f(s) = 1, \quad s \geq s_0, \quad \text{para algún } s_0 > 0. \quad (0.8)$$

En este caso

$$u_{in}(y, t) = A e^{-i\omega_0(t - \mathbf{n}_0 \cdot y)} f(t - \mathbf{n}_0 \cdot y), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (0.9)$$

Notemos que para valores grandes de t , $u_{in}(y, t) = e^{-i\omega_0 t} \cdot A e^{i\omega_0(\mathbf{n}_0 \cdot y)}$; es decir u_{in} tiene la forma $e^{-i\omega_0 t} A(y)$, donde $A(y)$ es la amplitud de la onda u_{in} . Entonces la teoría de

difracción estacionaria supone que la solución u tiene la misma forma, es decir es una función periódica con respecto de t dada por

$$u(y, t) = e^{-i\omega_0 t} A(y), \quad (0.10)$$

donde $A(y)$ es la amplitud de la solución $u(y, t)$. Por lo tanto, en lugar del problema no estacionario (0.5) se considera el problema estacionario para las amplitudes, el cual es el problema de frontera para la ecuación de Helmholtz

$$\begin{cases} (\Delta - \omega_0^2)A(y) = 0, & y \in Q; \\ B A(y)|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \quad (0.11)$$

Este problema (0.11) se obtiene de (0.5) cuando buscamos una solución u en la forma (0.10). Precisamente este sistema (0.11) fue el objeto de estudio en los trabajos dedicados a la teoría de difracción estacionaria sobre cuñas, véase por ejemplo [1]-[6], [9]-[11], [13], [29], [30], [32], [33], [36],[37], [46]. Sin embargo, desde el punto de vista matemático, el problema (0.11) no está bien planteado ya que formalmente este sistema homogéneo tiene una infinidad de soluciones y no es claro cómo elegir la solución correcta. En [45] Sommerfeld propuso un método bastante artificial para encontrar la solución para la difracción sobre el semiplano ($\Phi = 2\pi$). Este es el método de las soluciones ramificadas, es decir, las soluciones de la ecuación de Helmholtz sobre una superficie de Riemann. Otra idea de Sommerfeld es representar a la amplitud de la onda incidente (0.7) en la forma

$$A_{in}(\rho, \theta, \alpha) = A e^{i\omega_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{y}} = A e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta - \alpha)}, \quad \mathbf{y} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta). \quad (0.12)$$

y considerar a A no como una constante, sino como una función $A(\alpha)$ que depende del ángulo de incidencia α . Integrando $A_{in}(\rho, \theta, \alpha)$ sobre un contorno apropiado, se obtiene

$$Z(y) = \int_{\gamma} A(\mu) e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta - \mu)} d\mu. \quad (0.13)$$

Es fácil probar que Z satisface la ecuación de Helmholtz en (0.11). Eligiendo un contorno apropiado γ se puede encontrar una solución u que satisfaga las condiciones de frontera del tipo DD o NN sobre ∂Q . Además Sommerfeld propuso algunas condiciones del comportamiento de la solución en ∞ (las condiciones de Sommerfeld de radiación) y las condiciones sobre la orilla de la cuña que se siguen de las ideas físicas. Las ideas de Sommerfeld (más bien sus ideas de representar las soluciones en la forma (0.13)) fueron desarrolladas por Malyuzhinets en [29] y [30], donde resolvió el problema para la cuña $\pi < \Phi < 2\pi$ y para las condiciones de frontera del tipo impedance.

Las integrales del tipo (0.13) después recibieron el nombre de integrales del tipo Sommerfeld-Malyuzhinets. Existe gran bibliografía dedicada al desarrollo del método de Sommerfeld-Malyuzhinets para la difracción estacionaria, véase por ejemplo [1]-[6], [10]-[11], [37], [46].

La segunda etapa del desarrollo de la teoría de difracción sobre cuñas se conecta con un planteamiento del problema más estricto: consideremos el problema de difracción (dispersión) no como un problema estacionario, sino como un problema de propagación de onda cuando la solución obedece a la ecuación de onda (0.5). Este planteamiento juega un papel muy importante en la teoría de elasticidad. El inicio de esta dirección se propuso en los trabajos de Sobolev [42]-[44]. Las soluciones de Sobolev se obtuvieron mediante su

original método de las soluciones ramificadas de una ecuación de onda sobre una superficie de Riemann (la idea de este método inició con el método de Sommerfeld de la solución del problema estacionario) el cual hasta el día de hoy no está justificado. En [44] Sobolev obtuvo la solución de (0.5) para el problema DD. El método de Sobolev nos permite construir una clase de soluciones para la ecuación homogénea de onda en la forma

$$f(\zeta) \tag{0.14}$$

donde f es una multifunción compleja con el punto de ramificación $\zeta = 0$ y ζ es una solución de una ecuación algebraica. En el caso de la difracción por una cuña, esta se localiza en una superficie de Riemann logarítmica y se considera la difracción de esta superficie. Así que, para los problemas DD y NN, el problema (0.5) se reduce a encontrar la solución periódica de la ecuación de onda sobre la superficie de Riemann (usando el método de paridad o imparidad, las soluciones de (0.5) se extienden a toda la superficie de Riemann dependiendo de las condiciones de frontera del tipo Dirichlet o del tipo Neumann). En el caso del problema de difracción, la función f debe satisfacer algunas condiciones que provienen de las propiedades físicas del problema de dispersión. Además cuando el perfil de la onda incidente es la función de Heaviside, esta se mueve de manera paralela al eje x para $t < 0$. Esta función que se extiende por cero a lo largo de la superficie de Riemann logarítmica, es una solución periódica generalizada de la ecuación de onda sobre la superficie de Riemann para $t < 0$ y satisface las condiciones de frontera homogéneas del tipo DD.

Más aún, esta función admite la representación (0.14) para $t < 0$ para alguna función f . La misma representación para $t > 0$ nos da una solución periódica para la ecuación de onda sobre la superficie de Riemann que satisface las condiciones de frontera homogéneas del tipo DD. Esta función es solución para el problema de difracción por una cuña. La solución para una onda plana incidente arbitraria $f(at + x)$ (que se mueve en la misma dirección) se sigue de la solución obtenida por la función Θ por medio de la integral tipo convolución con f' . Se supone que f es absolutamente continua. La clase de soluciones no se puede describir formalmente y la unicidad de la solución no se probó.

En [20] Keller y Blank también consideraron la difracción de ondas por una cuña cuando la onda incidente tiene el perfil de la función de Heaviside. Por el “Método de Flujo Cónico” el problema se reduce a la solución del problema con valores en la frontera para la ecuación de Laplace en un círculo con valores constantes a trozos sobre la frontera. La solución obtenida coincide con la solución de Sobolev. Todos los casos de incidencia están considerados y todas las fórmulas de la solución total están dadas, incluyendo la dispersión dentro de la cuña. En [20] también se obtuvo una solución formal para una onda incidente arbitraria usando el Teorema de Duhamel. Esta solución está dada en forma de una serie. No hay clases de soluciones y tampoco se garantiza algún teorema de unicidad en [20].

En [39] Rottbrand consideró la difracción de la onda plana $G(t) = \theta(t) \int_0^t g(\tau) d\tau$, donde g es una función integrable por la cuña del tipo DN. En el artículo [31], se menciona la posibilidad de obtener la solución para las condiciones de frontera del tipo DD y del tipo NN.

Por medio de la transformación de conformación, el ángulo se transforma al plano con el corte dado por el eje real positivo. Esto proporciona una ecuación de onda transformada linealmente con respecto de las coordenadas polares. El correspondiente problema mixto

con condiciones iniciales de frontera del tipo Rawlins se resolvió explícitamente en [40] usando el método del operador de Wiener-Hopf.

La solución para la onda incidente $F(s) = (s^{-\frac{1}{2}})_+$ se construyó en [7] por Borovikov quien usó esta fórmula para reproducir la solución de Sobolev expuesta en [43] y [44].

En todos los artículos mencionados no se indica explícitamente la clase de unicidad de las soluciones. Cada vez se busca (y se encuentra) una solución particular que satisfaga algunas propiedades que se siguen de las propiedades físicas del problema.

En los artículos [14], [21], [22] y [34] se inició el estudio sistemático del problema (0.5) como un sistema mixto, apuntando a la realización del problema de Hadamard. Una de las motivaciones principales fue la de demostrar el Principio de Amplitud Límite. Este principio permite interpretar la difracción estacionaria (0.11) como el caso límite de la difracción no estacionaria cuando $t \rightarrow +\infty$. En este caso es suficiente establecer una clase natural de soluciones para las ecuaciones de (0.5) para justificar las soluciones físicas de (0.5), incluso las condiciones de radiación de Sommerfeld, etc.

En [14], [21], [22] y [34] tal problema fue resuelto para los problemas DD y DN. El método que se usó fue el método de las características complejas expuesto en [21]-[24] y [34], y que su creador Komech aplicó por primera vez en [27] y [28]. Este método, a diferencia de los demás, permite describir **todas** las soluciones en el espacio \mathcal{S}' de las distribuciones temperadas.

Usando este método, en esta tesis resolvemos el problema para el caso de una cuña del tipo NN (Capítulo II).

Notemos que el problema tipo NN no fue considerado en los artículos [14], [21], [22] y [34], porque las representaciones para las soluciones obtenidas en [14], [21], [22] y [34] no sirven en el caso de las cuñas tipo NN (véase la fórmula (2.40), la cual no es válida para $\omega \in \mathbb{R}$). Estas representaciones requieren algunas modificaciones apropiadas para las cuñas tipo NN las cuales se realizan en la tesis (véase también [15, secciones 4 y 5]). Gracias a este se puede obtener una fórmula universal para la onda difractada por la orilla de la cuña que sirve para todos los casos. Esta fórmula resultó muy conveniente para obtener características cuantitativas de las ondas dispersas, ver [12]. En la tesis damos la velocidad de la convergencia de la amplitud a la amplitud límite de la solución.

En la tesis estudiamos la siguiente versión del problema (0.5)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \square u(y, t) = 0, & \text{si } y \in Q \\ \partial_{y_2} u(y, t) = 0, & \text{si } y \in Q_1 \\ \partial_{\mathbf{n}_2} u(y, t) = 0, & \text{si } y \in Q_2 \end{array} \right| t > 0 \quad (0.15)$$

con las condiciones iniciales

$$u(y, t) = u_{in}(y, t), \quad y \in Q, \quad t < 0. \quad (0.16)$$

Aquí \mathbf{n}_2 es un vector normal a Q_2 , externo a Q (ver la Figura 1) y u_{in} tiene la forma (0.1).

Los capítulos de la tesis están organizados de la siguiente manera.

En el Capítulo 1, desarrollamos el método de las características complejas para obtener una solución del problema (0.15).

En el Capítulo 2, resolvemos el problema (0.15) y demostramos la unicidad de dicha solución en una clase funcional.

En el Capítulo 3, analizamos las propiedades de la solución.

En el Anexo mostramos algunos hechos técnicos que se utilizaron en cada uno de los procesos de los capítulos previos.

Bibliografía.

Capítulo 1

El método de las características complejas

1.1. Planteamiento del problema de dispersión

Consideramos la onda incidente $u_{in}(y, t)$ de la forma (0.1). Obviamente su frente en cualquier momento es la línea recta $\{y \in \mathbb{R}^2 : t - \mathbf{n}_0 \cdot y = 0\}$. Para $\mathbf{n}_0 \cdot y > t$, $u_{in}(y, t) = 0$ por (0.2). Asumimos las siguientes condiciones sobre el vector \mathbf{n}_0 . Primero, suponemos que $\phi - \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Entonces el frente de $u_{in}(y, t)$ para $t \leq 0$ se localiza fuera de $W \setminus \{0\}$. En segundo lugar, suponemos que la onda incidente se refleja por ambos lados de la cuña. Esto es equivalente a la condición $0 < \alpha < \phi$. Estas dos condiciones para el vector \mathbf{n}_0 se expresan por las desigualdades

$$\max \left\{ \phi - \frac{\pi}{2}, 0 \right\} < \alpha < \min \left\{ \frac{\pi}{2}, \phi \right\}. \quad (1.1)$$

La extensión de nuestros resultados para otro tipo de ángulos Φ y α no tienen grandes dificultades. En particular las fórmulas (2.45) y (2.76) siguen siendo válidas para cualesquiera ángulos Φ y α , (ver la Figura 1).

Denotemos por $u(y, t)$ a una solución del problema (0.15) y por

$$u_s(y, t) := u(y, t) - u_{in}(y, t), \quad t \in \mathbb{R}, y \in Q. \quad (1.2)$$

a **la onda dispersa**, esta onda es el resultado de la interacción de la onda incidente u_{in} (dada por (0.1)) con la cuña. Obviamente, el campo total u es la suma de la onda dispersa u_s y de la onda incidente u_{in} . Como veremos más adelante, u_s consiste de la onda reflejada u_r y la onda difractada por la orilla de la cuña, u_d , (véase (2.44)). De tal forma que por (1.2) y (0.15), u_s es una solución para el siguiente problema mixto

$$\left\{ \begin{array}{ll} \square u_s(y, t) = 0, & y \in Q \\ \partial_{y_2} u_s(y, t) = -\partial_{y_2} u_{in}(y, t), & y \in Q_1 \\ \partial_{\mathbf{n}_2} u_s(y, t) = -\partial_{\mathbf{n}_2} u_{in}(y, t), & y \in Q_2 \end{array} \right| t > 0, \quad (1.3)$$

con las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} u_s(y, 0) = 0 \\ \dot{u}_s(y, 0) = 0 \end{array} \right| y \in Q. \quad (1.4)$$

En general, F puede ser una función discontinua (por ejemplo una Θ -función), por ello es necesario definir el significado de este problema mixto. Para este fin introducimos los espacios de distribución apropiados.

Definición 1.1. Denotamos a los espacios normados numerables:

$$\text{I) } \mathcal{S}(\overline{Q} \times \mathbb{R}) := \{\varphi(y, t) \in C^\infty(\overline{Q} \times \mathbb{R}) : \|\varphi\|_{m, N} = \sup_{(y, t) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}} (1 + |y| + |t|)^N |\partial_{y, t}^\alpha \varphi(y, t)| < \infty\}.$$

$$\text{II) } \mathcal{S}(\overline{Q}) := \{\varphi(y) \in C^\infty(\overline{Q}) : \|\varphi\|_{m, N} = \sup_{y \in \overline{Q}} (1 + |y|)^N |\partial_y^\alpha \varphi(y)| < \infty\}.$$

Ahora definimos el espacio $\mathcal{S}'(\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}^+})$ de las distribuciones temperadas con soporte en $\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}^+}$.

Definición 1.2. $\mathcal{S}'(\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}^+})$ es el espacio de las funcionales lineales continuas en $\mathcal{S}(\overline{Q} \times \mathbb{R})$ con soporte en $\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}^+}$.

Para cada $u \in \mathcal{S}'(\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}^+})$, existen $m, N \geq 0$ tales que

$$|\langle u(y, t), \varphi(y, t) \rangle| \leq C \|\varphi\|_{m, N}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\overline{Q} \times \mathbb{R}). \quad (1.5)$$

Necesitaremos el Teorema del tipo Paley-Wiener para cuñas. Primero introducimos la transformada de Fourier y la transformada de Fourier-Laplace.

Para una función $u(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definimos y denotamos a su transformada de Fourier como

$$\widehat{u}(\omega) := F_{t \rightarrow \omega}[u](\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} u(t) dt, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Por la continuidad, esta transformada se puede extender a las distribuciones temperadas $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Para el caso en el que $\text{supp } u \subset \overline{\mathbb{R}^+}$, la distribución $\widehat{u}(\omega)$ admite una extensión analítica al semiplano superior

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}. \quad (1.7)$$

También utilizaremos la transformada de Fourier compleja en varias variables. Para cada $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, denotaremos

$$\widetilde{u}(\xi) := F_{x \rightarrow \xi}[u](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.8)$$

Además por el Teorema de Paley-Wiener

$$|\widetilde{u}(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^p |\text{Im } \omega|^{-q}, \quad \omega \in \mathbb{C}^+, \quad (1.9)$$

para algunos $p, q \geq 0$. A esta continuación analítica le llamaremos la transformada de Fourier-Laplace de u . Obviamente

$$F_{t \rightarrow \omega}[u^{(k)}(t)](\omega) = (-i\omega)^k \widehat{u}(\omega). \quad (1.10)$$

Recíprocamente, si $G(\omega)$ es una función analítica en \mathbb{C}^+ que satisface (1.9), entonces su valor en la frontera existe cuando $\text{Im } \omega \rightarrow 0+$ en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, véase [26, Thm I.5.2].

Usaremos el siguiente Teorema de Paley-Wiener para distribuciones, el cual resulta ser una generalización directa de [26, Thm I.5.2].

Lema 1.3. I) Sea $u \in \mathcal{S}'(\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}^+})$. Entonces su transformada de Fourier $\widehat{u}(y, \omega)$ se extiende a una función analítica en \mathbb{C}^+ con valores en $\mathcal{S}'(\overline{Q})$ y existen $m, N \geq 0$ tales que

$$|\langle \widehat{u}(y, t), \varphi(y) \rangle| \leq C \|\varphi\|_{m, N} (1 + |\omega|)^m |\operatorname{Im} \omega|^{-N}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\overline{Q}). \quad (1.11)$$

II) Inversamente, sea $\widehat{u}(y, \omega)$ una función analítica de $\omega \in \mathbb{C}^+$ con valores en $\mathcal{S}'(\overline{Q})$ y que satisface la cota (1.5). Entonces $\widehat{u}(y, \omega)$ es la transformada de Fourier-Laplace de una distribución $u \in \mathcal{S}'(\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}^+})$.

Definición 1.4. Denotamos por $HP(\mathbb{C}^+, \mathcal{S}'(\overline{Q}))$ al espacio de Banach de las funciones holomorfas en \mathbb{C}^+ con valores en $\mathcal{S}'(\overline{Q})$ que satisface la cota (1.11) para algunos $m, N \geq 0$.

Introducimos el espacio de soluciones para (1.3).

Definición 1.5. I) E_ε es el espacio de funciones $u(y) \in C(\overline{Q}) \cap C^1(\overset{\circ}{Q})$ con la norma finita dada por

$$\|u\|_\varepsilon = \sup_{y \in \overline{Q}} |u(y)| + \sup_{y \in \overset{\circ}{Q}} \{y\}^\varepsilon |\nabla u(y)| < \infty, \quad (1.12)$$

donde

$$\{y\} := \frac{|y|}{1 + |y|} \quad y \in \overset{\circ}{Q} := \overline{Q} \setminus \{0\}. \quad (1.13)$$

II) \mathcal{M}_ε es el espacio de las distribuciones temperadas $u(y, t) \in \mathcal{S}'(\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}^+})$ tales que su transformada de Fourier-Laplace $\widehat{u}(y, \omega)$ es una función holomorfa de $\omega \in \mathbb{C}^+$ con valores en E_ε .

1.2. Reducción al problema “estacionario” con parámetro

Nuestro primer paso es el de aplicar la Transformada de Fourier-Laplace con respecto de t al sistema (1.3) para reducir el problema no estacionario a un problema “estacionario” con parámetro $\omega \in \mathbb{C}^+$. Para esto primero calculamos las transformadas de Fourier-Laplace de las condiciones de frontera.

Lema 1.6. Sea u_{in} la onda incidente en la forma (0.1). Entonces para cada $\omega \in \mathbb{C}^+$, las siguientes identidades se cumplen

$$\widehat{u}_{in}(y, \omega) := F_{t \rightarrow \omega} \left[u_{in}(y, t) \right] \Big|_{y \in Q} (\omega) = \widehat{F}(\omega) e^{i\omega(\mathbf{n}_0 \cdot y)}, \quad (1.14)$$

$$F_{t \rightarrow \omega} \left[\partial_{y_2} u_{in}(y, t) \right] \Big|_{y \in Q_1} (\omega) = i\omega \widehat{F}(\omega) \sin \alpha e^{i\omega y_1 \cos \alpha}, \quad (1.15)$$

$$F_{t \rightarrow \omega} \left[\partial_{\mathbf{n}_2} u_{in}(y, t) \right] \Big|_{y \in Q_2} (\omega) = -i\omega \widehat{F}(\omega) \sin(\Phi + \alpha) e^{-i\omega y_2 \frac{\cos(\Phi + \alpha)}{\sin \Phi}}, \quad (1.16)$$

donde $\widehat{F}(\omega)$ es la transformada de Fourier compleja de la función $F(s)$.

DEMOSTRACIÓN. Calculando la transformada de Fourier de (0.1) y haciendo el cambio de variable $\eta = t - \mathbf{n}_0 \cdot y$ y tenemos

$$F_{t \rightarrow \omega} [u_{in}(y, t)](\omega) = F_{t \rightarrow \omega} [F(t - \mathbf{n}_0 \cdot y)](\omega) = e^{i\omega(\mathbf{n}_0 \cdot y)} F_{\eta \rightarrow \omega} [F(\eta)](\omega) = e^{i\omega(\mathbf{n}_0 \cdot y)} \widehat{F}(\omega),$$

lo cual prueba (1.14). La definición (0.1) de la onda incidente implica que $u_{in}(y, t) = F(t - y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha)$. Esta última igualdad se entiende en el sentido de distribuciones, véase [18]. Derivando en el sentido de distribuciones obtenemos $\partial_{y_1} u_{in}(y, t) = -\cos \alpha F'(t - y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha)$ y $\partial_{y_2} u_{in}(y, t) = -\sin \alpha F'(t - y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha)$. Calculando la transformada de Fourier de $\partial_{y_2} u_{in}$, haciendo el cambio de variable $\eta = t - \mathbf{n}_0 \cdot y$ y usando (1.10) tenemos

$$\begin{aligned} F_{t \rightarrow \omega} [\partial_{y_2} u_{in}(y, t)](\omega) &= -\sin \alpha e^{i\omega(\mathbf{n}_0 \cdot y)} F_{t \rightarrow \omega} [F'(t - y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha)](\omega) \\ &= i\omega \widehat{F}(\omega) \sin \alpha e^{i\omega(\mathbf{n}_0 \cdot y)}, \quad y \in \mathbb{R}^2, \omega \in \mathbb{C}^+. \end{aligned} \quad (1.17)$$

De aquí que (1.15) se sigue para $y \in Q_1$.

Como en (1.17), obtenemos

$$F_{t \rightarrow \omega} [\partial_{y_1} u_{in}(y, t)](\omega) = i\omega \widehat{F}(\omega) \cos \alpha e^{i\omega(\mathbf{n}_0 \cdot y)}. \quad (1.18)$$

Por (0.4), $\mathbf{n}_2 := (\sin \phi, -\cos \phi) = (-\sin \Phi, -\cos \Phi)$. Así que

$$\partial_{\mathbf{n}_2} u_{in}(y, t) = \nabla u_{in}(y_1, y_2) \cdot \mathbf{n}_2 = -\sin \Phi \partial_{y_1} u_{in}(y, t) - \cos \Phi \partial_{y_2} u_{in}(y, t). \quad (1.19)$$

Calculando la transformada de Fourier de $\partial_{\mathbf{n}_2} u_{in}$, haciendo uso de la linealidad de la transformada de Fourier, así como de (1.17), (1.18) y el hecho de que $\sin(\phi - \alpha) = -\sin(\Phi + \alpha)$, tenemos que

$$F_{t \rightarrow \omega} [\partial_{\mathbf{n}_2} u_{in}(y, t)](\omega) = -i\omega \widehat{F}(\omega) \sin(\Phi + \alpha) e^{i\omega(\mathbf{n}_0 \cdot y)}, \quad y \in \mathbb{R}^2. \quad (1.20)$$

Notemos que si $y = (y_1, y_2) \in Q_2$, entonces $\mathbf{n}_0 \cdot y = -y_2 \frac{\cos(\Phi + \alpha)}{\sin \Phi}$. Así que de (1.20) obtenemos (1.16). \square

Ahora podemos escribir el sistema “estacionario” con parámetro $\omega \in \mathbb{C}^+$, que corresponde al sistema (1.3) después de aplicar la Transformada de Fourier-Laplace con respecto de t .

Observación 1.7. *Escribimos la palabra “estacionario” entre comillas para diferenciar entre este sistema y aquel sistema que describe la difracción estacionaria con $\omega = \omega_0$ fijo (recordemos que ω_0 es la frecuencia de la onda incidente), véase (0.7). En el siguiente sistema (1.21), ω es un parámetro variable de \mathbb{C}^+ .*

Corolario 1.8. *La transformada de Fourier del sistema (1.3) está dada por*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Delta + \omega^2) \widehat{u}_s(y, \omega) = 0, & y \in Q \\ \partial_{y_2} \widehat{u}_s(y, \omega) = -i\omega \widehat{F}(\omega) \sin \alpha e^{i\omega y_1 \cos \alpha}, & y \in Q_1 \\ \partial_{\mathbf{n}_2} \widehat{u}_s(y, \omega) = i\omega \widehat{F}(\omega) \sin(\Phi + \alpha) e^{-i\omega y_2 \frac{\cos(\Phi + \alpha)}{\sin \Phi}}, & y \in Q_2 \end{array} \right. \quad (1.21)$$

DEMOSTRACIÓN. La primera ecuación se obtiene al aplicar la transformada de Fourier a la primera ecuación de (1.3), mientras que la segunda y tercera ecuación de (1.21) se siguen directamente de las fórmulas (1.15) y (1.16). \square

Notemos que las condiciones de frontera en (1.21) están bien definidas para $\widehat{u}_s(y, \omega) \in E_\varepsilon$. Por otro lado, las condiciones de frontera de (1.3) no están bien definidas para distribuciones temperadas $u_s(y, t)$. Esto nos sugiere la siguiente definición.

Definición 1.9. *Decimos que $u_s(y, t) \in \mathcal{M}_\varepsilon$ es solución de (1.3) si $\widehat{u}_s(y, \omega) \in E_\varepsilon$ es solución para (1.21).*

Precisamente entenderemos el sistema (1.3) en este sentido cuando $F \in \mathcal{S}'$. Para el caso en el que $F \in C^\infty$, el espacio \mathcal{M}_ε se cambiará por $\mathcal{E}_{\varepsilon, N}$, véase (2.77).

1.3. Reducción del problema en el plano

El segundo paso del Método de las Características Complejas (MCC) es el de reducir el problema (1.21) a un problema en el plano. Esto se hace a través de la extensión por cero de la solución u_s al plano y la aplicación de las ecuaciones del sistema a dicha extensión en el sentido de distribuciones (véase [24], [25], [27] y [28]).

1.3.1. Reducción del problema al primer cuadrante

Antes de hacer la extensión es conveniente transformar (1.21) al problema en el complemento del primer cuadrante. Esto se hace por medio de la transformación lineal de Q al complemento del primer cuadrante.

Hacemos el cambio de variable $(x_1, x_2) = \mathcal{L}(y_1, y_2)$ que corresponde a la matriz \mathcal{L} que transforma de manera biyectiva a Q en $K := \{(x_1, x_2) : x_1 < 0 \text{ ó } x_2 < 0\}$, mediante las ecuaciones

$$x_1 = y_1 + y_2 \cot \Phi \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{y_2}{\sin \Phi} \quad (1.22)$$

Encontraremos la nueva forma del sistema (1.21) en las coordenadas (x_1, x_2) .

Definición 1.10. *Sea $v(x_1, x_2, \omega)$ la función definida por*

$$v(x_1, x_2, \omega) = \widehat{u}_s(\mathcal{L}^{-1}(x_1, x_2), \omega), \quad \omega \in \mathbb{C}^+, \quad (x_1, x_2) \in K. \quad (1.23)$$

Aunque la función v depende del parámetro ω , en algunas partes del resto del presente trabajo escribiremos simplemente $v(x)$ en lugar de $v(x_1, x_2, \omega)$.

En estos términos, el sistema (1.21) para la función (1.23) se ve de la siguiente manera.

Lema 1.11. *El problema (1.21) es equivalente al siguiente problema en el plano K*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(D, \omega)v(x, \omega) := \left[-\frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\Delta_x - 2 \cos \Phi \partial_{x_1 x_2}^2 \right] - \omega^2 \right] v(x, \omega) = 0, \quad x \in K \\ \cot \Phi \partial_{x_1} v(x_1, 0, \omega) - \frac{1}{\sin \Phi} \partial_{x_2} v(x_1, 0, \omega) = -i\omega \widehat{F}(\omega) \sin \alpha e^{i\omega x_1 \cos \alpha}, \quad x_1 > 0 \\ -\frac{1}{\sin \Phi} \partial_{x_1} v(0, x_2, \omega) + \cot \Phi \partial_{x_2} v(0, x_2, \omega) = i\omega \widehat{F}(\omega) \sin(\Phi + \alpha) e^{i\omega x_2 \cos(\Phi + \alpha)}, \quad x_2 > 0 \end{array} \right. \quad (1.24)$$

donde $v(x, \omega)$ está definida en (1.23).

DEMOSTRACIÓN. Primero hacemos la reducción de la ecuación de Helmholtz, para ello aplicamos el cambio de variable (1.22) a la primera ecuación de (1.21) e inmediatamente obtenemos la primera ecuación de (1.24), donde $v(x)$ y \widehat{u}_s se relacionan mediante (1.23) y D se define mediante $D = (i\partial_{x_1}, i\partial_{x_2})$.

En segundo lugar, hacemos la reducción sobre las condiciones de frontera.

