

**Asintóticas para frecuencias altas de ondas
atrapadas por cilindros sumergidos**

Tesis que presenta

RUBEN DARIO ORTIZ ORTIZ

para obtener el grado de Doctor en Matemáticas.

Director de Tesis:

DR. PETR ZHEVANDROV BOLSHAKOVA.

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS.

UNIVERSIDAD MICHOACANA

DE

SAN NICOLÁS DE HIDALGO.

Morelia, Michoacán, Mayo de 2006.

*Dedico este trabajo con todo cariño a mi esposa Ana Magnolia
y a mis hijos Miguel Angel y José Rubén.*

*Doy gracias a todos mis familiares y amigos, a la Universidad Michoacana,
especialmente al IFM,
al C. Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova por su enorme apoyo,
y a los CC. Sinodales.*

Índice general

Introducción	v
1. Teoremas de existencia y unicidad	1
1.1. Introducción	1
1.2. Análisis espectral del operador A	5
1.3. El espectro esencial	9
1.4. Criterios de comparación	13
2. Asintótica de la frecuencia	25
2.1. Introducción	25
2.2. Resultado principal	25
2.3. Reducción a ecuaciones integrales	27
2.4. Solución del sistema	44
2.5. Asintótica del número β	56
Bibliografía	59

Introducción

La pregunta sobre la existencia de modos atrapados por obstáculos sumergidos, es de gran interés. Consideremos el problema de ondas de agua atrapadas por un cilindro sumergido. Desde el punto de vista matemático, se trata de: Supongamos que Γ_C es la curva definida por $\{x = x(t), y = y(t), t \in [-\pi, \pi]\}$ con $x(t)$ y $y(t)$ suaves, $x'^2 + y'^2 \neq 0$, y que $\text{máx } y(t) = y(0)$, $y''(0) < 0$, $x'(0) > 0$. $\Gamma_F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es la superficie libre. Ω es el dominio exterior a la curva Γ_C e inferior a Γ_F ; y llegamos a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = \lambda\phi, & \text{en } \Gamma_F, \\ \frac{\partial\phi}{\partial \vec{n}} = 0, & \text{en } \Gamma_C, \end{array} \right.$$

para la función ϕ ; $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$, ω es la frecuencia y k es el número de ondas en la dirección del cilindro. De aquí en adelante vamos a suponer que las unidades están escogidas de tal manera que $g = 1$. Soluciones de este problema pertenecientes al espacio de Sobolev $H_1(\Omega)$ son llamadas ondas atrapadas y existen sólo para ciertos valores de λ (el valor propio) para k fijo.

Problemas relacionados a este han sido estudiados y discutidos ampliamente en la literatura matemática. Para el caso de la playa con pendiente constante Stokes en [4] demostró la existencia de modos atrapados, obteniendo una solución analítica. Para el caso de la playa con pendiente constante Ursell en [6] demostró la existencia de un número finito $M(\alpha)$ de modos atrapados para valores pequeños del ángulo α , donde $M(\alpha)$ es el entero más grande n para el cual $(2n - 1)\alpha \leq \pi/2$. Para el caso de un cilindro sumergido de longitud infinita que esta en un semiespacio infinito Ursell en [5]-[6] demostró la existencia de ondas guiadas.

Usando la teoría de ecuaciones diferenciales parciales elípticas para dominios no acotados Jones en [7] demostró la existencia de un modo atrapado no solo para cilindros pequeños como los de Ursell, sino para cualquier cilindro horizontal sumergido.

Jones en [7] estableció los teoremas de comparación para las ondas de gravedad de los cuales se obtiene que existe un número finito de modos, para un valor de k .

Para el caso del escalón de Jones, Evans y McIver en [3] demostraron que existe un único modo fundamental para pequeños y grandes valores de k . Más aún, con la ayuda del análisis numérico Evans y McIver obtuvieron el

número de ondas guiadas con gran exactitud. Ursell en [8] obtuvo los mismos resultados de Jones y Garipov con demostraciones más sencillas en las cuales utilizó la teoría de operadores lineales simétricos acotados junto con el teorema de Kelvin de la hidrodinámica clásica, el cual es una versión del principio minimax (ver [2]).

Bonnet-Ben Dhia y Joly en [9] demostraron que existe sólo el modo fundamental para frecuencias altas. Ellos consideraron el problema de ondas de agua que son guiadas a lo largo de la costa y lo redujeron a un problema de valores propios con una familia de operadores autoadjuntos de resolvente no compacta en dimensión dos.

En el trabajo nos ocupamos del problema de ondas atrapadas por un cilindro horizontal sumergido que se propagan a lo largo de la dirección del eje del cilindro y nuestro propósito es construir la asintótica de esta frecuencia para valores grandes de k , donde k es el número de onda.

La tesis se divide en dos capítulos, en el primero se utilizan los principios de comparación (los cuales son consecuencias particulares de los resultados de Jones (1953)) para demostrar la existencia y unicidad de los modos atrapados, para valores grandes de k . Para esto nos guiamos con Bonnet Ben Dhia y Joly [9] en el cual demostraron la existencia y unicidad del modo guiado para

diferentes geometrías, pero el resultado de ellos no nos sirve para aplicarlo directamente porque a diferencia del de nosotros las geometrías del fondo son diferentes, en particular en la de ellos el fondo tiene playa mientras que en la nuestra no la hay. Además trabajamos con parámetros y operadores diferentes; ellos con el parámetro ω y operador no acotado mientras que nosotros con parámetro k ($k \rightarrow \infty$) y operador acotado, lo cual nos reduce los cálculos en la demostración de que el operador es autoadjunto.

En la sección 1.1 enunciamos el problema de ondas de agua atrapadas por un cilindro horizontal sumergido y consideramos un problema auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} = \psi, & \text{en } \Gamma_F, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} = 0, & \text{en } \Gamma_C, \end{array} \right.$$

para una función arbitraria $\psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ que es igual al valor de la derivada normal del potencial en la superficie libre y demostramos que su solución existe y es única. En la sección 1.2 definimos un operador acotado A de la siguiente manera

$$A\psi = \phi|_{y=0}$$

y cuyos autovalores $\frac{1}{\lambda}$ son inversos a las frecuencias de las ondas atrapadas.

Es decir

$$A\psi = \frac{1}{\lambda}\psi$$

y demostramos que es lineal, simétrico y autoadjunto y encontramos que cero es una cota inferior del espectro del operador en mención. Ahora en la sección 1.3 se demuestra que el espectro esencial de este operador es el conjunto $[0, k^{-1}]$, terminamos esta sección definiendo el espectro discreto como el conjunto de valores propios que no están en el espectro esencial, porque nuestro interés es demostrar cuantos valores propios hay por encima del espectro esencial.

En la sección 1.4 establecemos algunos principios para comparar los autovalores de los problemas espectrales asociados a dos curvas cerradas una contenida dentro de la otra; para esto usamos el principio minimax. Con este fin, se consideran los problemas de valores propios con condiciones de Dirichlet y Neumann para un rectángulo de base $2x_0$ y altura y^- , donde y^- es el mínimo de $|y(t)|$. Comparando estos problemas con el nuestro, demostramos la existencia y unicidad de las ondas guiadas cuando $k \rightarrow \infty$.

En el segundo capítulo se usa la teoría potencial y la solución fundamental para el operador de Helmholtz para reducir el problema inicial a un sistema de dos ecuaciones integrales con dos incógnitas, usando una técnica similar a la de Zhevandrov y Merzon en [10] nos va a llevar en la sección 2.5 a encontrar la asintótica de la frecuencia de la onda guiada.

En la sección 2.2 se retoma el problema de ondas de agua atrapadas por un cilindro horizontal sumergido y se enuncia el resultado principal, el cual dice que el único valor propio del problema tiene la forma $\lambda(k) = k - \beta^2$, donde

$$\beta = k \sqrt{\frac{\pi}{2|y''(0)|}} e^{-2k|y(0)|} x'(0) (1 + O(k^{-1})).$$

y su correspondiente función propia

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'\xi + \eta\tau(p')} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(p')}\right) \frac{A(p')}{L(p')} dp' \\ & - \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t) - \xi)^2 + (y(t) - \eta)^2})}{\sqrt{(x(t) - \xi)^2 + (y(t) - \eta)^2}} \\ & \times [y'(t)(x(t) - \xi) - x'(t)(y(t) - \eta)] [(1 - \hat{M}_3)^{-1}(\hat{M}_2 \frac{A}{L})](t) dt, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A(p) = & (1 - \hat{M}_5)^{-1} \frac{2\pi i M_4(p, p_+) A(p_+)}{\frac{d}{dp} L(p)|_{p=p_+}}, \\ L(p) = & 1 - \frac{\lambda}{\tau(p)} \quad \text{con } \tau(p) = \sqrt{k^2 + p^2} \end{aligned}$$

p_+ , \hat{M}_2 , \hat{M}_3 , $M_4(p, p_+)$ y \hat{M}_5 están definidas en secciones 2.3 y 2.4. En la sección 2.3 usando la teoría potencial se reduce el problema a un sistema de dos ecuaciones en términos de las funciones $\tilde{\varphi}$ y θ , donde $\tilde{\varphi}$ es la transformada de Fourier de φ el valor del potencial en la superficie libre y θ es el valor del potencial en el fondo, respectivamente. En la sección 2.4 se lleva el sistema a una ecuación para $\tilde{\varphi}$; usando la técnica de Zhevandrov y Merzon en [10] y

las series de Neumann se resuelve exactamente la ecuación y por último en la sección 2.5 utilizando el método de Laplace se encuentra la asintótica para la β .

Observamos que en nuestro trabajo en comparación con el de [10] las asintóticas se vuelven exponenciales, es decir, la distancia de la frecuencia de las ondas atrapadas al espectro continuo es exponencialmente pequeña en k . Este hecho hace ver al problema muy complicado desde el punto de vista de las expansiones asintóticas, pero, como nosotros construimos una expansión que converge exactamente, no se presentan dichas dificultades.

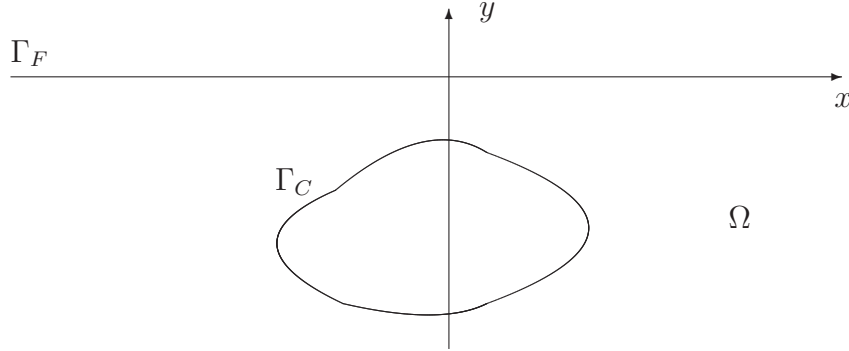
Capítulo 1

Existencia y unicidad

1.1. Introducción

El propósito de este capítulo es utilizar el principio de comparación para demostrar la existencia y unicidad de las ondas guiadas.

La geometría del problema es como sigue: Suponemos que Γ_C es la curva definida por $\{x = x(t), y = y(t), t \in [-\pi, \pi]\}$ con $x(t)$ y $y(t)$ suaves, $x'^2 + y'^2 \neq 0$, y que $\max y(t) = y(0)$, $y''(0) < 0$, $x'(0) > 0$. $\Gamma_F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es la superficie libre. Ω es el dominio exterior a la curva Γ_C e inferior a Γ_F (ver Fig. 1.1).

Figura 1.1: Dominio Ω

Consideremos el siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = \omega^2\phi, & \text{en } \Gamma_F, \\ \frac{\partial\phi}{\partial \vec{n}} = 0, & \text{en } \Gamma_C. \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

Aquí $\phi \in H^1(\Omega)$, H^1 es el espacio de Sobolev estandar de funciones con energía finita, k es el número de onda, ω es la frecuencia. Utilizaremos la siguiente notación

$$y^- = \min_{t \in [-\pi, \pi]} |y(t)|. \quad (1.1.2)$$

Denotemos por ω_0 la solución positiva de la ecuación

$$k = \omega^2, \quad k > 0. \quad (1.1.3)$$

En el presente capítulo demostraremos el siguiente resultado: Si $y^- > 0$, existe un modo guiado a alta frecuencia (ver Sec. 1.4). Consideremos el siguiente problema auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} = \psi, & \text{en } \Gamma_F, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} = 0, & \text{en } \Gamma_C, \end{array} \right. \quad (1.1.4)$$

para $\psi \in L_2(\Gamma_F)$.

Lema 1.1.1. *Para cada $\psi \in L_2(\Gamma_F)$, existe una única $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que ϕ es una solución generalizada de (1.1.4) y satisface las siguientes desigualdades:*

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq \text{Const} \|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}, \quad (1.1.5)$$

$$\|\phi|_{\Gamma_F}\|_{L_2(\Gamma_F)} \leq \text{Const} \|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}. \quad (1.1.6)$$

Demostración. Para cada $\psi \in L_2(\Gamma_F)$, existe una única $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que ϕ es una solución generalizada de (1.1.4), entonces para cualesquiera $\chi \in H^1(\Omega)$, tenemos que aplicando el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\Delta\phi\chi + \nabla\phi \cdot \nabla\chi] dx dy &= \int_{\Omega} \text{div}(\chi\nabla\phi) dx dy \\ &= \int_{\Gamma_F} \frac{\partial\phi}{\partial y} \chi d\sigma + \int_{\Gamma_C} \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} \chi d\sigma. \end{aligned}$$

De (1.1.4),

$$\int_{\Omega} [k^2\phi\chi + \nabla\phi \cdot \nabla\chi] dx dy = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\chi(x, 0) dx. \quad (1.1.7)$$

Definamos

$$B[\phi, \chi] = \int_{\Omega} [k^2 \phi \chi + \nabla \phi \cdot \nabla \chi] dx dy \quad y \quad (\psi, \chi) = \int_{\Gamma_F} \psi(x) \chi(x, 0) d\sigma, \quad (1.1.8)$$

entonces de (1.1.7)

$$B[\phi, \chi] = (\psi, \chi). \quad (1.1.9)$$

Definamos ahora el funcional lineal

$$f : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \chi \mapsto \int_{\Gamma_F} \psi \chi d\sigma. \quad (1.1.10)$$

Dado que $\chi \in H^1(\Omega)$ y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz f es acotado.

