



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“INVERSIÓN DE SISTEMAS LINEALES
MODELADOS EN
BOND GRAPH UTILIZANDO EL PRINCIPIO
DE BICAUSALIDAD”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA

PRESENTA
ING. IGNACIO RODRÍGUEZ ALANIS

DIRECTOR DE TESIS
DR. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

MORELIA, MICHOACÁN JUNIO DE 2012





INVERSIÓN DE SISTEMAS LINEALES MODELADOS EN BOND GRAPH UTILIZANDO EL PRINCIPIO DE BICAUSALIDAD

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban
la Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de *Ignacio Rodríguez Alanís*

Dr. José Juan Rincón Pasaye
Presidente

Dr. Gilberto González Avalos
Director de Tesis

Gilberto González

Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel
Vocal

Dr. José Antonio Camarena Ibarrola
Vocal

M.C. Víctor López Garza
Revisor Externo

Dr. J. Aurelio Medina Ríos
Jefe de la División de Estudios de Posgrado
En Ingeniería Eléctrica.

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Junio 2012

Agradecimientos

Al Dr. Gilberto González Avalos por su apoyo incondicional como Asesor para la relación de este trabajo y su guía que aparte de hacerme crecer profesionalmente lo hizo también en lo personal.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por haberme brindado el apoyo para solventar mi manutención y lograr este título de maestría.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por permitirme formar parte de las líneas de egresados de esta casa de estudios.

A Rogelio Martínez Hernández por su apoyo en las dudas que surgieron durante este trabajo.

A mis compañeros de generación, así como a los compañeros del laboratorio de modelado ya que su compañía siempre grata hizo más sencillo el trabajo de investigación.

A Yessica Hernández Zepeda por estar siempre a mi lado de manera incondicional y siempre animarme cuando mis ánimos estaban decaídos.

Dedicatoria

A mi madre Carmen por haberme inculcado el hábito del estudio y soportar vejaciones y carencias en pro de mis estudios.

A mis hermanos Miguel, Dolores y Rosario que han buscado siempre la forma de apoyarme.

A Gonzalo Agustín y Ana Karen por estar siempre atentos a mi desempeño y animarme.

A Gonzalo y Marcos que me han apoyado en infinidad de ocasiones.

A mi padre Saturnino por abrirme puertas a las que no todos tienen acceso y ayudarme cuando se lo pedía.

A Yessica que siempre está ahí para no dejarme caer, para darme ánimos y enfrentar conmigo todos los retos que se han surgido.

Resumen

En este trabajo de tesis se muestran dos procedimientos para aplicar el modelado de sistemas inversos en Bond Graph.

El análisis de sistemas inversos aplicados a manipuladores para el seguimiento de trayectorias no ha sido del todo explorado con esta nueva técnica, menos aun en un enfoque que utilice el modelo linealizado.

La primer metodología es un procedimiento sencillo para la obtención del modelo inverso de orden completo mediante el uso de trayectorias causales, con lo que se obtiene el modelo sin necesidad de hacerlo mediante las ecuaciones como generalmente se realiza.

La segunda es la propuesta de obtener de manera directa la representación del modelo inverso reducido utilizando el principio de bicausalidad que es una herramienta de usos exclusivo de Bond Graph esto aplicado a un modelo linealizado de un manipulador robótico de dos eslabones.

Los resultados que se obtuvieron durante el presente trabajo nos permiten concluir que es una opción viable la obtención de sistema inversos por medio de la técnica de Bond Graph, brindandonos ademas la posibilidad de la obtención del modelo inverso reducido en un solo paso. Tambien se hace incapie en la aplicación al modelo de un robot de dos eslabones obteniendo una buena reconstrucción de la señal del sistema inverso conectado en cascada con el sistema original.

Abstract

In this thesis two procedures to implement inverse system modeling on Bond Graph are presented.

The systems analysis applied to inverse manipulator to track trajectories has not been completely explored with this new technique, even lessing an approach that uses the linearized model.

The first method is a simple procedure to obtain the full-order inverse model using causal paths, this model is obtained without going through the equations as is usually done.

The second is a proposal to obtain in a direct manner the reduced inverse model representation using the principle of bicausality that uses a unique tool that Bond Graph applied to a linearized model of a robotic manipulator with two links.

The results obtained in this thesis allow us to conclude that, it is a viable option the obtention of inverse systems through the Bond Graph technique, giving us the possibility to obtain the inverse reduced model in just one step. It is also pointed the application in a two links robot model obtaining a closed reconstructed signal of the inverse system connected in serie with the original system.

Índice general

Resumen	ii
Abstract	iii
Lista de figuras	v
Lista de tablas	vi
Lista de Abreviaturas y símbolos	vii
Lista de Algoritmos	viii
1 Introducción	2
1.1 Introducción	2
1.2 Objetivos	3
1.2.1 Objetivo general	3
1.2.2 Objetivos particulares	3
1.3 Estado del arte	3
1.4 Justificación	4
1.5 Contribución de la tesis	5
1.6 Estructura de la tesis	5
2 Modelado con la Metodología de Bond Graph	7
2.1 Introducción	7
2.1.1 Sistema	7
2.1.2 Modelo	8
2.2 Componentes básicos de un Bond Graph	9
2.2.1 Variables de potencia y energía	9
2.2.2 Variables de energía.	10
2.2.3 Elementos básicos de un bond graph	10
2.3 Causalidad	19
2.3.1 Representación de causalidad en Bond Graph	19
2.3.2 Tipos de causalidad	20
2.3.3 Procedimiento a seguir para el modelado de sistemas	21
2.4 Estructura de unión en sistemas multipuerto	25
2.4.1 Vectores clave	25

2.4.2	Procedimiento para la obtención de la estructura unión en un bond graph: . .	28
2.5	Conclusiones	34
3	Sistemas Inversos desde una perspectiva clásica	35
3.1	Introducción	35
3.2	Tipos de Inversos	36
3.2.1	Inversión de sistemas por la izquierda	36
3.2.2	Inversión de sistemas por la derecha	36
3.2.3	Inversión matemática	37
3.2.4	Inversión de sistemas que contienen relaciones directas entre entradas y salidas	39
3.2.5	Ejemplo 3.2	41
3.2.6	Sistemas Inversos con la metodología de Silverman	43
3.3	Conclusiones	49
4	Sistemas inversos desde una perspectiva de Bond Graph	51
4.1	Invertibilidad estructural a partir del Bond Graph Directo.	51
4.1.1	Invertibilidad estructural desde el Bond Graph Inverso	53
4.2	Bicausalidad	54
4.2.1	Bond Graph bicausales	54
4.2.2	Elementos Fuente-Sensor	55
4.2.3	Bicausalidad en componentes	56
4.3	Determinación de sistemas inversos por medio del Análisis de Trayectorias Causales	58
4.3.1	Expresión del sistema inverso.	61
4.3.2	Determinación de un sistema inverso con $D = 0$	62
4.3.3	Ejemplo de sistema inverso con $D \neq 0$	65
4.4	Determinación del sistema inverso usando el concepto de bicausalidad	67
4.4.1	El concepto de Bond Graph bicausal	67
4.4.2	Explicación de la bicausalidad por medio de bloques operacionales.	68
4.4.3	El uso de la bicausalidad para la inversión de sistemas	71
4.4.4	Algoritmo de asignación de la bicausalidad para obtener el modelo inverso reducido.	72
4.4.5	Determinación del sistema inverso por medio de la bicausalidad	76
4.4.6	Ejemplo de obtención de sistemas inversos de múltiples entradas y múltiples salidas de Bond Graph	80
4.5	Ejemplos de aplicación	83
4.5.1	Suspensión pasiva SISO	84
4.5.2	Robot Puma de 2 eslabones	89
4.6	Otras aplicaciones de la bicausalidad	94
4.6.1	Estimación de estados	95
4.6.2	Estimación de parámetros	95
4.7	Conclusiones	96
5	Conclusiones y Trabajos futuros	97
5.1	Conclusiones	97
5.2	Trabajos Futuros	98
	Bibliografía	99

A	Linealización de una Clase de Sistemas No Lineales	103
A.1	Linealización algebraica	103
A.2	Linealización por Bond Graph	105
A.2.1	Ejemplo: Robot manipulador de dos eslabones	107
B	Prueba de la ecuación 4.29	112
C	Artículos Publicados	114

Lista de figuras

2.1	Convención de las direcciones de los bonds de potencia	11
2.2	Elemento puerto-1 R	12
2.3	Elemento puerto-1 C	12
2.4	Elemento puerto-1 I	13
2.5	Tetraedro de estado (H. M. Paynter.)	13
2.6	Tetraedro de estado incluyendo los elementos C, I y R	14
2.7	Fuentes ideales en Bond Graph	14
2.8	Fuentes Moduladas en Bond Graph	15
2.9	Representación del transformador en Bond Graph	15
2.10	Representación de un girador en Bond Graph.	16
2.11	Representación de una unión -0	17
2.12	Representación de una unión -1	17
2.13	Bond Activo	18
2.14	Trazo causal	19
2.15	Bond graph causal.	20
2.16	Bond graph acausal.	20
2.17	Paso 1(izquierda). Paso 2 (derecha)	21
2.18	Paso 3 a). Pasos 4 y 5 b).	22
2.19	Paso 6	22
2.20	Bond graph simplificado.	23
2.21	Paso 2	23
2.22	Paso 3	24
2.23	Paso 4	24
2.24	Simplificación del sistema	24
2.25	Estructura de unión de un Bond graph.	25
2.26	Modelo del motor de CD	29
2.27	Bond graph del motor de CD.	29
2.28	Trayectoria causal directa	31
2.29	a)Mezclada directa, b) Mezclada indirecta	32
2.30	a)Modelo eléctrico. b)Bond graph correspondiente.	33
2.31	Trayectoria entre la entrada e_1 y la salida e_6	33
2.32	Lazos causales que contiene el Bond graph	34
3.1	Diagrama de bloques en Simulink que representa los sistemas conectados en cascada	40

3.2	Simulación de las entradas del sistema original comparadas con las salidas del sistema inverso	40
3.3	Modelo inverso en Simulink	43
3.4	Respuesta del sistema inverso	43
3.5	Simulación en simulink del sistema inverso descrito en la ecuación (3.45).	48
3.6	Simulación del sistema inverso	49
4.1	Bond graphs unicausales con trazo causal	54
4.2	Bond Graph bicausales con causalidad asignada	55
4.3	Elemento fuente-sensor con sus causalidades asignadas	55
4.4	Tres tipos posibles de asignación de causalidad en un elemento $-R$	56
4.5	Causalidades para un elemento $-C$	57
4.6	Tipos de causalidad para el transformador TF	58
4.7	Diagrama modelo del motor CD (izquierda).Bond Graph del motor de CD (derecha).	63
4.8	Diagrama de simulación del sistema inverso en 20-Sim	65
4.9	Simulación en 20-sim	66
4.10	Bond Graph de un sistema con la matriz $D \neq 1$	66
4.11	Diagrama que muestra el paso 1.	70
4.12	Expansión de los bonds causales en señales bilaterales	70
4.13	Expansión en bloques operacionales y adición de signos.	71
4.14	Organización de las entradas y salidas	72
4.15	Conversión a la forma convencional.	72
4.16	Diagrama esquemático de un par de motores en paralelo.	74
4.17	Modelo en Bond Graph del sistema anterior.	74
4.18	Bond graph Causal Directo.	75
4.19	Trayectoria entre la entrada y la salida.	75
4.20	Diagrama con los correspondientes elementos SS	76
4.21	Bond graph bicausal.	76
4.22	Dirección de las variables de potencia en el bond graph bicausal.	77
4.23	Bond graph bicausal completo.	77
4.24	Trayectoria entre la salida y la entrada.	78
4.25	Modelo del motor de CD con causalidad asignada	78
4.26	Motor de CD con bicausalidad	79
4.27	Trayectoria entre la salida entrada en el bond graph bicausal	79
4.28	Trayectorias entre la salida y la entrada	80
4.29	Dirección de las señales en el Bond Graph del motor de CD	80
4.30	Figura que muestra el flujo de las señales una vez asignada la bicausalidad	81
4.31	Opción 1 de las trayectorias entre (u_1, y_3) y (u_2, y_2)	81
4.32	Opción 2 de las trayectorias entre (u_1, y_3) y (u_2, y_2)	82
4.33	Opción 1 de las trayectorias entre (u_1, y_1) y (u_2, y_2)	82
4.34	Opción 2 de las trayectorias entre (u_1, y_1) y (u_2, y_2)	83
4.35	Ganancias de la matriz A_i y B_i	83
4.36	Ganancias de la matriz C_i y D_i	84
4.37	Suspensión de emdío auto pasiva	85
4.38	Modelo inverso utilizado para la simulacion en 20-sim	89
4.39	Respuesta a una entrada escalón unitario de la suspensión pasiva	90
4.40	Modelo linealizado del manipulador de dos eslabones	91

4.41	Bond Graph bicausal	92
4.42	Modelo de simulación del sistema inverso del robot manipulador de dos eslaboens . .	93
4.43	Respuesta del robot manipulador en cascada con su inverso (primer caso de estudio).	94
4.44	Respuesta del robot manipulador en cascada con su inverso (segundo caso de estudio).	94
4.45	Respuesta del robot manipulador en cascada con su inverso (tercer caso de estudio).	95
A.1	Representación gráfica del sistema linealizado.	104
A.2	Modelo del robot de dos eslabones (izquierda). Bond graph del sistema no lineal (derecha).	108
A.3	Bond graph linealizado	109

Lista de tablas

2.1	Variables generalizadas en diversos dominios de energía.	10
2.2	Elementos en los diversos dominios energéticos.	13
2.3	Representación de los sensores en Bond Graph.	19
2.4	Formas causales para los puertos-1.	21
4.1	Equivalente en bond graph de los bloques operacionales.	69

Lista de abreviaturas y símbolos

$:=$	Asignación
$f(t)$	Variable de esfuerzo
$e(t)$	Variable de flujo
$p(t)$	Variable de momento
$q(t)$	Variable de desplazamiento
R	Elemento resistencia
C	Elemento capacitor
I	Elemento inercia
TF	Elemento transformador
GY	Elemento girador
-0	Unión cero
-1	Unión uno
S_e	Fuente de esfuerzo
S_f	Fuente de flujo
$u(t)$	Vector de entrada del sistema
$y(t)$	Vector de salida del sistema
$x(t)$	Vector de estados asociado a elementos en causalidad integral
$z(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad integral
$x_d(t)$	Vector de estados asociado a elementos en causalidad derivativa
$z_d(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad derivativa
A_p, B_p, C_p, D_p	Matrices de estado
A_i, B_i, C_i, D_i	Matrices de estado del modelo inverso
SS	Elemento fuente sensor
$SISO$	Sistema con una entrada y una salida
$MIMO$	Sistema múltiples entradas y múltiples salidas
p	Operador $\frac{d}{dt}$
G_k	Longitud de la trayectoria
x_i	Vector de estados del sistema inverso
I	Matriz identidad
I/O	Entrada salida

Lista de Algoritmos

Algoritmo 4.1. Asignación de la bicausalidad para obtener el modelo inverso reducido.....	72
--	----

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

El diseño de sistemas de control está siendo cada vez más imprescindible para la optimización de recursos. Las expectativas para cualquier sistema de control se han visto aumentadas debido al avance tecnológico y las cada vez más crecientes necesidades del hombre en lo referente a la industria.

La existente teoría de control, basada en la representación matemática de los sistemas así como el diseño de sistemas inversos, son consideradas técnicas clásicas y son posibles de aplicar en un rango muy amplio de dominios físicos.

Bond Graph es una metodología poderosa que permite el modelado de sistemas físicos que ha venido desarrollándose desde finales de los años cincuenta y que hoy por hoy es conocida por ser una técnica muy utilizada para el área de modelado de sistemas.

Los sistemas inversos son aquellos que conectados en cascada con el modelo directo entregan como salida la entrada del modelo original lo cual responde en una primera instancia a la pregunta básica del control. ¿Qué entrada es requerida para obtener una salida deseada?.

En el diseño y análisis de sistemas inversos en los diversos dominios físicos (mecánico, eléctrico, hidráulico, etc...) se requiere de abstracciones de los sistemas físicos, la pérdida de detalles puede darse con la utilización de estas técnicas, además un análisis estructural puede requerir la realización de análisis separados de cada parte del sistema.

La teoría de Bond Graph brinda la opción del diseño de modelos para sistemas dinámicos de forma grafica, la cual utiliza un par de variables generalizadas, esta representación gráfica permite

un análisis mucho más intuitivo sobre algunas de las propiedades estructurales del sistema original.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

El objetivo general de este trabajo de investigación es presentar el diseño de sistemas inversos utilizando la técnica de Bond Graph por medio de bicausalidad así como la técnica de trayectorias causales.

1.2.2 Objetivos particulares

- Obtención del sistema inverso por medio de trayectorias causales.
- Comparación de los resultados obtenidos por medio de trayectorias causales con respecto a los obtenidos de manera tradicional.
- Utilizar la bicausalidad para la obtención del modelo inverso de sistemas de una entrada una salida.
- Utilizar la bicausalidad para la obtención del modelo inverso de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas.
- Aplicación de la bicausalidad para la obtención del modelo inverso del manipulador de 2 eslabones.

1.3 Estado del arte

En 1961 surge en el MIT una técnica de modelado propuesta por Henry Paynter [Paynter, 1961] que permite de manera gráfica y abstracta el modelado de sistemas físicos. Así, nace la teoría de Bond Graph. De la misma manera Dean Karnopp y Ronald Rosenberg formalizaron esta metodología en el modelado de sistemas en [Karnopp, 1975], en la actualidad W. Borutzky en [Borutzki, 2009] describe gran parte de la teoría de Bond Graph. Así mismo, las aplicaciones en las que se encuentra la utilización de la técnica abarca desde trenes híbridos [Gandaneraga, 2006], Robots [Sueur, 2003] hasta sistemas alternos de energía [Mezrahi, 2005], en la misma década de los avances de Paynter, Silverman [Silverman, 1968],[Silverman, 1969]es de los pioneros en el estudio de

la inversión de sistemas por medio de cálculos matemáticos, así mismo Massey y Sain [Sain, 1969], proponen sus algoritmos para a la generalización de los métodos de inversión tanto de sistemas continuos como discretos.

Por otro lado, en Bond Graph P.J Gawthrop crea una nueva clase de bonds [Gawthrop, 1995], en los cuales el trazo causal es dividido en dos lo que facilita el análisis de la invertibilidad así como la inversión de los sistemas SISO, a su vez Fotsu Nwompo incursiona en la obtención del sistema inverso por medio del análisis de las trayectorias causales [Nwompo, 1996], en este mismo trabajo utiliza los bond graphs bicausales descritos por Gawthrop para mostrar las ventajas de esta clase de bonds para la obtención directa del modelo inverso reducido.

La utilización de los bond graphs bicausales han sido extendidos a el dimensionamiento de problemas es el diseño de sistemas [Nwompo 1999¹], la simulación de sistemas inversos usando especificaciones físicas en [Nwompo, 1999²], también se ha extendido para la construcción de observadores de orden reducido en [Pichardo, 2008]. En [Gandaneraga, 2004] la inversión de sistemas por bicausalidad son consideradas las restricciones de la salida.

En [González, 2004] se muestra un procedimiento para la linealización de una clase de sistemas no lineales en Bond Graph y en [Li, 2010] se trata inclusive algunos sistemas que son desacoplados para la obtención de su modelo inverso en Bond Graph.

De esta manera, el presente trabajo ejemplifica los métodos tradicionales sobre la inversión de sistemas y contrasta con los métodos existentes en Bond Graph. Por lo que este trabajo parte de la información existente en el estado del arte:

- El modelado de sistemas físicos en Bond Graph.
- Obtención de la función de transferencia en el modelo de Bond Graph.
- Obtención del sistema inverso por medio de trayectorias causales.
- Obtención del sistema inverso reducido por medio del principio de bicausalidad.
- Linealización de una clase de sistemas no lineales en Bond Graph.

1.4 Justificación

Debido a la importancia y facilidad del diseño de modelos y simulación de sistemas con diferentes dominios de energía con la técnica de Bond Graph, se considera de mucha importancia el

aportar a esta teoría en lo que ha sistemas inversos se refiere. Si bien es cierto que con ayuda de la técnica de Bond Graph ya es posible obtener la función de transferencia, así como la representación en espacios de estados (lo cual con las técnicas convencionales sirve para obtener el sistema inverso), la mayor de las ventajas de esta técnica sobre las técnicas convencionales reside en la fácil interpretación de los resultados así como la obtención directa del modelo inverso reducido.

El diseño de sistemas inversos responde a la pregunta clásica de control. ¿Qué entrada es la requerida para lograr un determinado comportamiento de la salida?. Las principales técnicas de análisis de sistemas inversos en Bond Graph ha sido aplicar las trayectorias causales, se ha introducido una nueva herramienta que facilita el análisis de los sistemas inversos en Bond Graph, dicha herramienta es la bicausalidad propuesta por Gawthrop en [Gawthrop, 1995].

El presente trabajo de investigación se busca tener un avance en el análisis de sistemas inversos utilizando la bicausalidad, que es una característica particular de Bond Graph resolviendo un problema de aplicación como lo es el robot manipulador de dos eslabones que no ha sido abordado desde el enfoque de seguimiento de trayectorias con esta metodología.

1.5 Contribución de la tesis

- La contribución de la tesis radica en la propuesta de un modelo inverso reducido del robot manipulador de dos eslabones.
- Realizar las simulaciones de los sistemas inversos de manera directa en el paquete de simulación 20-sim.

1.6 Estructura de la tesis

En el capítulo dos de la tesis se aborda la técnica de Bond Graph en una primera instancia se explican las variables generalizadas. Una vez descrito lo anterior se muestran los componentes básicos de un bond graph así como su interpretación o equivalencia en los diferentes dominios de energía. En este mismo capítulo se muestra como obtener la función de transferencia así como su representación en variables de estado de un sistema dado.

En el capítulo tres se abordan los sistemas inversos desde una perspectiva tradicional, utilizando en un principio la inversión por derivaciones de la salida y finalmente el algoritmo de

Silverman, la inversión por derivaciones consecutivas de la salida, de igual manera se hace la comprobación por medio de la simulación de los sistemas inversos obtenidos en el paquete de simulación Matlab. Es importante resaltar que en esta sección también se muestran los criterios de invertibilidad matemáticos.

En el capítulo cuatro se introduce a la bicausalidad, así como a la obtención de los sistemas inversos con la ayuda de la metodología de Bond Graph, en un primer momento se muestra la obtención del sistema inverso por medio de la utilización de trayectorias causales y en la siguiente parte la obtención del mismo por medio de la aplicación de la bicausalidad. En este capítulo también se abordan los criterios de invertibilidad que definen si un bond graph es invertible o no.

Capítulo 2

Modelado con la Metodología de Bond Graph

2.1 Introducción

En la actualidad, la necesidad del modelado y simulación cada vez se ha hecho más importantes en el diseño y análisis de sistemas físicos dinámicos debido a que en el proceso de simulación permite hacer una proyección del comportamiento de dicho sistema, por lo que no es requerido un prototipo para realizar las pruebas, lo cual ahorra costos al evitar la construcción de dicho prototipo.

Con la finalidad de resolver dicha problemática, técnica de Bond Graph, misma que en el año de 1961 fue propuesta por Henry Paynter [Paynter, 1961], más tarde fue complementada por Karnopp y Rosenberg [Karnopp, 1975], mismos que ejemplifican sistemas en donde existe una interacción entre sistemas de diversos dominios físicos (mecánicos, hidráulicos, eléctricos y térmicos).

En este capítulo, se explicarán las técnicas utilizadas para convertir el modelo de un sistema que se encuentra en el dominio físico a su representación en Bond Graph. Se describen los elementos que conforman un modelo en Bond Graph, así como la metodología para analizar algunas propiedades estructurales. De igual forma se describe, como obtener la representación en espacios de estado y la función de transferencia de un sistema con la ayuda de esta técnica de modelado.

2.1.1 Sistema

Un sistema es una combinación de elementos que actúan en conjunto para la realización de determinada tarea. Los sistemas no siempre tienen representaciones físicas, ya que el concepto

de "sistema" es también aplicado a fenómenos abstractos y dinámicos, tal es el caso del análisis de mercados financieros, por lo tanto, es evidente que la palabra sistema debe de considerarse que abarca tanto a los sistemas físicos, biológicos y económicos así como a otros similares a estos.

Para el estudio de un sistema en particular no es necesaria su implementación en un inicio, para diferentes estudios previos se realizan a través de modelos, los cuales permiten conocer la forma en la que se va a llevar a cabo el proceso a realizar.

2.1.2 Modelo

Un modelo es una simplificación de la realidad. Son diversas las formas en las que puede representarse dicha simplificación. Los modelos físicos son frecuentemente usados en ingeniería por que la implementación de los sistemas reales no es factible. La idea central que envuelve el estudio de la dinámica de un sistema real es la de su modelo. Ya que los modelos son simplificaciones abstractas utilizadas para el estudio y determinación del comportamiento del sistema.

Cuando la representación de la dinámica del sistema es expresar en términos de operadores y variables. De aquí surge otra clase de modelos, llamados modelos matemáticos. Esta clase de modelos son más abstractas que el modelo físico aunque tienen muchas similitudes con el mismo. El modelo matemático representa solamente propiedades esenciales o primordiales de un fenómeno de interés. Como se mencionó anteriormente, un modelo es la simplificación de la realidad, hay una cantidad considerable de variantes para la construcción de un modelo. Es importante se tenga un conocimiento pleno de la aplicación del modelo para realizar, las consideraciones pertinentes en la elaboración del mismo ya que, un modelo excesivamente complejo y detallado puede contener parámetros que conlleven un esfuerzo elevado en lo que respecta a su análisis y estimación. Por el contrario, un modelo que sea muy simple no es capaz de representar características destacables de cierto sistema. Una vez visto lo anterior podemos definir lo que es un modelo de diversas maneras;

- Es una abstracción de un conjunto particular de las propiedades de un sistema físico, o bien el conocimiento de aquellas propiedades que son suficientes para predecir el comportamiento del sistema bajo condiciones de operación.
- Es un mecanismo que en el cual se pueden aplicar diversas técnicas analíticas en la solución de un sistema práctico.
- Es una formación o ecuación que expresa la características esenciales de un sistema físico o

proceso (son un reflejo fiel del posible comportamiento de un determinado sistema).

2.2 Componentes básicos de un Bond Graph

Cuando es diseñado un nuevo sistema dinámico o se requiere analizar uno ya existente, es común que se realiza una representación gráfica de estos modelos con la finalidad de darlos a conocer, intercambiar ideas o expresar asunciones en sus modelos. No es de sorprenderse que una representación gráfica sea más fácil de comprender para la percepción humana que una representación escrita. Por ejemplo, un diagrama esquemático de un sistema de control de lazo cerrado es más sencillo de comprender que una descripción del mismo modelo dada por teléfono.

Bond Graph es una técnica que se ha desarrollado para el modelado de sistemas dinámicos, fue introducido por el profesor Henry Paynter en 1969. Más tarde fue elaborado el concepto dentro de una metodología para el modelado de sistemas físicos por Karnopp, Margolis y Rosenberg [Borutzki, 2009].

2.2.1 Variables de potencia y energía

El modelado en Bond Graph está basado en la concepción que los sistemas dinámicos en los diversos dominios de energía, (eléctrico, magnético, hidráulico, mecánico, térmico) contienen elementos de energía análogos, para los cuales es necesaria su identificación para una correcta representación.

Al ser una representación gráfica, especialmente durante la etapa conceptual es más sencillo visualizar de manera directa algunas características o propiedades del sistema. Los bonds en un Bond Graph representan un flujo de potencia entre los puertos de potencia de las diferentes uniones de un bond graph. Entonces de manera contraria a los diagramas de bloques, en Bond Graph las dos variables de potencia son asignadas a cada uno de los extremos. Estas variables son llamadas esfuerzo y flujo y son denotados por las letras e y f .

$$Potencia = Esfuerzo * Flujo$$

Como se ha mencionado antes el modelado en Bond Graph es una representación gráfica de las interacciones energéticas que se llevan a cabo entre las variables generalizadas. En la Tabla 2.1 se presentan dichas variables en distintos dominios de energía.

Tabla 2.1: Variables generalizadas en diversos dominios de energía.

Dominio de energía	Esfuerzo e	Flujo f	Momento p	Desplazamiento q
Mécanico Traslacional	Fuerza F	Velocidad V	Momento p	Desplazamiento x
Mécanico Rotacional	Momento angular M	Velocidad Angular ω	Momento angular p_ω	Angulo θ
Eléctrico	Voltaje V	Corriente i	Enlace de flujo	Carga q
Electromagnético	Fuerzo Magnetomotriz V	Rango de flujo magnético	————	Flujo magnético
Hidráulico	Presión Total p	Caudal Q	Momento de flujo P_p	Volumen V
Termodinámico	Temperatura T	Flujo de Entropía	————	Entropía S
Químico	Potencial quimico u	Flujo Molar	————	Masa Molar

2.2.2 Variables de energía.

Las variables de potencia introducen dos cantidades físicas usadas en el modelado de Bond graph. Son llamadas momento generalizado (p) y desplazamiento generalizado (q) y son obtenidas por la integración de las variables de potencia con respecto al tiempo.

$$p(t) = p(t_0) + \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

$$q(t) = q(t_0) + \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

Ha sido una convención desde el principio del modelado en Bond Graph usar las nociones de momento y desplazamiento generalizado. Además, estos términos no tan evidentes en un principio porque sus orígenes provienen de ingeniería mecánica. Esto puede ser considerado poco convencional en algunas otras disciplinas de la ingeniería. Por ejemplo, en ingeniería eléctrica la carga q de un capacitor es la integral de la corriente con respecto al tiempo. Para algunas personas es un tanto inusual en considerar la carga eléctrica como el momento generalizado, mientras que en ingeniería mecánica los desplazamientos en general no son denotados con la letra q .

2.2.3 Elementos básicos de un bond graph

El componente fundamental de un bond graph son los bonds de potencia que son representados con una semiflecha Figura 2.1, que tienen como función acoplar los puertos de energía de cada uno de los elementos de energía. El sentido de la semiflecha indica el sentido en el que fluye

la potencia entre los puertos a los cuales está conectado. Así mismo, existe un tipo diferente de bond conocido como bond activo que comunica una señal en una sola dirección. Un bond activo se representa con una flecha que indica un flujo de señal de potencia nulo, ya que éste no consume la potencia como se muestra en la Figura 2.1.

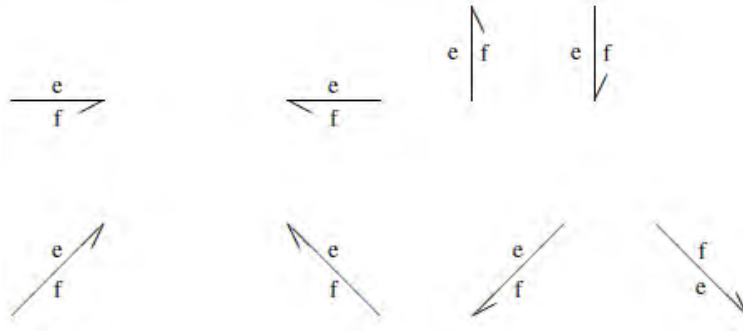


Figura 2.1: Convención de las direcciones de los bonds de potencia

Los lugares en los que un sistema puede ser interconectado, son en aquellos en los que es posible el flujo de energía, estos lugares son determinados como puertos. Los sistemas con un puerto sencillo son denotados como puerto -1, a un sistema de dos puertos se les conoce como puerto -2; y a los sistemas que contienen más de 2 puertos son denominados como puertos- n donde n es el número de puertos.

Las variables que describen la unión de dos multipuertos que son conectados se conocen como variables de potencia, el producto de dichas variables (que se consideran como funciones del tiempo) es la potencia instantánea que fluye entre los multipuertos.

Puertos-1

Los elementos considerados puertos-1 se clasifican en pasivos y activos. A continuación se describen estos elementos.

Elementos Puertos -1 Pasivos

Se debe tomar en cuenta que estos elementos son considerados como ideales, los cuales son la representación de un intercambio de potencia en un elemento básico, dicho intercambio puede darse por la disipación de la potencia (R) o por dos diferentes formas de almacenamiento de energía (C, I).

a) Elemento R. El elemento R es utilizado para modelar el fenómeno físico que relaciona la variable de esfuerzo con la variable de flujo de acuerdo al dominio físico que este siendo considerado. Este elemento tiene la característica de transformar la potencia que le es suministrada a energía calorífica disipada. En el lenguaje de Bond Graph se representa como un bond de potencia con la letra R , mostrado en la Figura 2.2.

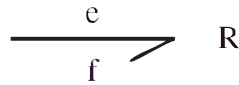


Figura 2.2: Elemento puerto-1 R

b)Elemento C. El elemento C es utilizado para modelar el fenómeno físico que relaciona la variable de esfuerzo con la variable de desplazamiento de acuerdo al dominio físico que este siendo considerado. Este elemento tiene la característica de transformar la potencia que se le suministra en energía almacenada. En el lenguaje de Bond Graph se representa con un bond de potencia con la letra C , mostrado en la Figura 2.3.

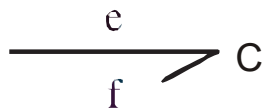


Figura 2.3: Elemento puerto-1 C

c)Elemento I. El elemento I es utilizado para modelar el fenómeno físico que relaciona la variable de flujo con la variable de momento del de acuerdo al dominio físico que se esté considerando. Este elemento tiene la característica de transformar la potencia que se le suministra a energía almacenada. En el lenguaje de Bond Graph se representa con un bond de potencia etiquetado con la letra I , mostrado en la Figura 2.4 .