Haciendo el cambio de variable (1.22) y utilizando la regla de la cadena obtenemos $\partial_{y_1} = \partial_{x_1}$ y $\partial_{y_2} = \cot \Phi \partial_{x_1} - \frac{1}{\sin \Phi} \partial_{x_2}$, de donde

$$\partial_{y_1} \widehat{u}_s(y, \omega) = \partial_{x_1} \widehat{u}_s(y, \omega), \quad \partial_{y_2} \widehat{u}_s(y, \omega) = \cot \Phi \partial_{x_1} \widehat{u}_s(y, \omega) - \frac{1}{\sin \Phi} \partial_{x_2} \widehat{u}_s(y, \omega). \quad (1.25)$$

Así que al igual que en (1.19) y por (1.25) obtenemos

$$\partial_{\mathbf{n}_2} \widehat{u}_s(y, \omega) = -\frac{1}{\sin \Phi} \partial_{x_1} \widehat{u}_s(y, \omega) + \cot \Phi \partial_{x_2} \widehat{u}_s(y, \omega). \quad (1.26)$$

De tal forma que si $y \in Q_1$, entonces por (1.25) sustituyendo $\partial_{y_2} \widehat{u}_s$ en la parte izquierda de la segunda ecuación de (1.21) y usando el hecho de que $\mathcal{L}(Q_1) = \{(x_1, 0) : x_1 > 0\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \partial_{y_2} \widehat{u}_s(y, \omega) \Big|_{Q_1} &= \left[\cot \Phi \partial_{x_1} \widehat{u}_s(y, \omega) - \frac{1}{\sin \Phi} \partial_{x_2} \widehat{u}_s(y, \omega) \right] \Big|_{y \in Q_1} \\ &= \cot \Phi \partial_{x_1} v(x_1, 0, \omega) - \frac{1}{\sin \Phi} \partial_{x_2} v(x_1, 0, \omega), \quad x_1 > 0. \end{aligned}$$

Mientras que en la parte derecha de la segunda ecuación de (1.21) simplemente sustituimos y_1 por x_1 , dado que $y = (y_1, y_2) \in Q_1$ si y sólo si $\mathcal{L}(y) = (x_1, 0)$ y de este modo obtenemos la segunda ecuación de (1.24). Finalmente, si $y \in Q_2$, entonces sustituyendo (1.26) en la parte izquierda de la tercera ecuación de (1.21) y usando que $\mathcal{L}(Q_2) = \{(0, x_2) : x_2 > 0\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \left[\partial_{\mathbf{n}_2} \widehat{u}_s(y, \omega) \right] \Big|_{Q_2} &= \left[-\frac{1}{\sin \Phi} \partial_{x_1} \widehat{u}_s(y, \omega) + \cot \Phi \partial_{x_2} \widehat{u}_s(y, \omega) \right] \Big|_{y \in Q_2} \\ &= -\frac{1}{\sin \Phi} \partial_{x_1} v(0, x_2, \omega) + \cot \Phi \partial_{x_2} v(0, x_2, \omega), \quad x_2 > 0. \end{aligned}$$

Y también en la parte derecha de la tercera ecuación de (1.21) simplemente, de acuerdo a (1.22), sustituimos y_2 por $-x_2 \sin \Phi$, ya que por la definición de Q_2 : $y = (y_1, y_2) \in Q_2$ si y sólo si $y_2 = -x_2 \sin \Phi$, para $x_2 > 0$. De este modo obtenemos la tercera ecuación de (1.24). \square

Definición 1.12. *Definimos al espacio $E_\varepsilon(K)$ como la imagen del espacio $E_\varepsilon(Q)$ bajo la transformación \mathcal{L} .*

Denotamos $\dot{K} := \overline{K} \setminus \{0\}$.

No es difícil convencerse de que $E_\varepsilon(K)$ resulta ser el espacio de las funciones $v(x) \in C(\overline{K}) \cap C^1(\dot{K})$ cuya norma definida en (1.12) continúa siendo finita, con la diferencia de que ahora el supremo se considera sobre la región K . Es decir, si $v(x) \in C(\overline{K}) \cap C^1(\dot{K})$, entonces

$$|v|_\varepsilon = \sup_{x \in \overline{K}} |v(x)| + \sup_{y \in \dot{K}} \{x\}^\varepsilon |\nabla v(x)| < \infty. \quad (1.27)$$

1.3.2. Extensión al plano. Datos de Cauchy

En esta sección extendemos el problema (1.24) a un problema en el plano. Después de la diferenciación de la función discontinua aparecerán los datos de Cauchy sobre la frontera. Introducimos estos datos.

Definición 1.13. Si $v \in E_\varepsilon$, con $\varepsilon < 1$, entonces, v posee los siguientes **datos de Dirichlet** sobre ∂K

$$v_1^0(x_1, \omega) := \begin{cases} v(x_1, 0, \omega), & x_1 \geq 0 \\ 0, & x_1 < 0 \end{cases}; \quad v_2^0(x_2, \omega) := \begin{cases} v(0, x_2, \omega), & x_2 \geq 0 \\ 0, & x_2 < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

y también v posee los **datos de Neumann** sobre $\partial \dot{K}$

$$\begin{aligned} v_1^1(x_1) &:= [\partial_{x_2} v(x_1, 0, \omega)]_0 = \begin{cases} \partial_{x_2} v(x_1, 0, \omega), & x_1 > 0 \\ 0, & x_1 \leq 0 \end{cases}; \\ v_2^1(x_2) &:= [\partial_{x_1} v(0, x_2, \omega)]_0 = \begin{cases} \partial_{x_1} v(0, x_2, \omega), & x_2 > 0 \\ 0, & x_2 \leq 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Observación 1.14. La norma (1.27) implica que para cada $l = 1, 2$ existen constantes $C(\omega)$, $C_0(\omega) \in \mathbb{R}$, respectivamente, tales que

$$|v_l^1(x_l, \omega)| \leq C(\omega) \{|x_l|^{-\varepsilon}, \quad x_l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad |v_l^0(x_l, \omega)| \leq C_0(\omega), \quad x_l \in \mathbb{R}. \quad (1.30)$$

Más aún, para cada $l = 1, 2$ y $\beta = 0, 1$ tenemos

$$v_l^\beta \in S'(\mathbb{R}), \quad \text{supp}(v_l^\beta) \subset \overline{\mathbb{R}^+} \quad \text{y} \quad v_l^\beta \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}). \quad (1.31)$$

Extendemos $v(x, \omega)$ por 0 fuera de \overline{K} y denotamos

$$v_0(x, \omega) = \begin{cases} v(x, \omega), & x \in \overline{K} \\ 0, & x \notin \overline{K} \end{cases}. \quad (1.32)$$

Así que por la definición del espacio E_ε , v_0 determina una distribución regular en \mathbb{R}^2 , pues $\varepsilon < 1$.

Lema 1.15. Sea $v(x) \in E_\varepsilon(K)$ una solución de (1.24). Entonces en el sentido de las distribuciones, es decir en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, tenemos que

$$\mathcal{H}(D)v_0(x) = d_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1.33)$$

donde $d_0(x)$ es la distribución dada por

$$\begin{aligned} d_0(x) &= \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\delta(x_1)v_2^1(x_2) + \delta(x_2)v_1^1(x_1) + \delta'(x_1)v_2^0(x_2) + \delta'(x_2)v_1^0(x_1) \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \Phi \left[\delta(x_1)\partial_{x_2}v_2^0(x_2) + \delta(x_2)\partial_{x_1}v_1^0(x_1) \right] + 2v(0) \cos \Phi \delta(x_1, x_2) \right]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

DEMOSTRACIÓN. Para $\tau > 0$ consideramos $K_\tau := \{x \in K : x_1 < -\tau \text{ ó } x_2 < -\tau\}$. Denotamos por

$$v_\tau(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \overline{K}_\tau \\ 0, & x \notin \overline{K}_\tau \end{cases}. \quad (1.35)$$

Por el Teorema de Weil cada solución de la ecuación elíptica pertenece a C^∞ . Por lo tanto $v_\tau(x) \in C^\infty(K_\tau)$, ya que $\mathcal{H}(D)v_\tau(x) = 0$ para cada $x \in K_\tau$ y \mathcal{H} es un operador elíptico. Entonces, $v_\tau \rightarrow v_0$ en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ cuando $\tau \rightarrow 0+$ ya que $v \in E_\varepsilon$ con $\varepsilon < 1$. Por lo tanto,

$$v_\tau(x) \rightarrow v_0(x) \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \quad \tau \rightarrow 0+. \quad (1.36)$$

Ahora aplicamos el operador $\mathcal{H}(D)$ de (1.24) a la distribución v_τ . Ya que v_τ es una función discontinua y v_0 es una solución de la ecuación homogénea transformada de Helmholtz en K , tenemos

$$\mathcal{H}(\omega, D)v_\tau(x) = d_\tau(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1.37)$$

donde d_τ es una distribución con soporte en ∂K_τ . Diferenciando v_τ en el sentido de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, obtenemos

$$\begin{aligned} d_\tau(x) = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \Big[& \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\partial_{x_2}v(x_1, -\tau) + \delta'(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau) \\ & + \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\partial_{x_1}v(-\tau, x_2) + \delta'(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)v(-\tau, x_2) \\ & - 2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\partial_{x_1}v(x_1, -\tau) \\ & - 2 \cos \Phi \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\partial_{x_2}v(-\tau, x_2) \\ & - 2 \cos \Phi v(-\tau, \tau)\delta(x_1 + \tau)\delta(x_2 + \tau) \Big], \end{aligned}$$

donde Θ es la función de Heaviside (véase Anexo III). La relación (1.36) implica que

$$d_\tau(x) \rightarrow \mathcal{H}v_0(x) \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \quad \tau \rightarrow 0+.$$

Así que para demostrar (1.34), sólo faltaría ver que

$$d_\tau \rightarrow d_0, \quad \tau \rightarrow 0+. \quad (1.38)$$

Paso 1. La continuidad de $v(x)$ en \bar{K} implica que

$$\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau) \rightarrow v_1^0(x_1), \quad \tau \rightarrow 0+, \quad x_1 \in \mathbb{R}. \quad (1.39)$$

De (1.12) tenemos que $|v(x_1, -\tau)| \leq C$, $\tau \geq 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$. Así que (1.39) implica que

$$\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau) \rightarrow v_1^0(x_1) \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \tau \rightarrow 0+.$$

De aquí, tenemos

$$\delta'(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau) \rightarrow \delta'(x_2)v_1^0(x_1) \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \quad \tau \rightarrow 0+. \quad (1.40)$$

Similarmente, tenemos

$$\delta'(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)v(-\tau, x_2) \rightarrow \delta'(x_1)v_2^0(x_2) \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \quad \tau \rightarrow 0+. \quad (1.41)$$

y $v(-\tau, -\tau) \rightarrow v(0)$, por lo tanto

$$-2 \cos \Phi v(-\tau, -\tau)\delta(x_1 + \tau)\delta(x_2 + \tau) \rightarrow -2v(0) \cos \Phi \delta(x), \quad \tau \rightarrow 0+. \quad (1.42)$$

Paso 2. La continuidad de $\nabla v_0(x)$ en \bar{K} implica que

$$\partial_{x_2}v(x_1, -\tau) \rightarrow \partial_{x_2}v(x_1) \quad \forall x_1 > 0, \quad \tau \rightarrow 0+. \quad (1.43)$$

Por (1.12) tenemos

$$|\partial_{x_2} v(x_1, -\tau)| \leq C \{(x_1, \tau)\}^{-\varepsilon} \leq C_1 \{x_1\}^{-\varepsilon}, \quad x_1 > -\tau. \quad (1.44)$$

Como se asume que $0 \leq \varepsilon < 1$, entonces por el teorema de Lebesgue (1.43) y (1.44) implican que

$$\Theta(x_1 + \tau) \partial_{x_2} v(x_1, -\tau) \rightarrow \Theta(x_1) \partial_{x_2} v(x_1, 0) = v_1^1(x_1) \text{ en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \quad \tau \rightarrow 0+.$$

De aquí

$$\delta(x_2 + \tau) \Theta(x_1 + \tau) \partial_{x_2} v(x_1, -\tau) \rightarrow \delta(x_2) v_1^1(x_1) \text{ en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \quad \tau \rightarrow 0+. \quad (1.45)$$

Similarmente, tenemos

$$\left. \begin{aligned} \delta'(x_1 + \tau) \Theta(x_2 + \tau) \partial_{x_1} v(-\tau, x_2) &\rightarrow \delta'(x_1) v_2^1(x_2) \\ -2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau) \Theta(x_1 + \tau) \partial_{x_1} v(x_1, -\tau) &\rightarrow -2 \cos \Phi \delta(x_2) \frac{d}{dx_1} v_1^0(x_1) \\ &\quad + 2v(0) \cos \Phi \delta(x) \\ -2 \cos \Phi \delta(x_1 + \tau) \Theta(x_2 + \tau) \partial_{x_2} v(x_2, -\tau) &\rightarrow -2 \cos \Phi \delta(x_1) \frac{d}{dx_2} v_2^0(x_2) \\ &\quad + 2v(0) \cos \Phi \delta(x) \end{aligned} \right\} \tau \rightarrow 0+ \quad (1.46)$$

en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Finalmente, (1.40)-(1.42) y (1.45)-(1.46), implican (1.38). \square

En la siguiente proposición expresamos a las condiciones de frontera en términos de los datos de Cauchy.

Sea $\Theta(x)$ la función de Heaviside.

Proposición 1.16. *Sea $v(x) \in E_\varepsilon(K)$ una solución de (1.24). Entonces para cada $l = 1, 2$ y $\beta = 0, 1$, los datos de Cauchy v_l^β definidos en (1.29) y (1.28), satisfacen las siguientes condiciones de frontera*

$$\left\{ \begin{aligned} \cot \Phi \left[\frac{d}{dx_1} v_1^0(x_1) - \delta(x_1) v(0) \right] &- \frac{1}{\sin \Phi} v_1^1(x_1) \\ &= -i\omega \widehat{F}(\omega) \sin \alpha \Theta(x_1) e^{i\omega x_1 \cos \alpha}, \\ & \quad x_1 \in \mathbb{R}, \\ \cot \Phi \left[\frac{d}{dx_2} v_2^0(x_2) - \delta(x_2) v(0) \right] &- \frac{1}{\sin \Phi} v_2^1(x_2) \\ &= i\omega \widehat{F}(\omega) \sin(\Phi + \alpha) \Theta(x_2) e^{i\omega x_2 \cos(\Phi + \alpha)}, \\ & \quad x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \right. \quad (1.47)$$

DEMOSTRACIÓN. Extendiendo a \mathbb{R} la segunda y tercera ecuación de (1.24) y usando (1.28) y (1.29) obtenemos

$$\begin{aligned} \cot \Phi \left[\partial_{x_1} v_1(x_1, 0, \omega) \right]_0 - \frac{1}{\sin \Phi} v_1^1(x_1, \omega) &= -i\omega \widehat{F}(\omega) \sin \alpha \Theta(x_1) e^{i\omega x_1 \cos \alpha}, \quad x_1 \in \mathbb{R}; \\ \cot \Phi \left[\partial_{x_2} v_2^0(0, x_2, \omega) \right]_0 - \frac{1}{\sin \Phi} v_2^1(x_2, \omega) &= i\omega \widehat{F}(\omega) \sin(\Phi + \alpha) \Theta(x_2) e^{i\omega x_2 \cos(\Phi + \alpha)}, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Usando derivación en \mathcal{D}' , tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_1} v_1^0(x_1) &= v(0)\delta(x_1) + \left[\partial_{x_1} v_1(x_1, 0, \omega) \right]_0, \\ \frac{d}{dx_2} v_2^0(x_2) &= v(0)\delta(x_2) + \left[\partial_{x_2} v_1(0, x_2, \omega) \right]_0.\end{aligned}$$

De aquí se deduce (1.47). \square

1.4. Transformada de Fourier

Similarmente a la transformada de Fourier (1.6) introducimos la transformada de Fourier de las funciones que pertenecen a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. Esta transformada de Fourier se extiende por la continuación al espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (véase por ejemplo [18]). Los teoremas del tipo Paley-Wiener se siguen satisfaciendo para los conos convexos [26].

Aplicando la transformada de Fourier (1.6) (en el sentido de \mathcal{S}') a la ecuación (1.33) obtenemos

$$\mathcal{H}(\xi, \omega) \tilde{v}_0(\xi) = \tilde{d}_0(\xi, \omega) \equiv \left[\frac{1}{\sin^2 \Phi} (\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2 \cos \Phi \xi_1 \xi_2) - \omega^2 \right] \tilde{v}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (1.48)$$

donde $\tilde{v}_0(\xi)$ y $\tilde{d}_0(\xi)$, denotan la transformada de Fourier de las distribuciones temperadas v_0 y d_0 , respectivamente. Notemos que la identidad (1.48) también se entiende en el sentido de las distribuciones. Calculando la transformada de Fourier de (1.34) obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{d}_0(\xi, \omega) &= \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\tilde{v}_1^1(\xi_1) - \tilde{v}_1^0(\xi_1)(i\xi_2 - 2i\xi_1 \cos \Phi) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{v}_2^1(\xi_2) - \tilde{v}_2^0(\xi_2)(i\xi_1 - 2i\xi_2 \cos \Phi) - 2 \cos \Phi v(0) \right].\end{aligned}$$

Dado que $\mathcal{H}(\xi, \omega) \neq 0$ para todos $\xi \in \mathbb{R}^2$ y $\omega \in \mathbb{C}^+$, la identidad (1.48) nos permite expresar la solución como

$$\tilde{v}_0(\xi, \omega) = \frac{\tilde{d}_0(\xi, \omega)}{\mathcal{H}(\xi, \omega)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Esto nos lleva a determinar las funciones desconocidas $\tilde{v}_2^1(\xi_2)$ y una de las funciones $\tilde{v}_1^0(\xi_1)$ ó $\tilde{v}_1^1(\xi_1)$. Para ello usaremos las ecuaciones (1.47) y (1.48).

Lema 1.17. *La transformada de Fourier-Laplace para el sistema (1.47) y $\omega \in \mathbb{C}^+$, toma la forma*

$$\begin{cases} \cot \Phi \left[iz_1 \tilde{v}_1^0(z_1, \omega) + v(0) \right] + \frac{1}{\sin \Phi} \tilde{v}_1^1(z_1, \omega) = -\frac{\omega \widehat{F}(\omega) \sin \alpha}{z_1 + \omega \cos \alpha}, & \text{Im } z_1 > 0, \\ \cot \Phi \left[iz_2 \tilde{v}_2^0(z_2, \omega) + v(0) \right] + \frac{1}{\sin \Phi} \tilde{v}_2^1(z_2, \omega) = \frac{\omega \widehat{F}(\omega) \sin(\Phi + \alpha)}{z_2 + \omega \cos(\Phi + \alpha)}, & \text{Im } z_2 > 0. \end{cases} \quad (1.49)$$

DEMOSTRACIÓN. Esto se sigue de (1.47) y del Teorema de Paley-Wiener [26] ya que $\text{supp } v_l^\beta \subset \overline{\mathbb{R}^+}$. \square

Lema 1.18. Para $l = 1, 2$, existe $C(\omega) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} |\tilde{v}_l^0(z_l, \omega)| \leq \frac{C(\omega)}{\operatorname{Im} z_l}, \\ |\tilde{v}_l^1(z_l, \omega)| \leq C(\omega) \frac{(1 + \operatorname{Im} z_l)^\varepsilon}{\operatorname{Im} z_l}, \end{array} \right. \left| \operatorname{Im} z_l > 0, \omega \in \mathbb{C}^+. \quad (1.50)$$

DEMOSTRACIÓN. La cota para $\tilde{v}_l^0(z_l, \omega)$ se obtiene por integración de (1.30) y de la transformada de Fourier compleja, considerando $\xi = z_l \in \mathbb{C}^+$. La demostración de la cota para $\tilde{v}_l^1(z_l, \omega)$ se encuentra en el [21, Lemma 5.1]. \square

1.5. La ecuación de conexión y la fórmula general de la solución

En esta sección se realiza el tercer paso del Método de las Características Complejas: el “levantamiento” de las transformadas de Fourier de los datos de Cauchy a la cubierta universal de la superficie de Riemann del símbolo del operador de Helmholtz $\mathcal{H}(D)$. Esta idea está inspirada en la siguiente razón.

Denotamos por $V = V(\omega)$ a la superficie de Riemann

$$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 \cos \Phi - \omega^2 \sin^2 \Phi = 0\}. \quad (1.51)$$

Notemos que si $(z_1, z_2) \in V$, entonces

$$(z_1 \sin \Phi)^2 + (z_2 - z_1 \cos \Phi)^2 = \omega^2 \sin^2 \Phi.$$

Así que las fórmulas

$$\begin{array}{l} z_1 := \omega \sin \varphi \\ z_2 - z_1 \cos \Phi := \omega \sin \Phi \cos \varphi \end{array} \left| \varphi \in \mathbb{C} \right.$$

dan una parametrización para V . Es conveniente cambiar el parámetro φ por el parámetro $\mu := i\varphi$. La superficie V tiene una cubierta universal $\check{V} \cong \mathbb{C}$ con la proyección $p : \check{V} \rightarrow V$ definida por

$$p : \mu \mapsto (z_1, z_2), \quad \begin{cases} z_1 = z_1(\mu) := -i\omega \sinh \mu \\ z_2 = z_2(\mu) := -i\omega \sinh(\mu + i\Phi) \end{cases}. \quad (1.52)$$

Para $l = 1, 2$, respectivamente, definamos \check{V}_l^+ como la componente conexa del conjunto

$$\left\{ \mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_l(\mu) > 0 \right\},$$

la cual contiene el punto $\mu = i \frac{\pi}{2}$ y $\mu = i \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right)$, respectivamente. Entonces

$$\partial \check{V}_l^+ = \check{\Gamma}_l^+ \cup \check{\Gamma}_l^-,$$

donde

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}_1^- &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_1(\mu) = 0, \quad 0 \in \check{\Gamma}_1^- \}, \\ \check{\Gamma}_1^+ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_1(\mu) = 0, \quad i\pi \in \check{\Gamma}_1^+ \}, \\ \check{\Gamma}_2^- &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_2(\mu) = 0, \quad i(\pi - \Phi) \in \check{\Gamma}_2^- \}, \\ \check{\Gamma}_2^+ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_2(\mu) = 0, \quad -i\Phi \in \check{\Gamma}_2^+ \}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

No es difícil convencerse de que

$$\check{\Gamma}_1^- = \left\{ \mu = (\mu_1 + i\mu_2) : \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \quad \mu_2 = \arctan \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \tanh \mu_1 \right) \right\} \quad (1.54)$$

con la rama $\arctan 0 = 0$. La misma representación se cumple para $\check{\Gamma}_1^+$ con la rama $\arctan 0 = \pi$. Por lo tanto, el contorno $\check{\Gamma}_1^+$ es la traslación de $\check{\Gamma}_1^-$ por el vector $i\pi$, es decir $\check{\Gamma}_1^+ = \check{\Gamma}_1^- + i\pi$. Similarmente, el contorno $\check{\Gamma}_2^-$ es la traslación de $\check{\Gamma}_2^+$ por $i\pi$ y $\check{\Gamma}_2^+$ es la traslación de $\check{\Gamma}_1^-$ por $-i\Phi$. Así, todos los contornos dados en (1.53) son traslaciones idénticas de $\check{\Gamma}_1^-$. Denotamos y definimos el contorno

$$\gamma(\nu) \equiv \check{\Gamma}_1^- + i\nu, \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (1.55)$$

Entonces los contornos (1.53) se representan en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}_1^- &= \gamma(0), & \check{\Gamma}_1^+ &= \gamma(\pi), \\ \check{\Gamma}_2^- &= \gamma(\pi - \Phi), & \check{\Gamma}_2^+ &= \gamma(-\Phi). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Para $l = 1, 2$, respectivamente, definamos la región \check{V}_l^- como la componente conexa del conjunto $\{\mu \in \mathbb{C} : \text{Im } z_l(\mu) < 0\}$ que contiene al punto $\mu = -i\frac{\pi}{2}$. Consideremos también $\check{V}^- := \check{V}_1^- \cap \check{V}_2^-$ y

$$\check{V}_\Sigma := \check{V}_1^+ \cup \overline{\check{V}^-} \cup \check{V}_2^+. \quad (1.57)$$

(Ver la Figura 3, la cual corresponde al caso $\text{Re } \omega > 0$).

Podemos representar a las regiones \check{V}_l^+ , \check{V}_l^- , \check{V}^- y \check{V}_Σ en términos de los contornos $\gamma(\nu)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \check{V}_1^+ &= \{\mu : \gamma(0) < \mu < \gamma(\pi)\}, & \check{V}_2^+ &= \{\mu : \gamma(-2\pi + \phi) < \mu < \gamma(-\pi + \phi)\}; \\ \check{V}_1^- &= \{\mu : \gamma(-\pi) < \mu < \gamma(0)\}, & \check{V}_2^- &= \{\mu : \gamma(-\pi + \phi) < \mu < \gamma(\phi)\}; \\ \check{V}^- &= \{\mu : \gamma(-\pi + \phi) < \mu < \gamma(0)\}, & \check{V}_\Sigma &= \{\mu : \gamma(-\Phi) < \mu < \gamma(\pi)\}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

(Ver la Figura 3). En este caso, el símbolo “ $<$ ” significa que el punto μ se encuentra entre las correspondientes curvas. De igual manera, para $\delta > 0$ consideraremos la subregión $\check{V}_{\Sigma, \delta}$ dada por

$$\check{V}_{\Sigma, \delta} = \left\{ \mu : \gamma(-\Phi + \delta) < \mu < \gamma(\pi - \delta) \right\}.$$

(Ver la Figura 3).

1.5.1. Levantamiento sobre la cubierta universal

Ahora “levantaremos” las funciones \check{v}_l^β sobre \check{V}_l^+ por medio de las proyecciones (1.52). Para ser más exactos, denotemos por $\check{v}_l^\beta(\mu, \omega)$ a la composición de $\check{v}_l^\beta(z_l, \omega)$ con $z_l(\mu, \omega)$, es decir

$$\check{v}_l^\beta(\mu, \omega) = \check{v}_l^\beta(z_l(\mu, \omega)), \quad z_l \in \mathbb{C}^+, \quad l = 1, 2, \quad \beta = 0, 1. \quad (1.59)$$

Definición 1.19. Definamos y denotemos por $H(V)$ al conjunto de las funciones analíticas en un conjunto abierto $V \subset \mathbb{C}$.

Notemos que la analiticidad de las funciones \tilde{v}_l^β en \mathbb{C}^+ implica la analiticidad de \check{v}_l^β en \check{V}_l^+ , para $l = 1, 2$, es decir

$$\check{v}_l^\beta \in \mathbf{H}(\check{V}_l^+), \quad l = 1, 2, \quad \beta = 0, 1. \quad (1.60)$$

Definición 1.20. Para cada $0 < \varepsilon < 1$, definimos las regiones

$$\begin{aligned} \check{V}_{1,\varepsilon}^+ &= \{\mu : \gamma(\varepsilon) < \mu < \gamma(\pi - \varepsilon)\}, \\ \check{V}_{2,\varepsilon}^+ &= \{\mu : \gamma(-\Phi + \varepsilon) < \mu < \gamma(\pi - \Phi - \varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Lema 1.21. Los levantamientos $\check{v}_l^\beta(\mu)$, definidos en (1.59), admiten las siguientes cotas

$$\left\{ \begin{array}{l} |\check{v}_l^0(\mu, \omega)| \leq C_\varepsilon e^{-|\operatorname{Re} \mu|}, \quad \mu \in \check{V}_{l,\varepsilon}^+, \quad l = 1, 2. \\ |\check{v}_1^1(\mu, \omega)| \leq C(\omega) \frac{(1 + \operatorname{Im}(-i\omega \sinh \mu))^\varepsilon}{\operatorname{Im}(-i\omega \sinh \mu)}, \quad \mu \in \check{V}_{1,\varepsilon}^+, \\ |\check{v}_2^1(\mu, \omega)| \leq C(\omega) \frac{(1 + \operatorname{Im}(-i\omega \sinh(\mu + i\Phi)))^\varepsilon}{\operatorname{Im}(-i\omega \sinh(\mu + i\Phi))}, \quad \mu \in \check{V}_{2,\varepsilon}^+, \end{array} \right. \omega \in \mathbb{C}^+. \quad (1.61)$$

DEMOSTRACIÓN. De (1.59) y (1.50) tenemos que existe $C(\omega) > 0$ tal que

$$|\check{v}_1^0(\mu, \omega)| = |\check{v}_l^0(z_1(\mu))| \leq \frac{C(\omega)}{\operatorname{Im} z_1(\mu)}, \quad \operatorname{Im} z_1(\mu) > 0. \quad (1.62)$$

Afirmamos que, para el caso $l = 1$, se tiene

$$\operatorname{Im} z_1(\mu) \geq \frac{\omega_2 \sin \varepsilon}{2} e^{|\operatorname{Re} \mu|}, \quad \mu \in \check{V}_{1,\varepsilon}^+. \quad (1.63)$$

En efecto, por (1.52), sabemos que si $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ y $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z_1(\mu) &= \operatorname{Im}(-i\omega \sinh \mu) = -\omega_1 \sinh \mu_1 \cos \mu_2 + \omega_2 \cosh \mu_1 \sin \mu_2 \\ &= \omega_2 \cosh \mu_1 \left[-\frac{\omega_1}{\omega_2} \tanh \mu_1 \cos \mu_2 + \sin \mu_2 \right]. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Sabemos que $\cosh \mu_1 \geq \frac{1}{2} e^{|\mu_1|}$ y además se satisface (4.8), así que considerando estos hechos en (1.64) se deduce (1.63). Lo cual concluye la prueba de la primer afirmación de (1.61) para el caso $l = 1$. El caso $l = 2$, se demuestra de manera análoga.

Por otro lado, las dos últimas cotas que se indican en (1.61) se establecieron en [21, (66)-(67)]. \square

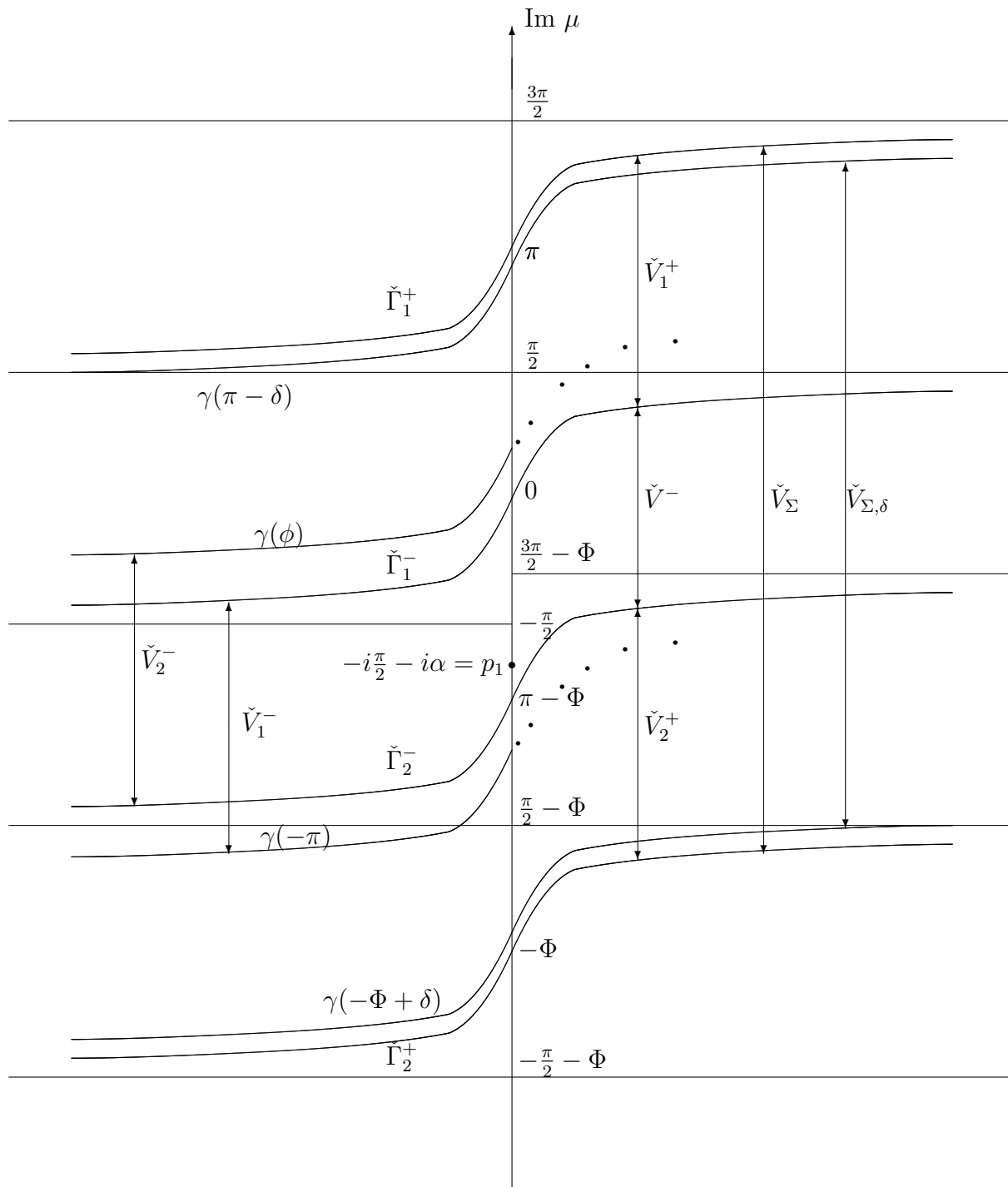


Figura 3. La Superficie de Riemman

1.5.2. Ecuación de Conexión

Ahora podemos formular nuestra ecuación de conexión fundamental. Ya habíamos notado que las funciones $\check{v}_l^\beta(\mu, \omega)$ son analíticas en las regiones \check{V}_l^+ , para $l = 1, 2$, (véase (1.60)).