En efecto:

$$\left| \int_{\Gamma_F} \psi \chi d\sigma \right| \leq \|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)} \|\chi\|_{L_2(\Gamma_F)} \leq C \|\chi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Del teorema de representación de Riesz, dado que f es lineal y acotado, existe un único elemento $\phi_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $f(\chi) = (\phi_0, \chi)_{H^1(\Omega)}$, para todo $\chi \in H^1(\Omega)$, es decir,

$$\int_{\Gamma_F} \psi \chi d\sigma = (\phi_0, \chi)_{H^1(\Omega)}. \quad (1.1.11)$$

Lo cual demuestra que existe una única $\phi_0 \in H^1(\Omega)$ tal que ϕ_0 es una solución generalizada de (1.1.4). Resta demostrar que ϕ_0 satisface (1.1.5) y (1.1.6). De (1.1.11) y de la definición de producto interno en $H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Gamma_F} \psi \chi d\sigma = \int_{\Omega} (\phi_0 \chi + \nabla \phi_0 \cdot \nabla \chi) dx dy \quad \forall \chi \in H^1(\Omega).$$

En particular para $\chi = \phi_0$, tenemos:

$$\int_{\Gamma_F} \psi \phi_0 d\sigma = \int_{\Omega} (\phi_0^2 + \|\nabla \phi_0\|^2) dx dy = \|\phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (1.1.12)$$

Usando la desigualdad de Schwarz

$$\int_{\Gamma_F} \psi \phi_0 d\sigma \leq \|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)} \|\phi_0\|_{L_2(\Gamma_F)} \quad (1.1.13)$$

Por lo tanto, de (1.1.13) y de (1.1.12), tenemos

$$\|\phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)} \|\phi_0\|_{H^1(\Omega)}.$$

En consecuencia,

$$\|\phi_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}.$$

Lo que demuestra (1.1.5). Para demostrar (1.1.6), tenemos de (1.1.13), (1.1.5)

$$\|\phi_0|_{\Gamma_F}\|_{L_2(\Gamma_F)} \leq C \|\phi_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}.$$

Lo cual demuestra (1.1.6) y en consecuencia el lema. \square

1.2. Análisis espectral del operador A

En esta sección hacemos un análisis cualitativo y se encuentra que cero es una cota inferior del espectro del operador A que definimos a continuación.

Sea $k \in \mathbb{R}$, $k \rightarrow \infty$, definamos el operador acotado A como sigue

$$\begin{aligned} A : L_2(\Gamma_F) &\longrightarrow L_2(\Gamma_F) \\ \psi &\longmapsto A\psi = \phi|_{\Gamma_F}, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

donde ϕ es la solución generalizada correspondiente a ψ , según el lema 1.1.1.

Lema 1.2.1. *El Operador A es lineal, acotado y simétrico.*

Demostración. Para ψ_1 y ψ_2 en $L_2(\Gamma_F)$, existen ϕ_1 y ϕ_2 en $H^1(\Omega)$ soluciones generalizadas de (1.1.4) y tales que

$$A\psi_1 = \phi_1|_{\Gamma_F} \text{ y } A\psi_2 = \phi_2|_{\Gamma_F}. \quad (1.2.2)$$

Demostremos que A es lineal. En efecto, de (1.2.2), de la linealidad del operador derivada normal y del Laplaciano, tenemos que para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi_1 + \lambda\phi_2$ satisface (1.1.4) y por lo tanto, $A(\psi_1 + \lambda\psi_2) = A(\psi_1) + \lambda A(\psi_2)$. Así A es lineal.

De (1.1.6) se tiene que A es acotado. Demostremos que A es simétrico. En efecto de (1.2.2) y de la fórmula de Green

$$\int_{\Omega} (\phi_1 \Delta \phi_2 - \phi_2 \Delta \phi_1) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial \vec{n}} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \vec{n}} \right) ds.$$

De la descomposición de la frontera de Ω y sumando y restando en el lado izquierdo de la igualdad anterior $k^2 \phi_1 \phi_2$, tenemos que:

$$\int_{\Omega} [\phi_1(\Delta\phi_2 - k^2\phi_2) - \phi_2(\Delta\phi_1 - k^2\phi_1)] dx dy = \int_{\Gamma_F} \left(\phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial\vec{n}} - \phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial\vec{n}} \right) ds + \int_{\Gamma_C} \left(\phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial\vec{n}} - \phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial\vec{n}} \right) ds.$$

De la igualdad anterior y de (1.1.4), tenemos que

$$0 = \int_{\Gamma_F} \left(\phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial\vec{n}} - \phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial\vec{n}} \right) ds.$$

De (1.1.4) y sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos

$$\int_{\Gamma_F} A\psi_1\psi_2 ds = \int_{\Gamma_F} A\psi_2\psi_1 ds.$$

Por lo tanto, A es simétrico. \square

Lema 1.2.2. *El operador A es Autoadjunto.*

Demostración. Del Lema 1.2.1 A es acotado y simétrico y como $D(A) = L_2(\Gamma_F)$, entonces A es autoadjunto. \square

Los problemas (1.1.1) y (1.1.4) se relacionan de la siguiente manera: Para $\psi \in L_2(\Gamma_F)$, existe $\phi \in H^1(\Omega)$ que satisface (1.1.4) y

$$\psi = \omega^2\phi|_{\Gamma_F} \quad \text{y} \quad A\psi = \phi|_{\Gamma_F}. \quad (1.2.3)$$

Es decir

$$\omega^{-2}\psi = A\psi. \quad (1.2.4)$$

Por lo tanto,

$$(A\psi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0)\psi(x)dx = \omega^2 \int_{\mathbb{R}} \phi^2(x, 0)dx, \quad (1.2.5)$$

donde (\cdot, \cdot) denota el producto interno en $L_2(\Gamma_F)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (A\psi, \psi) &= (\omega^{-2}\psi, \psi) = \omega^{-2}(\omega^2\phi(x, 0), \omega^2\phi(x, 0)) \\ &= \omega^2(\phi(x, 0), \phi(x, 0)) = \omega^2 \int_{\mathbb{R}} \phi^2(x, 0)dx. \end{aligned}$$

Denotemos por $\sigma(A)$ el espectro del operador A . Del Lema 1.2.2, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos $\lambda \in \rho(A)$ (Conjunto Resolvente), entonces para toda

$\xi \in \text{Ran}(A - \lambda I)$, existe una $\psi \in D(A) = L_2(\Gamma_F)$, tal que $(A - \lambda I)\psi = \xi$.

De (1.2.5),

$$((A - \lambda I)\psi, \psi) = (A\psi, \psi) + (-\lambda)(\psi, \psi) \geq (-\lambda)\|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}^2.$$

Por lo tanto, $N(A - \lambda I) = \{0\}$, siempre que $(-\lambda) > 0$, es decir, $(A - \lambda I)$ es

una biyección y $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, siempre que $(-\lambda) > 0$. De la desigualdad

de Schwartz,

$$-\lambda\|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}^2 \leq \|(A - \lambda I)\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}\|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}.$$

Llamando $(A - \lambda I)\psi = \xi$, tenemos

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\xi\|_{L_2(\Gamma_F)} \leq (-\lambda)^{-1}\|\xi\|_{L_2(\Gamma_F)}.$$

Lo cual significa que $(A - \lambda I)^{-1}$ es acotada siempre que $-\lambda > 0$. Es decir

$\lambda \in \mathbb{R}$ pertenece al conjunto resolvente de A siempre que $-\lambda > 0$, entonces

$$\sigma(A) \subset [0, \infty). \quad (1.2.6)$$

1.3. El espectro esencial

Determinaremos el espectro esencial del operador A .

Teorema 1.3.1. *Se cumple que $[0, k^{-1}] \subset \sigma_{ess}(A)$.*

Demostración. Dado que el espectro esencial es un conjunto cerrado (ver [14]), es suficiente demostrar la siguiente inclusión

$$(0, k^{-1}) \subset \sigma_{ess}(A).$$

Sea $0 < \lambda < k^{-1}$. Consideremos la sucesión de funciones $\psi_n(x) \in L_2(\Gamma_F)$

$$\psi_n(x) = \chi_{ny}(x, 0), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.3.1)$$

donde

$$\chi_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{n}} \theta\left(\frac{y}{n}\right) \eta\left(\frac{x}{n}\right) e^{\frac{|y|}{\lambda}} e^{-i\tau|x|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

con $\tau = \sqrt{k^2 + \lambda^2}$. La escogencia de la función

$$\chi(x, y) = e^{\frac{|y|}{\lambda}} e^{-i\tau|x|},$$

se debe a partir del método de separación de variables. Además, $\chi_n(x, y) \in$

$H^1(\Omega)$ satisface (1.1.4), $\theta, \eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ son tales que

$0 \leq \theta(y), \eta(x) \leq 1$ con $\theta(0), \theta'(0) \neq 0$ y

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \text{ ó } x \geq 3 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Para demostrar que $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ de la definición de espectro esencial (ver [16], páginas 144 y 228), es suficiente demostrar que $\lambda \in C\sigma(A)$, es decir $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface:

i) $\|\psi_n\|_{L_2(\Gamma_F)} > 0$,

ii) $\psi_n \in D(A)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A\psi_n + \lambda\psi_n\|_{L_2(\Gamma_F)} = 0$.

De (1.3.1) y (1.3.2), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_F} |\psi_n(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} |\psi_{ny}(x, 0)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \eta^2\left(\frac{x}{n}\right) \left| \frac{1}{\lambda} \theta(0) + \frac{1}{n} \theta'(0) \right|^2 dx \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \theta(0) + \frac{1}{n} \theta'(0) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(u) du > 0. \end{aligned}$$

Que demuestra i) y garantiza que $\psi_n \in L_2(\Gamma_F)$. De (1.3.1), se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\psi_n - \lambda\psi_n\|_{L_2(\Gamma_F)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |\chi_n(x, 0) - \lambda\chi_{ny}(x, 0)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{n} \theta'(0) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \eta^2\left(\frac{x}{n}\right) dx \right)^{1/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{n} \theta'(0) \left(\int_{\mathbb{R}} \eta^2(u) du \right)^{1/2} = 0. \end{aligned}$$

Así se demuestra ii). □

Ahora demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 1.3.2. *Se cumple que $\sigma_{ess}(A) = [0, k^{-1}]$.*

Demostración. Del teorema 1.3.1 es suficiente demostrar

$$\sigma_{ess}(A) \subset [0, k^{-1}].$$

Sea $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$, entonces existe una sucesión $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del $D(A)$ tal que

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|_{L_2(\Gamma_F)} &= 1, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ A\psi_n - \lambda\psi_n &\rightarrow 0, & \text{fuertemente en } L_2(\Gamma_F), \\ \psi_n &\rightharpoonup 0, & \text{débilmente en } L_2(\Gamma_F). \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

(Ver [16], páginas 144 y 228) Sumando y restando $k^{-1}(\psi_n, \psi_n)$, tenemos que

$$(A\psi_n, \psi_n) - k^{-1}(\psi_n, \psi_n) = p(k; \psi_n, \psi_n),$$

donde

$$p(k; \psi_n, \psi_n) = (A\psi_n - k^{-1}\psi_n, \psi_n),$$

entonces

$$(A\psi_n, \psi_n) - k^{-1}\|\psi_n\|_{L_2(\Gamma_F)}^2 = p(k; \psi_n, \psi_n). \tag{1.3.4}$$

De (1.3.3), $\psi_n \rightharpoonup 0$, débilmente en $L_2(\Gamma_F)$, es decir, para toda $\chi \in L_2(\Gamma_F)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi \psi_n(x) dx \rightarrow 0.$$

Así que tomando:

$$\chi = A\psi_n - k^{-1}\psi_n,$$

tenemos $p(k; \psi_n, \psi_n) < 0$ y $p(k; \psi_n, \psi_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces,

$$(A\psi_n, \psi_n) - k^{-1}\|\psi_n\|_{L_2(\Gamma_F)}^2 < 0.$$

Tenemos

$$|(A\psi_n - \lambda\psi_n, \psi_n)| = |(A\psi_n, \psi_n) - \lambda|;$$

por (1.3.3) también tenemos

$$(A\psi_n, \psi_n) \rightarrow \lambda \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Entonces, $\lambda \in [0, k^{-1}]$. Lo cual completa la demostración del teorema. \square

Denotemos por $\sigma_d(A)$ al conjunto de valores propios del operador A que no pertenecen al espectro esencial $\sigma_{ess}(A)$.