En la Tabla 2.2 se muestran los elementos de disipación y de almacenamiento para algunos dominios de energía, es importante resaltar que no todas las variables tienen una representación en todos los dominios energéticos.

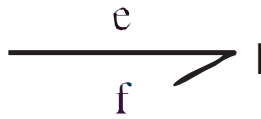


Figura 2.4: Elemento puerto-1 I

Tabla 2.2: Elementos en los diversos dominios energéticos.

Dominio de Energía	Elemento R	Elemento C	Elemento I
Mecánico Traslacional	Amortiguador	Resorte	Cuerpo Rigido
Mecánico Rotacional		Resorte de Torsión	Rueda flotante
Eléctrico	Resistencia	Capacitor	Bobina
Electromagnético		Material Ferromagnético	—
Hidráulica	Válvula	Compresibilidad de fluidos	Inercia de Fluido
Termodinámica		Lazo de material	—

Tetraedro de estado

H. Paynter representó la posible relación funcional entre las variables generalizadas, e , p , f , q por el llamado tetraedro de estado mostrado en la Figura 2.5. En este gráfico los vértices están asociados con las variables de potencia y energía de un sistema dado mientras que los bordes denotan las funciones que las relacionan. En una segunda instancia Karnopp, Margolis y Rosenberg [Karnopp, 2000] se asignan dos nuevos operadores los integradores así como los elementos básicos R , C e I el cual es mostrado en la Figura 2.6.

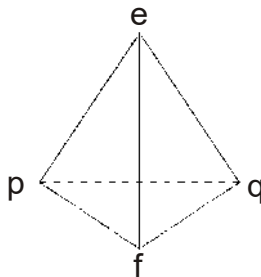


Figura 2.5: Tetraedro de estado (H. M. Paynter.)

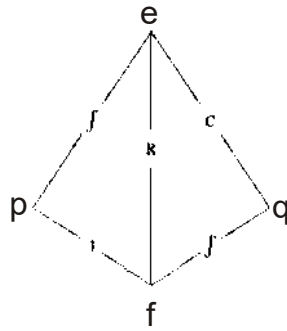


Figura 2.6: Tetraedro de estado incluyendo los elementos C, I y R .

Elementos Puerto -1 Activos o fuentes

Los elementos que introducen energía al sistema se les conoce como fuentes, existen dos tipos de fuente. Fuente de esfuerzo representan voltaje (Sistema eléctrico), presión (sistema Hidráulico), fuerza (sistemas mecánicos) y fuente de flujo la cual representa corriente (sistema eléctrico), caudal (sistema hidráulico), velocidad (sistema mecánico). Las fuentes están denotadas como Se (fuente de esfuerzo) y Sf (fuente de flujo), respectivamente y se puede observar su representación grafica en la Figura 2.7.



Figura 2.7: Fuentes ideales en Bond Graph

Elementos puerto y medio

Al realizar la representación de un sistema en Bond Graph, se utilizan frecuentemente fuentes moduladas, es decir, fuentes que cuentan con un puerto de control por el cual es posible modificar el valor de la fuente. Su representación está dada en las Figura 2.8.

Elementos de Puerto-2

Los elementos de este puerto tienen las características de realizar un switcheo entre las variables generalizadas. Dichos elementos girador (GY) y transformador (TY).



Figura 2.8: Fuentes Moduladas en Bond Graph

a) **Transformador TF** El transformador ideal cumple el principio de la conservación de la potencia ($e_1 f_1 = e_2 f_2$). Un transformador puede utilizarse para modelar cambios de dominio físico sin que exista una pérdida de potencia. Su módulo m podría ser una constante real no negativa, una función de otra función de potencia o una función del tiempo. El transformador se representa en la Figura 2.9.

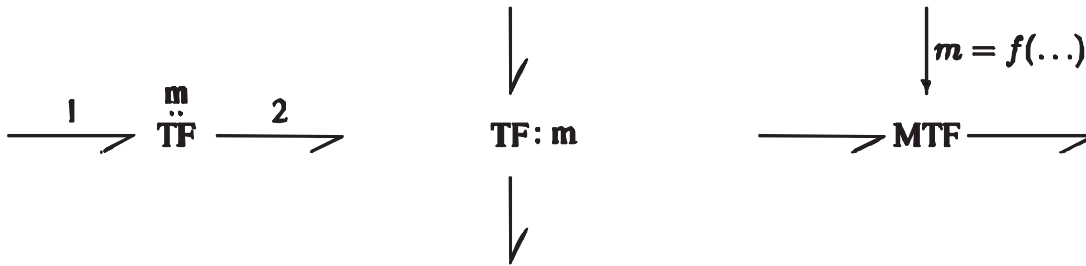


Figura 2.9: Representación del transformador en Bond Graph

Las relaciones constitutivas del transformador están denotadas por,

$$e_1 = m e_2 \tag{2.3}$$

$$e_2 = m e_1 \tag{2.4}$$

donde m es conocido como módulo del transformador.

b) **Girador GY** Un girador de la misma manera que el transformador cumple el principio de la conservación de la potencia y también sirve para modelar cambios de dominio físico sin que exista una pérdida de potencia. Se rige por las siguientes relaciones constitutivas definidas en las ecuaciones (2.5) y (2.6) .

$$e_1 = r * f_2 \tag{2.5}$$

$$e_2 = r * f_1 \tag{2.6}$$

Donde el parámetro r es llamado radio del girador. El radio del girador está definido por la relación entre el esfuerzo del bond que entra y se relaciona con el flujo del bond de salida. Un girador es comúnmente usado para describir transductores que transforman la energía de un tipo a otro y se representa en la Figura 2.10.

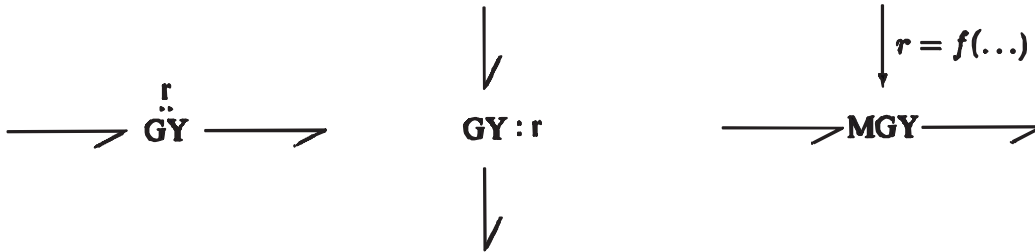


Figura 2.10: Representación de un girador en Bond Graph.

Elementos de Unión Puerto-3

También son conocidas como uniones de potencia conservativas. Representan un nodo ideal que distribuye la energía de manera instantánea sin almacenamiento o conversión de energía. Estos elementos permiten la interconexión de 3 o más puertos de energía que forman un subsistema y representan las conexiones series y paralelo.

Unión -0. Una unión 0 es un elemento de multipuerto definido por las ecuaciones (2.7) y (2.8) :

$$e_1 = e_2 = \dots = e_n \tag{2.7}$$

$$f_1 - f_2 - \dots - f_n = 0 \tag{2.8}$$

De acuerdo a las ecuaciones (2.7) y (2.8) esta unión también es conocida como unión de esfuerzo común o unión de flujo y está representada en la Figura 2.11. Este tipo de uniones representa la conexión en paralelo.

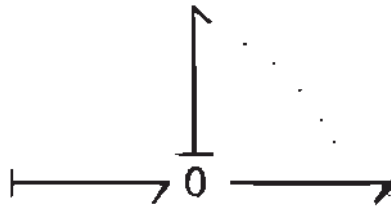


Figura 2.11: Representación de una unión -0

Unión -1. Una unión 1 es un multipuerto que cumple con las ecuaciones (2.9) y (2.10) :

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n \quad (2.9)$$

$$e_1 - e_2 - \dots - e_n = 0 \quad (2.10)$$

Como se ve es análoga a la unión -0 es también conocida como unión de flujo común o unión de esfuerzo, representada en la Figura 2.11. Es te tipo de uniones representa la conexión en serie.

La Figura 2.12 muestra representación de una unión 1 de acuerdo a las ecuaciones (2.9) y (2.10).

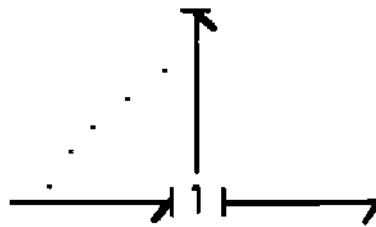


Figura 2.12: Representación de una unión -1

Una vez dada la introducción de las uniones -0 y uniones -1 es posible dar las siguientes definiciones:

Bond Interno

Un bond es llamado un bond interno si conecta una unión -0 ó -1 a otra unión -0 ó -1.

Bond externo

Un bond es llamado un bond externos si conecta a una unión -0 ó -1 con un puerto de energía de un elemento que no contenga una estructura unión simple.

Estructura unión simple

Un bond graph es llamada una estructura unión simple, o estructura unión Kirchhoff es cada nodo a alguna unión -0 o -1.

Bond Activo

Un bond es llamado activo si una de sus variables de potencia es cero para todas las instancias. En la literatura, anteriormente la activación de un bond es expresado por una doble flecha atravesada a la mitad del bond, ambas representaciones se ilustran en la Figura 2.13.

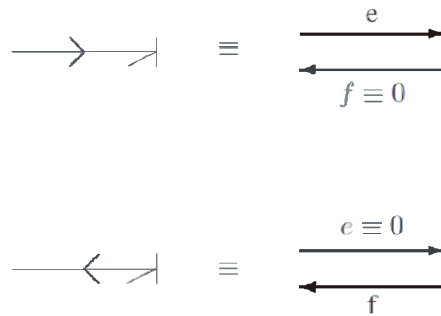


Figura 2.13: Bond Activo

Los bonds activos son utilizados para obtener los valores de las variables de energía, en el caso de la unión -1 sirve para obtener el flujo y en el caso de la unión -0 se obtiene el esfuerzo.

Sensores

Para el diseño de los sistemas de control, los sensores son claramente necesarios para medir aspectos de la respuesta del sistema, por ejemplo, velocidad en los sistemas mecánicos. Los sensores en general tienen la característica de ser capaces de censar una señal sin afectar el sistema. De acuerdo a la Tabla 2.3 un sensor de esfuerzo puede ser representado por una fuente de flujo cero, mientras que un sensor de flujo a su vez es modelado por una fuente de esfuerzo cero.

Tabla 2.3: Representación de los sensores en Bond Graph.

$0: Sf \begin{array}{c} \leftarrow e \\ f = 0 \end{array} 0$	Sensor de esfuerzo, Fuente de flujo	$De \leftarrow 0$	Detector de esfuerzo
$0: Se \begin{array}{c} e = 0 \\ \leftarrow f \end{array} 1$	Sensor de Flujo, Fuente de esfuerzo	$Df \leftarrow 1$	Detector de flujo

2.3 Causalidad

En un Bond Graph, los bonds conectan 2 puertos de energía y cada uno contiene las 2 variables de potencia asignadas a cada bond. Si asumimos que una de las 2 variables de potencia es calculada en uno de los dos elementos conectados por el bond mientras que la otra variable es calculada en el otro elemento, por lo cual nosotros decidimos cual variable es calculada en cual elemento de los multipuertos.

2.3.1 Representación de causalidad en Bond Graph

La causalidad en Bond Graph es representado con una línea perpendicular que se traza en una de las terminales del bond donde el flujo es calculado en el elemento adyacente.

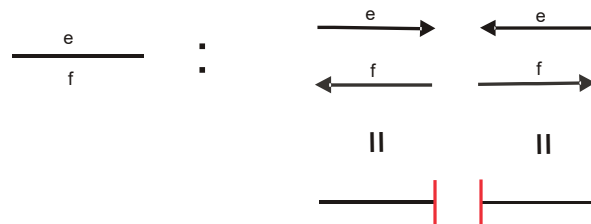


Figura 2.14: Trazo causal

Bond Graph Causal

Se le denomina así al bond graph al cual le ha sido asignada una causalidad para cada bond. Dicha causalidad ha de ser representada por una línea perpendicular en una de las terminales de cada bond. Un bond causal tiene dos orientaciones, una indicando el flujo de potencia (es indicada por el sentido de la semiflecha) y la segunda que es expresada por la causalidad que determina la dirección de la señal de esfuerzo.

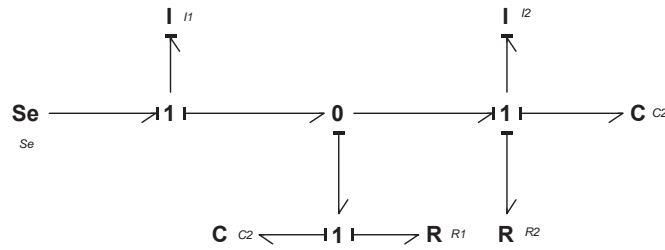


Figura 2.15: Bond graph causal.

Bond Graph Acausal

Un Bond Graph acausal es un bond Graph en el cual está asignado el flujo de potencia, pero al cual no se le ha asignado la causalidad.

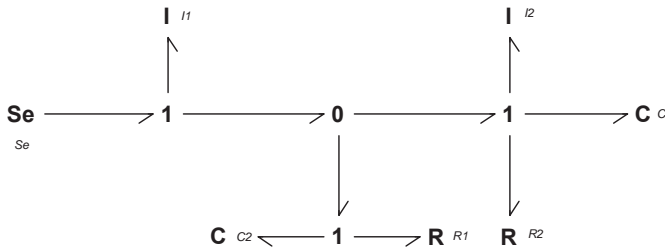


Figura 2.16: Bond graph acausal.

2.3.2 Tipos de causalidad

A continuación en la tabla 2.4 se son presentadas las reglas causales que deben de cumplirse al realizar la asignación causal en un bond graph.

Una vez que se tiene el modelo del bond graph acausal se procede a la asignación de la causalidad, en primera instancia se asigna la causalidad necesaria (ver tabla 2.4 (fuentes)), a continuación aquellos en los que es preferente al causalidad integral (elementos almacenadores) y por último a los elementos a los que se le pueden asignar una causalidad arbitraria (disipadores). Esto sin olvidar considerar la causalidad restrictiva.

Tabla 2.4: Formas causales para los puertos-1.

Causalidad Necesaria	$\text{Se} \longrightarrow$	$\longleftarrow \text{Sf}$
Causalidad Restrictiva		
Causalidad Derivativa		
Causalidad Restrictiva		
Causalidad Arbitraria		

2.3.3 Procedimiento a seguir para el modelado de sistemas

Existe una metodología establecida para la representación grafica de sistemas dinámicos en Bond Graph, es importante el tener en cuenta cada una de las variables que se esté considerando, de acuerdo al dominio de energía sobre el que se está trabajando.

Caso eléctrico

1. Se asigna una etiqueta a cada uno de los nodos del sistema
2. Se coloca una unión -0 a cada nodo

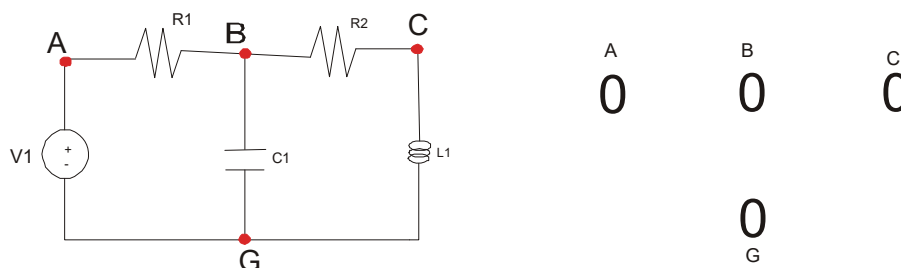


Figura 2.17: Paso 1(izquierda). Paso 2 (derecha)

3. Se asigna una unión -1 a cada componente que se encuentre en serie, esta unión se coloca entre las uniones -0 que representan los nodos.

4. Se colocan los bonds faltantes entre cada una de la uniones. La dirección de la semiflecha representa el flujo de potencia, es decir, inicia en las fuentes y se direcciona a los diferentes tipos de elementos (almacenadores y disipadores).
5. Se remueve la unión -0 que representa el nodo de referencia y se remueven los bonds que están conectados a dicha unión.

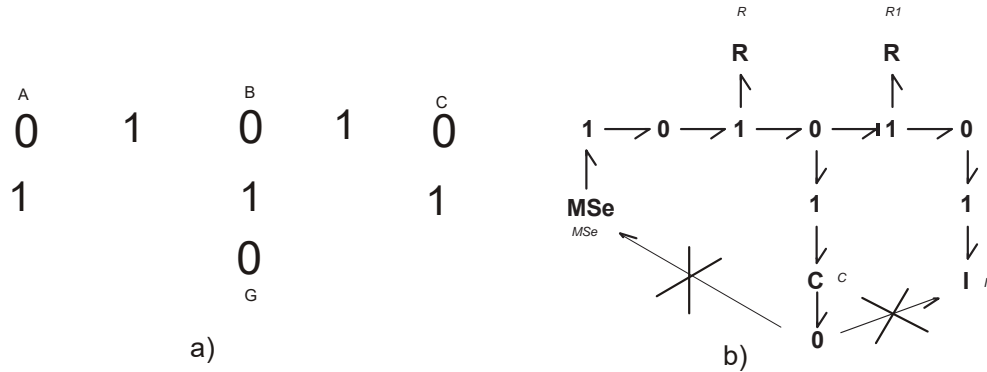


Figura 2.18: Paso 3 a). Pasos 4 y 5 b).

6. Se asigna la causalidad a todos los elementos comenzando por aquellos que tienen causalidad necesaria y continuando con los elementos almacenadores, a estos hay que asignar preferentemente la causalidad integral. Finalmente se asigna la causalidad a los elementos disipadores de energía.

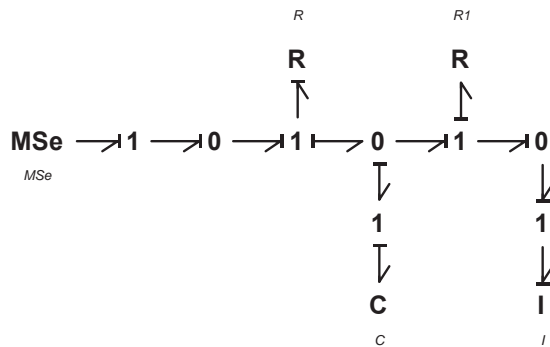


Figura 2.19: Paso 6

7. Se simplifica el bond de acuerdo a [Borutzki, 2009].

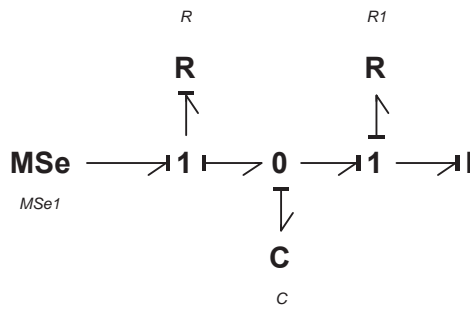
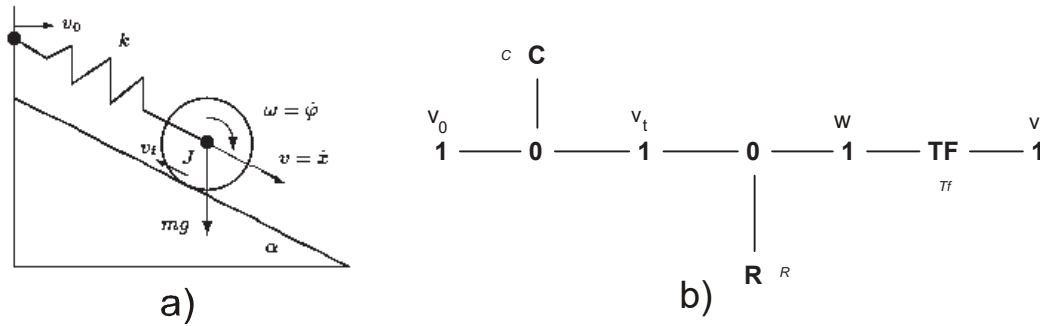


Figura 2.20: Bond graph simplificado.

Caso mecánico

1. Se identifican distintas velocidades inerciales así como velocidades angulares y estas se representan con una unión -1. Se conecta el puerto -1 los elementos *C* que representan los resortes y los elementos resistivos de puerto -1 que representan los amortiguadores a una unión -0 y se inserta entre las uniones -1 correspondientes.



2. Anadir los elementos inerciales de puerto -1 a la respectiva unión -1.

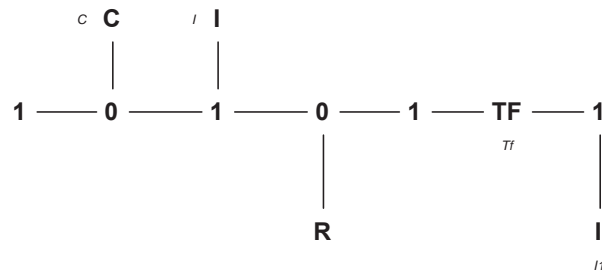


Figura 2.21: Paso 2

3. Anadir las fuentes de puerto -1 y los elementos disipadores de puerto -1 a las uniones -1 correspondientes.

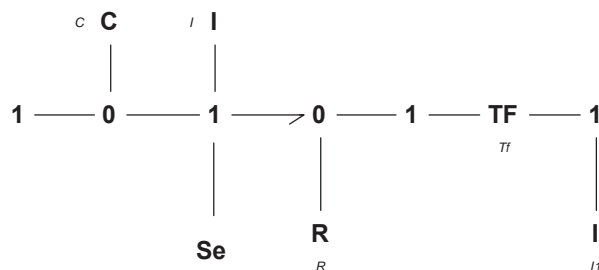


Figura 2.22: Paso 3

4. Conectar el modelo con los bonds correspondientes, cuidando la orientación.

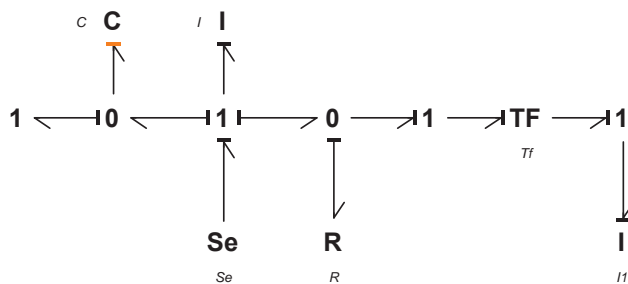


Figura 2.23: Paso 4

5. Simplificar el modelo de acuerdo a las ecuaciones descritas en [Borutzki, 2009].

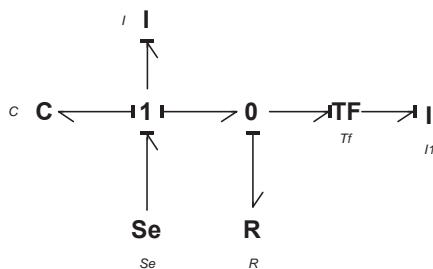


Figura 2.24: Simplificación del sistema

2.4 Estructura de unión en sistemas multipuerto

En las técnicas comunes de control existe la representación en espacio de estado, en Bond Graph existe su análoga que es la estructura unión en la cual se ven representadas las dinámicas del sistema, la principal razón que diferencia a dichas representaciones es que en la primera se utilizan los estados y en la segunda las variables de energía, aunque se conocen las relaciones entre los estados y sus variables de energía correspondientes, por lo que a partir de la estructura unión es posible obtener la representación en espacio de estado tradicional.

El diagrama de la estructura de unión más general es mostrada en la Figura 2.25, donde se aprecia con claridad todos los elementos que forman parte de un sistema dinámico. Para la obtención de esta estructura unión de cualquier sistema, es imprescindible conocer las relaciones constitutivas o de campo así como los vectores clave.

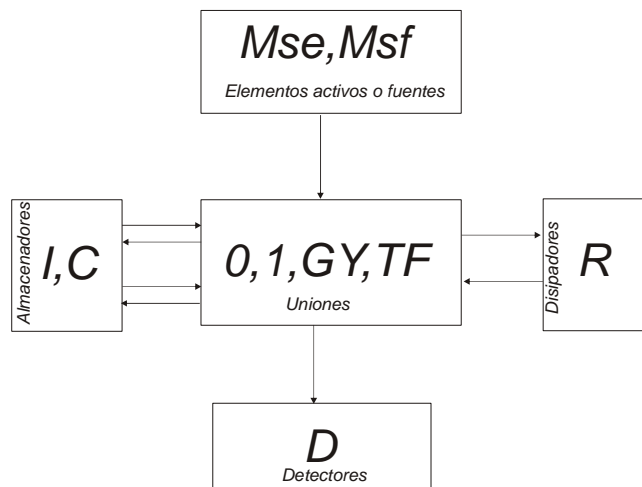


Figura 2.25: Estructura de unión de un Bond graph.

2.4.1 Vectores clave

Los vectores clave son representados como $u(t)$ que contienen las variables de potencia que son impuestos por los elementos fuentes, los estados $x(t)$ y $x_d(t)$ que contienen a las variables de energía (conocidos también como momentos y desplazamientos generalizados) en los elemento almacenadores de energía, en causalidad integral y derivativa respectivamente. $z(t)$ y $z_d(t)$ que contienen a las variables de co-energía en causalidad integral y derivativa respectivamente. Finalmente

$D_{in}(t)$ y $D_{out}(t)$ que contienen a los elementos disipadores de energía.

Relaciones de campo y ecuaciones de estado

Las relaciones de campo o constitutivas en general entre los elementos de almacenamiento y elementos de disipación están definidas por: $u, y, \dot{x}_d, \dot{x}, z, z_d$,

$$z(t) = \phi F(x) \quad (2.11)$$

$$z_d(t) = \phi F_d(x_d) \quad (2.12)$$

$$D_{out}(t) = \phi L D_{in} \quad (2.13)$$

Donde;

ϕF es una función que relaciona cada z_i con x_i para $i=1, \dots, n$.

ϕF_d es una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i=1, \dots, m$.

ϕL denota una función que relaciona cada D_{out} con D_{in} para $i=1, \dots, r$.

Donde n es el número de elementos almacenadores de energía en causalidad integral, m es el número de elementos en causalidad derivativa y r es el número de elementos disipadores. Si consideráramos sólo la parte lineal de las relaciones constitutivas antes descritas obtendríamos:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.14)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.15)$$

$$D_{out}(t) = L D_{in}(t) \quad (2.16)$$

donde ; L, F, F_d son matrices reales de dimensión $r \times r, n \times n$ y $m \times m$, respectivamente.

Las relaciones de la estructura de unión están descritas por:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (2.18)$$

donde;

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Los elementos que se encuentran dentro de la matriz de estructura unión S toman los valores que se encuentran dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r representan el módulo o relación que existe en un girador y un transformador respectivamente. La matriz está particionada en relación a las dimensiones de sus correspondientes vectores clave. Las submatrices S_{ij} cuando *no utilizan bonds activos* poseen las siguientes propiedades:

Propiedad 1.- S_{11} y S_{12} son matrices cuadradas antisimétricas.

Propiedad 2.- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades 1 y 2 están basadas en el principio de conservación de energía. A partir de las relaciones existentes en la estructura de unión, se puede obtener una representación en espacio de estados convencional de la forma.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_p x(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= C_p x(t) + D_p u(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Donde $x(t)$ es el vector de estado, $u(t)$ es la entrada al sistema y $y(t)$ es la salida del sistema.

Considerando las submatrices S_{ij} y que relacionan las ecuaciones comprendidas entre la (2.14) y la (2.16) con (2.19) se obtienen las matrices.

$$A_p = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.21)$$

$$B_p = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.22)$$

$$C_p = E^{-1}(S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.23)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.24)$$

Donde las matrices E y M estan definidas por:

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.25)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (2.26)$$

2.4.2 Procedimiento para la obtención de la estructura unión en un bond graph:

A continuación se describe un procedimiento para determinar la estructura unión de un bond graph:

1. Se numeran los bonds
2. Se crean los vectores clave, considerando que: a un elemento almacenador tipo C le corresponden: $x_n = q_n$, $x = f_n$, $z_n = e_n$

Para un elemento almacenador tipo I le corresponde $x_n = p_n$, $x = e$, $z = f$

donde p es el momento generalizado, q es el desplazamiento generalizado, f y e son los flujos y esfuerzos (en un sistema eléctrico son la corriente y el voltaje respectivamente).

3. Para establecer las relaciones constitutivas es necesario saber que:

$z = Fx; F = \text{Diag}(\frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_2}, \dots, \frac{1}{M_n})$ donde M_n son los elementos almacenadores de energía en causalidad integral. $D_{out} = LD_{in}; L = \text{Diag}(N_1, \dots, N_n, \dots, \frac{1}{N_1}, \dots, \frac{1}{N_n})$ donde N y N^{-1} son los elementos resistivos y conductancias respectivamente

4. La matriz S se construye aplicando las reglas de interconexión que describen una unión de flujo común (Unión-1), así como de una unión de esfuerzo común (Unión-0). Para así tener representadas todas las relaciones constitutivas dentro de la estructura unión del modelo en cuestión.

Ejemplo de la obtención de una estructura de unión de un modelo en Bond Graph

A partir del modelo en el diagrama del motor de CD en la Figura 2.26 se obtiene el bond graph de la figura 2.27. Se obtendrá a continuación la matriz de estructura unión para encontrar el modelo en espacio de estados, siguiendo el procedimiento que se mostro en la Sección 2.4.

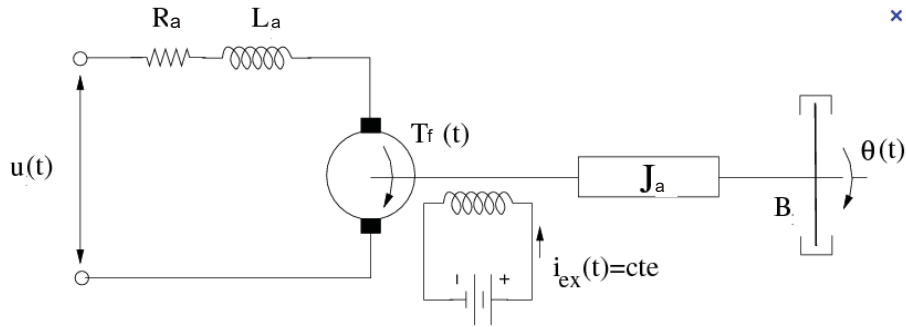


Figura 2.26: Modelo del motor de CD

1. Se enumeran los bonds.

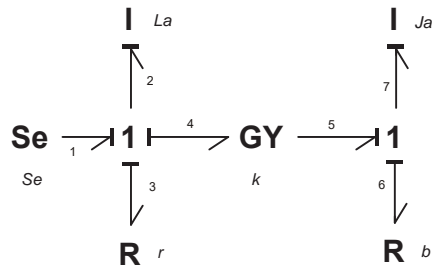


Figura 2.27: Bond graph del motor de CD.

2. Se crean los vectores claves utilizando la numeración de la Figura 2.27.

$$x = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_7 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_7 \end{bmatrix}$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

$$u = e_1, y = f_7$$

3. Las relaciones constitutivas de los elementos de disipación, así como también los elementos de almacenamiento de energía formamos las matrices descritas en las ecuaciones (2.15) y (2.16).

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$F_d = 0$, (por no haber elementos en causalidad derivativa).

4. La estructura de unión de Bond Graph queda;

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_7 \\ f_3 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_7 \\ e_3 \\ e_6 \\ e_1 \\ \dot{x}_d \end{bmatrix}$$

5. Donde definimos las submatrices;

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix}, S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, S_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, S_{24} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, S_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{33} = 0, S_{34} = 0$$

6. Sustituyendo en las ecuaciones comprendidas entre las ecuaciones 2.21 y 2.24 obtenemos la representación en espacios de estados definida en la ecuación 2.27

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_a} & -\frac{k}{J} \\ \frac{k}{L_a} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_p = [0 \quad \frac{1}{J_a}], D = 0 \quad (2.27)$$

Trayectoria causal.

Un bond graph no es solamente la representación de la estructura topológica de un sistema sino también de su organización causal, ya que indica las relaciones causa-efecto, esta estructura causal da la noción de trayectorias causales que a continuación se explica.

- Una trayectoria causal de una estructura de unión es una secuencia alternante de bonds y uniones tal que:
 1. Para una gráfica acausal, es decir, un bond al cual no le ha sido asignada su causalidad tanto a elementos como bonds, la secuencia forma una cadena sencilla.
 2. Todos los nodos en secuencia tienen una completa y correcta causalidad, es decir, se cumplen las condiciones de causalidad.
 3. Dos uniones de una trayectoria causal tienen en la misma unión trazos causales opuestos.
- Una trayectoria causal es simple, si a través de la misma sigue solamente una misma variable (flujo o esfuerzo), tal como se muestra en la Figura 2.28.