Definición 1.22. Para $l = 1, 2$, denotamos por $[\check{v}(\mu)]_l$ a la continuación analítica, si es que existe, de una función $\check{v}(\mu) \in H(\check{V}_l^+)$ a la región compleja \check{V}_Σ (ver la **Figura 3**).

También definimos las siguientes funciones

$$\check{v}_1(\mu, \omega) := \check{v}_1^1(\mu, \omega) + \omega \sinh(\mu - i\Phi) \check{v}_1^0(\mu, \omega) + v(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \check{V}_1^+, \quad (1.65)$$

$$\check{v}_2(\mu, \omega) := \check{v}_2^1(\mu, \omega) + \omega \sinh(\mu + 2i\Phi) \check{v}_2^0(\mu, \omega) + v(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \check{V}_2^+. \quad (1.66)$$

En [24] se estableció y demostró la siguiente ecuación de conexión.

Proposición 1.23. *Sea $v(x) \in E_\varepsilon(K)$ una solución de (1.24), entonces*

a) *La función $\check{v}_1(\mu)$ admite continuación analítica de \check{V}_1^+ a \check{V}_Σ y la función $\check{v}_2(\mu)$ admite continuación analítica de \check{V}_2^+ a \check{V}_Σ .*

b) *Para las continuaciones analíticas de $\check{v}_1(\mu)$ y $\check{v}_2(\mu)$, se cumple la siguiente ecuación de conexión*

$$[\check{v}_1(\mu)]_1 + [\check{v}_2(\mu)]_2 = 0, \quad \mu \in \check{V}_\Sigma. \quad (1.67)$$

c) *Para las continuaciones analíticas de $\check{v}_1(\mu)$ y $\check{v}_2(\mu)$ se cumple la siguiente estimación*

$$\left| [\check{v}_l(\mu)]_l \right| \leq C_\delta (1 + e^{|\mu|})^q, \quad \mu \in \check{V}_{\Sigma, \delta}, \quad l = 1, 2; \quad (1.68)$$

para cualquier $\delta \in \left(0, \frac{\Phi + \pi}{2}\right)$ y para algún $q \in \mathbb{R}$ que depende de $\check{v}_1^1(\mu)$ y $\check{v}_2^1(\mu)$.

DEMOSTRACIÓN. Se encuentra en [24]. □

1.5.3. La forma de la solución en los términos de los datos de Cauchy

Definición 1.24. *Para cada $\theta \in [\phi, 2\pi]$, sea $\Gamma(\theta)$ el contorno descrito por*

$$\Gamma(\theta) = \begin{cases} \overleftarrow{\gamma(\phi)} \cup \overrightarrow{\gamma(-\Phi)}, & \text{si } \phi \leq \theta \leq \pi, \\ \overleftarrow{\gamma(\pi)} \cup \overrightarrow{\gamma(-\pi)}, & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (1.69)$$

donde $\gamma(\nu)$ es el contorno definido mediante (1.55) y las orientaciones del contorno Γ se muestran en la **Figura 4**.

En el artículo [21, Thm 9.1] se demostró el siguiente resultado sobre la representación integral de la solución de la ecuación de Helmholtz $(\Delta + \omega^2) \hat{u}_s(y, \omega) = 0$, $y \in Q$, $\omega \in \mathbb{C}^+$.

Teorema 1.25. *Si existe una solución al problema (1.21) en el espacio E_ε con $\varepsilon \in (0, 1)$, entonces esta se puede expresar mediante la siguiente integral:*

$$\hat{u}_s(\rho, \theta, \omega) = \frac{1}{4\pi \sin \Phi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu - i\theta)} \check{v}_1(\mu) \, d\mu, \quad \rho > 0, \quad \theta \in (\phi, 2\pi), \quad (1.70)$$

donde $\Gamma(\theta)$ es el contorno descrito en (1.69) y la función \check{v}_1 está definida en (1.65).

1.6. Reducción a la ecuación en diferencias

En esta sección reduciremos la ecuación de conexión (1.67) que tiene cuatro funciones incógnitas a una que contenga sólo dos funciones incógnitas a la que llamaremos la ecuación en diferencias.

1.6.1. Eliminación de dos datos de Cauchy en la ecuación de conexión

Lema 1.26. *Para cada $\omega \in \mathbb{C}^+$*

$$\check{v}_1^1(\mu) = -\omega \cos \Phi \sinh \mu \check{v}_1^0(\mu) + \frac{\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - v(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \check{V}_1^+, \quad (1.71)$$

$$\check{v}_2^1(\mu) = -\omega \cos \Phi \sinh(\mu + i\Phi) \check{v}_2^0(\mu) - \frac{\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} - v(0) \cos \Phi \quad (1.72)$$

$$\mu \in \check{V}_2^+.$$

DEMOSTRACIÓN. De la primera ecuación de (1.49) tenemos

$$\frac{1}{\sin \Phi} \check{v}_1^1(z_1) = -\cot \Phi \left[iz_1 \check{v}_1^0(z_1) + v(0) \right] - \frac{\omega \widehat{F}(\omega) \sin \alpha}{z_1 + \omega \cos \alpha},$$

así que despejando $\check{v}_1^1(z_1)$ tenemos $\check{v}_1^1(z_1) = -\cos \Phi \left[iz_1 \check{v}_1^0(z_1) + v(0) \right] - \frac{\omega \widehat{F}(\omega) \sin \Phi \sin \alpha}{z_1 + \omega \cos \alpha}$.

Considerando el levantamiento (1.59) con la proyección (1.52) sobre la cubierta universal y desarrollando, obtenemos (1.71). Por otro lado, (1.72) se obtiene al despejar $\check{v}_2^1(z_1)$ de la segunda ecuación de (1.49). \square

Proposición 1.27 (La Ecuación de Conexión Reducida). *Sea $v(x) \in E_\varepsilon(K)$ una solución al problema (1.24). Entonces las funciones $\check{v}_l^\beta(\mu) \in H(\check{V}_l^+)$, $l = 1, 2$, definidas en (1.59) tienen continuación meromorfa en \check{V}_Σ y además satisfacen la ecuación de conexión*

$$\cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) - \cosh(\mu + i\Phi) \check{v}_2^0(\mu) = G(\mu, \omega), \quad \mu \in \check{V}_\Sigma, \quad (1.73)$$

donde

$$G(\mu, \omega) := \frac{i\widehat{F}(\omega)}{\omega} \left[-\frac{\sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} + \frac{\sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} \right]. \quad (1.74)$$

DEMOSTRACIÓN. Sustituyendo (1.71) en la parte derecha de (1.65) obtenemos

$$\begin{aligned} \check{v}_1(\mu) &= -\omega \cos \Phi \sinh \mu \check{v}_1^0(\mu) + \frac{\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - v(0) \cos \Phi \\ &\quad + \omega \sinh(\mu - i\Phi) \check{v}_1^0(\mu) + v(0) \cos \Phi \\ &= -\omega \left[\cos \Phi \sinh \mu - \sinh(\mu - i\Phi) \right] \check{v}_1^0(\mu) + \frac{\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha}. \end{aligned}$$

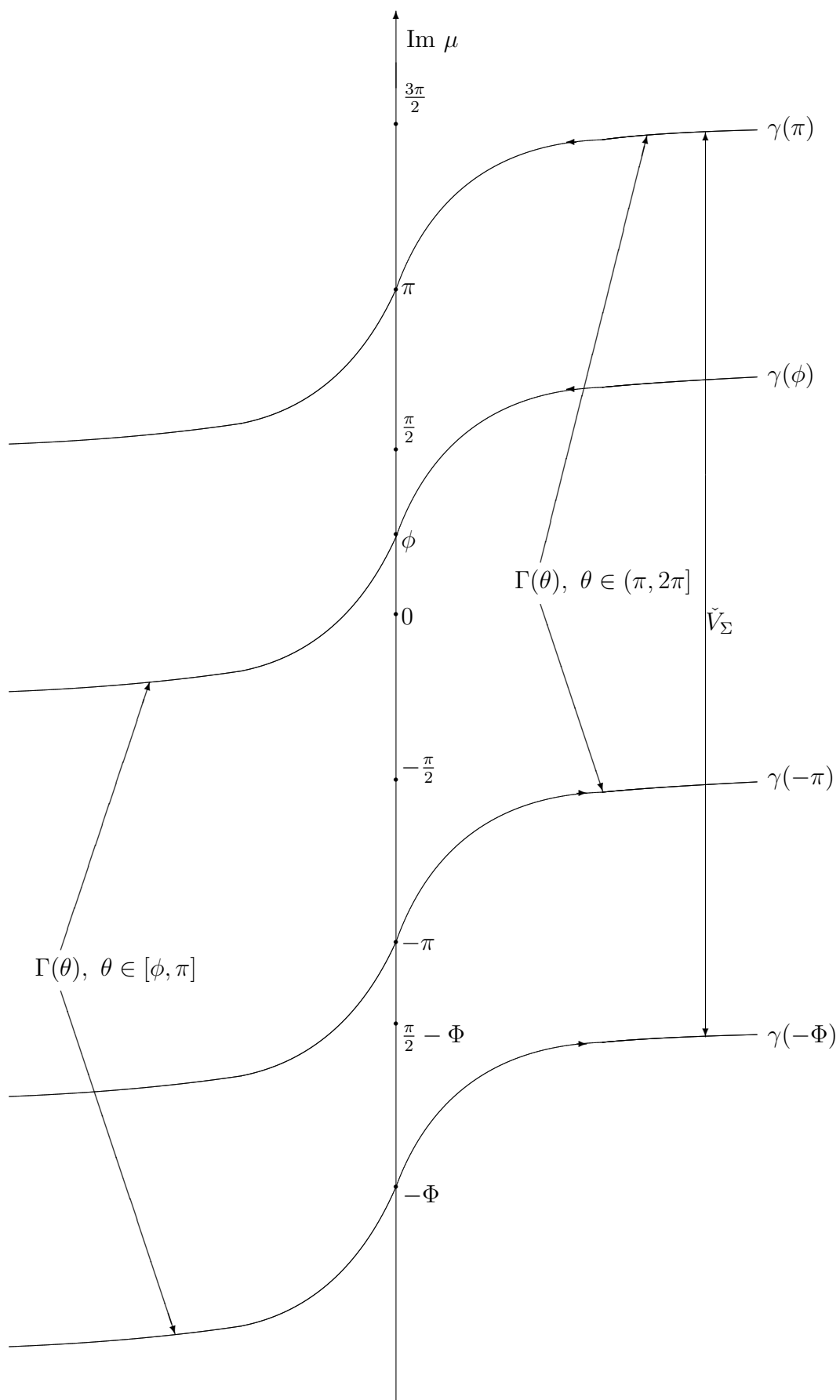


Figura 4. Contorno $\Gamma(\theta)$

Dado que $\cos \Phi \sinh \mu - \sinh(\mu - i\Phi) = i \cosh \mu \sin \Phi$, entonces

$$\check{v}_1(\mu) = -i\omega \sin \Phi \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) + \frac{\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha}, \quad \mu \in \check{V}_1^+. \quad (1.75)$$

Análogamente, sustituyendo (1.72) en la parte derecha de (1.66) obtenemos

$$\begin{aligned} \check{v}_2(\mu) &= -\omega \cos \Phi \sinh(\mu + i\Phi) \check{v}_2^0(\mu) - \frac{\omega \sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} \cdot \frac{\widehat{F}(\omega)}{\omega} \sin \Phi \\ &\quad - v(0) \cos \Phi + \omega \sinh(\mu + 2i\Phi) \check{v}_2^0(\mu) + v(0) \cos \Phi \\ &= -\omega \left[\cos \Phi \sinh(\mu + i\Phi) - \sinh(\mu + 2i\Phi) \right] \check{v}_2^0(\mu) - \frac{\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)}. \end{aligned}$$

Como $\cos \Phi \sinh(\mu + i\Phi) - \sinh(\mu + 2i\Phi) = -i \sin \Phi \cosh(\mu + i\Phi)$, tenemos que

$$\check{v}_2(\mu) = i\omega \sin \Phi \cosh(\mu + i\Phi) \check{v}_2^0(\mu) - \frac{\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)}, \quad \mu \in \check{V}_2^+. \quad (1.76)$$

Por otro lado, dado que $\check{v}_1(\mu)$ tiene continuación analítica a \check{V}_Σ , entonces por (1.75), $\check{v}_1^0(\mu)$ tiene continuación meromorfa a \check{V}_Σ . Similarmente, $\check{v}_2^0(\mu)$ tiene continuación meromorfa a \check{V}_Σ . Por lo tanto las identidades (1.75) y (1.76) son válidas en \check{V}_Σ . De tal forma que al sustituir (1.75) y (1.76) en (1.67), para cada $\mu \in \check{V}_\Sigma$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= -i\omega \cosh \mu \sin \Phi \check{v}_1^0(\mu) + \frac{\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} \\ &\quad + i\omega \sin \Phi \cosh(\mu + i\Phi) \check{v}_2^0(\mu) - \frac{\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} \\ &= \sin \Phi \left[-i\omega \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) + i\omega \cosh(\mu + i\Phi) \check{v}_2^0(\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\widehat{F}(\omega) \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \frac{\widehat{F}(\omega) \sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} \right]. \end{aligned}$$

De la definición del ángulo Φ dada en (0.4), sabemos que $\sin \Phi \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} -i\omega \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) + i\omega \cosh(\mu + i\Phi) \check{v}_2^0(\mu) \\ - \widehat{F}(\omega) \left[-\frac{\sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} + \frac{\sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} \right] = 0, \end{aligned}$$

finalmente de esta última igualdad se obtiene (1.73). \square

La ecuación (1.73) contiene dos funciones incógnitas, por lo tanto este problema pareciera indeterminado. Sin embargo, resulta que es posible eliminar una función incógnita usando las propiedades de automorfía de los levantamientos \check{v}_l^β . Este método fue propuesto por Mal'uzhinets en [29] y [30].

1.6.2. Automorfismos

Para reducir la ecuación (1.73) a la ecuación en diferencias, usaremos las propiedades de automorfía de las funciones $\check{v}_1^0(\mu)$ y $\check{v}_2^1(\mu)$, para ello a continuación definimos los automorfismos \check{h}_1 y \check{h}_2 .

Definición 1.28. Para cada $l = 1, 2$, definimos los automorfismos $\check{h}_l : \check{V} \rightarrow \check{V}$ de la siguiente manera: \check{h}_1 es la reflexión del plano con respecto al punto $i\frac{\pi}{2}$, mientras que \check{h}_2 es la reflexión del plano con respecto al punto $i\frac{\pi}{2} - i\Phi$, es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{h}_1(\mu) = -\mu + i\pi \\ \check{h}_2(\mu) = -\mu + i\pi - 2i\Phi \end{array} \right| \quad \mu \in \mathbb{C}. \quad (1.77)$$

Algunas propiedades de estos automorfismos \check{h}_1 y \check{h}_2 se encuentran enunciadas en el siguiente resultado.

Lema 1.29. Si \check{h}_1 y \check{h}_2 son los automorfismos definidos en (1.77), entonces

a) Las proyecciones z_l dadas en (1.52) satisfacen las condiciones de automorfía

$$z_l(\check{h}_l(\mu)) = z_l(\mu), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad l = 1, 2. \quad (1.78)$$

b) Los levantamientos \check{v}_l^β dados en (1.59) satisfacen las condiciones de automorfía

$$\check{v}_l^\beta(\check{h}_l(\mu)) = \check{v}_l^\beta(\mu), \quad \mu \in \check{V}_l^+, \quad l = 1, 2, \quad \beta = 0, 1. \quad (1.79)$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que (1.52) y (1.77) implican directamente (1.78). Mientras que (1.79) se sigue de (1.78) por (1.59). \square

1.6.3. La ecuación en diferencias

En esta sección reduciremos la ecuación de conexión dada en (1.73) a una ecuación en diferencias. Una vez establecida dicha ecuación en diferencias, en las siguientes secciones le buscaremos una solución meromorfa y después una solución analítica.

Para ello introducimos las regiones

$$\check{V}_{\Sigma,2} := \check{V}_\Sigma \cup \check{h}_2(\check{V}_\Sigma), \quad (1.80)$$

$$\check{W}_\Sigma := \check{V}_{\Sigma,2} \cup \check{h}_1(\check{V}_{\Sigma,2}). \quad (1.81)$$

Así que por la definición de la región \check{V}_Σ dada en (1.58) y los automorfismos \check{h}_1 y \check{h}_2 definidos en (1.77) tenemos que

$$\check{V}_{\Sigma,2} := \{\mu : \gamma(-2\Phi) < \mu < \gamma(\pi)\} \quad \text{y} \quad \check{W}_\Sigma := \{\mu : \gamma(-2\Phi) < \mu < \gamma(\pi + 2\Phi)\}.$$

Observación 1.30. No es difícil convencerse de que

a) $\check{V}_{\Sigma,2}$ es invariante bajo \check{h}_2 , es decir $\check{h}_2(\check{V}_{\Sigma,2}) = \check{V}_{\Sigma,2}$.

b) $\check{W}_\Sigma = \check{V}_{\Sigma,2} \cup (\check{V}_{\Sigma,2} + 2i\Phi)$.

c) $\check{V}_\Sigma \subsetneq \check{W}_\Sigma$.

(Ver la Figura 3).

En el siguiente resultado extendemos la ecuación de conexión (1.73) a \mathbb{C} .

Lema 1.31. Sean $v(x) \in E_\varepsilon(K)$ una función que satisface (1.33)-(1.47) y $\check{v}_1^0, \check{v}_2^0$ los levantamientos definidos en (1.59). Entonces \check{v}_1^0 y \check{v}_2^0 admiten continuaciones meromorfas en \mathbb{C} y además satisfacen las condiciones

$$\begin{cases} -i\omega \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu, \omega) + i\omega \cosh(\mu + i\Phi) \check{v}_2^0(\mu, \omega) = G(\mu, \omega), \\ \check{v}_1^0(-\mu + i\pi) = \check{v}_1^0(\mu), \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (1.82)$$

donde G está definida en (1.74).

DEMOSTRACIÓN. De la ecuación (1.73) y del hecho que \check{v}_l^0 son meromorfas en \check{V}_Σ y automorfas con respecto de \check{h}_l (para $l = 1, 2$), y G es meromorfa en \mathbb{C} , obtenemos que la ecuación (1.73) es válida en \check{W}_Σ . Ahora bien, dado que \check{v}_2^0 es automorfa con respecto de \check{h}_2 y meromorfa en \check{W}_Σ , entonces \check{v}_2^0 admite continuación meromorfa a $\check{W}_\Sigma \cup \check{h}_2(\check{W}_\Sigma)$. Así, dado que G es meromorfa en \mathbb{C} , entonces de la ecuación (1.73) obtenemos que \check{v}_1^0 admite continuación meromorfa a $\check{W}_\Sigma \cup \check{h}_2(\check{W}_\Sigma)$; más aún, (1.73) se cumple en esta región. Análogamente, dado que \check{v}_1^0 es automorfa con respecto de \check{h}_1 y meromorfa en $\check{W}_\Sigma \cup \check{h}_2(\check{W}_\Sigma)$, entonces \check{v}_1^0 admite continuación meromorfa a

$$\check{W} := \check{W}_\Sigma \cup \check{h}_2(\check{W}_\Sigma) \cup \check{h}_1(\check{W}_\Sigma \cup \check{h}_2(\check{W}_\Sigma))$$

y (1.73) se cumple en \check{W} . No es difícil convencernos de que \check{W} es la región descrita por la franja $\check{W} = \left\{ \mu : \gamma(-4\Phi) < \mu < \gamma(4\Phi + \pi) \right\}$. Continuando con este proceso obtenemos que (1.73) se cumple en \mathbb{C} y \check{v}_1^0 es automorfa con respecto de \check{h}_1 en \mathbb{C} . \square

Teorema 1.32 (La ecuación en diferencias). Sean $v(x) \in E_\varepsilon(K)$ una solución del sistema (1.24) y \check{v}_1^0 la función definida en (1.59). Entonces \check{v}_1^0 es solución del siguiente problema que consiste de la ecuación en diferencias y de la condición de automorfía

$$\begin{cases} \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu, \omega) - \cosh(\mu + 2i\Phi) \check{v}_1^0(\mu + 2i\Phi, \omega) = B(\mu, \omega), \\ \check{v}_1^0(-\mu + i\pi) = \check{v}_1^0(\mu), \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (1.83)$$

donde

$$B(\mu, \omega) := \frac{\widehat{F}(\omega)}{\omega} \left[\frac{\cosh \mu}{\sinh \mu + i \cos \alpha} - \frac{\cosh(\mu + 2i\Phi)}{\sinh(\mu + 2i\Phi) + i \cos \alpha} \right]. \quad (1.84)$$

DEMOSTRACIÓN. **PASO 1.** Aplicando el automorfismo \check{h}_2 a (1.73), obtenemos

$$\cosh(\check{h}_2(\mu)) \check{v}_1^0(\check{h}_2(\mu)) - \cosh(\check{h}_2(\mu) + i\Phi) \check{v}_2^0(\check{h}_2(\mu)) = G(\check{h}_2(\mu)). \quad (1.85)$$

Por (1.77) $\cosh(\check{h}_2(\mu)) = -\cosh(\mu + 2i\Phi)$ y $\cosh(\check{h}_2(\mu) + i\Phi) = -\cosh(\mu + i\Phi)$. Además, el Lema 1.29 afirma que $\check{v}_1^0(\check{h}_2(\mu)) = \check{v}_1^0(\check{h}_1(\check{h}_2(\mu))) = \check{v}_1^0(\mu + 2i\Phi)$ y $\check{v}_2^0(\check{h}_2(\mu)) = \check{v}_2^0(\mu)$, para cada $\mu \in \mathbb{C}$; así que (1.85) se transforma en

$$-\cosh(\mu + 2i\Phi) \check{v}_1^0(\mu + 2i\Phi) + \cosh(\mu + i\Phi) \check{v}_2^0(\mu) = G(\check{h}_2(\mu)), \quad \mu \in \check{V}_{\Sigma, 2}. \quad (1.86)$$

PASO 2. Hacemos la suma de (1.73) con (1.86) y obtenemos que $\check{v}_1^0(\mu)$ satisface la siguiente ecuación en diferencias:

$$\cosh(\mu)\check{v}_1^0(\mu) - \cosh(\mu + 2i\Phi)\check{v}_1^0(\mu + 2i\Phi) = G_1(\mu), \quad \mu \in \mathbb{C} \quad (1.87)$$

donde

$$G_1(\mu) := G(\mu) + G(\check{h}_2(\mu)), \quad \mu \in \mathbb{C}. \quad (1.88)$$

PASO 3. Simplificamos la expresión de G_1 . Para ello, de (1.88) y (1.74) tenemos

$$G_1(\mu) = \frac{i\widehat{F}(\omega)}{\omega} \left[-\frac{\sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} + \frac{\sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} \right] \\ + \frac{i\widehat{F}(\omega)}{\omega} \left[-\frac{\sin \alpha}{i \sinh(\check{h}_2(\mu)) - \cos \alpha} + \frac{\sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\check{h}_2(\mu) + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} \right].$$

Como $\sinh(\check{h}_2(\mu)) = \sinh(\mu + 2i\Phi)$ y $\sinh(\check{h}_2(\mu) + i\Phi) = \sinh(\mu + i\Phi)$, entonces

$$G_1(\mu) = \frac{i\widehat{F}(\omega)}{\omega} \left[-\frac{\sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} + \frac{\sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} \right. \\ \left. - \frac{\sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} + \frac{\sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} \right]$$

Así que al simplificar, concluimos que G_1 admite la siguiente representación

$$G_1(\mu) = \frac{i\widehat{F}(\omega)}{\omega} \left[-\frac{\sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} + \frac{2 \sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} \right]. \quad (1.89)$$

PASO 4. Resulta que G_1 se puede transformar en una función del tipo

$$\cosh(\mu)M(\mu) - \cosh(\mu + 2i\Phi)M(\mu + 2i\Phi),$$

donde $M(\mu)$ es una función meromorfa y además con esta representación de $G_1(\mu)$ se puede encontrar de manera inmediata una solución particular de la ecuación en diferencias. Esta es la parte central de la solución del problema pues de este modo podemos encontrar una solución en forma explícita.

PASO 5. Finalmente, afirmamos que $G_1(\mu) = B(\mu)$, donde $B(\mu)$ está definida en (1.84). En efecto, sustituyendo (4.32) en (1.89) y simplificando, obtenemos

$$G_1(\mu) = \frac{i\widehat{F}(\omega)}{\omega} \left[-\frac{\sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} \right. \\ \left. + \frac{\cosh \mu + \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \frac{\cosh(\mu + 2i\Phi) - \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} \right] \\ = \frac{i\widehat{F}(\omega)}{\omega} \left[\frac{\cosh \mu}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \frac{\cosh(\mu + 2i\Phi)}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} \right] \\ = \frac{\widehat{F}(\omega)}{\omega} \left[\frac{\cosh \mu}{\sinh \mu + i \cos \alpha} - \frac{\cosh(\mu + 2i\Phi)}{\sinh(\mu + 2i\Phi) + i \cos \alpha} \right] \\ = B(\mu, \omega).$$

Lo cual completa la demostración del Teorema. \square

Hemos reducido la primer ecuación del problema no estacionario (0.15) a la ecuación en diferencias del problema (1.83) con el parámetro $\omega \in \mathbb{C}^+$. En el siguiente capítulo resolveremos esta ecuación en diferencias que corresponde a las condiciones de frontera del tipo Neumann-Neumann.

Capítulo 2

Solución explícita del Problema de Neumann

En este capítulo analizamos el problema de dispersión no estacionaria (0.15). Demostraremos que existe la solución del problema (0.15) y que además esta es única en el espacio funcional \mathcal{M}_ε con $\varepsilon = 1 - \frac{\pi}{2\Phi}$, véase Teorema 2.19. Daremos la fórmula explícita para la solución.

2.1. Solución particular del sistema (1.83)

En la Sección 1.5, redujimos el problema no estacionario (0.15) al de resolver la ecuación de conexión (1.73). Las funciones desconocidas \check{v}_l^0 , $l = 1, 2$ deben satisfacer (1.60) y la función \check{v}_1 definida en (1.65) debe ser holomorfa en \check{V}_Σ . Así que nuestro objetivo ahora es el de resolver la ecuación de conexión (1.73), de tal forma que $\check{v}_l^0(\mu) \in H(\check{V}_l^+)$, $l = 1, 2$, y además la función $\check{v}_1(\mu)$ definida en (1.65) sea analítica en \check{V}_Σ , según la Proposición 1.23.

En la Sección 1.6 se redujo este problema al de resolver el sistema (1.83). Tenemos que resolver el sistema (1.83), de tal forma que $\check{v}_1^0(\mu) \in H(\check{V}_1^+)$. Además, es necesario que la correspondiente función $\check{v}_1(\mu)$ sea analítica en \check{V}_Σ , véase (1.65) y la Proposición 1.23.

De acuerdo a la Proposición 1.27, afirmamos que probar que la correspondiente función $\check{v}_1(\mu)$ definida en (1.65) pertenece a $H(\check{V}_\Sigma)$ es equivalente a probar que la representación para $\check{v}_1(\mu)$ dada en (1.75) es holomorfa en \check{V}_Σ .

Para alcanzar este objetivo, nuestro plan es el siguiente. Encontraremos una solución meromorfa $\check{w}_1^0(\mu)$ del sistema (1.83) que sea analítica en \check{V}_1^+ . Calcularemos la función $\check{w}_1(\mu)$ correspondiente a la solución $\check{w}_1^0(\mu)$ (dada por la expresión (1.75)) y veremos que esta función $\check{w}_1(\mu)$ no es analítica en \check{V}_Σ . Encontraremos los polos y residuos de esta función en \check{V}_Σ . Usando estos polos y residuos corregiremos la solución \check{w}_1^0 , usando la ecuación en diferencias homogénea asociada a la ecuación en diferencias del sistema (1.83), de tal forma que la nueva función $\check{v}_1(\mu)$ correspondiente, dada por la expresión (1.75), sea analítica en \check{V}_Σ .

En el siguiente resultado proponemos una solución meromorfa del sistema (1.83) que es analítica en \check{V}_1^+ , esto fue posible gracias a la forma explícita de la función B dada en (1.84).