De (1.2.6) y del teorema 1.3.2 deducimos que:

$$\sigma_d(A) \subset (k^{-1}, +\infty). \quad (1.3.5)$$

En lo que sigue denotemos por

$$N := N(k) \text{ el número de valores propios de } \sigma_d(A), \quad (1.3.6)$$

cada uno de ellos contado un número de veces igual a su multiplicidad. Decimos que N es el número de modos guiados para un cierto valor de k .

1.4. Criterios de comparación

En esta sección utilizando algunos criterios de comparación, establecemos que existe a lo más un modo guiado a alta frecuencia cuando

$$y^- > 0. \quad (1.4.1)$$

Definamos las funciones $S_m := S_m(k)$ como siguen:

$$S_1 = \sup_{\psi \in L_2(\Gamma_F), \psi \neq 0} \frac{(A\psi, \psi)}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}^2}, \quad (1.4.2)$$

donde $(A\psi, \psi)$ está definida en (1.2.5). Para cada entero $m > 1$,

$$S_m = \inf_{V \in \mathcal{V}_m(\Gamma_F)} \sup_{\psi \in V^\perp, \psi \neq 0} \frac{(A\psi, \psi)}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}^2}, \quad (1.4.3)$$

donde $\mathcal{V}_m(\Gamma_F)$ denota el conjunto de todos los subespacios de dimensión m de $L_2(\Gamma_F)$ y para $V \subset L_2(\Gamma_F)$

$$V^\perp = \{\psi \in L_2(\Gamma_F) : \int_{\mathbb{R}} \psi \xi dx = 0 \quad \forall \xi \in V\}.$$

Sean Γ_C y $\Gamma_{\tilde{C}}$ curvas tales que

$$\Gamma_{\tilde{C}} \text{ encierra a } \Gamma_C, \quad (1.4.4)$$

Sea $\tilde{\Omega}$ el dominio asociado a $\Gamma_{\tilde{C}}$. De (1.4.4)

$$\tilde{\Omega} \subset \Omega. \quad (1.4.5)$$

De manera similar como en la definición del operador A en (2.4.21), podemos definir el operador \tilde{A} , asociado al problema (1.1.4), para el dominio $\tilde{\Omega}$, correspondiente a la curva \tilde{C} . Para $\psi \in L_2(\Gamma_F)$, del lema 1.1.1, existe $\phi \in H^1(\Omega)$,

que satisface (1.1.4) con $A\psi = \phi|_{y=0}$. Igualmente, existe $\tilde{\phi} \in H^1(\tilde{\Omega})$, que satisface el siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{\phi} - k^2 \tilde{\phi} = 0, & \text{en } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{n}} = \psi, & \text{en } \Gamma_F, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{n}} = 0, & \text{en } \Gamma_{\tilde{C}}. \end{array} \right. \quad (1.4.6)$$

y es tal que $\tilde{A}\psi = \tilde{\phi}|_{y=0}$.

Lema 1.4.1. *Para $\psi \in L_2(\Gamma_F)$, se tiene*

$$(A\psi, \psi) \leq (\tilde{A}\psi, \psi).$$

Demostración. Sea

$$I = \int_{\partial(\Omega \setminus \tilde{\Omega})} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{n}} ds + \int_{\partial \tilde{\Omega}} (\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial \tilde{n}} ds + \int_{\partial \Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{n}} ds - \int_{\partial \tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{n}} ds.$$

Sean \vec{n}_1, \vec{n}_3 los vectores normales exteriores a las curvas Γ_C y $\Gamma_{\tilde{C}}$ respectivamente y $\vec{n}_2 = -\vec{n}_3$, entonces \vec{n}_1 y \vec{n}_2 son los vectores normales exteriores correspondientes a $\partial(\Omega \setminus \tilde{\Omega})$. De (1.1.4), se tiene que $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_1} = 0$. Por lo tanto,

$$I_1 = \int_{\partial(\Omega \setminus \tilde{\Omega})} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{n}} ds = \int_{\Gamma_C} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_1} ds + \int_{\Gamma_{\tilde{C}}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_2} d\sigma = \int_{\Gamma_{\tilde{C}}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_2} d\sigma.$$

De (1.1.4) y (1.4.6), se tiene que $\tilde{\phi}_y|_{y=0} = \phi_y|_{y=0} = \psi$, luego

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\partial\tilde{\Omega}} (\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial\tilde{n}} ds \\
&= \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} (\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial\tilde{n}_3} ds + \int_{\mathbb{R}} \left((\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx \\
&= \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} (\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial\tilde{n}_3} ds \\
&= \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \phi \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma - \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma - \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \phi \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma + \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma \\
&= - \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma + \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \phi \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma \\
&= - \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma - \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \phi \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{n}_2} d\sigma,
\end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{n}} ds = \int_{\mathbb{R}} \left(\phi \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) \psi(x) dx$$

e

$$I_4 = - \int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{n}} ds = - \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(x, 0) \psi(x) dx.$$

Entonces de I_1 , I_2 , I_3 y I_4 , se tiene que

$$I = - \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{n}_3} d\sigma + \int_{\mathbb{R}} \phi|_{y=0} \psi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}|_{y=0} \psi(x) dx.$$

De (1.1.4), (1.4.6) y (1.4.5), se tiene que $\Delta\tilde{\phi} - k^2\tilde{\phi} = 0$ y $\Delta\phi - k^2\phi = 0$ en

$\tilde{\Omega}$, aplicando el teorema de Green, se tiene

$$0 = \int_{\tilde{\Omega}} [\Delta\phi\tilde{\phi} - \Delta\tilde{\phi}\phi] dx dy = \int_{\partial\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{n}} \tilde{\phi} - \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{n}} \phi \right) ds. \quad (1.4.7)$$

Dado que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} ds &= \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}_3} d\sigma + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}|_{y=0} \psi(x) dx, \\ \int_{\partial\tilde{\Omega}} \phi \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\vec{n}} ds &= \int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \phi \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\vec{n}_3} d\sigma + \int_{\mathbb{R}} \phi|_{y=0} \psi(x) dx, \end{aligned}$$

de (1.4.7), se tiene que

$$\int_{\Gamma_{\tilde{c}}} \tilde{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}_3} d\sigma + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}|_{y=0} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi|_{y=0} \psi(x) dx.$$

Reemplazando la igualdad anterior en I , se tiene que $I = 0$. Dado que

$$\int_{\partial(\Omega \setminus \tilde{\Omega})} \phi \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} ds = \int_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}} (\phi \Delta\phi + \nabla\phi \cdot \nabla\phi) dx dy = \int_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}} (k^2\phi^2 + \|\nabla\phi\|^2) dx dy \geq 0$$

y $\Delta(\tilde{\phi} - \phi) - k^2(\tilde{\phi} - \phi) = 0$ en $\tilde{\Omega}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial\tilde{\Omega}} (\tilde{\phi} - \phi) \frac{\partial(\tilde{\phi} - \phi)}{\partial\vec{n}} ds &= \int_{\tilde{\Omega}} [(\tilde{\phi} - \phi)\Delta(\tilde{\phi} - \phi) + \nabla(\tilde{\phi} - \phi) \cdot \nabla(\tilde{\phi} - \phi)] dx dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} [k^2(\tilde{\phi} - \phi)^2 + \|\nabla(\tilde{\phi} - \phi)\|^2] dx dy \geq 0. \end{aligned}$$

De I , se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} ds &\leq \int_{\partial(\Omega \setminus \tilde{\Omega})} \phi \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} ds + \int_{\partial\tilde{\Omega}} (\phi - \tilde{\phi}) \frac{\partial(\phi - \tilde{\phi})}{\partial\vec{n}} ds + \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} ds \\ &= \int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\vec{n}} ds. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} ds \leq \int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\vec{n}} ds.$$

Es decir

$$\int_{\mathbb{R}} \phi|_{y=0} \psi(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}|_{y=0} \psi(x) dx.$$

De lo cual se tiene $(A\psi, \psi) \leq (\tilde{A}\psi, \psi)$. En consecuencia el lema. \square

Lema 1.4.2. Sean Γ_C y $\Gamma_{\tilde{C}}$ curvas que satisfacen (1.4.4), entonces

$$S_m \leq \tilde{S}_m, \quad \forall m \geq 1.$$

Más aún, $\tilde{N} \geq N$.

Demostración. Del lema 1.4.1, se tiene que $(A\psi, \psi) \leq (\tilde{A}\psi, \psi)$.

Supongamos que ψ_1 es la función propia correspondiente a S_1 , entonces

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(A\psi_1, \psi_1)}{\|\psi_1\|_{L_2(\Gamma_F)}^2} \leq \frac{(\tilde{A}\psi_1, \psi_1)}{\|\psi_1\|_{L_2(\Gamma_F)}^2} \\ &\leq \sup_{\psi \in L_2(\Gamma_F), \psi \neq 0} \frac{(\tilde{A}\psi, \psi)}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_F)}^2} = \tilde{S}_1. \end{aligned}$$

De manera análoga se concluye que $S_m \leq \tilde{S}_m$, de (1.3.6), se tiene que $N \leq \tilde{N}$.

Así concluye la demostración del lema. \square

Sean Γ_C la curva que esta entre las líneas verticales $-x_0 = x$ y $x_0 = x$, y

$$\Omega_i = \{(x, y) : y \text{ esta encima de } \Gamma_C, \quad y < 0, \quad -x_0 < x < x_0\}. \quad (1.4.8)$$

Definamos el operador $A^D : L_2(\Gamma_{F_i}) \longrightarrow L_2(\Gamma_{F_i})$, como $A^D\psi = \phi(x, 0)$,

donde $\Gamma_{F_i} = \Gamma_F \cap \bar{\Omega}_i$ y $\phi \in H^1(\Omega_i)$ satisface

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} = \psi, & \text{en } \Gamma_{F_i}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} = 0, & \text{en } \Gamma_{C_i}, \\ \phi = 0, & \text{en } x = \pm x_0. \end{array} \right. \quad (1.4.9)$$

El espectro de A^D consta de una sucesión de valores propios S_m^D que esta definida por la siguiente expresión

$$S_m^D = \inf_{V \in \mathcal{V}_m^D(\Gamma_{F_i})} \sup_{\psi \in V^\perp, \psi \neq 0} \frac{(A\psi, \psi)}{\|\psi\|_{L_2^D(\Gamma_{F_i})}^2}, \quad (1.4.10)$$

donde $\mathcal{V}_m^D(\Gamma_{F_i})$ denota el conjunto de todos los subespacios m -dimensionales de $L_2^D(\Gamma_{F_i}) = \{\psi \in L_2(\Gamma_{F_i}) : \psi|_{x=\pm x_0} = 0\}$.

De manera similar, definamos el operador $A^N : L_2(\Gamma_{F_i}) \rightarrow L_2(\Gamma_{F_i})$, como $A^N\psi = \phi(x, 0)$, donde $\phi \in H^1(\Omega_i)$ satisface

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} = \psi, & \text{en } \Gamma_{F_i}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} = 0, & \text{en } \Gamma_{C_i}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, & \text{en } x = \pm x_0. \end{array} \right. \quad (1.4.11)$$

Denotemos por S_m^N a la sucesión de valores propios de A^N . La cual viene dada por:

$$S_1^N = \sup_{\psi \in L_2(\Gamma_{F_i}), \psi \neq 0} \frac{(A\psi, \psi)}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2}. \quad (1.4.12)$$

Y para cada entero $m > 1$,

$$S_m^N = \inf_{V \in \mathcal{V}_m(\Gamma_{F_i})} \sup_{\psi \in V^\perp, \psi \neq 0} \frac{(A\psi, \psi)}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2}, \quad (1.4.13)$$

donde $\mathcal{V}_m(\Gamma_{F_i})$ denota el conjunto de todos los subespacios de dimensión m de $L_2(\Gamma_{F_i})$ con

$$V^\perp = \left\{ \psi \in L_2(\Gamma_{F_i}) : \int_{\Gamma_{F_i}} \psi \xi dx = 0, \quad \forall \xi \in V \right\}.$$

Con esta notación, tenemos la siguiente proposición

Proposición 1.4.3.

$$\max(S_m^N, k^{-1}) \geq S_m \geq S_m^D, \quad \forall m \geq 1. \quad (1.4.14)$$

Entonces,

(i) Si $S_m^D > k^{-1}$, entonces $N \geq m$,

(ii) Si $S_m^N \leq k^{-1}$, entonces $N < m$.

Demostración. El espacio $L_2^D(\Gamma_{F_i})$ definido antes puede ser considerado como un subespacio de $L_2(\Gamma_F)$, dado que cada función de $L_2^D(\Gamma_{F_i})$ puede ser extendida a una función de $L_2(\Gamma_F)$. Por lo tanto, tenemos $\mathcal{V}_m^D(\Gamma_{F_i}) \subset \mathcal{V}_m(\Gamma_F)$ para todo $m \geq 1$ y deducimos de (1.4.10) que $S_m^D \leq \sup_{\psi \in V^\perp} \frac{(A\psi, \psi)}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2}$ con $V \in \mathcal{V}_m^D(\Gamma_{F_i})$. Como $V \in \mathcal{V}_m(\Gamma_F)$, entonces $S_m^D \leq S_m \leq \sup_{\psi \in V^\perp} \frac{(A\psi, \psi)}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2}$.

De otro lado,

$$S_m = \inf_{V \in \mathcal{V}_m(\Gamma_F)} \sup_{\psi \in V^\perp, \psi \neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) \psi(x) dx}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2 + \|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_e})}^2},$$

donde, $\Gamma_{F_e} = \Gamma_F \setminus \Gamma_{F_i}$.