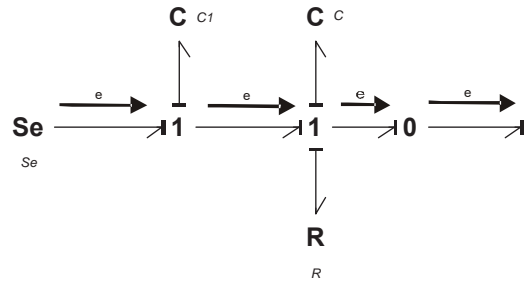


Figura 2.28: Trayectoria causal directa

- Una trayectoria causal es mezclada si un cambio de variable (flujo o esfuerzo) es requerido a través de la secuencia causal. Si el cambio se debe a un girador la trayectoria se conoce como mezclada directa y cuando la trayectoria pasa a través de un elemento I , C o R la trayectoria

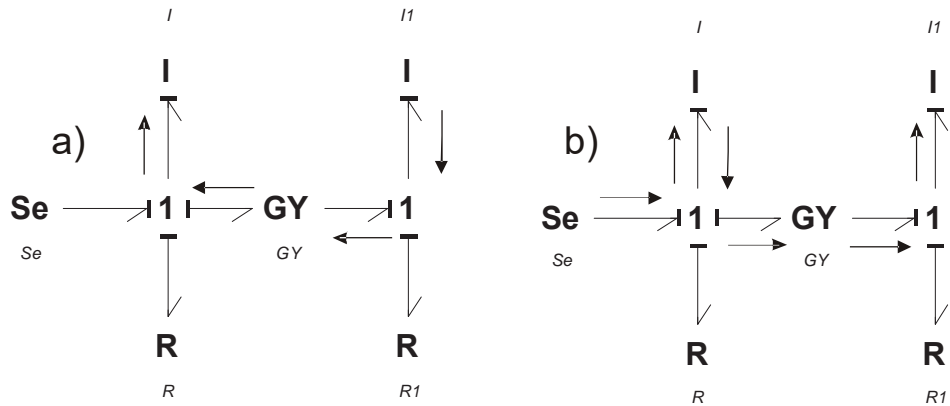


Figura 2.29: a) Mezclada directa, b) Mezclada indirecta

es llamada mezclada indirecta. Las siguientes Figuras 2.29a) y 2.29b) muestran este tipo de trayectorias.

- Dos elementos P_1 y P_2 perteneciendo al conjunto de $\{R, C, I, S_e, S_f, D_e, D_f\}$ son causalmente conectados si la variable de entrada de una es influenciada por la variable de salida de la otra.
- Una trayectoria directa es una trayectoria causal entre la entrada y un detector.
- Un lazo causal es una trayectoria sencilla cerrada.
- Un lazo de Mason es un lazo causal de la salida de un puerto a una entrada del mismo puerto sin pasar dos ocasiones en la misma dirección un mismo bond.

Obtención de la función de transferencia en Bond Graph

Obtener la función de transferencia del circuito eléctrico mostrado en la Figura 2.30 a) cuyo modelo en Bond Graph es mostrado en la Figura 2.30 b) considerando como entrada e_1 y como salida f_6

Obteniendo la representación de espacios de estado con el procedimiento mostrado en la sección 2.4.2 obtenemos:

$$A_p = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & \frac{-1}{C_1} \\ \frac{1}{L_1} & \frac{-1}{R_2 C_1} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

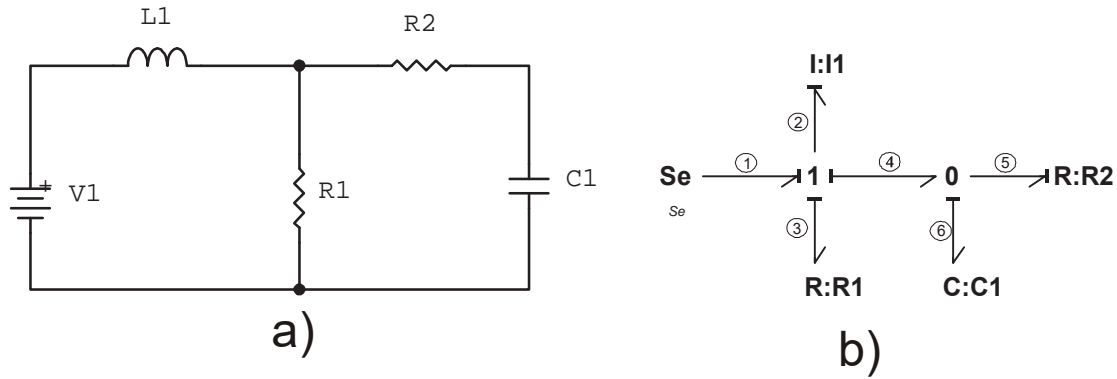


Figura 2.30: a)Modelo eléctrico. b)Bond graph correspondiente.

Se calcula el polinomio característico con $P(s)=C(sI-A)^{-1}B$

$$P(s) = \frac{1}{LC_1s^2 + s(R_1C_1 + \frac{L_1}{R_2}) + 1} \quad (2.29)$$

Obteniendo la función de transferencia en Bond Graph

Usando el procedimiento mostrado en [Borutzki, 2009] primeramente definimos la trayectoria causal entre la entrada y la salida se muestra en la Figura 2.31.

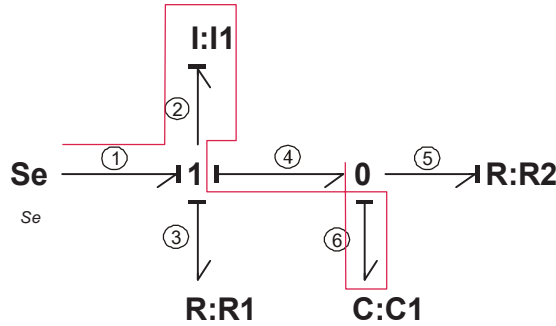


Figura 2.31: Trayectoria entre la entrada e_1 y la salida e_6

Trayectoria causal $e_1 - e_2 - f_2 - f_4 - f_6 - e'_6 - e_5$

Después definimos los diversos lazos mostrados en la Figura 2.32,

Lazo 1. $e_2 - f_2 - f_3 - e_3 - e_2$

$$\Delta = \frac{-R_1}{L_1s} \quad (2.30)$$

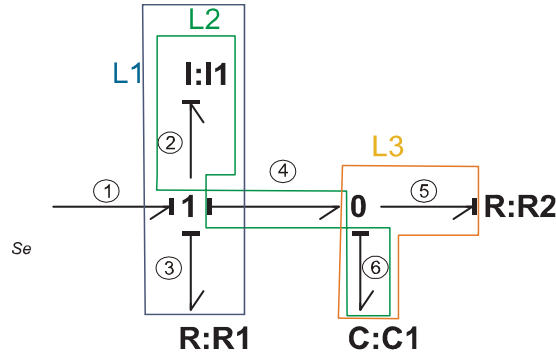


Figura 2.32: Lazos causales que contiene el Bond graph

Lazo 2. $e_2 - f_2 - f_4 - f_6 - e_6 - e_4 - e_2$

$$L_1 = \frac{1}{L_1 C_1 s^2} \quad (2.31)$$

Lazo 3 $e_5 - f_5 - f_6 - e_6$

$$L_3 = \frac{-1}{R_2 C_1 s} \quad (2.32)$$

Después observamos que existe un par de lazos disjuntos siendo lazo 1 y lazo 3.

$$L_{13} = \frac{R_1}{R_2 L_1 C_1 s^2} \quad (2.33)$$

Realizando las operaciones,

$$D(s) = 1 - \left(\frac{-R_1}{L_1 s} - \frac{1}{L C_1 s^2} - \frac{1}{R_2 C_1 s} \right) + \frac{R_1}{R_2 L C_1 s^2} \quad (2.34)$$

$$G(s) = \frac{\Delta}{D(s)} \quad (2.35)$$

La función de transferencia queda descrita por la ecuación (2.32) .

$$G(s) = \left[\frac{1}{L C_1 s^2 + s \left(R_1 C_1 + \frac{L_1}{R_2} \right) + 1} \right] \quad (2.36)$$

2.5 Conclusiones

En el capítulo 2 es posible ver algunas de las bondades del modelado de sistemas físicos con la técnica de Bond Graph, la posibilidad de obtener la representación de cierto modelo en espacios de estado, la obtención de la función de transferencia. La simplicidad para manejar en un mismo modelo elementos de diferentes dominios físicos. En base a lo mencionado se puede decir que Bond Graph es una herramienta sólida para el modelado de sistemas.

Capítulo 3

Sistemas Inversos desde una perspectiva clásica

3.1 Introducción

La pregunta de inversión de sistemas ha sido de interés para los ingenieros de control, que tratan de resolver el problema de seguimiento de trayectoria exacto, es decir, el problema de encontrar la entrada requerida en el sistema para obtener cierta salida deseada.

En robótica existe un método conocido como "par calculado" el cual explícitamente utiliza el concepto de inversión de sistemas. Algunos problemas tales como el desacoplamiento de sistemas de control multivariables resultan implícitamente de la aplicación de inversión de sistemas. De hecho, la teoría de inversión, consiste en la determinación de la invertibilidad de un sistema y de ser posible construir el modelo inverso.

Así, la pregunta de existencia, propiedades y construcción de los inversos de los sistemas LTI es resuelto en esta tesis. Un sistema inverso por la izquierda es aquel que conectado en cascada a la salida del sistema original, a su salida obtenemos la entrada que ha sido introducida al sistema original. Una generalización de esta clase de sistemas es obtenida en [Sain, 1969], con los llamados "Inversos L-integrales" en los cuales la salida del segundo sistema es la L th integral de la entrada del sistema original. Claramente, entonces la entrada del sistema original puede ser recuperada subsecuentemente por L diferenciaciones; y la determinación del L más pequeño, denotado como L_0 ,

se convierte en una cuestión de gran interés así como las propiedades del sistema original y su inverso.

Las aplicaciones que se les han dado a los sistemas inversos incluyen filtrado y predicción, desacoplamiento de sistemas multivariados así como la teoría de sensibilidad.

3.2 Tipos de Inversos

Existen 2 tipos de sistemas inversos.

3.2.1 Inversión de sistemas por la izquierda

Dado el sistema Ψ , se dice que Ψ^{-1} es un sistema inverso por la izquierda de Ψ si al conectar la salida de Ψ a la entrada de Ψ^{-1} este produce como respuesta la entrada de Ψ .

Esto descrito en términos de mapeos entrada-salida significa que existe un mapeo Ψ^{-1} tal que para toda señal de entrada u al sistema Ψ se cumple que

$$\Psi^{-1}(y) = \Psi^{-1}(\Psi(t_0, x_0, u)) = u$$

Para alguna condición inicial t_0, x_0 y para todo $t \geq t_0$. Lo anterior sería claramente imposible si existen dos señales $u_1 \neq u_2$ para algún $t \geq t_0$ [Martínez, 2012].

3.2.2 Inversión de sistemas por la derecha

En forma similar el sistema Ψ^{-1} se dice inverso por la derecha del sistema Ψ , si al conectar la entrada de Ψ a la salida de Ψ^{-1} , la respuesta de Ψ es la entrada de Ψ^{-1} .

En términos de mapeos entrada-salida, dado el mapeo Ψ existe un mapeo Ψ^{-1} tal que para toda señal y_{ref} de entrada a Ψ^{-1} se cumple que

$$\Psi(u) = \Psi(\Psi^{-1}(t_0, x_0, y_{ref})) = y_{ref}$$

Para alguna condición inicial t_0, x_0 y para todo $t \geq t_0$. Nuevamente resulta evidente que lo anterior no sería posible si el mapeo Ψ no puede producir una señal y_{ref} , es decir; para que exista Ψ^{-1} , Ψ debe ser un mapeo supreyectivo, es decir, que para cada señal de entrada u al sistema Ψ le corresponda al menos un valor en el mapeo de salida [Martínez, 2012]

3.2.3 Inversión matemática

Es posible una vez obtenida la representación en espacios de estados de un sistema de una entrada y una salida descrita por la ecuación (3.1) obtener de manera directa el sistema inverso, considerando que;

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t)$$

donde A_p es de dimensiones $n \times n$, B_p es de dimensiones $n \times 1$, C_p de $1 \times n$ y D_p de 1×1 , recordando que nuestro interés es la obtención de la entrada $u(t)$ deseada con respecto a nuestra salida es necesario despejar la entrada $u(t)$ de la ecuación considerando que $D \neq 0$.

$$u(t) = -D_p^{-1} C_p x(t) + D_p^{-1} y(t) \quad (3.2)$$

Ahora sustituyendo la ecuación que describe la salida en (3.1),

$$\dot{x}_i(t) = A_p x_i(t) + B_p (-D_p^{-1} C_p x_i(t) + D_p^{-1} y(t)) \quad (3.3)$$

Simplificando la ecuación anterior,

$$\dot{x}_i(t) = (A_p - B_p D_p^{-1} C_p) x_i(t) + B_p D_p^{-1} y(t) \quad (3.4)$$

Por lo que nuestro sistema inverso puede ser deducido de,

$$\dot{x}_i(t) = (A_p - B_p D_p^{-1} C_p) x_i(t) + B_p D_p^{-1} y(t) \quad (3.5)$$

$$u(t) = -D_p^{-1} C_p x(t) + D_p^{-1} y(t) \quad (3.6)$$

En base a las ecuaciones (3.5) y (3.6) es posible definir las matrices A_i , B_i , C_i , D_i que conforman el sistema inverso definido por el conjunto de ecuaciones (3.7).

$$\begin{aligned} A_i &= (A_p - B_p D_p^{-1} C_p) x(t) \\ B_i &= B_p D_p^{-1} y(t) \\ C_i &= -D_p^{-1} C_p x(t) \\ D_i &= D_p^{-1} y(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para el caso en el que no existe una transferencia directa entre la entrada y la salida, es decir, que la matriz $D_p = 0$ es posible obtener el sistema inverso en base a derivaciones sucesivas

respecto al tiempo de la salida y hasta que la entrada u aparezca. El grado relativo del sistema está definido como el integrador más pequeño α tal que $C_p A_p^k B_p = 0$, para $k < \alpha - 1$ y $C A_p^{\alpha-1} B \neq 0$. Las derivadas sucesivas respecto al tiempo de y entonces son descritas por:

$$k < \alpha \quad y^{(k)} = C_p A_p^k x \quad (3.8)$$

$$y^{(\alpha)} = C_p A_p^\alpha x + C_p A_p^{\alpha-1} B_p u$$

Despejando de la ecuación (3.8) la entrada u

$$u = -(C_p A_p^{\alpha-1} B_p)^{-1} C_p A_p^\alpha x(t) + (C_p A_p^{\alpha-1} B_p)^{-1} y^\alpha \quad (3.9)$$

De no existir la inversa pues significa que el sistema simplemente es no invertible. Sustituyendo en la ecuación (3.9) obtenemos

$$\dot{x} = (A_p - (C_p A_p^{\alpha-1} B_p)^{-1} C_p A_p^\alpha) x(t) + B_p (C_p A_p^{\alpha-1} B_p)^{-1} y^\alpha \quad (3.10)$$

Así, el sistema inverso queda definido por la ecuación (3.11) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= (A_p - (C_p A_p^{\alpha-1} B_p)^{-1} C_p A_p^\alpha) x_i(t) + B_p (C_p A_p^{\alpha-1} B_p)^{-1} y^\alpha \\ u_i &= -(C_p A_p^{\alpha-1} B_p)^{-1} C_p A_p^\alpha x_i(t) + (C_p A_p^{\alpha-1} B_p)^{-1} y^\alpha \end{aligned} \quad (3.11)$$

El orden del sistema inverso será el mismo que el orden del sistema original y su entrada la α th derivada de la salida. En base a lo anterior mostrado en la ecuación (3.11) es posible definir las matrices individuales que describen el sistema inverso ecuación (3.12).

$$\begin{aligned} A_i &= (A_p - (C_p A_p B_p)^{-1} C_p A_p) x_i(t) \\ B_i &= B_p (C_p A_p B_p)^{-1} y^\alpha \\ C_i &= -(C_p A_p B_p)^{-1} C_p A_p x_i(t) \\ D_i &= (C_p A_p B_p)^{-1} y^\alpha \end{aligned} \quad (3.12)$$

Es importante notar que aunque no existe la matriz D_p en el sistema original, la existencia de la matriz D_i siempre estará presente en el sistema inverso. También, es importante resaltar que cuando no existe la matriz D_p los cálculos del sistema inverso aumentan de complejidad.

3.2.4 Inversión de sistemas que contienen relaciones directas entre entradas y salidas

Ejemplo 3.1

En el siguiente ejemplo se obtiene el sistema inverso de un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas, estos ejemplos solamente son numéricos ya que la parte de sistemas inversos a partir del modelado se detalla en el Capítulo 4.

Sea el siguiente sistema lineal,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Multiplicando ambos lados por D^{-1} ,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Despejando u de la ecuación (3.15),

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.16) en (3.13),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Por lo que el sistema inverso es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Realizando la comprobación en simulación, la Figura 3.1 muestra el diagrama implementado en simulink del sistema original conectado en cascada con el sistema inverso de orden completo. La Figura 3.2 muestra la respuesta del sistema inverso ante una entrada escalón y una

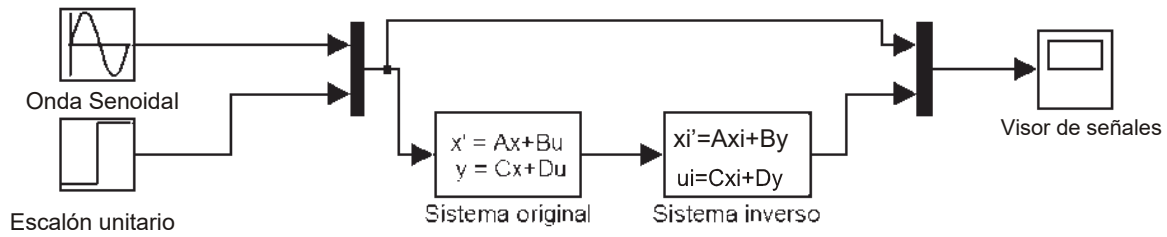


Figura 3.1: Diagrama de bloques en Simulink que representa los sistemas conectados en cascada

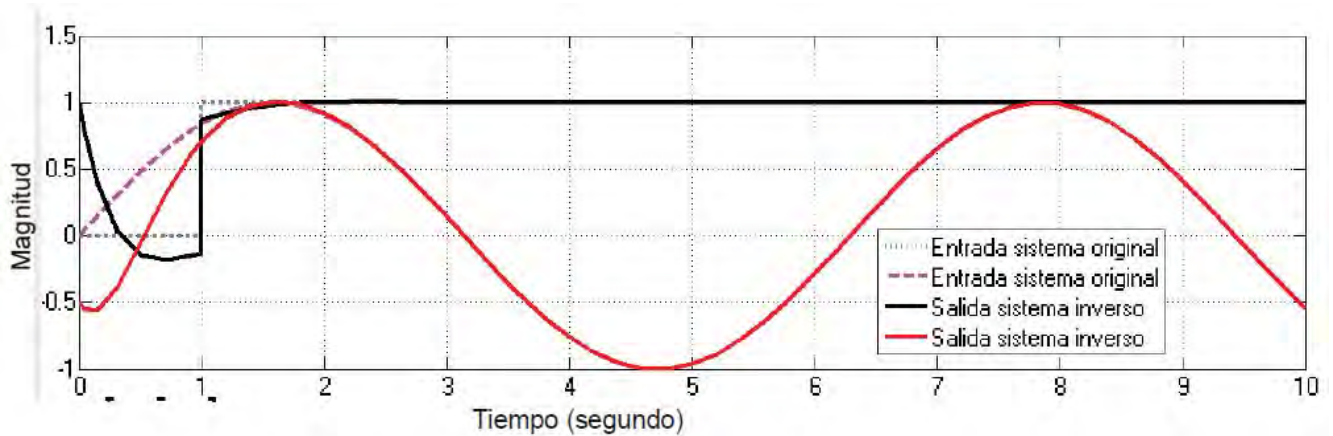


Figura 3.2: Simulación de las entradas del sistema original comparadas con las salidas del sistema inverso

entrada senoidal, cabe recalcar que se consideran condiciones iniciales en el sistema inverso por lo que el comportamiento inicial puede llegar a parecer una mala reconstrucción, sin embargo a partir de $t=1$ se ve claramente que el sistema es capaz de reconstruir las señales.

3.2.5 Ejemplo 3.2

A continuación se realizará el cálculo de un sistema inverso con un sistema que no tiene una transferencia directa entre la salida y la entrada, lo cual refiere a que no existe la matriz D . Ahora se muestra la obtención de un sistema inverso con $D = 0$ descrito por el conjunto de ecuaciones 3.19.

Sea el siguiente sistema lineal multivariable,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

se requiere obtener el sistema inverso para lo cual se inicia derivando la salida,

$$y = Cx \quad (3.20)$$

$$\dot{y} = C\dot{x} = C(Ax + Bu)$$

$$\dot{y} = CAx + CBu$$

sustituyendo y realizando las matrices del sistema descrito por el conjunto de ecuaciones (3.19) en la ecuación (3.20) se tiene

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} u \quad (3.21)$$

Multiplicando ambos lados por la matriz B^T de la ecuación (3.21) .

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \dot{y} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \dot{y} = \begin{bmatrix} -24 & -10 & 18 \end{bmatrix} x + 30u \quad (3.22)$$

Despejando u de la ecuación (3.22) obtenemos:

$$u = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \dot{y} + \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -24 & -10 & 18 \end{bmatrix} x \quad (3.23)$$

en la ecuación (3.22), $\frac{1}{30} \begin{bmatrix} -24 & -10 & 18 \end{bmatrix} x$ es $(B^T, B)^{-1} B^T$, donde $B=CB$ es la pseudoinversa de B , ahora sustituyendo la ecuación (3.23) en la ecuación (3.18) se obtiene,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{30} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \dot{y} + \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -24 & -10 & 18 \end{bmatrix} x \right)$$

realizando las multiplicaciones correspondientes se tiene,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -2 & 10 & -4 \\ -3 & 15 & -6 \end{bmatrix} x + \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -2 & 10 & -4 \\ -3 & 15 & -6 \end{bmatrix} \dot{y} + \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -24 & -10 & 18 \\ -48 & -20 & 36 \\ -72 & -30 & 54 \end{bmatrix} x \quad (3.24)$$

simplificando la ecuación (3.24) se obtiene la ecuación (3.25).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.8 & 1.667 & 3.6 \\ -1.6 & -1.667 & 3.2 \\ -2.4 & -1 & 2.8 \end{bmatrix} x + \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -2 & 10 & -4 \\ -3 & 15 & -6 \end{bmatrix} \dot{y} \quad (3.25)$$

El sistema inverso queda definido en la ecuación (3.26),

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} -0.8 & 1.667 & 3.6 \\ -1.6 & -1.667 & 3.2 \\ -2.4 & -1 & 2.8 \end{bmatrix} x_i + \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -2 & 10 & -4 \\ -3 & 15 & -6 \end{bmatrix} \dot{y} \quad (3.26)$$

$$u_i = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \dot{y} + \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -24 & -10 & 18 \end{bmatrix} x_i$$

A continuación en la Figura 3.3. se muestra el diagrama de simulink utilizado para comprobar el sistema inverso escrito por la ecuación (3.26) .En la Figura 3.4 se muestra la respuesta del sistema inverso a una entrada senoidal, se puede apreciar que la señal reconstruida tiene cierto desfase con respecto a lo esperado esto se debe principalmente al error inherente en los derivadores ya que estos no son exactos.

Si bien es cierto que la matriz B_p no tiene inversa, existe un procedimiento que nos permite calcular la matriz pseudo inversa aún cuando la matriz original no sea cuadrada. El tipo de matriz pseudoinversa más utilizada es la matriz inversa de Moore-Penrose la cual es una generalización de un tipo de pseudo inversas conocidas como matrices 1-inversa.

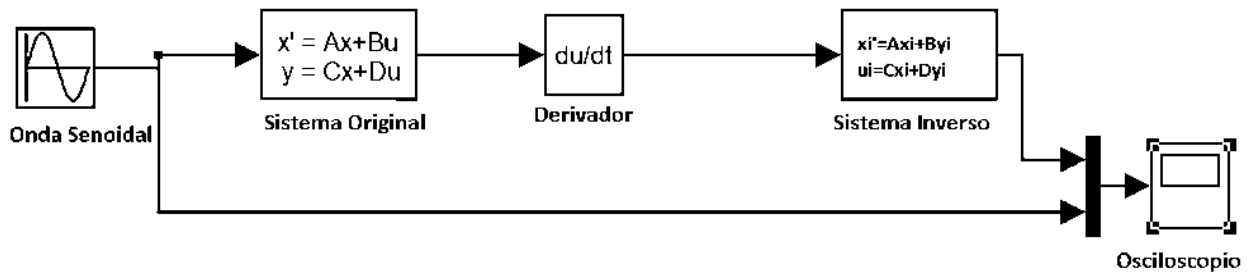


Figura 3.3: Modelo inverso en Simulink

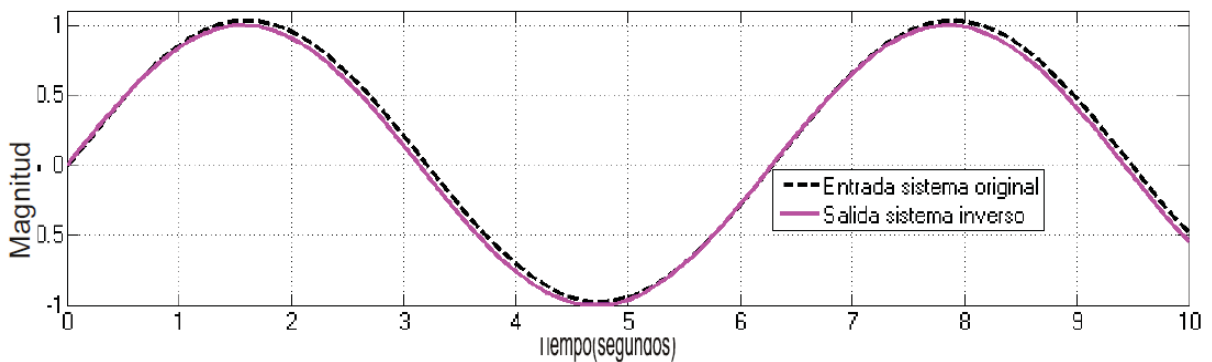


Figura 3.4: Respuesta del sistema inverso

3.2.6 Sistemas Inversos con la metodología de Silverman

Consideremos un sistema lineal dinámico representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_p(t)x(t) + B_p(t)u(t) \\ y(t) &= C_p(t)x(t) + D_p(t)u(t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Donde $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^p$, $y(t) \in R^p$, y las matrices A_p , B_p , C_p y D_p son de ordenes compatibles y diferenciables un número finito de ($\leq n$) veces. Entonces u es al entrada que está definida por el espacio $[t_0, \infty)$ y y es el espacio correspondiente a la salida. Se asume que al menos los elementos de u son continuos. Para cada estado inicial $x_0 = x(t_0)$, H_{x_0} define el mapeo $H_{x_0} : u \rightarrow y$. Entonces se puede enfocar en la problemática de la determinación de cuando el mapeo H_{x_0} es invertible así como el problema de encontrar la representación del sistema inverso cuando existe.

Una de las características más interesantes de esta metodología es que tanto el algoritmo, así como las técnicas de pruebas para el caso de sistemas invariantes en el tiempo también tienen la ventaja de generalizar directamente a el caso de sistemas variantes en el tiempo. En [Silverman, 1968] se muestra que si un sistema variante en el tiempo satisface ciertas condiciones, su inverso puede obtenerse, puede ser dado sin la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales. Para esta clase de sistemas en particular. El método de construir un sistema inverso es formalmente el mismo como el de los sistemas invariantes.

Metodología de inversión de Silverman

Consideremos el caso lineal invariante en el tiempo, donde A_p , B_p , C_p y D_p son matrices constantes. Tomando la condición bajo la cual H_{x_0} es uno a uno por cada x_0 , nos enfrentamos directamente la problemática de obtener una representación para el mapeo inverso cuando este existe.

Primero, se define una secuencia φ_i de diferentes sistemas formados mediante transformaciones algebraicas y diferenciales que permiten obtener una relación con la cual puede ser resuelto únicamente para u en términos de y (con sus derivadas) así como x .

Tenemos $q_0 = \text{rank}D$. Si $q_0 < p$, entonces existe una matriz no singular S_0 de dimensiones $p \times p$ tal que:

$$D_0 \triangleq S_0 D = \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

donde D_0 tiene rango q_0 . φ_0 es definido como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y_0(t) &= C_0 x(t) + D_0 u(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde $y_0(t) = S_0 y(t)$ y $C_0 = S_0 C$. Entonces se pueden representar C_0 y y_0 en la forma particionada $C_0 = \begin{bmatrix} \bar{C}_0 \\ \tilde{C}_0 \end{bmatrix}$ y $y_0 = \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{bmatrix}$ donde la barra y la tilde indica el primer q_0 y los últimos $p - q_0$ renglones, respectivamente de las 2 matrices.

El remanente de la secuencia S_i es definido de manera inductiva. Entonces φ_k denota el

k – ésimo sistema en la secuencia.

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.30)$$

$$y_k(t) = C_k x(t) + D_k u(t)$$

$D_k = \begin{bmatrix} D_k \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \tilde{C}_k \end{bmatrix}$, donde D_k tiene q_k renglones y el rango q_k , C_k tenía q_k renglones y C_k tenía $p - q_k$ renglones. Si $q_k < p$, entonces M_k denota el operador diferencial.

$$M_k = \begin{bmatrix} I_{q_k} & 0 \\ 0 & I_{p-q_k}(d/dt) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

entonces,

$$M_k y_k(t) = \begin{bmatrix} \bar{y}_k \\ (d/dt)\tilde{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \tilde{C}_k A \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ \tilde{C}_k B \end{bmatrix} u(t) \quad (3.32)$$

donde $q_{k+1} = \text{Rank}[D_k, (C_k B)]^T$. Si $q_{k+1} < p$, entonces existe una matriz no singular S_{k+1} de dimensiones $p \times p$ tal que.

$$D_{k+1} \triangleq S_{k+1} \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ \tilde{C}_k B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

donde D_{k+1} tiene q_{k+1} renglones y un rango q_{k+1} . φ_{k+1} es entonces definida como,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.34)$$

$$y_{k+1}(t) = C_{k+1} x(t) + D_{k+1} u(t)$$

Donde $y_{k+1}(t) = S_{k+1} M_k y_k(t)$ y

$$C_{k+1} \triangleq S_{k+1} \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \tilde{C}_k A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{k-1} \\ \tilde{C}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

donde C_{k+1} tenía q_{k+1} renglones y C_{k+1} tenía $p - q_{k+1}$ renglones.

Suponemos ahora que existe un α tal que D_α tiene rango p . Entonces es posible solucionar para u en la forma.

$$u(t) = -D_\alpha^{-1} C_\alpha x_i(t) + D_\alpha^{-1} y_\alpha(t). \quad (3.36)$$

sustituyendo esta relación en la ecuación original resulta,

$$\dot{x}_i(t) = (A - BD_\alpha^{-1} C_\alpha) x_i(t) + BD_\alpha^{-1} y_\alpha(t) \quad (3.37)$$

Esto es verificado Si $z_0(t_0) = x(t_0)$ y $y(t)$ es la salida del sistema descrito por A_p , B_p , C_p y D_p en el intervalo $[t_0, \infty)$ en respuesta a la entrada $u(t)$, entonces $x(t)$ es el vector de estado de las ecuaciones (3.36) y (3.37) en respuesta a la entrada $y_\alpha(t)$ en $[t_0, \infty)$. Entonces tenemos;

$$y_\alpha(t) = \left(\prod_{i=0}^{\alpha} S_{\alpha-i} M_{\alpha-i-1} \right) y(t) \quad (3.38)$$

donde (3.36) y (3.37) representan el inverso de (3.27). Este sistema inverso puede ser visto como un banco de diferenciadores especificados por el operador.

$$N \triangleq \prod_{i=0}^{\alpha} S_{\alpha-i} M_{\alpha-i-1} \quad (3.39)$$

seguido por el sistema dinámico especificado por (3.37) y (3.38).

Ejemplo 3.3.

Este ejemplo fue obtenido de [Martínez, 2012] el cual es invertido utilizando la técnica de Silverman descrita en [Silverman, 1969].