Lema 2.1. *La función $\check{w}_1^0(\mu)$ definida por*

$$\check{w}_1^0(\mu) := \check{w}_1^0(\mu, \omega) = \frac{\widehat{F}(\omega)}{\omega} \cdot \frac{1}{\sinh \mu + i \cos \alpha}, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

tiene las siguientes propiedades

a) $\check{w}_1^0(\mu)$ *satisface el sistema (1.83).*

b) $\check{w}_1^0(\mu)$ *es analítica en \check{V}_1^+ .*

DEMOSTRACIÓN. **a)** Por un lado, haciendo cálculos directos $\check{w}_1^0(\mu)$ satisface la ecuación en diferencias del sistema (1.83). Por otro lado, la condición de automorfía de $\check{w}_1^0(\mu)$ se sigue de (2.1) y del hecho de que $\sinh(-\mu + i\pi) = \sinh \mu$.

b) Notemos que si μ^* es un polo de $\check{w}_1^0(\mu)$, entonces por (2.1): $\sinh \mu^* + i \cos \alpha = 0$. Esto sucede si y sólo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu^* = i(-\frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\pi)$ ó $\mu^* = i(-\frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi)$; así que por (1.58), ninguno de los posibles polos de $\check{w}_1^0(\mu)$ se encuentra en \check{V}_1^+ . \square

Verifiquemos ahora si la función $\check{w}_1(\mu)$ dada por

$$\check{w}_1(\mu) = -i\omega \sin \Phi \cosh(\mu) \check{w}_1^0 + \widehat{F}(\omega) \sin \Phi \frac{\sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha}, \quad (2.2)$$

que corresponde a la solución $\check{w}_1^0(\mu)$ mediante la fórmula (1.75), es holomorfa en \check{V}_Σ . Para ello establecemos el siguiente resultado.

Lema 2.2. *La función $\check{w}_1(\mu)$, definida por (2.2), tiene las siguientes propiedades*

a) *Los polos de $\check{w}_1(\mu)$ son los puntos de la forma $\mu_{1,k}$ y $\mu_{2,k}$:*

$$\mu_{1,k} := p_1 + 2ik\pi, \quad \mu_{2,k} := p_1^* + 2ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

donde p_1, p_1^ son los puntos en el plano complejo definidos por*

$$p_1 = -i\frac{\pi}{2} + i\alpha, \quad p_1^* = \check{h}_1(p_1) = i\frac{3\pi}{2} - i\alpha, \quad (2.4)$$

véase la Figura 3.

b) *El único polo de $\check{w}_1(\mu)$ en \check{V}_Σ es p_1 . Además*

$$\text{Res}(\check{w}_1, p_1) = -2i\widehat{F}(\omega) \sin \Phi. \quad (2.5)$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que por (2.1) y (2.2) tenemos

$$\begin{aligned} \check{w}_1(\mu) &= -i\omega \sin \Phi \cosh \mu \frac{\widehat{F}(\omega)}{\omega} \cdot \frac{1}{\sinh \mu + i \cos \alpha} + \widehat{F}(\omega) \sin \Phi \cdot \frac{\sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} \\ &= -i\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \cdot \frac{\cosh \mu + \sin \alpha}{\sinh \mu + i \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

a) Si p es un polo de $\check{w}_1(\mu)$, entonces por (2.6), existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p = i(-\frac{\pi}{2} + \alpha + 2m\pi) = p_1 + 2im\pi$, o bien $p = i(-\frac{\pi}{2} - \alpha + 2m\pi) = i(\frac{3\pi}{2} - \alpha + 2(m-1)\pi) = p_1^* + 2i(m-1)\pi$. En cualquier caso, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p = \mu_{1,k}$ ó $p = \mu_{2,k}$.

b) Usando a) y la definición de \check{V}_Σ , dada en (1.58), los posibles polos de $\check{w}_1(\mu)$ que se encuentran en \check{V}_Σ son p_1 y p_2 , donde p_1 está definido en (2.4) y

$$p_2 := -\frac{i\pi}{2} - i\alpha. \quad (2.7)$$

Además (2.2) implica que si p es un polo de $\check{w}_1(\mu)$, entonces

$$\text{Res}(\check{w}_1, p) = -i\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \cdot \frac{\cosh p + \sin \alpha}{\cosh p}. \quad (2.8)$$

Por otro lado, haciendo cálculos tenemos $\cosh p_1 = \sin \alpha$ y $\cosh p_2 = -\sin \alpha$, así que por (2.8) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Res}(\check{w}_1, p_1) &= -i\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \cdot \frac{\cosh p_1 + \sin \alpha}{\cosh p_1} = -2i\widehat{F}(\omega) \sin \Phi, \\ \text{Res}(\check{w}_1, p_2) &= -i\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \cdot \frac{\cosh p_2 + \sin \alpha}{\cosh p_2} = 0. \end{aligned}$$

Es decir, p_1 es el único polo de $\check{w}_1(\mu)$ que se encuentra en \check{V}_Σ . Además, hemos calculado el valor del residuo en dicho polo. \square

Observación 2.3. *Este Lema 2.1 implica que $\check{w}_1^0(\mu)$ no es una solución apropiada para el sistema (1.83), pues a pesar de que $\check{w}_1^0(\mu) \in \mathbb{H}(V_1^+)$, la función correspondiente $\check{w}_1(\mu)$ no es analítica en \check{V}_Σ . Por lo tanto, debemos hacer ajustes para corregirla. Es decir, necesitamos cambiar la función $\check{w}_1^0(\mu)$ por una función $\check{v}_1^0(\mu) \in \mathbb{H}(\check{V}_1^+)$ que sea solución del sistema (1.83) y tal que la función correspondiente $\check{v}_1(\mu)$ sea analítica en \check{V}_Σ .*

2.2. Solución del sistema homogéneo correspondiente a (1.83)

En esta Sección consideramos la ecuación en diferencias homogénea que corresponde al problema (1.83). Concretamente encontramos una solución particular $s(\mu) \in \mathbb{H}(\check{V}_1^+)$ del sistema

$$\begin{cases} \cosh \mu s(\mu) - \cosh(\mu + 2i\Phi)s(\mu + 2i\Phi) = 0, \\ s(-\mu + i\pi) = s(\mu), \end{cases} \Big| \mu \in \mathbb{C}, \quad (2.9)$$

tal que la función del tipo (1.75) correspondiente a $s(\mu)$ tenga como único polo a p_1 en \check{V}_Σ y de tal forma que su residuo compense al residuo de la solución $\check{w}_1^0(\mu)$ en p_1 . Sumando estas dos funciones $\check{w}_1^0(\mu)$ y $s(\mu)$ obtendremos la solución necesaria del sistema (1.83).

Definición 2.4. *Definimos la función*

$$H_N(\mu) := \coth [q(\mu - p_1)] + \coth [q(\mu - p_1^*)], \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (2.10)$$

donde p_1, p_1^* están descritos en (2.4) y

$$q := \frac{\pi}{2\Phi}. \quad (2.11)$$

Lema 2.5. La función $H_N(\mu)$, definida en (2.10), tiene las siguientes propiedades

a) $H_N(-\mu + i\pi) = -H_N(\mu)$, para todo $\mu \in \mathbb{C}$.

b) $H_N(\mu + 2i\Phi) = H_N(\mu)$, para todo $\mu \in \mathbb{C}$.

c) Los polos de $H_N(\mu)$ se describen por

$$\begin{aligned} \mu_k &= -i\frac{\pi}{2} + i\alpha + 2ik\Phi \\ \mu_k &= i\frac{3\pi}{2} - i\alpha + 2ik\Phi \end{aligned} \quad \left| \quad k \in \mathbb{Z}. \right. \quad (2.12)$$

d) El único polo de $H_N(\mu)$ en \check{V}_Σ es el punto p_1 definido en (2.4) y además

$$\text{Res}(H_N, p_1) = \frac{1}{q} = \frac{2\Phi}{\pi}. \quad (2.13)$$

e) H_N admite la siguiente cota

$$|H_N(\mu)| \leq C_\delta, \quad |\mu - \mu_k| \geq \delta, \quad (2.14)$$

donde μ_k es algún polo de H_N .

DEMOSTRACIÓN. **a)** Por (2.4), tenemos que $-\mu + i\pi - p_1 = -(\mu - p_1^*)$ y también $-\mu + i\pi - p_1^* = -(\mu - p_1)$, entonces

$$\begin{aligned} H_N(-\mu + i\pi) &= \coth [q(-\mu + i\pi - p_1)] + \coth [q(-\mu + i\pi - p_1^*)] \\ &= \coth [-q(\mu - p_1^*)] + \coth [-q(\mu - p_1)] \\ &= -\left[\coth [q(\mu - p_1^*)] + \coth [q(\mu - p_1)] \right] \\ &= -H_N(\mu). \end{aligned}$$

b) Usando (2.10) y (2.11), tenemos que

$$\begin{aligned} H_N(\mu + 2i\Phi) &= \coth [q(\mu + 2i\Phi - p_1)] + \coth [q(\mu + 2i\Phi - p_1^*)] \\ &= \coth [q(\mu - p_1) + i\pi] + \coth [q(\mu - p_1^*) + i\pi] \\ &= H_N(\mu) \end{aligned}$$

c) Notemos que por (2.10),

$$H_N(\mu) = \tau_1(\mu) + \tau_2(\mu), \quad (2.15)$$

donde

$$\tau_1(\mu) := \coth [q(\mu - p_1)], \quad \tau_2(\mu) := \coth [q(\mu - p_1^*)], \quad \mu \in \mathbb{C}. \quad (2.16)$$

De (2.16) se sigue que μ es polo de τ_1 si y sólo si $\mu \in A_1$, donde

$$A_1 = \left\{ -i\frac{\pi}{2} + i\alpha + 2ik\Phi : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (2.17)$$

Análogamente, μ es polo de τ_2 si y sólo si $\mu \in A_2$, donde

$$A_2 = \left\{ i\frac{3\pi}{2} - i\alpha + 2ik\Phi : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (2.18)$$

Así que (2.12) se sigue de (2.15), (2.17) y (2.18).

d) Para probar esta afirmación, notemos que si p es un polo de H_N , entonces p es un polo de τ_1 o p es un polo de τ_2 , es decir, si p es un polo de H_N , entonces $p \in A_1$ o $p \in A_2$.

Af.1 $A_1 \cap \check{V}_\Sigma = \{p_1\}$.

Para demostrar esta afirmación, notemos que de (2.16) se sigue que μ es polo de τ_1 si y sólo si $\mu \in A_1$. De la definición de \check{V}_Σ , dada en (1.57), se sigue que $p_1 \in A_1 \cap \check{V}_\Sigma$. Por otro lado, si $p \in A_1$, $p \neq p_1$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, tal que $p = -i\frac{\pi}{2} + i\alpha + 2ik\Phi$.

- I) Si $k > 0$, entonces $\text{Im } p > \pi$. En efecto, por (0.4), $\Phi > \pi$ y por (1.1), $\alpha > 0$, entonces $\alpha + 2\Phi > 2\Phi > 2\pi > \frac{3\pi}{2}$. Esto implica que $\text{Im } p = -\frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\Phi \geq -\frac{\pi}{2} + \alpha + 2\Phi > \pi$, para todo $k \geq 1$.
- II) Si $k < 0$, entonces $\text{Im } p < -\Phi$. En efecto, como $\Phi > 0$ y por (1.1) $\alpha < \frac{\pi}{2}$, entonces $\alpha - \Phi < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Esto implica que $\text{Im } p \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha - 2\Phi < -\Phi$, para todo $k \leq -1$.

En cualquier caso, la definición de \check{V}_Σ , dada en (1.57), implica que $p \notin \check{V}_\Sigma$.

Af.2 $A_2 \cap \check{V}_\Sigma = \emptyset$.

Para demostrar esta afirmación, notemos que de (2.16) se sigue que μ es polo de τ_2 si y sólo si $\mu \in A_2$. Por otro lado, si $p \in A_2$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $p = i\frac{3\pi}{2} - i\alpha + 2ik\Phi$.

- I) Si $k \geq 0$, entonces $\text{Im } p > \pi$. En efecto, por (1.1), $\frac{3\pi}{2} - \alpha > \pi$, esto implica que $\text{Im } p = \frac{3\pi}{2} - \alpha + 2k\Phi \geq \frac{3\pi}{2} - \alpha > \pi$, para todo $k \geq 0$.
- II) Si $k < 0$, entonces $\text{Im } p < -\Phi$. En efecto, por a) del Lema 4.1 $\alpha + \Phi > \frac{3\pi}{2}$, entonces $\text{Im } p \leq \frac{3\pi}{2} - \alpha - 2\Phi < -\Phi$, para todo $k \leq -1$.

En cualquier caso, la definición de \check{V}_Σ , dada en (1.57), implica que $p \notin \check{V}_\Sigma$.

De las Afirmaciones 1 y 2, se sigue que el único polo de H_N en \check{V}_Σ es p_1 . Además por (2.15): $\text{Res}(H_N, p_1) = \text{Res}(\tau_1, p_1)$. Y para cada $\mu \in A_1$, se tiene que

$$\text{Res}(\tau_1, \mu) = \frac{\cosh[q(\mu - p_1)]}{q \cosh[q(\mu - p_1)]} = \frac{1}{q}.$$

Lo cual implica (2.13).

e) Por (2.12), los polos de H_N pertenecen al eje imaginario, entonces (2.14) se sigue directamente de (2.10). \square

En el siguiente Lema proponemos una solución particular del sistema (2.9).

Lema 2.6. *Sea s la función dada por*

$$s(\mu) := -\frac{2q\widehat{F}(\omega)}{\omega} \cdot \frac{H_N(\mu, \Phi)}{\cosh \mu}, \quad (2.19)$$

donde H_N está definida en (2.10). Entonces:

a) $s(\mu)$ es solución del sistema (2.9).

b) p_1 es el único polo de s en \check{V}_Σ y además

$$\text{Res}(s, p_1) = -\frac{2\widehat{F}(\omega)}{\omega \sin \alpha}. \quad (2.20)$$

c) $s(\mu) \in H(\check{V}_1^+)$.

DEMOSTRACIÓN. **a)** Por (2.19) y b) del Lema 2.5, tenemos

$$\cosh \mu s(\mu) - \cosh(\mu + 2i\Phi)s(\mu + 2i\Phi) = -\frac{2q\widehat{F}(\omega)}{\omega} \left[H_N(\mu) - H_N(\mu + 2i\Phi) \right] = 0,$$

lo cual prueba que $s(\mu)$ satisface la ecuación en diferencias homogénea de (2.9). Por otro lado, por (2.19) y a) del Lema 2.5

$$s(-\mu + i\pi) = -\frac{2q\widehat{F}(\omega)}{\omega} \cdot \frac{H_N(-\mu + i\pi, \Phi)}{\cosh(-\mu + i\pi)} = -\frac{2q\widehat{F}(\omega)}{\omega} \cdot \frac{-H_N(\mu, \Phi)}{-\cosh(-\mu)} = s(\mu),$$

entonces $s(\mu)$ también satisface la condición de automorfía de (2.9).

b) Notemos que por (2.19), el hecho de que $\cosh p_1 = \sin \alpha$ y (2.13) tenemos

$$\operatorname{Res}(s, p_1) = -\frac{2q\widehat{F}(\omega)}{\omega \cosh p_1} \cdot \operatorname{Res}(H_N, p_1) = -\frac{2q\widehat{F}(\omega)}{\omega \sin \alpha} \cdot \frac{1}{q} = -\frac{2\widehat{F}(\omega)}{\omega \sin \alpha}.$$

Lo cual prueba (2.20).

c) Por b), p_1 es el único polo de s en \check{V}_Σ y $p_1 \notin \check{V}_1^+$ (véase la Figura 3), esto implica que $s \in H(\check{V}_1^+)$. \square

2.3. La solución “correcta” del sistema (1.83)

En esta Sección encontraremos una solución “apropiada” para el sistema (1.83), es decir encontraremos una función $\check{v}_1^0(\mu)$ que sea solución del sistema (1.83) y tal que la función correspondiente $\check{v}_1(\mu)$ sea analítica en \check{V}_Σ . Esto se hace utilizando la solución de (1.83) y la solución de la ecuación homogénea asociada a (1.83), funciones dadas en (2.1) y (2.19), respectivamente.

Teorema 2.7. *Sea \check{v}_1^0 la función dada por*

$$\check{v}_1^0(\mu) := \check{w}_1^0(\mu) + s(\mu), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (2.21)$$

donde \check{w}_1^0 y s están definidas en (2.1) y (2.19), respectivamente. Entonces:

a) $\check{v}_1^0(\mu)$ es solución del sistema (1.83).

b) $\check{v}_1^0 \in H(\check{V}_1^+)$.

c) La función $\check{v}_1(\mu)$ que corresponde a la solución $\check{v}_1^0(\mu)$ es holomorfa en \check{V}_Σ .

DEMOSTRACIÓN. **a)** $\check{v}_1^0(\mu)$ satisface la ecuación en diferencias de (1.83) por a) del Lema 2.1 y a) del Lema 2.6. Mientras que a condición de automorfía se sigue de c) del Lema 2.1 y c) del Lema 2.6.

b) Por b) del Lema 2.1 y c) del Lema 2.6, $\check{w}_1^0 \in H(\check{V}_1^+)$ y $s \in H(\check{V}_1^+)$, respectivamente. Así que $\check{v}_1^0 \in H(\check{V}_1^+)$.

c) De (1.75), (2.21) y (2.2) tenemos

$$\begin{aligned}
 \check{v}_1(\mu) &= -i\omega \sin \Phi \cosh(\mu) [\check{w}_1^0(\mu) + s(\mu)] + \widehat{F}(\omega) \sin \Phi \frac{\sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} \\
 &= \left[-i\omega \sin \Phi \cosh(\mu) \check{w}_1^0(\mu) + \widehat{F}(\omega) \sin \Phi \frac{\sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} \right] - i\omega \sin \Phi \cosh(\mu) s(\mu) \\
 &= \check{w}_1(\mu) - i\omega \sin \Phi \cosh(\mu) s(\mu). \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Dado que $\cosh \mu \in H(\mathbb{C})$, entonces por (2.22), p es polo de \check{v}_1 en \check{V}_Σ si y sólo si p es polo de \check{w}_1 en \check{V}_Σ o p es polo de s en \check{V}_Σ . Por b) del Lema 2.2 y b) del Lema 2.6, p_1 es el único polo tanto de \check{w}_1 como de s en \check{V}_Σ , entonces el único posible polo de \check{v}_1 en \check{V}_Σ es p_1 . Además por (2.5), (2.20) y (2.22)

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(\check{v}_1, p_1) &= \text{Res}(\check{w}_1, p_1) - i\omega \sin \Phi \cosh p_1 \text{Res}(s, p_1) \\
 &= -2i\widehat{F}(\omega) \sin \Phi - i\omega \sin \Phi \sin \alpha \cdot \frac{-2\widehat{F}(\omega)}{\omega \sin \alpha} \\
 &= -2i\widehat{F}(\omega) \sin \Phi + 2i\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

lo cual implica que p_1 no es polo de \check{v}_1 . Por lo tanto $\check{v}_1 \in H(\check{V}_\Sigma)$. \square

2.4. La solución del problema estacionario con parámetro

Suponiendo que la solución \widehat{u}_s del problema (1.21) existe en el espacio E_ε para algún $\varepsilon \in (0, 1)$ (véase la Definición 1.5), en esta Sección encontraremos una representación integral intermedia de tal solución. En la Sección 2.8 demostraremos que la solución realmente se encuentra en el espacio $E_{1-\frac{\pi}{4}}$, (véase el Corolario 2.20).

Teorema 2.8. *Si existe una solución al problema (1.21) en el espacio E_ε con $\varepsilon \in (0, 1)$, entonces \widehat{u}_s admite la siguiente representación integral:*

$$\widehat{u}_s(\rho, \theta, \omega) = \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} H_N(\mu, \Phi) d\mu, \quad \rho > 0, \theta \in (\phi, 2\pi), \tag{2.23}$$

donde $\Gamma(\theta)$ es el contorno descrito en (1.69) y la función H_N está definida en (2.10).

DEMOSTRACIÓN. Por (1.70) y (2.22)

$$\begin{aligned}
 \widehat{u}_s(\rho, \theta, \omega) &= \frac{1}{4\pi \sin \Phi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \check{v}_1(\mu) d\mu \\
 &= \frac{1}{4\pi \sin \Phi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \left[\check{w}_1(\mu) - i\omega \sin \Phi \cosh(\mu) s(\mu) \right] d\mu \\
 &= \frac{1}{4\pi \sin \Phi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \check{w}_1(\mu) d\mu - \frac{i\omega}{4\pi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \cosh(\mu) s(\mu) d\mu.
 \end{aligned}$$

Por un lado, usando (2.6) tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi \sin \Phi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \check{w}_1(\mu) \, d\mu = \\
& = \frac{1}{4\pi \sin \Phi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \left[-i\widehat{F}(\omega) \sin \Phi \cdot \frac{\cosh \mu + \sin \alpha}{\sinh \mu + i \cos \alpha} \right] d\mu \\
& = -\frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\pi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \cdot \frac{\cosh \mu + \sin \alpha}{\sinh \mu + i \cos \alpha} d\mu \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

pues la función que se integra $e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \cdot \frac{\cosh \mu + \sin \alpha}{\sinh \mu + i \cos \alpha}$ es periódica de periodo $2i\pi$ y la curva $\Gamma(\theta)$ sobre la que se integra se compone por dos líneas, una de ellas es traslación de la otra por $2i\pi$ y poseen orientaciones contrarias (ver la Figura 4). Por el otro lado, de (2.11) y (2.19), tenemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{i\omega}{4\pi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \cosh \mu s(\mu) \, d\mu \\
& = -\frac{i\omega}{4\pi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \cosh \mu \left[-\frac{2q\widehat{F}(\omega)}{\omega} \cdot \frac{H_N(\mu, \Phi)}{\cosh \mu} \right] d\mu \\
& = \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} H_N(\mu, \Phi) \, d\mu.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Así que (2.23) se sigue de (2.24) y (2.25). \square

2.5. Representación de la Transformada de Fourier-Laplace del campo total “estacionario”

En esta sección encontramos una representación integral de la Transformada de Fourier-Laplace de la solución u del problema (0.15).

Notemos que por (1.2) y (1.14), la Transformada de Fourier-Laplace de la solución u del problema (0.15) se puede expresar en la siguiente forma

$$\widehat{u}(y, \omega) = \widehat{u}_s(y, \omega) + \widehat{F}(\omega) e^{i\omega \mathbf{n}_0 \cdot y}, \quad y \in \overline{Q}, \quad \omega \in \mathbb{C}^+, \tag{2.26}$$

donde $\widehat{u}_s(y, \omega)$ representa la Transformada de Fourier-Laplace de la solución u_s del problema (1.3). Para el problema NN (0.15), encontraremos una representación del tipo Sommerfeld para $\widehat{u}(y, \omega)$. En ella usaremos el contorno \mathcal{C} que no depende del valor de θ y está definido por dos lazos de la siguiente manera

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2. \tag{2.27}$$

Aquí

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \mu_1 - i\frac{\pi}{2} : \mu_1 \geq 1 \right\} \cup \left\{ 1 + i\mu_2 : -\frac{5\pi}{2} \leq \mu_2 \leq -\frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \mu_1 - i\frac{5\pi}{2} : \mu_1 \geq 1 \right\} \quad (2.28)$$

y $\mathcal{C}_2 := -\mathcal{C}_1 - 3i\pi$, (ver la Figura 5).

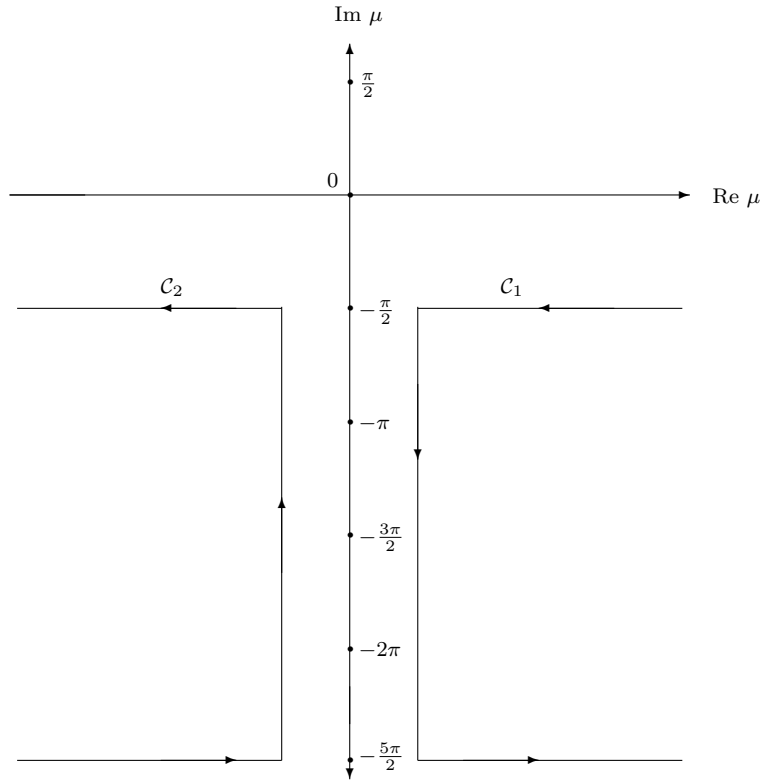


Figura 5. El contorno \mathcal{C}

Deduciremos esta representación aplicando el Teorema de Cauchy de Residuos a la integral (2.23), para ello vamos a introducir los siguientes contornos para cada $\theta \in (\phi, 2\pi)$

$$\tilde{\Gamma}(\theta) = \begin{cases} \Gamma'(\theta) \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-, & \pi < \theta < 2\pi, \\ [\Gamma'(\theta) \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-] - i(\pi - \phi), & \phi < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.29)$$

donde

$$\Gamma'(\theta) = \{\mu \in \Gamma(\Theta) : |\operatorname{Re} \mu| \geq 1\}, \quad \Gamma_{\pm} = \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu = \pm 1, \gamma(-\pi) \leq \mu \leq \gamma(\pi)\} \quad (2.30)$$

y las orientaciones se muestran en la Figura 6. Para una mejor visualización de las líneas verticales Γ_{\pm} y $\Gamma_{\pm} - i(\pi - \phi)$, estas se encuentran ligeramente separadas en esta Figura 6.

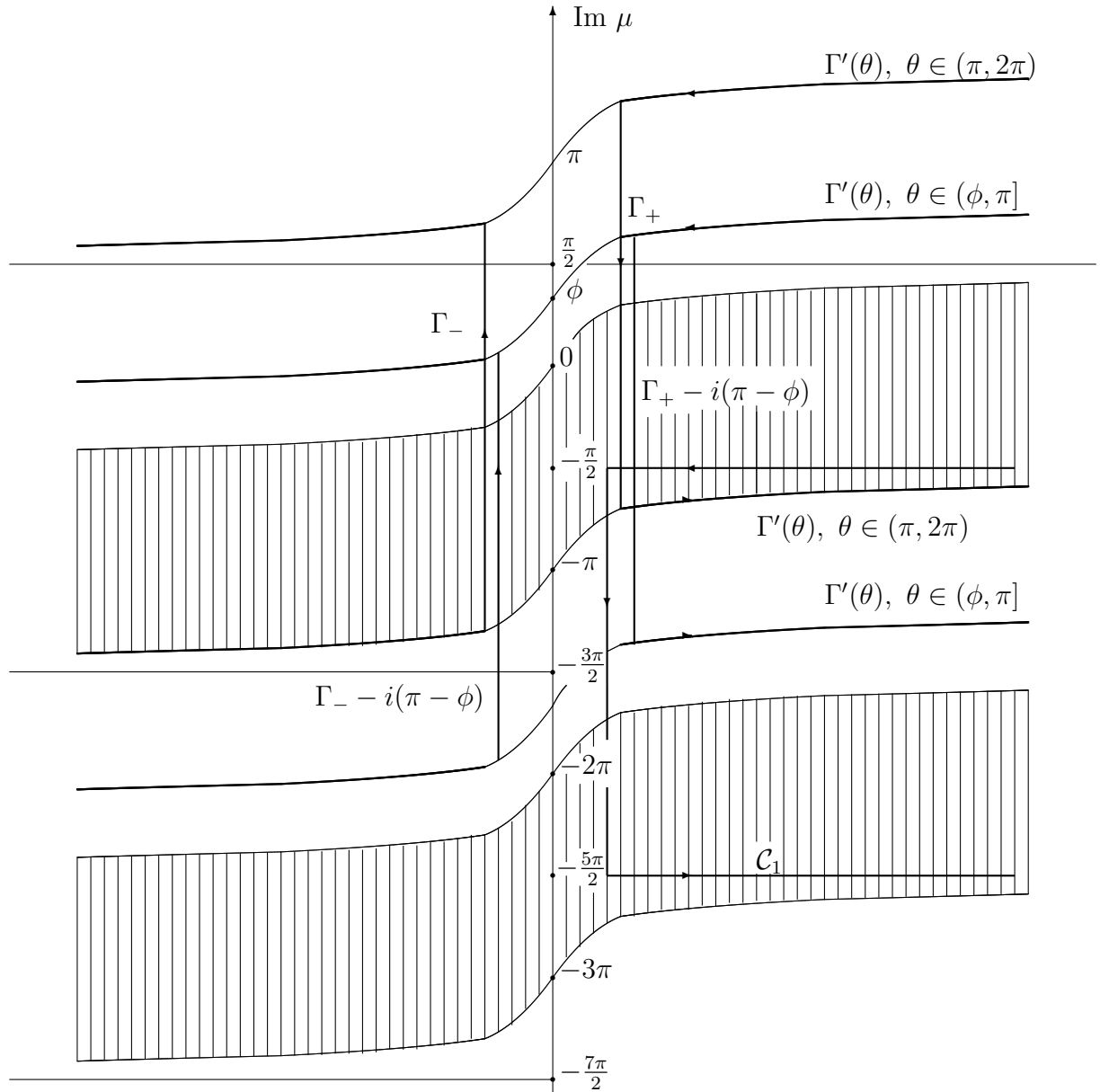


Figura 6. Los contornos tipo Sommerfeld

Teorema 2.9. *La Transformada de Fourier-Laplace de la solución u del problema (0.15), admite la siguiente representación*

$$\hat{u}(\rho, \theta, \omega) = \frac{i\hat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\mathcal{C}} e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu, \quad \rho > 0, \theta \in (\phi, 2\pi), \omega \in \mathbb{C}^+, \quad (2.31)$$

donde \mathcal{C} es el contorno descrito en (2.27) y la función H_N está definida en (2.10).

DEMOSTRACIÓN. Por d) del Lema 2.5 el único polo de $H_N(\mu)$ en \check{V}_Σ es p_1 (ver (2.4)) y además en (2.13) se tiene el valor del residuo en dicho punto. Para cada $\theta \in (\pi, 2\pi)$, definimos los contornos

$$\Gamma''(\theta) = \{\mu \in \Gamma(\theta) : |\operatorname{Re} \mu| \leq 1\},$$

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE \widehat{U} EN LAS DENSIDADES DE LAS ONDAS INCIDENTE, REFLEJADA Y DIFRACTADA

de tal forma que podemos expresar al contorno $\Gamma(\theta)$ en la forma

$$\Gamma(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\Gamma}(\theta) + [\Gamma''(\theta) \cup (-\Gamma_+) \cup (-\Gamma_-)], & \pi < \theta < 2\pi, \\ \left[\widetilde{\Gamma}(\theta) + [\Gamma''(\theta) \cup (-\Gamma_+) \cup (-\Gamma_-)] \right] - i(\pi - \phi), & \phi < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.32)$$

donde el símbolo “+” indica la adición algebraica de los contornos.