Sea $\psi \in L_2(\Gamma_{F_e})$, entonces ψ se puede extender a una función en $L_2(\Gamma_F)$, así

$$\tilde{\Phi} = \frac{\tilde{\psi} e^{y\sqrt{k^2+p^2}}}{\sqrt{k^2+p^2}}, \quad \tilde{\Phi}|_{y=0} = \frac{\tilde{\psi}}{\sqrt{k^2+p^2}}$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0]} \phi(x, 0)\psi(x)dx \leq k^{-1}\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_e})}^2. \quad (1.4.15)$$

Si $\text{máx}(S_m^N, k^{-1}) = k^{-1}$, entonces $\int_{[-x_0, x_0]} \phi(x, 0)\psi(x)dx \leq k^{-1}\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2$,

luego

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0)\psi(x)dx}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2 + \|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_e})}^2} \leq k^{-1}$$

Por lo tanto, $S_m \leq k^{-1}$. Si $\text{máx}(S_m^N, k^{-1}) = S_m^N$, entonces

$\int_{[-x_0, x_0]} \phi(x, 0)\psi(x)dx \geq k^{-1}\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2$, de (1.4.15), tenemos

$$\frac{\int_{[-x_0, x_0]} \phi(x, 0)\psi(x)dx}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2} \geq k^{-1} \geq \frac{\int_{\mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0]} \phi(x, 0)\psi(x)dx}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_e})}^2}.$$

Luego,

$$\int_{[-x_0, x_0]} \phi(x, 0)\psi(x)dx [\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_e})}^2 + \|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2] \geq \left[\int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0)\psi(x)dx \right] \|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} S_m^N &= \inf_{V \in \mathcal{V}_m^N(\Gamma_{F_i})} \sup_{\psi \in V^\perp, \psi \neq 0} \frac{\int_{[-x_0, x_0]} \phi(x, 0)\psi(x)dx}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2} \\ &\geq \inf_{V \in \mathcal{V}_m^N(\Gamma_{F_i})} \sup_{\psi \in V^\perp, \psi \neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0)\psi(x)dx}{\|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_e})}^2 + \|\psi\|_{L_2(\Gamma_{F_i})}^2} \\ &= S_m \end{aligned}$$

Así se obtiene la desigualdad (1.4.14). Demostremos la desigualdad (i). Si

$S_m^D > k^{-1}$, entonces $S_m \geq S_m^D > k^{-1}$ y $N \geq m$ y así se obtiene (i). Ahora

para (ii), si, $S_m^N \leq k^{-1}$, entonces $\text{máx}(S_m^N, k^{-1}) = k^{-1}$ y $k^{-1} \geq S_m$, en

consecuencia $N < m$. □

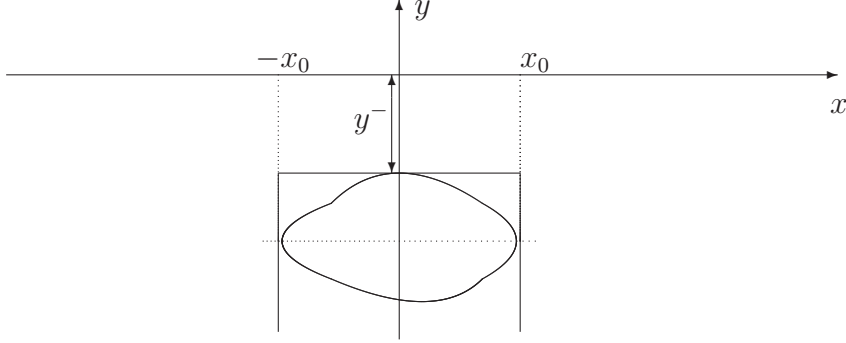


Figura 1.2: Rectángulo

Usamos la proposición 1.4.3 para el caso cuando Ω_i es un rectángulo de base $2x_0$ y altura y^- sobre el cilindro (ver Fig. 1.2).

Semejante a como se definió el operador A^D , para la curva Γ_C en el dominio Ω , podemos definir \bar{A}^D , para la curva $\Gamma_{\bar{C}}$, correspondiente al dominio $\bar{\Omega}$.

Definamos

$$\bar{A}^D : L_2(\Gamma_{F_i}) \longrightarrow L_2(\Gamma_{F_i}),$$

$$\bar{A}^D \psi = \phi(x, 0),$$

donde $\Gamma_{F_i} = \Gamma_F \cap \bar{\Omega}_i$ con $\phi \in H^1(\bar{\Omega}_i)$ tal que,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi - k^2 \phi = 0, & \text{en } \bar{\Omega}_i, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} = \psi, & \text{en } \Gamma_{F_i}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} = 0, & \text{en } y = -y^-, \\ \phi = 0, & \text{en } x = \pm x_0. \end{array} \right. \quad (1.4.16)$$

Lema 1.4.4. *El espectro de \bar{A}^D consta de una sucesión de valores propios \bar{S}_m^D , con $\bar{S}_0^D = \omega_-^{-2}$, el cual satisface*

$$\omega_-^{-2}k \tanh(ky^-) = 1. \quad (1.4.17)$$

Demostración. Para $\psi \in L_2(\Gamma_{F_i})$, existe $\phi \in H^1(\bar{\Omega}_i)$ que satisface el problema (1.4.16). Usando el método de separación de variables podemos suponer que $\phi(x, y) = F(x)G(y)$, para algunas funciones F y G , colocando $\lambda > 0$ como constante de separación, tenemos que

$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = -\frac{k^2F(x) - F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad \text{ó} \quad -\frac{G''(y)}{G(y)} = -\frac{k^2F(x) - F''(x)}{F(x)} = -\lambda.$$

Imponiendo las condiciones de frontera, obtenemos los siguientes problemas:

$$(a) \begin{cases} -G''(y) = \lambda G(y), \\ G'(0) = \omega^2 G(0), \\ G'(-y^-) = 0. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} F''(x) = (\lambda + k^2)F(x), \\ F(-x_0) = F(x_0) = 0. \end{cases} \quad (1.4.18)$$

$$(c) \begin{cases} G''(y) = \lambda G(y), \\ G'(0) = \omega^2 G(0), \\ G'(-y^-) = 0. \end{cases} \quad (d) \begin{cases} F''(x) = (-\lambda + k^2)F(x), \\ F(-x_0) = F(x_0) = 0. \end{cases} \quad (1.4.19)$$

De (1.4.18-(a)), se tiene que

$$G(y) = -\frac{A \cos(\sqrt{\lambda}(y + y^-))}{\sin(\sqrt{\lambda}y^-)}. \quad (1.4.20)$$

De (1.4.18-(b)), se tiene que si $\lambda + k^2 > 0$, entonces $F(x) = 0$.

De (1.4.19-(c)), se tiene que

$$G(y) = \frac{C \cosh(\sqrt{\lambda}(y + y^-))}{\cosh(\sqrt{\lambda}y^-)}. \quad (1.4.21)$$

De (1.4.19-(d)), se tienen los siguientes casos

1. Si $-\lambda + k^2 > 0$, entonces $F(x) = 0$.
2. Si $-\lambda + k^2 = 0$, entonces $F(x) = Cte$. Por lo tanto de (1.4.21),

$$\phi(x, y) = -\frac{C \cosh(\sqrt{\lambda}(y + y^-))}{\cosh(\sqrt{\lambda}y^-)}.$$

Puesto que $\phi_y(x, 0) = \omega^2 \phi(x, 0)$ encontramos que cuando $-\lambda + k^2 = 0$, tenemos la siguiente relación

$$1 = \omega_-^{-2} k \tanh(ky^-). \quad (1.4.22)$$

3. Si $-\lambda + k^2 < 0$, entonces

$$F(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{\lambda - k^2}x) & \text{si } \sqrt{\lambda - k^2}x_0 = \frac{\pi}{2} + m\pi, \\ C_1 \sin(\sqrt{\lambda - k^2}x) & \text{si } \sqrt{\lambda - k^2}x_0 = m\pi, \end{cases}$$

por lo tanto, de (1.4.21)

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -\frac{C \cosh(\sqrt{\lambda}(y+y^-)) \cos(\sqrt{\lambda-k^2}x)}{\cosh(\sqrt{\lambda}y^-)} & \text{si } \sqrt{\lambda - k^2}x_0 = \frac{\pi}{2} + m\pi, \\ -\frac{C \cosh(\sqrt{\lambda}(y+y^-)) \sin(\sqrt{\lambda-k^2}x)}{\cosh(\sqrt{\lambda}y^-)} & \text{si } \sqrt{\lambda - k^2}x_0 = m\pi. \end{cases}$$

Puesto que $\phi_y(x, 0) = \omega^2 \phi(x, 0)$ encontramos que cuando $-\lambda + k^2 < 0$, tenemos la siguiente relación

$$1 = \omega^{-2} \sqrt{\lambda} \tanh(\sqrt{\lambda} y^-), \quad (1.4.23)$$

con

$$\sqrt{\lambda - k^2} x_0 = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \text{ó} \quad \sqrt{\lambda - k^2} x_0 = m\pi.$$

De (1.4.22) y (1.4.23) la sucesión de valores propios \bar{S}_m^D , viene dada por \bar{S}_0^D es igual a ω_-^{-2} , el cual satisface $\omega_-^{-2} k \tanh(k y^-) = 1$ y $\bar{S}_m^D = \omega_m^{-2}(k)$, $m \geq 1$, es la única solución de la ecuación $1 = \omega_m^{-2} \mu_m \tanh(\mu_m y^-)$, con $\mu_m = \sqrt{\lambda_m}$ y $-\lambda_m + k^2 < 0$ y $(\sqrt{\lambda_m - k^2} x_0 = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \text{ó} \quad \sqrt{\lambda_m - k^2} x_0 = m\pi)$. \square

Teorema 1.4.5. *Si $0 < y^-$, entonces existe a lo más un modo guiado a alta frecuencia ($k \rightarrow \infty$).*

Demostración. Dado que $y^- > 0$, y de (1.1.3), (1.4.17), tenemos que $k^{-1} < \omega_-^{-2}$. Por lo tanto del Lema 1.4.4 existen por lo menos m valores propios ξ_m entre k^{-1} , ω_-^{-2} , $\tilde{S}_m^D > k^{-1}$, para todo $m \geq 1$. Por lo tanto de la proposición 1.4.3, tenemos que $N \leq \tilde{N}$. De (1.4.17) tenemos que $\omega_-^{-2} - k^{-1} = O(k^{-1} e^{-2k y^-})$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces m es a lo más igual a 1. Ahora aplicando el lema 1.4.2 tenemos $\tilde{N} \geq N$ y en consecuencia, $N = 1$. Lo cual demuestra que existe a lo más un modo guiado a alta frecuencia. \square

Capítulo 2

Asintótica de la frecuencia

2.1. Introducción

En el capítulo anterior se mostró que para el problema de ondas de agua a alta frecuencia, existe un único modo guiado el cual se propaga en la dirección del eje del cilindro. Nuestro interés en el presente capítulo es construir la asintótica de esta frecuencia, para valores grandes de k , donde k es el número de onda.

2.2. Resultado principal

Supongamos como en el capítulo anterior, que la curva Γ_C esta dada por $x(t), y(t) \in C^\infty[-\pi, \pi]$, con $x'^2 + y'^2 \neq 0$, tal que $\max y(t) = y(0)$, $y''(0) < 0$, $x'(0) > 0$, $\Gamma_F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es la superficie libre. Ω es el dominio exterior

a la curva Γ_C e inferior a Γ_F (ver Fig. 1.1), para la geometría del problema. Buscamos el potencial de velocidad en la forma $\exp\{i(\omega t - kz)\}\phi(x, y)$, donde z es la coordenada horizontal a lo largo del eje del cilindro, ω es la frecuencia y k es el número de onda; llegamos al problema

$$\begin{cases} \Delta\phi - k^2\phi = 0, & \text{en } \Omega, \\ \phi_y = \lambda\phi, & \text{en } \Gamma_F, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} = 0, & \text{en } \Gamma_C, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

para la función ϕ ; aquí $\lambda = \omega^2$. Soluciones de este problema pertenecientes al espacio de Sobolev $H_1(\Omega)$ son llamadas ondas atrapadas y existen sólo para ciertos valores de λ (el valor propio) para k fijo. Como se demostró en el capítulo anterior, el espectro esencial de (2.2.1) coincide con el intervalo $[k, \infty)$. Del capítulo 1 existe un único valor propio λ por debajo del espectro esencial para valores grandes de k . Nuestro interés es construir asintóticas de esta frecuencia. El resultado principal de esta tesis es enunciado a continuación.

Teorema 2.2.1. *El único valor propio $\lambda(k)$ de (2.2.1) tiene la forma*

$$\lambda(k) = k - \beta^2, \quad (2.2.2)$$

donde

$$\beta = k \sqrt{\frac{\pi}{2|y''(0)|}} e^{-2k|y(0)|} x'(0) (1 + O(k^{-1})), \quad (2.2.3)$$

y su correspondiente función propia

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'\xi + \eta\tau(p')} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(p')}\right) \frac{A(p')}{L(p')} dp' \\ & - \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t) - \xi)^2 + (y(t) - \eta)^2})}{\sqrt{(x(t) - \xi)^2 + (y(t) - \eta)^2}} \\ & \times [y'(t)(x(t) - \xi) - x'(t)(y(t) - \eta)] [(1 - \hat{M}_3)^{-1}(\hat{M}_2 \frac{A}{L})](t) dt, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A(p) = & (1 - \hat{M}_5)^{-1} \frac{2\pi i M_4(p, p_+) A(p_+)}{\frac{d}{dp} L(p)|_{p=p_+}}, \\ L(p) = & 1 - \frac{\lambda}{\tau(p)} \quad \text{con } \tau(p) = \sqrt{k^2 + p^2}, \end{aligned}$$

p_+ , \hat{M}_2 , \hat{M}_3 , $M_4(p, p_+)$ y \hat{M}_5 están definidas en secciones 2.3 y 2.4.