Sea el siguiente sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Usando la metodología de Silverman se requiere obtener el sistema inverso.

$$n = 2, p = 2, m = 2$$

$$q_0 = \text{rank}(D) = 0 \implies 0 < p$$

$$\alpha = 0$$

$$D_0 = S_0 D = \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{No hay } \bar{D}_0$$

por lo que S_0 es arbitraria, pero invertible $\implies S_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\varphi_0 :$

$$x = A_p x + B u$$

$$y_0 = C_0 x + D_0 u$$

donde $y_0 = S_0 y$ y $C_0 = S_0 C$,

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \implies y_0 = y = \tilde{y}_0$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C = \tilde{C}_0 \implies \text{No hay } \bar{C}$$

tenemos que :

$$M_0 = \begin{bmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & I_2 \frac{d}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 \frac{d}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix}$$

De lo anterior podemos definir que $q_1 = \text{rank} \begin{bmatrix} D_0 \\ \tilde{C}_0 B \end{bmatrix} = \text{rank}[\tilde{C}_0 B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$
 $2 = p$
 $\alpha = 1$

$$D_1 = \begin{bmatrix} D_0 \\ \tilde{C}_0 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = S_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \implies S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies D_1 = \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\varphi_1 :$

$$\dot{x} = A_p x + B u$$

$$y_1 = C_1 x + D_1 u$$

donde $y_1 = S_1 y$ y $C_1 = S_1 C$,

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \implies y_1 = y = \tilde{y}_0$$

$$C_1 = S_1 \begin{bmatrix} \tilde{C}_0 \\ \tilde{C}_0 A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [C A_p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_0 \frac{d}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de aquí sabemos

que $D_1 = D_\alpha$

$$u = -D_\alpha^{-1} C_\alpha x + D_\alpha^{-1} y_\alpha \Rightarrow u = -D_1^{-1} C_1 x + D_1^{-1} y_1 \quad (3.40)$$

sustituyendo valores en la ecuación 3.40 tenemos:

$$u = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} y_1 \quad (3.41)$$

Donde:

$$y_1 = \left(\prod_{i=0}^{\alpha} S_{\alpha-i} M_{\alpha-i-1} \right) y \Rightarrow y_1 = (S_1 M_0)(S_0 M_{-1})y \quad (3.42)$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\dot{x}_i = (A_p - BD_{\alpha}^{-1}C_{\alpha})\dot{x}_i + BD_{\alpha}^{-1}y_1 \quad (3.44)$$

Por lo que el sistema inverso esta definido por la ecuación (3.44),

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

$$u_i = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_i + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

A continuación en la Figura 3.5 se muestra el diagrama de simulación utilizado en simulink, si se realizan los cálculos de la estabilidad del sistema original se puede dar cuenta que el sistema es inestable. Por su parte la salida del sistema inverso es estable, esto se debe a que un polo inestable se elimina con algún cero durante el proceso de inversión. En la Figura 3.6 apreciamos la respuesta

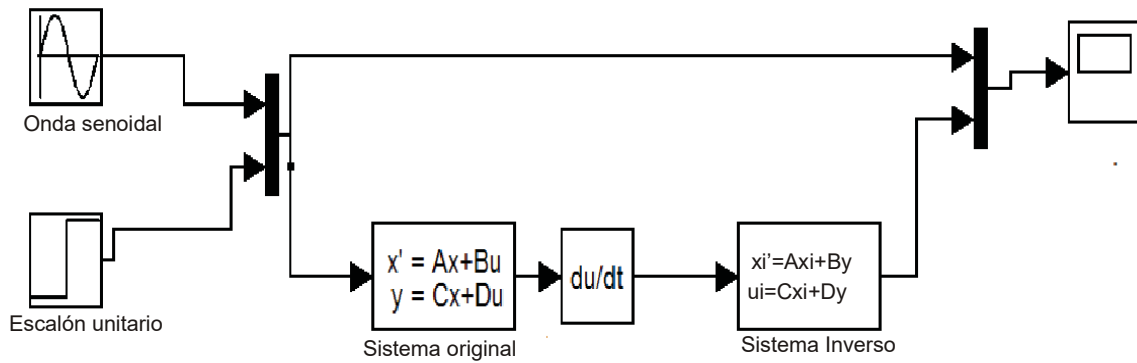


Figura 3.5: Simulación en simulink del sistema inverso descrito en la ecuación (3.45).

del sistema inverso definido por al ecuación (3.45) , en este caso se observa de manera marcada

que el derivador contiene un error que no permite que la reconstrucción sea completamente fiel a las entradas del sistema original. Pero si es posible observar que la señal reconstruida sigue un comportamiento muy similar al de la señal original. Simulación de las entradas del sistema original comparadas con las salidas del modelo inverso.

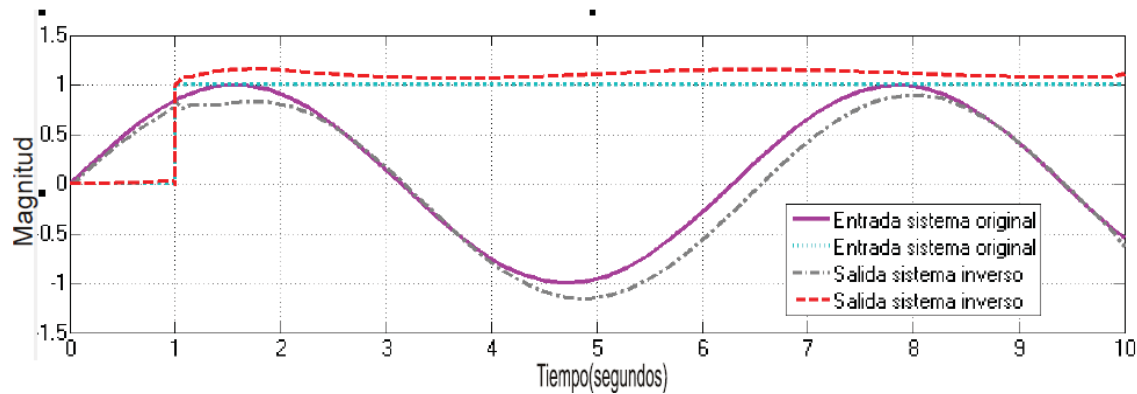


Figura 3.6: Simulación del sistema inverso

3.3 Conclusiones

Las técnicas convencionales tienen muchos avances en lo que refiere a sistemas inversos, también con estas técnicas es posible analizar una muy amplia gama de sistemas no lineales, por lo que resulta una buena opción para el cálculo de sistemas inversos a partir del modelo en espacio de estados. Es importante resaltar que en los derivadores que contienen los paquetes de simulación contienen un error y también que son susceptibles a amplificar el ruido, por lo que en ocasiones la señal reconstruida se puede ver seriamente distorsionada.

Una solución a estos problemas se muestra en [Martínez, 2012]

Capítulo 4

Sistemas inversos desde una perspectiva de Bond Graph

4.1 Invertibilidad estructural a partir del Bond Graph Directo.

Consideremos un sistema lineal dinámico representado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_p(t)x(t) + B_p(t)u(t) \\ y(t) &= C_p(t)x(t) + D_p(t)u(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

En esta sección se considera el criterio de invertibilidad propuesta por [Rahamani, 1993]. La invertibilidad estructural de los sistemas modelados por Bond Graph es probada usando el concepto de diferentes trayectorias causales entrada salida (I/O) y los cálculos del sistema inverso se obtienen directamente del modelo de Bond Graph cuando es necesario. La matriz del sistema $P(s)$ de un sistema representado por el conjunto de ecuaciones 4.1 es:

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{bmatrix}\tag{4.2}$$

Las matrices A_p , B_p , C_p y D_p se asumen como matrices de dimensiones compatibles. Y la invertibilidad de la matriz $P(s)$ descrita en la ecuación 4.2 es equivalente a la invertibilidad del sistema dado descrito por la ecuación 4.1.

$$P(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p + D_p \quad (4.3)$$

Al mencionar el término bond graph normal se refiere al bond graph en el cual la causalidad integral es prioritaria tal como se asigna en el proceso propuesto por Karnopp y Rosenberg [Karnopp, 1975]. La invertibilidad estructural de los sistemas que son modelados utilizando la técnica de bond graph es comprobada usando el concepto de diferentes trayectorias entrada-salida para calcular las matrices de un sistema modelado en espacio de estados son directamente calculadas del modelo de bond graph cuando esto es requerido. es importante para esta finalidad tener el conocimiento de algunas definiciones.

Definición 4.1. Dos trayectorias causales (I/O) están desacopladas si dichas trayectorias no comparten ningún elemento de almacenamiento.

Definición 4.2. Un conjunto S de m trayectorias causales I/O está compuesto por m trayectorias de manera que cada entrada y cada salida aparece una sola ocasión en sólo una trayectoria. En otras palabras, S define las relaciones biyectivas entre las variables de salida y las variables de entrada.

Criterio de Invertibilidad estructural de Rahamani

- i) Un sistema de m - entradas y m - salidas es no estructuralmente invertible si no existe un conjunto de m diferentes trayectorias causales entrada-salida en el bond graph normal.
- ii) Un sistema de m - entradas y m - salidas es estructuralmente invertible si existe un único conjunto de m diferentes trayectorias entrada-salida causales en el bond graph normal.
- iii) Cuando existe más de un conjunto de m diferentes trayectorias causales en el modelo de Bond Graph, la invertibilidad puede ser estudiado calculando el determinante de la matriz del sistema usando la ecuación 4.1.

Teorema 4.1. El determinante de la matriz esta dado por la ecuación 4.3 donde : q es el número de conjuntos de m diferentes I/O trayectorias causales para cada conjunto k de m trayectorias I/O , $\prod_{i=1}^m \tilde{G}(p_i)$ es el producto de los términos constantes en las ganancias de las m -diferentes trayectorias causales p_i ($i = 1$ hasta m) del conjunto k -ésimo P^R es el determinante de Mason del bond graph reducido, obtenido al remover del Bond Graph original, los Bonds y uniones

de las m trayectorias causales I/O de el conjunto, si el determinante es igual al número de salidas el sistema es invertible si el determinante es igual a cero el sistema es no invertible.

$$\det[P(s)] = \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \left(\prod_{i=1}^m \tilde{G}(p_i) P^R \right)_k \quad (4.4)$$

Teorema 4.2. Si no existe un conjunto de m diferentes trayectorias causales I/O ($q = 0$), entonces $\text{Det}[P(s)] = 0$.

4.1.1 Invertibilidad estructural desde el Bond Graph Inverso

Como se ha visto la bicausalidad es sólo una extensión del concepto de causalidad, por lo que antes de estudiar la invertibilidad de un sistema desde el procedimiento de inversión de un bond graph, es importante tomar en cuenta algunos resultados de los bond graphs causales convencionales. En un bond graph causal convencional, la existencia de las relaciones correctas entre las entradas y las salidas, dependen principalmente de la posibilidad de asignar una correcta causalidad en el bond graph sin que ocurran conflictos causales así como si es solucionable la estructura unión. Estas implicaciones también aplican en lo referente a bond graphs que contienen bonds bicausales.

En el bond graph directo, si no es posible que se asigne la causalidad al bond graph sin que ocurra algún conflicto causal, esto querrá decir que el modelo está mal planteado por lo que se debería de considerar la modificación del mismo. Por otro lado, en lo que concierne a la solucionabilidad de la estructura unión del bond graph, un procedimiento es mostrado en [Borutzki, 2009]. Esto quiere decir, que si en el bond graph directo no existen conflictos causales, es posible definir de una manera correcta las relaciones entrada-salida, pero aún así hay que considerar que esto no aplica en el caso de los bond graphs inversos, es decir, que una vez aplicada la bicausalidad es posible que se generen algunos conflictos causales.

Considerando la observación anterior para el procedimiento de la obtención del bond graph inverso, si la propagación de la información bicausal que va desde el elemento SS que se encuentra en la salida hasta el elemento SS que se encuentra en la entrada genera conflictos causales o en su defecto lazos no solucionables dichos problemas no pueden ser abordados, por lo que solamente se procede a aceptar el hecho de que no existen relaciones entrada-salida bien definidas así que la implicación anterior significa que el sistema no es estructuralmente invertible.

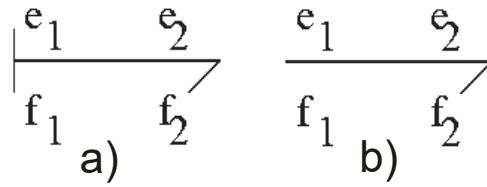


Figura 4.1: Bond graphs unicausales con trazo causal

4.2 Bicausalidad

Debido a que se manejará un enfoque distinto al convencional hablando en concreto de las relaciones constitutivas, no es suficiente la noción de una causalidad en una única dirección, donde una vez definida la dirección del esfuerzo en un sentido esto implica que el flujo sigue el sentido contrario. En este trabajo es necesario entender el concepto de bicausalidad y la definición de algunos conceptos no estándares en Bond Graph así como la noción de un tipo especial de causalidad con dos trazos causales [Gawthrop,1995].

4.2.1 Bond Graph bicausales

Las relaciones constitutivas de los bonds de la Figura 4.1, están descritos por las siguientes ecuaciones (4.5) y (4.6) respectivamente.

$$e_1 := e_2; f_2 := f_1 \quad (4.5)$$

$$e_2 := e_1; f_1 := f_2 \quad (4.6)$$

Estas relaciones describen a los bonds convencionales (bonds unicausales), pero este tipo de bonds no son suficientes para la inversión de los sistemas, a continuación se describen los bonds bicausales mostrados en la Figura 4.2.

Las relaciones constitutivas de los bonds descritos en la Figura 4.2, están descritos por las ecuaciones (4.7) y (4.8) respectivamente:

$$e_2 := e_1; f_2 := f_1 \quad (4.7)$$

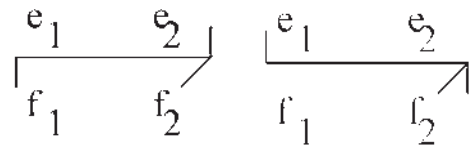


Figura 4.2: Bond Graph bicausales con causalidad asignada

$$e_1 := e_2; f_1 := f_2 \tag{4.8}$$

Podemos apreciar que cuando el medio trazo causal se encuentra al final del bond entonces tiene el mismo significado que el correspondiente trazo causal completo (tipo de notación convencional). Como podemos ver es posible asignar cualquiera de estos tipos de causalidad a un bond el cual en cualquiera de los casos cumple con la ecuación (4.9):

$$e_1 - e_2 = 0, f_1 - f_2 = 0 \tag{4.9}$$

4.2.2 Elementos Fuente-Sensor

De manera convencional los elementos S_e y S_f tienen una causalidad que es asignada de manera fija, para la inversión de sistemas. Además en algunos casos se usan para representar la medición del correspondiente flujo y esfuerzo respectivamente. Esos elementos S_e y S_f para el caso de la inversión de los sistemas son reemplazados por el elemento Sensor-Source (SS), que se aprecia en la Figura 4.3.



Figura 4.3: Elemento fuente-sensor con sus causalidades asignadas

Existen 4 diferentes versiones del modelo bicausal de estos componentes . En la Figura 4.3, orden de izquierda a derecha implican;

1. Fuente de esfuerzo/sensor de flujo.
2. Fuente de flujo/sensor de esfuerzo.

3. Fuente de flujo y esfuerzo.
4. Sensor de flujo y esfuerzo.

4.2.3 Bicausalidad en componentes

A continuación se muestran las distintas causalidades posibles para los elementos más comunes en Bond Graph.

Componentes R

Existen tres diferentes formas de asignar las relaciones constitutivas a un elemento resistivo,

$$e := rf \tag{4.10}$$

$$f := \frac{1}{r}e \tag{4.11}$$

$$r := \frac{e}{f} \tag{4.12}$$

A las cuales les corresponde la siguiente causalidad, definida previamente por sus relaciones constitutivas y cuya representación se aprecia en la Figura 4.4.

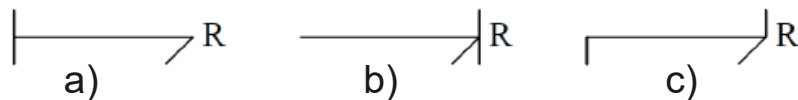


Figura 4.4: Tres tipos posibles de asignación de causalidad en un elemento $-R$

Las dos primeras describen las causalidades comúnmente utilizadas, correspondientes a los dos diagramas a) y b) mostrados en la Figura 4.4. En este caso se considera conocida R y además el que el flujo está determinado por el esfuerzo o viceversa; esta definición corresponde la esencia de un bond graph unicausal.

Componentes C

De igual manera los elementos almacenadores de energía tienen 3 posibilidades de definir sus relaciones constitutivas.

$$e := \frac{1}{c}q \quad (4.13)$$

$$q := ce \quad (4.14)$$

$$c := \frac{q}{e} \quad (4.15)$$

Para las cuales corresponde la siguiente asignación de causalidad respectivamente mostrada en la Figura 4.5.

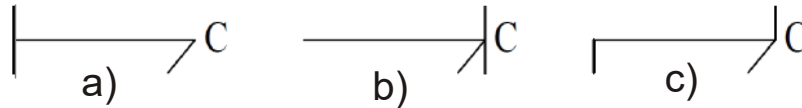


Figura 4.5: Causalidades para un elemento $-C$

Las dos primeras son las asignaciones comunes (la integral y la derivativa respectivamente), que de manera análoga a el elemento R se considera conocido el valor de C y que además el flujo se calcula derivando el esfuerzo y viceversa, el esfuerzo se calcula integrando el flujo.

Pero si analizamos a detalle la tercer asignación, se ve que no es convencional de dos formas:

1. Ambos q y e aparecen en el lado derecho de la asignación de la relación constitutiva.
2. c aparece en el lado izquierdo de la relación constitutiva.

En consecuencia al considerar que tanto q como e son conocidos, el valor de c puede ser deducido a partir de ellos. Esta situación es representada por el diagrama izquierdo representado en la Figura 4.5.

El caso de los elementos I son análogas las relaciones con respecto a los elementos C .

Definición de la bicausalidad para los componentes de dos puertos

A continuación se procede a definir la propagación de la causalidad en el contexto Bicausal en los elementos de dos puertos.

Transformador *TF*. Para el transformador es posible definir de cuatro formas diferentes sus relaciones constitutivas que describen un transformador (lineal).

$$e_2 := ne_1; f_1 := nf_2 \tag{4.16}$$

$$e_1 := \frac{1}{n}e_2; f_2 := \frac{1}{n}f_1 \tag{4.17}$$

$$e_2 := ne_1; f_2 = \frac{1}{n}f_1 \tag{4.18}$$

$$e_1 := \frac{1}{n}e_2; f_2 := nf_2 \tag{4.19}$$

A las cuales corresponde la siguiente asignación de causalidad que es mostrado en la Figura 4.6.

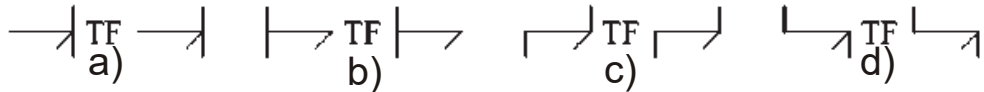


Figura 4.6: Tipos de causalidad para el transformador *TF*

Las primeras dos asignaciones corresponden a las asignaciones comunes, mientras que las 2 últimas corresponden al contexto bicausal.

4.3 Determinación de sistemas inversos por medio del Análisis de Trayectorias Causales

Dado el bond graph del modelo de algún sistema con una entrada salida y específica, el problema de determinar la condición de invertibilidad estructural y las ecuaciones de estado del modelo inverso son abordados en esta sección. Se abordará la problemática antes descrita por medio

del análisis de trayectorias causales entre la entrada, los elementos almacenadores de energía y la salida del modelo. Esta técnica utiliza el concepto de longitud de trayectorias causales [Nwompo, 1996]. Es importante resaltar que este procedimiento solo aplica para sistemas de una entrada y una salida.

Definición 4.1. La longitud L_k de una trayectoria causal desde una variable v_i a una variable v_j de un bond graph está definida como el número de elementos almacenadores de energía en causalidad integral encontrados en la trayectoria causal cuando seguimos la trayectoria causal entre v_i y v_j [Nwompo, 1996].

Se asume que:

1. Todos los elementos I y C están en causalidad integral en el bond graph con causalidad preferentemente integral.
2. No existen lazos algebraicos en el bond graph.
3. La salida es elegida de manera que es una combinación lineal de los estados lo cual en el concepto de bond graph está asociado con la independencia de los elementos almacenadores.
4. En las propiedades siguientes, $G_{L_k}(v_i, v_j)$ es el factor constante (o término estático) en la suma de las ganancias de todas las trayectorias causales de longitud L_k desde v_i a v_j .

$$G_k(v_i, v_j) = \sum (\tilde{G}_k(v_i, v_j)) \quad (4.20)$$

Donde $\tilde{G}_k(v_i, v_j)$ es el factor constante en la ganancia de la trayectoria causal p de longitud k desde la variable v_i a v_j .

p_k es el conjunto de trayectorias causales de longitud k uniendo la variable v_i a v_i entonces $G_k(v_i, v_i) = 0$.

Propiedad 4.1

El término a_{ij} de la matriz A_p está compuesto por los factores en la ganancia de la trayectoria causal de longitud uno desde la derivada en el tiempo de la variable de energía x_i a la derivada respecto al tiempo de la variable de energía x_j .

$$a_{ij} = G_1(\dot{x}_i, \dot{x}_j). \quad (4.21)$$

Propiedad 4.2

El término b_i de la matriz B_p está compuesto por los factores de la ganancia de las trayectorias directas desde la entrada u a la derivada respecto al tiempo de la variable x_i .

$$b_i = G_0(u, \dot{x}_i) \quad (4.22)$$

Propiedad 4.3

El término c_j de la matriz C_p está compuesto por los factores de la ganancia de las trayectorias causales de longitud 1 desde la derivada respecto al tiempo de la variable x_i a la salida y

$$c_j = G_1(\dot{x}_j, y). \quad (4.23)$$

Propiedad 4.4

El término d es el factor constante de la ganancia en la trayectoria directa entre la entrada u y la salida y .

$$d = G_0(u, y). \quad (4.24)$$

Usando estas notaciones, las ecuaciones de estado de un sistema en modelado de bond graph se convierte en:

$$\dot{x}_i = \sum (G_1(\dot{x}_k, \dot{x}_i)x_k - G_0(u, \dot{x}_i)u) \quad (4.25)$$

desde $i=1$ a n

$$y = \sum G_1(\dot{x}_k, y)x_k + (G_0(u, y))u \quad (4.26)$$

El caso donde $G_0(u, y) \neq 0$ significa que hay una trayectoria causal desde u y el sistema es obviamente invertible con el sistema deducido de la ecuación (4.26) y esta dado por:

$$x_1 = \sum (G_1(\dot{x}_k, \dot{x}_i) - G_0(u, \dot{x}_i)(G_0(u, y))^{-1})G_1(\dot{x}_k, y)x_k - G_0(u, \dot{x}_i)(G_0(u, y))^{-1}y \quad (4.27)$$

desde $i=1$ a n

$$u = -(G_0(u, y))^{-1} \sum G_1(\dot{x}_k, y)x_k + (G_0(u, y))^{-1}y \quad (4.28)$$

En el caso donde no existe una transferencia directa desde la entrada u a la salida y , el término D en la ecuación (4.28) es nula, entonces en el modelo de Bond Graph, no existe una trayectoria causal de longitud cero entre las variables u y $y = G_0(u, y) = 0$.

La expresión de salida es entonces denotada por la ecuación (4.29):

$$y = \sum_{k=1}^n G_1(x_k, y)x_k \quad (4.29)$$

Si asociamos la inversión con el análisis de trayectorias causales, podemos aplicar el procedimiento utilizado en el Apéndice B para representar la salida. Las derivaciones sucesivas de la salida en relación con las ganancias de las trayectorias causales son definidas por las siguientes fórmulas que también se obtiene en el Apéndice B.

$$y^{(r)} = \sum_{k=1}^n G_{r+1}(\dot{x}_k, y)x_k \quad \text{para } r < \alpha \quad (4.30)$$

la prueba se encuentra en el Apéndice B. Además

$$y^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^n G_{\alpha+1}(\dot{x}_k, y)u \quad (4.31)$$

donde α es el grado relativo de la salida y . En términos de bond graph, α es el integrador más pequeño tal que $G_\alpha(u, y) \neq 0$. En otras palabras, L_α es la longitud de la trayectoria más pequeña de u y y .

De acuerdo a [Nwompo 1996], se puede asumir que las derivaciones sucesivas de la salida y , la entrada u aparece a partir de cierto orden de derivación si existe al menos una trayectoria causal entre la entrada u y la salida y . Entonces podemos establecer las condiciones para la invertibilidad estructural.

Condición de invertibilidad estructural. Un sistema con una entrada u y una salida y modelado en bond graph es invertible si al menos existe una trayectoria entre la variable de salida y la variable de entrada.

4.3.1 Expresión del sistema inverso.

De las ecuaciones (4.28) y (4.29) las ecuaciones de estado del sistema inverso en ecuaciones

de estado son deducidos de la ecuación (2.20).

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{k=1}^n [G_1(\dot{x}_k, \dot{x}_i) - G_0(u, \dot{x}_i)(G_\alpha(u, y))^{-1}G_{\alpha+1}(\dot{x}_k, y)]x_k + G_0(u, \dot{x}_i)(G_\alpha(u, y))^{-1}y^{(\alpha)} \\ u &= -(G_{L_\alpha}(u, y))^{-1} \sum_{k=1}^n G_{L_{\alpha+1}}(\dot{x}_k, y)x_k + (G_{L_\alpha}(u, y))^{-1}y^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Las ecuaciones (4.31) del sistema inverso es del mismo orden del sistema inicial, deducido del análisis de las trayectorias causales, podemos llamarlo como sistema inverso de orden completo. En la ecuación 4.31, el conjunto de ganancias $G_k(v_i, v_j)$ usados para la representación del sistema en variables de estado son obtenidas directamente del bond graph causal en base a un procedimiento iterativo.

Al obtener la ganancia de una trayectoria G_{k+1} , es decir, es necesario definir una trayectoria de un orden mayor de la que conecta a la entrada y la salida, es necesario utilizar una trayectoria de longitud L_k y su ganancia. Usando este procedimiento, para obtener la longitud adecuada entre dos variables, podría ser necesario ir a través de una misma variable varias veces con la finalidad de incrementar la longitud de la trayectoria causal. La trayectoria causal obtenida de esta manera podría contener lazos.

La gran ventaja que ofrece este procedimiento para la obtención de la representación en espacio de estados del sistema inverso, es que no es necesario derivar primero las ecuaciones de estado del sistema directo y de este modo tampoco necesitamos los cálculos formales con las matrices como se vio en el caso matemático.

4.3.2 Determinación de un sistema inverso con $\mathbf{D} = 0$

Vamos a considerar el ejemplo de un motor de CD sin considerar la fricción. Tomando como entrada el voltaje u y como salida la velocidad angular ϖ . El bond graph esta mostrado en la Figura 4.7.

Sea el siguiente bond graph mostrado en la Figura 4.7, obtener el sistema inverso utilizando trayectorias causales.

La trayectoria causal más corta entre la entrada u y la salida y es la trayectoria. $e_0 - e_1 - f_1 - f_3 - e_4 - e_5 - f_5$. De donde se define que su longitud es 2. Entonces el orden relativo del sistema $\alpha = 2$. Para determinar el modelo en espacio de estados usando la ecuación (??) .

$$\frac{k}{LJ} \Rightarrow G_{L_2}(u, y) = \frac{k}{LJ} \quad (4.33)$$

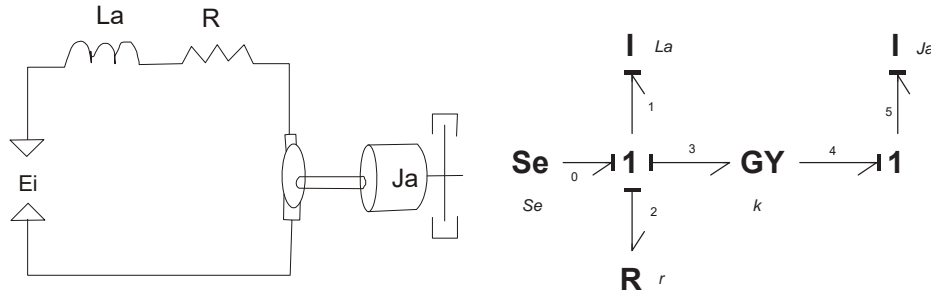


Figura 4.7: Diagrama modelo del motor CD (izquierda). Bond Graph del motor de CD (derecha).

-Factor constante de la ganancia de la trayectorias de longitud 3 entre \dot{x}_1 y la salida y .

La trayectoria está definida : $e_1 - f_1 - f_2 - e_2 - e_1 - f_1 - f_3 - e_4 - e_5 - f_5 : -\frac{kR}{L^2J}$

$$G_{L_3}(\dot{x}_1, y) = -\frac{kR}{L^2J} \quad (4.34)$$

-Factor constante de la ganancia de la trayectorias de longitud 3 entre \dot{x}_2 y la salida y .

La trayectoria está definida: $e_5 - f_5 - f_4 - e_3 - e_1 - f_1 - f_3 - e_4 - e_5 - f_5 : -\frac{Rk}{LJ^2}$

$$G_{L_3}(\dot{x}_2, y) = -\frac{Rk}{LJ^2} \quad (4.35)$$

-Términos determinados de manera similar.

Lazo causal entre el estado x_1 y el elemento resistivo R está definido por: $e_1 - f_1 - f_2 - e_2 - e_1$.

$$G_{L_1}(\dot{x}_1, \dot{x}_1) = -\frac{R}{L} \quad (4.36)$$

Trayectoria causal entre el estado x_1 y el estado x_1 está definido por: $e_5 - f_5 - f_4 - e_3 - e_1$,

$$G_{L_1}(\dot{x}_2, \dot{x}_1) = -\frac{k}{J} \quad (4.37)$$

Trayectoria causal entre el estado x_1 y el estado x_2 , está definida por: $e_1 - f_1 - f_3 - e_4 - e_5$,

$$G_{L_1}(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{k}{L} \quad (4.38)$$

Lazo causal entre el estado x_2 y el elemento resistivo b , está definido por: $e_5 - f_5 - f_6 - e_6 - e_5$

$$G_{L_1}(\dot{x}_2, \dot{x}_2) = -\frac{b}{J} \quad (4.39)$$

-Trayectorias de orden cero entre la entrada y los estados.

$$G_{L_0}(u, x_1) = 1 \quad (4.40)$$

$$G_{L_0}(u, x_2) = 0 \quad (4.41)$$

A continuación, se muestra la aplicación de la ecuación (4.26) para la obtención del modelo en espacio de estado.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & ((G_{L_1}(x_1, x_1) - (G_{L_0}(u, x_1)G_{L_2}(u, y)^{-1}G_{L_3}(x_1, y)))x_1 + (G_{L_1}(x_2, x_1) - \dots - \\ & G_{L_0}(u, x_1)G_{L_2}(u, y)^{-1}G_{L_3}(x_2, y))x_2 + (G_{L_0}(u, x_1)G_{L_2}(u, y)^{-1})y \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sustituyendo valores para \dot{x}_1 se tiene que;

$$\dot{x}_1 = \left(-\frac{R}{L}\right) - \left((1)\left(\frac{JL}{k}\right)\left(\frac{Rk}{L^2J}\right)\right)x_1 + \left(\left(-\frac{k}{J}\right) - (1)\left(\frac{JL}{k}\right)\left(\frac{-k^2}{LJ^2}\right)\right)x_2 + \left((1)\left(\frac{JL}{k}\right)\right)y \quad (4.43)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{JL}{k}y \quad (4.44)$$

Ahora calculando \dot{x}_2

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & ((G_{L_1}(x_2, x_1) - (G_{L_0}(u, x_2)G_{L_2}(u, y)^{-1}G_{L_3}(x_2, y)))x_1 + (G_{L_1}(x_2, x_2) - \dots \\ & G_{L_0}(u, x_2)G_{L_2}(u, y)^{-1}G_{L_3}(x_2, y))x_2 + (G_{L_0}(u, x_2)G_{L_2}(u, y)^{-1})y^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\dot{x}_2 = \left(\left(\frac{k}{L}\right) - (0)\left(\frac{JL}{k}\right)\left(\frac{Rk}{L^2J}\right)\right)x_1 + \left(\left(-\frac{b}{J}\right) - (0)\left(\frac{JL}{k}\right)\left(\frac{-k^2}{LJ^2}\right)\right)x_2 + \left((0)\left(\frac{JL}{k}\right)\right)y \quad (4.46)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k}{L}x_1 \quad (4.47)$$

Ahora, para el cálculo de la entrada se utiliza la ecuación (4.27) :

$$u = (G_{L_2}(u, y)^{-1}[G_{L_3}(x_1, y)x_1 + G_{L_3}(x_2, y)x_2] + G_{L_2}(u, y)^{-1})y \quad (4.48)$$

Sustituyendo,

$$u = \left(\frac{JL}{k}\left[\frac{Rk}{L^2J}x_1 - \frac{k^2}{LJ^2}x_2\right] + \frac{LJ}{k}\right)y \quad (4.49)$$

Dando como resultado la ecuación (4.48) que describe la salida del sistema inverso,

$$u = \frac{R}{L}x_1 + \frac{k}{J}x_2 + \frac{LJ}{k}y \quad (4.50)$$

Finalmente, podemos expresar el sistema inverso como se aprecia a continuación en la ecuación (4.51):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{LJ}{k}y \\ \dot{x}_2 &= \frac{k}{L}x_1 \\ u &= \frac{R}{L}x_1 + \frac{k}{J}x_2 + \frac{LJ}{k}y^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ahora en esta parte se presentan las simulaciones para confirmar los cálculos de manera grafica. En la Figura 4.8 se muestra la representación del modelo del sistema inverso en el software 20-Sim.