Así que aplicando el Teorema de Cauchy de Residuos a la integral (2.23)

$$\widehat{u}_s(\rho, \theta, \omega) = \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \left[2i\pi e^{-\rho\omega \sinh(p_1 - i\theta)} \text{Res}(H_N, p_1) \right] + \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\widetilde{\Gamma}(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu - i\theta)} H_N(\mu, \Phi) d\mu.$$

Por (2.4): $\sinh(p_1 - i\theta) = -i \cos(\alpha - \theta)$, usando (2.13) y simplificando tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{u}_s(\rho, \theta, \omega) &= \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \left[2i\pi e^{-\rho\omega \sinh(p_1 - i\theta)} \frac{2\Phi}{\pi} \right] + \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\widetilde{\Gamma}(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu - i\theta)} H_N(\mu, \Phi) d\mu \\ &= -\widehat{F}(\omega) e^{i\omega \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{y}} + \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\widetilde{\Gamma}(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu - i\theta)} H_N(\mu, \Phi) d\mu. \end{aligned}$$

Usando esta última igualdad y (2.26) concluimos que

$$\widehat{u}(\rho, \theta, \omega) = \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\widetilde{\Gamma}(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu - i\theta)} H_N(\mu, \Phi) d\mu, \quad \rho > 0, \theta \in (\phi, 2\pi), \omega \in \mathbb{C}^+. \quad (2.33)$$

Sólo nos faltaría ver que es posible reemplazar los contornos $\widetilde{\Gamma}(\theta)$, que dependen de θ , por el doble lazo \mathcal{C} que no depende de θ . Para conseguir esto, en (2.33) hacemos el cambio de variable $\beta = \mu - i\theta$, entonces

$$\widehat{u}(\rho, \theta, \omega) = \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\widetilde{\Gamma}(\theta) - i\theta} e^{-\rho\omega \sinh \beta} H_N(\beta + i\theta, \Phi) d\beta. \quad (2.34)$$

Por la cota (2.14), $H_N(\beta + i\theta)$ está acotada con respecto de β sobre el contorno $\widetilde{\Gamma}(\theta) - i\theta$. Además este contorno se encuentra sobre la región en la que la función $e^{-\rho\omega \sinh \beta}$ decrece súper exponencialmente con respecto de β , para todo $\omega \in \mathbb{C}^+$. Más aún, las líneas $\mathbb{R}_{-\frac{\pi}{2}}$ y $\mathbb{R}_{-\frac{5\pi}{2}}$, se encuentran en la región $\widetilde{V}_1^- \cup (\widetilde{V}_1^- - 2i\pi)$ (ver Figura 3 y Figura 6). Así que podemos usar el Teorema de Cauchy para deformar el contorno $\widetilde{\Gamma}(\theta) - i\theta$ de la integral (2.34) al contorno \mathcal{C} de la integral (2.31). Lo cual completa la prueba. \square

2.6. Descomposición de \widehat{u} en las densidades de las ondas incidente, reflejada y difractada

En esta Sección, vamos a descomponer a la función \widehat{u} , dada en (2.31), en la suma de las Transformadas de Fourier-Laplace de las ondas incidente, reflejada y difractada.

Generalmente esto se hace incluyendo los polos de $H_N(\mu + i\theta)$ que se encuentran en el eje imaginario, por (2.12). Más específicamente, transformamos el contorno \mathcal{C} , definido en (2.27), en la suma algebraica de los contornos \mathcal{C}_0 y \mathcal{R} de tal forma que ambos contornos contengan en su interior a los polos de $H_N(\mu + i\theta)$. Así que definimos \mathcal{C}_0 el contorno orientado en el sentido contrario a las manecillas del reloj como

$$\mathcal{C}_0 := \gamma_1 \cup \gamma_2 \quad (2.35)$$

con $\gamma_1 := \mathbb{R} - i\frac{\pi}{2}$, y $\gamma_2 := \mathbb{R} - i\frac{5\pi}{2}$, (ver la Figura 7 que corresponde al caso $\text{Re } \omega > 0$). Definimos a \mathcal{R} como el contorno cerrado orientado en sentido de las manecillas del reloj dado por

$$\mathcal{R} := \{\mu \in \mathcal{C} : |\text{Re } \mu| = 1\} \cup \left\{ \mu_1 - i\frac{\pi}{2} : \mu_1 \in [-1, 1] \right\} \cup \left\{ \mu_1 - i\frac{5\pi}{2} : \mu_1 \in [-1, 1] \right\} \quad (2.36)$$

Así que por (2.27), (2.35) y (2.36), $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{R}$. Aquí el símbolo “+” indica la adición algebraica de los contornos.

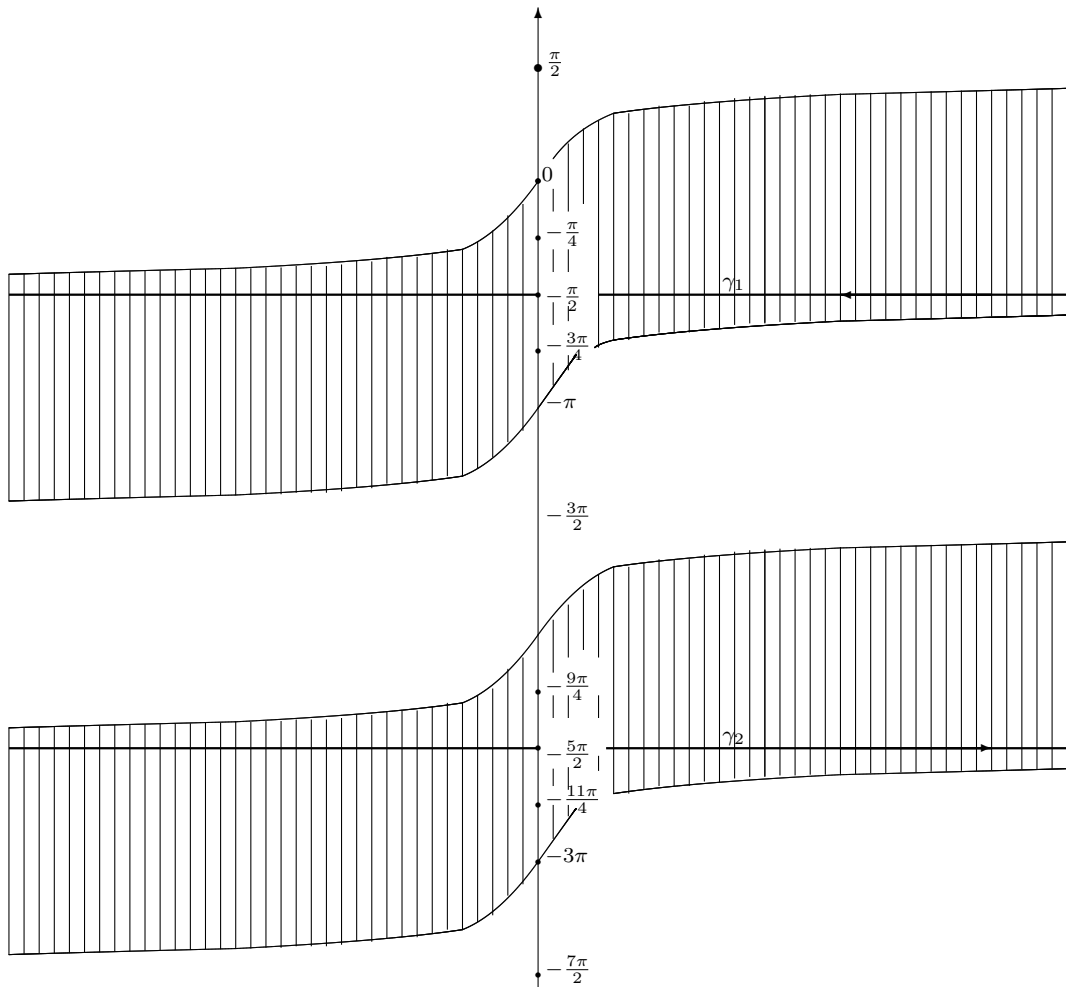


Figura 7. El contorno \mathcal{C}_0 .

Definimos la franja

$$\Pi_2 := \left\{ \mu \in \mathbb{C} : -\frac{5\pi}{2} \leq \text{Im } \mu \leq -\frac{\pi}{2} \right\}. \quad (2.37)$$

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE \widehat{U} EN LAS DENSIDADES DE LAS ONDAS INCIDENTE, REFLEJADA Y DIFRACTADA

En el siguiente Teorema encontramos una descomposición de la función \widehat{u} , dada en (2.31), en la suma de las Transformadas de Fourier-Laplace de las ondas incidente, reflejada y difractada.

Teorema 2.10. *La función \widehat{u} dada en (2.31) admite la siguiente descomposición*

$$\widehat{u}(y, \omega) = \widehat{u}_{in}(y, \omega) + \widehat{u}_r(y, \omega) + \widehat{u}_d(y, \omega), \quad y = \rho e^{i\theta} \in \overline{Q}, \quad \omega \in \mathbb{C}^+, \quad (2.38)$$

donde \widehat{u}_{in} está dada en (1.14),

$$\widehat{u}_r(\rho, \theta, \omega) := \begin{cases} \widehat{F}(\omega) e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_1)}, & \phi \leq \theta \leq \theta_1, \\ 0, & \theta_1 < \theta < \theta_2, \\ \widehat{F}(\omega) e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_2)}, & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\widehat{u}_d(\rho, \theta, \omega) := \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\mathcal{C}_0} e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta, \omega) d\mu, \quad \theta \neq \theta_{1,2}. \quad (2.40)$$

DEMOSTRACIÓN. De (2.31), (2.27), (2.35) y (2.36), se sigue que para $\rho > 0$, $\theta \in [\phi, 2\pi]$ y $\omega \in \mathbb{C}^+$,

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\rho, \theta, \omega) &= \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\mathcal{C}} e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu \\ &= \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\mathcal{C}_0} e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu + \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\mathcal{R}} e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu. \end{aligned}$$

Por un lado, el primer sumando de esta igualdad coincide con (2.40), es decir

$$\widehat{u}(\rho, \theta, \omega) = \widehat{u}_d(\rho, \theta, \omega) + \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\mathcal{R}} e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu. \quad (2.41)$$

Por otro lado, como \mathcal{R} es una curva cerrada simple recorrida en sentido de las manecillas del reloj, por el Teorema del Residuo de Cauchy tenemos que

$$\int_{\mathcal{R}} e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu = -2i\pi \sum_{\mu_k} \text{Res}(e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta), \mu_k), \quad (2.42)$$

donde μ_k son los polos de $e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta)$ que se encuentran dentro de \mathcal{R} . Notemos que por (2.36), (2.37) y a) del Lema 4.14, los polos de $e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta)$ que se encuentran dentro de \mathcal{R} son los mismos polos de $e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta)$ que se encuentran en Π_2 . De tal manera que (2.42) y b) del Lema 4.14 implican que

$$\int_{\mathcal{R}} e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu = \begin{cases} -4i\Phi \left[e^{i\rho\omega \cos(\theta-\alpha)} + e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_1)} \right], & \phi \leq \theta \leq \theta_1 \\ -4i\Phi e^{i\rho\omega \cos(\theta-\alpha)}, & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ -4i\Phi \left[e^{i\rho\omega \cos(\theta-\alpha)} + e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_2)} \right], & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

De aquí y por (1.14) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{i\widehat{F}(\omega)}{4\Phi} \int_{\mathcal{R}} e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu &= \begin{cases} \widehat{F}(\omega) \left[e^{i\rho\omega \cos(\theta-\alpha)} + e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_1)} \right], & \phi \leq \theta \leq \theta_1 \\ \widehat{F}(\omega) e^{i\rho\omega \cos(\theta-\alpha)}, & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \widehat{F}(\omega) \left[e^{i\rho\omega \cos(\theta-\alpha)} + e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_2)} \right], & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \\ &= \widehat{u}_{in}(\rho, \theta, \omega) + \begin{cases} \widehat{F}(\omega) e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_1)}, & \phi \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0, & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \widehat{F}(\omega) e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_2)}, & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

pues $n_0 \cdot y = \rho \cos(\theta - \alpha)$. Así que por (2.41) y la última cadena de igualdades

$$\widehat{u}(\rho, \theta, \omega) = \widehat{u}_d(\rho, \theta, \omega) + \widehat{u}_{in}(\rho, \theta, \omega) + \begin{cases} \widehat{F}(\omega) e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_1)}, & \phi \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0, & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \widehat{F}(\omega) e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_2)}, & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

De esta última igualdad y usando (2.39), obtenemos (2.38). \square

Corolario 2.11. Si $\widehat{u}_s \in E_\varepsilon$, para algún $\varepsilon \in (0, 1)$ es la solución de (1.21), entonces la solución del sistema (0.15) admite la siguiente descomposición

$$u(y, t) = u_{in}(y, t) + u_s(y, t), \quad y \in \overline{Q}, \quad t > 0, \quad (2.43)$$

donde u_{in} está dada en (0.1) y

$$u_s(y, t) = u_r(y, t) + u_d(y, t). \quad (2.44)$$

Aquí

$$u_r(\rho, \theta, t) := \begin{cases} -F(t - \rho \cos(\theta - \theta_1)), & \phi \leq \theta \leq \theta_1, \\ 0, & \theta_1 < \theta < \theta_2, \\ -F(t - \rho \cos(\theta - \theta_2)), & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (2.45)$$

$$u_d(\rho, \theta, t) := F_{\omega \rightarrow t}^{-1} \left[\widehat{u}_d(\rho, \theta, \omega) \right] (t), \quad (2.46)$$

y θ_1, θ_2 son las direcciones dadas en (0.6).

DEMOSTRACIÓN. La descomposición (2.43) se sigue de la linealidad de la transformada de Fourier-Laplace inversa, al aplicarla a la descomposición (2.38). La expresión (2.45) se obtiene de (2.39) con ayuda de las propiedades de la transformada de Fourier. \square

Observación 2.12. A pesar de que la fórmula (2.43) nos da una descomposición de la solución de (0.15), aún nos falta encontrar la forma explícita de la onda difractada u_d . Para hacer esto, primero necesitamos obtener una continuación de la función $\widehat{u}_d(\cdot, \cdot, \omega)$ a $\overline{\mathbb{C}^+}$.

Definición 2.13. Sea

$$\Theta := [\phi, 2\pi] \setminus \{\theta_1, \theta_2\}. \quad (2.47)$$

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE \widehat{U} EN LAS DENSIDADES DE LAS ONDAS INCIDENTE, REFLEJADA Y DIFRA

donde θ_1, θ_2 están definidos en (0.6). Para cualquier $\omega \in \mathbb{C}^+$, $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \Theta$ definamos

$$\mathcal{J}_d(\rho, \theta, \omega) := \int_{\mathcal{C}_0} e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu, \quad (2.48)$$

donde H_N es la función (2.10) y \mathcal{C}_0 es el contorno definido en (2.35).

Primero extendemos $\mathcal{J}_d(\cdot, \cdot, t)$ a $\overline{\mathbb{C}^+}$. En lo que resta de la tesis asumiremos que $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \Theta$, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ y $\mu = \mu_1 + i\mu_2$.

Lema 2.14. I) La integral en (2.48) converge absolutamente para $\omega \in \mathbb{C}^+$, y determina una función analítica con respecto a $\omega \in \mathbb{C}^+$:

$$\mathcal{J}_d(\rho, \theta, \omega) \in H(\mathbb{C}^+), \quad (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \Theta. \quad (2.49)$$

II) La función $\mathcal{J}_d(\cdot, \cdot, \omega)$ admite la siguiente representación

$$\mathcal{J}_d(\rho, \theta, \omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\rho\omega \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) d\mu, \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+} \quad (2.50)$$

donde

$$Z_N(\mu) := H_N\left(\mu - i\frac{5\pi}{2}\right) - H_N\left(\mu - i\frac{\pi}{2}\right), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (2.51)$$

y además $\mathcal{J}_d(\cdot, \cdot, \omega)$ admite una extensión continua a $\overline{\mathbb{C}^+}$.

III) $\mathcal{J}_d(\cdot, \cdot, \omega) \in C(\mathbb{R})$ y la siguiente cota se satisface

$$|\mathcal{J}_d(\rho, \theta, \omega)| \leq C(\theta), \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+}. \quad (2.52)$$

IV) El siguiente límite se cumple

$$\mathcal{J}_d(\rho, \theta, \omega_1) = \lim_{\omega_2 \rightarrow 0} \mathcal{J}_d(\rho, \theta, \omega_1 + i\omega_2) \quad (2.53)$$

en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_{\omega_1})$.

Demostración. i) De (2.10) se sigue que para $\theta \in [\phi, 2\pi]$ el conjunto $P(\theta)$ de polos de la función $H_N(\mu + i\theta)$ está dada por

$$P(\theta) = P_1(\theta) \cup \left[-P_1(\theta) + i\pi - 2i\theta \right] \quad (2.54)$$

donde $P_1(\theta) = \left\{ -i\frac{\pi}{2} + i\alpha + 2ik\Phi - i\theta : k \in \mathbb{Z} \right\}$. Esto implica que para $\theta \in [\phi, 2\pi]$: $H_N(\mu + i\theta) \in H(\mathbb{C} \setminus P(\theta))$, $-i\frac{\pi}{2} \in P(\theta)$ sólo para $\theta = \theta_2$ y $-i\frac{5\pi}{2} \in P(\theta)$ sólo para $\theta = \theta_1$. Así que $H_N(\mu + i\theta)$ admite la siguiente cota

$$|H_N(\mu + i\theta)| \leq C(\theta), \quad \mu \in \mathcal{C}_0, \theta \neq \theta_1, \theta_2. \quad (2.55)$$

Más aún, la integral (2.48) converge absolutamente para cada $\omega \in \mathbb{C}^+$, pues

$$|e^{-\rho\omega \sinh \mu}| = e^{-\rho\omega_2 \cosh \mu_1}, \quad \mu = \mu_1 + i\mu_2 \in \mathcal{C}_0. \quad (2.56)$$

Para probar (2.49) es suficiente ver que para cada $\delta > 0$ y para cada $\theta \neq \theta_1, \theta_2$, la integral $\int_{C_0} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[e^{-\rho \omega \sinh \mu} \right] \cdot H_N(\mu + i\theta) d\mu$ converge absolutamente y uniformemente con respecto

de $\omega \in \mathbb{C}^+$, $\text{Im } \omega \geq \delta > 0$. Esto se sigue de la cota (2.55) y de (2.56).

ii) Haciendo el cambio de variable $\mu \mapsto \mu + i\frac{\pi}{2}$ para $\mu \in \gamma_1$ y $\mu \mapsto \mu + i\frac{5\pi}{2}$ para $\mu \in \gamma_2$ reducimos la integral (2.48) a la integral (2.50). Esta representación (en contraste con (2.48)) admite una continuación a $\overline{\mathbb{C}^+}$ pues el integrando Z_N (en contraste con H_N) admite la cota

$$|Z_N(\mu + i\theta)| \leq C(\theta)e^{-2q|\mu|}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \theta \neq \theta_1, \theta_2, \quad (2.57)$$

por (2.51). Así que la integral (2.50) es convergente para cada $\omega \in \mathbb{R}$. Vamos a probar que $\mathcal{J}_d(\cdot, \cdot, \omega)$ es continua para cada $\omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$. Si $\omega_k \rightarrow \bar{\omega}$ cuando $k \rightarrow +\infty$, $\omega_k \in \overline{\mathbb{C}^+}$, entonces $\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{i\rho\omega_k \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) = e^{i\rho\bar{\omega} \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta)$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $|e^{i\rho\omega_k \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta)| \leq C(\theta) e^{-2q|\mu|}$, $k \in \mathbb{N}$, pues $\omega_k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ y se tiene (2.57). Más aún por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{J}_d(\cdot, \cdot, \omega_k) = \mathcal{J}_d(\cdot, \cdot, \bar{\omega}). \quad (2.58)$$

Esto implica que $\mathcal{J}_d(\cdot, \cdot, \omega) \in C(\overline{\mathbb{C}^+})$.

iii) La cota (2.52) se sigue de (2.50), (2.57), el hecho de que $|e^{i\rho(\omega_1 + i\omega_2) \cosh \mu}| = e^{-\rho\omega_2 \cosh \mu}$ para cualquier $\mu \in \mathbb{R}$ y $\omega_2 \geq 0$.

iv) La afirmación (2.53) se sigue de (2.58) y (2.52). \square

A partir de este momento, asumiremos que F tiene la forma (0.7) donde f es la función suave que satisface las condiciones (0.8). Para extender la función $\widehat{u}_d(\cdot, \cdot, \omega)$ a $\overline{\mathbb{C}^+}$, consideremos

$$\widehat{F}(\omega_1) := F_{s \rightarrow \omega_1} [F(s)] = F_{s \rightarrow \omega_1} [A e^{-i\omega_0 s} f(s)], \quad \omega_1 \in \mathbb{R}, \quad (2.59)$$

$F_{s \rightarrow \omega_1}[\cdot]$ denota la transformada de Fourier en el sentido de \mathcal{S}' asociada a la transformada de Fourier clásica (1.6), y

$$\widehat{F}_1(\omega_1) := i \widehat{f}'(\omega_1 - \omega_0), \quad \omega_1 \in \mathbb{R}. \quad (2.60)$$

Claramente

$$F_1(s) = i e^{-i\omega_0 s} f'(s), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.61)$$

Lema 2.15. 1) $\widehat{F}(\omega_1)$ admite continuación analítica a \mathbb{C}^+ . Es decir, el límite

$$\widehat{F}(\omega_1) = \lim_{\omega_2 \rightarrow 0^+} \widehat{F}(\omega_1 + i\omega_2) \quad (2.62)$$

existe en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (También denotaremos a esta continuación analítica por $\widehat{F}(\omega)$, $\omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$ y diremos que esta es la Transformada de Fourier-Laplace de $F(s)$). Más aún, existe $C > 0$ tal que

$$|\widehat{F}(\omega)| \leq C(\text{Im } \omega)^{-1}, \quad \omega \in \mathbb{C}^+. \quad (2.63)$$

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE \widehat{U} EN LAS DENSIDADES DE LAS ONDAS INCIDENTE, REFLEJADA Y DIFRA

II) $\widehat{F}_1(\omega_1)$ admite continuación analítica $\widehat{F}_1(\omega)$ a \mathbb{C} , es decir

$$\widehat{F}_1(\omega) \in H(\mathbb{C}) \quad (2.64)$$

y para cada $\omega_2 \in \mathbb{R}$

$$\widehat{F}_1(\omega_1 + i\omega_2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\omega_1}), \quad \left| \frac{\partial^{(k)}}{\partial \omega^k} \widehat{F}_1(\omega_1 + i\omega_2) \right| \leq C_{k,N} (1 + |\omega_1|)^{-N}. \quad (2.65)$$

Más aún,

$$\widehat{F}(\omega) = \frac{\widehat{F}_1(\omega)}{\omega - \omega_0}, \quad \omega \in \mathbb{C}^+; \quad \widehat{F}(\omega_1) = \frac{\widehat{F}_1(\omega_1)}{\omega_1 - \omega_0 + i0}, \quad \omega_1 \in \mathbb{R} \quad (2.66)$$

y

$$\widehat{F}(\omega) \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{\omega_0\}). \quad (2.67)$$

DEMOSTRACIÓN. **i)** La continuación analítica de $\widehat{F}(\omega_1)$ a \mathbb{C}^+ y (2.62) se siguen del Teorema Tipo Paley-Wiener para conos convexos, [26, Theorem I.5.2], pues $\text{supp } f \subset [0, \infty)$ por (0.8). La cota (2.63) se sigue de (0.8) ya que $\omega_0 \in \mathbb{R}$.

ii) $f' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ pues $\text{supp}(f')$ es un conjunto compacto, por (0.8). Así que la existencia de la continuación analítica de $\widehat{F}_1(\omega_1)$ a \mathbb{C} y (2.65) se siguen del Teorema Clásico de Paley-Wiener, [41]. Es fácil comprobar que $\widehat{F}_1(\omega) = (\omega - \omega_0)\widehat{F}(\omega)$, para todo $\omega \in \mathbb{C}^+$ por (2.59), (2.60) y el Principio de la Continuación Analítica. Esto implica la primer identidad de (2.66). La segunda identidad en (2.66) se sigue de (2.62) y (2.65). Finalmente, la afirmación (2.67) se sigue de la primera identidad en (2.66) y de (2.64). \square

Ahora estamos listos para extender $\widehat{u}_d(\cdot, \cdot, \omega)$ a $\overline{\mathbb{C}^+}$.

Proposición 2.16. *La función $\widehat{u}_d(\rho, \theta, \omega)$ dada en (2.40) tiene las siguientes propiedades*

I) $\widehat{u}_d(\cdot, \cdot, \omega) \in H(\mathbb{C}^+)$

II) *Se satisface la siguiente cota*

$$|\widehat{u}_d(\rho, \theta, \omega)| \leq C(\theta)\omega_2^{-1}, \quad \omega \in \mathbb{C}^+. \quad (2.68)$$

III) *Para cualquier $\omega_1 \in \mathbb{R}$, existe el siguiente límite en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_{\omega_1})$:*

$$\widehat{u}_d(\cdot, \cdot, \omega_1) := \lim_{\omega_2 \rightarrow 0^+} \widehat{u}_d(\cdot, \cdot, \omega_1 + i\omega_2), \quad \omega_1 \in \mathbb{R}. \quad (2.69)$$

Demostración. De (2.40), (2.48) y (2.66) deducimos que

$$\widehat{u}_d(\rho, \theta, \omega) = \frac{i}{4\Phi} \cdot \frac{\widehat{F}_1(\omega)}{\omega - \omega_0} \mathcal{J}_d(\rho, \theta, \omega), \quad \omega \in \mathbb{C}^+. \quad (2.70)$$

Por lo tanto, i) se sigue del Lema 2.15 i) y de (2.49), la cota (2.68) se sigue de (2.65) y (2.52). La existencia del límite (2.69) se sigue de (2.62) y (2.53). \square

2.7. Fórmula explícita para la onda difractada

En esta sección, aplicamos la transformada de Fourier-Laplace inversa a la función $\widehat{u}_d(\cdot, \omega)$, $\omega \in \mathbb{C}^+$. Primero, lo haremos para la función auxiliar

$$\widehat{w}_d(\rho, \theta, \omega) := \widehat{F}_1(\omega) \mathcal{J}_d(\rho, \theta, \omega), \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+}, \quad (2.71)$$

donde \mathcal{J}_d está dada por (2.50) y $\widehat{F}_1(\omega)$ está dada por (2.60).

2.7.1. Transformada de Fourier-Laplace inversa de la función $\widehat{w}_d(\rho, \theta, t)$

Proposición 2.17. *Sea f una función suave que satisface (0.8). Entonces*

- i) *Existe la transformada de Fourier-Laplace inversa de la función $\widehat{w}_d(\cdot, \cdot, \omega)$, $\omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$, $F_{\omega \rightarrow t}^{-1}[\widehat{w}_d(\cdot, \cdot, \omega)](t)$, la cual se puede expresar en la siguiente forma*

$$w_d(\rho, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega_1 t} \widehat{w}_d(\rho, \theta, \omega_1) d\omega_1. \quad (2.72)$$

- ii) *La función $w_d(\rho, \theta, t)$ también admite la siguiente representación*

$$w_d(\rho, \theta, t) = ie^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho\omega_0 \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) f'(t - \rho \cosh \mu) d\mu \quad (2.73)$$

y

$$w_d(\cdot, \cdot, t) \in C(\mathbb{R}), \quad \text{supp}(w_d(\cdot, \cdot, t)) \subset \overline{\mathbb{R}^+}. \quad (2.74)$$

DEMOSTRACIÓN. i) La primera afirmación se sigue del Teorema tipo Paley-Wiener para conos, [26, Theorem I.5.2], pues $\widehat{w}_d(\cdot, \cdot, \omega) \in H(\mathbb{C}^+)$ por (2.64) y está acotada en $\overline{\mathbb{C}^+}$ por la segunda desigualdad de (2.65) y por (2.52). La representación (2.72) se sigue del hecho de que $\widehat{w}_d(\cdot, \cdot, \omega_1)$, $\omega_1 \in \mathbb{R}$ es el \mathcal{S}' -límite de la función $\widehat{w}_d(\cdot, \cdot, \omega_1 + i\omega_2)$, cuando $\omega_2 \rightarrow 0+$ por (2.64), (2.65) y (2.52), (2.53).

ii) Sustituyendo (2.50) en (2.71) y entonces introduciendo esta expresión para \widehat{w}_d en la integral (2.72), obtenemos

$$w_d(\rho, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega_1 t} \widehat{F}_1(\omega_1) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_1 \rho \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) d\mu \right] d\omega_1.$$

De (2.65) y (2.57), tenemos que $\left| e^{-i\omega_1(t - \rho \cosh \mu)} \widehat{F}_1(\omega_1) Z_N(\mu + i\theta) \right| \leq C_N(\theta) (1 + |\omega_1|)^{-N} e^{-2q|\mu|}$, $(\omega_1, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Así que, por el Teorema de Fubini, por la definición de la transformada de Fourier (1.6) y por el Teorema de la Transformada de Fourier obtenemos

$$\begin{aligned} w_d(\rho, \theta, t) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega_1(t - \rho \cosh \mu)} \widehat{F}_1(\omega_1) d\omega_1 \right] Z_N(\mu + i\theta) d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}} F_1(t - \rho \cosh \mu) Z_N(\mu + i\theta) d\mu. \end{aligned}$$

De tal forma que obtenemos (2.73) de (2.61). La continuidad de w_d se sigue de (2.73), (2.57), (0.8) y del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue. La contención en (2.74) se sigue directamente de (2.73) y (0.8) pues $\text{supp} f' \subset [0, s_0]$ y $\rho \geq 0$. \square

2.7.2. Demostración de la representación para la onda difractada

Teorema 2.18. *Para $\theta \neq \theta_1, \theta_2$, $\rho \geq 0$ y $t \geq 0$, la onda difractada $u_d(\rho, \theta, t)$ para el problema de dispersión no estacionario del problema NN (0.15) sobre la cuña W admite la siguiente representación*

$$u_d(\rho, \theta, t) = \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{4\Phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) f(t - \rho \cosh \mu) d\mu, \quad (2.75)$$

donde Z_N está definida en (2.51) y f es la función suave que satisface (0.8).