En el resto del capítulo se desarrolla la demostración del enunciado anterior y se construye la correspondiente función propia.

2.3. Reducción a un par de ecuaciones

Primero, reducimos (2.2.1) a un par de ecuaciones integrales sobre Γ_F y Γ_C para las funciones $\varphi = \phi|_{\Gamma_F}$ y $\theta = \phi|_{\Gamma_C}$. En todo lo que sigue supondremos que $\phi(x, y)$ es una función lisa; como veremos en la sección 2.4, la solución que construiremos satisface esta condición. Para este fin, consideremos la región $\Omega \setminus B_\rho(\xi, \eta)$, donde $B_\rho := B_\rho(\xi, \eta) = \{(x, y) : \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} < \rho\}$ es

el disco de radio ρ con el centro en (ξ, η) , y aplicamos la fórmula de Green a ϕ y $(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr))$ en $\Omega \setminus B_\rho$, donde

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (2.3.1)$$

y K_0 es la función de Macdonald (ver [11], pag 376)(así que $-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)$ es la solución fundamental del operador $\Delta - k^2$), entonces

$$\Delta(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)) - k^2(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)) = 0, \quad \text{en } \Omega \setminus B_\rho \text{ y en consecuencia}$$

$$0 = \int_{\Omega \setminus B_\rho} \left\{ -\frac{1}{2\pi}K_0(kr)[\Delta\phi - k^2\phi] - \phi[\Delta(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)) - k^2(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr))] \right\} dx dy.$$

Supongamos que $\phi \in C^2(\Omega \setminus B_\rho)$ lo cual es cierto ya que A es analítica en una banda de longitud $2k$, entonces $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Usando la fórmula $E\Delta\phi = \text{div}(E\nabla\phi) - \nabla E \cdot \nabla\phi$, se tiene que la ecuación anterior se puede escribir como

$$0 = \int_{\Omega \setminus B_\rho} \left\{ \text{div}(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\nabla\phi) - \text{div}(\phi\nabla(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr))) \right\} dx dy.$$

Aplicando la fórmula de Green y haciendo $\rho \rightarrow 0$, concluimos

Lema 2.3.1. *Se cumple la siguiente igualdad*

$$0 = \int_{\Gamma_F} (-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\nabla\phi) \cdot \vec{n}_F ds - \int_{\Gamma_F} (\phi\nabla(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr))) \cdot \vec{n}_F ds \quad (2.3.2)$$

$$+ \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} (-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\nabla\phi) \cdot \vec{n}_\rho ds - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} \phi\nabla(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)) \cdot \vec{n}_\rho ds$$

$$+ \int_{\Gamma_C} (-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\nabla\phi) \cdot \vec{n}_C ds - \int_{\Gamma_C} \phi\nabla(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)) \cdot \vec{n}_C ds.$$

Para reescribir la ecuación (2.3.2), se tiene en cuenta que

Lema 2.3.2. Sea $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$, entonces se cumplen las siguientes identidades

(a)

$$\int_{\Gamma_F} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \nabla \phi\right) \cdot \vec{n}_F ds = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \varphi(x) dx.$$

(b)

$$\int_{\Gamma_F} \phi \nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr)\right) \cdot \vec{n}_F ds = \frac{k\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} \varphi(x) dx.$$

(c)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \nabla \phi\right) \cdot \vec{n}_\rho ds = 0.$$

(d)

$$-\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} \phi \nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr)\right) \cdot \vec{n}_\rho ds = \phi(\xi, \eta).$$

(e)

$$\int_{\Gamma_C} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \nabla \phi\right) \cdot \vec{n}_C ds = 0.$$

(f)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \phi \nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr)\right) \cdot \vec{n}_C ds &= -\frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_0'(k\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + (y(t)-\eta)^2})}{\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + (y(t)-\eta)^2}} \\ &\quad \times [y'(t)(x(t)-\xi) - x'(t)(y(t)-\eta)] \theta(t) dt. \end{aligned}$$

Demostración. Demostremos (a), se toma $y = 0$ en (2.3.1) y $\vec{n}_F = (0, 1)$.

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_F} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \nabla \phi\right) \cdot \vec{n}_F ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr)\right)|_{y=0} \nabla \phi|_{y=0} \cdot (0, 1) dx \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Así queda demostrado (a). Para demostrar el ítem (b), se toma $y = 0$ en (2.3.1) y $\vec{n}_F = (0, 1)$ y puesto que

$$\nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr)\right) = -\frac{k}{2\pi} K'_0(kr) \left(\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r}\right).$$

Luego la integral es igual a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_F} \phi \nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr)\right) \cdot \vec{n}_F ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, 0) \left(-\frac{k}{2\pi} K'_0(kr)\right)|_{y=0} \\ &\quad \times \left(\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r}\right)|_{y=0} \cdot (0, 1) dx \\ &= \frac{k\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

donde r esta dado por (2.3.1). En consecuencia obtenemos (b). Demostremos el ítem (c), coloquemos $r = \rho$, y dado que $-K_0(k\rho) = \ln(k\rho) - \mathfrak{K}(k\rho)$, $\mathfrak{K}(k\rho) \in C[0, \infty)$ y $|\mathfrak{K}(k\rho)| < cte$, cuando $\rho \rightarrow 0$, se sigue

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{\partial B_\rho} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \nabla \phi\right) \cdot \vec{n}_\rho ds \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} |\ln(k\rho) - \mathfrak{K}(k\rho)| 2\pi\rho \sup_{\partial B_\rho} \|\nabla \phi\| = 0.$$

De donde se obtiene (c). Demostremos el ítem (d). Coloquemos $r = \rho$. Si $(\xi, \eta) \in \Omega$, sea $\alpha(t) = (\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta)$ la parametrización de ∂B_ρ .

Puesto que $kK'_0(kr) = \frac{-1}{\rho} + \mathfrak{K}_1(k\rho)$, (ver [11]) donde $\mathfrak{K}_1(k\rho)$ es continua y

$\mathfrak{K}_1(k\rho) \rightarrow 0$, cuando $\rho \rightarrow 0$, y teniendo en cuenta que $\vec{n}_\rho = -\nabla r|_{r=\rho} = -(\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r})|_{r=\rho}$, tenemos

$$\begin{aligned} \phi \nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \right) \cdot \vec{n}_\rho &= \phi(\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta) \cdot \frac{k}{2\pi} K_0'(k\rho) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{\rho} + \mathfrak{K}_1(k\rho) \right) \phi(\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta). \end{aligned}$$

Dado que $\|\alpha'(s)\| = \rho$ y $ds = \rho dt$, entonces

$$-\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\phi(\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta) dt = \phi(\xi, \eta)$$

y

$$-\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{K}_1(k\rho) \phi(\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta) \rho dt = 0,$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} -\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} \phi \nabla \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr) \right) \cdot \vec{n}_\rho ds &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\xi, \eta) dt \\ &\quad - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{K}_1(k\rho) \phi(\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta) \rho dt \\ &= \phi(\xi, \eta). \end{aligned}$$

De donde obtenemos (d). El ítem (e), se tiene por la condición de impermeabilidad del problema (2.2.1), puesto que $\nabla \phi \cdot \vec{n}_C = \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(x(t), y(t)) = 0$.

Entonces queda demostrado (e). Para ver el ítem (f) de (2.3.1) y teniendo

$$\vec{n}_C = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \quad ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

tenemos para $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$\begin{aligned} \nabla\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right)|_{\Gamma_C} \cdot \vec{n}_C &= -\frac{k}{2\pi}K'_0(kr)|_{\Gamma_C}\left(\frac{x(t)-\xi}{r}, \frac{y(t)-\eta}{r}\right)|_{\Gamma_C} \\ &\quad \cdot \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \\ &= -\frac{k}{2\pi}[y'(t)(x(t)-\xi) - x'(t)(y(t)-\eta)] \\ &\quad \times \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + (y(t)-\eta)^2})}{\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + (y(t)-\eta)^2}} \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \phi \nabla\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right) \cdot \vec{n}_C ds &= -\frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + (y(t)-\eta)^2})}{\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + (y(t)-\eta)^2}} \\ &\quad \times [y'(t)(x(t)-\xi) - x'(t)(y(t)-\eta)] \theta(t) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene (f) y también el lema. \square

Ahora usando el lema 2.3.2 y haciendo el límite cuando $\rho \rightarrow 0$ en la ecuación (2.3.2), obtenemos:

Lema 2.3.3. *Se cumple la siguiente igualdad*

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \varphi(x) dx \\ &\quad + \frac{k\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} \varphi(x) dx \\ &\quad - \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + (y(t)-\eta)^2})}{\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + (y(t)-\eta)^2}} \\ &\quad \times [y'(t)(x(t)-\xi) - x'(t)(y(t)-\eta)] \theta(t) dt, \quad (\xi, \eta) \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Lema 2.3.4. *Sea $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Pasando en la ecuación (2.3.3) al límite cuando $\eta \rightarrow 0^-$, tenemos la siguiente ecuación integral*

$$\begin{aligned} \pi\varphi(\xi) = & \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k|x - \xi|)\varphi(x)dx \\ & + k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t) - \xi)^2 + y(t)^2})}{\sqrt{(x(t) - \xi)^2 + y(t)^2}} \\ & \times [y'(t)(x(t) - \xi) - x'(t)y(t)]\theta(t)dt. \end{aligned}$$

Demostración. Es suficiente tomar el límite cuando $\eta \rightarrow 0^-$ en la segunda integral de la ecuación (2.3.3) y demostrar que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{-k\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2}} \varphi(x)dx = -\frac{1}{2}\varphi(\xi). \quad (2.3.4)$$

En efecto, usando la siguiente representación para $K'_0(z)$

$$\frac{K'_0(z)}{z} = -\frac{1}{z^2} - \ln(z) + \mathfrak{K}_2(z)$$

(ver [11], pag 376), donde \mathfrak{K}_2 es una función continua. Colocando

$z = k\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2}$, de la teoría potencial (ver [1], pag 60; [17], pag 402)

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{-k^2\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2})}{k\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2}} \varphi(x)dx \\ = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \left\{ -\frac{\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx + \eta \mathfrak{g}(k, \eta, \xi) \right\} = \frac{1}{2}\varphi(\xi), \end{aligned}$$

donde

$$\mathfrak{g}(k, \eta, \xi) = \frac{k^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-\ln(k\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2}) + \mathfrak{K}_2(k\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2})]\varphi(x)dx$$

y $\eta \mathfrak{g} \rightarrow 0$ cuando $\eta \rightarrow 0$. En efecto, como \mathfrak{K}_2 es una función continua es suficiente demostrar $\int_{\xi-1}^{\xi+1} \eta \ln[k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}] dx \rightarrow 0$. Como $|\ln x| \leq Cx^\delta$ y cambiando de variable $\frac{t}{\eta} = t'$, tenemos

$$\int_{-1}^1 \eta(t^2 + \eta^2)^{\frac{\delta}{2}} dt = \eta^{2+\delta} \int_{-1/\eta}^{1/\eta} (t'^2 + 1)^{\frac{\delta}{2}} dt' \sim \eta \rightarrow 0$$

lo que demuestra (2.3.4). Puesto que los límites de los otros términos de la ecuación integral (2.3.3) son inmediatos. El lema queda demostrado. \square

Lema 2.3.5. *Pasando en cada uno de los términos de la ecuación (2.3.3) a $\xi = x(t)$ y al límite cuando $\eta \rightarrow y(t)$, se tiene la siguiente ecuación integral*

$$\begin{aligned} \pi\theta(t) = & \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x-x(t))^2 + y(t)^2}) \varphi(x) dx \\ & - ky(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-x(t))^2 + y(t)^2})}{\sqrt{(x-x(t))^2 + y(t)^2}} \varphi(x) dx \\ & + k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t_1)-x(t))^2 + (y(t_1)-y(t))^2})}{\sqrt{(x(t_1)-x(t))^2 + (y(t_1)-y(t))^2}} \\ & \times [y'(t_1)(x(t_1)-x(t)) - x'(t_1)(y(t_1)-y(t))] \theta(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Demostración. El límite de los tres primeros términos es inmediato, así que

es suficiente demostrar

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi=x(t), \eta \rightarrow y(t)} \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t_1) - \xi)^2 + (y(t_1) - \eta)^2})}{\sqrt{(x(t_1) - \xi)^2 + (y(t_1) - \eta)^2}} \\
& \quad \times [y'(t_1)(x(t_1) - \xi) - x'(t_1)(y(t_1) - \eta)]\theta(t_1)dt_1 \\
& = -\frac{1}{2}\theta(t) + \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t))^2})}{\sqrt{(x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t))^2}} \\
& \quad \times [y'(t_1)(x(t_1) - x(t)) - x'(t_1)(y(t_1) - y(t))]\theta(t_1)dt_1.
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