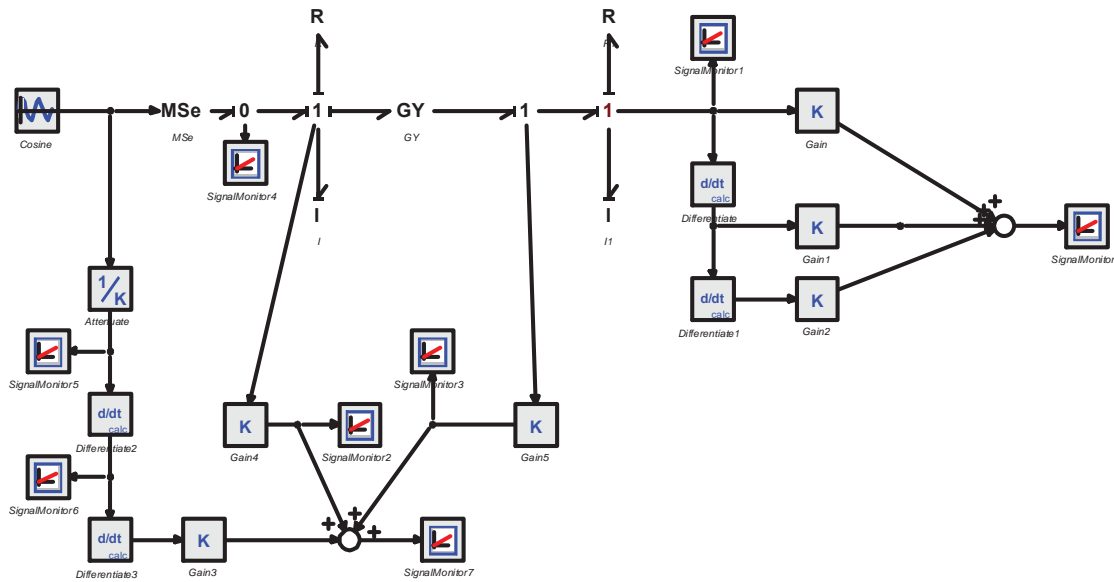


Figura 4.8: Diagrama de simulación del sistema inverso en 20-Sim

En la Figura 4.9 se observan las señales obtenidas tanto de las entradas como de las salidas tanto del sistema inverso como el sistema directo. Es evidente que la respuesta del sistema inverso dado por la ecuación 4.51 reconstruye la entrada del sistema original, basta con ver que son casi idénticas ambas señales tanto en magnitud como en fase.

4.3.3 Ejemplo de sistema inverso con $D \neq 0$

Se mostrará el caso en el que la matriz D no es la identidad por lo que a continuación se implementa un bond graph con la adición de un transformador el cual convierte a la matriz D en una matriz no unitaria, en la Figura 4.11 se muestra el bond graph correspondiente.

Se obtiene la representación del modelo en espacio de estados del sistema descrito en la Figura 4.11 con el procedimiento mostrado en la sección 2.4.2.



Figura 4.9: Simulación en 20-sim

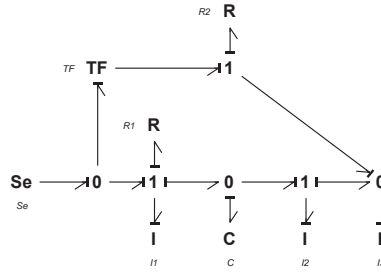


Figura 4.10: Bond Graph de un sistema con la matriz $D \neq 1$

$$A_n = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & \frac{-1}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{R_2}{L_3} \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{L_2} & \frac{-R_2}{L_3} \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{R_2}{L_2} & \frac{-R_2}{L_3} \end{bmatrix}, D_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Aplicando las ecuaciones (3.7) podemos obtener de manera matemática las matrices inversas que representan el sistema inverso del sistema descrito por las ecuaciones (4.52) .

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & \frac{-1}{C_1} & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{R_2}{L_3} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} n \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-R_2 n}{L_2} & \frac{R_2 n}{L_3} \end{bmatrix}, D_i = [n] \quad (4.52)$$

A continuación se realiza el cálculo del sistema inverso por medio de trayectorias causales.

$$\begin{aligned}
 G_{L_1}(x_1, x_1) &= \frac{-R_1}{L_1} & G_{L_1}(x_2, x_1) &= \frac{-1}{C_1} & G_{L_1}(x_3, x_1) &= 0 & G_{L_1}(x_4, x_1) &= 0 \\
 G_{L_1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{L_1} & G_{L_1}(x_2, x_2) &= 0 & G_{L_1}(x_3, x_2) &= \frac{-1}{L_2} & G_{L_1}(x_4, x_2) &= 0 \\
 G_{L_1}(x_1, x_3) &= 0 & G_{L_1}(x_2, x_3) &= 0 & G_{L_1}(x_3, x_3) &= \frac{-R_2}{L_2} & G_{L_1}(x_4, x_3) &= \frac{R_2}{L_3} \\
 G_{L_1}(x_1, x_4) &= 0 & G_{L_1}(x_2, x_4) &= 0 & G_{L_1}(x_3, x_4) &= \frac{R_2}{L_2} & G_{L_1}(x_4, x_4) &= \frac{-R_2}{L_3}
 \end{aligned}$$

$$G_{L_0}(u, x_1) = 1 \quad G_{L_0}(u, x_2) = 0 \quad G_{L_0}(u, x_3) = -\frac{1}{n} \quad G_{L_0}(u, x_4) = \frac{1}{n}$$

$$G_{L_1}(x_1, y) = 0 \quad G_{L_1}(x_2, y) = 0 \quad G_{L_1}(x_3, y) = \frac{R_2}{L_2} \quad G_{L_1}(x_4, y) = \frac{-R_2}{L_3}$$

$$G_{L_0}(u, y) = \frac{1}{n}$$

Usando el procedimiento descrito en la ecuación 4.31 se obtiene el sistema inverso que define la ecuación 4.53:

$$A_{pi} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & \frac{-1}{C_1} & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{R_2}{L_3} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} n \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-R_2 n}{L_2} & \frac{R_2 n}{L_3} \end{bmatrix}, D_i = [n] \quad (4.53)$$

que es la misma representación obtenida por medio de los cálculos matemáticos.

4.4 Determinación del sistema inverso usando el concepto de bicausalidad

4.4.1 El concepto de Bond Graph bicausal

El bond graph acausal de un sistema dinámico representa la transferencia de energía y las relaciones constitutivas en el sistema independientemente de las sentencias de asignación que pueden ser derivadas de esas ecuaciones. La causalidad expresada en forma de relaciones constitutivas de elementos, así como relaciones entre las variables de la estructura unión podría ser escrito para propósitos de análisis del sistema o la derivación de algún modelo de simulación.

El trazo convencional causal usado en los Bonds Graph convencionales, básicamente supone que en cada bond si el esfuerzo (flujo) es impuesto en una dirección, entonces como consecuencia

de esto, el flujo (esfuerzo) es impuesto en la otra dirección, en otras palabras una variable impuesta como entrada implica que su variable conjugada es la salida.

Desde un punto de vista computacional, los llamados trazos "unicausales" no determinan todas las formas de las sentencias de asignación que pueden ser derivados de las relaciones constitutivas del bond. El concepto de bond bicausal fue introducido por Gawthrop [Gawthrop, 1995] elimina esas restricciones y aumenta las posibilidades de modelos computacionales que pueden ser derivados de un bond graph.

El trazo causal en un bond bicausal es visto como mitades de trazos cada uno asociado con el esfuerzo y la variable flujo puede ser impuesto independientemente en cada uno de los extremos del bond. Los medios trazos causales indican que las variables están fijas o son conocidas en ese bond y eso determina la asignación derecha y la forma de asignación.

En la tabla 4.1 se presenta la asignación de la causalidad convencional así como su representación en diagrama de bloques, esto se hace de una manera comparativa para visualizar de manera más sencilla la diferencia entre ambos tipos de causalidad.

4.4.2 Explicación de la bicausalidad por medio de bloques operacionales.

Para una comprensión más sencilla de la bicausalidad otra forma de observarla es por medio de un diagrama de bloques, es importante resaltar que es extremadamente complicado convertir un diagrama de bloques o un diagrama de flujo puede ser convertido en un bond graph causal ya que por lo general estos no contienen variables conjugadas. Además, en un intento por convertir un diagrama de bloques que representa la estructura de un modelo de un sistema físico en un bond graph puede ser necesaria una vasta experiencia esto además de ser requerido un amplio conocimiento acerca de la naturaleza de los puertos físicos así como las eliminaciones de las variables físicas relevantes. Es por eso que se expondrá la forma de convertir un bond graph causal en un diagrama de bloques de acuerdo a [Bredveld, 2010].

Representación de los componentes básicos de Bond Graph como diagrama de bloques

Para poder representar un bond graph en forma de diagrama de bloques es importante describir la representación de cada uno de los elementos de forma individual misma que se muestra en la Tabla 4.1

Tabla 4.1: Equivalente en bond graph de los bloques operacionales.

Componente	Bond Graph	Diagrama de bloques
Unión -0		
Unión -1		
Transformador		
Transformador		
Girador		
Girador		
Resistencia Integral		
Resistencia derivativa		
Capacitor causalidad integral		
Capacitor causalidad derivativa		
Inductor causalidad integral		

Conversión de un bond graph causal en un diagrama de bloques.

Como un Bond Graph causal representa un flujo de señal bi-lateral con direcciones fijas, un bond graph causal puede ser expandido en un diagrama de bloques en 3 de 4 pasos.

1.-Todos los símbolos de los nodos son encerrados en un círculo y todos los bonds son expandidos en un diagrama de flujo de señales bilaterales de acuerdo a la causalidad asignada, por ejemplo en la Figura 4.13 tenemos in bond graph .

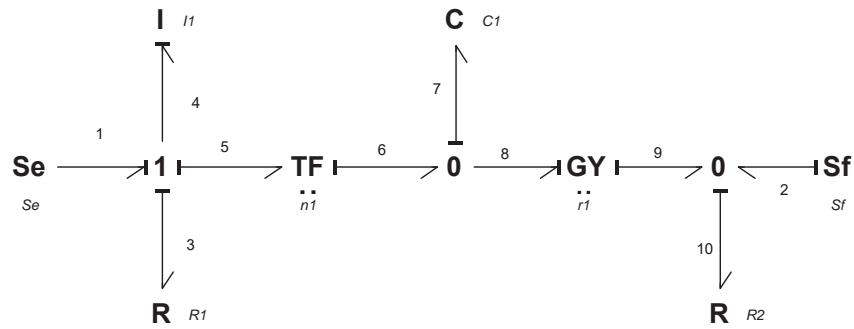


Figura 4.11: Diagrama que muestra el paso 1.

2.-Todas las relaciones constitutivas de cada nodo son escritas en forma de un diagrama de bloques como se muestra en la Figura 4.14, de acuerdo a la causalidad asignada en cada puerto, las uniones -0, son representadas por un nodo de señal para los esfuerzos así como un punto de suma para los flujos, mientras que las uniones -1 son representadas por un nodo de señal para los flujos y un punto de suma por los esfuerzos.

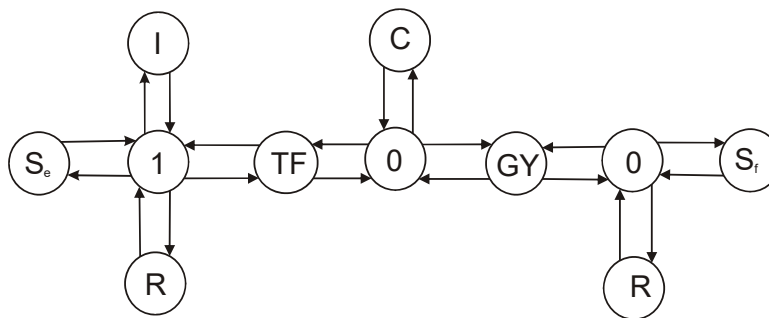


Figura 4.12: Expansión de los bonds causales en señales bilaterales

3.-Todas las señales entran al punto de suma, dependiendo de la unión se asigna el signo

correspondiente a la dirección de la semiflecha: sí, mientras se avanza desde la entrada causal hasta la salida causal, la orientación no cambia (esto no excluye la orientación opuesta a la dirección de la señal), entonces un signo de suma es agregado lo cual representa una contribución positiva a la sumatoria: en contraste si la orientación del bond es cambiada, es agregado un signo menos lo que representa una contribución negativa a la sumatoria. En principio un diagrama de bloques es obtenido en este punto se muestra en la Figura 4.14. Además, la topología no es común a la localización de las señales conjugadas. Esto puede ser omitido en el siguiente paso.

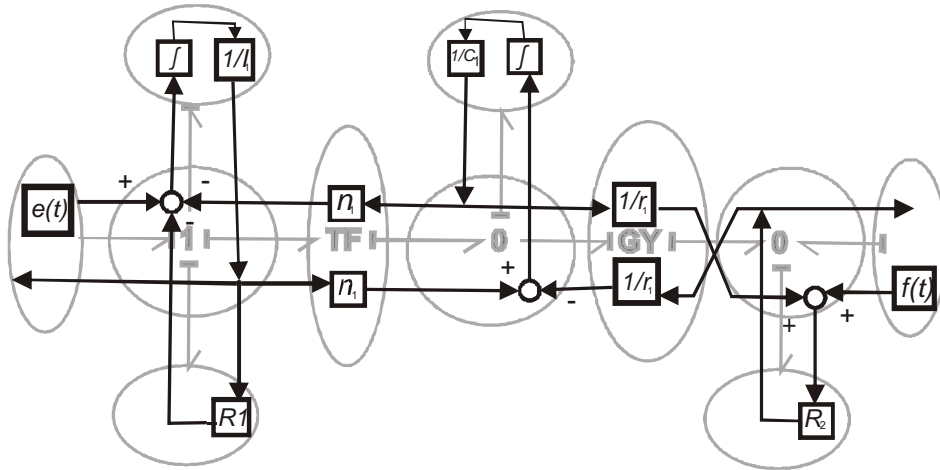


Figura 4.13: Expansión en bloques operacionales y adición de signos.

4.-Opcional: Redibujar el diagrama de bloques del una forma que las entradas esten en el lado izquierdo y las salidas (variables observadas) se encuentren en el lado derecho con los integradores en la siguiente trayectoria causal (véase Figura 4.15). El diagrama de bloques puede ser manipulado de acuerdo las reglas estándar para los diagramas de bloques para obtener la forma canónica Figura 4.16 .

4.4.3 El uso de la bicausalidad para la inversión de sistemas

En la Sección 4.3 pudimos apreciar la metodología para la obtención del modelo inverso usando el análisis de trayectorias causales. El concepto de bicausalidad ha probado ser una herramienta muy útil para resolver la problemática de sistemas inversos. La bicausalidad permite desacoplar la variable esfuerzo y la variable flujo (en términos de causalidad). en el contexto de inversión de sistemas, permite imponer la variable de salida, pero sin modificar las relaciones consti-

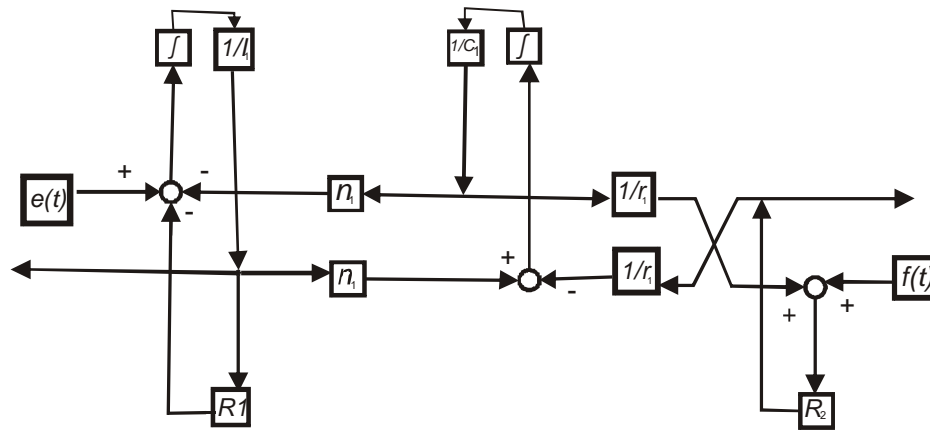


Figura 4.14: Organización de las entradas y salidas

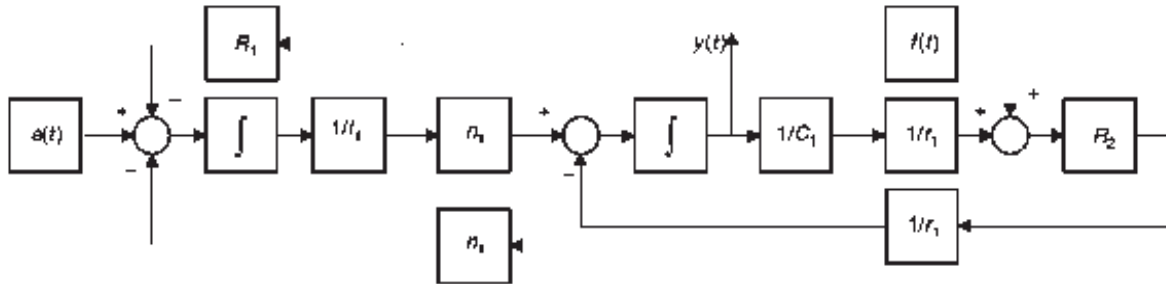


Figura 4.15: Conversión a la forma convencional.

tutivas del sistema, en este sentido los elementos SS juegan un papel fundamental en estos análisis ya que con un elemento SS que tenga una causalidad fuente esfuerzo/fuente flujo asignado a la salida. Entonces esta salida impuesta juega ahora el rol de entrada de este elemento SS , mientras que su conjugado tiene un valor nominal de cero. De manera similar a la variable de entrada del sistema original se le asigna otro elemento SS sólo que esta vez con una causalidad de sensor de flujo/sensor de esfuerzo. A continuación, se presenta un algoritmo para la correcta asignación de la bicausalidad con el propósito de inversión de sistemas.

4.4.4 Algoritmo de asignación de la bicausalidad para obtener el modelo inverso reducido.

Algoritmo 4.1

1. **Paso 1.** Se determina la trayectoria más corta entre la variable de entrada y la variable de salida en un bond graph con causalidad integral,
2. **Paso 2.** Se reemplaza la fuente asociada con la variable de entrada por un elemento SS y se conecta otro elemento SS a la salida.
3. **Paso 3.** En la salida del elemento SS , se asigna la causalidad fuente de flujo/fuente de esfuerzo y se propaga la información bicausal hasta el elemento SS que está en la variable de entrada a través de la trayectoria obtenida en el paso 1. En este paso también se extienden las asignaciones de la causalidad lo más posible.
4. **Paso 4.** Se elige cualquier elemento almacenador sin causalidad, y se le asigna causalidad integral. Propagamos la causalidad tanto como sea posible. Repetimos este paso hasta que todos los elementos almacenadores (C e I) tengan asignada una causalidad.
5. **Paso 5.** Ahora elegimos cualquier elemento R sin causalidad y asignamos cualquier causalidad. Extendemos la causalidad hasta donde sea posible. Repetimos este paso hasta que el Bond Graph tenga toda la causalidad asignada.

Notas sobre la asignación de la bicausalidad

En el paso 1 el procedimiento que determina la trayectoria más corta entre la variable de entrada y la variable de salida. La longitud de la trayectoria da el grado relativo del sistema la cual se ha definido en la ecuación con anterioridad en la ecuación 4.23. Esta trayectoria más corta puede ser encontrada aplicando el procedimiento de asignación de causalidad convencional a un bond graph acausal. Si en algún caso existieran más de una trayectoria de longitud mínima se procede a aplicar el procedimiento a cualquiera de los modelos obtenidos.

En el paso dos los elementos SS para permitir la bicausalidad imponen la salida sin modificar la estructura del modelo. Si la salida es un flujo (esfuerzo), entonces la salida del elemento SS deberá ser conectado a una unión-1 (unión -0) asociada a la variable de salida.

En el paso 3 la propagación de la bicausalidad se lleva a cabo por la trayectoria más corta de acuerdo a las reglas de la tabla 2.1 hasta que se llegue al elemento SS con la asignación de sensor de flujo/sensor de esfuerzo. En este caso como el procedimiento se aplica con la intención de encontrar el modelo inverso y no para la estimación de parámetros, es importante recordar que ningún elemento (I , C , R) tendrá causalidad bicausal. Entonces los Bonds bicausales solo se aplican

a los elementos SS y a los elementos de la estructura unión (θ , 1 , GY , TF). La propagación a través del bond es fácil tomando en cuenta las siguientes reglas.

1. Solamente un esfuerzo (flujo) es entrada en una unión -0 (unión -1) con n bonds de entrada.
2. Exactamente $n - 1$ flujos (esfuerzos) son entrada en una unión -0 (unión -1) con n bonds de entrada de entrada.

Los pasos 4 y 5 del Algoritmo 4.1 finalizan el proceso.

Ejemplo de asignación de bicausalidad en un Bond Graph acausal

Utilizando el modelo de un par de motores en paralelo que controlan una misma flecha, mismo que es mostrado en al Figura 4.16.

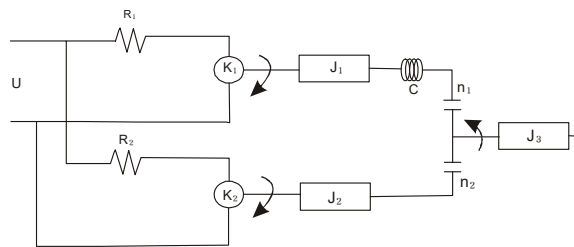


Figura 4.16: Diagrama esquemático de un par de motores en paralelo.

En la Figura 4.17 se aprecian las uniones y los componentes que competen al modelo en Bond Graph

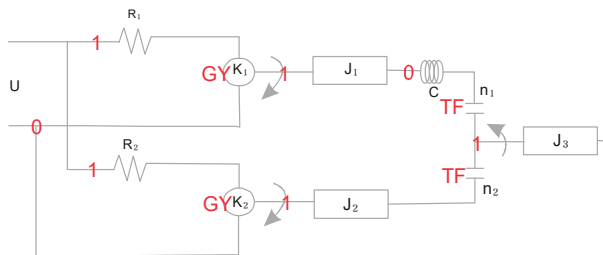


Figura 4.17: Modelo en Bond Graph del sistema anterior.

Modelando en Bond Graph se obtiene el sistema descrito en la Figura 4.19, nótese que esta implementada la causalidad normal.

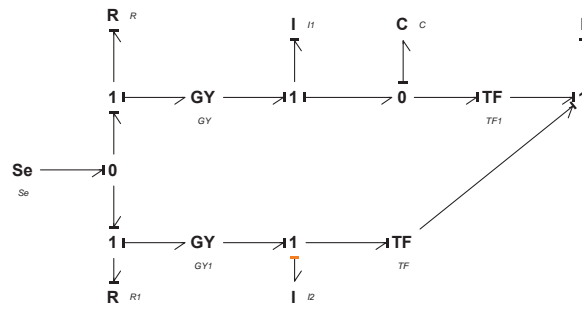


Figura 4.18: Bond graph Causal Directo.

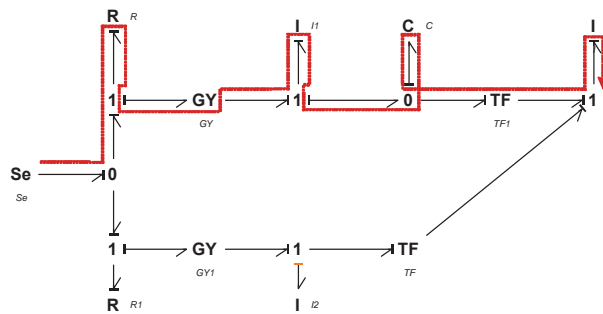


Figura 4.19: Trayectoria entre la entrada y la salida.

Ahora se muestra en la Figura 4.19 una trayectoria entre la entrada y la salida. Después se elimina la causalidad de la trayectoria e implementamos los elementos SS tanto en la entrada como en la salida esto se muestra en la Figura 4.20.

En la Figura 4.22 se implementa la bicausalidad a partir del elemento SS que se encuentra en la salida hasta el elemento SS de la entrada.

La Figura 4.23 muestra la dirección de las variables de esfuerzo y flujo en el bond graph bicausal.

Finalmente, se asignan las causalidades a los elementos que se encuentran en la trayectoria bicausal, Figura 4.24 .

Ahora a continuación en la Figura 4.25 se muestra la trayectoria entre la salida y la entrada con los bonds bicausales.

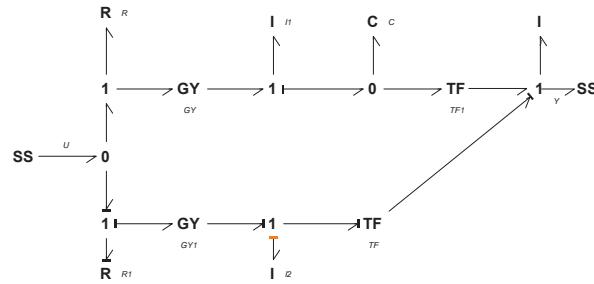


Figura 4.20: Diagrama con los correspondientes elementos SS .

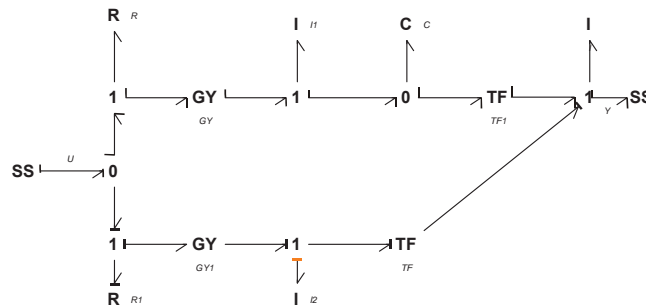


Figura 4.21: Bond graph bicausal.

4.4.5 Determinación del sistema inverso por medio de la bicausalidad

En la sección anterior se mostró cómo es posible asignar la bicausalidad a un bond graph y así obtener una trayectoria que relacione la entrada con la salida. A partir del conocimiento de que es posible ver como la salida que anteriormente era nuestra entrada u , esto en base a la utilización de el elemento SS correspondiente, es posible decir que estamos trabajando con el sistema inverso de nuestro sistema original, es decir, que el nuevo sistema modelado con los Bonds Bicausales nos permitirá conocer qué entrada es requerida para una salida deseada. Tomamos como ejemplo el motor de CD que se aprecia en la Figura 4.26, utilizado en la Sección 4.2

A continuación se ejemplifica la obtención del sistema inverso del motor de CD por medio de la utilización de la bicausalidad. Como primer paso, asignamos la bicausalidad al bond graph descrito en la Figura 4.27.

Una vez que hemos asignado la bicausalidad, vemos que si existe una trayectoria desde el elemento SS de la salida hasta el elemento SS de la entrada. Hay que observar también que la asignación de la bicausalidad realizada, obliga a los elementos almacenadores a cambiar su causalidad

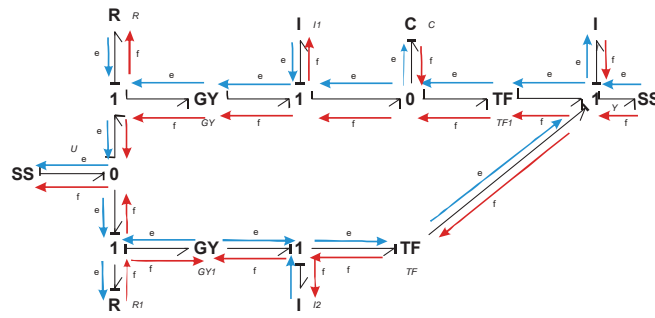


Figura 4.22: Direccion de las variables de potencia en el bond graph bicausal.

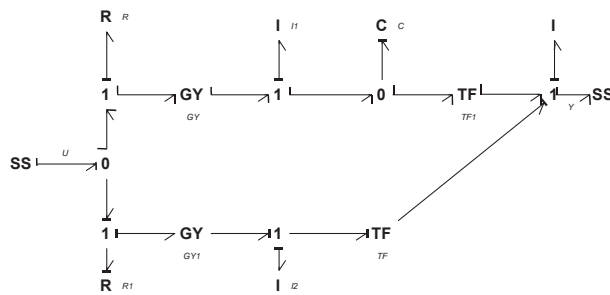


Figura 4.23: Bond graph bicausal completo.

integral por una causalidad derivativa (Figura 4.28).

Esto quiere decir que el grado relativo de la salida relativa es 2, la cual es también 2 es el orden del sistema original por los tanto el orden del sistema reducido será $2 - 2 = 0$. Pero al no existir elementos almacenadores con causalidad integral en el bond graph bicausal con una causalidad integral preferente. Para la obtención del sistema inverso entonces se obtiene la ecuación que es derivada escribiendo las ganancias de todas las trayectorias posibles entre el f_6 y el e_0 .

En la Figura 4.29 observamos que son 3 las posibles trayectorias desde el f_6 hasta el e_0 . se procede a calcular las ganancias de cada una de ellas de manera individual.

Trayectoria 1 $f_6 - f_4 - e_3 - e_0$

$$ky(t)$$

Trayectoria 2 $f_6 - f_5 - e_5 - e_4 - f_3 - f_1 - e_1 - e_0$

$$\frac{L_a J_a \ddot{y}}{k}$$

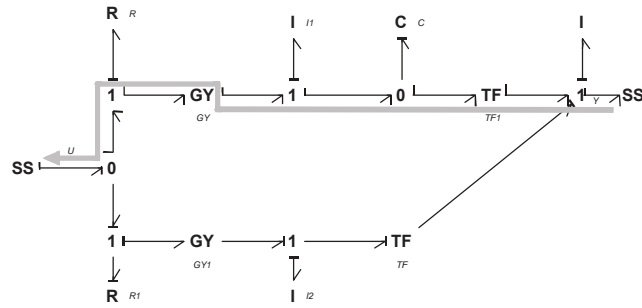


Figura 4.24: Trayectoria entre la salida y la entrada.

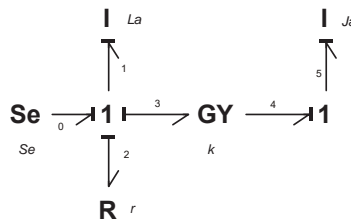


Figura 4.25: Modelo del motor de CD con causalidad asignada

Trayectoria 3 $f_6 - f_5 - e_5 - e_4 - f_3 - f_2 - e_2 - e_0$

$$\frac{rJ_a}{k}\ddot{y}$$

La entrada $u(t)$ es la suma de todas las ganancias de las trayectorias. Por lo queda expresada por la Ecuación 4.60:

$$u(t) = \frac{L_a J_a}{k} \ddot{y} + \frac{r J_a}{k} \dot{y} + k y \quad (4.54)$$

Es importante resaltar que esta ecuación describe el sistema de orden reducido, es decir se trata en este caso de un sistema de orden cero, A continuación se verifica la obtención del sistema inverso con la metodología presentada en el capítulo 3. Es necesario primero recordar las ecuaciones de estado del sistema original ya que de ahí parte el análisis matemático.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_a} & -\frac{k}{J_a} \\ \frac{k}{L_a} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_a} \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

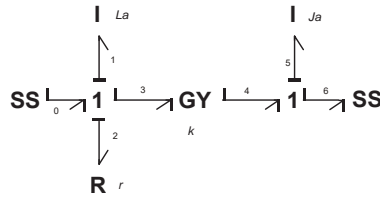


Figura 4.26: Motor de CD con bicausalidad

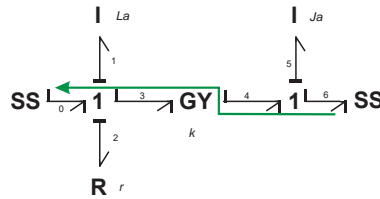


Figura 4.27: Trayectoria entre la salida entrada en el bond graph bicausal

Entonces, se utiliza la ecuación (3.5) podemos obtener el inverso de orden completo.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k}{L_a} & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} \frac{J_a L_a}{k} \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{y} \\ u &= \begin{bmatrix} \frac{R}{L_a} & \frac{k}{J_a} \end{bmatrix} x_i + \frac{J_a L_a}{k} \ddot{y} \end{aligned} \quad (4.55)$$

y finalmente, las ecuaciones de estado del sistema reducido inverso se encuentra utilizando la ecuación (6) descrita en la sección II de [Nwompo, 1996] aplicando la transformación dada a continuación por la ecuación (4.56):

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} Cx \\ CA_p x \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_a} \\ \frac{k}{J_a L_a} & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

A continuación, se muestra en la Figura 4.30 la dirección de la señales del bond graph directo usando el procedimiento mostrado en la sección 4.4.2.

Después, se separa en bloques operacionales el modelo del motor de CD, con la asignación de la bicausalidad mismo que se aprecia en la Figura 4.31 que los flujos de las señales cambian con respecto a la Figura 4.30.

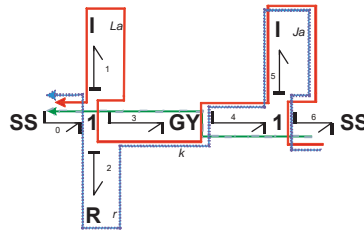


Figura 4.28: Trayectorias entre la salida y la entrada

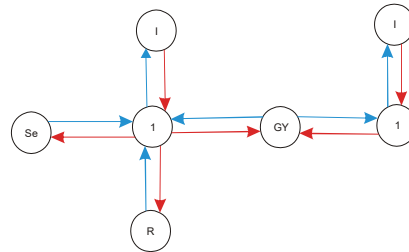


Figura 4.29: Dirección de las señales en el Bond Graph del motor de CD

4.4.6 Ejemplo de obtención de sistemas inversos de múltiples entradas y múltiples salidas de Bond Graph

A continuación se expone un ejemplo académico obtenido de [Nwompo, 1996²], a partir de esto se desglosa el análisis para un mejor entendimiento del cálculo de los sistemas inversos de múltiples entradas y múltiples salidas en este caso 2 entradas y 3 salidas.

En la Figura 4.31 y 4.32 podemos observar las trayectorias que son posibles entre las entradas u_1 y u_2 hacia y_3 y y_2

- $u_1 - e_3 - f_3 - f_4 - f_{11} - y_3$
- $u_2 - f_{11} - f_{10} - e_{10} - e_{11} - e_7 - e_6 - f_6 - y_2$
- $u_1 - e_3 - f_3 - f_4 - f_{11} - y_3$
- $u_2 - f_{11} - f_9 - e_9 - e_{11} - e_7 - e_6 - f_6 - y_2$

Existe además una segunda opción de las trayectorias que son posibles entre las entradas u_1 y u_2 hacia y_3 y y_2 respectivamente mostrados en la Figura 4.34.