DEMOSTRACIÓN. De (2.70), (2.66) y (2.71) deducimos que

$$u_d(\rho, \theta, t) = F_{\omega \rightarrow t}^{-1} \left[\frac{i}{4\Phi(\omega_1 - \omega_0)} \widehat{w}_d(\rho, \theta, \omega) \right], \quad \omega \in \mathbb{C}^+,$$

donde $F_{\omega \rightarrow t}^{-1}$ es la transformada de Fourier-Laplace inversa en el sentido de $\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$. Sabemos que la transformada de Fourier-Laplace satisface que $F_{t \rightarrow \omega} [f(t) * g(t)] = \widehat{f}(\omega) \widehat{F}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{C}^+$, para $f, g \in \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$ y $F_{t \rightarrow \omega} [\Theta(t) e^{-i\omega_0 t}] = -\frac{1}{i(\omega - \omega_0)}$, $\omega \in \mathbb{C}^+$, entonces obtenemos $u_d(\rho, \theta, t) = \frac{1}{4\Phi} [\Theta(t) e^{-i\omega_0 t} * w_d(\rho, \theta, t)]$. La convolución en la última integral

existe en el sentido usual por (2.74), así que $u_d(\rho, \theta, t) = \frac{1}{4\Phi} \int_0^t e^{-i\omega_0(t-s)} w_d(\rho, \theta, s) ds$.

Remplazando aquí w_d por su expresión (2.73) tenemos

$$u_d(\rho, \theta, t) = \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{4\Phi} \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho\omega_0 \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) f'(s - \rho \cosh \mu) d\mu \right] ds. \quad (2.76)$$

La función $\Theta(t-s) e^{i\rho\omega_0 \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) f'(s - \rho \cosh \mu)$ tiene soporte compacto en \mathbb{R}^2 , con respecto de (μ, s) por (0.8). Esto implica que esta función es integrable. Usando el Teorema de Fubini intercambiamos el orden de integración en (2.76) para obtener

$$\begin{aligned} u_d(\rho, \theta, t) &= \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{4\Phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho\omega_0 \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) \left[\int_0^t f'(s - \rho \cosh \mu) ds \right] d\mu \\ &= \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{4\Phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) f(t - \rho \cosh \mu) d\mu, \end{aligned}$$

por el Teorema de Newton-Leibnitz. Lo cual concluye la demostración. \square

2.8. El campo total para el problema de Neumann

En esta sección, daremos una solución completa u al problema de dispersión de ondas planas sobre cuñas tipo Neumann-Neumann (0.15) con un perfil suave de la onda incidente. Notemos que en la descomposición de u dada en (2.43), tenemos que $u = u_{in} + u_r + u_d$, donde u_{in} , u_r and u_d están dadas explícitamente en (0.9), (2.45) y (2.75), respectivamente.

Definimos $\mathcal{E}_{\varepsilon, N}$ como el espacio de las funciones $u(y, t) \in C(\dot{\bar{Q}} \times \mathbb{R}^+)$ tales que $\nabla u(y, t) \in C(\dot{\bar{Q}} \times \mathbb{R}^+)$ y su norma dada por

$$\|u\|_{\varepsilon, N} := \sup_{t \geq 0} \left[\sup_{y \in \dot{\bar{Q}}} |u(y, t)| + \sup_{y \in \dot{\bar{Q}}} (1+t)^{-N} \{y\}^\varepsilon \left| \nabla_y u(y, t) \right| \right] < \infty, \quad N \geq 0, \quad (2.77)$$

es finita. Aquí $y \in \mathbb{R}^2$, $\{y\}$, $\dot{\bar{Q}}$ están dados en (1.13).

Teorema 2.19. *Supongamos que la onda incidente F tiene la forma (0.7) con el perfil $f(s)$ una función suave que satisface las condiciones (0.8). Entonces la función u dada en (2.43) es una solución clásica del sistema (0.15) que pertenece al espacio $C^\infty(\dot{\bar{Q}} \times \mathbb{R}^+) \cap C(\bar{Q} \times \mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}_{1-2q, 1-2q}$ y además es la única solución en este espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Primero probaremos directamente (sin usar la transformada de Fourier inversa) que u satisface el sistema (0.15). Claramente, u_{in} satisface la ecuación de D'Alembert en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ por (0.9). La función u_r también satisface la misma ecuación en el sentido clásico pero sólo en $\mathbb{R}^+ \times \Theta \times \mathbb{R}$ pues tiene discontinuidades en los rayos críticos $l_k := \{(\rho \cos \theta_k, \rho \sin \theta_k) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0\}$, $k = 1, 2$, donde $\theta_{1,2}$ son los ángulos definidos en (0.6). Más aún, esta función es suave por trozos en \bar{Q}_m , $m = I, II, III$ donde $Q_I := \mathbb{R}^+ \times (\phi, \theta_1) \times \mathbb{R}$, $Q_{II} := \mathbb{R}^+ \times (\theta_1, \theta_2) \times \mathbb{R}$, $Q_{III} := \mathbb{R}^+ \times (\theta_2, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Todas estas afirmaciones se siguen de (2.45). Finalmente, la función u_d también satisface la ecuación de D'Alembert en $\mathbb{R}^+ \times \Theta \times \mathbb{R}$. Esto se puede verificar al derivar directamente bajo el signo de la integral en (2.75) usando la cota (2.57) y la suavidad de las funciones Z_N ($\theta \neq \theta_{1,2}$) y f . Además también es una función suave por trozos en $\bar{Q}_m \setminus \{0\}$. De hecho, la suavidad de u_d en $Q_I \cup Q_1$, Q_{II} y $Q_{III} \cup Q_2$ (ver (0.4)) se sigue de la convergencia uniforme, con respecto a conjuntos compactos en $\mathbb{R}^+ \times \Theta \times \mathbb{R}$, de la integral (2.75) después de la diferenciación con respecto de ρ, θ, t . La diferenciación de u_d fuera de los rayos críticos l_k , es decir la existencia de los límites de las derivadas cuando $\theta \rightarrow \theta_k^\pm$, $k = 1, 2$ se prueba en el Lema 4.15 del Anexo A7. En el mismo Lema se prueba que los saltos de las derivadas en los rayos críticos l_k son opuestos a los saltos de u_r en l_k , así que $u_s = u_d + u_r$ (ver (2.43) y (1.2)) es una función suave en l_k , es decir $u \in C^\infty(\dot{\bar{Q}} \times \mathbb{R}^+)$.

Verifiquemos las condiciones de frontera de Neumann para u . De (0.9) y (2.45) se sigue que $\frac{\partial}{\partial \theta} (u_{in} + u_r) \Big|_{Q_{1,2}} = 0$. De la representación (2.75) para u_d también se sigue que $\frac{\partial}{\partial \theta} u_d \Big|_{Q_{1,2}} = 0$, pues $\frac{\partial}{\partial \theta} Z_N(\mu + i\phi)$ y $\frac{\partial}{\partial \theta} Z_N(\mu + 2i\pi)$ son funciones impares.

Finalmente probemos que $u \in \mathcal{E}_{1-2q, 1-2q}$. Ya probamos que $u \in C(\bar{Q} \times \mathbb{R}^+) \cap C^\infty(\dot{\bar{Q}} \times \mathbb{R}^+)$, así que sólo necesitamos verificar la cota (2.77).

Como $u_{in} \in \mathcal{E}_{0,0}$ y u_r satisface la cota (2.77) con $\varepsilon = N = 1 - 2q$ por (2.45), así que

es suficiente verificar que las siguientes cotas se satisfacen

$$|u_d(\rho, \theta, t)| \leq C, \quad (\rho, \theta, t) \in \overline{Q \times \mathbb{R}^+}, \quad (2.78)$$

$$|\nabla u_d(\rho, \theta, t)| \leq C_\delta(1 + t^{1-2q})(1 + \rho^{-(1-2q)}), \quad 0 < \rho < t. \quad (2.79)$$

La cota (2.78) se sigue de (2.75), pues Z_N satisface la cota (2.57). La prueba de (2.79) coincide con la prueba de (91) y (118) para el problema DD (ver [22, Lemma 12.1, Theorem 12.2, Proposition 14.1]) pues Z_N satisface una cota del tipo [22, Formula (33)] por (2.57).

Finalmente la unicidad de la solución u en el espacio $\mathcal{E}_{1-2q, 1-2q}$ se prueba de la misma forma que se probó la unicidad de la solución en el problema DD (ver [21, Corollary 8.4]). Con lo cual se completa la prueba del Teorema. \square

Corolario 2.20. *La solución $\widehat{u}_s(y, \omega)$ dada por la fórmula (2.23) pertenece al espacio $E_{1-\frac{\pi}{\Phi}}$ y por lo tanto la fórmula (2.23) está justificada.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.19 $u \in \mathcal{E}_{1-\frac{\pi}{\Phi}, 1-\frac{\pi}{\Phi}}$. Por la definición de los espacios $\mathcal{E}_{\varepsilon, N}$, (2.78) y la definición de los espacios E_ε (Definición 1.5) tenemos que si $u \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$, entonces $\widehat{u} \in E_\varepsilon$. Por lo tanto $\widehat{u} \in E_{1-\frac{\pi}{\Phi}}$. Ahora bien, la afirmación del Corolario se sigue de la fórmula (2.26) ya que $\widehat{F}(\omega)e^{i\omega(\mathbf{n}_0 \cdot y)} \in E_0$ para F dada por (0.7) con f como en (0.8). \square

Observación 2.21. *Supongamos que $s_0 = 0$ en (0.8), es decir*

$$f(s) = \mathcal{H}(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2.80)$$

donde $\mathcal{H}(s)$ es la función de Heaviside. En este caso, la fórmula (2.75) para la onda difractada tiene la forma

$$u_d(\rho, \theta, t) = \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{4\Phi} \int_{-\text{ac}(\frac{t}{\rho})}^{\text{ac}(\frac{t}{\rho})} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde

$$\text{ac}(x) := \begin{cases} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases} \quad (2.81)$$

Todas las afirmaciones del Teorema 2.19 siguen siendo válidas, con excepción de las continuidades de los frentes de u_{in} , u_r y u_d , los cuales tienen saltos generados por el salto de f en 0.

Observación 2.22. *En el caso (2.80), la onda incidente u_{in} dada en (0.7) no es una función suave, sino que es una función generalizada, ya que no es continua. Por lo tanto, la solución del problema de dispersión (0.5) no necesariamente pertenece al espacio \mathcal{E}_ε definido por (2.77). De hecho la solución u pertenece al espacio \mathcal{M}_ε con $\varepsilon = 1 - q$, donde \mathcal{M}_ε está dado en la Definición 1.9. Esto se sigue directamente de la representación (2.70) y (2.71). La teoría de dispersión de ondas generalizadas está desarrollado en [21]. En el mismo lugar se demostró que la solución del problema (0.5) es única en \mathcal{M}_ε .*

Observación 2.23. *Una solución para el problema NN (0.15) se expresa por (2.43) con u_d dado por (2.75) no solamente para la cuña de magnitud $0 < \phi < \pi$ y α que satisface (1.1) sino también para el caso en el que $\phi = 0$ y α toma un valor arbitrario (en el caso $\phi = \pi$, la onda difractada $u_d \equiv 0$). Esto se comprueba directamente sustituyendo la función u en el sistema (0.15). Más aún, en cualquier caso el Teorema 2.19 se sigue cumpliendo.*

Capítulo 3

Propiedades de la solución del problema de Neumann y aplicaciones

3.1. El Principio de Amplitud Límite

En esta sección probamos que la amplitud de la solución $u(\rho, \theta, t)$ del problema de dispersión no estacionario NN (0.15) converge a la amplitud límite cuando $t \rightarrow \infty$. Esta amplitud límite es una solución bien conocida para el problema de difracción estacionario, (ver por ejemplo [1]).

Definición 3.1. *Definimos la amplitud límite para las ondas incidente, reflejada y difractada, respectivamente, como*

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{in}(\rho, \theta) := e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta - \alpha)} \\ A_r(\rho, \theta) := \begin{cases} e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta - \theta_1)}, & \phi \leq \theta < \theta_1 \\ 0, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta - \theta_2)}, & \theta_2 < \theta \leq 2\pi \end{cases} \\ A_d(\rho, \theta) := \frac{i}{4\Phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) d\mu \end{array} \right. \quad \rho > 0, \theta \in \Theta, \quad (3.1)$$

donde Z_N está dada por (2.51) y consideremos

$$A_\infty(\rho, \theta) := A_{in}(\rho, \theta) + A_r(\rho, \theta) + A_d(\rho, \theta). \quad (3.2)$$

Introducimos el contorno

$$\mathcal{C}_1^+ := \left[\mathcal{C}_1 + i\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[-\mathcal{C}_1 - i\frac{13\pi}{4} \right], \quad (3.3)$$

donde \mathcal{C}_1 es el lazo definido en (2.28). La orientación de \mathcal{C}_1^+ se muestra en la Figura 8, [22, (35)].

Teorema 3.2. *Sea f una función que satisface (0.8) con $s_0 \geq 0$ y sea u una solución del tipo (2.43) del problema (0.15). Así que para $\theta \in \Theta$ (ver (2.47)), existe una amplitud límite $A(\rho, \theta, t) := u(\rho, \theta, t)e^{i\omega_0 t}$ de la solución u y*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(\rho, \theta, t) = A_\infty(\rho, \theta), \quad (3.4)$$

donde la amplitud límite A_∞ admite la siguiente representación

$$A_\infty(\rho, \theta) := \int_{c_1^+} e^{-\omega_0 \rho \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu. \quad (3.5)$$

Más aún, A_∞ satisface el siguiente problema de dispersión estacionario

$$\begin{cases} (\Delta - \omega_0^2) A_\infty(\rho, \theta) = 0, & (\rho, \theta) \in Q \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} A_\infty(\rho, \theta) = 0, & (\rho, \theta) \in \partial Q \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. De (0.1), (2.45) y (0.8) se sigue que

$$u_{in}(y, t)e^{i\omega_0 t} \longrightarrow A_{in}(\rho, \theta), \quad u_r(y, t)e^{i\omega_0 t} \longrightarrow A_r(\rho, \theta), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (3.6)$$

uniformemente en $\rho \leq \rho_0$, $\theta \in [\phi, 2\pi]$. Para continuar con la demostración del Teorema, en el siguiente Lemma también probamos esta convergencia para la onda difractada.

Lema 3.3. (Principio de Amplitud Límite para la onda difractada). *Sea f el perfil de la onda incidente dado por (0.8) con $s_0 \geq 0$. Entonces, para cada $\rho_0 > 0$ se satisface el siguiente comportamiento asintótico $A_d(\rho, \theta, t) - A_d(\rho, \theta) \longrightarrow 0$, cuando $t \longrightarrow +\infty$, uniformemente para cada $\rho \in [0, \rho_0]$ y $\theta \in \Theta$. Aquí $A_d(\rho, \theta, t) := u_d(\rho, \theta, t)e^{i\omega_0 t}$ y $A_d(\rho, \theta)$ está definida en (3.1).*

DEMOSTRACIÓN. La representación (2.75) implica que

$$A_d(\rho, \theta, t) = \frac{i}{4\Phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} f(t - \rho \cosh \mu) Z_N(\mu + i\theta) d\mu. \quad (3.7)$$

Sólo faltaría probar que

$$A_d(\rho, \theta, t) \longrightarrow A_d(\rho, \theta), \quad t \longrightarrow +\infty \quad (3.8)$$

uniformemente con respecto de $\rho \in [0, \rho_0]$ y $\theta \in \Theta$. Por (3.1) y (3.7)

$$A_d(\rho, \theta, t) - A_d(\rho, \theta) = \frac{i}{4\Phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} \left[f(t - \rho \cosh \mu) - 1 \right] Z_N(\mu + i\theta) d\mu. \quad (3.9)$$

Fijemos $\rho_0 > 0$, $\theta \in [\phi, 2\pi]$ y $\varepsilon > 0$. Como los polos de $Z_N(\mu + i\theta)$ se encuentran sólo cuando $\mu = 0$ por (2.51), existe $C > 0$ tal que $|Z_N(\mu + i\theta)| \leq C$, $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \geq 1$, $\theta \in [\phi, 2\pi]$.

Vamos a elegir $\bar{\mu} > 1$ tal que $\frac{8C\Phi e^{-\frac{\pi}{\Phi}|\bar{\mu}|}}{\pi} < \varepsilon$. Entonces por (2.51), (2.57) y (0.8)

$$\int_{|\mu| \geq \bar{\mu}} \left| e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} \left[f(t - \rho \cosh \mu) - 1 \right] Z_N(\mu + i\theta) \right| d\mu < 8C \int_{\mu \geq \bar{\mu}} e^{-\frac{\pi}{\Phi}\mu} d\mu < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nos falta probar la convergencia a cero de la integral (3.9) sobre $[-\bar{\mu}, \bar{\mu}]$. Tenemos que $\cosh \mu_1(\rho, \theta) = \frac{t - s_0}{\rho_0} \geq \cosh \bar{\mu}$, para $t \geq s_0 + \rho_0 \cosh \bar{\mu}$, donde μ_1 es una solución no

negativa de la ecuación $\cosh \mu_1 = \frac{t - s_0}{\rho_0}$. Esto implica que $f(t - \rho \cos \mu) = 1$ para $\mu \in [-\bar{\mu}, \bar{\mu}]$, $t \geq s_0 + \rho_0 \cosh \bar{\mu}$, $\rho \leq \rho_0$. De aquí que

$$\int_{-\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} \left| e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} [f(t - \rho \cosh \mu) - 1] Z_N(\mu + i\theta) \right| d\mu = 0 < \varepsilon, \quad t \geq s_0 + \rho_0 \cosh \bar{\mu}, \quad \rho \leq \rho_0.$$

Esto completa la demostración del Lema 3.3. \square

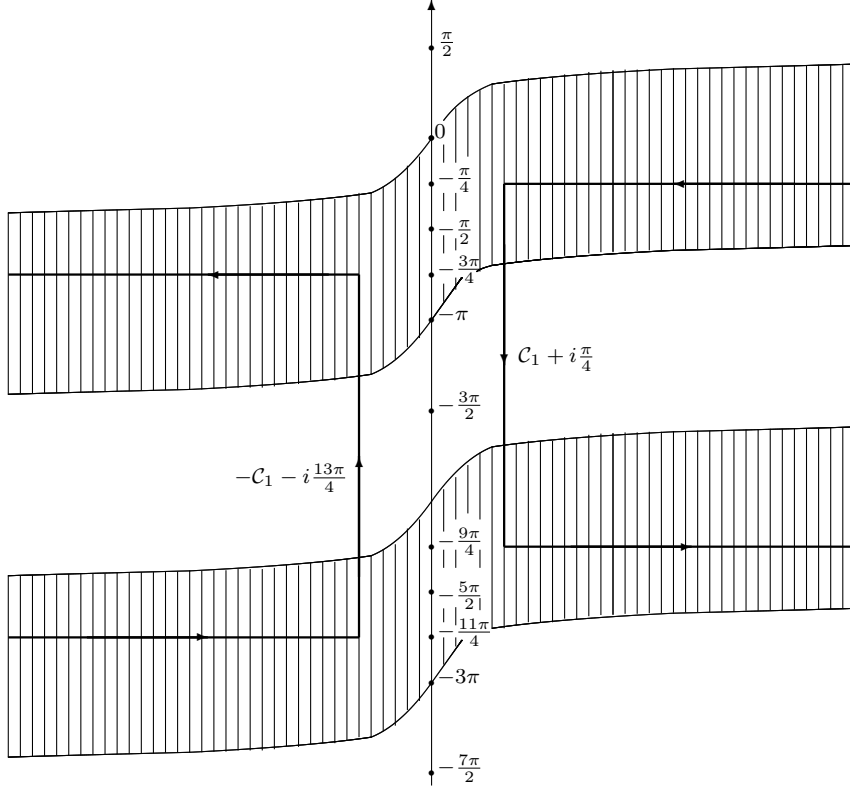


Figura 8. Contorno \mathcal{C}_1^+ .

Continuamos ahora con la demostración del Teorema 3.2. Usando el Lema 3.3, deducimos que (3.4) se sigue de (2.43) y (3.6).

Vamos a probar la representación (3.5) para A_∞ . Consideremos

$$\bar{A} := \frac{i}{4\Phi} \int_{\mathcal{C}^+} e^{-\omega_0 \rho \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu. \quad (3.10)$$

Probaremos que $\bar{A} = A_\infty$, donde A_∞ está definida por (3.2). Definamos los contornos \mathcal{C}_0^+ y Γ^+ como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0^+ &:= \gamma_1^+ \cup (\gamma_1^+ - 2i\pi), \\ \Gamma^+ &:= \left\{ \mu_1 + i \left[\frac{\pi}{4} \mu_1 - \frac{\pi}{2} \right] : -1 \leq \mu_1 \leq 1 \right\} \cup \left\{ 1 + i\mu_2 : -\frac{9\pi}{4} \leq \mu_2 \leq -\frac{\pi}{4} \right\} \\ &\quad \cup \left\{ \mu_1 + i \left[\frac{\pi}{4} \mu_1 - \frac{5\pi}{2} \right] : -1 \leq \mu_1 \leq 1 \right\} \cup \left\{ -1 + i\mu_2 : -\frac{11\pi}{4} \leq \mu_2 \leq -\frac{3\pi}{4} \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\gamma_1^+ := \left\{ \mu_1 - i\frac{\pi}{4} : \mu_1 \geq 1 \right\} \cup \left\{ \mu_1 + i \left[\frac{\pi}{4}\mu_1 - \frac{\pi}{2} \right] : -1 \leq \mu_1 \leq 1 \right\} \cup \left\{ \mu_1 - i\frac{3\pi}{4} : \mu_1 \leq -1 \right\}.$$

(Ver la Figura 9). Notemos que por (3.3)

$$\int_{C_1^+} e^{-\omega_0 \rho \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu = \int_{C_0^+} e^{-\omega_0 \rho \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu + \int_{\Gamma^+} e^{-\omega_0 \rho \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu. \tag{3.11}$$

También usando el Teorema de Cauchy de los Residuos obtenemos

$$\int_{\Gamma^+} e^{-\omega_0 \rho \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu = -2i\pi \sum_{p \in R_1(\theta)} \text{Res}(e^{-\omega_0 \rho \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta), p),$$

donde $R_1(\theta)$ es el conjunto de todos los polos de la función $e^{-\omega_0 \rho \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta)$ que se encuentran en el interior de Γ^+ . Calculando los residuos mediante (2.54), (1.1) y (0.4), obtenemos

$$\int_{\Gamma^+} e^{-\omega_0 \rho \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu = -4i\Phi \begin{cases} e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta-\alpha)} + e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta-\theta_1)}, & \theta \in [\phi, \theta_1], \\ e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta-\alpha)}, & \theta \in [\theta_1, \theta_2], \\ e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta-\alpha)} + e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta-\theta_2)}, & \theta \in (\theta_2, 2\pi]. \end{cases}$$

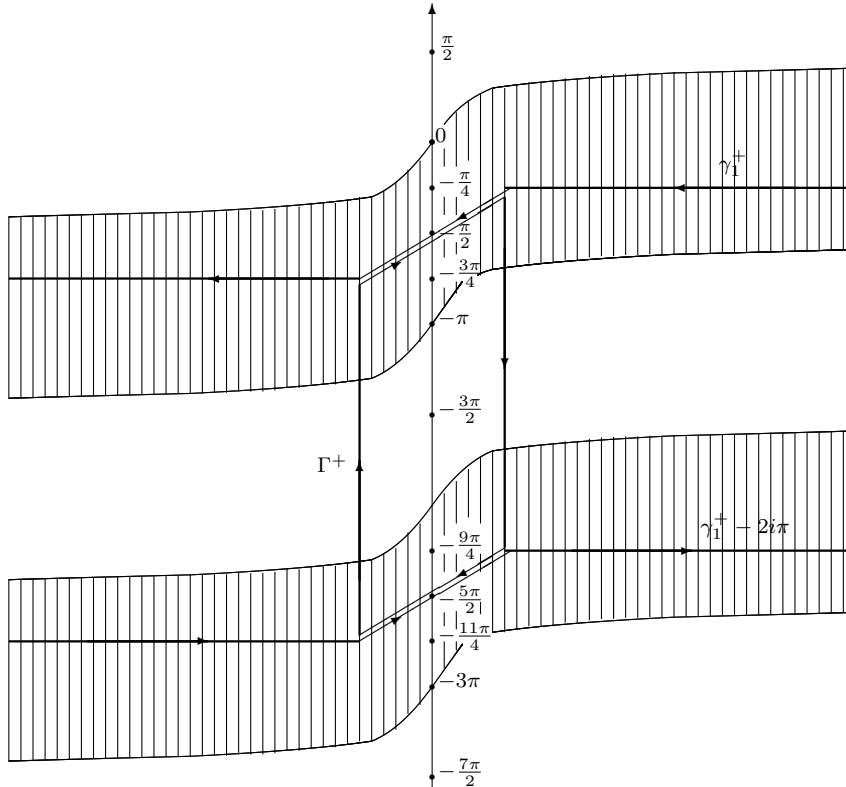


Figura 9. Los contornos C_0^+ y Γ^+

Así que por (3.10), (3.11), (3.8) deducimos que $\bar{A} := A_{in} + A_r + \bar{A}_d$, con

$$\bar{A}_d := \frac{i}{4\Phi} \int_{C_0^+} e^{-\omega_0 \rho \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta) d\mu.$$

Por lo tanto, para concluir la prueba del Teorema, bastaría probar que

$$\bar{A}_d = A_d, \quad (3.12)$$

por (3.2). Haciendo el cambio de variable $\mu \mapsto \mu + i\frac{\pi}{2}$ y luego el cambio de variable $\mu \mapsto \mu + 2i\pi$ en la integral sobre $\gamma_1^+ - i\frac{3\pi}{2}$ obtenemos

$$\bar{A}_d = -\frac{i}{4\Phi} \int_{\gamma_1^+ + i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) d\mu,$$

donde Z_N está definida en (2.51). Ahora estamos en las condiciones de transformar el contorno $\gamma_1^+ + i\frac{\pi}{2}$ en el contorno \mathbb{R} usando el decrecimiento exponencial de Z_N . Esto es, por el Teorema de Cauchy de los Residuos, (2.57), el hecho de que $Z_N(\mu + i\theta)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus P(\theta)$ (ver (2.54)) y (2.57), obtenemos que

$$\int_{\gamma_1^+ + i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) d\mu = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) d\mu.$$

Por lo tanto (3.12) se sigue. De este modo, el Teorema 3.2 está probado. \square

3.2. La velocidad de convergencia de la amplitud límite

En esta sección analizamos con más detalle la diferencia entre la amplitud de la onda difractada no estacionaria y su amplitud límite en el caso cuando el perfil f de la onda incidente es la función de Heaviside (ver (2.80)). Sea

$$R_d(\rho, \theta, t) := A_d(\rho, \theta) - A_d(\rho, \theta, t), \quad \rho \geq 0, \theta \neq \theta_{1,2}, t \geq 0, \quad (3.13)$$

donde $A_d(\rho, \theta)$, $A_d(\rho, \theta, t)$ están definidas en (3.1) y (3.7), respectivamente. Como f es la función de Heaviside,

$$R_d(\rho, \theta, t) = \frac{i}{4\Phi} \int_{|\mu| \geq \text{ac}(\frac{t}{\rho})} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} Z_N(\mu + i\theta) d\mu, \quad (3.14)$$

donde Z_N y $\text{ac}(\cdot)$ están definidas en (2.51) y (2.81), respectivamente. Primero, necesitamos una expansión de $Z_N(\mu + i\theta)$.

Lema 3.4. *La función Z_N admite la siguiente representación*

$$Z_N(\mu + i\theta) = ib_1 \left[\sum_{k=1}^6 z_k^\pm e^{\mp 2kq\mu} + r_1^\pm(\mu) e^{\mp 14q\mu}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \right] \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned}
 b_1 &:= 4 \sin\left(\frac{\pi^2}{\Phi}\right); \\
 z_1^\pm &= z_1^\pm(\theta, \alpha) := e^{\pm 2iq(\pi-\theta+\alpha)} [1 + e^{\pm 4iq(\pi-\alpha)}], \\
 z_2^\pm &= z_2^\pm(\theta, \alpha) := e^{\pm 2iq(\pi-2\theta+2\alpha)} [1 + e^{\pm 8iq(\pi-\alpha)}] [1 + e^{\pm 4iq\pi}], \\
 z_m &:= z_m^+ + z_m^- \in \mathbb{R}, \quad m = \overline{1, 6}; \quad |z_m^\pm(\theta, \alpha)| \leq C, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad m = \overline{2, 6}; \\
 z_1 &= z_1(\theta, \alpha) = 4 \cos\left[\frac{\pi}{\Phi}(2\pi - \theta)\right] \cos\left[\frac{\pi}{\Phi}(\pi - \alpha)\right]; \\
 |r_1^\pm(\mu, \theta, \alpha)| &\leq C, \quad \pm\mu \geq \frac{\ln 2}{q}, \quad \theta \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

DEMOSTRACIÓN. De (2.51) y (2.10) se sigue que $Z_N(\mu) = H_1(\mu) + H_2(\mu)$, $\mu \in \mathbb{C}$, donde

$$H_k(\mu) = \frac{\sinh(2iq\pi)}{\sinh[q(\mu + i(-1)^k\alpha - 2i(k-1)\pi)] \sinh[q(\mu + i(-1)^k\alpha - 2ik\pi)]},$$

para $k = 1, 2$. Sean $\mu := \mu_1 + i\mu_2$ y $s = s(\mu_1) := e^{-q\mu_1}$. Entonces, para $k = 1, 2$, la función H_k admite la expansión

$$H_k(\mu) = -ib_1 \left[\sum_{j=1}^6 h_{k,j}^\pm s^{\pm 2j} + r_1(s^{\pm 1}, e^{\pm ic_{k,1}(\mu_2)}, e^{\pm ic_{k,2}(\mu_2)}) s^{\pm 14} \right],$$

donde $c_{1,1}(\mu_2) := q(\mu_2 - \alpha)$, $c_{1,2}(\mu_2) := q(\mu_2 - \alpha - 2\pi)$, $c_{2,1}(\mu_2) := q(\mu_2 + \alpha - 2\pi)$, $c_{2,2}(\mu_2) := q(\mu_2 + \alpha - 4\pi)$. En ambos casos la función $s \mapsto r_1(s, a_1, a_2)$ es analítica en $B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ para todos los $a_1, a_2 \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y admiten la cota

$$|r_1(s, a_1, a_2)| \leq C_1, \quad |s| \leq 2^{-1}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{T}. \tag{3.17}$$

Más aún, $h_{1,1}^\pm = e^{\mp 2iq(\mu_2 - \alpha - \pi)}$, $h_{2,1}^\pm = e^{\mp 2iq(\mu_2 + \alpha - 3\pi)}$ y $h_{k,j}^+ + h_{k,j}^- \in \mathbb{R}$, para $k = 1, 2$; $j = \overline{1, 6}$. Todas estas afirmaciones se prueban de manera similar a [12, Proposition 2.1 (iii)]. Por lo tanto, considerando $\mu_2 = 0$ deducimos (3.15), (3.16). \square

Lema 3.5. *La función $R_d(\rho, \theta, t)$ admite la siguiente representación*

$$R_d(\rho, \theta, t) = -\frac{b_1}{4\Phi} \left[\sum_{m=1}^6 z_m E_{2qm} + R_\infty(\rho, \theta, t) \right], \tag{3.18}$$

donde b_1, z_m están dadas en (3.16) para $m = \overline{1, 6}$,

$$E_p := E_p(\rho, t) = \int_{\text{ac}\left(\frac{t}{\rho}\right)}^{+\infty} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu - p\mu} d\mu \tag{3.19}$$

y

$$|R_\infty(t, \rho, \theta)| \leq C(\rho_0) t^{-14q}, \quad t \geq \rho_0 2^{\frac{1}{q}}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de (3.14), (3.15) y de la paridad del integrando en (3.19). La cota (3.20) se sigue de (3.16), (3.17). \square

El resultado principal de esta sección es la descripción de la velocidad de convergencia de la amplitud límite. Siguiendo la idea de [19], encontramos por separado esta velocidad para la parte real y para la parte imaginaria.