En efecto, colocando $\xi = x(t)$, $\eta = y(t) + \varepsilon$, se tiene

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\varepsilon k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t) - \varepsilon)^2})}{\sqrt{(x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t) - \varepsilon)^2}} \right. \\
& \quad \times x'(t_1)\theta(t_1)dt_1 \\
& \quad + \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t) - \varepsilon)^2})}{\sqrt{(x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t) - \varepsilon)^2}} \\
& \quad \left. \times [y'(t_1)(x(t_1) - x(t)) - x'(t_1)(y(t_1) - y(t))]\theta(t_1)dt_1 \right\} \\
& = I(t) + II(t),
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

$$\tag{2.3.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
I(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\varepsilon k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t) - \varepsilon)^2})}{\sqrt{(x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t) - \varepsilon)^2}} \right. \\
\left. \times x'(t_1)\theta(t_1)dt_1 \right\},
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

$$\begin{aligned}
II(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t) - \varepsilon)^2})}{\sqrt{(x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t) - \varepsilon)^2}} \right. \\
\left. \times [y'(t_1)(x(t_1) - x(t)) - x'(t_1)(y(t_1) - y(t))] \theta(t_1) dt_1 \right\}. \quad (2.3.9)
\end{aligned}$$

Procediendo como en la demostración del límite (2.3.4), se obtiene

$$I(t) = -\frac{1}{2}\theta(t).$$

El límite de $II(t)$ es inmediato. De (2.3.7) y de los límites anteriores se obtiene la demostración del lema. \square

Pasando en la ecuación (2.3.3) a los límites cuando $\eta \rightarrow 0^-$ y cuando $\eta \rightarrow y(t)$ con $\xi = x(t)$, y usando los lemas 2.3.4 y 2.3.5 de las fórmulas de salto para los potenciales, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones integrales

Lema 2.3.6. *Tenemos el siguiente sistema*

$$\begin{aligned}
\pi\varphi(\xi) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k|x - \xi|)\varphi(x)dx \\
+ k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t) - \xi)^2 + y(t)^2})}{\sqrt{(x(t) - \xi)^2 + y(t)^2}} \\
\times [y'(t)(x(t) - \xi) - x'(t)y(t)]\theta(t)dt, \quad (2.3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi\theta(t) = & \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{(x-x(t))^2+y(t)^2})\varphi(x)dx \\
& - ky(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K'_0(k\sqrt{(x-x(t))^2+y(t)^2})}{\sqrt{(x-x(t))^2+y(t)^2}}\varphi(x)dx \\
& + k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t_1)-x(t))^2+(y(t_1)-y(t))^2})}{\sqrt{(x(t_1)-x(t))^2+(y(t_1)-y(t))^2}} \\
& \times [y'(t_1)(x(t_1)-x(t)) - x'(t_1)(y(t_1)-y(t))]\theta(t_1)dt_1.
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Para aplicar la técnica de [10] a (2.3.10) y (2.3.11) es necesario pasar a la transformada de Fourier $\tilde{\varphi}$ de la función φ ,

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p}[\varphi(\xi)](p) \equiv \tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

Usando la fórmula $K'_0(z) = -K_1(z)$ (ver [11]), se sigue el lema

Lema 2.3.7. *Tenemos las siguientes transformadas de Fourier*

(a)

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p}[K_0(k|\xi|)](p) = \frac{\pi}{\sqrt{k^2+p^2}}.$$

(b)

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2+h_0^2})}{\sqrt{\xi^2+h_0^2}} \right] (p) = \frac{\pi}{kh_0} e^{-h_0\sqrt{k^2+p^2}}.$$

(c)

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[K_0(k\sqrt{\xi^2+h_0^2}) \right] (p) = \frac{\pi}{\sqrt{k^2+p^2}} e^{-h_0\sqrt{k^2+p^2}}.$$

(d)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + y(t)^2})}{\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + y(t)^2}} y'(t)(x(t)-\xi)\theta(t) dt \right] (p) \\ = \frac{i\pi p}{\sqrt{k^2 + p^2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx(t)+y(t)\sqrt{k^2+p^2}} y'(t)\theta(t) dt. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[-k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_1(k\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + y(t)^2})}{\sqrt{(x(t)-\xi)^2 + y(t)^2}} x'(t)y(t)\theta(t) dt \right] (p) \\ = \pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx(t)+y(t)\sqrt{k^2+p^2}} x'(t)\theta(t) dt. \end{aligned}$$

Demostración. Ahora demostremos (a) (ver [18], pag 322), en efecto, como Melher en 1870 demostró que (ver [11], pag 376)

$$K_0(k|\xi|) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(x|\xi|)}{\sqrt{k^2 + x^2}} dx,$$

y dado que

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{1}{\sqrt{k^2 + x^2}} \right] (\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\sqrt{k^2 + x^2}} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(x|\xi|)}{\sqrt{k^2 + x^2}} dx = 2K_0(k|\xi|).$$

Pasando de nuevo a la transformada de Fourier $\xi \rightarrow x$, tenemos

$$\frac{2\pi}{\sqrt{(-x)^2 + k^2}} = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} \left[\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + k^2}} \right] (\xi) \right] (x) = 2\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} [K_0(k|\xi|)](x).$$

Así se tiene (a). Demostremos ahora (b), dado que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right] (p) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\xi} \frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi \\ &= 2 \int_0^{\infty} \cos(p\xi) \frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi. \end{aligned}$$

Usando $J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x$, (ver [12], pag 54), tenemos que

$$\cos(p\xi) = \frac{J_{-1/2}(p\xi)\sqrt{\pi p\xi}}{\sqrt{2}}.$$

Entonces,

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right] (p) = \sqrt{2\pi p} \int_0^\infty J_{-1/2}(p\xi) \sqrt{\xi} \frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi.$$

Ahora usamos la siguiente fórmula (ver [12], pag 416)

$$\int_0^\infty J_\mu(bt) t^{\mu+1} \frac{K_\nu(a\sqrt{t^2 + z^2})}{(t^2 + z^2)^{\frac{1}{2}\nu}} dt = \frac{b^\mu}{a^\nu} \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{z} \right)^{\nu-\mu-1} K_{\nu-\mu-1}(z\sqrt{a^2 + b^2}).$$

Por lo tanto, colocando $\mu = -1/2$, $\nu = 1$, $t = \xi$, $z = h_0$, $b = p$ y $a = k$,

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right] (p) = \frac{\sqrt{2\pi}}{k} \left(\frac{\sqrt{k^2 + p^2}}{h_0} \right)^{1/2} K_{1/2}(h_0\sqrt{k^2 + p^2}).$$

De ([12], pag 80), tenemos que $K_{1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}$. Así obtenemos (b).

Para la demostración de (c) (ver [18], pag 279) derivamos con respecto a p en ambos lados de la igualdad en la fórmula (b) y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{-\pi p}{k\sqrt{k^2 + p^2}} e^{-h_0\sqrt{k^2 + p^2}} &= \frac{d}{dp} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right] (p) \\ &= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[i\xi \frac{K_0'(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right] (p) \\ &= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{i}{k} \frac{d}{d\xi} K_0(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2}) \right] (p) \\ &= -\frac{p}{k} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[K_0(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2}) \right] (p). \end{aligned}$$

Así obtenemos (c). Usaremos (b) para demostrar (d)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_0'(k\sqrt{(x(t)-\xi)^2+y(t)^2})}{\sqrt{(x(t)-\xi)^2+y(t)^2}} y'(t)(x(t)-\xi)\theta(t) dt \right] (p) \\
&= k \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[(\xi - x(t)) \right. \\
&\quad \left. \times \frac{K_1(k\sqrt{(x(t)-\xi)^2+y(t)^2})}{\sqrt{(x(t)-\xi)^2+y(t)^2}} \right] (p) y'(t)\theta(t) dt \\
&= k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx(t)} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{\xi K_1(k\sqrt{\xi^2+y(t)^2})}{\sqrt{\xi^2+y(t)^2}} \right] (p) y'(t)\theta(t) dt \\
&= k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx(t)} \left(-i \frac{d}{dp} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2+y(t)^2})}{\sqrt{\xi^2+y(t)^2}} \right] (p) \right) y'(t)\theta(t) dt \\
&= \frac{i\pi p}{\sqrt{k^2+p^2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx(t)+y(t)\sqrt{k^2+p^2}} y'(t)\theta(t) dt.
\end{aligned}$$

En consecuencia (d). Para demostrar (e) también usamos (b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[-k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_1(k\sqrt{(x(t)-\xi)^2+y(t)^2})}{\sqrt{(x(t)-\xi)^2+y(t)^2}} y(t)x'(t)\theta(t) dt \right] (p) \\
&= -k \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{K_1(k\sqrt{(x(t)-\xi)^2+y(t)^2})}{\sqrt{(x(t)-\xi)^2+y(t)^2}} \right] (p) y(t)x'(t)\theta(t) dt \\
&= -k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx(t)} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2+y(t)^2})}{\sqrt{\xi^2+y(t)^2}} \right] (p) y(t)x'(t)\theta(t) dt \\
&= \pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx(t)+y(t)\sqrt{k^2+p^2}} x'(t)\theta(t) dt.
\end{aligned}$$

En consecuencia, queda demostrado (d). \square

Del lema 2.3.7 y de la ecuación (2.3.11), llegamos al siguiente sistema para

$\tilde{\varphi}(p)$, $\theta(t)$:

Lema 2.3.8. *Tenemos el siguiente sistema*

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau(p)}\right) \tilde{\varphi}(p) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx(t)+y(t)\tau(p)} \left(x'(t) + \frac{ipy'(t)}{\tau(p)}\right) \theta(t) dt, \quad (2.3.12)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x} K_0(k\sqrt{\varsigma(x,t)}) dx \tilde{\varphi}(p') dp' \\ &\quad - \frac{ky(t)}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x} \frac{K_0'(k\sqrt{\varsigma(x,t)})}{\sqrt{\varsigma(x,t)}} dx \tilde{\varphi}(p') dp' \\ &\quad + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_0'(k\sqrt{\varrho(t_1,t)})}{\sqrt{\varrho(t_1,t)}} \\ &\quad \times [y'(t_1)(x(t_1) - x(t)) - x'(t_1)(y(t_1) - y(t))] \theta(t_1) dt_1, \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau(p) &:= \sqrt{k^2 + p^2}, \\ \varsigma(x,t) &:= (x - x(t))^2 + y(t)^2, \\ \varrho(t_1,t) &:= (x(t_1) - x(t))^2 + (y(t_1) - y(t))^2. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Usando de nuevo los resultados del lema 2.3.7 y de los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación (2.3.13) se sigue:

Lema 2.3.9. *Tenemos las siguientes identidades*

1.

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ip'x} K_0(k\sqrt{\varsigma(x,t)}) dx \tilde{\varphi}(p') dp' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip'x(t)+y(t)\tau(p')}}{\tau(p')} \tilde{\varphi}(p') dp',$$

2.

$$\frac{ky(t)}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ip'x} \frac{K_1(k\sqrt{\varsigma(x,t)})}{\sqrt{\varsigma(x,t)}} dx \tilde{\varphi}(p') dp' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x(t)+y(t)\tau(p')} \tilde{\varphi}(p') dp',$$

donde $\tau(p)$ y $\varsigma(x,t)$ estan definidas en (2.3.14).

Demostración. De (2.3.14), el lema 2.3.7 y usando las propiedades de las transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x} K_0(k\sqrt{\varsigma(x,t)}) dx &= e^{-ip'x(t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x} K_0(k\sqrt{x^2 + y(t)^2}) dx \\ &= e^{-ip'x(t)} \mathcal{F}_{x \rightarrow -p'} [K_0(k\sqrt{x^2 + y(t)^2})](p') \\ &= \frac{\pi e^{-ip'x(t)+y(t)\tau(p')}}{\tau(p')}. \end{aligned}$$

Luego se obtiene 1. Para obtener 2, de (2.3.14), el lema 2.3.7 y usando las propiedades de las transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x} \frac{K_1(k\sqrt{\varsigma(x,t)})}{\sqrt{\varsigma(x,t)}} dx &= e^{-ip'x(t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x} \frac{K_1(k\sqrt{x^2 + y^2(t)})}{\sqrt{x^2 + y^2(t)}} dx \\ &= e^{-ip'x(t)} \mathcal{F}_{x \rightarrow -p'} \left[\frac{K_1(k\sqrt{x^2 + y^2(t)})}{\sqrt{x^2 + y^2(t)}} \right] \\ &= \frac{\pi}{ky(t)} e^{-ip'x(t)+y(t)\tau(p')}. \end{aligned}$$

Entonces se obtiene 2. □

Del lema 2.3.9 y de la ecuación integral (2.3.13), llegamos al siguiente sistema para $\tilde{\varphi}(p)$, $\theta(t)$:

Lema 2.3.10. *Tenemos el siguiente sistema*

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau(p)}\right) \tilde{\varphi}(p) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx(t)+y(t)\tau(p)} \left(x'(t) + \frac{ipy'(t)}{\tau(p)}\right) \theta(t) dt, \quad (2.3.15)$$

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x(t)+y(t)\tau(p')} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(p')}\right) \tilde{\varphi}(p') dp' \\
&+ \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{\varrho(t_1, t)})}{\sqrt{\varrho(t_1, t)}} \\
&\times [y'(t_1)(x(t_1) - x(t)) - x'(t_1)(y(t_1) - y(t))] \theta(t_1) dt_1,
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

donde $\tau(p)$ y $\varrho(t_1, t)$ estan definidas en (2.3.14).