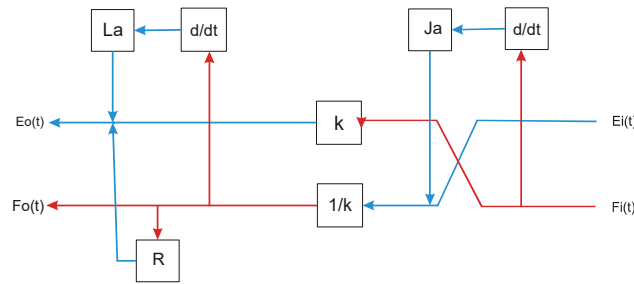


Figura 4.30: Figura que muestra el flujo de las señales una vez asignada la bicausalidad

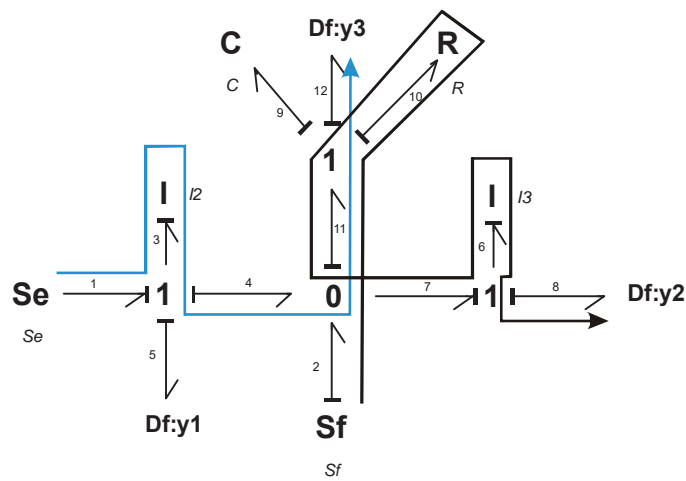


Figura 4.31: Opción 1 de las trayectorias entre (u_1, y_3) y (u_2, y_2) .

En las Figuras 4.34 y 4.35 podemos observar las trayectorias que son posibles entre las entradas u_1 y u_2 hacia y_1 y y_2 respectivamente.

- $u_1 - e_3 - f_3 - y_1$
- $u_2 - f_{11} - f_{10} - e_{10} - e_{11} - e_7 - e_6 - f_6 - y_2$
- $u_1 - e_3 - f_3 - y_1$

$$u_2 - f_{11} - f_9 - e_9 - e_{11} - e_7 - e_6 - f_6 - y_2$$

Es posible obtener las ganancias de los estados con la identificación de las trayectorias de la misma manera descrita en la Sección 4.3 en las Figuras 4.35 y 4.36 se muestran dichas trayectorias.

donde p es el operador diferencial $\frac{d}{dt}$.

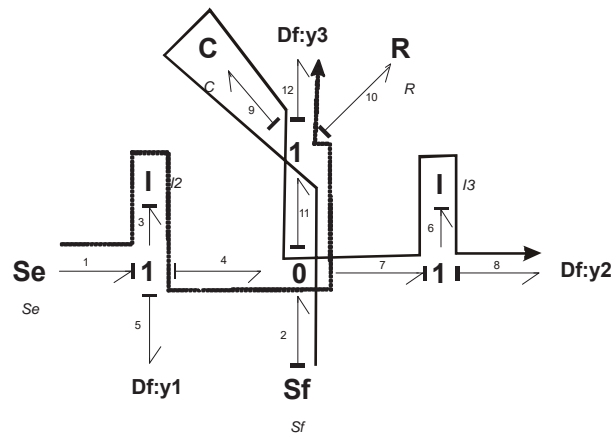


Figura 4.32: Opción 2 de las trayectorias entre (u_1, y_3) y (u_2, y_2) .

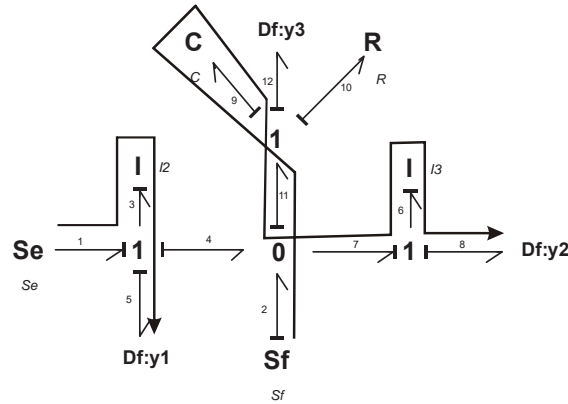


Figura 4.33: Opción 1 de las trayectorias entre (u_1, y_1) y (u_2, y_2) .

- Trayectoria 1 $y_1 \rightarrow u_1$, $f_1 - f_3 - e_3 - e_1$ cuya ganancia es $I_2 p$
- Trayectoria 2 $y_2 \rightarrow u_1$, $f_5 - f_7 - e_7 - e_6 - e_4 - e_2$ cuya ganancia es $I_3 p$
- Trayectoria 3 $y_1 \rightarrow u_2$, $f_1 - f_4 - f_8$ al ganancia de esta trayectoria es -1
- Trayectoria 4 $y_2 \rightarrow u_2$, $f_5 - f_6 - f_8$ cuya ganancia es 1
- Trayectoria 5 $y_2 \rightarrow u_2$, $f_5 - f_7 - e_7 - e_6 - e_9 - e_{11} - f_{11} - f_9 - f_8$ de la cual se obtiene la ganancia $\frac{I_3}{R} p$.

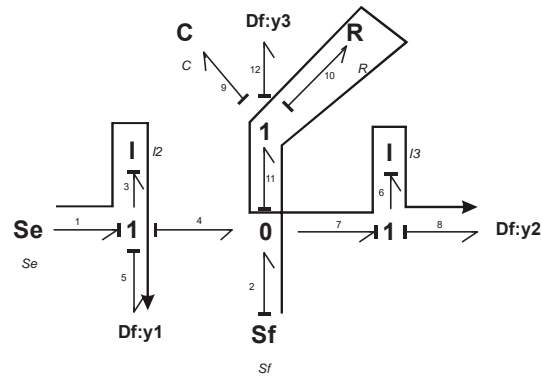


Figura 4.34: Opción 2 de las trayectorias entre (u_1, y_1) y (u_2, y_2) .

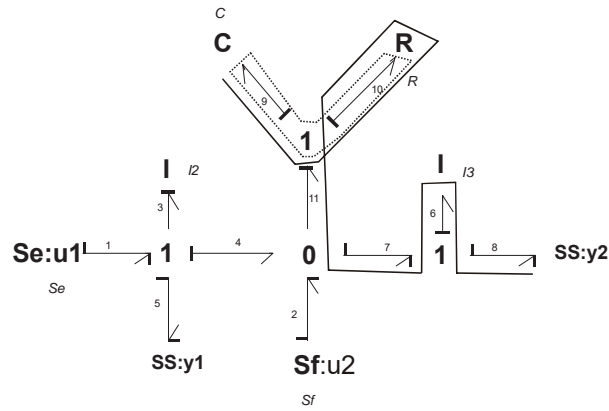


Figura 4.35: Ganancias de la matriz A_i y B_i

de las ganancias anteriores se conforma la matriz T .

$$T = \begin{bmatrix} I_2 p & I_3 p \\ -1 & 1 + \frac{I_3}{R} p \end{bmatrix}$$

4.5 Ejemplos de aplicación

En esta sección se aplica el principio de la bicausalidad para obtener la representación de los sistemas inversos de dos casos particulares, en primer lugar el de la media suspensión pasiva para finalmente abordar el robot manipulador de dos eslabones.

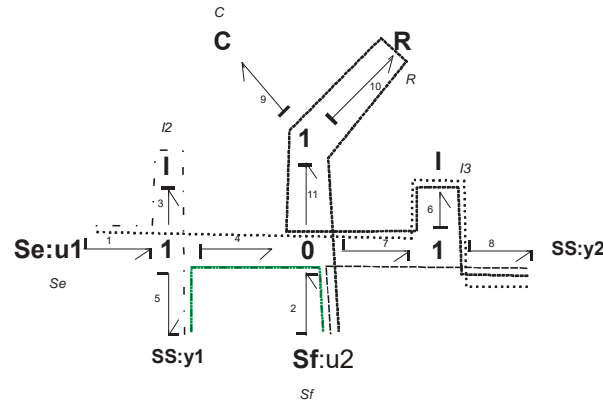


Figura 4.36: Ganancias de la matriz C_i y D_i .

4.5.1 Suspensión pasiva SISO

Como uno de los ejemplos finales se analizará el modelo de la suspensión de medio automóvil también denominado configuración de bicicleta, ya que este mismo modelo representa un corte longitudinal del vehículo en el cual se consideran el cuerpo del auto y la inclinación, en este caso se analizará media suspensión pasiva considerando que existe una perturbación en uno de los neumáticos. El modelo del medio auto se presenta en la Figura 4.38.

En el modelo del medio auto los elementos $S_f : f_t$, $C : C_1$, $I : I_1$, $R : R_1$, $C : C_2$ son los elementos que corresponden a la parte posterior del modelo; por su parte $C : C_4$, $I : I_2$, $R : R_2$, $C : C_3$ son los elementos de la parte delantera del modelo, la masa del auto es representada por $I : I_4$, mientras que el ángulo de inclinación del cuerpo del auto es representado por $I : I_3$, los transformadores $TF : a$ y $TF : b$ son los que cambian los esfuerzos del sistema de suspensión delantero y trasero respectivamente en momentos angulares para determinar la posición del cuerpo del auto. A continuación se obtendrá la matriz de estructura unión del modelo por lo que es necesaria la definición de los respectivos vectores clave.

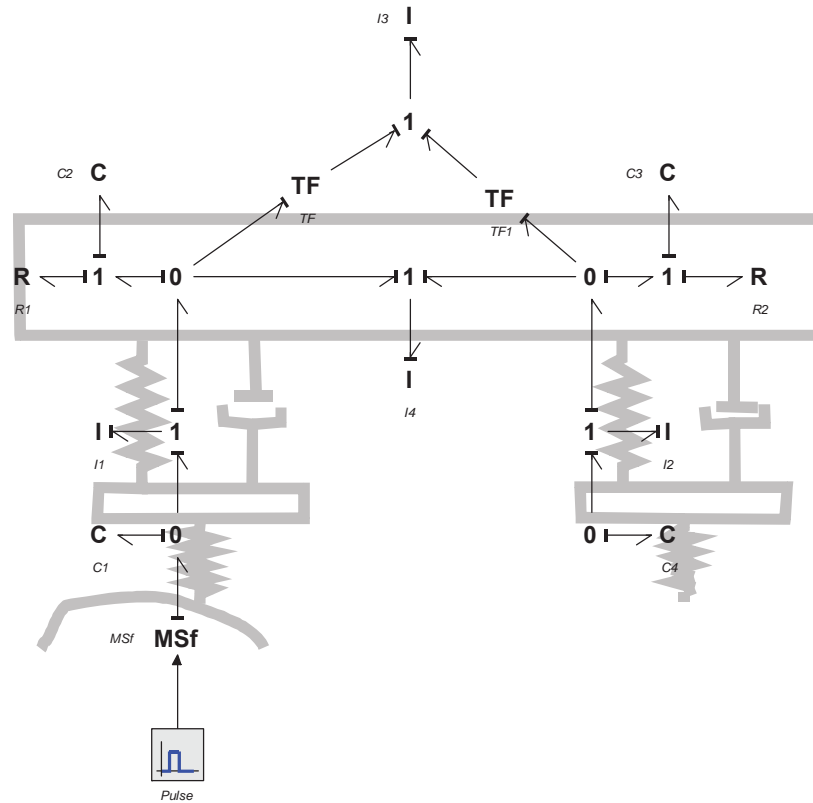


Figura 4.37: Suspensión de emdio auto pasiva

$$\text{Vectores clave } \dot{x} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_4 \\ f_7 \\ e_{11} \\ e_{15} \\ f_{18} \\ e_{21} \\ f_{23} \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_4 \\ e_7 \\ f_{11} \\ f_{15} \\ e_{18} \\ f_{21} \\ e_{23} \end{bmatrix}, D_{in} = \begin{bmatrix} f_6 \\ f_{19} \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} e_6 \\ e_{19} \end{bmatrix},$$

$$y = [f_{11}], u = [f_1]$$

La entrada f_{11} es la inclinación del auto y f_1 es una perturbación en el camino.

Donde calculando la matriz de estructura unión tenemos, la matriz definida por la ecuación

(4.64) ,

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_4 \\ f_7 \\ e_{11} \\ e_{15} \\ f_{18} \\ e_{21} \\ f_{23} \\ f_6 \\ f_{19} \\ f_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_4 \\ e_7 \\ f_{11} \\ f_{15} \\ e_{18} \\ f_{21} \\ e_{23} \\ e_6 \\ e_{19} \\ f_1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Realizando el procedimiento descrito en la sección 4.3 obtenemos la representación en espacios de estados descrita a continuación por la ecuación (4.65).

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{C_2} & \frac{R_1}{L_3} & \frac{R_1}{L_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1}{L_1} & \frac{1}{C_2} & -\left(\frac{R_1+R_2}{L_3}\right) & -\left(\frac{R_1-R_2}{L_4}\right) & -\frac{1}{C_3} & -\frac{R_2}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{R_1}{L_1} & \frac{1}{C_2} & -\left(\frac{R_1-R_2}{L_3}\right) & -\left(\frac{R_1+R_2}{L_4}\right) & \frac{1}{C_3} & \frac{R_2}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & \frac{1}{L_4} & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_2}{L_3} & \frac{R_2}{L_4} & -\frac{1}{C_3} & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{C_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_p^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Verificando el criterio de invertibilidad en Bond Graph vemos que si existe una trayectoria causal posible entre la entrada y la salida por lo que el sistema es invertible según el criterio descrito en la sección 4.2, de acuerdo al procedimiento descrito en la sección 4.3, se procede a obtener las ganancias de los lazos de longitud 1 entre los elementos.

$$\left[\begin{array}{c|cccccccc}
 GL_1(x_i \longrightarrow , x_j \downarrow) & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \hline
 1 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & \frac{1}{C_1} & -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{C_2} & \frac{R_1}{L_3} & \frac{R_1}{L_4} & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_4} & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 0 & \frac{R_1}{L_1} & \frac{1}{C_2} & -\left(\frac{R_1+R_2}{L_3}\right) & -\left(\frac{R_1-R_2}{L_4}\right) & -\frac{1}{C_3} & -\frac{R_2}{L_2} & 0 \\
 5 & 0 & \frac{R_1}{L_1} & \frac{1}{C_2} & -\left(\frac{R_1-R_2}{L_3}\right) & -\left(\frac{R_1+R_2}{L_4}\right) & \frac{1}{C_3} & \frac{R_2}{L_2} & 0 \\
 6 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & \frac{1}{L_4} & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\
 7 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_2}{L_3} & \frac{R_2}{L_4} & -\frac{1}{C_3} & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{C_4} \\
 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0
 \end{array} \right]$$

Se calculan las ganancias de longitud 0 entre la entrada y los estados,

$$\left[\begin{array}{cccc}
 GL_0(u, x_1) = 1 & GL_0(u, x_2) = 0 & GL_0(u, x_3) = 0 & GL_0(u, x_4) = 0 \\
 GL_0(u, x_5) = 0 & GL_0(u, x_6) = 0 & GL_0(u, x_7) = 0 & GL_0(u, x_8) = 0
 \end{array} \right]$$

Finalmente, se calculan las ganancias de las trayectorias de longitud 1 entre los estados y la salida

$$\left[\begin{array}{cccc}
 GL_1(x_1, y) = 0 & GL_1(x_2, y) = 0 & GL_1(x_3, y) = 0 & GL_1(x_4, y) = \frac{1}{L_3} \\
 GL_1(x_5, y) = 0 & GL_1(x_6, y) = 0 & GL_1(x_7, y) = 0 & GL_1(x_8, y) = 0
 \end{array} \right]$$

La trayectoria más corta que va desde la entrada $u = f_1$ hasta la salida $y = f_{11}$.

En primera instancia se calculan las ganancias de las trayectorias de orden 1 entre los estados. Ganancias de las trayectorias causales de orden 4 desde los estados hasta la salida.

De $f_2 - e_2 - e_3 - e_4 - f_4 - f_5 - f_8 - f_7 - e_7 - e_8 - e_9 - e_{10} - e_{11} - f_{11}$ donde la ganancia obtenida es :

$$GL_4(x_1, y) = \frac{a}{C_1 L_1 C_2 L_3}$$

De la misma manera se siguen las trayectorias que van desde cada uno de los otros estados hasta la salida, las cuales tienen las siguientes ganancias

$$GL_4(x_2, y) = -\frac{a R_1}{C_1 L_1^2 L_3}$$

$$\begin{aligned}
 GL_4(x_3, y) &= -\frac{a}{C_2^2 L_1 L_3} \\
 GL_4(x_4, y) &= \frac{a^2 R_1}{C_2 L_1 L_3^2} \\
 GL_4(x_5, y) &= -\frac{a R_2}{C_3 L_2 L_3 L_4} \\
 GL_4(x_6, y) &= \frac{a}{C_3^2 L_2 L_3} \\
 GL_4(x_7, y) &= \frac{a R_2}{C_4 L_3 L_2^2} \\
 GL_4(x_8, y) &= \frac{a}{C_3 C_4 L_1 L_2 L_3}
 \end{aligned}$$

Usando la metodología descrita en la sección 4.3 se obtienen los estados así como la salida del sistema inverso esta definido en la ecuación (4.59).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\frac{x_1}{R_1 C_2} + \frac{C_1}{R_1 C_2^2} x_3 - \frac{C_1}{C_2 L_3} x_4 + \frac{C_1 L_1 R_2}{C_3 L_2 L_4 R_1} x_5 + \frac{C_1 L_1}{C_3^2 L_2 R_1} x_6 - \frac{C_1 L_1 R_2}{C_4 L_2^2 R_1} x_7 - \frac{C_1 L_1}{C_3 C_4 L_2 R_1} x_8 + \frac{C_1 L_1 L_3}{R_1} y^3 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{C_1} x_1 - \frac{R_1}{L_1} x_2 - \frac{1}{C_2} x_3 - \frac{R_1}{L_3} x_4 + \frac{R_1}{L_4} x_5 \\
 \dot{x}_3 &= \frac{1}{L_1} x_2 - \frac{1}{L_3} x_4 - \frac{1}{L_4} x_5 \\
 \dot{x}_4 &= \frac{R_1}{L_1} x_2 + \frac{1}{C_2} x_3 - \left(\frac{R_1 + R_2}{L_3} \right) x_4 - \left(\frac{R_1 - R_2}{L_4} \right) x_5 - \frac{1}{C_3} x_6 - \frac{R_2}{L_2} x_7 \\
 \dot{x}_5 &= \frac{R_1}{L_1} x_2 + \frac{1}{C_2} x_3 - \left(\frac{R_1 - R_2}{L_3} \right) x_4 - \left(\frac{R_1 + R_2}{L_4} \right) x_5 + \frac{1}{C_3} x_6 + \frac{R_2}{L_2} x_7 \\
 \dot{x}_6 &= \frac{1}{L_3} x_4 - \frac{1}{L_4} x_5 + \frac{1}{L_4} x_7 \\
 \dot{x}_7 &= -\frac{R_2}{L_3} x_4 + \frac{R_2}{L_4} x_5 - \frac{1}{C_3} x_6 - \frac{R_2}{L_2} x_7 + \frac{1}{C_4} x_8 \\
 \dot{x}_8 &= -\frac{1}{L_2} x_7
 \end{aligned}
 \tag{4.59}$$

Es importante resaltar que la matriz Bi se encuentra definida por la componente dependiente de la tercer derivada de la salida del sistema original que se haya en el estado x_1 . Así mismo se describe la u reconstruida usando la metodología descrita en la ecuación (4.66):

$$u = -\frac{1}{C_2 R_1} x_1 + \frac{1}{L_1} x_2 + \frac{C_1}{R_1 C_2^2} x_3 - \frac{C_1}{C_2 L_3} x_4 + \frac{C_1 L_1 R_2}{C_3 L_2 L_4 R_1} x_5 - \frac{C_1 L_1}{C_3^2 L_2 R_1} x_6 - \frac{C_1 L_1 R_2}{C_4 L_2^2 R_1} x_7 - \frac{C_1 L_1}{C_3 C_4 L_2} x_8 + \frac{C_1 L_1 L_3}{R_1} y^3
 \tag{4.60}$$

En la Figura 4.39 se aprecia el modelo en Bond Graph que fue utilizado en 20-Sim, se puede ver que fue necesaria la implementación de filtros después de los derivadores ya que la salida del sistema es una señal con oscilaciones de alta frecuencia (ruido) misma que es amplificada por los derivadores.

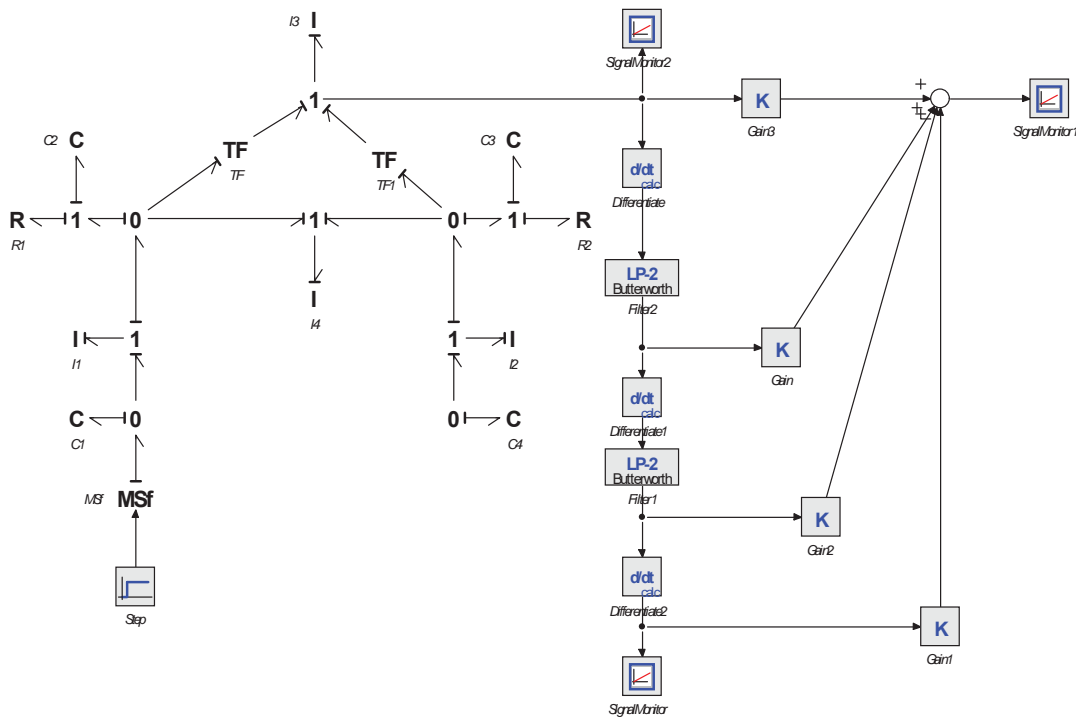


Figura 4.38: Modelo inverso utilizado para la simulación en 20-sim

Como se puede apreciar en la simulación que se muestra en la Figura 4.40 existe una parte en la cual hay un sobredisparo con respecto al que debería ser el comportamiento ideal, esto se debe a que es la representación de la parte dinámica del sistema. Se aprecia también que al pasar 2 segundos que es el tiempo aproximado de establecimiento del sistema inverso, este llega al valor nominal que fue introducido como entrada al sistema original.

4.5.2 Robot Puma de 2 eslabones

El cálculo de trayectorias es una necesidad en la robótica para poder predecir el comportamiento de determinado manipulador ante determinada entrada, lo que es en si mismo el problema básico del control moderno. Es cierto que los manipuladores son sistemas no lineales y la técnica de Bond Graph está aun acotada a algunas clases de sistemas no lineales como en este caso a los sistemas que contienen multiplicación de estados. En la Figura 4.41 se muestra el modelo linealizado obtenido en el Apéndice 2.

Se considera el robot manipulador de dos eslabones linealizado en el Apéndice 2 mostrado en la Figura A-2. En la cual se aprecia el modelo correspondiente en Bond Graph.

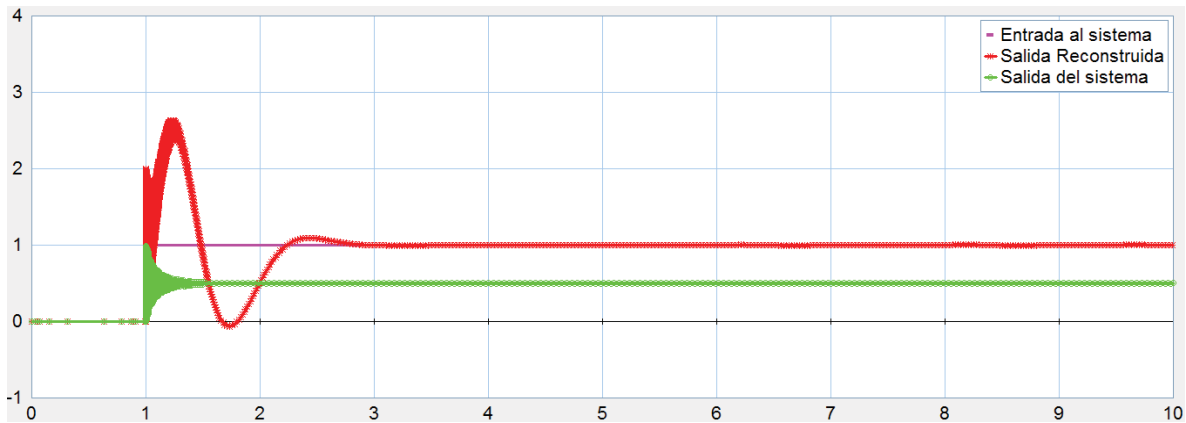


Figura 4.39: Respuesta a una entrada escalón unitario de la suspensión pasiva

En una primera instancia se verifica el criterio de invertibilidad descrito en [Nwompo, 1996²], y se corrobora que si existe un conjunto de m -trayectorias causales desacopladas por lo que el criterio de invertibilidad permite definir que es un sistema invertible usando el principio de bicausalidad utilizado en la técnica de Bond Graph mostrado en la Figura 4.42. Por lo que se procede a resolver el problema con el procedimiento usado en [Nwompo, 1996²] y [Nwompo, 2001]. Donde se muestra que la representación del sistema inverso puede ser modelada de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + G(p)y(t) \\ u(t) &= Hz(t) + J(p)y(t) \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde se especifica que las matrices F y H son matrices constantes mientras que $G(p)$ y $J(p)$ son matrices polinomiales en función del operador diferencial $p \triangleq d/dt$ y z es el vector de estados generalizado r -dimensional (r será $r \leq n$). Para la obtención de dichas matrices es necesario analizar las trayectorias del sistema linealizado.

Las trayectorias que van desde $y_2 \rightarrow u_2$

Trayectoria	Ganancia
$f_2 - f_4 - f_6 - e_6 - e_4 - e_1$	$R_2 y$
$f_2 - f_3 - e_3 - e_1$	$\frac{1}{C_2}$
$f_2 - f_4 - f_5 - f_8 - e_8 - e_5 - e_4 - e_1$	I_z
$f_2 - f_2' - e_2' - e_1$	I_2

trayectorias que van desde $y_1 \rightarrow u_1$

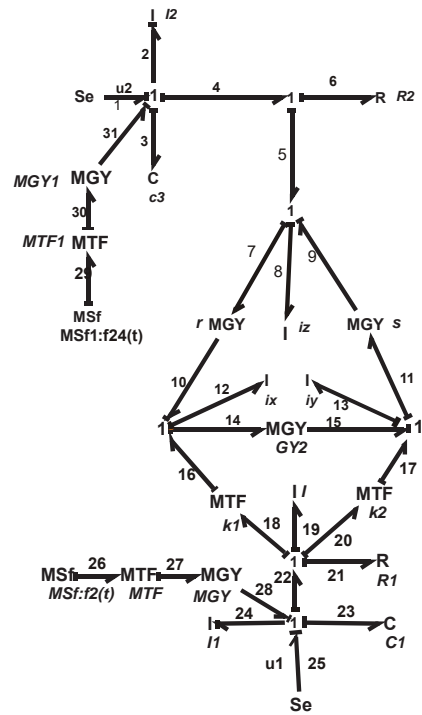


Figura 4.40: Modelo linealizado del manipulador de dos eslabones

Trayectoria	Ganancia
$f_{23} - f_{22} - f_{21} - e_{21} - e_{22} - e_{25}$	$R_1 y$
$f_{23} - f_{24} - e_{24} - e_{25}$	$\frac{1}{C_1}$
$f_{23} - f_{22} - f_{19} - e_{19} - e_{22} - e_{25}$	I
$f_{23} - f_{23}' - e_{23}' - e_{25}$	I_1
trayectorias que van desde $y_1 \rightarrow u_2$	
Trayectoria	Ganancia
$f_{23} - f_{22} - f_{20} - f_{17} - f_{11} - e_9 - e_5 - e_4 - e_1$	$k_2 s$
$f_{23} - f_{22} - f_{18} - f_{16} - f_{10} - e_7 - e_5 - e_4 - e_1$	$k_1 r$
trayectorias que van desde $y_2 \rightarrow u_1$	
Trayectoria	Ganancia
$f_2 - f_4 - f_5 - f_9 - e_{11} - e_{17} - e_{20} - e_{22} - e_{25}$	$-k_2 s$
$f_{23} - f_{22} - f_{18} - f_{16} - f_{10} - e_7 - e_5 - e_4 - e_1$	$k_1 r$

Una vez analizando estas trayectorias es posible definir el sistema inverso de la forma descrita en la ecuación (4.69). Considerando la ecuación (4.68):

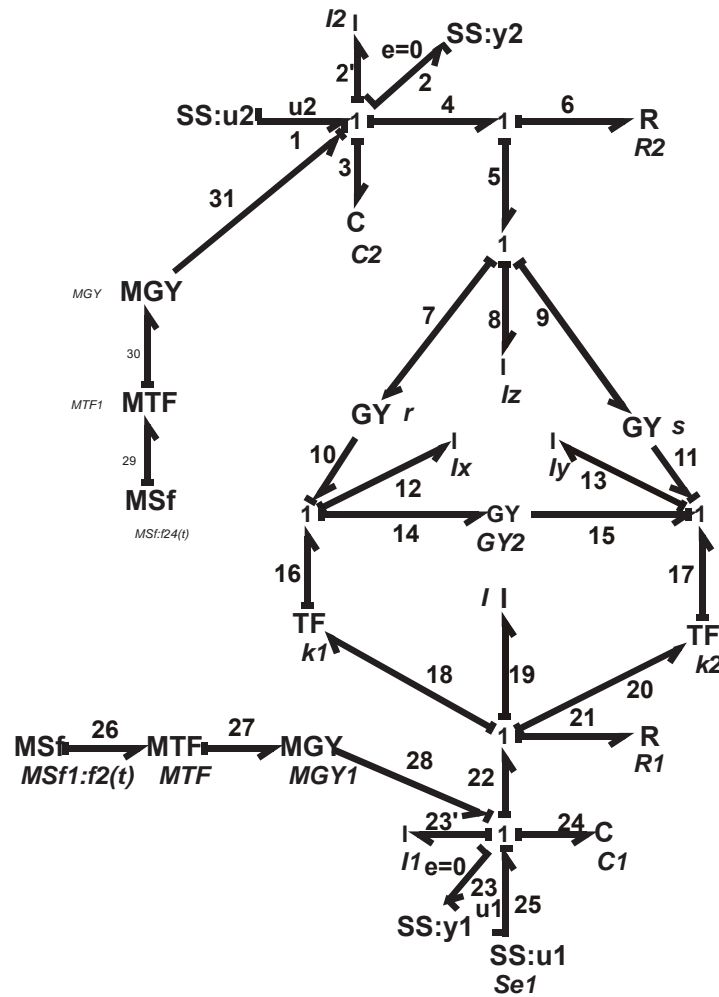


Figura 4.41: Bond Graph bicausal

$$z^T = [qc_1 \quad qc_2] \tag{4.62}$$

Entonces tenemos:

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\frac{1}{C_1} + R_1 + I) + I_1 p & k_1 r + k_2 s \\ k_1 r - k_2 s & (\frac{1}{C_2} + R_2 + I_z) + I_2 p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Una vez que fue obtenida su representación se comprueba en simulación es el software 20-sim, el modelo de simulación se muestra en la Figura 4.43.