Teorema 3.6. *Sea R_d la función definida en (3.13). Las partes real e imaginaria de la función $e^{-i\omega_0 t} R_d$ tienen el siguiente comportamiento asintótico cuando $t \rightarrow +\infty$*

$$\operatorname{Re}[e^{-i\omega_0 t} R_d(\rho, \theta, t)] = -\frac{b_1 z_1 (2q+1)}{4\Phi\omega_0^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2q} t^{-(2q+2)} + O(t^{-(4q+2)}), \quad (3.21)$$

$$\operatorname{Im}[e^{-i\omega_0 t} R_d(\rho, \theta, t)] = -\frac{b_1 z_1}{4\Phi\omega_0} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2q} t^{-(2q+1)} + O(t^{-(4q+1)}), \quad (3.22)$$

donde $0 < \rho \leq \rho_0$ y el símbolo $O(\cdot)$ depende solamente de ρ_0 .

DEMOSTRACIÓN. Después del cambio de variable $u = \frac{\rho}{t} e^\mu$, la función E_p dada en (3.19), toma la forma $E_p(\rho, t) = \left(\frac{\rho}{t}\right)^p B_p(\rho, t)$, donde

$$B_p(\rho, t) = \int_{1+\sqrt{1-(\frac{\rho}{t})^2}}^{+\infty} e^{i\omega_0 \frac{u^2 t^2 + \rho^2}{2ut}} u^{-p-1} du.$$

Similarmente a la prueba de [12, Lemma 3.2] obtenemos las siguientes expansiones

$$E_p(\rho, t) = \frac{\rho^p}{t^{p+1}} \bar{E}_p(\rho, t) + \frac{2(p+1)}{i\omega_0} \cdot \frac{\rho^p}{t^{p+2}} \bar{E}_{p+1}(\rho, t) + O\left(\frac{1}{t^{p+3}}\right), \quad (3.23)$$

donde $\bar{E}_p(\rho, t) = -\frac{2}{i\omega_0} e^{i\omega_0 t} \left[\frac{t}{t + \sqrt{t^2 - \rho^2}} \right]^{p+1}$. Expandimos \bar{E}_p como en (4.48) (Anexo A7) y sustituimos en (3.23) para obtener

$$E_p(\rho, t) = -e^{i\omega_0 t} \frac{\rho^p}{2^p(i\omega_0)} \cdot \frac{1}{t^{p+1}} - e^{i\omega_0 t} \frac{\rho^p(p+1)}{2^p(i\omega_0)^2} \cdot \frac{1}{t^{p+2}} + O\left(\frac{1}{t^{p+3}}\right).$$

Finalmente, sustituyendo estas expresiones en (3.18) y usando (3.20) obtenemos

$$\begin{aligned} e^{-i\omega_0 t} R_d(\rho, \theta, t) &= -\frac{b_1 z_1}{4\Phi} \left[\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2q} \frac{2q+1}{\omega_0^2} t^{-(2q+2)} - \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2q} \frac{1}{i\omega_0} t^{-(2q+1)} \right] \\ &\quad - \frac{b_1 z_2}{4\Phi} \left[\left(\frac{\rho}{2}\right)^{4q} \frac{4q+1}{\omega_0^2} t^{-(4q+2)} - \left(\frac{\rho}{2}\right)^{4q} \frac{1}{i\omega_0} t^{-(4q+1)} \right] \\ &\quad + \sum_{j=3}^6 m_j t^{-(2qj+2)} + i \sum_{j=3}^6 n_j t^{-(2qj+1)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^6 O(t^{-(2qj+3)}) + r_\infty(\rho, \theta, t) t^{-14q}, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $m_j, n_j \in \mathbb{R}$ por (3.16) y $|r_\infty(\rho, \theta, t)| \leq C(\rho_0)$. Notemos que $q > \frac{1}{4}$ por (0.4), así que (3.21) y (3.22) se cumplen. \square

3.3. El caso del semiplano

En esta sección consideramos el caso $\Phi = 2\pi$ (ver Observación 2.23) y comparamos nuestros resultados con los resultados de [19].

Proposición 3.7. *Sean $\Phi = 2\pi$ y f la función de Heaviside. Entonces la representación (2.75) para la onda difractada puede se puede reescribir como*

$$u_d(\rho, \theta, t) = \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\text{ac}(\frac{t}{\rho})}^{\text{ac}(\frac{t}{\rho})} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} A(\mu) d\mu, \quad t \geq 0, \quad (3.25)$$

donde

$$A(\mu) := \frac{-\sinh \frac{i\alpha}{2}}{2} \left[\frac{\cosh \frac{\mu+i\theta}{2}}{\sinh \frac{\mu+i\theta+i\alpha}{2} \sinh \frac{\mu+i\theta-i\alpha}{2}} + \frac{\cosh \frac{\mu-i\theta}{2}}{\sinh \frac{\mu-i\theta-i\alpha}{2} \sinh \frac{\mu-i\theta+i\alpha}{2}} \right]. \quad (3.26)$$

Más aún,

$$u_d(\rho, \theta, t) = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\pi} \int_{-\text{ac}(\frac{t}{\rho})}^{\text{ac}(\frac{t}{\rho})} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} \left[\frac{\cosh \frac{\mu}{2} \cosh \frac{i\theta}{2}}{\cosh \mu + \cosh(i\theta)} \right] d\mu. \quad (3.27)$$

para $\alpha = \pi$.

DEMOSTRACIÓN. La representación (3.25) se sigue de (2.51), (2.10) y (2.75) cuando $f = \mathcal{H}$ y $\Phi = 2\pi$. La representación (3.27) se sigue de (3.25) cuando $\alpha = \pi$. \square

Observación 3.8. *En el caso del semiplano ($\Phi = 2\pi$) y la función de Heaviside f , la representación (3.25) para la onda difractada coincide con la representación de la onda difractada Φ_d dada por (43) y modificada de acuerdo a [19, Section 3.3] cuando $\theta_0 \neq 0$. Para $\theta_0 = 0$*

$$u_d(\rho, \theta, t) = 2\Phi_d(\rho, \theta, t) \quad (3.28)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos

$$\theta_0 = \alpha - \pi \quad (3.29)$$

el ángulo que corresponde a la orientación de la onda incidente en nuestro problema. Cuando $\theta_0 \neq 0$, la onda difractada obtenida en [19] mediante la fórmula (43) y modificada de acuerdo a [19, Section 3.3] (la denotaremos por Φ_d) se expresa de la siguiente manera para $c_0 = 1$ (omitimos la parte que corresponde a la onda incidente, ver [19, página 210])

$$\Phi_d(\rho, \theta, t) = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\pi} \left[-\text{sgn}(\pi - (\theta - \theta_0)) \sqrt{\rho(1 + \cos(\theta - \theta_0))} \int_{\rho}^t \frac{e^{i\omega_0 s}}{\sqrt{s - \rho}(s + \rho \cos(\theta - \theta_0))} ds \right. \\ \left. -\text{sgn}(\pi - (\theta + \theta_0)) \sqrt{\rho(1 + \cos(\theta + \theta_0))} \int_{\rho}^t \frac{e^{i\omega_0 s}}{\sqrt{s - \rho}(s + \rho \cos(\theta + \theta_0))} ds \right]. \quad (3.30)$$

Haciendo el cambio de variable $s := \rho \cosh \mu$ y usando la paridad de los integrandos obtenidos después del cambio de variable podemos reescribir a Φ_d como

$$\Phi_d(\rho, \theta, t) = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\operatorname{ac}(\frac{t}{\rho})}^{\operatorname{ac}(\frac{t}{\rho})} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} \left[-\operatorname{sgn}(\pi - (\theta - \theta_0)) \frac{\cosh \frac{i(\theta - \theta_0)}{2} \cosh \frac{\mu}{2}}{\cosh \mu + \cosh(i(\theta - \theta_0))} \right. \\ \left. - \operatorname{sgn}(\pi - (\theta + \theta_0)) \frac{\cosh \frac{i(\theta + \theta_0)}{2} \cosh \frac{\mu}{2}}{\cosh \mu + \cosh(i(\theta + \theta_0))} \right] d\mu.$$

Vamos a considerar el caso $\theta > \theta_0 + \pi$, $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$. Los otros casos se analizan de manera similar. De (3.29) obtenemos

$$\Phi_d(\rho, \theta, t) = \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\operatorname{ac}(\frac{t}{\rho})}^{\operatorname{ac}(\frac{t}{\rho})} e^{i\omega_0 \rho \cosh \mu} B(\mu) d\mu, \quad (3.31)$$

donde

$$B(\mu) := \left[\frac{\sinh \frac{i(\theta - \alpha)}{2}}{\cosh \mu - \cosh(i(\theta - \alpha))} - \frac{\sinh \frac{i(\theta + \alpha)}{2}}{\cosh \mu - \cosh(i(\theta + \alpha))} \right] \cosh \frac{\mu}{2}. \quad (3.32)$$

Los polos y residuos de $A(\mu)$ y $B(\mu)$ coinciden y ambas funciones son periódicas de periodo $2i\pi$. Más aún, de (3.26) y (3.32), $|A(\mu)| \leq C e^{\frac{\operatorname{Re}|\mu|}{2}}$ y $|B(\mu)| \leq C e^{\frac{|\operatorname{Re} \mu|}{2}}$, respectivamente. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Liouville $A \equiv B$. Esto prueba que (3.25) y (3.31) son funciones idénticamente iguales.

Cuando $\theta_0 = 0$, [19, (43)] implica que

$$\Phi_d(\rho, \theta, t) = -\frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\pi} \operatorname{sgn}(\pi - \theta) \sqrt{\rho(1 + \cos \theta)} \int_{\rho}^t \frac{e^{i\omega_0 s}}{\sqrt{s - \rho}(s + \rho \cos \theta)} ds. \quad (3.33)$$

Haciendo el cambio de variable $s = \rho \cosh \mu$ y usando la paridad del integrando en la integral obtenida, deducimos (3.28). \square

Observación 3.9. *Este hecho nos lleva a la diferencia en los términos principales del comportamiento asintótico de la amplitud cuando $t \rightarrow \infty$. De hecho, en el caso de $\Phi = 2\pi$, $\alpha = \pi$ tenemos que para cada $0 < \rho \leq \rho_0$, $t \geq \rho_0 2^4$ se tiene el siguiente comportamiento asintótico cuando $t \rightarrow \infty$*

$$\operatorname{Re}[e^{-i\omega_0 t} R_d(\rho, \theta, t)] = -\frac{3\sqrt{\rho}}{\sqrt{2} \pi \omega_0^2} \cos \frac{\theta}{2} t^{-\frac{5}{2}} + O(t^{-\frac{7}{2}}), \\ \operatorname{Im}[e^{-i\omega_0 t} R_d(\rho, \theta, t)] = -\frac{\sqrt{2\rho}}{\pi \omega_0} \cos \frac{\theta}{2} t^{-\frac{3}{2}} + O(t^{-\frac{5}{2}}).$$

Esto se sigue de (3.24) y (3.16) pues en este caso $z_2 = 0$. Por otro lado, de [19, (61)] se sigue que $\operatorname{Re} \Phi_d \sim -\operatorname{sgn}(\pi - \theta) \frac{\sqrt{\eta}(3\xi + \eta)}{4\pi \xi^{\frac{3}{2}}(\xi + \eta)^2} \left[1 + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \right]$, cuando $\xi \rightarrow \infty$, donde

$\xi = \omega_0(t - \rho)$ y $\eta = \omega_0\rho(1 + \cos\theta)$. Por lo tanto

$$\operatorname{Re} \Phi_d = -\frac{3\sqrt{\rho}}{2\sqrt{2} \pi\omega_0^2} \cos\frac{\theta}{2} t^{-\frac{5}{2}} + O(t^{-\frac{7}{2}}).$$

Análogamente, de [19, (62)] obtenemos que

$$\operatorname{Im} \Phi_d = -\frac{\sqrt{2\rho}}{2\pi\omega_0} \cos\frac{\theta}{2} e^{i\omega_0 t} t^{-\frac{3}{2}} + O(t^{-\frac{5}{2}}).$$

Capítulo 4

Anexo

4.1. Anexo A1. Algunas relaciones entre los ángulos α y Φ

Lema 4.1. *Los valores α y Φ , definidos en (1.1) y (0.4), respectivamente, satisfacen cada una de las siguientes condiciones*

a) $\alpha + \Phi > \frac{3\pi}{2}$.

b) $-\frac{\pi}{2} + \alpha + 2\Phi > \pi$.

c) $-\frac{\pi}{2} + \alpha - 2\Phi < -\Phi$.

d) $\frac{3\pi}{2} - \alpha + 2\Phi > \pi$.

e) $\frac{3\pi}{2} - \alpha - 2\Phi < -\Phi$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de cálculos directos al considerar (0.4) y (1.1). □

Lema 4.2. *Los ángulos ϕ , Φ y α , definidos en (0.3), (0.4) y (1.1) respectivamente, satisfacen las siguientes desigualdades*

$$0 < -2\pi + \alpha + 2\Phi \tag{4.1}$$

$$-2\pi > \alpha - 2\Phi - \phi \tag{4.2}$$

$$0 > \alpha - 2\Phi \tag{4.3}$$

$$2\pi < \alpha + 3\Phi \tag{4.4}$$

$$\phi < 2\pi - \alpha \tag{4.5}$$

$$2\pi < 4\pi - \alpha \tag{4.6}$$

$$2\phi < 2\pi + \alpha \tag{4.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a usar (0.3), (0.4) y (1.1).

- Como $\Phi > \pi$, entonces $2\Phi > 2\pi$. Además $\alpha > 0$, entonces $\alpha + 2\Phi > 2\pi > 2\pi$, lo cual implica (4.1).

- Como $\alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\Phi > \pi$, entonces $\alpha - \Phi < -\frac{\pi}{2} < 0$. Así que $\alpha - 2\Phi - \phi = \alpha - 2\Phi + \Phi - 2\pi < -2\pi$, lo que prueba (4.2).
- Como $\alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\Phi > \pi$, entonces $\alpha - \Phi < 0$. Así que $\alpha - 2\Phi < \alpha - \Phi < 0$, con lo que (4.3) queda probado.
- Como $\Phi > \pi$, entonces $3\Phi > 3\pi$. Además $\alpha > 0$, entonces $\alpha + 3\Phi > 3\Phi > 3\pi$, lo cual implica (4.4).
- Como $\alpha < \frac{\pi}{2}$, entonces $2\pi - \alpha > 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} > \pi$. Y como $\phi < \pi$, se deduce (4.5).
- Como $\alpha < \frac{\pi}{2}$, entonces $4\pi - \alpha > 4\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} > 2\pi$, lo cual implica (4.6).
- Como $\phi < \pi$, entonces $2\phi < 2\pi$. Además $\alpha > 0$, entonces $2\pi + \alpha > 2\pi$, de donde se deduce (4.7).

Con lo cual se concluye la demostración del Lema. □

4.2. Anexo A2. Algunos hechos de las funciones trigonométricas

Lema 4.3. *Si $0 < \varepsilon < 1$ y $\omega = \omega_1 + i\omega_2 \in \mathbb{C}^+$, entonces*

$$-\frac{\omega_1}{\omega_2} \tanh \mu_1 \cos \mu_2 + \sin \mu_2 \geq \sin \varepsilon, \quad \mu = \mu_1 + i\mu_2 \in \check{V}_{1,\varepsilon}^+. \quad (4.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si $\mu = \mu_1 + i\mu_2 \in \check{V}_{1,\varepsilon}^+$, entonces

$$A + \varepsilon < \mu_2 < \pi - A - \varepsilon,$$

donde

$$A := A(\omega, \mu_1) = \arctan \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \tanh \mu_1 \right). \quad (4.9)$$

De hecho, existe $\delta \in \left(\varepsilon, \frac{\pi}{2} \right)$ tal que

$$\mu_2 = A + \delta. \quad (4.10)$$

Además (4.9) implica que,

$$\sin A = \frac{\omega_1 \tanh \mu_1}{\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2 \tanh^2 \mu_1}} \quad \text{y} \quad \cos A = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2 \tanh^2 \mu_1}}. \quad (4.11)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sin \mu_2 &= \sin(A + \delta) = \frac{\omega_1 \tanh \mu_1 \cos \delta + \omega_2 \sin \delta}{\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2 \tanh^2 \mu_1}}, \\ \cos \mu_2 &= \cos(A + \delta) = \frac{-\omega_1 \tanh \mu_1 \sin \delta + \omega_2 \cos \delta}{\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2 \tanh^2 \mu_1}}. \end{aligned}$$

Así que

$$-\frac{\omega_1}{\omega_2} \tanh \mu_1 \cos \mu_2 + \sin \mu_2 = \sin \delta \sqrt{1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \tanh^2 \mu_1} \geq \sin \delta > \sin \varepsilon.$$

Por lo tanto (4.8) se satisface. \square

4.3. Anexo A3. Aplicación del Operador de Laplace a la función discontinua v_τ

Considerando la función v_τ definida en (1.35), tenemos los siguientes resultados.

Proposición 4.4.

$$\begin{aligned} \Delta_x v_\tau(x_1, x_2) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 + \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 \\ &\quad - \delta(x_1 + \tau) \Theta(x_2 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} v(-\tau, x_2) - \delta'(x_1 + \tau) \Theta(x_2 + \tau) v(-\tau, x_2) \\ &\quad - \delta(x_2 + \tau) \Theta(x_1 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_2} v(x_1, -\tau) - \delta'(x_2 + \tau) \Theta(x_1 + \tau) v(x_1, -\tau). \end{aligned} \quad (4.12)$$

DEMOSTRACIÓN. Derivando a la función v_τ con respecto de x_1 en el sentido $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_1 + \tau) v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau).$$

De donde

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v_\tau(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 - \frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x_1 + \tau) v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau).$$

Por un lado:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_1 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau) \quad (4.13)$$

Por otro lado

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x_1 + \tau) v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau) = \delta'(x_1 + \tau) v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau). \quad (4.14)$$

Así que de (4.13) y (4.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v_\tau(x_1, x_2) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_1 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau) \\ &\quad - \delta'(x_1 + \tau) v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Similarmente obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v_\tau(x_1, x_2) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_2 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_2} v(x_1, -\tau) \Theta(x_1 + \tau) \\ &\quad - \delta'(x_2 + \tau) v(x_1, -\tau) \Theta(x_1 + \tau). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Así que (4.12) se sigue de la suma de (4.15) y (4.16). \square

Lema 4.5.

$$\begin{aligned}
-2 \cos \Phi \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) &= -2 \cos \Phi \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 & (4.17) \\
&+ 2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, -\tau) \Theta(x_1 + \tau) \\
&+ 2 \cos \Phi \delta(x_1 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_2} v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau) \\
&+ 2 \cos \Phi \delta(x_1 + \tau) \delta(x_2 + \tau) v(-\tau, -\tau).
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left[\frac{\partial}{\partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_1 + \tau) v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 - \frac{\partial}{\partial x_2} [\delta(x_1 + \tau) v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau)].
\end{aligned}$$

Por un lado:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_2 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, -\tau) \Theta(x_1 + \tau).$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} [\delta(x_1 + \tau) v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau)]$$

$$\begin{aligned}
&= \delta(x_1 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_2} [v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau)] \\
&= \delta(x_1 + \tau) \left[\left[\frac{\partial}{\partial x_2} v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau) \right]_0 + \delta(x_2 + \tau) v(-\tau, -\tau) \right] \\
&= \delta(x_1 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_2} [v(-\tau, x_2) \Theta(x_2 + \tau)] + \delta(x_1 + \tau) \delta(x_2 + \tau) v(-\tau, -\tau).
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_2 + \tau) \Theta(x_1 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, -\tau) \\
&\quad - \delta(x_1 + \tau) \Theta(x_2 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_2} v(-\tau, x_2) - v(-\tau, -\tau) \delta(x_1 + \tau) \delta(x_2 + \tau).
\end{aligned}$$

De donde se deduce (4.17). □

Lema 4.6. $-\frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\Delta_x v_\tau(x_1, x_2) - 2 \cos \Phi \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right] =$

$$\begin{aligned}
 = & \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_1}v(-\tau, x_2) + \delta'(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)v(-\tau, x_2) \right. \\
 & + \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_2}v(x_1, -\tau) + \delta'(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau) \\
 & - 2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_1}v(x_1, -\tau) \\
 & - 2 \cos \Phi \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_2}v(-\tau, x_2) \\
 & \left. - 2 \cos \Phi v(-\tau, -\tau)\delta(x_1 + \tau)\delta(x_2 + \tau) \right].
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

DEMOSTRACIÓN. De (4.12) y (4.17) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \Delta_x v_\tau(x_1, x_2) - 2 \cos \Phi \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) = & \\
 = & \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 + \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 - 2 \cos \Phi \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right]_0 \\
 & - \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_1}v(-\tau, x_2) - \delta'(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)v(-\tau, x_2) \\
 & - \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_2}v(x_1, -\tau) - \delta'(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau). \\
 & + 2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_1}v(x_1, -\tau) \\
 & + 2 \cos \Phi \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_2}v(-\tau, x_2) \\
 & + 2 \cos \Phi v(-\tau, -\tau)\delta(x_1 + \tau)\delta(x_2 + \tau).
 \end{aligned}$$

De donde se deduce (4.18). □

Lema 4.7. *En $\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$ se satisfacen los siguientes límites*

$$\begin{array}{l}
 \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_1}v(-\tau, x_2) \longrightarrow \delta(x_1)v_2^1(x_2) \\
 \delta'(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)v(-\tau, x_2) \longrightarrow \delta'(x_1)v_2^0(x_2) \\
 \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_2}v(x_1, -\tau) \longrightarrow \delta(x_2)v_1^1(x_1) \\
 \delta'(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau) \longrightarrow \delta'(x_2)v_1^0(x_1) \\
 -2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_1}v(x_1, -\tau) \longrightarrow -2 \cos \Phi \delta(x_2)\frac{d}{dx_1}v_1^0(x_1) + 2v(0) \cos \Phi \delta(x) \\
 -2 \cos \Phi \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_2}v(-\tau, x_2) \longrightarrow -2 \cos \Phi \delta(x_1)\frac{d}{dx_2}v_2^0(x_2) + 2v(0) \cos \Phi \delta(x) \\
 -2 \cos \Phi v(-\tau, -\tau)\delta(x_1 + \tau)\delta(x_2 + \tau) \longrightarrow -2v(0) \cos \Phi \delta(x)
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_1}v(-\tau, x_2) \\ \delta'(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)v(-\tau, x_2) \\ \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_2}v(x_1, -\tau) \\ \delta'(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau) \\ -2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_1}v(x_1, -\tau) \\ -2 \cos \Phi \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\frac{\partial}{\partial x_2}v(-\tau, x_2) \\ -2 \cos \Phi v(-\tau, -\tau)\delta(x_1 + \tau)\delta(x_2 + \tau) \end{array}} \right| \tau \rightarrow 0+. \tag{4.19}$$

DEMOSTRACIÓN. A continuación la demostración de algunas de estas afirmaciones, las demás se demuestran de forma simétrica a las que aquí se presentan.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \left[\delta(x_1 + \tau) \Theta(x_2 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} v(-\tau, x_2) \right] &= \delta(x_1) \Theta(x_2) \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial x_1} v(-\tau, x_2) \\
&= \delta(x_1) \left[\Theta(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} v(0, x_2) \right] \\
&= \delta(x_1) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v(0, x_2) \right]_0 \\
&= \delta(x_1) v_2^1(x_2)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} [\delta'(x_1 + \tau) \Theta(x_2 + \tau) v(-\tau, x_2)] = \delta'(x_1) [\Theta(x_2) v(0, x_2)] = \delta'(x_1) v_2^0(x_2).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \left[-2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau) \Theta(x_1 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, -\tau) \right] &= -2 \cos \Phi \delta(x_2) \Theta(x_1) \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, -\tau) \\
&= -2 \cos \Phi \delta(x_2) \left[\Theta(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, 0) \right] \\
&= -2 \cos \Phi \delta(x_2) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, 0) \right]_0.
\end{aligned}$$

En $\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$ y por la definición de v_1^0 tenemos

$$\frac{d}{dx_1} v_1^0(x_1) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, 0) \right]_0 + \delta(x_1) v_1^0(0) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, 0) \right]_0 + \delta(x_1) v(0),$$

de donde

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, 0) \right]_0 = \frac{d}{dx_1} v_1^0(x_1) - \delta(x_1) v(0).$$

Así que

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \left[-2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau) \Theta(x_1 + \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, -\tau) \right] \\
&= -2 \cos \Phi \delta(x_2) \left[\frac{d}{dx_1} v_1^0(x_1) - \delta(x_1) v(0) \right] \\
&= -2 \cos \Phi \delta(x_2) \frac{d}{dx_1} v_1^0(x_1) + 2 \cos \Phi \delta(x_1) \delta(x_2) v(0) \\
&= -2 \cos \Phi \delta(x_2) \frac{d}{dx_1} v_1^0(x_1) + 2v(0) \cos \Phi \delta(x).
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.8. *La siguiente identidad se satisface*

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\Delta_x v_\tau(x_1, x_2) - 2 \cos \Phi \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} v_\tau(x_1, x_2) \right] \right] = \\ = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\delta(x_1) v_2^1(x_2) + \delta(x_2) v_1^1(x_1) + \delta'(x_1) v_2^0(x_2) + \delta'(x_2) v_1^0(x_1) \right. \\ \left. - 2 \cos \Phi \delta(x_1) \frac{d}{dx_2} v_2^0(x_2) - 2 \cos \Phi \delta(x_2) \frac{d}{dx_1} v_1^0(x_1) + 2v(0) \cos \Phi \delta(x) \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue directamente de (4.18) y (4.19). \square

4.4. Anexo A4. Algunas identidades de la trigonometría hiperbólica

Lema 4.9. *Para todos $A, B \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\coth A + \tanh B = \frac{2 \cosh(A + B)}{\sinh(A + B) + \sinh(A - B)}. \quad (4.21)$$

Lema 4.10. *Para todos $A, B \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\tanh A - \coth B = -\frac{2 \cosh(A - B)}{\sinh(A + B) - \sinh(A - B)}. \quad (4.22)$$

Lema 4.11. *Si $a = i\frac{\pi}{2} - i\alpha$ y $b = i\frac{\pi}{2} + i\alpha$, entonces*

$$\cos \alpha = -i \sinh a \quad (4.23)$$

$$i \sinh \mu - \cos \alpha = 2i \sinh \left(\frac{\mu + a}{2} \right) \cosh \left(\frac{\mu - a}{2} \right) \quad (4.24)$$

$$i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha = 2i \sinh \left(\frac{\mu + 2i\Phi + a}{2} \right) \cosh \left(\frac{\mu + 2i\Phi - a}{2} \right) \quad (4.25)$$

$$\cosh \mu + \sin \alpha = 2i \sinh \left(\frac{\mu - b}{2} \right) \cosh \left(\frac{\mu - a}{2} \right) \quad (4.26)$$

$$\cosh(\mu + 2i\Phi) - \sin \alpha = 2i \sinh \left(\frac{\mu + 2i\Phi - a}{2} \right) \cosh \left(\frac{\mu + 2i\Phi - b}{2} \right) \quad (4.27)$$

$$\cosh \left(\frac{\mu + 2i\Phi - b}{2} \right) = -i \sinh \left(\frac{\mu + 2i\Phi + a}{2} \right) \quad (4.28)$$

$$\sinh \left(\frac{\mu - b}{2} \right) = -i \cosh \left(\frac{\mu + a}{2} \right) \quad (4.29)$$

$$\sinh(a - i\Phi) = i \cos(\Phi + \alpha) \quad (4.30)$$

$$\cosh(a - i\Phi) = \sin(\Phi + \alpha) \quad (4.31)$$

Lema 4.12. *Si $\mu \in \mathbb{C}$ entonces*

$$-\frac{2 \sin(\Phi + \alpha)}{i \sinh(\mu + i\Phi) - \cos(\Phi + \alpha)} = \frac{\cosh \mu + \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \frac{\cosh(\mu + 2i\Phi) - \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha}. \quad (4.32)$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar (4.32), usaremos los resultados expuestos en los Lemas 4.9, 4.10 y 4.11. Primero desarrollamos el lado derecho de (4.32). Usando las hipótesis del Lema 4.11, (4.24)-(4.27), desarrollando y simplificando tenemos que

$$\frac{\cosh \mu + \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \frac{\cosh(\mu + 2i\Phi) - \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} = \frac{\sinh\left(\frac{\mu-b}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\mu+a}{2}\right)} - \frac{\sinh\left(\frac{\mu+2i\Phi-a}{2}\right) \cosh\left(\frac{\mu+2i\Phi-b}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\mu+2i\Phi+a}{2}\right) \cosh\left(\frac{\mu+2i\Phi-a}{2}\right)},$$

así que sustituyendo (4.29) y (4.28), respectivamente tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\cosh \mu + \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \frac{\cosh(\mu + 2i\Phi) - \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} &= \frac{-i \cosh\left(\frac{\mu+a}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\mu+a}{2}\right)} - \frac{-i \sinh\left(\frac{\mu+2i\Phi-a}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\mu+2i\Phi-a}{2}\right)} \\ &= i \left[\tanh\left(\frac{\mu + 2i\Phi - a}{2}\right) - \coth\left(\frac{\mu + a}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

de modo que al usar (4.22) y simplificar tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\cosh \mu + \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \frac{\cosh(\mu + 2i\Phi) - \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} &= \\ &= -i \frac{2 \cosh\left(\frac{\mu+2i\Phi-a}{2} - \frac{\mu+a}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\mu+2i\Phi-a}{2} + \frac{\mu+a}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\mu+2i\Phi-a}{2} - \frac{\mu+a}{2}\right)} \\ &= -2i \frac{\cosh(i\Phi - a)}{\sinh(\mu + i\Phi) - \sinh(i\Phi - a)} \\ &= -2i \frac{\cosh(a - i\Phi)}{\sinh(\mu + i\Phi) + \sinh(a - i\Phi)}. \end{aligned}$$

Finalmente al utilizar (4.30), (4.31) y desarrollar obtenemos (4.32). \square

4.5. Anexo A5. Propiedades de la función H_N

Lema 4.13. Si $\mu(\theta)$ es un polo de $\tau_1(\mu + i\theta)$ o es un polo de $\tau_2(\mu + i\theta)$ (ver (2.16)), entonces

$$\text{Res}(\tau_k(\mu + i\theta), \mu(\theta)) = \frac{1}{q} = \frac{2\Phi}{\pi}, \quad k = 1, 2. \quad (4.33)$$

DEMOSTRACIÓN. Si μ es polo de τ_1 , entonces

$$\text{Res}(\tau_1, \mu) = \frac{\cosh[q(\mu - p_1)]}{q \cosh[q(\mu - p_1)]} = \frac{1}{q}.$$

Análogamente, si μ es polo de τ_2 , entonces

$$\text{Res}(\tau_2, \mu) = \frac{\cosh[q(\mu - p_1^*)]}{q \cosh[q(\mu - p_1^*)]} = \frac{1}{q}.$$

En cualquier caso se obtiene (4.33). \square

Lema 4.14. Para $\theta \in [\phi, 2\pi]$ se tiene lo siguiente

a) Los polos de $H_N(\mu + i\theta)$ en Π_2 son

$$\mu_1(\theta) = -i\frac{\pi}{2} + i\alpha - i\theta, \quad \theta \in [\phi, 2\pi] \quad (4.34)$$

$$\mu_2(\theta) = i\frac{3\pi}{2} - i\alpha - i\theta, \quad \theta \in [\theta_2, 2\pi] \quad (4.35)$$

$$\mu_3(\theta) = -i\frac{5\pi}{2} + 2i\phi - i\alpha - i\theta, \quad \theta \in [\phi, \theta_1], \quad (4.36)$$

donde θ_1, θ_2 son los ángulos definidos en (0.6).

b) Los polos de la función $e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta)$ en Π_2 son los puntos $\mu_1(\theta), \mu_2(\theta)$ y $\mu_3(\theta)$, descritos en (4.34), (4.35) y (4.36), respectivamente. Además

$$\text{Res}(e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta), \mu_1(\theta)) = \frac{2\Phi}{\pi} e^{i\rho\omega \cos(\alpha-\theta)}, \quad \phi \leq \theta \leq 2\pi, \quad (4.37)$$

$$\text{Res}(e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta), \mu_2(\theta)) = \frac{2\Phi}{\pi} e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_2)}, \quad \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (4.38)$$

$$\text{Res}(e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta), \mu_3(\theta)) = \frac{2\Phi}{\pi} e^{i\rho\omega \cos(\theta-\theta_1)}, \quad \phi \leq \theta \leq \theta_1. \quad (4.39)$$

DEMOSTRACIÓN. a) De acuerdo a (2.12), los polos μ de $H_N(\mu + i\theta)$ en \mathbb{C} son de la forma

$$\left. \begin{aligned} \mu_{1,k}(\theta) &:= -i\frac{\pi}{2} + i\alpha + 2ik\Phi - i\theta \\ \mu_{2,k}(\theta) &:= i\frac{3\pi}{2} - i\alpha + 2ik\Phi - i\theta \end{aligned} \right| k \in \mathbb{Z}. \quad (4.40)$$

De esta familia de polos de $H_N(\mu + i\theta)$, debemos considerar sólo aquellos que se encuentran en la franja Π_2 , es decir aquellos tales que $\text{Im } \mu \in \left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$.