Reescribimos el sistema (2.3.15) - (2.3.16) como:

Lema 2.3.11. *Tenemos el siguiente sistema*

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau(p)}\right) \tilde{\varphi}(p) = (\hat{M}_1\theta)(p), \tag{2.3.17}$$

$$[(1 - \hat{M}_3)\theta](t) = (\hat{M}_2\tilde{\varphi})(t), \tag{2.3.18}$$

donde

$$\begin{aligned}
(\hat{M}_1\theta)(p) &= \int_{-\pi}^{\pi} M_1(p, t)\theta(t)dt, \\
(\hat{M}_2\tilde{\varphi})(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_2(p', t)\tilde{\varphi}(p')dp', \\
(\hat{M}_3\theta)(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} M_3(t_1, t)\theta(t_1)dt_1,
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

con

$$\begin{aligned}
 M_1(p, t) &= e^{ipx(t)+y(t)\tau(p)} \left(x'(t) + \frac{ipy'(t)}{\tau(p)} \right), \\
 M_2(p', t) &= \frac{1}{2\pi} e^{-ip'x(t)+y(t)\tau(p')} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(p')} \right), \\
 M_3(t_1, t) &= \frac{k}{\pi} \frac{K'_0(k\sqrt{\varrho(t_1, t)})}{\sqrt{\varrho(t_1, t)}} \\
 &\quad \times [y'(t_1)(x(t_1) - x(t)) - x'(t_1)(y(t_1) - y(t))],
 \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

donde $\tau(p)$, $\varrho(t_1, t)$ están definidas en (2.3.14).

Obviamente, mediante las fórmulas estándares de la teoría potencial, una solución de (2.3.17), (2.3.18) da una solución de (2.2.1).

2.4. Solución del sistema

Consideremos la ecuación (2.3.18). Recordemos lo siguiente (ver [15])

Lema 2.4.1. *Sea*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K(x, y)| dx < M, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |K(x, y)| dy < M.$$

Entonces

$$\|\hat{K}u\|_{L_2[-\pi, \pi]} \leq M \|u\|_{L_2[-\pi, \pi]},$$

donde

$$(\hat{K}u)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, y)u(y)dy.$$

No es difícil ver que usando las expresiones asintóticas de $K_1(x)$ para valores pequeños y grandes de x , que el núcleo M_3 en (2.3.18) satisface las condiciones del lema 2.4.1 con $M = \text{const. } k^{-1/2}$.

En efecto consideremos el siguiente lema

Lema 2.4.2. *De la definición de $M_3(t_1, t)$ dada en (2.3.18), se sigue que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |M_3(t_1, t)| dt_1 < Ck^{-1/2}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |M_3(t_1, t)| dt < Ck^{-1/2},$$

donde C es una constante.

Demostración. De la definición de $M_3(t_1, t)$, dada en (2.3.20), para $\delta > 0$, dividimos el intervalo de integración en los dominios $k|t_1 - t| < \delta$ y $k|t_1 - t| > \delta$. En el primer dominio usamos la asintótica de $K'_0(z) \simeq \frac{1}{z}$ y en el segundo la asintótica de $K'_0(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |M_3(t_1, t)| dt_1 &= \int_{k|t_1-t|<\delta} \frac{|y'(t_1)(x(t_1) - x(t)) - x'(t_1)(y(t_1) - y(t))|}{\varrho(t_1, t)} dt_1 \\ &+ \int_{k|t_1-t|>\delta} \frac{\sqrt{\pi k} e^{-k\sqrt{\varrho(t_1, t)}}}{\sqrt{2}(\varrho(t_1, t))^{3/4}} |\dot{y}(t_1)(x(t_1) - x(t)) - \dot{x}(t_1) \\ &\times (y(t_1) - y(t))| dt_1, \end{aligned}$$

donde $\varrho(t_1, t)$ está definido en (2.3.14). Cuando $k|t_1 - t| < \delta$, entonces $y'(t_1)(x(t_1) - x(t)) - x'(t_1)(y(t_1) - y(t)) = O((t_1 - t)^2)$ y dado que $\varrho(t_1, t) = O((t_1 - t)^2)$, por lo tanto el integrando en este caso es acotado, y como el tamaño del dominio es del orden de $1/k$, la integral a lo largo del mismo es del orden de $1/k$.

Cuando $k|t_1 - t| > \delta$, de la definición de $\varrho(t_1, t)$

$$\frac{|y'(t_1)(x(t_1) - x(t)) - x'(t_1)(y(t_1) - y(t))|}{\varrho(t_1, t)} \leq C_1 \quad \text{y} \quad \sqrt{\varrho(t_1, t)} > C_2,$$

por lo tanto el integrando es menor que $C_1\sqrt{k}e^{-kC_2}$. La integral de esta expresión sobre el dominio $k|t_1 - t| > \delta$ es del orden de $\sqrt{k}e^{-kC_2}$, en consecuencia la demostración del lema. \square

Por lo tanto de los lemas 2.4.1 y 2.4.2 podemos invertir el operador $1 - \hat{M}_3$ en (2.3.18) usando la serie de Neumann obtenemos la solución $\theta(t)$ en términos de $\tilde{\varphi}(p)$:

$$\theta(t) = [(1 - \hat{M}_3)^{-1} \hat{M}_2 \tilde{\varphi}](t), \quad (2.4.1)$$

donde $(1 - \hat{M}_3)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{M}_3^n$. Sustituyendo (2.4.1) en (2.3.17) finalmente llegamos a una ecuación para $\tilde{\varphi}(p)$:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau(p)}\right) \tilde{\varphi}(p) = [\hat{M}_1(1 - \hat{M}_3)^{-1} \hat{M}_2 \tilde{\varphi}](p). \quad (2.4.2)$$

Aplicamos el razonamiento de [10] a la ecuación integral (2.4.2). En efecto, sabemos que λ es dado por (2.2.2), donde β es exponencialmente pequeño en k (ver [9]). Por lo tanto el primer factor en el lado izquierdo de (2.4.2),

$$L(p) := 1 - \frac{\lambda}{\tau(p)} = 1 - \frac{k - \beta^2}{\sqrt{k^2 + p^2}}, \quad (2.4.3)$$

es exponencialmente pequeño cuando $k \rightarrow \infty$ en el punto $p = 0$.

De hecho, las raíces de $L(p) = 0$ tienden a cero cuando $k \rightarrow \infty$.

Lema 2.4.3. *La ecuación $L(p) = 0$ cuando $p \rightarrow 0$ se cumple si*

$$p = p_{\pm} = \pm i \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \beta + O(\varepsilon^{1/2} \beta^3), \quad (2.4.4)$$

donde $L(p)$ esta definida en (2.4.3), $\varepsilon = 1/k$.

Demostración. Sea

$$L_1(p) = \tau(p) - k. \quad (2.4.5)$$

La expansión de $L_1(p)$ esta dada por

$$L_1(p) = \ell_1 p^2 + \ell_2 p^4 + \cdots + \ell_{n+1} p^{n+1} + L_{n+2}(p) p^{n+2}, \quad (2.4.6)$$

donde

$$\ell_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{con} \quad \varepsilon = 1/k \quad (2.4.7)$$

$\ell_1 > 0$, y $|L_{n+2}(p)| \leq C$ para p suficientemente pequeño. Ahora usando (2.4.6), podemos escribir una expansión en β para la raíz de la ecuación

$$L_1(p) + \beta^2 = 0.$$

La raíz de esta ecuación esta dada por el teorema de la función implícita.

Denotando la raíz por p_{\pm} , obtenemos

$$p_{\pm} = \pm \beta [p_1 + \beta^2 p_3 + \cdots + \beta^n p_n + \beta^{n+1} P_{n+1}(\beta)], \quad (2.4.8)$$

donde

$$p_1 = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad |P_{n+1}(\beta)| \leq C.$$

De (2.4.5), (2.4.8) y como

$$L(p) = \frac{\tau(p) - k + \beta^2}{\tau(p)} = \frac{L_1(p) + \beta^2}{\tau(p)},$$

se tiene que, para p dado por (2.4.4), $L(p) = 0$ cuando $p \rightarrow 0$. \square

Por esta razón, las consideraciones heurísticas de la sección 2 de [10] son aplicables a (2.4.2). Siguiendo aquellos argumentos, buscamos una $\tilde{\varphi}$ en la forma

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{A(p)}{L(p)}, \quad (2.4.9)$$

donde $L(p)$ esta definida en (2.4.3), y A es desconocida.

Obtenemos, de (2.3.19), (2.3.20), (2.4.2), (2.4.3) y (2.4.9) la integral

$$(\hat{M}_2 \frac{A}{L})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} M_2(p', t) \frac{A(p')}{L(p')} dp'. \quad (2.4.10)$$

También veremos (ver lema 2.4.8 abajo) que $A(p)$ es analítica en una banda que contiene al eje real y como M_2 es analítica en una banda que contiene al eje real podemos cambiar en la integral (2.4.10) el contorno de integración al mostrado en la Fig. 2.1. (con una a apropiada)

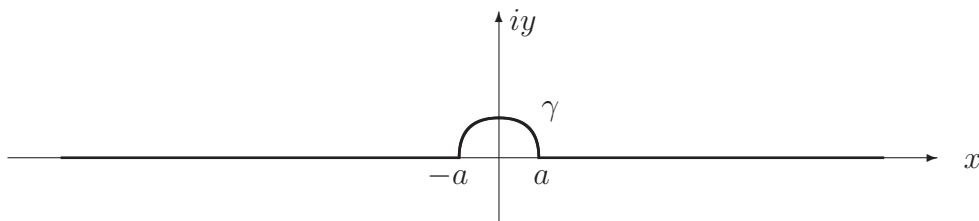


Fig. 2.1: Contorno γ

Se sigue del teorema de los residuos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_2(p', t) \frac{A(p')}{L(p')} dp' = \int_{\gamma} M_2(p', t) \frac{A(p')}{L(p')} dp' + 2\pi i \frac{M_2(p_+, t) A(p_+)}{\frac{d}{dp} L(p)|_{p=p_+}}. \quad (2.4.11)$$

Lema 2.4.4. *Tenemos la siguiente representación:*

$$\frac{2\pi i}{\frac{d}{dp} L(p)|_{p=p_+}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta \varepsilon^{3/2}} (1 + O(\beta^2)). \quad (2.4.12)$$

Demostración. De (2.4.5) y (2.4.3), se sigue que la expansión de $L(p)$ esta dada por

$$L(p) = \varepsilon(\ell_1 p^2 + \ell_2 p^4 + \cdots + \ell_{n+1} p^{n+1} + L_{n+2}(p) p^{n+2}), \quad (2.4.13)$$

donde

$$\ell_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{con} \quad \varepsilon = 1/k \quad (2.4.14)$$

$\ell_1 > 0$ y $|L_{n+2}(p)| \leq C$ para p suficientemente pequeño.

Ahora usando (2.4.13), podemos escribir una expansión de $L'(p)$

$$L'(p) = \varepsilon p \left(2\ell_1 + 4\ell_2 p^2 + \cdots + \tilde{\ell}_{n-1} p^{n-1} + \tilde{\ell}_n(p) p^n \right), \quad (2.4.15)$$

donde $|\tilde{\ell}_n(p)| \leq C$ para p suficientemente pequeño. De (2.4.15) y (2.4.14) se

sigue que $L'(p_+)$ tiene la siguiente expansión

$$L'(p_+) = \varepsilon \beta \left[L'_0 + \beta^2 L'_2 + \cdots + \beta^n L'_n(\varepsilon) + \beta^{n+1} L'_{n+1}(\beta, \varepsilon) \right], \quad (2.4.16)$$

donde

$$L'_0 = 2i\sqrt{\ell_1} = i\sqrt{2\varepsilon}, \quad (2.4.17)$$

donde ℓ_1 esta definida en (2.4.14) y $|L'_{n+1}(\beta, \varepsilon)| \leq C$ para ε suficientemente pequeño. Usando la serie geométrica y de (2.4.16), se sigue que

$$\frac{1}{L'(p_+)} = \frac{1}{\varepsilon\beta L'_0} \left\{ 1 - \beta^2 \frac{L'_2}{L'_0} - \dots - \beta^n P_n(\varepsilon) + \beta^{n+1} P_{n+1}(\beta, \varepsilon) \right\} \quad (2.4.18)$$

$|P_{n+1}(\beta, \varepsilon)| \leq C$ para ε suficientemente pequeño.

De (2.4.18), se tiene (2.4.12). El lema queda demostrado. \square

Denotemos por \hat{M}_4 el lado derecho de (2.4.2)

$$\begin{aligned} (\hat{M}_4 \frac{A}{L})(p) &:= [\hat{M}_1(1 - \hat{M}_3)^{-1} \hat{M}_2 \frac{A}{L}](p) \\ &= [\hat{M}_1(1 - \hat{M}_3)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_2(p', t_1)}{L(p')} A(p') dp'](p) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_4(p, p')}{L(p')} A(p') dp', \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

y

$$M_4(p, p') = \hat{M}_1(1 - \hat{M}_3)^{-1} M_2(p', t_1), \quad (2.4.20)$$

donde M_1, M_2, M_3 están definidas en (2.3.20). De (2.4.9), entonces (2.4.2) se transforma en

$$A(p) = \int_{-\infty}^{\infty} M_4(p, p') \frac{A(p')}{L(p')} dp'. \quad (2.4.21)$$

De (2.4.9), (2.4.11), el lema 2.4.4, (2.4.19), (2.4.20), 2.4.21, tenemos que (2.4.2) se convierte en

$$A(p) = \frac{\sqrt{2\pi}M_4(p, p_+)A(p_+)}{\beta\varepsilon^{3/2}}(1 + O(\beta^2)) + \int_{\gamma} M_4(p, p') \frac{A(p')}{L(p')} dp', \quad (2.4.22)$$

donde L y γ están definidos en (2.4.3). Reescribiendo (2.4.22) como

$$[(1 - \hat{M}_5)A](p) = \frac{\sqrt{2\pi}M_4(p, p_+)A(p_+)}{\beta\varepsilon^{3/2}}(1 + O(\beta^2)), \quad (2.4.23)$$

donde

$$(\hat{M}_5 A)(p) = \int_{\gamma} M_4(p, p') \frac{A(p')}{L(p')} dp', \quad (2.4.24)$$

y $M_4(p, p')$ es dado por (2.4.20). Ahora el operador \hat{M}_5 es pequeño en k como se demostrara en el lema 2.4.7.