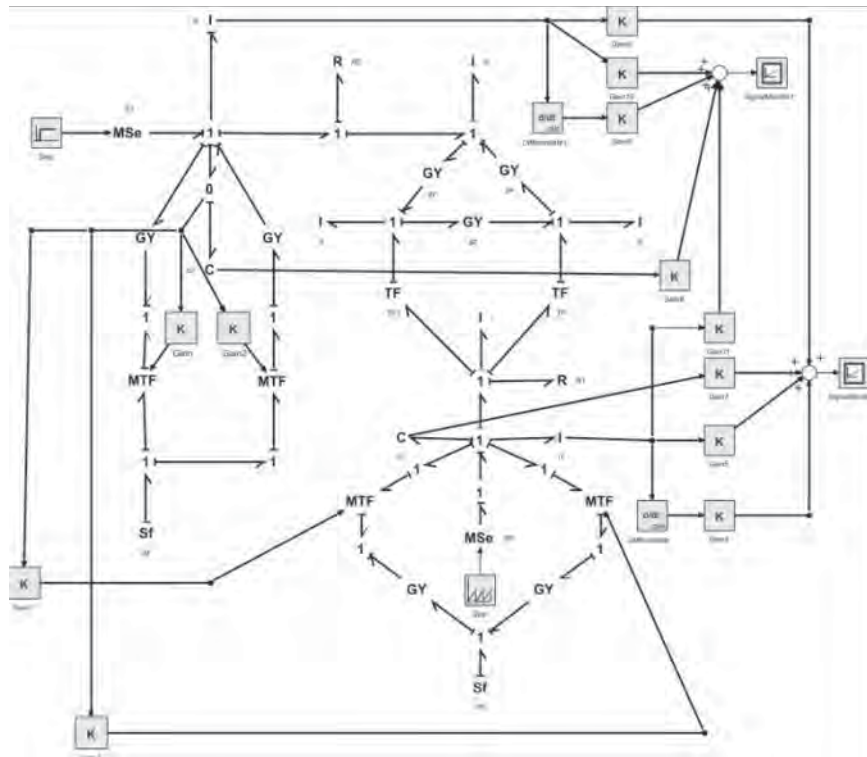


Figura 4.42: Modelo de simulación del sistema inverso del robot manipulador de dos eslaboens

Para los valores que han determinado las ganancias del sistema inverso se usaron los mismos valores que en [Madrigal, 2010]. A continuación se muestran 3 simulaciones diferentes donde se aprecia que el sistema inverso es capaz de seguir con la trayectoria definida, aunque al principio es natural que se presente cierta variación dada la naturaleza dinámica inherente del sistema.

En el primer caso se implementaron una señal pulso y una señal escalón, el comportamiento del sistema es satisfactorio una vez que el periodo dinámico del sistema a transcurrido ya que se puede observar en la Figura 4.44 que si llega a los valores nominales de las señales a pesar que existen en ambos casos pendientes pronunciadas que pueden causar problemas a los derivadores.

En el segundo caso de estudio (Figura 4.45) las pendientes fueron suavizadas en las señales y se ve que responde de manera satisfactoria el sistema inverso.

En la figura 4.46 se propone una entrada diente de sierra la cuál el sistema tambien es capaz de reconstruir por lo que se ve que el modelo es válido para una amplia variedad de señales.

En el caso de algunos sistemas inversos se pueden considerar solo algunos tipos de entrada definidas, por lo que respecta al sistema inverso definido por la ecuación (4.69), es posible apreciar

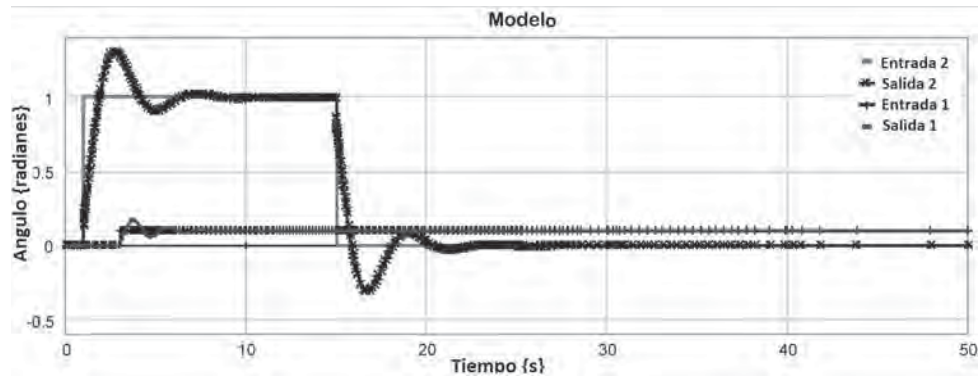


Figura 4.43: Respuesta del robot manipulador en cascada con su inverso (primer caso de estudio).

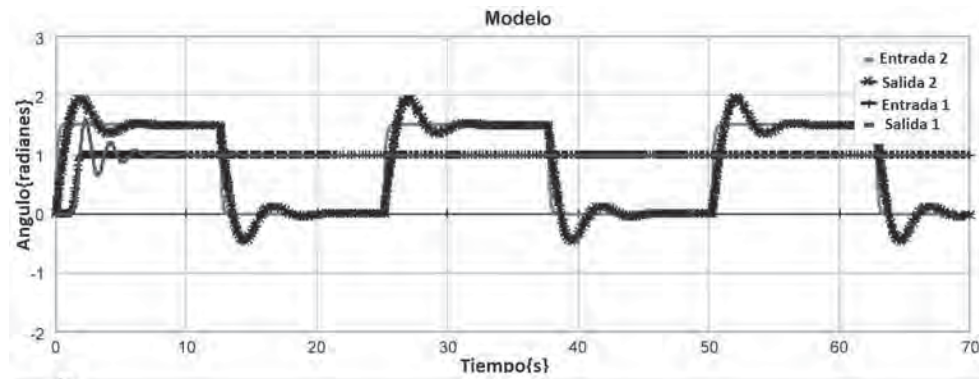


Figura 4.44: Respuesta del robot manipulador en cascada con su inverso (segundo caso de estudio).

en las Figuras 4.44, 4.45 y 4.46. El sistema responde de manera satisfactoria a una amplia variedad de entradas, más aún considerando que es el sistema reducido inverso que es el que se obtuvo de manera directa al implementar en el bond graph la bicausalidad.

4.6 Otras aplicaciones de la bicausalidad

Es cierto que el enfoque que se le ha dado a la bicausalidad va más allá de la inversión de sistemas aunque en esta tesis solamente se le dio esa aplicación sirve para otras cosas entre las que se pueden mencionar:

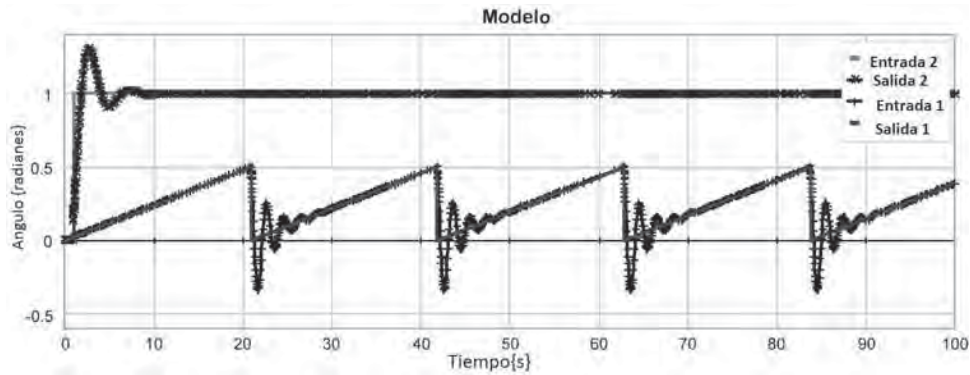


Figura 4.45: Respuesta del robot manipulador en cascada con su inverso (tercer caso de estudio).

4.6.1 Estimación de estados

La estimación de estados ha sido ya considerada en el contexto de Bond Graph por Karnopp [Karnopp 1979]. En ese artículo, un observador es derivado por la estimación de estados, en ese artículo es deducido del algoritmo de tiempo recursivo del sistema desde las mediciones de entrada-salida, es importante resaltar que un enfoque distinto es abordado aquí: Pueden ser estimados los estados iniciales del sistema, así como los estados futuros), ser deducidos de las mediciones de entrada-salida.

La idea básica es que los estados iniciales son explícitamente representados en la sección de las relaciones constitutivas de los elementos. Es importante resaltar que es importante seleccionar de manera adecuada los elementos SS que han de ser usados para las mediciones tanto de entrada como de salida en el sistema.

4.6.2 Estimación de parámetros

La estimación de parámetros ha sido considerada desde el punto del vista de Bond Graph en [Gawthrop, 1991] y [Gawthrop, 1992], en esos artículos, los bond graphs basados en los algoritmos recursivos ayudan a deducir de manera asintótica los parámetros desconocidos de un sistema a partir de mediciones de entrada-salida. Este tipo de estimación parte de la primicia; de que los parámetros desconocidos pueden ser deducidos directamente de mediciones de entradas y salidas.

La idea básica es la misma que la expuesta en la sección anterior, excepto que en el bond graph resultante podrían ambas variables de energía (esfuerzo y flujo) ser impuestas a el componente desconocido.

4.7 Conclusiones

En este capítulo se pueden ver los avances que se han dio realizando en la inversión de sistemas a partir del modelo físico, lo cual es una ventaja de la inversión de sistemas realizados en bong graph ya que se puede partir del modelo sin tener que obtener la representación de espacios de estado. Aún mas ventajosa resulta la característica de la bicausalidad que nos permite de manera directa la obtención del modelo inverso reducido sin tener que obtener el sistema inverso de orden commpleto.

Tambien hubo varios problemas con la simulación de los sistemas inversos, estos fueron causados por los derivadores contenidos en los paquetes de simulación, por fortuna en el paquete de simulación de 20-sim contiene un derivador que minimiza la amplificación del ruido con lo que las respuestas son más fieles a lo que uno esperaría. Mientras tanto en Matlab como ya se mencionó en [Martínez, 2012], propone varias soluciones para esta problemática.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos futuros

5.1 Conclusiones

Durante la presente tesis se ha mostrado la obtención de los modelos inversos de sistemas con dos diferentes formas en la metodología de Bond Graph, contrastando a su vez ambos cálculos con la obtención del mismo modelo a través de las técnicas tradicionales. Si bien es cierto que la metodología tradicional permite el cálculo de los mismos sistemas es claro que la metodología utilizada a lo largo de esta tesis muestra varias ventajas en contraste con las técnicas convencionales entre las que destacan:

- Criterios de Invertibilidad simplificados y accesibles.
- Obtención del modelo inverso reducido de manera directa (usando la bicausalidad).
- Obtención del modelo inverso simbólico.

Aunque a su vez es correcto mencionar que la metodología aún tiene ciertas limitantes en la obtención de modelos de sistemas no lineales, esto es comprensible debido al tiempo relativamente corto del desarrollo de la técnica que poco a poco va llenando los vacíos y se va generalizando a pasos agigantados.

En lo que respecta al modelado de una clase de sistemas no lineales como es el caso del robot manipulador de dos eslabones la técnica permite la reconstrucción de trayectorias al obtener el modelo del sistema inverso de este sistema, esta cuestión básicamente responde a una problemática bastante común en la robótica, por lo que se puede decir que la técnica de bicausalidad exclusiva

de la metodología de Bond Graph es una herramienta que facilita los cálculos del sistema inverso ya que nos entrega en un solo paso la representación reducida del mismo. También se aporta una nueva forma de simulación de sistemas inversos en 20-sim usando derivadores y no la bicausalidad como normalmente se realiza.

Los derivadores son una decisión crucial para la buena reconstrucción de las señales, en el paquete de simulación 20-sim viene un derivador con estas características, por lo que no fue necesario la utilización de algun otro, en [Martínez, 2012], se resuelve esta problemática para el paquete de simulación Matlab. Normalmente se verifica la estabilidad del sistema directo para no tener estos problemas con el sistema inverso sin embargo en algunos casos se observo que la estabilidad del sistema directo no garantiza la estabilidad del modelo inverso.

Las condiciones iniciales se consideran que son conocidas a lo largo de esta tesis, pero hay que tener mucho cuidado cuando estas son desconocidas ya que pueden repercutir con la buena reconstrucción de la señal.

5.2 Trabajos Futuros

Es cierto que la dificultad de los cálculos puede ser reducida aún más al calcular el sistema inverso a partir de la estructura unión, por lo que se propone la obtención de la estructura unión que defina las submatrices del sistema inverso, que a su vez permita en base a cálculos algebraicos con las matrices la obtención directa del modelo inverso.

Esta posible estructura unión sea aplicable para las dos formas mostradas en esta tesis, a partir de trayectorias causales y usando la bicausalidad lo cual simplificaría el cálculo de los mismos. También falta incursionar en el modelo inverso de sistemas de lazo cerrado, los efectos de las condiciones iniciales en el modelo inverso, así como la influencia de la estabilidad del modelo inverso.

Por su parte en lo que a automatización del proceso de cálculo de ganancias de las trayectorias, sería un gran avance desarrollar un software que realice los cálculos de forma automática y simplifique el análisis de sistemas de dimensiones mayores.

Bibliografía

- [1] [**Borutzky, 2009**] Wolfrang Borutzky, "Bond Graph modelling of Engineering Systems", Springer 2009.
- [2] [**Nwompo, 1996**] R. Fotsu Ngwompo, S. Scavarda and D. Thomasset., Inversion of linear time-invariant SISO systems Modelled by Bond Graph, in the Journal of Franklin Institute, Vol.333(B), No. 2, pp 157-174, 1996.
- [3] [**Sueur, 1995**] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy., "Bond-graph approach for structural análisis of MIMO linear systems" 1995
- [4] [**Gawthrop, 1995**] P.J. Gawthrop., Bicausal Bond Graphs, in Proceedings of teh 1995 Int. Conference on Bond Graph Modelling and Simulation: ICBGM'95, pp 83-88, 1995.
- [5] [**Nwompo, 1996**] R.Fotsu Nwompo, S. Scavarda and D. Thomasset, "Structural Invertibility And Minimal Inversion of Multivariable Linear systems- a Bond Graph Approach. 1996.
- [6] [**Silverman, 1968**] Silverman, L.M., "Properties and applications of inverse systems", IEEE transactions Automatic Control (short papers), Vol. AC-13, pp.436-437, August 1968.
- [7] [**Silverman, 1969**] Leonard M. Silverman, Inversion of mutivariable Linear Systems, IEEE Transactions on automatic control, Vol. AC-14, No. 3 June 1969.
- [8] [**Sain, 1969**] Michael K. Sain, James L Massey, Invertibility of Linear Time-Invariant Dynamical Systems, IEEE Transactions on automatic control, Vol. AC-14, No. 2 April 1969.
- [9] [**Panda, 1970**] S.P.Panda, Comments on "Inversion of Multivariable Linear Systems", February 1970.

-
- [10] [**Emre, 1976**] Erol Emre, Leonard M silverman, Minima; Dynamic Inverses for Linear Systems with Arbitrary initial states, IEEE Transactions on automatic Control , October 1976.
- [11] [**Willsky, 1974**] Alan S. Willsky, On the invertibility of Linear Systems, IEEE Transactions On Automatic Control, June 1974.
- [12] [**Vu, 2003**] L. Vu and D. Liberzon, On the invertibility of Switched Linear Systems, Proceedings of the 45th IEEE Conference on Desicion &Control.
- [13] [**Silverman, 1968²**] L.M. Silverman, Properties and Application of Inverse Systems , IEEE Transactions on automatic Control, August 1968.
- [14] [**Borutzki, 2011**]Bond Graph Modelling of Engineering Systems, Theory, applications and Software Support, Ed. Springer.2011
- [15] [**Paynter,1961**] H. Paynter, "Analysis and Desing of engineering Systems", MIT Press , Cambridge, mass , 1961.
- [16] [**Karnopp, 1975**] D. Karnopp, R Rosenbereg, " Systems Dynamics: A unified Approach", Wiley , Johms & Sons, 1975.
- [17] [**Wellstead, 1979**] P.E. Wellstead, "Physical System Modelling", Academic Press, 1979.
- [18] [**Gawthrop, 1995**] P.Gawthrop, Physical Model Based Control: A Bond Graph Approach", Journal of the Franklin Institute, Vol. 332B, No. 3 , pp.285-305, 1995.
- [19] [**González, 2011**] G. Gonzalez , "Modelado de sistemas en el dominio fisico", Notas del curso,DEPFIE-UMNSH. Marzo 2011.
- [20] [**Sueur,1991**] C.Sueur G., Dauphin-Tanguy., "Bond Graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems", Journal of the Franklin Institute, Vol, 328, No. 1, 1991.
- [21] [**Sueur, 1989**] C.Sueur G., Dauphin-Tanguy., A. Rahmani., " Structural Controlability and Observability of Linear Systems Represented by Bond Graphs", Journal of The Franklin Institute, Vol.326, No. 6, pp.869-883, 1989.
- [22] [**Gandaneraga, 2006**]G. Gandanegara, X. Roboam and B.Sareni, "Storage Device Sizing for a Hybrid Railway Traction System by Means of Bicausal Bond Graph", Proceedings of The

-
- Intitution of Mechanical Engineers, part I: Journal of Systems and Control engineering 2006, pp. 220-226.
- [23] [**Sueur, 2003**] C. Sueur, G Dauphin- Tanguy, "Bond Graph Modelling of Flexible Robots: The residual Flexibility", Journal of the Franklin Intitute.2003.
- [24] [**Mezghanhi, 2008**]D. Mezghanhi, R. Andoulsi, A. Mami, G. Dauphin-Tanguy., "Bond Graph Modelling of a photovoltaic systems feeding an induction motor-pump". Aavailable online in www.elsevier.com/locate/simpat
- [25] [**Breedveld, 2010**] P.C. Breedveld, Holten, "Encyclopedia of Life Support Systems", 2010.
- [26] [**Karnopp, 2000**] D. C. Karnopp, D. L. Margolis, R. C. Rosenberg, "Systems dynamics, Modelling and simulation of Mechatronics Systems", 3rd . Edition, January 2000.
- [27] [**Gawthrop, 1992**] P.J. Gawthrop , J Jezek, R. W. Jones and S. A. Mackenzie. Idetification of partially-known systems. *Automatia*, 28(4):831-836, 1992.
- [28] [**Gawthrop, 1991**] P.J.Gawthrop and N.A. Marrison, "Fault detection. location & identification in dynamic systems", In proceedings of de European Control Conference ECC91, volume 2, pages 1911-1917, Grenoble, 1991.
- [29] [**Nwompo, 2001**] R.Fotsu Nwompo, S. Scavarda and D. Thomasset, "Physical model based inversion in control systems desing using bond graph representation Part1. Theory", In Proceedings of the Mechanical Engineers, part 1: Journal of Systems and Control Engeenering 2001 215:95.
- [30] [**González, 2010**] Gilberto González A, Jorge Madrigal, "Steady State of Passive and Active Suspensions in the Physical Domain", World academy of Science, Engineering and Tecnology 2010.
- [31] [**Nwompo, 1999¹**] R.F. Nwompo, S. Scavarda, "Dimensioning problems in system design using bicausal bond graphs", 1 May 1999.
- [32] [**Nwompo 1999²**] Roger F. Nwompo, Peter J. Gawthrop. "Bond Graph based simulation of non-linear inverse systems using physical performance specifications", Journal of The Franlin Institute pages 1225-1247, 1999.

- [33] [**Pichardo, 2003**] César Pichardo Almanza, Ahmed Rahamani, Geneviève Dauphin Tanguy, Marisol Delgado, "using the bicausality concept to build reduced order observer in linear time invariant systems modelled by Bond Graph".
- [34] [**Gandaneraga, 2004**] G. Gandanegara, X. Robiam, B. Sareni, "Model inversion of electrical engineering systems from bicausal bond graphs", LEEI UMR INPT-ENSEEIH/CNRS No. 5828, 2004.
- [35] [**González, 2004**] González Avalos Gilberto, R. Galindo, "A Linearization Procedure for a class of Non linear Systems Based on Bond Graph", 2004
- [36] [**Li, 2010**] Xiaoning Li, Xumei Mao, and Weigan Lin, "Permanent Magnet Synchronous Motor Decoupling Control Study Based on Inverse System", 2010.
- [37] [**Kalman, 1962**] Kalman R.E., Y. C. Ho. and K.S. Narendra "Controllability of Linear Dynamics Systems", in Contributions to Differential Equations, Vol. 1. New York : Willey-Interscience Publishers, Inc., 1962.
- [38] [**Ogata, 2006**] Ogata K. "Teoría de Control Moderna", Ed. Pearson / Prentice Hall. Cuarta Edición, 2006.
- [39] [**Martínez, 2012**] Rogelio Martínez Hernández. "Diagnóstico de fallas en sistemas dinámicos basados en técnicas de inversión", Tesis de Grado de Maestría, DEPFIE UMSNH. 2012

Apéndice A

Linealización de una Clase de Sistemas No Lineales

El tener un sistema con ecuaciones de estado lineales es útil como una aproximación de un sistema con ecuaciones de estado no lineales, en el cual los puntos de equilibrio estables permiten ésta linealización.

A.1 Linealización algebraica

La linealización es un procedimiento que permite aproximar un modelo no lineal, por otro que sea lineal y que cumple por lo tanto las propiedades de los sistemas lineales, en particular el principio de superposición.

Como es comprensible la aproximación no tiene una validez universal sino solamente en torno a un punto de operación elegido, por lo que la aplicación esta orientada para aquellos sistemas cuyas señales sufren pequeñas variaciones alrededor de los puntos de equilibrio.

Dada la función de una sola variable;

$$y = f(x) \tag{A.1}$$

cuyo funcionamiento esta definido por,

$$y_0 = f(x_0) \tag{A.2}$$

al desarrollar la serie de Taylor alrededor de dicho punto se obtiene:

$$y = f(x_0) + \left[\frac{df}{dx} \right]_0 (x - x_0) + \left[\frac{d^2f}{dx^2} \right] (x - x_0)^2 + \dots + \left[\frac{d^n f}{dx^n} \right] (x - x_0)^n \tag{A.3}$$

si sólo se consideran los dos primeros términos del desarrollo se tiene:

$$y \approx f(x_0) + \left[\frac{df}{dx} \right]_0 (x - x_0) \quad (\text{A.4})$$

que a su vez cumple la ecuación de equilibrio $y_0 = f(x_0)$, que se transforma en:

$$y - y_0 \approx \left[\frac{df}{dx} \right]_0 (x - x_0) \quad (\text{A.5})$$

es decir,

$$\Delta y \approx K \Delta x \quad (\text{A.6})$$

donde K es la derivada de la función con respecto a la variable particularizada para el punto de funcionamiento determinado. En la Figura A.1 se observa la interpretación gráfica de la linealización que consiste en llevar los ejes al punto de funcionamiento, sustituir la función y la variable por sus incrementos alrededor de dicho punto, y sustituir la función por su tangente en dicho punto.

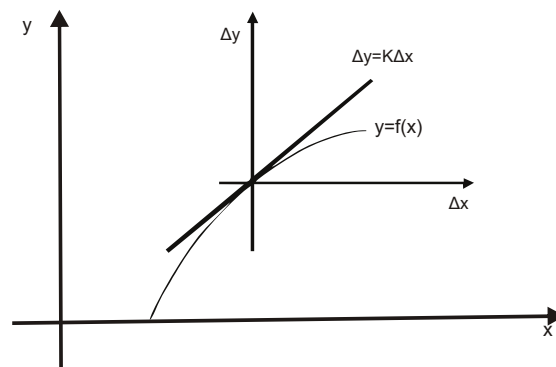


Figura A.1: Representación gráfica del sistema linealizado.

De la Figura A.1 se deducen fácilmente las consecuencias más importantes de la linealización:

- El valor de la constante (derivada) depende del punto de funcionamiento elegido, y, por lo tanto, el modelo linealizado depende también de dicho punto.
- La aproximación entre la curva original y la recta es más exacta cuanto más cerca estemos del punto elegido, o, lo que es lo mismo, la linealización es válida en un entorno del punto de funcionamiento.

- Una vez linealizado el modelo, las variables originales se sustituyen por las variables incrementadas respecto al punto de operación elegido.

Para el caso mas general:

En el caso de que la función a linealizar dependa de n variables, bastará para desarrollar en serie sustituir las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables. Dada $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, que cumple $y_0 = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$

Desarrollando en serie y eliminando los términos de segundo orden, se obtiene:

$$y \approx f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \left[\frac{df}{dx_1} \right] (x_1 - x_{10}) + \frac{1}{2!} \left[\frac{df}{dx_2} \right] (x_2 - x_{20}) + \dots + \frac{1}{n!} \left[\frac{df}{dx_n} \right] (x_n - x_{n0}) \quad (\text{A.7})$$

es decir:

$$\Delta y \approx K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2 + \dots + K_n \Delta x_n \quad (\text{A.8})$$

que es la una ecuación que pasa por el origen.

En la siguiente sección se presenta un esquema para realizar la linealización de una clase de sistemas no lineales en el dominio físico.

A.2 Linealización por Bond Graph

La información de los esfuerzos, flujos, las relaciones constitutivas de los elementos, los lazos causales y las trayectorias causales son información gráfica de un bond graph que puede ser utilizada para diversos propósitos de análisis de los sistemas. La identificación de no linealidades es posible, así se presenta una técnica gráfica directa para obtener el bond graph linealizado de una clase de sistemas no lineales.

Considérese la linealización por Bond Graph del sistema descrito en la ecuación A.8, en el que el se tienen productos de estados, donde la parte no lineal está formada por,

$$x_i(t) x_j(t), x_i(t) u_k(t); \quad \text{donde, } i \neq j; \quad j = 1, \dots, n, \text{ y } k = 1, \dots, p \quad (\text{A.9})$$

Considerando la estructura general de un sistema linealizado en como el mostrado en la Figura A.1 y posteriormente se da un procedimiento para obtener la linealización restringido a (A.15), utilizando la metodología de Bond Graph,

El objetivo de representar un sistema linealizado de acuerdo a la Figura A.1 es obtener relaciones simples para la estructura de unión modificada, denotada por \bar{S} . Esto permite conocer el cambio de S debido a la linealización.

Considere el esquema linealizado de la Figura A.1. La estructura unión está dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta(t) \\ D_{in}(t) \\ y_\delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^x + S_{11}^0 & S_{12} & S_{13}^x & S_{13}^0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31}^x + S_{31}^0 & S_{32} & S_{33}^x & S_{33}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) \\ D_{out}(t) \\ u_\delta(t) \\ \bar{u}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Donde los valores de S_{11}^x , S_{13}^x , S_{31}^x y S_{33}^x , son las interconexiones de los elementos que no se encuentran en la trayectoria nominal del sistema, y los valores de S_{11}^0 , S_{13}^0 , S_{31}^0 y S_{33}^0 son la trayectoria nominal; $u_\delta(t)$ es la entrada del sistema y $\bar{u}(t)$ es la entrada nominal del sistema.

La representación del sistema en variables de estado esta dada por,

$$A_{p\delta} = (S_{11}^x + S_{11}^0 + S_{12}MS_{21})F + S_{13}^1 \quad (\text{A.11})$$

$$B_\delta = S_{13}^x + S_{12}MS_{23} \quad (\text{A.12})$$

$$C_\delta = (S_{31}^x + S_{31}^0 + S_{32}MS_{21})F + S_{33}^1 \quad (\text{A.13})$$

$$D_\delta = S_{33}^x + S_{32}M_{23} \quad (\text{A.14})$$

donde,

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} \quad (\text{A.15})$$

y, S_{13}^1 y S_{33}^1 son tales que satisfacen ,

$$S_{13}^0\bar{u}(t) = S_{13}^1x_\delta(t) \quad (\text{A.16})$$

$$S_{33}^0\bar{u}(t) = S_{33}^1x_\delta(t) \quad (\text{A.17})$$

El siguiente procedimiento gráfico sirve para construir el Bond Graph linealizado a partir de un sistema físico no lineal, donde la no linealidad es debida a producto de estados.

Procedimiento A.1

1. Obtener el bond graph no lineal del sistema físico.

-
2. Identificar el producto de dos variables de estado, mediante una trayectoria causal que contenga transformador TF o un girador GY , cuyo modulo es una variable de estado de energía o coenergía.
 3. La trayectoria causal comienza a partir de una variable de estado pasando a través del TF o GY del paso 2 y termina en otra variable de estado, esta trayectoria causal debe pasar sólo una vez por cada bond.
 4. Dado que la linealización es alrededor de la trayectoria nominal $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$, el módulo de cada TF y/o GY del bond graph original del paso 1 se cambia por el valor de la trayectoria nominal de la variable de estado de coenergía respectiva.
 5. Por cada trayectoria causal, se añaden bonds con los elementos que forman parte de la misma trayectoria. Los bonds añadidos forman otra trayectoria causal que empieza con un elemento de puerto -1, el cual representa a la variable de estado del paso 2, se sustituye este elemento por una fuente de esfuerzo si el elemento de la variable de estado es un elemento -C o por una fuente de flujo si el elemento es -I. A continuación se añaden bonds de la trayectoria causal respectiva, hasta llegar a la unión que conecta a la otra variable de estado de la trayectoria causal considerada. Así mismo, tomar en cuenta lo siguiente:
 - Si existe más de una trayectoria causal para cada variable de estado, se unen el inicio de estas trayectorias y la fuente del paso 5 a una unión-1 si la fuente es de flujo, en caso contrario si la fuente es de esfuerzo se unen con una unión-0.
 - El valor de la fuente del paso 5 es el de la trayectoria nominal de la variable de estado respectiva.
 - El módulo de los TF o GY de la trayectoria causal del paso 5 es el modulo de la trayectoria causal del paso 2 del Bond Graph original de la variable de estado de coenergía.
 6. El modelo matemático que representa el Bond Graph linealizado, se obtiene utilizando las ecuaciones (A.11) a (A.14).

A.2.1 Ejemplo: Robot manipulador de dos eslabones

El modelo utilizado es un modelo ampliamente usado en los análisis en Bond Graph mismo que se muestra en la Figura A-3.

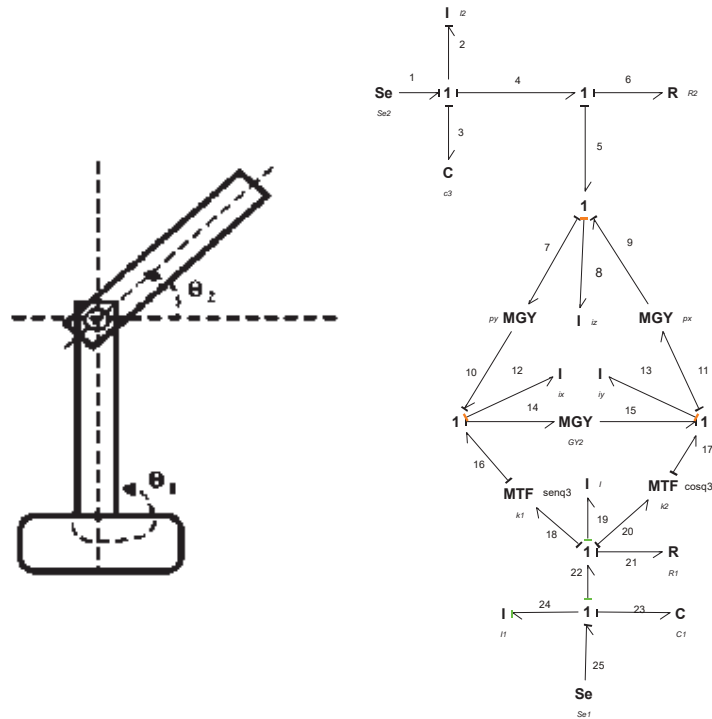


Figura A.2: Modelo del robot de dos eslabones (izquierda). Bond graph del sistema no lineal (derecha).

Los vectores del bond graph mostrado en la Figura A.2 son,

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} p_2 & p_{24} & q_3 & q_{23} \end{bmatrix}^T \\
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} e_2 & e_{24} & f_3 & f_{23} \end{bmatrix}^T \\
 z &= \begin{bmatrix} f_2 & f_{24} & e_3 & e_{23} \end{bmatrix}^T \\
 x_d &= \begin{bmatrix} p_8 & p_{12} & p_{13} & p_{19} \end{bmatrix} \\
 z_d &= \begin{bmatrix} f_8 & f_{12} & f_{13} & f_{19} \end{bmatrix} \\
 \dot{x}_d &= \begin{bmatrix} e_8 & e_{12} & e_{13} & e_{19} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_6 & f_{21} \end{bmatrix}^T$$

$$D_{out} = \begin{bmatrix} e_6 & e_{21} \end{bmatrix}^T$$

$$u = \begin{bmatrix} e_1 & e_{25} \end{bmatrix}^T$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix}; F_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I} \end{bmatrix}$$

Aplicando el procedimiento A.1 se obtiene el diagrama con los bonds descritos en el paso 5 como se muestra en la Figura A.3.