Af.1 Si $k \geq 1$ ó $k \leq -1$, entonces $\mu_{1,k}(\theta) \notin \Pi_2$, para todo $\theta \in [\phi, 2\pi]$.

En efecto, $\mu_{1,k}(\theta) \in \Pi_2$ si y sólo si $-2\pi < \alpha + 2k\Phi - \theta < 0$.

- Si $k \geq 1$, entonces $\alpha + 2\Phi - \theta \leq \alpha + 2k\Phi - \theta$. Si $\theta \in [\phi, 2\pi]$, $-\theta \geq -2\pi$, entonces $\alpha + 2\Phi - 2\pi \leq \alpha + 2\Phi - \theta$. De donde $\alpha + 2\Phi - 2\pi \leq \alpha + 2k\Phi - \theta$. Así que por (4.1), $\alpha + 2k\Phi - \theta > 0$. Por lo tanto $\mu_{1,k}(\theta) \notin \Pi_2$.
- Si $k \leq -1$, entonces $\alpha + 2k\Phi - \theta \leq \alpha - 2\Phi - \theta$. Si $\theta \in [\phi, 2\pi]$, $-\theta \leq -\phi$, entonces $\alpha - 2\Phi - \theta \leq \alpha - 2\Phi - \phi$. De donde $\alpha + 2k\Phi - \theta \leq \alpha - 2\Phi - \phi$. Así que por (4.2), $\alpha + 2k\Phi - \theta < -2\pi$. Por lo tanto $\mu_{1,k}(\theta) \notin \Pi_2$.

Lo cual prueba la Afirmación 1.

Af.2 $\mu_{1,0}(\theta) \in \Pi_2$, para todo $\theta \in [\phi, 2\pi]$.

En efecto, por definición $\mu_{1,0}(\theta) = -i\frac{\pi}{2} + i\alpha - i\theta$. Si $\theta \in [\phi, 2\pi]$, por un lado

$\theta \leq 2\pi$, entonces $\alpha - \theta \geq \alpha - 2\pi$ y como $\alpha > 0$, entonces $\alpha - 2\pi > -2\pi$, lo cual implica que $\alpha - \theta > -2\pi$. Por otro lado, como $\theta \geq \phi$, entonces $-\theta \leq -\phi$. Y por (1.1), $\alpha < \phi$, de donde $\alpha - \theta < \phi - \phi = 0$. Así que $-2\pi < \alpha - \theta < 0$, para todo $\theta \in [\phi, 2\pi]$. De donde, $-\frac{5\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta < -\frac{\pi}{2}$, para todo $\theta \in [\phi, 2\pi]$. Por lo tanto $\mu_{1,0}(\theta) \in \Pi_2$, para todo $\theta \in [\phi, 2\pi]$.

Lo cual prueba la Afirmación 2. Más aún, para todo $\theta \in [\phi, 2\pi]$, $\mu_{1,0}(\theta)$ es un polo de $H_N(\mu + i\theta)$ del tipo (4.34).

Af.3 Si $k \geq 1$ ó $k \leq -2$, entonces $\mu_{2,k}(\theta) \notin \Pi_2$, para todo $\theta \in [\phi, 2\pi]$.

En efecto, $\mu_{2,k}(\theta) \in \Pi_2$ si y sólo si $2\pi \leq \alpha - 2k\Phi + \theta \leq 4\pi$.

- Si $k \geq 1$ y $\theta \in [\phi, 2\pi]$, entonces $\alpha - 2k\Phi + \theta \leq \alpha - 2\Phi + \theta$. Como $\theta \leq 2\pi$, entonces $\alpha - 2\Phi + \theta \leq \alpha - 2\Phi + 2\pi$. Entonces $\alpha - 2k\Phi + \theta \leq \alpha - 2\Phi + 2\pi$. Además de (4.3), $\alpha - 2\Phi + 2\pi < 2\pi$. Lo cual implica que $\alpha - 2k\Phi + \theta < 2\pi$. Por lo tanto $\mu_{2,k}(\theta) \notin \Pi_2$.
- Si $k \leq -2$ y $\theta \in [\phi, 2\pi]$, entonces $\alpha - 2k\Phi + \theta \geq \alpha + 4\Phi + \theta$. Como $\theta \geq \phi$, entonces $\alpha + 4\Phi + \theta \geq \alpha + 4\Phi + \phi = \alpha + 4\Phi + 2\pi - \Phi = \alpha + 3\Phi + 2\pi$. Además de (4.4), $\alpha + 3\Phi + 2\pi > 4\pi$. Lo cual implica que $\alpha - 2k\Phi + \theta > 4\pi$. Por lo tanto $\mu_{2,k}(\theta) \notin \Pi_2$.

Lo cual prueba la Afirmación 3.

Af.4 $\mu_{2,0}(\theta) \in \Pi_2$ si y sólo si $\theta \in [\theta_2, 2\pi]$.

En efecto, por definición $\mu_{2,0} = i\frac{3\pi}{2} - i\alpha - i\theta$. De tal forma que $\mu_{2,0}(\theta) \in \Pi_2$ si y sólo si $-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} - \alpha - \theta \leq -\frac{\pi}{2}$ y $\theta \in [\phi, 2\pi]$, lo cual es equivalente a $2\pi \leq \alpha + \theta \leq 4\pi$ y $\phi \leq \theta \leq 2\pi$. Esto sucede si y sólo si $2\pi - \alpha \leq \theta \leq 4\pi - \alpha$ y $\phi \leq \theta \leq 2\pi$. Equivalentemente

$$\max\{2\pi - \alpha, \phi\} \leq \theta \leq \min\{4\pi - \alpha, 2\pi\}$$

Así que por (4.5) y (4.6), podemos concluir que $\mu_{2,0}(\theta) \in \Pi_2$ si y sólo si $\theta \in [2\pi - \alpha, 2\pi]$. De modo que la Afirmación 4, se sigue de la definición de θ_2 dada en (0.6). Más aún, $\mu_{2,0}(\theta)$ es un polo de $H_N(\mu + i\theta)$ del tipo (4.35) si y sólo si $\theta \in [\theta_2, 2\pi]$.

Af.5 $\mu_{2,-1}(\theta) \in \Pi_2$ si y sólo si $\theta \in [\phi, \theta_1]$.

En efecto, por definición $\mu_{2,-1} = i\frac{3\pi}{2} - i\alpha - 2i\Phi - i\theta$. De tal forma que $\mu_{2,-1}(\theta) \in \Pi_2$ si y sólo si $-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} - \alpha - 2\Phi - \theta \leq -\frac{\pi}{2}$ y $\theta \in [\phi, 2\pi]$, lo cual es equivalente a $2\pi \leq \alpha + 2\Phi + \theta \leq 4\pi$ y $\phi \leq \theta \leq 2\pi$. Esto sucede si y sólo si $2\pi - \alpha - 2\Phi \leq \theta \leq$

$4\pi - \alpha - 2\Phi$ y $\phi \leq \theta \leq 2\pi$. Además de la definición de Φ y θ_1 dadas en (0.4) y (0.6), respectivamente, tenemos que $\alpha + 2\Phi = \alpha + 2(2\pi - \phi) = 4\pi + \alpha - 2\phi = 4\pi - \theta_1$. Entonces $\mu_{2,-1}(\theta) \in \Pi_2$ si y sólo si

$$\max\{\theta_1 - 2\pi, \phi\} \leq \theta \leq \min\{\theta_1, 2\pi\}$$

Equivalentemente, por (4.7), $\mu_{2,-1}(\theta) \in \Pi_2$ si y sólo si $\theta \in [\phi, \theta_1]$. Más aún, $\mu_{2,-1}(\theta)$ es un polo de $H_N(\mu + i\theta)$ del tipo (4.36) si y sólo si $\theta \in [\phi, \theta_1]$.

Con lo cual concluimos la demostración de a).

b) Consideramos

$$T(\mu, \rho, \theta) := e^{-\rho\omega \sinh \mu} H_N(\mu + i\theta).$$

Dado que la función $e^{-\rho\omega \sinh \mu}$ es analítica en \mathbb{C} , μ es polo de $T(\mu, \rho, \theta)$ en Π_2 si y sólo si μ es polo de $H_N(\mu + i\theta)$ en Π_2 , así que por el a), los únicos polos de $T(\mu, \rho, \theta)$ en Π_2 son $\mu_1(\theta)$, $\mu_2(\theta)$ y $\mu_3(\theta)$. Además, si μ es un polo de $T(\mu, \rho, \theta)$ en Π_2 :

$$\text{Res}(T, \mu) = e^{-\rho\omega \sinh \mu} \text{Res}(H_N(\mu + i\theta), \mu). \quad (4.41)$$

Ahora analizamos los residuos de T en cada uno de sus 3 tipos de polos.

■ **Residuo de los polos del tipo $\mu_1(\theta)$.**

De (4.34) y la demostración de a) tenemos que $\mu_1(\theta)$ es un polo de τ_1 (ver 2.16), así que por (4.33): $\text{Res}(\tau_1(\mu + i\theta), \mu_1(\theta)) = \frac{2\Phi}{\pi}$. Entonces por (4.41) y (2.15) tenemos

$$\begin{aligned} \text{Res}(T, \mu_1(\theta)) &= e^{-\rho\omega \sinh \mu_1(\theta)} \text{Res}(H_N(\mu + i\theta), \mu_1(\theta)) \\ &= e^{-\rho\omega \sinh \mu_1(\theta)} \text{Res}(\tau_1(\mu + i\theta), \mu_1(\theta)) \\ &= \frac{2\Phi}{\pi} e^{-\rho\omega \sinh(-i\frac{\pi}{2} + i\alpha - i\theta)}. \end{aligned}$$

Por la trigonometría hiperbólica $\sinh(-i\frac{\pi}{2} + i\alpha - i\theta) = -i \cos(\alpha - \theta)$. Entonces

$$\text{Res}(T, \mu_1(\theta)) = \frac{2\Phi}{\pi} e^{i\rho\omega \cos(\alpha - \theta)}, \quad \phi \leq \theta \leq 2\pi.$$

■ **Residuo de los polos del tipo $\mu_2(\theta)$.**

De (4.35) y la demostración de a) tenemos que $\mu_2(\theta)$ es un polo de τ_2 (ver 2.16), así que por (4.33): $\text{Res}(\tau_2(\mu + i\theta), \mu_2(\theta)) = \frac{2\Phi}{\pi}$. Entonces por (4.41) y (2.15) tenemos

$$\begin{aligned} \text{Res}(T, \mu_2(\theta)) &= e^{-\rho\omega \sinh \mu_2(\theta)} \text{Res}(H_N(\mu + i\theta), \mu_2(\theta)) \\ &= e^{-\rho\omega \sinh \mu_2(\theta)} \text{Res}(\tau_2(\mu + i\theta), \mu_2(\theta)) \\ &= \frac{2\Phi}{\pi} e^{-\rho\omega \sinh(i\frac{3\pi}{2} - i\alpha - i\theta)}. \end{aligned}$$

De la trigonometría hiperbólica

$$\sinh\left(i\frac{3\pi}{2} - i\alpha - i\theta\right) = -i \cos(\alpha + \theta) = -i \cos(-2\pi + \alpha + \theta) = -i \cos(\theta - \theta_2),$$

donde θ_2 está definido en (0.6). Entonces

$$\text{Res}(T, \mu_2(\theta)) = \frac{2\Phi}{\pi} e^{i\rho\omega \cos(\theta - \theta_2)}, \quad \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi.$$

■ **Residuo de los polos del tipo $\mu_3(\theta)$.**

De (4.36) y la demostración de a) tenemos que $\mu_3(\theta)$ es un polo de τ_2 (ver 2.16), así que por (4.33): $\text{Res}(\tau_2(\mu + i\theta), \mu_3(\theta)) = \frac{2\Phi}{\pi}$. Entonces por (4.41) y (2.15) tenemos

$$\begin{aligned} \text{Res}(T, \mu_3(\theta)) &= e^{-\rho\omega \sinh \mu_2(\theta)} \text{Res}(H_N(\mu + i\theta), \mu_3(\theta)) \\ &= e^{-\rho\omega \sinh \mu_2(\theta)} \text{Res}(\tau_2(\mu + i\theta), \mu_3(\theta)) \\ &= \frac{2\Phi}{\pi} e^{-\rho\omega \sinh(-i\frac{5\pi}{2} + 2i\phi - i\alpha - i\theta)}. \end{aligned}$$

De la trigonometría hiperbólica

$$\sinh\left(-i\frac{5\pi}{2} + 2i\phi - i\alpha - i\theta\right) = -i \cos(2\phi - \alpha - \theta) = -i \cos(\theta_1 - \theta) = -i \cos(\theta - \theta_1),$$

donde θ_1 está definido en (0.6). Así que

$$\text{Res}(T, \mu_3(\theta)) = \frac{2\Phi}{\pi} e^{i\rho\omega \cos(\theta - \theta_1)}, \quad \phi \leq \theta \leq \theta_1.$$

Lo cual completa la prueba de b). □

4.6. Anexo A6. Saltos de las ondas reflejada y drifractada sobre las direcciones “críticas”

Lema 4.15. Sean u_r , u_d las funciones dadas por (2.45) y (2.75), respectivamente. Entonces

$$\mathfrak{J}\left(\frac{\partial^{(k)}u_r}{\partial\theta^k}, \theta_l\right) = -\mathfrak{J}\left(\frac{\partial^{(k)}u_d}{\partial\theta^k}, \theta_l\right), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad l = 1, 2. \quad (4.42)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el caso $\theta = \theta_1$. El caso $\theta = \theta_2$ se analiza de manera similar.

Primero encontramos $\mathfrak{J}\left(\frac{\partial^{(k)}u_r}{\partial\theta^k}, \theta_1\right)$. De (2.45) se sigue que

$$\mathfrak{J}\left(\frac{\partial^{(k)}u_r}{\partial\theta^k}, \theta_1\right) = -\frac{\partial^{(k)}}{\partial\theta^k} u_{r,1}(\rho, \theta_1, t), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (4.43)$$

Usando coordenadas polares $y = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ en $u_{r,1}$ y haciendo el cambio de variable $\mu = -i(\theta - \theta_1)$ obtenemos $u_{r,1}(\rho, \theta_1, t) = e^{-i\omega_0(t - \rho \cos(\theta - \theta_1))} f(t - \rho \cos(\theta - \theta_1)) = A(\mu, \rho, t)$, donde

$$A(\mu, \rho, t) := e^{-i\omega_0(t - \rho \cosh \mu)} f(t - \rho \cosh \mu). \quad (4.44)$$

Entonces $\frac{\partial^{(k)}}{\partial\theta^k} u_{r,1}(\rho, \theta, t) = (-i)^k \frac{\partial^{(k)}}{\partial\mu^k} A(\mu, \rho, t)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Así que por (4.43), obtenemos

$$\mathfrak{J}\left(\frac{\partial^{(k)}u_r}{\partial\theta^k}, \theta_1\right) = -(-i)^k \frac{\partial^{(k)}}{\partial\mu^k} A(0, \rho, t), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (4.45)$$

Ahora encontramos $\mathfrak{J} \left(\frac{\partial^{(k)} u_d}{\partial \theta^k}, \theta_1 \right)$. De (2.51) y (2.10) se sigue que $Z_N(\rho, \theta, t) = \coth [q(\mu + i\theta - i\theta_1)] + \coth [q(\mu + i\theta - i\theta_2)] - \coth [q(\mu + i\theta - 2i\pi - i\alpha)] - \coth [q(\mu + i\theta - i\alpha)]$. Como la función $\coth [q(\mu + i\theta - i\theta_1)]$ es discontinua en $\theta = \theta_1$, entonces $Z_N(\rho, \theta, t)$ también es discontinua en $\theta = \theta_1$. Así que por (2.75) tenemos que

$$\mathfrak{J} \left(\frac{\partial^{(k)} u_d}{\partial \theta^k}, \theta_1 \right) = \mathfrak{J} \left(\frac{\partial^{(k)} u_1}{\partial \theta^k}, \theta_1 \right), \quad (4.46)$$

donde $u_1(\rho, \theta, t) = -\frac{q}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mu, \rho, t) \coth [q(\mu + i\theta - i\theta_1)] d\mu$ y $A(\mu, \rho)$ está dada por (4.44). Usando $\frac{\partial}{\partial \theta} \coth [q(\mu + i\theta - i\theta_1)] = i \frac{\partial}{\partial \mu} \coth [q(\mu + i\theta - i\theta_1)]$, integrando por partes k veces (for $k = 0$ no integramos $\frac{\partial^{(k)} u_1}{\partial \theta^k}$), y usando que por (0.2) la integración se realiza en un intervalo compacto, obtenemos

$$\frac{\partial^{(k)} u_1(\rho, \theta, t)}{\partial \theta^k} = (-1)^{k-1} \frac{i^k q}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{(k)} A(\mu, \rho, t)}{\partial \mu^k} \cdot \coth [q(\mu + i\theta - i\theta_1)] d\mu.$$

Aplicando el Lema ?? con $f(\mu) = (-1)^{k-1} i^k q \frac{\partial^{(k)} A(\mu, \rho, t)}{\partial \mu^k}$ obtenemos

$$\mathfrak{J} \left(\frac{\partial^{(k)} u_1}{\partial \theta^k}, \theta_1 \right) = (-i)^k \frac{\partial^{(k)} A(0, \rho, t)}{\partial \theta^k}. \quad (4.47)$$

Por lo tanto (4.42) se sigue de (4.46), (4.47) y (4.45). \square

4.7. Anexo A7. Ayuda para el comportamiento asintótico de la solución

Lema 4.16. *La función $\left[\frac{t}{t + \sqrt{t^2 - \rho^2}} \right]^m$ admite el siguiente comportamiento asintótico*

$$\left[\frac{t}{t + \sqrt{t^2 - \rho^2}} \right]^m = \left(\frac{1}{2} \right)^m + m \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} \frac{1}{8} \cdot \frac{\rho^2}{t^2} + O \left(\frac{1}{t^4} \right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.48)$$

Bibliografía

- [1] Babich, V.M., Lyalinov, M.A., Grikurov, V.E.: Diffraction Theory: The Sommerfeld-Malyuzhinets Technique. Alpha Science International. (2007)
- [2] Babich, V.M., Lyalinov, M.A., Grikurov, V.E.: Sommerfeld-Malyuzhinets method in diffraction problems. S.Petersburg University: S.Petersburg (2003)
- [3] Bernard, J.M.L.: Diffraction by a metallic wedge covered by a dielectric material. Wave Motion. **9**, 543-561 (1987)
- [4] Bernard, J.M.L.: On the time domain scattering by a passive classical frequency dependent wedge-shaped region in a lossy dispersive medium. Ann. Telecommun. **49**(11-12), 673-683 (1994)
- [5] Bernard, J.M.L., Pelosi, G., Manara, G., Freni, A.: Time domain scattering by an impedance wedge for skew incidence. Proceedings conference ICEAA. 11-14 (1991)
- [6] Bernard, J.M.L.: Progresses on the diffraction by a wedge: transient solution for line source illumination, single face contribution to scattered field, and new consequence of reciprocity on the spectral function. Rev. Tech. Thomson. **25**(4), 1209-1220 (1993)
- [7] Borovikov, V.A.: Diffraction by Polygons and Polyhedrons, Moscow, Nauka (1966) (in Russian).
- [8] Borovikov, V.A., Kinber, V.Y.: Geometrical Theory of Diffraction. The Institution of Electrical Engineers, London (1994)
- [9] Bouche, D., Molinet, F., Mittra, R.: Asymptotic Methods in Electromagnetics. Springer (1995)
- [10] Budaev, B.V.: Diffraction by Wedges. Pitman Research Notes in Mathematics series 322, Harlow: Longman Scientific and Technical, Great Britain (1995)
- [11] Carslaw, H.S.: Diffraction of waves by a wedge of any angle. Proc. Lond. Math. Soc. S.2, **18**, 291-306 (1920)
- [12] Choque, A., Karlovich, Y., Merzon, A., Zhevandrov, P.: On the convergence of the amplitude of the diffracted nonstationary wave in scattering by wedges. Russ. J. Math. Phys. **19**(3) 373-384 (2012)
- [13] Clemmow, P.C.: The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields. Pergamon Press, Oxford (1966)

- [14] Esquivel, A., Merzon, A.E.: Nonstationary scattering DN-problem of a plane wave by a wedge, Days on Diffraction, Proceedings of the International Conference 2006. Volume, Issue, 187-196 (2006). St. Petersburg, Russia, ISBN: 5-9651-0226-7. Posted on-line 2007-04-16
- [15] Esquivel, A., Merzon, A.E.: An explicit formula for the nonstationary diffracted wave scattered on a NN-wedge. Acta Aplcandae Mathematicae (aceptado)
- [16] Felsen, L.B.: Diffraction of the pulsed field from an arbitrarily oriented electric or magnetic dipole by a perfectly conducting wedge. Siam. J. Appl. Math. **26**(2) 306-312 (1974)
- [17] Filippov, A.F.: A three-dimensional problem of diffraction of an elastic wave at a sharp edge, Appl. Math. Mech., **23**, 989-996 (1959)
- [18] Friedlander, F.G., Joshi, M.S.: Introduction to the theory of distributions. 2nd. Ed. Cambridge University Press, New York (1998)
- [19] Hewett, D.P., Ockendon, J.R., Allwright D.J.: Switching on a Two-Dimensional Time-Harmonic Scalar Wave in the Presence of a Diffracting Edge. Wave Motion **48**(3), 197-213 (2011)
- [20] Keller, J., Blank, A.: Diffraction and reflection of pulses by wedges and corners. Commun. Pur. Appl. Math. **4**(1), 75-95 (1951)
- [21] Komech, A.I., Mauser, N.J., Merzon, A.E.: On Sommerfeld representation and uniqueness in scattering by wedges. Math. Method. Appl. Sci. **28**, 147-183 (2005)
- [22] Komech, A.I., Merzon, A.E.: Limiting Amplitude Principle in the Scattering by Wedges. Math. Method. Appl. Sci. **29**, 1147-1185 (2006)
- [23] Komech, A.I., Merzon, A.E., De La Paz, J.E.: On justification of Sobolev's formula for diffraction by wedge. (En proceso) (2014)
- [24] Komech, A., Merzon, A., Zhevandrov, P.: A method of complex characteristics for elliptic problems in angles and its applications. American Mathematical Society Translation; **206**(2), 125-159 (2002)
- [25] Komech, A.I., Merzon, A.E.: Relation between Cauchy data for the scattering by a wedge. Russ. J. Math. Phys. **14**(3), 279-303 (2007)
- [26] Komech, A.I.: Linear partial differential equations with constant coefficients. In Egorov YuE, Komech AI, Shubin MA. Elements of the Modern Theory of Partial Differential Equations. Springer, Berlin 127-260 (1999)
- [27] Komech, A.I.: Elliptic boundary value problems on manifolds with piecewise smooth boundary. Math. USSR Sbornik; **21**(1): 91-135 (1973)
- [28] Komech, A.I.: Elliptic differential equations with constant coefficients in a cone. Moscow Univ. Math. Bull. Math.-Mech. Series **29**(2): 140-145 (1974)

- [29] Malyuzhinets, G.D.: Excitation, reflection and emission of the surface waves on a wedge with given impedances of the sides. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR+*. **121**(3), 436-439 (1958)
- [30] Malyuzhinets, G.D.: Inversion formula for the Sommerfeld integral. *Soviet Physics Doklady*. **3**, 52-56 (1958)
- [31] Meister, E., Passow, A., Rottbrand, K.: New results on wave diffraction by canonical obstacles. *Operator Theory: Adv. Appl.*; **110**, 235-256 (1999)
- [32] Meister, E., Penzel, F., Speck, F.O., Teixeira, F.S.: Some interior and exterior boundary-value problems for the Helmholtz equations in a quadrant. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **123**(2), 275-294 (1993)
- [33] Meister, E., Speck, F.O., Teixeira, F.S.: Wiener-Hopf-Hankel operators for some wedge diffraction problems with mixed boundary conditions. *J. Integral. Equat. and Applications*. **4**(2), 229-255 (1992)
- [34] Merzon, A., De la Paz Mendez, J.E.: DN-Scattering of a plane wave by wedges. *Math. Method. Appl. Sci.* **34**(15), 1843-1872 (<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mma.1484/abstract>) (2011)
- [35] Oberhettinger, F.: Diffraction of waves by a wedge. *Commun. Pur. Appl. Math.* **7**(3), 551-563 (1954)
- [36] Oberhettinger, F.: On the diffraction and reflection of waves and pulses by wedges and corners. *J. Res. Natl. Inst. Stan.* **61**(2), (1958)
- [37] Osipov, A.V., Norris, A.N.: The Malyuzhinets theory for scattering from wedge boundaries: a review. *Wave Motion*, **30**, 275-288 (1999)
- [38] Petrashen, C.I., Nikolaev, V.G., Kouzov, D.P.: On the series method in the theory of diffraction waves by polygonal regions. *Nauchnie Zapiski LGU* **246**(5), 5-70 (in Russian) (1958)
- [39] Rottbrand, K.: Exact solution for time-dependent diffraction of plane waves by semi-infinite soft/hard wedges and half-planes. Preprint, 1984, Technical University Darmstadt (1998)
- [40] Rottbrand, K.: Time-dependent plane wave diffraction by a half-plane: explicit solution for Rawlins' mixed initial boundary value problem. *Z. Angew. Math. Mech.*; **78**(5): 321-335 (1998)
- [41] Rudin, W.: *Real and Complex analysis*. McGraw-Hill, New York (1987)
- [42] Sobolev, S.L.: On the problem of diffraction of plane waves. In *Differential and Integral Equations of Mathematical Physics*, Frank F., Mises R. (eds). ONTI: Leningrad, 605-616 (in Russian) (1937).
- [43] Sobolev, S.L.: La theorie generale de la diffraction des ondes sur les surfaces de Riemann. *Transactions of Stecloff Institute of Mathematics (Trudy Matematice Fogo Instituta im. Steklova)*; **9**: 39-105 (1935) (in Russian).

- [44] Sobolev, S.L.: Some questions in the theory of propagations of oscillations. Chapter XII, in *Differential and Integral Equations of Mathematical Physics. Part 2* by Frank F. and Mises P. ONTI: Leningrad-Moscow; 468-617 (1937)
- [45] Sommerfeld, A.: *Mathematische Theorie der Diffraction*. *Math. Ann.* **47**, 317-341 (1896)
- [46] Williams, W.E.: *Diffraction of a polarized plane wave by an imperfectly conducting wedge*. *Proc. Roy. Soc. London, Serie A*, **252**(2), 376-393 (1959)