Lema 2.4.5. *Para $p' \in \gamma$, tenemos las siguientes desigualdades:*

Para la parte del arco en el contorno γ , se tiene

$$|M_4(p, p')| \leq C e^{y(0)(k+\tau(p))}. \quad (2.4.25)$$

Para la parte del contorno en el eje real se tiene

$$\left| M_4(p, p') \right| \leq C e^{y(0)(\tau(p')+\tau(p))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(p')} \right). \quad (2.4.26)$$

Demostración. Tenemos de (2.4.20) que

$$\begin{aligned}
M_4(p, p') &= \int_{-\pi}^{\pi} M_1(p, t_1) M_2(p', t_1) dt_1 \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} M_1(p, t_{n+1}) M_2(p', t_1) \times \\
&\quad \text{(n+1)-veces} \\
&\times \prod_{i=1}^n M_3(t_i, t_{(i+1)}) dt_1 dt_2 \cdots dt_{n+1},
\end{aligned} \tag{2.4.27}$$

donde M_1, M_2, M_3 están definidas en (2.3.20). Puesto que

$$\begin{aligned}
M_1(p, t) &= e^{ipx(t)+y(t)\tau(p)} \left(x'(t) + \frac{ipy'(t)}{\tau(p)} \right), \\
M_2(p', t_1) &= \frac{1}{2\pi} e^{-ip'x(t_1)+y(t_1)\tau(p')} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(p')} \right),
\end{aligned}$$

y de la definición de $M_3(t_1, t)$, dada en (2.3.20) y del lema 2.4.2, se obtienen las desigualdades 2.4.25 y 2.4.26. Así queda demostrado el lema. \square

Lema 2.4.6. *Para $p \in \gamma$ se tiene que*

$$\left| \frac{1}{L(p)} \right| \leq Ck^2.$$

Demostración. De (2.4.3) se tiene que en el arco tenemos hasta $O(k^{-\infty})$

$$|L(p)| = \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2/k^2}} \right| = \frac{a^2}{2k^2} + O(k^{-4}),$$

y en la parte del contorno que esta en el eje real el mínimo de $|L(p)|$ se alcanza en los puntos $p = \pm a$, por lo tanto, la desigualdad aún se cumple. \square

Ahora el operador \hat{M}_5 es pequeño en k dado que $|L(p)| \geq \text{const } k^{-2}$ a lo largo de γ y $M_4(p, p')$ es exponencialmente pequeño.

Lema 2.4.7. *El operador $1 - \hat{M}_5$ tiene inversa.*

Demostración. En efecto, de la definición de \hat{M}_5 dada en (2.4.24)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{\gamma} \frac{M_4(p, p')}{L(p')} dp' \right|^2 dp \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \left| \frac{M_4(p, p')}{L(p')} \right| dp' \right)^2 dp.$$

De las cotas para $M_4(p, p')$ y $\frac{1}{L(p')}$ dadas en los lemas 2.4.5 y 2.4.6, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \left| \frac{M_4(p, p')}{L(p')} \right| dp' \right)^2 dp \leq Ck^4 e^{-2k|y(0)|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau(p)|y(0)|} dp.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau(p)|y(0)|} dp &= 2 \int_1^{\infty} e^{-2\tau(p)|y(0)|} dp + 2 \int_0^1 e^{-2\tau(p)|y(0)|} dp \\ &\leq \frac{\tau(1)}{2|y(0)|} e^{-2\tau(1)|y(0)|} + e^{-2k|y(0)|} \\ &< C e^{-2k|y(0)|}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \left| \frac{M_4(p, p')}{L(p')} \right| dp' \right)^2 dp \leq Ck^4 e^{-4k|y(0)|},$$

lo cual concluye la demostración. \square

El operador $1 - \hat{M}_5$ en la ecuación (2.4.23) tiene inversa, luego aplicamos las series de Neumann para resolver esta ecuación y tenemos

$$A(p) = (1 - \hat{M}_5)^{-1} \frac{\sqrt{2\pi} M_4(p, p_+) A(p_+)}{\beta \varepsilon^{3/2}} (1 + O(\beta^2)). \quad (2.4.28)$$

A continuación, mostraremos que efectivamente $A(p)$ es analítica en una banda que contiene al eje real, como lo habíamos supuesto.

Lema 2.4.8. $A(p)$ es analítica en una banda que contiene al eje real.

Demostración. De (2.4.28), obtendremos $A(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(p)$, donde

$$a_n(p) = \hat{M}_5^n \left(\frac{\sqrt{2\pi} M_4(p, p_+) A(p_+)}{\beta \sqrt{2} \varepsilon^{3/2}} \right) (1 + O(\beta^2)). \quad (2.4.29)$$

De (2.4.27) se tiene que $M_4(p, p_+)$ se puede expresar como

$$M_4(p, p_+) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(p, p_+)$$

donde

$$b_0(p, p_+) = \int_{-\pi}^{\pi} M_1(p, t_1) M_2(p_+, t_1) dt_1$$

y

$$b_j(p, p_+) = \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} M_1(p, t_{j+1}) M_2(p_+, t_1) \prod_{i=1}^j M_3(t_i, t_{(i+1)}) dt_1 dt_2 \cdots dt_{j+1}.$$

(j+1)-veces

Dado que $\tau(p)$ (definido en (2.3.14)) es analítica en una banda de longitud $2k$, entonces $M_1(p, t)$ definida en (2.3.20) es analítica en p en la misma banda. Por tanto, b_0 es analítica en p . De manera análoga se tiene que los otros términos de la sucesión b_j , son analíticos en la banda mencionada antes,

además obtenemos $\|b_n\| < Ce^{-2k(n+1)|y(0)|}$, y $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2k(n+1)|y(0)|}$ converge, entonces usando el criterio M de Weierstrass la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_j(p)$ converge uniformemente a $M_4(p, p_+)$. En consecuencia $M_4(p, p_+)$ es analítica en la misma banda.

Del argumento anterior y de (2.4.29) se sigue que $a_0(p)$ es analítica en la banda. Ahora demostremos la analiticidad de $a_1(p)$, para esto recordamos

$$\hat{M}_5 M_4(p, p_+) = \int_{\gamma} M_4(p, p') \frac{M_4(p', p_+)}{L(p')} dp'. \quad (2.4.30)$$

Primero veamos que la integral en (2.4.30) este bien definida, para ello necesitamos que $M_4(p, p')$ sea analítica en p' , en la banda mencionada antes, lo cual es cierto porque $M_2(p', t_1)$ es analítica en p' en dicha banda y con un análisis similar a como se hizo anteriormente $M_4(p, p')$ es analítica en p' . Ahora como $M_4(p, p')$ es analítica en p , entonces $\hat{M}_5 M_4(p, p_+)$ es analítica en p , y repitiendo reiteradamente el mismo proceso se tiene que $a_n(p)$ es analítica en la banda mencionada, luego usando de nuevo el criterio M de Weierstrass se obtiene la analiticidad de $A(p)$. Tenemos la demostración del lema 2.4.8. \square

2.5. Asintótica del número β

Calculemos ahora la asintótica del número β . Colocando $p = p_+$ en la igualdad (2.4.28) y dividiendo por $A(p_+)$, obtenemos una ecuación para β :

$$\beta = \frac{\sqrt{2}\pi}{\varepsilon^{3/2}} (1 - \hat{M}_5)^{-1} M_4(p, p_+) |_{p=p_+} (1 + O(\beta^2)). \quad (2.5.1)$$

Lema 2.5.1. *Para valores grandes de k , se tiene que*

$$\beta = k \sqrt{\frac{\pi}{2|y''(0)|}} e^{-2k|y(0)|} x'(0) (1 + O(k^{-1})), \quad (2.5.2)$$

donde $y(t)$ tiene un máximo estricto en el interior de $[-\pi, \pi]$ y $x'(0) > 0$.

Demostración. En efecto, del término principal en (2.5.1),

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\sqrt{2}\pi}{\varepsilon^{3/2}} M_4(p_+, p_+) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{\varepsilon^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} M_1(p_+, t_1) M_2(p_+, t_1) dt_1, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

con $M_4(p_+, p_+)$, p_+ , $M_1(p_+, t_1)$, $M_2(p_+, t_1)$ definidos en (2.3.20) y (2.4.4).

Teniendo en cuenta que $e^{ix(t_1)p_+} = 1 + O(\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}})$, $\tau(p_+) = k(1 + O(\varepsilon\beta^2))$ y $e^{-|y(t_1)|\tau(p_+)} = e^{-k|y(t_1)|} (1 + O(e^{-k|y(0)|}\beta^2))$, dado que $\lambda = k - \beta^2$ y como $k = \frac{1}{\varepsilon}$, tiene que ser $1 + \frac{\lambda}{\tau(p_+)} = 2(1 + O(\varepsilon\beta^2))$, luego

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} M_1(p_+, t_1) M_2(p_+, t_1) dt_1 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2k|y(t_1)|} \left(x'(t_1) + \frac{ip_+ y'(t_1)}{\tau(p_+)} \right) dt_1 (1 + O(\beta^2)), \end{aligned}$$

con $\tau(p_+)$ definida por (2.3.14).

Aplicando el método de Laplace (ver [13]) al término principal de la integral, se tiene (2.5.2). En efecto, la integral anterior se puede escribir en la forma:

$$I(k) = \int_a^b e^{-kp(t_1)} q(t_1) dt_1,$$

donde $p(t_1) = 2|y(t_1)|$ es la fase, $q(t_1) = \frac{1}{\pi}(x'(t_1) + \frac{ip_+y'(t_1)}{\tau(p_+)})$, $a = -\pi$, $b = \pi$.

Cuando k es grande, el valor máximo de la integral se obtiene cuando $p(t_1)$ alcanza un mínimo estricto en $0 \in [-\pi, \pi]$, además se tiene:

- (i) $p'(t_1)$ y $q(t_1)$ son continuas en $t_1 = 0$,
- (ii) $p(t_1) - p(0) = Pt_1^\mu + O(t_1^3)$ cuando $t_1 \rightarrow 0$,
- (iii) $q(t_1) = Q(t_1)^{\nu-1} + O(t_1)$ cuando $t_1 \rightarrow 0$,

con las constantes $P = |y''(0)| > 0$, $Q = \frac{1}{\pi}x'(0) > 0$, $\nu = 1$, $\mu = 2$, $c = 0$, de donde

$$I(k) = 2 \frac{Q}{\mu} \Gamma\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \frac{e^{-kp(c)}}{(Pk)^{\nu/\mu}} (1 + O(k^{-1}))$$

cuando $k \rightarrow \infty$. Se tiene la demostración del lema. □

Y por lo tanto, se obtiene el resultado del teorema 2.2.1.

Bibliografía

- [1] R. P. Kanwal, “*Generalized Functions. Theory and Technique*”, Birkhauser, (1998).

- [2] M. Reed and B. Simon, “*Methods of Modern Mathematical Physics*”, Vols. 1 and 4, Academic Press, New York, (1981).

- [3] D. V. Evans and P. McIver, Edge waves over a shelf: Full linear theory, *J. Fluid Mech.*, **142**, pp. 79-95, (1984).

- [4] G. G. Stokes, “*Report on Recent Researches in Hydrodynamics*”, Britt. Assn. Rep., (1846).

- [5] F. Ursell, Trapping modes in the theory of surface waves, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* , **47**, pp. 347-358, (1951).

- [6] F. Ursell, Edge waves on a sloping beach, *Proc. Roy Soc. London, Ser. A*, **214**, pp. 347-358, (1952).

- [7] D. S. Jones, The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains, Proc. Cambridge Phill. Soc., **49**, pp. 668-684, (1953).
- [8] F. Ursell, Mathematical aspects of trapping modes in the theory of surface waves, J. Fluid Mech., Cambridge University Press., **183**, pp. 421-437, (1987).
- [9] A. S. Bonnet-Ben Dhia and P. Joly, Mathematical analysis of guided water waves, SIAM J. Appl. Math., **53**, pp. 1507-1550, (1993).
- [10] P. Zhevandrov and A. Merzon, Asymptotics of eigenfunctions in shallow potential wells and related problems, Amer. Math. Soc. Translations (2) **208**, pp. 235-284, (2003).
- [11] M. Abramowitz and I. A. Stegun, “*Handbook of Mathematical Functions*”, Dover Publ, Inc., New York, (1970).
- [12] G. N Watson, “*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*”, Cambridge Mathematical Library, (1996).
- [13] F. W. Olver, “*Asymptotics and Special Functions*”, AKP Classics, New York: Academic Press, (1974).
- [14] T. Kato, “*Perturbation Theory for Linear Operators*”, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, (1976).

- [15] P. Halmos and V. Sunder, “*Bounded Integral Operator on L_2 Space*”, Springer-Verlag, New York, (1979).
- [16] Robert D. Richtmyer, “*Principles of Advanced Mathematical Physics*”, Springer-Verlag, Volume I, New York, (1978).
- [17] V. S. Vladimirov, “*Equations of Mathematical Physics*”, Mir Publishers, Moscow, (1984).
- [18] I. Stakgold, “*Boundary Value Problems of Mathematical Physics*”, Macmillan Company, Volume II, New York, (1968).