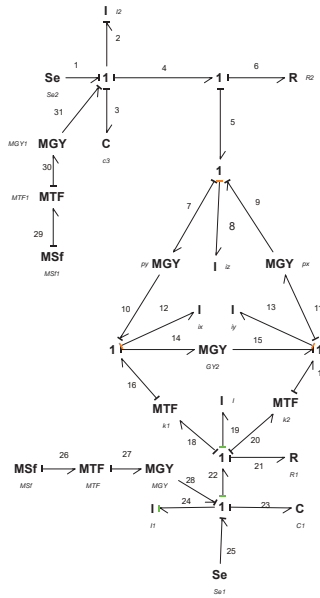


Figura A.3: Bond graph linealizado

Los vectores clave del modelo del robot manipulador de dos eslabones linealizado son,

$$\begin{aligned} x_\delta &= \begin{bmatrix} p_2 & p_{24} & q_3 & q_{23} \end{bmatrix}^T \\ \dot{x}_\delta &= \begin{bmatrix} e_2 & e_{24} & f_3 & f_{23} \end{bmatrix}^T \\ z_\delta &= \begin{bmatrix} f_2 & f_{24} & e_3 & e_{23} \end{bmatrix}^T \\ x_\delta^d &= \begin{bmatrix} p_8 & p_{12} & p_{13} & p_{19} \end{bmatrix} \\ z_\delta^d &= \begin{bmatrix} f_8 & f_{12} & f_{13} & f_{19} \end{bmatrix} \\ \dot{x}_\delta^d &= \begin{bmatrix} e_8 & e_{12} & e_{13} & e_{19} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_6 & f_{21} \end{bmatrix}^T$$

$$D_{out} = \begin{bmatrix} e_6 & e_{21} \end{bmatrix}^T$$

$$u_\delta = \begin{bmatrix} e_1 & e_{25} \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{24} & \tilde{f}_2 \end{bmatrix}^T$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

la estructura unión del modelo es,

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_{24} \\ f_3 \\ f_{23} \\ f_6 \\ f_{21} \\ f_8 \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & q_3 h_2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & q_3 h_2 & 0 & -\text{sen}\tilde{q}_3 & -\text{cos}\tilde{q}_3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}\tilde{q}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}\tilde{q}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \\ e_3 \\ e_{23} \\ e_6 \\ e_{21} \\ e_1 \\ e_{25} \\ f_{29} \\ f_{26} \\ e_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{19} \end{bmatrix}$$

donde $c_1 = \tilde{p}_y \text{sen}\tilde{q}_3 - \tilde{p}_x \text{cos}\tilde{q}_3$, $c_2 = -\tilde{p}_y \text{sen}\tilde{q}_3 + \tilde{p}_x \text{cos}\tilde{q}_3$.

Ahora es posible obtener las ecuaciones de estado de la estructura unión y utilizandolas ecuaciones de A-11 a A-14, obtenemos,

$$A_{p\delta} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{I_2} & -\tilde{h}_1 \frac{1}{L_1} & -\tilde{h}_2 f_{29} - \frac{1}{C_2} & 0 \\ \tilde{h}_1 \frac{1}{I_2} & -\frac{R_1}{L_1} & \tilde{h}_2 f_{26} & -\frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde,

$$h_1 = p_{13} \operatorname{sen} q_3 - p_{12} \cos q_3$$

$$h_2 = p_{13} \cos q_3 + p_{12} \operatorname{sen} q_3$$

$$\tilde{h}_1 = \tilde{p}_{13} \operatorname{sen} \tilde{q}_3 - \tilde{p}_{12} \cos \tilde{q}_3$$

$$\tilde{h}_2 = \tilde{p}_{13} \operatorname{sen} \tilde{q}_3 + \tilde{p}_{12} \cos \tilde{q}_3$$

Apéndice B

Prueba de la ecuación 4.29

De la ecuación (4.28)

$$y = \sum_{k=1}^n G_1(x_k, y) x_k \quad (\text{B.1})$$

la primer derivada de la salida y es:

$$\dot{y} = \sum_{k=1}^n G_1(\dot{x}_k, y) \dot{x}_k \quad (\text{B.2})$$

Usando la ecuaciones (4.26) y (4.27) se obtiene la ecuación,

$$\dot{y} = \sum_{k=1}^n G_1(x_k, y) \left(\sum_{l=1}^n G_1(\dot{x}_l, \dot{x}_k) x_l + G_0(u, \dot{x}_k) u \right) \quad (\text{B.3})$$

entonces

$$\dot{y} = \sum_{k=1}^n G_1(\dot{x}_k, y) \left(\sum_{l=1}^n G_1(\dot{x}_l, \dot{x}_k) x_l + \sum_{k=1}^n G_1(x_k, y) G_0(u, \dot{x}_k) u \right) \quad (\text{B.4})$$

y con las propiedades distributivas y conmutativas.

$$\dot{y} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n G_1(\dot{x}_k, y) G_1(\dot{x}_l, \dot{x}_k) x_l + \sum_{k=1}^n G_1(\dot{x}_k, y) G_0(u, \dot{x}_k) u \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{y} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n G_1(\dot{x}_l, \dot{x}_k) G_1(\dot{x}_k, y) x_l + \sum_{k=1}^n G_1(u, \dot{x}_k) G_1(\dot{x}_k, y) u \quad (\text{B.6})$$

pero

$$\sum_{k=1}^n G_1(\dot{x}_l, \dot{x}_k) G_1(\dot{x}_k, y) = G_2(\dot{x}_l, y) \quad (\text{B.7})$$

y;

$$\sum_{k=1}^n G_0(u, \dot{x}_k) G_1(\dot{x}_k, y) = G_1(u, y) \quad (\text{B.8})$$

porque como se vio en la Sección 4.2, $G_k(v_i, v_j)$ es la suma de todos os términos estáticos en la suma de todas las ganancias de todas las trayectorias causales que van desde v_i a v_j . Entonces,

$$y = \sum_{l=1}^n G_2(\dot{x}_l, y) + G_1(u, y)u \quad (\text{B.9})$$

Es importante resaltar que para obtener la ganancia $G_2(\dot{x}_l, y)$ de la trayectoria causal de longitud 2 entre x_l y y es posible que sea necesario ir a travez de una misma variable 2 veces, entonces una trayectoria cuasal puede contener algun lazo y podría corresponder al caso donde en la doble sumatoria los índices l y k sean iguales.

Si no hay una trayectoria de longitud l desde u hasta y entonces,

$$G_1(u, y) = 0 \quad \text{y} \quad y = G_2(\dot{x}_l, y)x_l \quad (\text{B.10})$$

entonces realizando una derivaci[on sucesiva, el r th orden derivativo de y esta dado por.

$$y^{(r)} = \sum_{l=1}^n G_{r+1}(\dot{x}_l, y)x_l \quad (\text{B.11})$$

para $r < \alpha$ y;

$$y^{(\alpha)} = \sum_{l=1}^n G_{\alpha+1}(\dot{x}_l, y)x_l + G_{\alpha}(u, y)u. \quad (\text{B.12})$$

Apéndice C

Artículos Publicados

En esta sección se presenta un artículo derivado del presente trabajo de tesis. (Ya ha sido enviado y se espera notificación para el día 30 de Julio).

Model Inversion of a Two Degrees of Freedom Linearized PUMA from Bicausal Bond Graphs

Gilberto Gonzalez-A and Ignacio Rodriguez-A
 Faculty of Electrical Engineering, University of Michoacan
 Mexico
 Email: gilmichga@yahoo.com.mx

Abstract—A bond graph model of a two degrees of freedom PUMA is described. System inversion gives the system input required to generate a given system output. In order to get the system inversion of the PUMA manipulator, a linearization of the nonlinear bond graph is obtained. Hence, the bicausality of the linearized bond graph of the PUMA manipulator is applied. Thus, the bicausal bond graph provide a systematic way of generating the equations of the system inversion. Simulation results to verify the calculated input for a given output are shown.

Keywords: Bond graph, system inversion, bicausality, PUMA manipulator.

I. INTRODUCTION

Robotics is a field of modern technology that crosses traditional engineering boundaries. Understanding the complexity of robots and their applications requires knowledge of electrical engineering, mechanical engineering, industrial engineering, computer science and mathematics [1].

One well-known approach designed to deal with multi-domain engineering problems is the bond graph method elucidated by Henry Paynter. The application of Paynter's bond graph method began with the works of Karnopp, Rosenberg, Thoma and others. Over the last 40 years there have been numerous publications dealing with the theory and application of bond graphs in different branches of engineering [2].

The bond graph technics are useful and important tools for physical system modelling [3]. They are based on power representation and enables the description of the system through energy storage and dissipative elements [4], [5].

The robotics modelling using bond graphs has extensively been developed. In [3] proposes a general methodology to model mechanical systems with bond graphs. In [6] presents an interesting procedure to construct bond graphs of two and three dimensional robotic manipulators. The three-axis platform simulation using bond graph models and Lagrange's equations is compared in [7].

Also, several papers have been published to construct bond graphs from the manipulators. In [8] gives a library of three-dimensional joints using bond graph to obtain the multi-body system. Finally, [9] shows the multi-body approach in bond graph to write the algebraic constraint equations can be used to describe mechanical systems.

System inversion is of significant importance in systems and control theory as it appears explicitly or implicitly in a

variety of problems such as, for example, decoupling, model matching, perfect output control or parameters sizing [10].

Classical inversion methods based on mathematical models tend to obscure the structural features and the physical interpretation of inverse systems. In recent years, bond graph model based inversion has attracted a lot of interest due to the bicausality concept that provides a convenient way to represent inverse systems [11].

The main advantage for using bond graphs for such study is the graphical representation of the physical structure of the system as well as the possible automated derivation of various equations (or mathematical) models that can be associated with a specific problem of interest through the causality assignment. This bond graph approach therefore enables a physical interpretation of inverse dynamics based on structural considerations [12].

Section II describes the basic elements of the bond graph modelling. Section III summarizes the concept of the bicausality applied to bond graphs. Bicausality used to get systems inversion is proposed in section IV. The given methodology to a two degrees of freedom PUMA manipulator modelled by a linearized bond graph to determine the control inputs for proposed outputs via bicausality is applied in section V. Finally, our conclusions are given in section VI.

II. MODELLING IN BOND GRAPH

The symbolic form of a Bond Graph in Integral causality assignment (BGI) of a system is shown in Fig. 1 [4], [5].

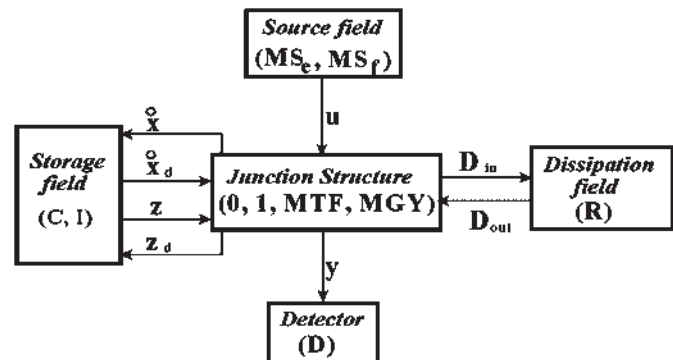


Fig. 1. Key vectors of a BGI.

In Fig. 1, (MS_e, MS_f) , (I, C) and (R) denote the source, the energy storage and the energy dissipation fields, respec-

tively, and $(0, 1, TF, GY)$ the junction structure with transformers, MTF , and gyrators, MGY .

The state $x(t) \in \mathbb{R}^n$ and $x_d(t) \in \mathbb{R}^m$ are composed of energy variables $p(t)$ and $q(t)$ associated with I and C elements in integral causality and derivative causality, respectively, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ denotes the plant input, $z(t) \in \mathbb{R}^n$ the co-energy vector, $z_d(t) \in \mathbb{R}^m$ the derivative co-energy and $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ and $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$ are a mixture of $e(t)$ and $f(t)$ showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure [4], [5]. The feedback between storage field and junction structure shows that MTF or/and MGY by using an active bond are modulated.

The relations of the storage and dissipation fields are,

$$z(t) = Fx(t) \quad (1)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (3)$$

The relations of the junction structure are,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

The entries of S take values inside the set $\{0, \pm 1, \pm k_t, \pm k_g\}$ where k_t and k_g are transformer and gyrator modules; S_{11} and S_{22} are square skew-symmetric matrices and S_{12} and S_{21} are matrices each other negative transpose. The state space equations are [4], [5],

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t) \quad (5)$$

$$y(t) = C(x)x(t) + Du(t) \quad (6)$$

where

$$EA(x) = [S_{11} + S_{12}MS_{21} + S_{14}(F_d)^{-1} \frac{dS_{31}}{dt} F] \quad (7)$$

$$EB(x) = S_{13} + S_{12}MS_{23} \quad (8)$$

$$C(x) = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (9)$$

$$D(x) = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (10)$$

being

$$M = (I - LS_{22})^{-1} L_i \quad (11)$$

$$E = I - S_{14}(F_d)^{-1} S_{31}F \quad (12)$$

Next section describes bicausal bond graphs to analyze system inversion.

III. THE CONCEPT OF THE BICAUSAL BOND GRAPH

The acausal bond graph model of a dynamic system represents the energy transfer and the constraint equations in the system independently of assignment statements that can be derived from those equations.

The causality expresses in which way constitutive relations of elements and relations among variables of the junction

structure should be written for model analysis proposes or derivation of a simulation model. The causal stroke used in conventional bond graphs basically supposes that at each bond, if the effort (resp. flow) is imposed at the other end of the bond or in other words a variable imposed as input implies its conjugate variable as output.

From a computational point of view, the above so-called ‘unicausal’ stroke does not determine all forms of assignment statements that can be derived from the constraint equations of a bond.

The concept of ‘bicausal’ bond introduced by Gwathrop [11] overcomes these restrictions and then enlarges the possibilities of computation models that can be derived from a bond graph.

The causal stroke in bicausal bond is seen as half strokes each associated to an effort and a flow variable that can be imposed independently at each end of the bond. Causal half strokes indicate the fixed or known variables of the bond and so determine the right hand side of the assignments form.

For an illustration, Table 1 [12] presents assignment statements associated to unicausal and bicausal strokes for a bond for which the known acausal constraint equations are: $e_1 - e_2 = 0$; $f_1 - f_2 = 0$.

Table 1. Causality and assignment statements for a bond.


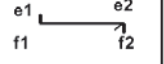

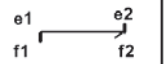
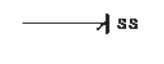

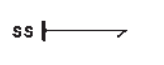
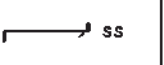
Unicausal Stroke	Assignment Statements	Bicausal Stroke	Assignment Statements
	$e_2 := e_1$ $f_1 := f_2$		$e_1 := e_2$ $f_1 := f_2$
	$e_1 := e_2$ $f_2 := f_1$		$e_2 := e_1$ $f_2 := f_1$

Table 2. Source-sensor causality assignment.

Unicausal Stroke	SS Element Type	Bicausal Stroke	SS Element Type
	Flow source/ effort sensor		Flow source/ effort source
	Effort source/ flow sensor		Flow sensor/ effort sensor

System inversion is an interesting analysis to know an input considering a given output, this is described in the next section by using bicausality property of the bond graphs.

IV. THE USE OF THE BICAUSALITY CONCEPT FOR SYSTEM INVERSION

An inverse model of the system are obtained by applying differential and algebraic operations to the state equations of the original system.

The computational capabilities of the bicausality concept presented above make it be an adequate tool for solving the problem of inverse systems mentioned in [11]. The bicausality allows fixing or imposing at the same time a variable and its conjugate as bicausal bonds decouple the effort and flow causalities.

In the context of the inversion problem, imposing the output variable without modifying the energy structure (or constraint equations) of the system can be carried out with an SS element having a flow source/effort source causality (Table 2). Then, the output to be imposed plays the role of input variable of that SS element while its conjugate is set to a null value leading to a null power flow on that bond. Similarly, the input variable of the original system to be determined will be detected on another SS element with a flow sensor/effort sensor causality. Table 3 shows the bicausality propagation carried out throughout junction structure of the bond graph.

Table 3. Causality stroke and assignment statements for bond graph element.

Unicausal Stroke	Assignment Statements	Bicausal Stroke	Assignment Statements
	$f:=e/R$ $e:=R*f$		$R:=e/f$
	$f:=p/I$ $p:=I*f$		$I:=p/f$
	$q:=C*e$ $e:=q/C$		$C:=q/e$
	$e2:=e1/n$ $f1:=f2/n$		$e1:=n*e2$ $f1:=f2/n$
	$e1:=n*e2$ $f2:=n*f1$		$e2:=e1/n$ $f2:=n*f1$
	$f1:=e2/r$ $f2:=e1/r$		$e1:=r*f2$ $f1:=e2/r$
	$e1:=r*f2$ $e2:=r*f1$		$e2:=r*f1$ $f2:=e1/r$
	$e2:=e1$ $e3:=e1$ $f1:=f2+f3$		$e2:=e1$ $e3:=e1$ $f3:=f1-f2$
	$f2:=f1$ $f3:=f1$ $e1:=e2+e3$		$f2:=f1$ $f3:=f1$ $e3:=e1-e2$

Some concepts used to present the bond graph-based procedure for system inversion are introduced in this section through the following definitions [12].

Definition 1. The length L_k of a causal path from a variable v_i to a variable v_j of a bond graph is defined as the number of integrators or storage elements in integral causality encountered on the causal path when following the causal path from v_i to v_j .

Proposition 1. (Structural invertibility condition) A linear system modelled by bond graph is invertible if there is at least one causal path between the input variable and the output variable of the system.

In the next section, a bond graph model of a PUMA manipulator and system inversion are proposed.

V. ANALYSIS OF A TWO DEGREES OF FREEDOM PUMA WITH A BOND GRAPH APPROACH

A simple two-degrees of freedom (DOF) manipulator but three-dimensional appears in Fig. 2. This can be regarded as a simplified PUMA with the elbow and wrist locked at appropriate angles and zero joint offset.

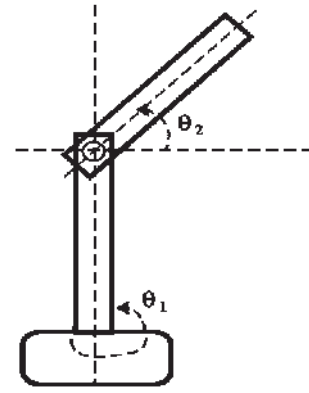


Fig. 2. Scheme of 2 DOF PUMA.

The second link, although moving in three dimensions, rotates about a fixed point: joint 2. Its dynamics are therefore determined by the Euler ring. The first link is a simple one-dimensional rotating inertia coupled to the second link by a joint [6]. The angular velocities of the second link about the x and y axes w_x and w_y are entirely determined by that of the first link w_1 ,

$$w_x = w_1 \cdot \sin(\theta_2) \quad (13)$$

$$w_y = w_1 \cdot \cos(\theta_2) \quad (14)$$

The corresponding bond graph with integral causality assignment of the PUMA manipulator is shown in Fig. 3 with notation in Table 4.

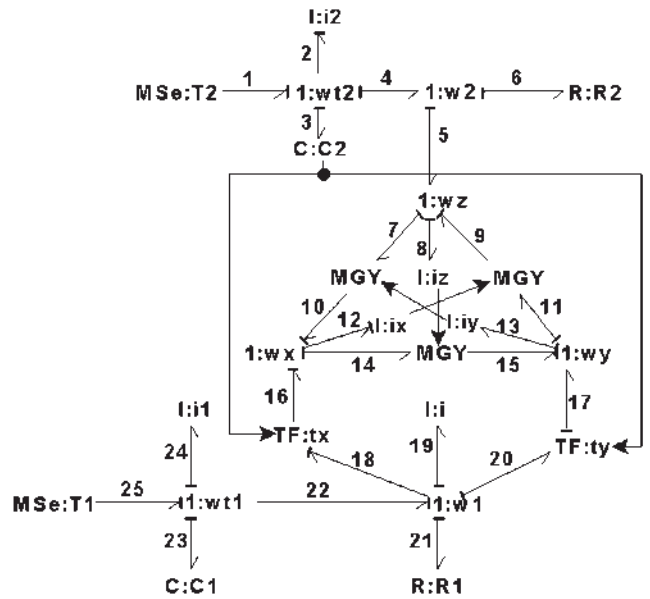


Fig. 3. Bond graph of the PUMA manipulator.

Note that the bond graph contains four storage element in an integral causality assignment, that is independent linearly state variables.

Table 4. Bond graph labels.

Label	Component type	Associated physical variable
wt1, wt2	Common velocity junctions	Joint angular velocities $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$
wx, wy, wz	Common velocity junctions	Angular velocities w_x, w_y, w_z
i1	Inertia component	Inertia of link 1
ix, iy, iz	Inertia components	Principle angular momenta h_x, h_y, h_z
gx, gy, gz	Gyrators	Coupling due to rotating coordinate system
T1, T2	Sources	Torques T1, T2
tx, ty	Transformers	Transformations of the second link
C	Compliance component	Provides the joint angle θ_2

The key vectors of the nonlinear bond graph are,

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_{24} \\ q_3 \\ q_{23} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{24} \\ f_3 \\ f_{23} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \\ e_3 \\ e_{23} \end{bmatrix}$$

$$x_d = \begin{bmatrix} p_8 \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{19} \end{bmatrix}; \dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{19} \end{bmatrix}; z_d = \begin{bmatrix} f_8 \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{19} \end{bmatrix}$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_6 \\ f_{21} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_6 \\ e_{21} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{25} \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_{23} \end{bmatrix}$$

the constitutive relations of the fields are

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{i_2}, \frac{1}{i_1}, \frac{1}{C_2}, \frac{1}{C_1} \right\}$$

$$F_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{i_z}, \frac{1}{i_x}, \frac{1}{i_y}, \frac{1}{i} \right\}$$

and the junction structure matrices are

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -h_1 & -1 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{14} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(q_3) & -\cos(q_3) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$S_{22} = S_{23} = 0; S_{21} = -S_{12}^T; S_{31} = -S_{14}^T$$

where $h_1 = p_{13} \sin(q_3) - p_{12} \cos(q_3)$.

From

$$E = \begin{bmatrix} 1 + \frac{i_z}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

where $h_2 = \frac{1}{i_1} [i_x \cos^2(q_3) + i_y \sin^2(q_3) + i]$.

$$EA(x) = \begin{bmatrix} \frac{-R_2}{i_2} & \frac{-h_1}{i_1} & \frac{-1}{C_2} & 0 \\ \frac{h_1}{i_2} & \frac{-R_1}{i_1} & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EB(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

It is an unfortunate fact that most physical systems encountered in practice are not linear. It is almost always the case that when one encounters a linear model for a physical system, it is an idealized or simplified version of a more accurate but much more complicated nonlinear model. In order to create a linear model of the PUMA manipulator represented in bond graph from the nonlinear bond graph shown in figure 3, we introduce a linearized bond graph of the manipulator in figure 4 [13].

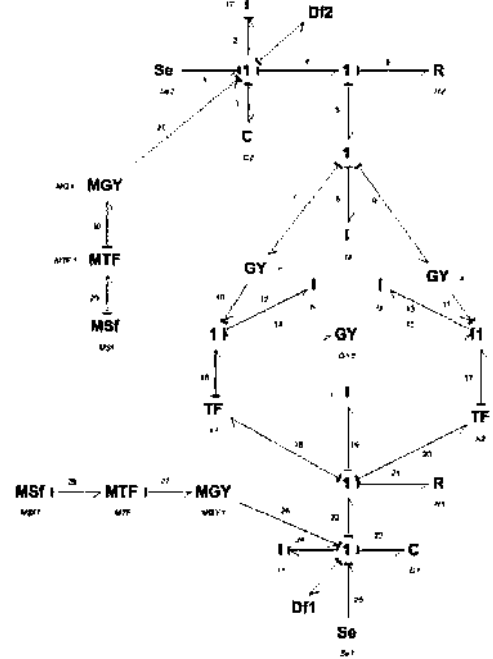


Fig. 4. Linearized bond graph.

In order to verify that linearized bond graph represents the linearization of the nonlinear manipulator, the junction structure matrix of the linearized bond graph or causal paths to obtain the state variables description can be used. The space state representation of a linearized system is

$$E_\delta \dot{x}_\delta(t) = A_\delta x_\delta(t) + B_\delta u_\delta(t)$$

Hence, the state variables matrices are

$$E_\delta = \text{diag} \left\{ 1 + \frac{i_z}{i_2}, 1 + \frac{i_x + i}{i_1}, 1, 1 \right\}$$

$$A_\delta = \begin{bmatrix} \frac{-R_2}{i_2} & \frac{-\tilde{h}_1}{i_1} & \frac{-1}{C_2} - \tilde{h}_3 f_{29} & 0 \\ \frac{-\tilde{h}_1}{i_2} & \frac{-R_1}{i_1} & \tilde{h}_3 f_{29} & \frac{-1}{C_1} \\ \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

where $\tilde{h}_1 = h_1|_{\tilde{x}(t)}$, $\tilde{h}_3 = h_3|_{\tilde{x}(t)}$ and $h_3 = p_{13} \cos(q_3) + p_{12} \sin(q_3)$.

By obtaining the direct paths, *i.e.*, causal paths from input to output, we have

$$\begin{aligned} u_1 &\longrightarrow y_1 : e_{25} - e_{24} - f_{24} \\ u_2 &\longrightarrow y_2 : e_1 - e_2 - f_2 \end{aligned}$$

then these causal paths are of length 1 and the structural invertibility condition is verified.

Now, bicausality to the linearized bond graph of the PUMA manipulator is applied to get a system inversion. Fig. 5 shows the bicausal bond graph of the PUMA manipulator.

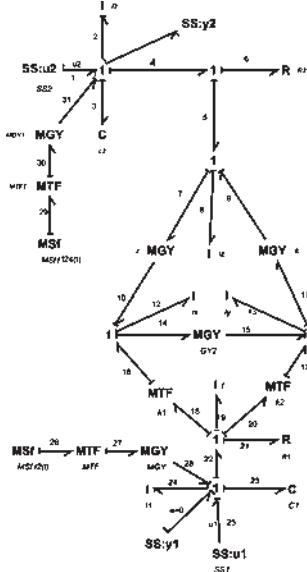


Fig. 5. Bicausal bond graph of the manipulator.

The generalized state equations of the inverse model derived from the inverse bond graph in Fig. 5 can be written in a descriptor form or alternatively in the following generalized state equations form:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + G(p)y(t) \\ u(t) &= Hz(t) + J(p)y(t) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} z^T(t) &= [q_{C1} \quad q_{C2}] ; F = 0 \\ G(p) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

and the causal paths are used to get H and $J(p)$. Then,

Causal path $y_2 \longrightarrow u_2$	Gain
$f_2 - f_4 - f_6 - e_6 - e_4 - e_1$	R_2
$f_2 - f_3 - e_3 - e_1$	$1/C_2$
$f_2 - f_4 - f_5 - f_8 - e_8 - e_5 - e_4 - e_1$	I_z
$f_2 - f_2' - e_2' - e_1$	I_2
Causal path $y_1 \longrightarrow u_1$	Gain
$f_{23} - f_{22} - f_{21} - e_{21} - e_{22} - e_{25}$	R_1
$f_{23} - f_{24} - e_{24} - e_{25}$	$1/C_1$
$f_{23} - f_{22} - f_{19} - e_{19} - e_{22} - e_{25}$	I_y
$f_{23} - f_{23}' - e_{23}' - e_{25}$	I_1

Causal path $y_1 \longrightarrow u_2$	Gain
$f_{23} - f_{22} - f_{20} - f_{17} - e_9 - e_5 - e_4 - e_1$	k_2s
$f_{23} - f_{22} - f_{18} - f_{16} - f_{10} - e_7 - e_5 - e_4 - e_1$	k_1r

Causal path $y_2 \longrightarrow u_1$	Gain
$f_2 - f_4 - f_5 - f_9 - e_{11} - e_{17} - e_{20} - e_{22} - e_{25}$	k_2s
$f_2 - f_9 - f_5 - f_7 - e_{10} - e_{16} - e_{18} - e_{22} - e_{25}$	k_1r

Thus, the input of the system inversion is given by

$$u(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

where

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \left(\frac{1}{C_1} + R_1 + I_y \right) + \frac{dI_1}{dt} \\ \alpha_{12} &= k_1r + k_2s \\ \alpha_{21} &= k_1r - k_2s \\ \alpha_{22} &= \left(\frac{1}{C_2} + R_2 + I_z \right) + \frac{dI_2}{dt} \end{aligned}$$

In order to verify the system inversion of the manipulator, the 20-SIM software to simulate linearized bond graph with a calculated control input is used. Figure 6 shows the bond graph diagram on 20-SIM platform.

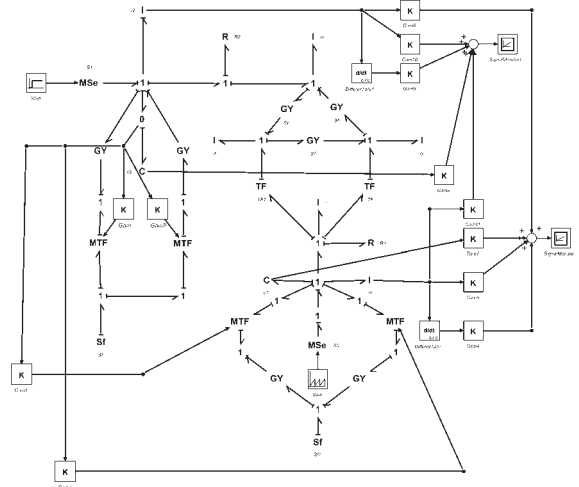


Fig. 6. Bond graph of the manipulator on 20-SIM.

The numerical parameters of the bond graph are: $C_1 = 0.1 \text{ rad/N} - m$, $C_2 = 0.2 \text{ rad/N} - m$, $I_1 = 0.1N - m - s^2$, $I_2 = 0.2N - m - s^2$, $I = I_z = I_x = I_y = 1N - m - s^2$, $R_1 = 4N - s/m$ and $R_2 = 3N - s/m$.

The first case is to determine the necessary inputs for step outputs and Fig. 7 shows the simulation results.

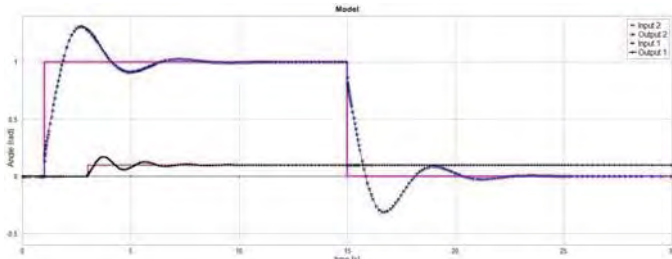


Fig. 7. Simulation of the system inversion for step outputs.

The second case is to prove the system inversion for waves square outputs, the effectiveness of the methodology is shown in Fig. 8.

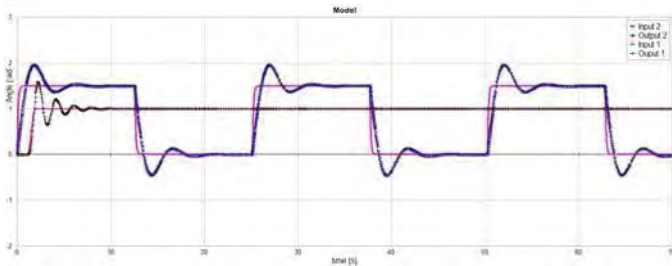


Fig. 8. Simulation of the system inversion for waves square.

Fig. 9 shows the final proof of the system inversion using waves saw outputs and the necessary inputs are obtained.

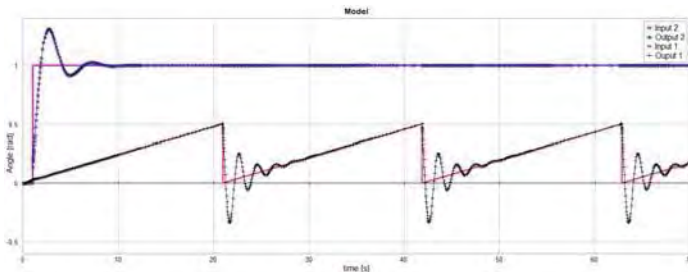


Fig. 9. Simulation of the system inversion.

It is important to consider the bond graph bicausals allows to determine system inversion state estimation and parameter estimation [11].

VI. CONCLUSIONS

The bond graph representation and the concept of bicausality are used to obtain the system inversion of a PUMA manipulator. Hence, the nonlinear bond graph of the two degrees of freedom PUMA is linearized. Then, the linearized bond graph bicausal is obtained. Thus, the system input to get a given system output of the linearized PUMA is determined in a bond graph approach.

REFERENCES

- [1] Mark W. Spong and M. Vidyasagar, "Robot Dynamics and Control", John Wiley & Sons, 1989.
- [2] V. Damic and J. Montgomery, "Mechatronics by Bond Graphs", Springer, 2003.

- [3] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg, "System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems", John Wiley & Sons, 2000.
- [4] P. E. Wellstead, "Physical System Modelling", Academic Press, London, 1979.
- [5] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70, 1991.
- [6] Peter Gawthrop and L. Smith, "Metamodelling", Prentice-Hall, 1996.
- [7] M. J. L. Tiernejo, J. J. Dixhoorn, "Three Axis Platform Simulation: Bond Graph and Lagrangian Approach", Journal of the Franklin Institute, Vol. 308, No. 1/2, pp. 157-171, 1985.
- [8] A. Zeid, Ch. H. Chung, "Bond Graph Modelling of Multibody System: a Library of Three dimensional Joints", Journal of the Franklin Institute, Vol. 329, No. 4, pp. 605-636, 1992.
- [9] D. Karnopp, "Understanding Multibody Dynamics using Bond Graph Representations", Journal of the Franklin Institute, Vol. 334B, No. 4, pp. 631-642, 1997.
- [10] L. M. Silverman, "Inversion of multivariable linear systems", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-14, No. 3, pp. 270-276, June, 1969.
- [11] P. J. Gawthrop, "Bicausal bond graphs", in Proceedings of the 1995 International Conference on Bond Graph Modelling and Simulation: ICBGM'95, pp. 83-88, 1995.
- [12] R. Fotsu Ngwompo, S. Scavarda and D. Thomasset, "Inversion of Linear Time-invariant SISO Systems Modelled by Bond Graph", Journal of the Franklin Institute, Vol. 333(B), No. 2, pp. 157-174, 1996.
- [13] Gilberto Gonzalez-A and R. Galindo, "A Linearization Procedure for a Class of Nonlinear Systems Based on Bond Graph", Proceedings of the International Mediterranean Modeling Multiconference, pp. 77-82, 2005.